



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

**LA INTERPRETACIÓN DEL SIGNO IGUAL
COMO UN OBSTÁCULO DIDÁCTICO**

TESIS

Para obtener el grado de
Maestría en Ciencias Matemáticas y su Didáctica

PRESENTA

Alberto García García

DIRECTOR

Dra. María Guadalupe Simón Ramos

Comité Tutorial

Dra. María Guadalupe Simón Ramos

Dr. Carlos Arturo Soto Campos

Dr. Marcos Campos Nava

Dra. Anna Tarasenko

Mineral de la Reforma, Hidalgo, México, Mayo 2026



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

School of Engineering and Basic Sciences

Área Académica de Matemáticas y Física

Mineral de la Reforma, Hgo., a 28 de mayo de 2026

Número de control: ICBI-AAMyF/2479/2026

Asunto: Autorización de impresión de tesis.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UA EH

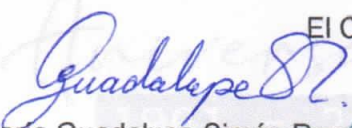
El Comité Tutorial de la tesis titulada "La interpretación del signo igual como un obstáculo didáctico", realizada por el sustentante Alberto García García, con número de cuenta 507094, perteneciente a la Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica, una vez que se ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el Artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente:

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

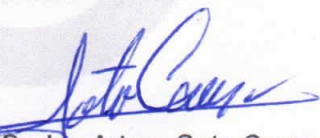
Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

El Comité Tutorial


Dra. María Guadalupe Simón Ramos
Directora


Dra. Anna Tarasenko
Miembro del comité




Dr. Carlos Arturo Soto Campos
Miembro del comité


Dr. Marcos Campos Nava
Miembro del comité

MGRS/EPC

"Amor, Orden y Progreso"



Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo
Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo,
México. C.P 42184
Teléfono: 52 (771) 71 720 00 Ext. 40124, 40119
aamyf_icbi@uaeh.edu.mx

uaeh.edu.mx

AGRADECIMIENTOS Y DEDICATORIAS

Dedicado a mi familia por ser lo más hermoso, los amo con toda mi alma y corazón, a mi madre y padre por su amor, cariño y por ser un ejemplo incondicional y a mis hermanos por ser lo más valioso que la vida me ha dado.

Agradezco a.

A mi familia: por su cariño y apoyo incondicional.

A mis amigos: por ser una segunda familia.

A mis compañeros de la maestría: por su apoyo y colaboración.

A mi asesor de tesis: por su compromiso y dirección.

A la institución académica: por otorgarme una oportunidad de aprendizaje.

Al cuerpo académico de la Maestría profesores y coordinador: por sus enseñanzas y seguimiento.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT): por el apoyo económico a través de la beca de posgrado.

A los estudiantes: por su honestidad y participación.

A los Docentes: por sus aportes y reflexiones.

A la vida: por darme la capacidad de aprender cada día.

En memoria: a mis abuelos.

¡GRACIAS A TODOS!

CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS Y DEDICATORIAS	II
RESUMEN	1
ABSTRACT.....	2
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	3
1.1 Motivos de la investigación.....	3
1.2 Revisión de literatura	5
1.2.1 Revistas especializadas.....	6
1.2.2 Libros especializados	23
1.2.3 Memorias de congresos	27
1.2.4 Tesis de posgrado	28
1.2.5 Conclusiones de la Revisión de Literatura.....	34
1.3 Planteamiento del problema	35
1.4 Objetivo.....	36
1.4.1 Objetivos específicos.....	36
1.5 Justificación	37
CAPÍTULO 2. MARCO DE INVESTIGACIÓN	39
¿Qué es un marco de investigación?.....	39
2.1 Tipos de marcos de investigación.....	39
2.2 Elementos de un marco conceptual	40
2.2.1 Dimensión ontológica.....	40
2.2.2 Dimensión Epistemológica.....	44
2.2.3 Dimensión Didáctica	46
2.3 Marco Conceptual	48
2.3.1 Obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas.....	48
2.3.2 Teoría de Situaciones Didácticas (TSD).....	50
2.3.3 La ingeniería didáctica	52
2.3.3.1 Fases de la ingeniería didáctica	53
2.3.4 Transición de la aritmética al álgebra	55
2.3.5 El álgebra escolar	56
2.3.6 Usos del signo igual en el álgebra	56
2.3.7 Propiedades del signo igual como relación de equivalencia	57
2.3.8 Propiedades de la adición y el producto del signo igual	57
2.3.9 Reflexión Docente.....	58
2.3.10 Reflexión sobre el proceso de enseñanza de las matemáticas en el aula	59
CAPÍTULO 3 METODOLOGÍA.....	61

3.1 Introducción	61
3.2 Población de estudio.....	61
3.3 Fase 1: Análisis preliminares.....	62
3.4 Fase 2: Concepción y análisis a priori	67
3.4.1 Análisis del programa de estudios	67
3.4.2 Justificación del Instrumento de investigación	73
3.5 Fase 3 Experimentación.	81
3.6 Taller Reflexivo	81
3.7 Categorías de Análisis.....	83
CAPÍTULO 4 ANÁLISIS DE RESULTADOS	85
4.1 Análisis del momento 1: Exploración.....	85
4.1.1 Actividad #1: Nociones del significado	85
4.1.2 Actividad #2: Usos del signo igual	88
4.2 Análisis del momento 2: Ampliación	95
4.3 Análisis del momento 3: Transición de la aritmética al álgebra	101
4.3.1 Actividad 1: Expresiones equivalentes	102
4.3.2 Problema 1: Situaciones de la vida cotidiana.....	105
4.3.2 Problema 2: Caso b) Resolución de una Ecuación.....	107
4.4 Problema 3: Comprensión de una identidad algebraica	111
4.5 Actividad 2: Desarrollo de expresiones equivalentes	113
4.6 Reflexiones del Análisis de Respuestas de los Estudiantes	115
4.7 Análisis del taller reflexivo	116
4.7.1 Categoría 1. Nociones del Significado.....	117
4.7.1.1 Categoría 1.1. Uso Adecuado del Lenguaje y la Práctica	120
4.7.2 Categoría 2. Atención y Concientización de los Actos	127
4.7.3 Categoría 3. Diversidad de Solución en los Procesos	132
4.7.4 Categoría 4. Reflexión sobre el obstáculo	135
4.8 Reflexiones Finales de los docentes, Momento 4.....	140
4.9 Reflexión Global	142
4.10 Discusión: Desafíos en la comprensión del signo igual.....	144
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y APORTES DE LA INVESTIGACIÓN	146
5.1 Conclusiones	146
5.2 Aportes de la investigación	151
BIBLIOGRAFÍA	153
ANEXO 1. Instrumento de Investigación.....	III
ANEXO 2. Ficha de impartición del taller	VII

RESUMEN

El presente trabajo corresponde a una tesis de maestría cuyo propósito es analizar y concientizar al profesorado sobre la enseñanza y comprensión del signo igual como relación de equivalencia. El estudio incluyó las bases de la ingeniería didáctica y la indagación mediante un instrumento de investigación con cuatro grupos de estudiantes de nivel secundaria, así como con docentes de nivel bachillerato a través de un taller reflexivo en la región de Pachuca, Hidalgo.

La revisión bibliográfica permitió identificar que las dificultades en la interpretación del signo igual han sido caracterizadas como obstáculos didácticos, derivados de la enseñanza recibida en la aritmética. Diversos estudios señalan que los estudiantes suelen asociar el uso del signo igual como indicador de un resultado, en consecuencia, manifiestan una lectura unidireccional de las igualdades numéricas y métodos de solución centrados en la realización de operaciones, lo cual condiciona la construcción de su significado algebraico.

A partir de las producciones de los estudiantes se evidenció la persistencia de dificultades en la transición de la aritmética al álgebra, en particular desde la comprensión del signo igual como operador hasta la resolución de problemas mediante estrategias inconsistentes que no contribuyen a la concepción de equivalencia. Por otra parte, se observó que el aprendizaje basado en igualdades que propician el significado de equivalencia numérica y la contextualización de situaciones reales favorecen a la resignificación algebraica del signo igual.

En síntesis, la impartición del taller y la recopilación de respuestas contribuyó a la confrontación y reflexión docente acerca de la necesidad de comunicar y promover el signo igual en términos de equilibrio e incorporar metodologías didácticas que enriquezcan su concepción, reconociendo sus propiedades, así como su papel fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

ABSTRACT

This project is a master's thesis whose purpose is to analyze and raise teachers' awareness regarding the teaching and understanding of the equals sign as an equivalence relation. The research was based on the phases of didactic engineering and explored the meanings expressed by students from four secondary school groups through the application of a research instrument and conducting a reflective workshop with high school teachers in the Pachuca region of Hidalgo.

The literature review revealed learning difficulties that have been classified as didactic obstacles, generated through the teaching of arithmetic. Several studies have pointed out that students often associate the equals sign with indicating a result; which leads to misconceptions about numerical equalities and problem-solving processes focused on the performing operations, thereby hindering the construction of algebraic meaning.

The students' responses revealed the persistence of difficulties in the transition from arithmetic to algebraic knowledge; in particular, these difficulties were reflected in the interpretation of the equals sign as an operator as well as in the use of inconsistent problem-solving strategies that do not contribute to the conception of equivalence. On the other hand, it was shown that learning based on equalities, which encourages the meaning of numerical equivalence and the contextualization of real situations, improves students' understanding through the algebraic re-signification of the equals sign.

Overall, the workshop sessions and the findings contributed to reflection and confrontation regarding the need to communicate and promote the meaning of the equals sign as an equivalence relation, as well as to incorporate didactic methodologies that enrich this conception and recognize its fundamental role in the teaching and learning of mathematics.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1 Motivos de la investigación

En el aula los docentes enfrentan diversas dificultades asociadas a la interpretación que los estudiantes conciben de los conceptos matemáticos. Durante la clase, es común que ellos pregunten ¿Cuál es el resultado?, como una expectativa orientada a obtener una respuesta, en lugar de comprender la naturaleza del proceso matemático.

En este sentido, la didáctica de las matemáticas se constituye como una disciplina que estudia las formas en que los estudiantes construyen conocimiento. En suma, se analizan los efectos de la enseñanza. En este contexto, una de las problemáticas más frecuentes es la reproducción de estrategias y actividades centradas exclusivamente en obtener una solución, junto con la práctica exhaustiva de la memorización de algoritmos y fórmulas. Esta situación suele replicarse tanto en docentes con amplia experiencia como en profesores en formación (Osorio y Moreno, 2022).

Con base a los trabajos de Molina (2006), Kieran (1981), Bachelard (1938) y Brousseau (1983), se establecieron dos ejes centrales para este estudio: la interpretación del signo igual y el análisis de las dificultades en el aprendizaje, particularmente aquellas que se clasifican como obstáculos didácticos.

Diversos investigadores Burgell y Ochoviet (2015) y Parodi et al. (2017) han documentado que los estudiantes suelen asociar el uso signo igual con la idea de identificar un “resultado”. En consecuencia, desarrollan una lectura unidireccional de las igualdades numéricas, así como de las expresiones algebraicas (véase tabla 1). Esta interpretación obstaculiza el aprendizaje y genera un significado inadecuado de los procesos matemáticos.

Tabla 1. Ejemplo de expresiones comunes en la aritmética

$5 + 3 = 8$		
Lado izquierdo como primer miembro “operación”	Signo igual	Lado derecho como segundo miembro “resultado”
$5 + 3$	$=$	8

En un primer momento, dentro de la formación del conocimiento aritmético, el aprendizaje de los estudiantes suele implementarse mediante la resolución de operaciones, sin reconocer su papel fundamental, significado, o bien sus propiedades. Estas nociones se ven reflejadas en las actividades y material didáctico (libros de texto y ejercicios) que promueven una estructura estandarizada de las igualdades numéricas, ejercicios del tipo: $a + b = c$, enseñanza que conduce a un enfoque restringido como *operación = resultado*, en lugar de promover un sentido bidireccional del signo igual como equivalencia, presente en expresiones como $a + b = c + d$, que enriquecen la comprensión y fomentan una articulación con base al constructo *expresión = expresión*.

En un segundo aspecto, dentro la enseñanza del álgebra se introducen procedimientos para la resolución de ecuaciones, mediante estrategias efectivas y simplificadas, sin embargo, algunos de estos métodos de solución presentan inconsistencias y, por lo tanto, limitan la construcción del conocimiento apropiado, tal es el caso de metodologías basadas en la transposición de términos, las cuales pueden entrar en conflicto con la simetría y transitividad de la igualdad. En relación, los estudiantes suelen adoptar acciones como “trasladar términos de un miembro a otro de la igualdad” sin una comprensión óptima de las transformaciones equivalentes que sustentan dichos procedimientos.

Al respecto, la tabla 2, ejemplifica dos métodos habituales que manifiestan los estudiantes en la resolución de ecuaciones: por un lado, se presenta la resolución mediante un proceso operativo, por otro lado, se muestra un proceso fundamentado en el balance y equilibrio de la ecuación.

Tabla 2. Ejemplo de Transposición de términos

<i>Resuelve la ecuación</i>	<i>Solución por balance de la ecuación</i>
$3x + 5 = 14$	$3x + 5 = 14$
$3x + 5 = 14$ $3x = 14 - 5$ $x = \frac{9}{3}$ $x = 3$	$3x + 5 - 5 = 14 - 5$ $3x = 9$ $\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$ $x = 3$

Estos procedimientos evidencian la diferencia entre un carácter operativo y un pensamiento relacional; los hallazgos de diversas investigaciones sugieren que promover una comprensión profunda del signo igual favorece al desempeño estudiantil y facilita la transición del aprendizaje aritmético hacia el algebraico.

En esta línea, expertos en el estudio del álgebra, como Serres (2011), señalan que una de las principales dificultades en la construcción del conocimiento algebraico radica en la concepción inadecuada del signo igual. Esta dificultad se relaciona con la réplica de métodos y rutinas producto de la enseñanza recibida en la aritmética, lo que sitúa a los estudiantes en una zona de transición que condiciona el aprendizaje.

Con base a estos antecedentes, y con el propósito de contribuir al análisis de las dificultades asociadas a la interpretación del signo igual y su caracterización como obstáculo didáctico, se desarrolló el presente proyecto.

1.2 Revisión de literatura

La revisión de literatura es un componente fundamental de una investigación, en palabras de Sánchez y Molina (2012) señalan que las revisiones bibliográficas definen en gran medida la calidad de una investigación educativa. Al respecto, se realizó un proceso de búsqueda. Con base a la metodología ¿Qué se busca?, ¿Dónde buscar? y ¿Cómo buscar?

¿Qué se va a buscar?

Para emprender una búsqueda bibliográfica, resulta vital definir qué se busca, las palabras clave y el planteamiento del problema. En este caso la **interpretación del signo igual** y **obstáculos didácticos**. Cabe mencionar que términos como comprensión y concepción fueron de utilidad para completar la búsqueda de información.

¿Dónde buscar?

Las fuentes de información a las que se pueden recurrir para desarrollar una revisión bibliográfica son diversas. Estas fuentes varían dependiendo del tema a investigar, en términos de esta investigación se agruparon en cuatro categorías:

- Revistas especializadas
- Libros especializados

- Memorias de congresos
- Tesis de posgrado

En suma, se elaboró un cuadro de análisis descriptivo (*tabla*) en cada categoría. Donde se describen dos secciones: la primera corresponde la autoría, el año y el país, el segundo apartado corresponde al: Título, la fuente de información (revista, libro, memoria o tesis), la Metodología, las Características clave del documento (pregunta de investigación, objetivos y conceptos relevantes) y los aportes, resultados / conclusiones importantes para la investigación.

Tabla 3. *Ejemplo de las categorías descriptivas del documento.*

Autor (Año) País	I. Título II. Fuente de información (revista, libro, memoria o tesis) III. Metodología IV. Descripción del documento (pregunta de investigación, objetivos y conceptos clave). V. Aportes, Resultados / conclusiones
---------------------------------	---

1.2.1 Revistas especializadas

Las revistas especializadas en investigación en didáctica de las matemáticas deben ser una fuente de información básica para toda revisión bibliográfica. Existen revistas que por el impacto dentro de su área temática generan un gran interés para la búsqueda, en este caso revistas de educación matemática como: Revista Enseñanza de las Ciencias, Boletín de Educación Matemática Universal Estatal de São Paulo, Brasil. (Bolema), ZMD Mathematics Education. Springer Holanda, etc. Por mencionar algunas de las fuentes más relevantes consultadas en este trabajo. En la siguiente sección se describen los resultados y aportes específicos de los artículos revisados.

Kieran (1981), en su investigación, analizó los conceptos que atribuyen al uso del signo igual en estudiantes de enseñanza primaria. La autora describió que, para ellos, el símbolo “=” significa una acción de hacer algo, como un operador o como un indicador de resultado, en lugar de comprender en términos de una relación de equivalencia, la cual cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. En consecuencia, los estudiantes no logran interiorizar expresiones que no reflejen un orden que habitualmente adoptan, realizando los cálculos de un lado del signo igual y su consecución del otro lado obteniendo su “resultado”,

expresado literalmente con un solo término numérico. En otras palabras, los estudiantes desarrollan una lectura unidireccional de izquierda a derecha centrada en las operaciones, interpretación que condiciona que no le atribuyan significado a expresiones como: $a = a$; $a + b = c + d$; y $a = b + c$. La primera expresión es rechazada al no presentar operaciones, hecho que obstaculiza el identificar la propiedad reflexiva. En el segundo caso, el obstáculo se presenta cuando él o los estudiantes rechazan la presencia de operaciones en ambos miembros de la igualdad, dificultad que prevalece y obstruye la concepción de la propiedad simétrica. Por último, la dificultad de concebir un orden estricto, al no asimilar una lectura bidireccional, difiere en un rechazo al considerar un orden inverso, en este caso, el estudiante tiende a reacomodar la expresión para tratar de validar la expresión y concluir en $b + c = a$.

La autora agregó que en estudios realizados estudiantes entre 6 y 10 años presentaron dificultades para comprender expresiones como (por ejemplo, $4 + 5 = 3 + 6$), debido a la tendencia de expresar un único número, posterior al signo “=”. En conclusión, los estudiantes continuaron considerando al signo igual como un operador, en vez de una relación de equivalencia.

Finalmente, Kieran sostiene que en una etapa dentro de la enseñanza secundaria entre los 12 y 15 años muchos estudiantes se encuentran en un periodo de transición, entre la aritmética y el álgebra. Esta investigación expone la problemática de los significados que prevalecen y obstaculizan la interpretación del signo igual, separando aquellos que favorecen su concepción como equivalencia.

Essien y Setati (2006) exploraron los significados e interpretaciones que 17 estudiantes de octavo a noveno grado atribuyeron al signo igual en una secundaria de Johannesburgo, Sudáfrica. En la metodología se trabajó con actividades de completar y preguntas sobre el significado de igualdades. El estudio mostró que gran parte de los estudiantes interpretaron el significado de “hacer algo” en las igualdades propuestas, en lugar de concebir una equivalencia. Las conclusiones de este estudio resaltan que una de las causas de la interpretación de los estudiantes proviene de la relación entre el lenguaje verbal y el conocimiento matemático recibido.

Molina et al. (2009), la revisión de este artículo dejó al descubierto una discusión relevante en la interpretación del signo igual con estudiantes de educación primaria, se mencionó que los estudiantes que participaron en este estudio manifestaron varios significados, algunos de ellos se pueden encontrar implícitos en libros y materiales didácticos. Los investigadores caracterizaron al menos once significados del signo igual: (1. Propuesta de actividad, 2. Como operador, 3. Separador de operaciones, 4. Expresión de una acción, 5. Expresión de una equivalencia condicional, 6. Expresión de una equivalencia, 7. Definición de un objeto matemático, 8. Expresión de una relación funcional o de dependencia, 9. Indicador de cierta conexión o correspondencia, 10. Aproximación y 11. Asignación de un valor numérico). La investigación clasificó estos significados en comprensión operacional y comprensión relacional. Basados en los resultados, los estudiantes atribuyeron significados de operador, expresión de una acción, equivalencia numérica y otros. La investigación al comparar las respuestas destacó que estudiantes con una concepción adecuada en términos de equivalencia, favoreció en validar expresiones numéricas (por ejemplo: $53 + 41 = 54 + 40$), en palabras de los estudiantes, “consideró que la igualdad es verdadera por que las sumas expresan los mismo”, mientras que algunos estudiantes manifestaron dificultades en otras igualdades por ejemplo al no acreditar con operaciones en ambos lados la equivalencia de $17 - 12 = 16 - 11$, en palabras de los estudiantes “esta igualdad es falsa porque $17 - 12$ no es igual a $16 - 11$, la respuesta correcta es $17 = 17$ ”. En reflexiones finales, los autores explicaron que estudiantes con una comprensión relacional ofrecieron desempeño favorable, con relación, a aquellos que manifestaron una comprensión operacional.

Matthews et al. (2012), diseñó un instrumento de exploración, con base en cuatro niveles de comprensión: operacional rígido, operacional flexible, relacional básico y relacional comparativo.

El primer nivel (*operacional rígido*) describe una lectura unidireccional, de izquierda a derecha. Los estudiantes atribuyen un significado de indicador de resultado, una señal de hacer algo, o separador. Sumado a estos significados tienden a asociar palabras como resultado y solución. En este nivel de comprensión el estudiante se centra en la resolución de cálculos y un formato estándar de expresiones matemáticas tipo $a + b = c$.

El segundo nivel (*operacional flexible*) se caracteriza por una lectura unidireccional y operacional, esta comprensión facilita el resolver una ecuación. Sin embargo, persiste una dificultad debido a que en ocasiones las igualdades tipo $c = a + b$, son rechazadas o re-escritas en formato $a + b = c$ para aceptar su validez.

El tercer nivel (*relacional básico*) posibilita una lectura bidireccional, en la que se logra concebir una equivalencia numérica. Esta comprensión favorece a dar sentido a igualdades con operaciones en ambos miembros, tipo: $a + b = c + d$. Además, permite reconocer el significado de la solución de una ecuación.

El cuarto nivel (*relacional comparativo*) los estudiantes que expresan esta comprensión analizan y comparan las cantidades de una igualdad numérica, sin la necesidad de realizar cálculos. En suma, logran reconocer las propiedades de una relación equivalencia. concepción que favorece transitar los conocimientos de la aritmética al álgebra.

Este estudio involucró 224 estudiantes de educación básica entre 2° a 6° grado, con un promedio de edad menor a 11 años. Los autores señalaron que estudiantes ubicados en el cuarto nivel de comprensión lograron resolver con éxito igualdades que incluían letras y valores desconocidos, tareas que requerían desarrollar un pensamiento relacional. En conclusión, los resultados de este estudio, constatan que una comprensión profunda del signo igual favorece al aprendizaje del álgebra.

Burgell y Ochoviet (2015), la investigación presentó resultados de una exploración de los significados en estudiantes del primer año de enseñanza secundaria en Uruguay entre 12 y 13 años. Sus respuestas evidenciaron un apego a reconocer el signo igual como formato estándar unidireccional, operador y de propuesta de una acción. En contexto, se observó que estudiantes orientados a una comprensión relacional ofrecieron un desempeño favorable en igualdades formato $a + b = c + d$, sumado a que requieren reconocer al signo igual como equivalencia, por ejemplo, completar $17 + 4 = 13 + _$. En conclusiones los autores señalaron que un tercio de los estudiantes no consolidaron adecuadamente el significado de una equivalencia numérica, mientras que, otra parte lograron resolver correctamente y relacionar este concepto. En relación, recomendó trabajar y diseñar actividades que logren generar conflicto y desequilibrio favorable a resignificar el signo igual como equivalencia.

Baiduri (2015) realizó un estudio en una universidad de indonesia con 167 estudiantes del primer semestre en educación matemática, el análisis de esta investigación se centra en evidenciar una comprensión operacional en comparación al desempeño de estudiantes identificados con una comprensión relacional, entre otras. Las preguntas y actividades incluyeron ¿Cuál es el significado del símbolo “=”? y ecuaciones. Las respuestas a las preguntas se evaluaron conforme a las palabras escritas en comprensiones operacional (O), simultánea operacional-relacional (O-RE) y relacional (RE). En cuanto a la resolución de ecuaciones se clasificaron según las estrategias empleadas en solución comparativa (SC), reconocimiento de equivalencia (RE) sustitución (SU), solo respuesta (AO) y otras. En general, los resultados ofrecieron un porcentaje cerca del 35% como una comprensión RE. Sumado, un 24% de respuestas ubicadas en O-RE, además, cerca de 37% manifestó una comprensión O, finalmente, el restante fue clasificado dentro de otra comprensión.

Broitman et al. (2017), investigación que se profundizó en el conocimiento de los procesos constructivos de la igualdad en edad escolar. Se destacó el análisis metodológico con ingeniería didáctica en entrevistas y monitoreo de clases en aulas de México. El trabajo involucró actividades que promueven analizar la validez de equivalencias, bajo la restricción de no hacer cálculos, ni obtener resultados numéricos. Los investigadores advierten que atribuir un significado de “indicador de resultado”, hace producir dificultades en el aprendizaje como la lectura unidireccional. Señalan que esta interpretación obstaculiza la resolución de igualdades, lo que requiere una ampliación de su conocimiento aritmético relacionado con comprender una equivalencia numérica, por ejemplo, el trabajo con expresiones como: $124 - 98 = 125 - \underline{\hspace{1cm}}$, donde se requiere reconocer una comparación de cantidades, en lugar de calcular un total. Los resultados de esta investigación muestran que gran parte de las respuestas y justificaciones escritas por los estudiantes en las actividades propuestas evidenciaron un enfoque orientado a obtener una respuesta, para después restar las cantidades conocidas, en lugar de observar y comparar la diferencia mínima entre las cantidades para identificar el valor que mantiene la igualdad. Posteriormente, las conclusiones de esta investigación subrayan que, de prevalecer esta interpretación del signo igual, se constata la relación de obstáculos didácticos provenientes de la enseñanza previa en la primaria.

Vermeulen y Meyer (2017), realizó un estudio en una escuela primaria en Sudáfrica donde se destaca la participación de 57 estudiantes y tres profesores de matemáticas. La investigación incluyó una serie de preguntas y entrevistas, las encuestas en los estudiantes revelaron una comprensión operativa del signo igual en las respuestas escritas por los estudiantes, mientras que el estudio con maestros explora si son capaces de identificar y corregir la comprensión operacional con base a la metodología referente al conocimiento del profesor, sin embargo, los resultados mostraron contrariedad en los docentes, ya que en ocasiones no lograron detectar en su totalidad las dificultades en el aprendizaje de los estudiantes. Por lo tanto, al concluir este estudio los autores resaltaron la preparación y conocimiento matemático como aspecto fundamental para atender esta problemática, argumentando que los conocimientos del profesor y el material didáctico (libros) comunican en varios sentidos un significado unidireccional o adecuado del signo igual. Además, señalaron que es importante atender la formación docente bajo una reflexión que lleve a construir la comprensión relacional del signo igual y no darla por hecho en los estudiantes para un desempeño favorable en estudios avanzados de matemáticas como el álgebra.

Parodi et al. (2017), elaboró un estudio para indagar los significados que atribuyeron al signo igual, un grupo de estudiantes de enseñanza secundaria entre 13 y 14 años en Uruguay, al resolver un instrumento diseñado en un contexto algebraico. El análisis se apoyó en los significados reportados por publicaciones de Molina (2009). Las actividades y preguntas incluyeron actividades de completar, comparar, encuestas de verdadero/falso y ecuaciones. Posterior al cuestionario se realizaron entrevistas que evaluaron la capacidad de reconocer o distinguir una expresión de equivalencia, con respecto a una expresión de equivalencia condicionada. Los autores señalaron que aún en el contexto algebraico los estudiantes atribuyeron el significado de resultado a la reducción de una ecuación, lo que podría estar relacionado con su comprensión operacional y conocimiento de la aritmética. En consecuencia, se observó un problema de aprendizaje para los estudiantes, dificultades que obstaculizan la comprensión del significado de la solución de una ecuación.

Fyfe et al. (2020), realizaron un estudio con 182 estudiantes adultos de una universidad pública en Estados Unidos. Los resultados señalan de manera relevante que el conocimiento del signo igual estuvo relacionado con el desempeño de los estudiantes en la prueba. Las respuestas reflejaron una comprensión relacional, sumado a una comprensión simultánea

operacional-relacional del signo igual, logrando un desempeño óptimo del 56% de respuestas ubicadas dentro de esta categoría, con respecto, a un 35% que se clasificó como una comprensión operacional, porcentaje que evidenció las dificultades del aprendizaje en estudiantes de educación avanzada. Esta concepción que según la investigación se resalta como inadecuada. Las conclusiones, sugieren una necesidad de explorar la interpretación del signo igual, incluyendo la enseñanza de la aritmética, el álgebra y niveles superiores de matemáticas.

Parodi et al. (2020), una investigación semejante a la reportada en Parodi et al. (2017), esta vez, basado en trabajo con polinomios. Los autores exploraron las interpretaciones de un grupo de estudiantes entre 13 y 14 años en Uruguay. Se aplicó un cuestionario y entrevistas que dejaron entredicho la comprensión del signo igual en este tipo de estudiantes. la investigación comparó entre estudios de caso, pertenecientes a una comprensión operacional y la ampliación de una comprensión relacional. Por un lado, la comprensión operacional manifestada por un estudiante entrevistado dejó al descubierto la asociación de la palabra resultado a la acción de simplificar un polinomio, se mencionó que este significado puede estar vinculado con su interpretación de percibir el signo igual como un operador o propuesta de actividad, a su vez, se manifestó como una dificultad de reducción de términos semejantes al resolver con una simplificación inadecuada (por ejemplo, $5 + x = 6x$).

Por otra parte, la comprensión relacional observada en un segundo caso de estudio evidenció expresar al signo igual “=” como una expresión de equivalencia simbólica. En relación, el estudiante ofreció un desempeño favorable al comparar y reconocer propiedades de equivalencia. En conclusión, la investigación demostró que un conocimiento relacional favorece a la capacidad de reconocer al signo igual como una relación de equivalencia en la enseñanza del álgebra.

Wardat (2021), realizó una investigación con 18 estudiantes entre 15 a 18 años de octavo y noveno nivel en Emiratos Árabes, en este trabajo se analizó los significados que atribuyeron al signo igual. La investigación involucró actividades, donde se busca completar una igualdad y la resolución de ecuaciones. En las reflexiones, de la investigación se evaluó la relación de atribuir el significado del signo igual como una “señal de hacer algo”, es decir, si este significado implica la tendencia de realizar operaciones del lado izquierdo de una igualdad y

la consecución del lado derecho. Además, la presencia del signo igual es vista como una secuencia en un solo sentido. Hecho que obstaculiza la validación de expresiones como $a = b + c$, para estudiantes en este significado, solo es correcta si se escribe en la forma $b + c = a$, donde la operación debe realizarse de izquierda a derecha. Este significado unidireccional provocaría la concepción inadecuada de cadenas de igualdades como $5 + 9 = 14 \div 2 = 7 * 3 = 21$. En relación a este hecho, la investigación señaló que gran parte de los estudiantes encuestados aceptó la expresión. Por ejemplo, un estudiante explicó que la igualdad es correcta porque:

“ $5 + 9$ es 14, luego divido en 2, da 7, y al multiplicar por 3 es 21”

La investigación promueve sugerencias y recomendaciones sobre la necesidad de analizar el currículo institucional. Asimismo, resulta importante reconocer que se requiere más investigación sobre métodos y estrategias didácticas favorables a que los estudiantes comprendan el signo igual como equivalencia.

Madej et al (2022), realizó un estudio de caso con 291 estudiantes de escolaridad básica en Suecia en 3° y 6° grado, con el fin de evaluar el rendimiento de los alumnos de diferentes escuelas que difieren en el nivel socioeconómico, la investigación en este artículo también incluyó un estudio comparativo con resultados de estudiantes de Corea del Sur. Ambas naciones destacan con buenos resultados en las pruebas del Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS, por sus siglas en inglés) y el Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA). Los autores de este artículo resaltan que gran parte del buen rendimiento de los estudiantes evaluados se debe a la importancia del estudio de conceptos matemáticos incluyendo el significado del signo igual en los libros de texto, se menciona que el contenido para desarrollar una comprensión relacional del signo igual debe incluir expresiones como: $3 + 5 = _ + 2$, en vez de operaciones abiertas que pueden incitar a una comprensión operacional. Sin embargo, la investigación contrasta que existe una diferencia importante con los estudiantes coreanos y que esto podría deberse al nivel del razonamiento relacional comparativo de expresiones algebraicas y el signo igual; el autor menciona que el reconocer el significado del signo igual como “es lo mismo que” no garantiza el uso completo de su relación de equivalencia.

Milinkovic et al. (2022) realizaron una investigación sobre la comprensión operacional en los estudiantes de educación primaria en Serbia con una población de 157 estudiantes, en el experimento realizado se encontró que un gran número de los encuestados concibieron el uso del signo igual como indicador de una respuesta a un cálculo matemático, sin embargo, en la prueba se evaluó con un problema vinculado a situaciones reales. En la conclusión se destacó que este tipo de actividades favorece a desarrollar un significado del signo igual con la oportunidad de relacionar objetos no matemáticos con la solución a un problema propuesto dentro del álgebra.

Donovan et al. (2022). Los autores realizaron un análisis cualitativo acerca de la capacidad de los estudiantes para sustituir una igualdad dentro de una ecuación. Según la investigación, esta comprensión puede favorecer al desempeño de los estudiantes al proporcionar una comprensión sofisticada del signo igual. En particular, se planteó que una habilidad sustitutiva, simultánea con una comprensión relacional favorece al proceso de solución de una ecuación. El instrumento ofreció actividades de igualdades que permiten intercambiar valores numéricos por una equivalencia propuesta, sin alterar el sentido de la ecuación. Esta dualidad abrió oportunidades para explorar si un razonamiento algebraico centrado en la habilidad de sustituir profundiza en la enseñanza y aprendizaje del álgebra.

Lee y Pang (2023), dos investigadores que aplicaron pruebas con 30 estudiantes de primaria en Corea del Sur, destacan un análisis de caso, en el cual se observó una transición de una comprensión operacional a una comprensión relacional comparativa durante el desarrollo de las pruebas. En esta investigación documentó seis niveles de comprensión del signo igual: operacional rígida, operacional flexible, relacional sustitutiva, relacional básica, relacional comparativa y relacional completa. Se destacó, que una intervención articulada con actividades de completar cadenas de igualdades y valores desconocidos favorece a explorar acerca el tránsito de una igualdad numérica a una expresión de equivalencia con la oportunidad de consolidar una comprensión relacional completa del signo igual. Los autores concluyeron que las comprensiones operacional y relacional podrían manifestarse de manera simultánea hasta profundizar su significado, después de una adecuada intervención sobre el concepto de equivalencia.

Parodi et al. (2024), En este trabajo se evaluó la habilidad docente conocida como mirada profesional, la cual permite interpretar, percibir y decidir sobre la comprensión del signo igual. Los participantes fueron estudiantes en formación correspondientes al último curso de la carrera de profesor de matemáticas en Uruguay. Basados en identificar los niveles de comprensión documentados por Matthews et al. (2012). Se diseñó una secuencia de actividades que involucró la impartición de un taller para analizar los casos y entrevistas realizadas a la población de estudio. Lo primero que se analizó fue la capacidad para percibir conceptos relevantes dentro de los conocimientos matemáticos acerca de los significados del signo igual. Este análisis ofreció una perspectiva articulada con la validación y justificación de una equivalencia numérica, a los docentes se les solicitó justificar sus respuestas con respecto a un análisis de caso de los procesos de solución de estudiantes. Posteriormente se planteó la comprensión de los aspectos relacionados con las dificultades de una estrategia de solución en expresiones equivalentes (por ejemplo, validar $2x + 15 - 9 = 31 - 9$, a partir de $2x + 15 = 31$). Se estableció entonces un significado que exigió una comprensión relacional del signo igual al relacionar un concepto de simetría y balance de la ecuación. por último, se examinó la capacidad de decidir sobre las estrategias de solución al considerar variables y valores desconocidos en ecuaciones tipo $ax + b = cx + d$, para intervenir en una comprensión operacional del signo igual. En conclusión, se promueve un proceso de reflexión capaz de ofrecer un panorama sobre la interpretación y capacidad de análisis de los profesores con respecto al conocimiento del signo igual.

Por otra parte, la revisión de artículos se centró en la búsqueda de información para los términos de obstáculos didácticos:

Andrade (2011), realizó una investigación cualitativa sobre los obstáculos didácticos en el aprendizaje de las matemáticas y cómo se pueden evitar con una adecuada formación de docentes. La autora señaló que aquellas dificultades que no se logran superar, se convierten en obstáculos debido a que limitan el avance y la construcción del conocimiento. Estos obstáculos se clasifican en: ontogenéticos, epistemológicos y didácticos.

Los estudios señalan que los obstáculos didácticos provienen de la enseñanza y se estudian a través del análisis de los errores y dificultades más frecuentes de los estudiantes, dichos errores pueden clasificarse en metodológicos, curriculares o conceptuales

Los errores metodológicos surgen por el uso de palabras inadecuadas y estrategias inherentes por parte del docente; por ejemplo: el significado que comunica de los signos ($=$, $<$, $>$), el término “fracción” adaptado para referirse a los números racionales, los métodos de suma, donde se instruye al estudiante el llevar o prestar unidades, en vez de sumar decenas, entre otros. Mientras que, los errores curriculares se producen en el diseño de planes de estudios que limitan la concepción de los estudiantes.

En la metodología se realizó un análisis con base a la didáctica de Federici; a medida, la investigación sugiere la construcción del significado de los conceptos a partir de la interacción entre docente y alumno, por lo que es necesario integrar todos los tipos de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico, variacional y aleatorio.

La reflexión final, concluyó en la discusión sobre el origen de los obstáculos didácticos, mediante una formación adecuada con el propósito de generar conciencia de lo que se enseña y cómo se comunica.

Larez (2017), realizó un estudio cualitativo acerca de obstáculos que limitan el aprendizaje efectivo de la matemática mediante un análisis documental en diversas herramientas digitales de búsqueda. La investigación señaló la definición de obstáculos de aprendizaje como todos aquellos factores que, con o sin intervención didáctica, inhiben, limitan o impiden a un individuo construir efectivamente un saber. Dichos factores los clasificó en epistemológicos, didácticos, cognitivos, emocionales y ecológicos.

A partir del análisis se definió a un obstáculo epistemológico como un factor de origen psicológico donde el estudiante hace una concepción inadecuada de los conceptos matemáticos comunicados por el docente.

En los factores de tipo cognitivo se señaló aquellas dificultades para aprender debido a que el estudiante carece de un esquema de planeación y organización de información derivada de su propio desarrollo del pensamiento.

Dentro de los factores didácticos se incluyó aquellos que influyen en el aprendizaje de la matemática, referido a la información que el estudiante recibe de la enseñanza.

Para los factores emocionales se identificó a las conductas y comportamientos que obstaculizan la capacidad de aprender; por ejemplo: la ansiedad, el desinterés, la frustración, entre otras, perturbaciones negativas de origen afectivo.

Finalmente, los factores ecológicos que constituyen el aspecto institucional, social o gubernamental y todas aquellas condiciones que intervienen en el ámbito de la educación.

Como conclusión, la investigación señaló que todos estos factores influyen directamente en el proceso de construcción de los conocimientos y habilidades matemáticas, incluso de manera simultánea y que es necesario indagar con el fin de favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Gálvez et al. (2020), realizó una revisión sistemática abordando los aportes teóricos sobre obstáculos en la enseñanza y aprendizaje de la matemática mediante una investigación cualitativa. A partir de los estudios acerca de los obstáculos se constató que un conocimiento, el cual ha sido aplicado para resolver un cierto tipo de problema, pero que falla al tratar de aplicarlo en otro contexto, presenta dificultad y persistencia para superar, por lo que se convierte en una barrera.

La investigación retomó la clasificación inicial acerca de los obstáculos matemáticos (epistemológicos, ontogenéticos y didácticos). En suma, caracterizó otros factores de origen cognitivo, pedagógico, psicológico, semiótico, comunicativo, tecnológico, entre otras dificultades que incluyen el lenguaje empleado por docentes y estudiantes que pueden entenderse como un obstáculo en la construcción del conocimiento matemático. Además, la autoría señaló que es importante mencionar aquellas dificultades que en consecuencia permiten la presencia de obstáculos cognitivos y ontogenéticos, entre los que se encuentran la alteración en las habilidades debido a lesiones cerebrales denominada como acalculia, y la discalculia como la dificultad para realizar cálculos debido a factores verbales, léxicos o interpretativos, etc.

Esta investigación permitió identificar los procesos de formación ideales para crear estrategias que contribuyan a la construcción adecuada del conocimiento matemático.

Osorio y Moreno (2020), realizaron una investigación etnográfica acerca de los obstáculos que enfrentan los docentes en su práctica mediante la observación y análisis directo en las

aulas, durante la metodología se elaboró un registro de diversas valoraciones y hábitos de los docentes que no favorecen al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Dentro de esta exploración se reconocieron cinco obstáculos derivados de las condiciones en las que se desarrolla la relación docente y alumno:

El primer obstáculo se identificó de acuerdo a la formación docente inconclusa y la docencia como una práctica profesional que nunca se domina, dentro de esta caracterización se asignó aquellos conjuntos de habilidades, talentos y agudezas vinculados a la formación pedagógica o falta de ella. Este factor marcó una brecha entre la capacidad de crear ambientes favorables que permitan motivar el interés por el aprendizaje por parte de los estudiantes, motivo por el cual puede considerarse como necesaria en la formación del docente.

Como segundo obstáculo se involucró a la experiencia, cuyo factor se señaló por aquellas reproducciones en donde el docente comunica el conocimiento de la misma manera en como fue instruido, sin actualización ni dominio. Este principio se caracterizó como un hábito insuficiente en la labor de enseñar, cuya experiencia quedó en desventaja por la desatención a una formación reflexiva sobre los procesos de enseñanza y la posibilidad de generar cambios a su práctica.

Dentro del tercer obstáculo se consideró al fetichismo de la práctica docente, donde suele tomar el protagonismo sin favorecer la interacción con los alumnos, desde esta dimensión se analizó el recurso constante de recurrir a la lectura y exposición como proceso en desventaja derivado de las rutinas y creencias con las que el docente fortalece la barrera.

En el cuarto obstáculo se agrupó la mediación entre intereses institucionales, profesionales y personales, donde la competencia personal por el desarrollo profesional de cada docente deriva en el descuido de la enseñanza en el aula, esta propuesta pone de manifiesto un conflicto de interés y gestión institucional que radica en las metas y creencias que los profesores aspiran.

Finalmente, el quinto obstáculo señaló a la subjetividad como inherente a la condición humana aquellos factores emocionales, culturales, afectivos y de creencia por parte de los docentes; En este sentido, el docente debe gestionar su vida personal sin llegar alterar su propio desempeño.

La investigación afirmó que la presencia de obstáculos siempre está abierta a situaciones de conflicto que no pueden superarse de acuerdo a uno o más de los factores valorados. Por consiguiente, es primordial establecer un proceso de reflexividad capaz de integrar la autoconciencia considerando que el descubrimiento y la construcción del conocimiento no se limita en el protagonismo, la lectura, la experiencia, ni recae en las creencias del docente.

Tabla 4. *Revisión bibliográfica de revistas especializadas en Educación Matemática.*

Autor (Año, País)	Información
Kieran (1981) Canadá	I. <i>“Concepts associated with the equality symbol”</i> . II. Educational Studies in Mathematics III. Investigación cualitativa. IV. Estudio de los conceptos que asocian los estudiantes al signo igual. V. La investigación analiza los conceptos que los estudiantes asocian al signo igual y clasifica la forma de comprender el símbolo de forma operativa y relacional.
Essien y Setati (2006) Sudáfrica	I. <i>“Revisiting the equal sign: some grade 8 and 9 learners’ interpretations”</i> . II. African Journal of Research in SMT Education III. Estudio de caso. IV. Explorar la interpretación del signo igual de estudiantes de octavo y noveno grado en una secundaria de Johannesburgo. V. Los resultados obtenidos a partir de pruebas escritas y las entrevistas señalaron que gran parte de los estudiantes participantes interpretó el signo igual únicamente como un indicador de un resultado. El artículo recomienda enfatizar la enseñanza como una representación de una relación de equivalencia.
Molina et al. (2009) España	I. <i>“Cómo entienden los alumnos de primaria el signo igual en las ecuaciones numéricas”</i> . II. Electronic Journal of Research in Educational Psychology III. Estudio de caso. IV. ¿Qué tipo de dificultades manifiestan los estudiantes en el desarrollo de su comprensión del signo igual? V. Descripción de once significados que asocian los estudiantes de educación básica al signo igual.
Matthews et al. (2012) Estados Unidos	I. <i>“Measure for measure: what combining diverse measures reveals about children’s understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality”</i> . II. Journal for research in mathematics education III. Investigación cualitativa. IV. Desarrollar y validar un instrumento de evaluación capaz de medir los conocimientos de los estudiantes sobre el signo igual. V. Se realizó un estudio con 224 estudiantes de educación. El trabajo realiza una descripción detallada de niveles de comprensión del signo igual: operacional rígido, operacional flexible, relacional básico y relacional comparativo. Los resultados señalan que es importante atender la comprensión operacional del signo igual y favorecer a la comprensión de una relación de equivalencia.

Burgell y Ochoviet (2015) Uruguay	I. <i>“Significados del signo igual y aspectos de su enseñanza. Un estudio realizado con estudiantes de primer año de enseñanza secundaria y sus profesores”</i>. II. Enseñanza de las ciencias III. Estudio de caso IV. ¿Qué significados atribuyen al signo igual los estudiantes?, ¿Cuál es el enfoque de la enseñanza adoptado por los docentes? V. Los resultados obtenidos a partir de 36 pruebas escritas a estudiantes de secundaria entre 12 a 16 años señalaron que la mayoría de los estudiantes participantes interpretó el uso del signo igual como invitación al cálculo, además, se realizaron entrevistas que evidenciaron la falta de atención de la didáctica sobre la comprensión de una relación de equivalencia. El estudio recomienda que es importante trabajar con actividades que generen desequilibrios cognitivos que favorezcan la comprensión relacional.
Baiduri (2015) Indonesia	I. <i>“Mathematics education students’ understanding of equal sign and equivalent equation”</i>. II. Asian Social Science III. Estudio de caso. IV. ¿Cómo los estudiantes de educación básica entienden el signo igual? ¿Cómo los estudiantes de educación básica resuelven problemas de ecuaciones equivalentes? ¿Existe alguna relación entre la comprensión del signo igual por parte de los estudiantes de educación básica y la solución de los problemas de ecuaciones equivalentes? V. A partir de la aplicación de una secuencia de actividades y entrevistas a estudiantes para explorar el significado que atribuyen al signo igual. Los resultados obtenidos destacan que es importante corregir la enseñanza del signo igual para que el estudiante desarrolle una comprensión relacional.
Broitman et al. (2017) Argentina	I. <i>“Hacia la ampliación de sentidos del símbolo igual en los primeros grados de la escuela primaria”</i>. II. Yupana III. Ingeniería didáctica. IV. ¿Es posible lograr una ampliación de los significados de la igualdad en los primeros grados de la escuela primaria? V. Los resultados destacan que el trabajo con actividades de completar y comparación en la aritmética facilitan el aprendizaje de una comprensión relacional del signo igual.
Vermeulen y Meyer (2017) Sudáfrica	I. <i>“The equal sign: Teachers’ knowledge and students’ misconceptions”</i>. II. African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education III. Investigación cualitativa. IV. ¿Qué concepciones tienen los estudiantes de sexto grado sobre el signo igual? ¿Cuál es la naturaleza del conocimiento matemático de los profesores de quinto y sexto grado para la enseñanza del signo igual? ¿Podría la naturaleza del conocimiento matemático de los profesores influenciar en las concepciones del signo igual en los estudiantes? V. A partir de un estudio con 57 estudiantes de educación primaria. Los resultados destacaron que los participantes manifestaron una comprensión operacional, además, la investigación destacó la falta de currículo por lo cual recomienda una intervención docente enfocada al conocimiento del profesor (Mathematical knowledge for teaching MKT) capaz de ofrecer y diseñar estrategias que ayuden al profesorado.
Parodi et al. (2017) Uruguay	I. <i>“La comprensión del signo igual en la entrada al álgebra: el diseño de tareas y la conversación en la clase de matemática”</i>. II. Enseñanza de las Ciencias III. Estudio de caso.

	IV. ¿Qué significados atribuyen al signo igual, en un contexto algebraico de ecuaciones y polinomios, un grupo de estudiantes de 13 y 14 años? V. Los resultados a partir de dos sesiones de trabajo de tareas enfocadas a indagar la comprensión del signo igual. Señalan que asociar el significado del signo igual como un indicador de resultado obstaculiza la transición de la aritmética al álgebra, por lo cual se recomienda diseñar actividades de comparación con el fin de enriquecer la comprensión relacional.
Fyfe et al. (2020) Estados Unidos	I. <i>“College Developmental math students’ knowledge of the equal sign”</i>. II. Educational Studies in Mathematics III. Estudio de caso. IV. ¿Cuáles son las diferencias en conocimiento de estudiantes universitarios sobre el significado del signo igual? V. Se realizó un estudio con 182 estudiantes universitarios de primer semestre con el propósito de explorar su nivel de comprensión del signo igual. Los resultados muestran que la comprensión operacional continúa siendo una problemática presente en esta población adulta y, además, es la menos atendida, pues suele asumirse que el estudiante desarrolle dicha comprensión únicamente a partir de la experiencia y del avance académico. En consecuencia, se invita a profundizar en la investigación con estudiantes universitarios y docentes, a fin de atender esta dificultad y enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje.
Parodi et al. (2020) Uruguay	I. <i>“Interpretaciones del signo igual en un contexto algebraico de polinomios”</i>. II. Boletín de Educación Matemática, Bolema III. Estudio caso. IV. ¿Qué relación existe entre los significados que se le atribuyen explícitamente al signo igual y el trabajo con este signo en un contexto algebraico de polinomios? V. Se aplicó un cuestionario a 26 estudiantes de educación secundaria, de entre 13 y 14 años, en Montevideo, Uruguay. Los resultados evidencian que la comprensión relacional favorece el desempeño de los estudiantes en el trabajo con expresiones equivalentes dentro del contexto algebraico de los polinomios. El artículo recomienda promover, desde los inicios del estudio del álgebra, actividades que impliquen una lectura bidireccional de las expresiones.
Wardat y Jarrah (2021) Emiratos Árabes	I. <i>“Understanding the meaning of the equal sign: a case study of middle school students in the United Arab Emirates”</i>. II. European Journal of Educational Research III. Investigación cualitativa. IV. ¿Qué piensan los estudiantes sobre la connotación del signo igual? ¿Qué hacer para que los estudiantes desarrollen una cultura en la comprensión del signo igual? V. A partir de una revisión literaria sobre la comprensión del signo igual, se realizó una prueba escrita con 18 estudiantes de grado 6, 7 y 8. Los resultados obtenidos evidenciaron que gran parte de los estudiantes interpretó unidireccionalmente el uso del signo igual. Los investigadores mencionan que la comprensión del signo igual recibe poca atención en los libros de texto y que es importante trabajar un lenguaje adecuado sobre la equivalencia para mejorar su desempeño.
Madej (2022) Suecia	I. <i>“Primary School students’ knowledge of the equal sign - the Swedish case”</i>. II. International Journal of Science and Mathematics Education III. Investigación cualitativa. IV. ¿Cómo los estudiantes de Suecia describen y usan el signo igual? ¿Qué diferencias podemos observar en los estudiantes sobre el nivel de conocimiento del signo igual dependiendo de cada escuela en la que estén inscritos? ¿Cuáles son las similitudes y diferencias entre los casos de Corea del Sur y Suecia?

	V. Se realizó un estudio comparativo con estudiantes de diferentes niveles socioeconómicos con el fin de evaluar el nivel de comprensión del signo igual con la ayuda de un material didáctico (libro). Los resultados obtenidos se compararon con un estudio realizado en Corea del Sur. En conclusión, se destaca que la mayoría de estudiantes participantes fueron capaces de manifestar un pensamiento relacional, también se demuestra que el nivel de comprensión puede variar según el nivel socioeconómico y currículo docente, finalmente se invita a futuras investigaciones.
Milinkovic et al. (2022) Serbia	I. <i>"The equals sign - the problem of Early algebra learning and how to solve it"</i>. II. Teaching Innovations III. Investigación cualitativa. IV. Servir como guía para mejorar el desempeño y comprensión del signo igual con metodologías de modelación de situaciones de la vida real. V. Los estudios se centraron en demostrar como metodologías con manipulativos, balance y contextualización de situaciones de la vida cotidiana favorecen a la comprensión del signo igual.
Donovan et al. (2022) Estados Unidos	I. <i>"Is a substitute the same? Learning from lessons centering different relational conceptions of the equal sign"</i>. II. ZDM-Mathematics Education III. Investigación cualitativa. IV. ¿Las intervenciones enfocadas en una concepción semejante o en una comprensión dual de igualdad y sustitución del signo igual promueven una mayor comprensión del signo igual y un aumento en la aplicación de estrategias estructurales para resolver ecuaciones, en comparación con una condición controlada? ¿Una intervención centrada en una concepción dual del signo igual promueve una mayor comprensión del signo igual y un incremento en la aplicación de estrategias estructurales de resolución de ecuaciones, en comparación centrada únicamente en la concepción de igualdad? V. Se realizó un estudio con 163 estudiantes de educación secundaria con el propósito de comparar y evaluar el nivel de comprensión del signo igual con una metodología que promueve la habilidad sustitutiva del signo igual en la resolución de ecuaciones. Los resultados obtenidos ofrecen una posible comprensión sofisticada sobre el nivel de comprensión sustitutiva del signo igual por lo cual resalta el trabajo de construir una comprensión relacional del signo igual.
Lee y Pang (2023) Corea del sur	I. <i>"What is so complicated in developing students' conception of the equal sign?"</i>. II. International Journal of Science and Mathematics Education III. Estudio de caso. IV. ¿Qué tipos de cambios ocurren en el aula de clase con respecto a la concepción de los estudiantes sobre el signo igual? ¿Qué obstaculiza el avance en la concepción del signo igual? V. A partir de un cuestionario realizado con 30 estudiantes de 15 años de educación secundaria. El estudio resalta 6 niveles de comprensión del signo igual: operacional rígida, operacional flexible, sustitutiva relacional, simultánea operacional – relacional, relacional básica, relacional comparativa y relacional completa. Los hallazgos destacan que es posible ayudar a los estudiantes a transitar en la comprensión del signo igual y que es importante considerar el diseño de estrategias que generen conocimiento.
Parodi et al. (2024) Uruguay	I. <i>"Mirada profesional del futuro profesor en torno al signo igual"</i>. II. Enseñanza de las ciencias III. Estudio de caso.

	IV. ¿Qué y cómo son capaces de percibir e interpretar? ¿Qué y cómo son capaces de decidir? ¿Existen cambios en sus maneras de percibir e interpretar y decidir? V. El estudio analiza la capacidad de ejercer una práctica reflexiva en la mirada profesional respecto al trabajo de enseñanza del signo igual. Los resultados señalan la importancia de implementar un proceso de reflexión docente que le permita percibir, interpretar y tomar decisiones sobre el aprendizaje del signo igual, con el fin de favorecer su comprensión.
Andrade (2011) Colombia	I. “<i>Obstáculos didácticos en el aprendizaje de la Matemática y la formación de docentes</i>” II. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa ALME. III. Investigación cualitativa. IV. Reflexión sobre los obstáculos didácticos en el aprendizaje de la matemática y como poder superarlos con una formación docente adecuada. V. Los obstáculos didácticos provienen de la enseñanza y se estudian a partir de los errores más frecuentes de los estudiantes: metodológicos, curriculares y conceptuales.
Lárez – Villarroel (2017) Venezuela	I. “<i>Algunos obstáculos que imposibilitan el aprendizaje efectivo de la matemática</i>”. II. Investigación y Postgrado III. Investigación cualitativa. IV. Ofrecer un análisis sobre los obstáculos de aprendizaje de las matemáticas. V. Descripción detallada de factores que dificultan el aprendizaje de las matemáticas: obstáculos epistemológicos, didácticos, cognitivos, emocionales y ecológicos.
Plaza Gálvez et al. (2020) Colombia	I. “<i>Obstáculos en la enseñanza – aprendizaje de la matemática. Revisión sistemática</i>”. II. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa ALME II. Investigación cualitativa. III. ¿Qué tipo de obstáculos se han detectado en los procesos de enseñanza - aprendizaje de la matemática? IV. Descripción de los obstáculos en la didáctica de las matemáticas: epistemológicos, didácticos, ontogenéticos; además de caracterizar otros obstáculos en la enseñanza y el aprendizaje: cognitivos, pedagógicos, psicológicos, mentales, epistemofílico, semiótico, en la comunicación, el uso de la tecnología, el formalismo y dificultades matemáticas (acalculia y discalculia).
Osorio y Moreno (2022) México	I. “<i>Habitus académico y obstáculos en la práctica docente</i>”. II. Diálogos sobre educación III. Investigación etnográfica. IV. Analizar algunos obstáculos que experimentan los docentes en su práctica. V. Se identificaron cinco obstáculos que enfrentan los docentes: formación inconclusa, la experiencia, práctica docente fetichizada, mediación entre intereses institucionales, profesionales y personales y la subjetividad. Se describe que en ocasiones el profesor recurre a enseñar como le enseñaron, lo cual limita sus metodologías de enseñanza.

1.2.2 Libros especializados

Los libros especializados son otra fuente básica para una revisión bibliográfica, ofrecen actualización y una panorámica general de los avances y estado del arte de distintas áreas de la disciplina. Los libros o capítulos de esta categoría son:

Molina et al. (2007) es un capítulo del libro Humanidades y Ciencias. Aspectos Disciplinarios y Didácticos, donde se recopiló la historia del signo igual en la investigación se documentó el origen y primera aparición del signo en la obra de Robert Recorde en 1557, quien con el propósito de acotar el uso de palabras y frases como “es igual” o “equal” en latín, justificó el uso de dos segmentos paralelos de la misma longitud uno arriba del otro con una ligera separación. En palabras explico en su obra se menciona que “no había dos cosas más idénticas que dos líneas paralelas”.

En su obra, Recorde también utilizó signos de adición y diferencia más extensos en su tamaño de lo que son actualmente. Finalmente, la adopción del signo igual actual “=” se acordó a finales del siglo XVII por Leibniz (1646-1716) uno de los más grandes exponentes del cálculo.

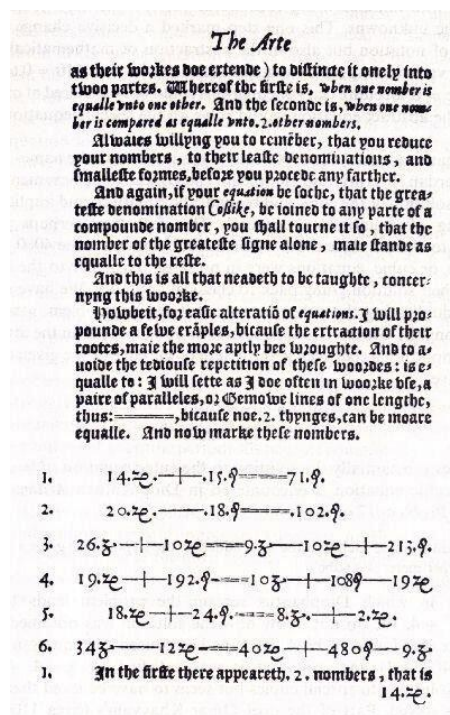


Figura 1. Primer uso del signo igual documentado por Recorde en su obra

“The Whetstone of Witte”, (Molina et al. 2009)

En conclusión, la investigación señaló que el signo igual ha sufrido varios cambios en su simbología a lo largo de su historia. En suma, su acotación en un símbolo marcó un hito en la interpretación de su uso. En este sentido, la investigación documentó una variedad de

significados reconocidos en las matemáticas, entre los cuales se incluyen aquellos que son atribuidos por los estudiantes o que aparecen en los libros de texto de matemáticas.

Muñoz (2011), este libro ofrece una variedad de actividades diseñadas para intervenir y analizar los significados del signo de estudiantes que se encuentren en educación básica en el tránsito de la aritmética al álgebra. Este libro según el autor sirve como una guía de actividades con igualdades de completar, verificar expresiones de verdadero/falso, examinar cadenas de igualdades, entre otras, actividades que requieren el significado de equivalencia numérica del signo igual. Además, la consulta de esta herramienta ofreció información teórica acerca de los problemas y dificultades se enfrentan en el aprendizaje del álgebra en educación básica.

Por otra parte, en la búsqueda de libros especializados con respecto a la caracterización de obstáculos didácticos se ubicó en el análisis de dos obras esenciales en la didáctica de las matemáticas como la formación del espíritu científico por Gastón Bachelard en 1938 y la Teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau.

En un principio se analizó la concepción de obstáculo epistemológico propuesta por Bachelard (1938) en su obra, el autor señaló que un obstáculo epistemológico se manifiesta como parte del conocimiento de un individuo y, por lo tanto, este puede ser considerado sano y de buen uso, sin embargo, esta noción al no estar ligada al carácter científico carece de argumentación y obstaculiza la adquisición de un nuevo conocimiento.

A partir de esta definición Brousseau (1983) estableció la clasificación de obstáculos en el aprendizaje en: ontogenéticos, epistemológicos y didácticos.

Retomando los aportes de Bachelard, el investigador reconoció a los obstáculos epistemológicos como parte de un conocimiento, el cual persiste al cambio e impide la construcción del nuevo conocimiento.

En los obstáculos de origen ontogenético se agrupó a todos aquellos factores que condicionan el desarrollo cognitivo del sujeto y que conducen a la valoración de la génesis de sus conocimientos. Estas limitaciones ponen de manifiesto la construcción del conocimiento mediante procesos de asimilación y acomodación adecuados, pero restringidos por la capacidad de su edad o estadio cognoscitivo.

Por último, la categorización de obstáculos didácticos reconoció a los factores involucrados en la enseñanza, manifestados en las concepciones inadecuadas de los estudiantes, a partir de las metodologías y comunicación del docente. En este sentido, el obstáculo didáctico refleja las decisiones pedagógicas y procesos de solución no apropiados, además, de evidenciar un enfoque sistemático que no favorece a la construcción del conocimiento matemático en el estudiante.

Tabla 5. Revisión bibliográfica de libros especializados sobre la interpretación del signo igual y obstáculos didácticos

Autor (Año, País)	Información
Molina et al. (2007) España	I. “ <i>Historia del signo igual</i> ” II. Humanidades y Ciencias. Aspectos Disciplinarios y Didácticos III. Investigación cualitativa. IV. Análisis cronológico sobre el origen y comprensión del signo igual. V. Descripción de los principales aportes e investigaciones sobre el origen del signo igual, El artículo relata la evolución del signo igual desde su primer uso en 1557 por el matemático Robert Recorde, hasta desarrollar un análisis de su comprensión actual.
Muñoz (2011) Chile	I. “ <i>El significado del signo igual, primeros pasos en el álgebra</i> ” II. Partículas elementales III. Manual de aprendizaje IV. Servir como propuesta de diseño de actividades orientadas a evaluar y elevar los niveles de aprendizaje del álgebra. V. Análisis de algunas dificultades en el aprendizaje del álgebra. El trabajo describe las comprensiones operacional y relacional del signo igual con el fin de diseñar una propuesta de actividades que eleven el nivel de aprendizaje.
Bachelard (1938) Francia	I. “ <i>La noción del obstáculo Epistemológico</i> ”. II. La Formación del espíritu científico III. Capítulo de libro. IV. Definición del obstáculo epistemológico. V. El obstáculo epistemológico es una barrera interna al conocimiento que se genera a partir de los saberes previos, experiencias propias y creencias, lo cual obstruye la construcción del nuevo conocimiento.
Brousseau (1983) Francia	I. “ <i>Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques</i> ” II. Teoría de situaciones didácticas III. Capítulo del libro IV. Clasificación de los obstáculos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. V. Según Guy Brousseau, en la didáctica de las matemáticas se distinguen tres tipos de obstáculos: epistemológicos, didácticos y ontogenéticos.

1.2.3 Memorias de congresos

Las memorias de congresos son relevantes ya que se concentran grupos de discusión o trabajos especializados. En esta búsqueda sobre la interpretación del signo igual, se encontraron las siguientes:

Abrate et al. (2008), investigación que recopiló los datos mediante un análisis cualitativo, estructurado en un estudio de caso que advierte acerca de las dificultades y obstáculos que se generan por el empleo de metodologías como la transposición de términos y las prácticas de despeje de incógnitas en ecuaciones de un solo valor desconocido. Los investigadores examinaron 429 producciones escritas por estudiantes, aspirantes a ingresar a nivel universidad en Argentina, además de revisar 60 libros que abordan la resolución de ecuaciones. En el estudio se comparó entre dos estrategias de solución: por propiedades de un objeto matemático y por transposición de términos (TT). Los resultados reportaron un uso aproximado del 80% vinculado a resolver con la estrategia TT, Los investigadores señalan que el empleo de este proceso podría estar ligado a una comprensión operacional al “manipular”, “pasar”, “omitir” o “trasladar” los miembros de una ecuación sin atribuir un sentido de equivalencia. proceso que viola las propiedades simétrica y transitiva de la igualdad, mientras que, una resolución por propiedades de un objeto matemático ofrece una interacción abierta con las propiedades de equilibrio de una ecuación, situación que favorece a la comprensión relacional. En conclusión, si la didáctica se apoya de metodologías como TT, entonces podría generar dificultades y obstáculos que prevalecerían de un significado operacional, en lugar de favorecer a la construcción de un conocimiento relacional.

Tabla 6. *Revisión de literatura en memorias de congreso*

Autor (Año, País)	Información
Abrate et al. (2008) Argentina	I. “Obstáculos y dificultades que ocasionan algunos modelos y métodos de resolución de ecuaciones”. II. Reunión Pampeana de Educación Matemática REPEM III. Investigación diagnóstica y descriptiva. IV. ¿Cuáles son los modelos y métodos de resolución de ecuaciones que utilizan los alumnos?, ¿Qué obstáculos y dificultades producen estos modelos y métodos de resolución de ecuaciones sobre los alumnos? y ¿Qué modelos y métodos de resolución de ecuaciones utilizan los libros de matemáticas cuando abordan estos temas’

	V. La investigación analiza los métodos de solución que emplearon un grupo de estudiantes, aspirantes a la universidad para resolver ecuaciones de una incógnita. Los resultados señalan que el uso de métodos como la transposición de términos limitan la comprensión de procesos matemáticos.
--	--

1.2.4 Tesis de posgrado

Una fuente de información que puede resultar muy valiosa durante el desarrollo de una revisión bibliográfica es consultar tesis de investigadores que tengan experiencia. Estas investigaciones pueden ser encontradas en los repertorios correspondientes a instituciones académicas. Para ello, se recopilaron tres trabajos referentes al tema de la interpretación y comprensión del signo igual, los cuales fueron:

Molina (2006), Tesis de posgrado (doctorado) por parte del Departamento de didáctica de la matemática en la facultad de ciencias de la educación, Universidad de Granada, España. En esta investigación se analizó la comprensión del signo igual y su relación con respecto al pensamiento relacional por alumnos de educación primaria. A partir del diseño de actividades que involucró el trabajo con igualdades numéricas cerradas para verificar (verdadero/falso) y abiertas para completar (por ejemplo, $13 - 7 = _ - 6$). Durante las sesiones de trabajo exploró los significados que atribuyeron los estudiantes detallando un total de once (tabla 7), los cuales distribuyó en: 1. Propuesta de actividad, 2. Como operador, 3. Separador de operaciones, 4. Expresión de una acción, 5. Expresión de una equivalencia condicional, 6. Expresión de una equivalencia, 7. Definición de un objeto matemático, 8. Expresión de una relación funcional o de dependencia, 9. Indicador de cierta conexión o correspondencia, 10. Aproximación y 11. Asignación de un valor numérico. Documentó que estos significados se clasifican en comprensión operacional y relacional.

Tabla 7. Significados del signo igual y su comprensión (Molina, 2006)

Significado	Descripción	Ejemplo	Comprensión del signo igual	
			Op.	R.
Propuesta de actividad	Se caracteriza por el uso del signo igual en expresiones que promueven una actividad	$15 + 7 =$ $3x(x + 2) =$	X	

	junto con una cadena de números y símbolos de operación únicamente del lado izquierdo y lado derecho de la igualdad se deja abierto.			
Operador	Este significado se identifica cuando se presentan una o más operaciones del lado izquierdo de una igualdad, en ocasiones los símbolos forman una secuencia de operaciones y un resultado a la derecha del signo igual.	$5 \times 4 = 20$ $2(x + 6) + 3x = 5x + 12$	X	
Expresión de una acción	Este significado permite una lectura bidireccional de la expresión que conforma una igualdad, sin embargo, solamente se encuentran las operaciones en un solo miembro de la igualdad ya sea el lado izquierdo o el derecho y en otro miembro su resultado.	$11 = 8 + 3$ $8 + 3 = 11$ $12x = 5x + 10x - 3x$	X	
Separador	Este significado del signo igual se identifica cuando se usa indiscriminadamente el signo para encadenar una secuencia de operaciones aritméticas, también puede presentarse en el contexto algebraico.	$12 + 5 = 17 + 3 = 20$ $2(x + 6) = 2x + 12$	X	
Expresión de una	El uso del signo igual se caracteriza por la formación de expresiones en donde solo	$5x + 3 = 13$ $x^2 + 3x = 2x - 1$		✓

equivalencia condicional	ciertos valores cumplen una ecuación en el contexto del álgebra.			
Expresión de una equivalencia	Se refiere al uso del signo igual para relacionar dos representaciones de una expresión matemática. Se presentan cuatro aceptaciones.			
a) Equivalencia numérica	Relaciona dos expresiones numéricas, las cuales representan el mismo valor.	$5 + 7 = 10 + 2$ $a + b = c + d$		
b) Equivalencia simbólica	Relaciona la obtención del mismo valor numérico en dos diferentes expresiones algebraicas.	$7x + 2 = 5x - 4$		✓
c) Identidad estricta	Relaciona el mismo objeto matemático utilizando la misma representación en ambos miembros de una igualdad.	$5 = 5$ $a = a$ $x + 2 = x + 2$		
d) Equivalencia por definición o notación	El signo igual se utiliza para definir una equivalencia determinada por un contexto.	$1\text{ m} = 100\text{ cm}$		
Expresión de una relación funcional o dependencia	El signo igual se utiliza para la formación de expresiones que permiten comprender una dependencia entre variables. Este significado permite la construcción de fórmulas.	$A = \pi r^2$ $y = mx + b$		✓
Indicador de una cierta conexión	Este significado del signo igual permite el uso para relacionar números y	 = 3	X	✓

o correspondencia	términos algebraicos con objetos no matemáticos.			
Aproximación	El signo igual se utiliza para relacionar un valor numérico y otra expresión que representa una aproximación a su valor real.	$\frac{2}{3} = 0.6667$	X	
Definición de un objeto matemático	El signo igual se utiliza para la formación de funciones y otros objetos matemáticos.	$f(x) = 2x + 3$ $S_n = 2n + 1$	X	✓
Asignación de un valor numérico	El signo igual se utiliza para asignar un valor numérico para después aplicarlo en una expresión algebraica de correspondencia.	¿Cuál es el valor de la expresión $x+2$, si $x = 3$?	X	

La autora argumentó que los estudiantes tienden a manifestar una tendencia a reconocer el signo igual de forma operacional y mostrar una resistencia a desarrollar el significado de una equivalencia numérica. En otras palabras, explicó que algunas de las dificultades que se manifestaron en las respuestas de los estudiantes radican, probablemente, en el tipo de enseñanza recibida. En los resultados de este trabajo reconocieron al menos cuatro significados relevantes (operador, expresión de una acción, equivalencia numérica y similitud numérica). los cuales les permitieron realizar un análisis cualitativo con respecto a su desempeño relacionado con el pensamiento relacional y su nivel de comprensión del signo igual. En comparación, se detalló que en el contexto de la aritmética y el algebra, se pueden identificar nueve conceptos que van del: pensamiento cuantitativo, el cálculo flexible, el cálculo mental, sentido numérico, sentido operacional, sentido simbólico, sentido estructural, pensamiento cuasivariable y meta-estrategias conceptuales. Por último, destacó que el empleo de estas estrategias como el cálculo mental requieren que el estudiante desarrolle el reconocimiento del significado de propiedades como la conmutatividad o la asociatividad de la suma. Particularidad que favorece al desempeño y comprensión del signo igual como equivalencia.

Parodi (2016), tesis de posgrado (maestría) perteneciente al centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada del instituto politécnico nacional de México. La investigación exploró los significados del signo igual atribuidos por 31 estudiantes de enseñanza secundaria. Identificados en las respuestas escritas en cuestionarios que involucraron preguntas e igualdades cerradas de verdadero/falso y abiertas de completar, sumado a la grabación de entrevistas donde se analizaron dos casos, donde se examinó el nivel de comprensión del signo igual clasificado en operacional y relacional. El autor se basó en estudios previos retomando los significados del signo igual documentados en (Molina, 2006) y los niveles de comprensión del signo igual en (Matthews et al., 2012). En los resultados, se detalló que gran parte de los estudiantes manifestaron una comprensión relacional del signo igual, mientras que al menos un tercio de las justificaciones escritas dejaron entrever una comprensión operacional. En este sentido, el trabajo realizado con igualdades numéricas examinó la capacidad de reconocer el signo igual como una equivalencia numérica, en consecuencia, se detalló los estudiantes que manifestaron dificultades atribuyeron el significado del signo igual como operador o como propuesta de actividad. Por otro lado, en el trabajo se plantearon ecuaciones, en este análisis los métodos de solución evidenciaron un uso del “principio de balanza”, asimismo, se observó la “transposición de términos”. El autor señaló que la práctica de resolver ecuaciones en formato $ax + b = c$, donde el valor desconocido “x” se encuentra en el lado izquierdo, o la necesidad de visualizar una sola cantidad numérica a la derecha de la igualdad, podría estar ligada a una comprensión operacional, sumado, al carácter de concebir la solución de la ecuación como un resultado. A diferencia en las respuestas caracterizadas dentro de una comprensión relacional, se observó la necesidad de verificar la igualdad con el valor encontrado en la solución. En conclusión, se explicó que la comprensión del signo igual está ligada a los métodos de solución que desarrollan los estudiantes cuando resuelven ecuaciones.

Finalmente, en las reflexiones finales de este trabajo el autor reconoce que los estudiantes manifestaron una comprensión operacional o relacional dependiendo del formato y el contexto de la actividad. Destacó que en relación a la aritmética los estudiantes tienden a identificar las operaciones de un lado de la igualdad (lado izquierdo) y en el otro un solo término numérico (resultado). En este sentido, la interpretación del signo igual conlleva a que el estudiante manifieste prácticas vinculadas a la enseñanza recibida.

Tabla 8. Revisión de literatura de las tesis de posgrado

Autor (Año, País)	Información
Molina (2006) España	I. “Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria”. II. Departamento de didáctica de la matemática en la facultad de ciencias de la educación, Universidad de Granada III. Tesis de doctorado IV. Estudio del uso y desarrollo de pensamiento relacional y de los significados del signo igual que los estudiantes ponen de manifiesto, en el trabajo con igualdades numéricas. V. Reflexión del uso y desarrollo del pensamiento relacional, además, el trabajo describe once significados que estudiantes de educación básica manifiestan en el trabajo con igualdades numéricas (Propuesta de actividad de cálculo, operador, separador, expresión de una acción, ecuación, expresión de una equivalencia, definición de un objeto matemático, expresión de una relación funcional, indicador de una correspondencia, aproximación y asignación de un valor numérico). Estos significados son clasificados dentro de las comprensiones del signo igual en operacional hacia lo relacional.
Parodi (2016) México	I. “Significados del signo de igual en la entrada al álgebra: un estudio de casos con estudiantes de segundo año de enseñanza secundaria”. II. Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada del instituto politécnico nacional III. Tesis de maestría IV. Aportar conocimiento y desarrollo del pensamiento algebraico dirigido a estudiantes y docentes de enseñanza secundaria sobre la comprensión del signo igual, ¿Qué tanto avanzan los estudiantes de segundo año en la comprensión del signo de igual, luego de incursionar en el estudio del álgebra? ¿Qué dificultades genera una concepción inadecuada del signo de igual, cuando los alumnos de segundo año trabajan en contexto algebraico? ¿Cómo favorecer la comprensión del signo de igual en contexto algebraico, que contribuya a superar esas dificultades? V. Las conclusiones del trabajo distinguen una dificultad en el aprendizaje cuando los estudiantes asocian el significado del signo igual como un operador condicional, el cual se manifiesta cuando el signo igual es interpretado como el indicador de un resultado dentro del contexto de una ecuación, en lugar de comprender una expresión de equivalencia. La investigación destacó que una comprensión relacional permite a estudiantes aplicar propiedades, mejorar su desempeño y comprensión de los procesos algebraicos en una ecuación.

1.2.5 Conclusiones de la Revisión de Literatura

Durante y después de la revisión de literatura es necesario dar respuesta a las siguientes interrogantes:

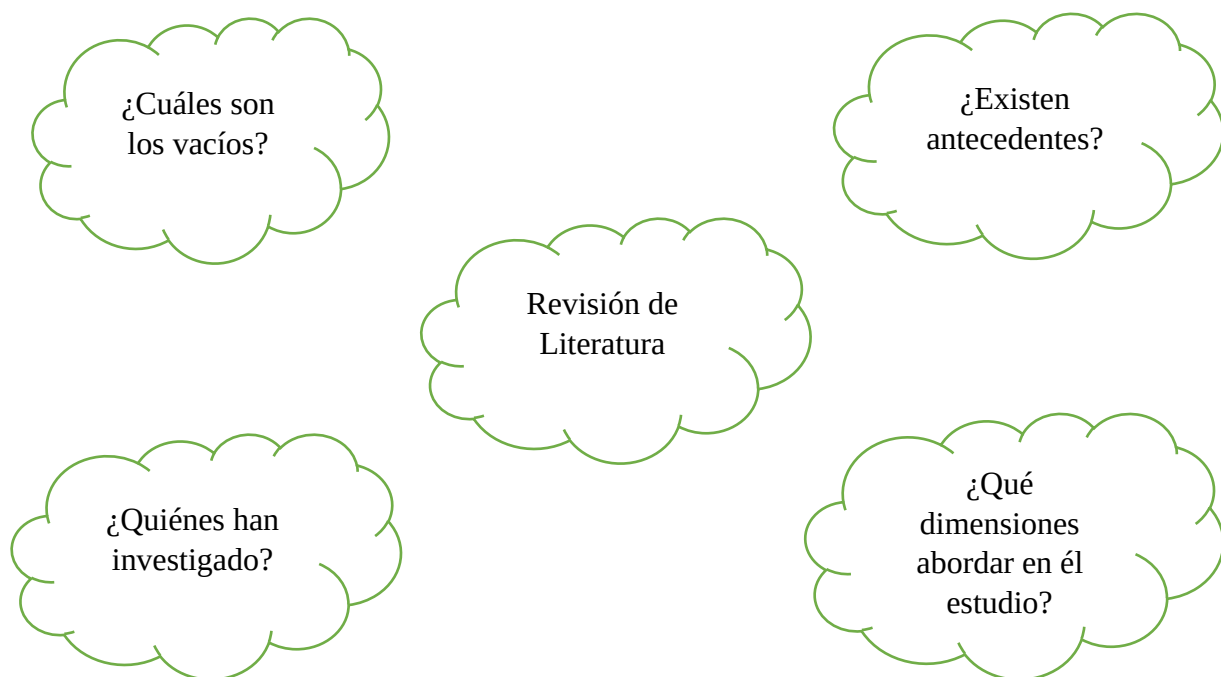


Figura 2. Interrogantes de una revisión de literatura. (elaboración propia)

En conclusión, la revisión de literatura evidenció que la comprensión del signo igual es una problemática a nivel global, la cual se estudia a partir de las respuestas y explicaciones por estudiantes de educación básica. En general, las dificultades y concepciones inadecuadas se vinculan al significado y enseñanza que se centra en la ejecución de operaciones, en lugar de promover un significado de equivalencia. En gran parte de los estudios se resaltó que una comprensión relacional favorece al desempeño del trabajo con el signo igual, al ofrecer una capacidad cognitiva óptima para comprender los conceptos de los signos y simbología matemática, sin embargo, esto no siempre es así, debido a que los estudiantes adoptan significados y palabras para hacer referencia a algunos de estos signos y símbolos. Por ejemplo, en el caso del signo igual algunos estudiantes tienden a interpretar la palabra “resultado” como complemento del uso del signo igual después de realizar actividades y ejercicios desde sus estudios de la aritmética desarrollando así una visión unidireccional e inadecuada para el estudio del álgebra. Las investigaciones de Kieran (1981); Essien y Setati (2006); Molina et al. (2009); Matthews et al. (2012); Burgell y Ochoviet (2015); Baiduri

(2015); Broitman et al. (2017); Vermeulen y Meyer (2017); Parodi et al. (2017, 2020 y 2024); Madej (2020); Donovan et al. (2022); Fyfe et al. (2020); Milnkovic et al. (2022); y Lee y Pang (2023), concordaron que los estudiantes tienden a desarrollar dos comprensiones importantes: operacional y relacional del signo igual. En palabras, una concepción inadecuada del signo igual puede ser clasificada como una dificultad en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en todos sus contextos principalmente y desde la aritmética, esta problemática también, puede estar asociada con la didáctica en el uso del material didáctico, el currículo y conocimiento del docente, además de su nivel de comprensión del signo igual, el lenguaje que utiliza en clase, las metodologías y estrategias, por último, el poco interés que se presta para que los estudiantes desarrollen una comprensión relacional desde sus primeros estudios hasta su propia adultez. Ante la presente y desarrollo de este problema de investigación, surge el interés de analizar la interpretación del signo igual como una dificultad en la enseñanza y aprendizaje, la cual prevalece y obstaculiza una transición del conocimiento del aritmética al álgebra y que es necesario tomar conciencia y reflexión con los docentes sobre la necesidad de desarrollar una comprensión relacional del signo igual en los estudiantes y que tengan un nivel adecuado para el estudio del álgebra y para próximos niveles académicos.

1.3 Planteamiento del problema

Durante los primeros años de enseñanza de las matemáticas, los estudiantes interactúan con números y símbolos desarrollando significados asociados a los usos y procesos de solución de las actividades, particularmente, en la aritmética gran parte de los estudiantes centran su atención en la simplificación de operaciones al tratar de concluir la operación con un resultado considerando que es el objetivo más importante dentro de una actividad matemática, como consecuencia a este enfoque, interpretan que el uso de símbolos son una señal para “hacer algo” con los números. A esto se suma el uso iterativo de los símbolos de adición (+), diferencia (-), producto (x) y división ($\div$), empleados para representar las operaciones básicas de la aritmética.

En este sentido, los estudiantes tienden a concebir dichos símbolos como operadores que desencadenan una acción inmediata sobre los números, incluso llegan a asociar el significado de operador con el signo igual. Es decir, el uso de igualdades y operadores se asume como

una instrucción de cálculo, lo que dificulta la posibilidad de reconocerlos como parte de un conocimiento profundo que permite expresar propiedades, equivalencias y generalizaciones. Esta comprensión parcial, aunque en un principio funcional para resolver ejercicios rutinarios, puede convertirse en un obstáculo para el aprendizaje, sobre todo cuando se requiere ampliar en su significado, por ejemplo, el caso del signo igual (=) para expresar una equivalencia, o la formalización de los operadores como símbolos de una relación estructurada y no únicamente de procedimientos.

La revisión bibliográfica permitió describir los significados que los estudiantes atribuyen al uso del símbolo “=”, así mismo, clasificarlos en niveles que van de lo *operacional* a *relacional*. Los resultados documentados en diversos estudios sobre la concepción inadecuada del signo igual dejaron al descubierto una clara problemática para el análisis de dificultades como asociar la palabra resultado, interpretar unidireccionalmente las expresiones matemáticas y su vínculo con la enseñanza recibida. Con base a este problema la pregunta de investigación es.

¿De qué manera la enseñanza y los significados que asocian los estudiantes al signo igual revelan las dificultades que persisten en el tránsito de la aritmética al álgebra?

1.4 Objetivo

- Analizar las dificultades en el aprendizaje que se manifiestan en los procesos de solución de los estudiantes, con el propósito de identificar el carácter de obstáculo didáctico, en especial, las que se vinculan con la interpretación y comprensión del signo igual.

1.4.1 Objetivos específicos

- Explorar los significados que los estudiantes atribuyen al signo igual en contextos aritméticos y algebraicos.
- Identificar las dificultades que los estudiantes manifiestan en sus procesos de solución de actividades que involucran el uso del signo igual.
- Reconocer los métodos de enseñanza que obstaculizan el desarrollo de una concepción adecuada del signo igual

- Describir y caracterizar un proceso de reflexión docente sobre la interpretación del signo igual que limita o favorece al tránsito del conocimiento aritmético hacia el algebraico.

1.5 Justificación

Las matemáticas son la base de las ciencias exactas y su estudio es primordial para el desarrollo del razonamiento lógico, abstracto y relacional. Es conveniente que los estudiantes cuenten con una adecuada base de conocimientos sobre los conceptos y significados de la simbología usados en matemáticas. Un símbolo y a su vez un concepto muy importante es la comprensión del signo igual (Serres, 2011).

En muchos casos algunos estudiantes asocian el significado del signo igual como el indicador de una acción o resultado (Molina, 2006). Desde el estudio de la aritmética los estudiantes presentan dificultades en la comprensión del uso de operadores y simbología al no conceptualizar de forma generalizada las propiedades de los operadores básicos (asociativa, conmutativa y distributiva); y en el caso del signo igual sus propiedades transitiva, reflexiva y simétrica. Es importante considerar que los estudiantes cruzan una *zona transicional* de la aritmética al álgebra en la que los operadores y el uso del signo igual en la modelización de expresiones algebraicas expresan una relación de equivalencia (Godino et al., 2012).

Socas (2007) señala que las dificultades en el aprendizaje, pueden clasificarse como obstáculos que limitan la construcción del conocimiento y persisten al cambio conceptual de los estudiantes. El estudio de las concepciones inadecuadas de los estudiantes requiere un análisis profundo.

Las investigaciones centradas en la comprensión de los estudiantes con respecto al signo igual, y las dificultades en su aprendizaje, dejan al descubierto un amplio campo de estudio para la didáctica de las matemáticas. En primera instancia, tanto el significado que se atribuye a la igualdad matemática como la manera en la que se comunica debe permitir al estudiante desarrollar un nivel de comprensión adecuado, pues es una condición que favorece al desempeño y conocimiento desde la aritmética hacia el álgebra (Kieran, 1981; Molina et al., 2009; Essien y Setati, 2006; Mathews et al. (2012), Burgell y Ochoviet, 2015; Parodi, (2015, 2020, 2024); y Lee y Pang, 2023).

El método de solución influye en que los estudiantes, pues adoptan algoritmos, aprenden patrones y desarrollan ideas y creencias que pueden preservar durante su formación, sobre todo, si son prácticas funcionales para resolver actividades propuestas de forma habitual (Kieran, 1981; Abrate et al., 2008, Broitman et al., 2017; Vermeulen y Meyer, 2017; y Milinkovic et al., 2022).

En este trabajo se planteó el análisis de la interpretación del signo igual y su vínculo con dificultades en el aprendizaje, particularmente aquellos que son identificados como obstáculos producto de factores condicionantes como la impartición del aritmética con ejercicios rutinarios, las metodologías tradicionales orientadas a la obtención de un resultado, el uso inadecuado de un lenguaje matemático y su relación con el desempeño de los estudiantes en el tránsito de la aritmética al álgebra con el propósito de concientizar a docentes sobre la necesidad de trabajar y diseñar metodologías que favorezcan a la construcción del conocimiento y comprensión profunda del signo igual.

CAPÍTULO 2. MARCO DE INVESTIGACIÓN

¿Qué es un marco de investigación?

Según Lester (2005), un marco de investigación se define como “una estructura de ideas que sirven como fundamento para el fenómeno que se va a investigar”. Al respecto, Sánchez (2012) citó la idea: “un marco de investigación puede extenderse como una estructura teórica que se utiliza en una investigación”. Ambos autores concuerdan en que el marco de investigación debe concentrar las ideas y aspectos clave que debe cubrir un estudio. En este sentido, dentro de toda investigación se debe presentar un marco, el cual según sus características y fundamento se clasifican en: teórico, práctico y conceptual.

2.1 Tipos de marcos de investigación

A partir de Eisenhart (1991), se distinguen tres tipos de marcos de investigación: teórico, práctico y conceptual.

La autora define a un *marco teórico* como una estructura que guía la investigación y que se basa en una teoría formal, a partir de explicitaciones que le dan coherencia de ciertos fenómenos y relaciones. Por ejemplo, en didáctica de las matemáticas podemos encontrar la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget, la teoría sociocultural de Vigotsky, la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, entre otros. Estos marcos teóricos pueden servir como sustento a una investigación, la cual implica una base formal de sus antecedentes.

Marco práctico: Este marco se construye a partir de las experiencias de aquellos que están involucrados en la práctica. En este tipo de marco se hace referencia al conocimiento acumulado por profesionales, profesores e investigadores, no está constituido por una teoría formal, se pueden establecer preguntas de investigación que favorezcan la sustentación de un marco práctico. Un ejemplo base en la didáctica de las matemáticas es la resolución de problemas de Pólya en 1945, quien formuló un modelo articulado con cuatro fases que abordan desde comprender el problema, diseñar un plan, ejecutar el plan y revisar. Estas fases constituyen una guía para la investigación y sustenta las ideas prácticas dentro de ella.

Marco conceptual: este marco sirve como guía de justificación, incluye los conceptos y recopilación de datos en particular del problema de investigación. Al igual que un marco

teórico se elabora a partir de literatura previa e investigaciones. En un marco conceptual se puede adoptar diferentes teorías y argumentar en diversos conocimientos prácticos para una investigación. Esta ventaja ofrece flexibilidad en la consulta de fuentes literarias y recopilación de datos.

La concentración de conceptos es una de las funciones básicas de un marco conceptual, su elaboración sirve como base argumentativa en la investigación y definiciones importantes.

Daros (2002) describe que en las investigaciones descriptivas se construye un marco conceptual, en el cual se analizan y organizan los conceptos clave del tema de estudio. El autor debe consultar los antecedentes, reunir los datos de la teoría, los conceptos y dar coherencia, así mismo, los convierte en bloques que servirán como sustento de la investigación que desarrolla.

A partir de las características descritas un marco conceptual favorece a la organización de la información dentro de una investigación, además permite comparar y sustentar las ideas, lo que es útil para analizar diferentes autores, definiciones o enfoques, por ejemplo, las distintas definiciones de las matemáticas.

2.2 Elementos de un marco conceptual

A continuación, se describen las bases que sustentan un marco conceptual constituido por tres importantes dimensiones: ontológica, epistemológica y didáctica. Con respecto, a la dimensión ontológica se busca dar respuesta a la pregunta ¿Qué son las matemáticas?, en cuanto a la dimensión epistemológica se busca dar explicación a la pregunta ¿Cómo se genera el conocimiento?, por último, en la dimensión didáctica se establecen las orientaciones que intervienen en el proceso de enseñanza – aprendizaje, buscando un enfoque en los conocimientos que el docente debe reconocer y comunicar a los estudiantes.

2.2.1 Dimensión ontológica

Desde una perspectiva ontológica, resulta fundamental reflexionar sobre el origen y significado de las matemáticas y el tipo de entidades que constituyen su objeto de estudio. En primer lugar, un análisis etimológico del término permite aproximarse a su significado original. De acuerdo con Godínez (1997), etimológicamente la palabra *matemática* proviene del griego *manthanein*, que significa aprender, lo cual se relaciona con el estudio, la práctica

y la observación. En suma, el término *mathema* se asocia con nociones como ciencia, conocimiento, aprendizaje, enseñanza, talento y disciplina. En palabras del autor, la palabra matemática significa estudiosa o ciencia por excelencia. En este sentido, desde su origen la matemática se vincula con la actividad intelectual orientada a comprender y organizar el conocimiento.

En la antigua Grecia, esta concepción se manifestó en la organización del conocimiento. Platón consideraba a la matemática como una agrupación de tres ciencias: la aritmética, la geometría y la astronomía. Esta designación permitió el nombramiento como *ciencias matemáticas*, o bien simplemente *matemáticas*. Posteriormente, los pitagóricos ampliaron esta agrupación al incorporar la música, estableciendo así cuatro ciencias que conformaban el núcleo de los saberes matemáticos. A su vez, el término *mathematikos*, del cual deriva la palabra matemático, hacía referencia según Platón, a quien se dedica al trabajo intelectual y al aprendizaje (Godínez, 1997).

Con el paso del tiempo, el campo de las matemáticas se amplió y diversificó. Durante el siglo XVII se integró el álgebra como parte fundamental dentro de esta ciencia y, hacia finales del mismo siglo, se incorporó el cálculo diferencial e integral, lo cual marcó una transformación significativa en la manera de comprender y estudiar los fenómenos matemáticos. Este proceso evidencia que las matemáticas no constituyen un conocimiento estático, sino una construcción del conocimiento en constante evolución.

Tradicionalmente, hasta la segunda mitad del siglo XIX, las matemáticas eran definidas como la ciencia de los números, la magnitud y la forma. Sin embargo, el desarrollo de enfoques teóricos condujo a concepciones amplias vinculadas con la lógica y las estructuras formales. En este sentido, el grupo Bourbaki define a las matemáticas como la ciencia que estudia, mediante el razonamiento deductivo, las propiedades de entes abstractos – como números, figuras geométricas, funciones o espacios – y las relaciones que se establecen entre ellos. Otra definición la proporciona Santiago Valiente, quien sostiene que las matemáticas pueden entenderse como la ciencia que estudia, analiza e interpreta las abstracciones numéricas, espaciales y funcionales de las leyes de la naturaleza, de la sociedad y del pensamiento (Godínez, 1997).

Por otra parte, las matemáticas se plantean como una herramienta para reflexionar, analizar y explorar el mundo que nos rodea, pues ofrecen una forma de pensar clara frente a las situaciones (Ani, 2021).

Expertos en matemáticas, las describen como la *ciencia de los patrones* (Steen, 1988). En una línea similar, Devlin (1994) señala que el papel fundamental de un matemático radica en examinar patrones abstractos que pueden ser numéricos, geométricos, de movimiento o de comportamiento, entre otros. Estos patrones pueden existir dentro como fuera del espacio físico y pueden ser reales o imaginados, visuales o mentales, cualitativos o cuantitativos. De esta forma, las matemáticas se conciben como una ciencia que busca identificar regularidades y estructuras en distintos contextos.

A partir de estas definiciones, puede afirmarse que las matemáticas se configuran como un campo de conocimiento que estudia entidades abstractas, relaciones y patrones mediante procesos de razonamiento lógico. Esta caracterización abre paso a una reflexión sobre la naturaleza y definición de los **objetos matemáticos**.

Los objetos matemáticos pueden entenderse como entidades que permiten organizar e interpretar la realidad dentro de determinados contextos. Al respecto, Pecharromán (2014) define que un objeto matemático representa una cualidad o una acción cuya función consiste en organizar o interpretar un contexto. Por lo tanto, los objetos matemáticos permiten la organización e interpretación del conocimiento matemático.

En general, la construcción de un objeto matemático implica una relación entre su representación y un significado. Por un lado, el significado se asocia a la interpretación que se realiza del objeto. Por otro, la representación corresponde a un conjunto de símbolos y signos que facilitan la expresión y el uso del objeto dentro de un contexto. Además, los signos permiten comunicar propiedades. Por lo tanto, la construcción de un objeto matemático consiste en asociar un aspecto representacional (símbolos y signo) y un significado a la funcionalidad que representa. Esta conexión permite entrever una relación triádica signo-objeto-significado, la cual concentra el conocimiento que se tiene sobre el objeto matemático a través del reconocimiento y su funcionalidad organizativa e interpretativa dentro del contexto.

De esta manera, Pecharromán (2014) describe que la interpretación de un objeto matemático depende en gran medida del contexto en el que se utilice. Por ejemplo, el símbolo “x” puede representar una multiplicación en aritmética, mientras que en el álgebra puede funcionar como una variable o un valor desconocido, el signo “+” suele indicar una operación de suma, aunque en otros contextos puede asociarse con relaciones geométricas, como la perpendicularidad entre rectas. En el caso del símbolo “=” (signo igual), su significado también varía según el contexto. Por un lado, en la aritmética el uso tradicional de este signo suele asociarse de manera inmediata e intuitiva. Por ejemplo, dependiendo de la representación puede indicar un resultado de una operación ($2 + 3 = 5$), expresar una identidad ($2 + 3 = 3 + 2$) o representar una relación de igualdad dentro de una ecuación ($2x + 3y = 5$).

Sin embargo, el aprendizaje de un objeto matemático también supone la manifestación de un significado personal, el cual se desarrolla a partir de las experiencias y procesos cognitivos del individuo. Así, la funcionalidad organizativa o interpretativa del objeto que se representa se atribuye a una comprensión que reconoce al aprendizaje como un medio.

En consecuencia, la comprensión también permite interpretar los atributos del objeto matemático – representación, propiedades, relaciones, entre otros. – desde la funcionalidad que representa.

En síntesis, el aprendizaje y comprensión de los objetos matemáticos implican la articulación de la relación triádica signo-objeto-significado. La autora baso sus estudios en el siguiente esquema (Figura 3) como representación de la relación.

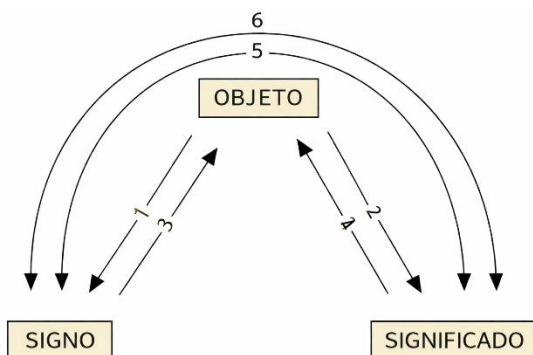


Figura 3. Relación triádica de un objeto matemático Fuente: Pecharromán (2014)

La autora agregó que las relaciones 1 y 2 se establecen desde la construcción institucional del conocimiento matemático, la cual se desarrolla a partir de procesos culturales, históricos y sociales. Mientras que, las relaciones 3 y 4 justifican el aprendizaje o reconocimiento del objeto. Finalmente, las relaciones 5 y 6 caracterizan la articulación correspondiente al sentido dado por (5) significado-objeto-signo donde el significado se atribuye al objeto y (6) signo-objeto-significado la cual permite que el signo se interprete junto al objeto que representa.

Por último, la dimensión ontológica citada permite concebir a las matemáticas como un conjunto de conocimientos constituido por entidades abstractas, relaciones, patrones y objetos, los cuales se les atribuye un significado a través del uso que se hace de ellos en diferentes contextos y se representan mediante símbolos o signos. Como el signo igual que se establece como una relación de equilibrio entre dos expresiones matemáticas aritméticas y algebraicas, su significado tiende a evolucionar de acuerdo al contexto. Sin embargo, este proceso resulta ser largo y presenta varias dificultades en su interpretación, algunas de ellas vinculadas a la experiencia cognitiva, didáctica y empírica de los conocimientos de los estudiantes y de los profesores. Situación que se debe construir desde la relación entre el significado y su interpretación.

2.2.2 Dimensión Epistemológica

En esta dimensión se debe hacer énfasis en cómo se construye el conocimiento matemático, al respecto, se adopta una postura de tipo constructivista, la cual sustenta que el conocimiento se construye mediante la interacción del individuo con los objetos y su entorno. Con base en Piaget (1975), quien plantea que un “proceso lógico matemático se enfatiza en la construcción de la noción del conocimiento, que se desglosa de las relaciones entre los objetos y descende de la propia producción del individuo”. Es decir, el individuo construye el conocimiento, coordinando las relaciones que previamente ha creado entre los objetos. Al respecto, Ausubel et al. (1998) destaca que “el aprendizaje se basa en reestructuración activa de los procesos mentales que se suscitan en la estructura cognitiva del ser humano”. Esto significa que la interacción entre la información, sus conocimientos previos, y las características personales del individuo, le permiten que su aprendizaje sea autónomo, y mantenga una relación con los objetos, además de desenvolverse en el medio (Lugo et al., 2019).

De acuerdo, a Piaget todo individuo, incluso los niños, nacen con la capacidad de organizar el conocimiento del mundo mediante *esquemas mentales*, los cuales se pueden describir como un conjunto de acciones físicas, de operaciones, de conceptos o de ideas con las cuales organiza la información que percibe acerca del mundo y su entorno. Un niño de corta edad explora su mundo a través de acciones físicas que realiza manifestando capacidades innatas y espontáneas que lo llevan a un aprendizaje. Con el tiempo, el niño aprende a realizar operaciones y a usar atributos cognitivos, el lenguaje, por ejemplo. Así, a medida que el individuo experimenta cambios en su manera de pensar y aprender va pasando por etapas; desarrolla su capacidad de emplear esquemas complejos y abstractos que le permitirán organizar su conocimiento (Meece, 2000). A este proceso Piaget lo llamó etapas de desarrollo cognitivo. Proceso que describe como progresivo y adaptativo mediante dos capacidades innatas la asimilación y acomodación, mismas que por factores genéticos se van desarrollando y estimulando dentro de las etapas o también llamados estadios del desarrollo. Por un lado, la asimilación consiste en la interiorización o internalización de un objeto. Mientras que, la acomodación sugiere la modificación del esquema para adaptarse.

Piaget (1978) añade que el desarrollo cognitivo viene caracterizado por un desequilibrio que conducirá a un nuevo estado, equilibrando la información que interpreta y da lugar a un conocimiento. De acuerdo a esta postura, el conocimiento se puede generar a partir de una secuencia de equilibrios y desequilibrios provocados por la interacción del individuo con su entorno.

Dentro del desarrollo cognitivo, Piaget (1991) distinguió cuatro periodos denominados en inteligencia sensorio-motora que se presenta dentro los primeros dos años de vida; se caracteriza por el aprendizaje a través de la acción y la percepción. Después, entre los dos a siete años se encuentra la etapa preoperacional, en la cual los niños desarrollan el lenguaje y las primeras representaciones simbólicas, aunque su pensamiento aún es intuitivo. Posteriormente, la tercera etapa corresponde a las operaciones concretas, que ocurre aproximadamente entre los siete y once años, esta etapa favorece al desarrollo de las operaciones lógicas basadas en objetos concretos. Finalmente, se encuentra la etapa de las operaciones formales que se establece a partir de los once años en adelante y se distingue por

el desarrollo del pensamiento abstracto y del razonamiento hipotético-deductivo (Piaget, 1972).

En general, el constructivismo concibe el conocimiento como una construcción propia del sujeto, este proceso se realiza de manera permanente y en cualquier entorno que interactúe. Según Celi et al. (2021) un enfoque constructivista permite orientar al niño a construir su propio conocimiento de forma activa, analiza e interpreta la información, para luego proponer sus alternativas y resolver problemáticas.

En particular, durante la educación secundaria, los estudiantes suelen encontrarse en la etapa de operaciones formales, lo que les permite interpretar y desarrollar significados a objetos y expresiones matemáticas. En este contexto, la interpretación de signos matemáticos como el signo igual “=” requiere que los estudiantes reconozcan no solo su función operativa, sino también su relación de equilibrio.

Por lo tanto, desde una perspectiva epistemológica constructivista, la comprensión del signo igual implica que los estudiantes construyan el significado de este símbolo tomando en cuenta los conocimientos previos y procesos de razonamiento. En conclusión, analizar cómo interpretan el uso del signo igual permite identificar las dificultades que obstaculizan la interpretación en el tránsito del conocimiento matemático. Además, favorece a la reflexión acerca de la necesidad de resignificar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la aritmética hacia el álgebra.

2.2.3 Dimensión Didáctica

Brousseau planteó la necesidad de introducir una disciplina científica que sustente la elaboración de propuestas de aprendizaje. El investigador le llamó entonces *Didáctica de las Matemáticas* creando la *Teoría de Situaciones Didácticas (TSD)*. Constituida como un conjunto de estrategias que buscan determinar las condiciones que hacen posible la construcción de conocimientos en los estudiantes. La TSD permite la implementación de una situación didáctica y otra adidáctica, ambas controladas por el docente. Primero la situación didáctica comprende al entorno del estudiante, incluyendo al docente y el sistema educativo (Brousseau, 2007). El docente organiza un medio como una serie de elementos simbólicos o materiales que pueden incluir un juego, un desafío, un problema, o incluso un ejercicio físico, entre otros; (carrera a 20, por ejemplo). Una vez implementado se deben proporcionar las

reglas e indicaciones para que el estudiante interactúe con este medio. Después, la situación adidáctica conduce a un conocimiento determinado, el docente elige una problemática y organiza un medio de aprendizaje, los estudiantes tratan de resolver el problema con sus propios conocimientos, exploran, reflexionan y validan sus respuestas, sin la intervención directa del docente. El docente puede involucrar un proceso que oriente libremente las decisiones de los estudiantes hasta llegar a una construcción, durante este proceso, el docente delega la responsabilidad del conocimiento al estudiante. A este proceso Brousseau llamó devolución. Posteriormente, se identifica un segundo proceso necesario entre los conocimientos que los estudiantes exponen y el docente, quien asume la responsabilidad de proporcionar información para que los estudiantes se apropien del significado produciéndose así la institucionalización, después de abordar una situación didáctica (Gálvez y Block, 2024). Los autores Gálvez y Block (2024) describen que, desde la perspectiva constructivista de la TSD, el conocimiento se considera como producto de una adaptación al enfrentar una situación o problema, los conceptos atraviesan procesos de descontextualización y despersonalización, gracias a estos procesos los conceptos generados se convierten en saberes matemáticos, lo esencial es que el sujeto (estudiante) sea capaz de construir sus propios conocimientos mediante la adaptación progresiva, misma que se convierta en una estrategia eficaz para resolver un problema previamente planteado. Una de las grandes incógnitas sobre cómo se da el aprendizaje es ¿Qué tipo de problemas proponer para la enseñanza?, el planteamiento de esta pregunta se identifica como un proceso necesario para crear expectativas progresivas para dicha construcción. El docente es el protagonista principal para crear o reproducir un problema que propicie el aprendizaje y que los estudiantes construyan el conocimiento. Desde este enfoque se busca proyectar conciencia sobre la problemática de la interpretación del signo igual y la necesidad de ayudar a los estudiantes la construcción del concepto de igualdad como relación de equivalencia desde un primer contexto aritmético hasta su transición al álgebra a través de una construcción lógica formal.

2.3 Marco Conceptual

En este apartado se describen y organizan los conceptos base de la investigación, estos sirven de guía para dar coherencia al tema de estudio. Para el desarrollo de la investigación fue necesario mostrar dos enfoques: la presencia de obstáculos en el aprendizaje y su influencia en la construcción de objetos matemáticos. Este trabajo se centró en las dificultades en el aprendizaje, e interpretación del signo igual con respecto a los significados inadecuados que los estudiantes manifiestan debido a la práctica, enseñanza y uso del material didáctico en el aula. En la literatura la presencia de esta situación se identifica como uno de los principales problemas que obstaculizan el paso de la aritmética al álgebra. El signo igual y su significado pueden favorecer al desempeño del estudiante, si este no se construye adecuadamente esta situación se deriva en un obstáculo para el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas. Por lo tanto, para esta investigación es importante describir los factores y clasificaciones de obstáculos en el aprendizaje, así como los significados del signo igual que obstaculizan el entendimiento de la aritmética y su posterior uso en el estudio del álgebra.

2.3.1 Obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas

Un obstáculo se define como aquella barrera física que no permite continuar un camino. En didáctica de las matemáticas se identifican como dificultades, las cuales obstruyen la construcción de conocimientos, desarrollo de habilidades y destrezas, además de presentar problemas de comprensión. La primera idea de obstáculo epistemológico fue introducida en 1938 por Bachelard y hace referencia a un conocimiento, el cual resulta útil o exitoso en un determinado contexto. En sus propias palabras: “llega un momento en el que el espíritu prefiere lo que confirma su saber a lo que contradice, en el que prefiere las respuestas a las preguntas”, por lo cual se manifiesta como una resistencia al cambio (Bachelard, 1938). También puede considerarse como un conocimiento anterior, concepción inadecuada, ideas intuitivas sin fundamento teórico, dichas nociones se conocen como obstáculos epistemológicos, los cuales hacen cuestionar o negar un nuevo conocimiento. Posteriormente, en la didáctica de las matemáticas Guy Brousseau (1983) clasificó los obstáculos encontrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje en obstáculos epistemológicos, obstáculos ontogenéticos y obstáculos didácticos.

Los obstáculos epistemológicos en la didáctica de las matemáticas se encuentran relacionados con un conocimiento limitado que conduce al estudiante a utilizar concepciones de una enseñanza adaptada, donde primero fueron necesarios, pero que perturban duramente los aprendizajes y que persisten incluso después de la comprensión de saberes correctos sobre conceptos, signos, símbolos y objetos matemáticos (Gálvez et al. 2020). Los obstáculos ontogenéticos se caracterizan por ser propios de los estudiantes surgen en su formación escolar a partir de que el conocimiento supera su capacidad de análisis, abstracción y posiblemente su experiencia, influye la edad y su etapa de desarrollo cognitivo, por lo tanto, el docente los puede observar mas no evitar. Andrade (2011) define que los obstáculos didácticos provienen de la enseñanza y se estudian a través del análisis de los errores más frecuentes de los estudiantes. Por esta razón es importante identificarlos porque si se conocen se pueden evitar. Además, Osorio y Moreno (2022) mencionan que el uso inadecuado de expresiones y la mala construcción del currículo tradicional impide que los conceptos necesarios se logren obtener, una situación muy frecuente sucede cuando el docente repite lo que aprendió de la misma manera en cómo le fue enseñado. En este sentido, Lárez (2018) señala que uno de los factores que inciden en el aprendizaje de la matemática es la forma en cómo se enseña. El autor destaca que el conocimiento didáctico que posee el docente es lo que permite seleccionar la estrategia, actividades y formas de enseñanza, de acuerdo al concepto a comunicar. Por lo tanto, el tiempo, la enseñanza, el lenguaje y los recursos didácticos son factores relevantes para interiorizar el conocimiento. Los obstáculos didácticos se pueden atribuir a aspectos metodológicos, curriculares o también conceptuales. Metodológicos cuando en el aula se hace uso de estrategias ineficientes como la práctica enfocada a la memorización de fórmulas sin una explicación previa, además de la cultura y las creencias propias, el uso inadecuado de palabras en el aula. Por otro lado, el diseño del currículo en el plan de estudios puede limitar un salto conceptual, en este caso el obstáculo didáctico se considera de índole curricular. Por último, los conceptuales se presentan al comunicar una idea o distorsión sobre un concepto u objeto. Por ello, la reflexión sobre estos obstáculos es necesaria porque si se identifica el origen se puede adecuar el método didáctico y una efectiva formación docente (Andrade, 2011). La clasificación de estos obstáculos se presenta en la Figura 4.

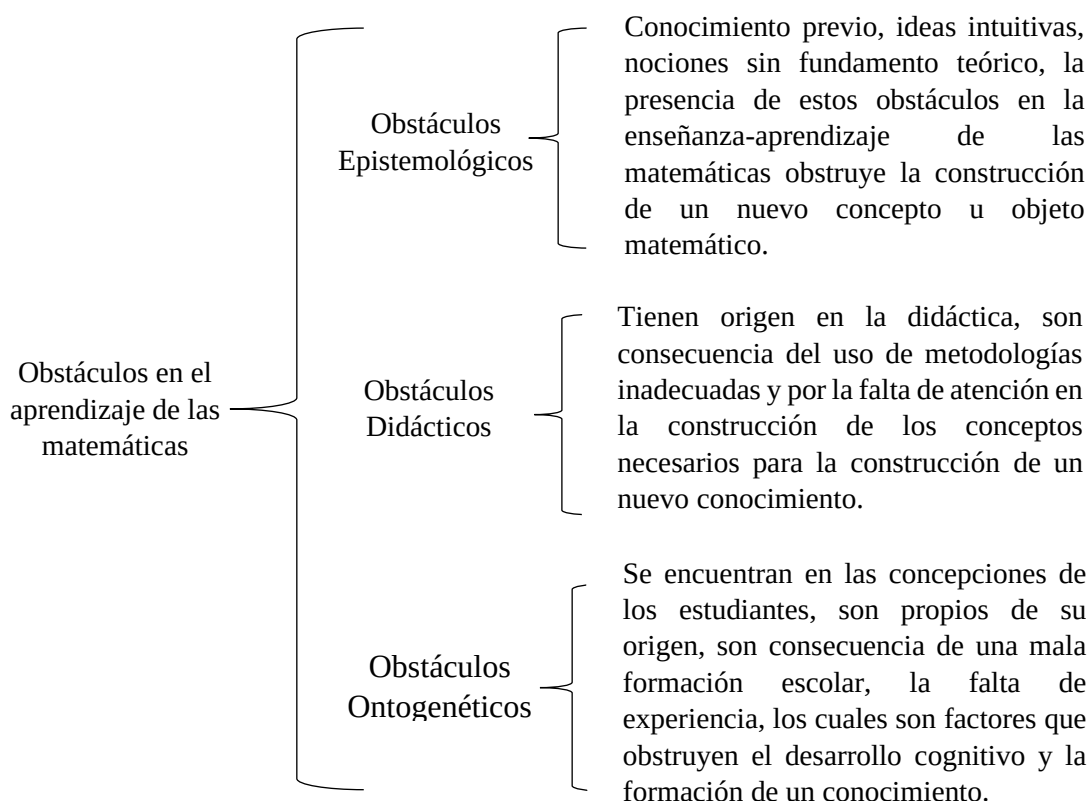


Figura 4. Cuadro sinóptico de obstáculos en la didáctica de las matemáticas, *Elaboración propia.*

2.3.2 Teoría de Situaciones Didácticas (TSD)

La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) es reconocida como una amplia teoría sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas propuesta por Guy Brousseau, fundador de lo que ahora se conoce como Didáctica de la Matemáticas. Santos (2023) describe que la TSD es una propuesta constructivista desarrollada en la década del 1970, diseñada para apoyar a los docentes, quienes motivados por el interés sean capaces de crear metodologías con base en el diseño e innovación de situaciones con el propósito de hacer reflexionar y comunicar el saber matemático, en estas situaciones se espera que los estudiantes interactúen con un medio diseñado y controlado; al principio Brousseau estudió el constructivismo de Piaget el cual se caracteriza por la apropiación y desarrollo progresivo de la cognición, por lo cual el o los sujetos son capaces de aprender al interactuar con su entorno. En relación, la teoría de la TSD se centra en las condiciones y características que deben cumplir un medio de interacción diseñado para el estudiante, el cual se espera que conduzca a los estudiantes a la

construcción de conocimientos de manera indirecta. La TSD contempla dos situaciones esenciales una situación didáctica donde el interés del profesor está en la enseñanza de un saber matemático para el estudiante y una situación adidáctica la cual se plantea como una estrategia indirecta con el propósito de satisfacer las condiciones de un aprendizaje por adaptación ya que a través de esta situación el estudiante tiene la posibilidad de validar o invalidar las estrategias que se ponen en práctica para resolver un problema. Gálvez (2024) destaca que el profesor tiene la tarea de diseñar el medio material o intelectual con el que los estudiantes aprenden, a este proceso de creación y respuesta se le conoce como devolución y posterior a ello se concede la llamada institucionalización donde el docente es el responsable de aportar la información a sus estudiantes. El proceso de interacción de una situación dentro de la TSD se encuentra mejor descrita en lo que se conoce como diagrama del triángulo didáctico (Figura 5).

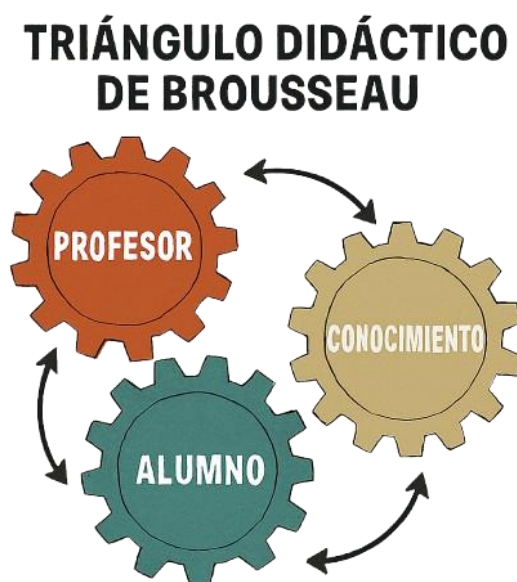


Figura 5. *Triángulo Didáctico de la TSD (Basado en la TSD de Brousseau, 1983).*

Elaboración propia.

Basados en la TSD García et al. (2022) describen los tipos y momentos que se presentan en una situación didáctica, a continuación, se presenta dicha clasificación:

1. Situación de acción: se genera por la interacción de los estudiantes y el medio diseñado por el profesor.
2. Situación de formulación: se identifica por el intercambio de ideas y comunicación entre los estudiantes, la adaptación y evolución del lenguaje.
3. Situación de validación: se basa en la capacidad de convencimiento de un estudiante para demostrar sus afirmaciones y así persuadir a uno o más de sus compañeros.
4. Situación de institucionalización: establece las relaciones entre los estudiantes y el saber cultural, para ello el profesor debe supervisar que los estudiantes propongan sus propias conclusiones después de la formulación y la validación.

2.3.3 La ingeniería didáctica

La ingeniería didáctica es una metodología de investigación y diseño pedagógico que busca desarrollar y validar estrategias de enseñanza orientadas a resolver problemas específicos de aprendizaje, especialmente en matemáticas (Leal, 2024). Surgió en los años 80, según Artigue (1992) es “un enfoque experimental que permite la creación y evaluación de dispositivos de enseñanza, basados en teorías educativas, cuyo es objetivo favorecer la comprensión de los estudiantes sobre conceptos específicos”. En otras palabras, autores destacados en educación matemática han definido esta metodología; por ejemplo, en Brousseau (1997) la describió como una metodología que "permite analizar las condiciones en las que se dan los aprendizajes matemáticos y prever el comportamiento de los estudiantes mediante la construcción de situaciones didácticas”. En suma, Sensevy (2007) la caracterizó como un “método de investigación cualitativa en el que el investigador crea un dispositivo didáctico particular para probar hipótesis pedagógicas”. La ingeniería didáctica forma parte de los aportes de la gran escuela francesa dentro de la cual también destacan la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brousseau y la Transposición Didáctica (TD) de Yves Chevallard.

Artigue et al. (1995) desarrolló y formalizó el estudio de la ingeniería didáctica en su trabajo el cual propone cuatro fases.

1. Análisis preliminares
2. Concepción y análisis a priori
3. Experimentación y recolección de datos

4. Análisis y validación a posteriori

En la primera fase de análisis preliminares el estudio se enfoca en tres aspectos: el epistemológico, el didáctico y el cognitivo. La segunda fase de concepción y análisis a priori comprende una sección descriptiva y otra predictiva, en estas secciones se diseña la secuencia didáctica, junto con el medio físico material o intelectual, posteriormente se espera la devolución del proceso que se describe en la TSD como producto de la resistencia y validación de las posibles respuestas de los estudiantes; para la tercera fase en la experimentación los estudiantes entran en la etapa de realización e interactúan con el medio, se establece un contrato didáctico y se da registro a las observaciones durante el desarrollo de esta fase, finalmente el análisis a posteriori después de presentarse situaciones de acción, formulación y validación se presentan los datos recolectados con base a las pruebas realizadas (cuestionarios, entrevistas, juegos, etc.) y como conclusión se establece una confrontación de los análisis a priori y a posteriori.

2.3.3.1 Fases de la ingeniería didáctica

A continuación, se describen las fases de la ingeniería didáctica. Según Artigue et al. (1995) se divide en cuatro etapas, las cuales son:

Análisis preliminares: en esta primera fase de la metodología con ingeniería didáctica se consideran tres aspectos importantes:

- Epistemológico asociado a las características del saber matemático.
- Didáctico enfocado a la enseñanza y sus efectos.
- Cognitivo relativo al análisis de las concepciones de los estudiantes y profesores las cuales determinan las dificultades y obstáculos.

Todos estos análisis deben de realizarse a partir de los objetivos específicos propuestos en la investigación. Las siguientes preguntas también forman parte de los análisis a priori:

- ❖ ¿Cuál es el problema que se identifica en cada uno de los individuos de estudio?
- ❖ ¿Qué conocimientos se deben poseer para tener éxito en las concepciones matemáticas?
- ❖ ¿Qué control se debe tener sobre la acción en el aula?
- ❖ ¿Qué fases comprenden el estudio?

Concepción y análisis a priori: este análisis comprende una situación descriptiva y una predictiva presentes en una situación a-didáctica. Se concentra el diseño de dispositivos didácticos con diversas actividades y las posibles respuestas o devoluciones.

Experimentación: en esta tercera fase se entiende la puesta en escena del instrumento de investigación y el posterior análisis de las producciones de los estudiantes. La investigación debe enfocarse en los objetivos y condiciones adecuadas para la realización de la intervención en la población de estudio, establecer un contrato didáctico y finalmente dar pie a la interacción estudiantes – medio y profesor.

Análisis a posteriori y validación: a esta fase le corresponde la recopilación y análisis de datos que se obtienen de la experimentación; posteriormente se reflexiona sobre el alcance y validación de las suposiciones formuladas en la investigación. La confrontación de dos análisis a priori y a posteriori permite la aparición de limitaciones conceptuales en la población de estudio. A continuación, se muestra el diagrama de las fases de la ingeniería didáctica en la Figura 6:

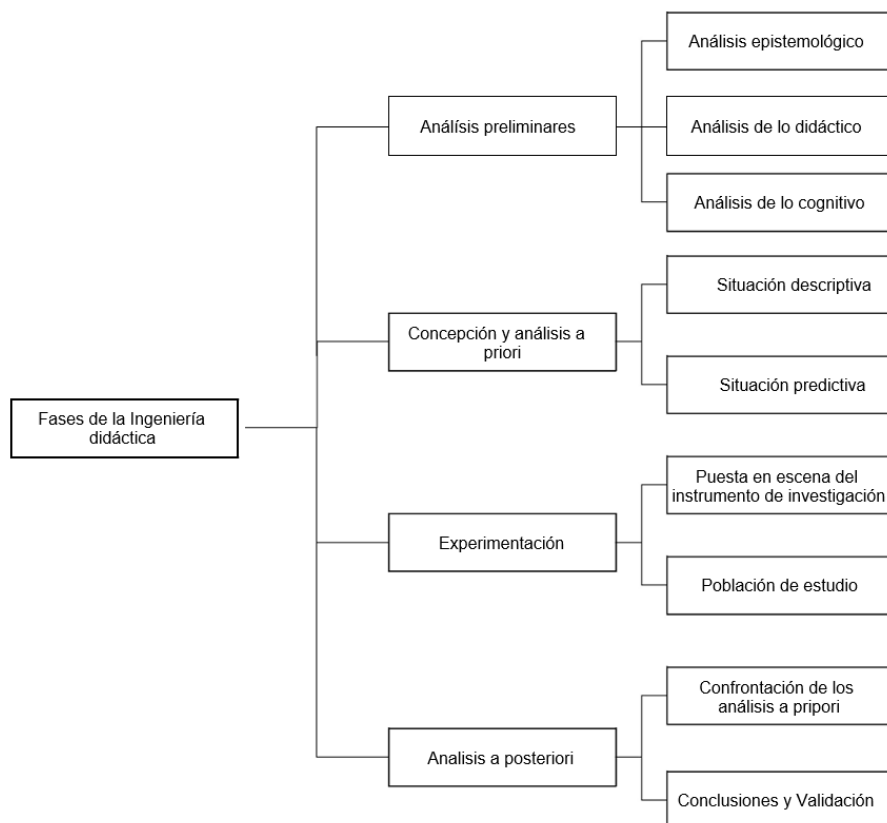


Figura 6. Fases de la ingeniería didáctica basado en Artigue (1995) Elaboración propia.

2.3.4 Transición de la aritmética al álgebra

La transición de la aritmética al álgebra es uno de los temas fundamentales que se han estudiado durante los últimos años (Kieran, 1989). La aritmética y el álgebra comparten varios signos y símbolos, entre estos los más frecuentes son los signos de suma y resta, el uso de letras, el signo de la raíz y el signo igual. Estos signos y símbolos evolucionan en su significado al pasar de la aritmética al álgebra, creando así conflictos en su interpretación y dificultades en su entendimiento según Kieran (1981), los estudiantes adoptan percepciones diferentes dependiendo de la situación por ejemplo en el caso del signo igual desde el contexto aritmético algunos estudiantes consideran la presencia de este signo como el “indicador de hacer algo”, mientras que para entender el uso del signo igual en el álgebra se necesita identificar al signo igual como una relación de equivalencia, esta es una de las principales causas del por qué los estudiantes experimentan un proceso que en ocasiones los limita en su comprensión, a este fenómeno se le ha denominado transición del aritmética al álgebra.

La presencia de una transición de la aritmética al álgebra implica un cambio conceptual considerable. Numerosos trabajos de investigación han centrado su interés en la llamada zona transicional de la aritmética al álgebra (Kieran, 1989; Serres, 2011). Lo primero que llama la atención es el uso de elementos matemáticos que coinciden en ambas ramas los operadores “+” y “ x ”. En la construcción del conjunto de los números reales estos operadores se definen con propiedades conmutativa, distributiva y asociativa. El intercambio en la representación de cantidades con el uso de letras en lugar de números requiere un desarrollo en el razonamiento del estudiante con expresiones generalizadas sobre términos, números y operadores para la formación de objetos matemáticos. El álgebra resulta ser un estudio con alto nivel de abstracción, difícil de entender para los estudiantes, pero necesario para estudios posteriores de las matemáticas como la trigonometría, la geometría analítica y el cálculo. No obstante, el álgebra también constituye una parte muy importante en el estudio de otras ciencias exactas como la física y la química, además de también influir en ciencias sociales como economía, informática, contabilidad, etc. El álgebra nos proporciona un gran bagaje para representar situaciones específicas, concretas, generales y válidas. Una situación muy relevante en la transición de la aritmética al álgebra es la comprensión del signo igual y su contribución al aprendizaje escolar.

2.3.5 El álgebra escolar

En la enseñanza tradicional del álgebra es común encontrar un enfoque centrado en las operaciones, los estudiantes en sus primeros estudios forman expresiones algebraicas (monomios y polinomios) para operar, posteriormente usan el lenguaje verbal para construir expresiones que requieren una solución (ecuaciones). En Arcavi et al. (2017) definen que los objetivos del álgebra escolar consisten en expresar generalizaciones, establecer relaciones, resolver problemas, explorar propiedades, demostración de teoremas y calcular. Por otro lado, Stacey y MacGregor (2000) señalan que una de las principales razones por las cuales los estudiantes no logran una concepción adecuada de la lógica mediante el álgebra radican en sus experiencias previas en la aritmética, donde la práctica les genera un impulso a calcular, lo cual se manifiesta en el significado que le dan a un valor desconocido, su interpretación de lo que es una ecuación y sus procesos de solución. En relación, la enseñanza tradicional del álgebra al centrar su atención en las operaciones con expresiones algebraicas y la solución de ecuaciones han dejado de lado muchos aspectos. En la investigación en didáctica de las matemáticas los estudiantes presentan obstáculos al transitar de la aritmética al álgebra, un obstáculo muy presente en el aprendizaje de los estudiantes es su comprensión del signo igual (Serres, 2011).

2.3.6 Usos del signo igual en el álgebra

El signo igual representa usos concretos en el álgebra principalmente en la formación de expresiones y construcción de objetos matemáticos según Godino (2003):

1. *Identidad*: la igualdad resulta ser verdadera para cualquier valor que tomen las variables ejemplo: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. *Ecuación*: la igualdad sólo se satisface con ciertos valores de las variables involucradas $3x + 7 = 13$.
3. *Fórmulas*: se determina una relación de dependencia entre dos o más variables, ejemplo: $Ec = \frac{1}{2}mv^2$
4. *Definición de un objeto*: el signo igual se utiliza para definir un objeto matemático como en el caso de: $\pi = \frac{c}{d}$

5. *Función*: se construye el objeto matemático de función al determinar un proceso de transformación para un dominio de valores definidos y obtener una regla de correspondencia (imagen).

Ejemplos más comunes: funciones lineales $f(x) = ax + b$, funciones cuadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$, funciones racionales del tipo $f(x) = \frac{a}{x}$, funciones exponenciales $f(x) = a^x$, etc.

2.3.7 Propiedades del signo igual como relación de equivalencia

El pensamiento relacional del signo igual permite identificar las propiedades de la igualdad como una relación de equivalencia estas propiedades son:

- *Reflexiva*: un término numérico y/o expresión algebraica es idéntica así misma, tal como: $a = a$.
- *Simétrica*: dos términos y/o expresiones algebraicas son equivalentes, si representan el mismo valor numérico, si $a = b$ como $b = a$, así como $a + b = c$ entonces, $c = a + b$.
- *Transitiva*: si una entidad numérica o algebraica está relacionada con otra representación equivalente, y está a su vez tiene relación con otra. Se concluye que si $a = b$ y $b = c$, entonces, $a = c$.

2.3.8 Propiedades de la adición y el producto del signo igual

Las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva del signo igual permiten adoptar diversos escenarios donde el uso y comprensión de estas propiedades para la resolución de ecuaciones resulta ser esencial:

- *Adición de términos*: si $a = b$, entonces $a + c = b + c$
- *Multipliación de términos*: si $a = b$, entonces $ac = bc$

Sustitución: si $a = b$ la declaración permite sustituir “a” por “b” o bien “b” por “a” según sea el caso con el fin de sintetizar, resolver y verificar una expresión matemática.

2.3.9 Reflexión Docente

A partir de los trabajos de Alsina (2007) se incluyó a la reflexión docente como un proceso de resolución de conflictos y dudas, parte de la idea de que el profesor se convierte en el protagonista y el impulsor de su propia formación. A través de un análisis profundo de sus actos. Para ello, el autor propone la intervención de un ciclo reflexivo basado en Korthagen (2001), dividido en cinco fases:

1. Experiencia de los asistentes (acción): Esta fase inicial se identifica por la puesta en práctica del docente con una serie de procedimientos y habilidades para establecer un panorama favorable a la participación.
2. Proceso de concientización de la propia actuación (de vuelta a la acción): El docente inicia con una reflexión de su propia actividad e interacción en aula, lo que da oportunidad a la comparación.
3. Concientización de prácticas susceptibles de ser modificadas (conciencia sobre los aspectos esenciales): Esta tercera fase se produce gracias a la reflexión individual y grupal, el profesor se vuelve capaz de identificar algún aspecto de su práctica docente propensa a modificar, y así favorecer su contenido.
4. Investigación y aplicación de nuevo conocimiento en el aula (Diseño de métodos alternativos de acción): El docente analiza opciones de mejora continua, para facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje.
5. Reflexiones y aprendizajes finales (Ensayo): La última fase consiste en llevar a cabo el proceso de reflexión sobre la práctica y mejora en el aula.

Alsina (2007) propone el siguiente esquema (Figura 7) como propuesta al proceso de un ciclo reflexivo.

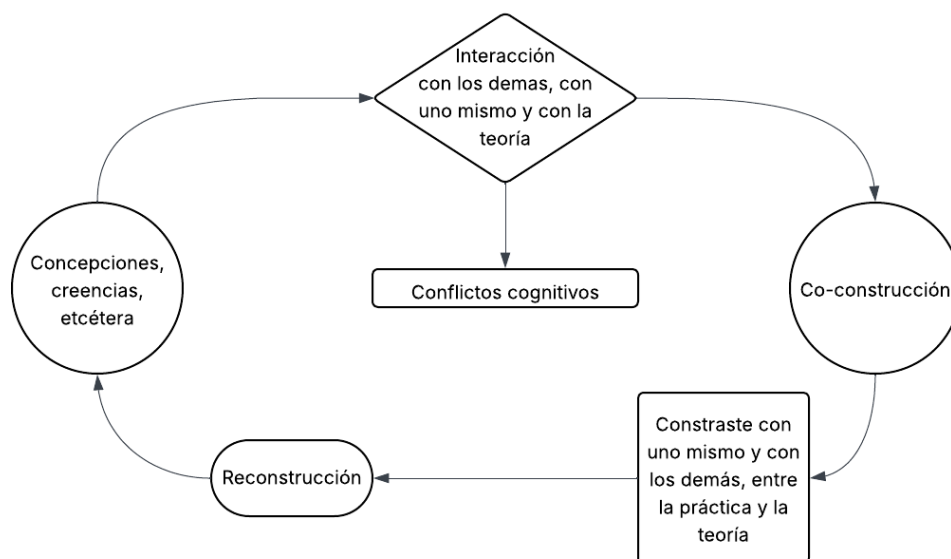


Figura 7. *Ciclo reflexivo, Alsina (2007).*

2.3.10 Reflexión sobre el proceso de enseñanza de las matemáticas en el aula

La enseñanza de las matemáticas en el aula se promueve en dirección a los programas de estudio, mediante prácticas y metodologías como la resolución de problemas. Weiss et al. (2019) considera cinco dimensiones específicas de análisis para identificar áreas de oportunidad y desarrollo:

a) Conocimiento de las nociones matemáticas

Bajo este panorama se identifica a la enseñanza tradicional como una dificultad a los docentes que hacen práctica de procesos monótonos y que como consecuencia imitan los estudiantes, en contraste, en un proceso de reflexión se logra acceder a ser flexible sobre los procesos de enseñanza, con el objeto de retroalimentar el conocimiento, y eludir las nociones que obstaculizan el aprendizaje significativo. Cabe destacar que una enseñanza tradicional se puede encontrar implícita también en el material didáctico “libros”.

b) Los problemas planteados presentan limitaciones

El conflicto por el cual se deriva este análisis se debe a la intervención de prácticas docentes, por ejemplo, cuando el profesor aparenta un monólogo, en el cual pregunta a los estudiantes, pero el mismo, se responde, dicta y toma decisiones, además de plantear problemas excluidos de la realidad, en consecuencia, se ostenta poco espacio a la participación y desarrollo del aprendizaje. Es importante la reflexión del docente para

plantear problemas con la intención de convertirse en un desafío y resignificar la pertenencia del conocimiento.

c) La diversidad de procedimientos: manifestación de un avance

Este análisis promueve la adaptación y aceptación de la diversidad de procesos para resolver un problema de índole aritmética o algebraica, el reconocer y valorar un procedimiento correcto de los estudiantes, favorece a la autonomía y desarrollo del aprendizaje.

d) La ejercitación de algoritmos: una práctica continúa

El cuarto análisis pertenece al diseño de algoritmos significativos, que favorezcan los métodos de resolución de problemas.

e) El material concreto y los juegos, con algunas limitaciones

Esta dimensión favorece al análisis para evaluar la organización del material didáctico y el uso de juegos didácticos que ayuden a la construcción de objetos y conceptos matemáticos.

Con base al trabajo de Chevallard (1991) sobre el triángulo didáctico. En las investigaciones de Weiss et al. (2019) se presenta el esquema didáctico (Figura 8) que describe el proceso de análisis sobre la enseñanza de las matemáticas en el aula.

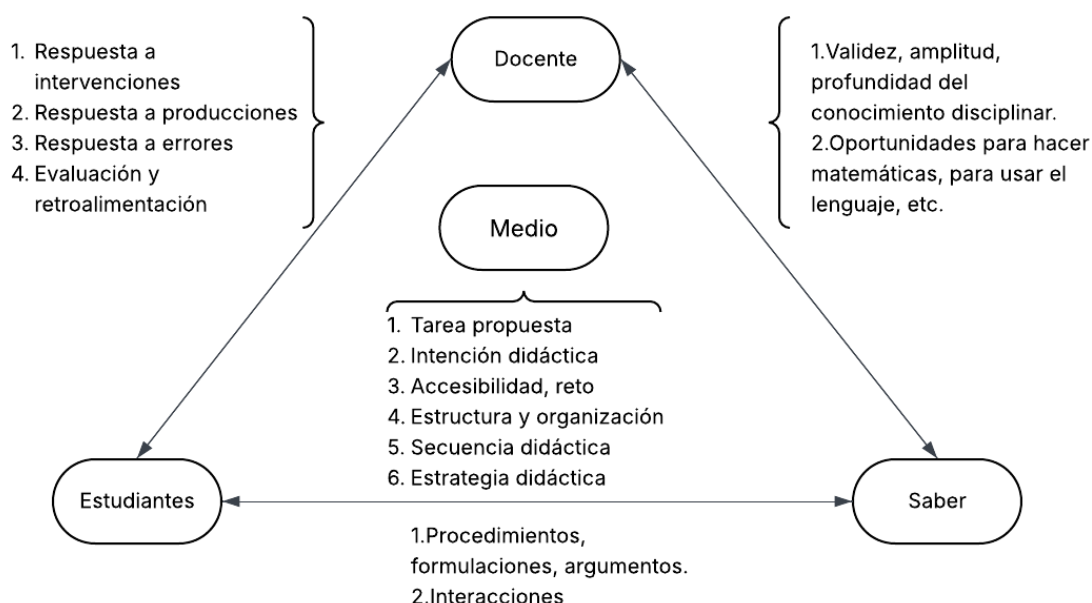


Figura 8. Esquema Didáctico, Chevallard (1991), Fuente: Weiss et al. (2019)

CAPÍTULO 3 METODOLOGÍA

3.1 Introducción

La palabra metodología significa “ciencia del método” o “ciencia de cómo hacer”. La adaptación de un “método” se relaciona más con las herramientas de recolección de datos y con las técnicas, mientras que una *metodología* posee un significado más general y filosófico lo que permite aplicar enfoques y técnicas de investigación basados en familias de investigación (Gómez 2010).

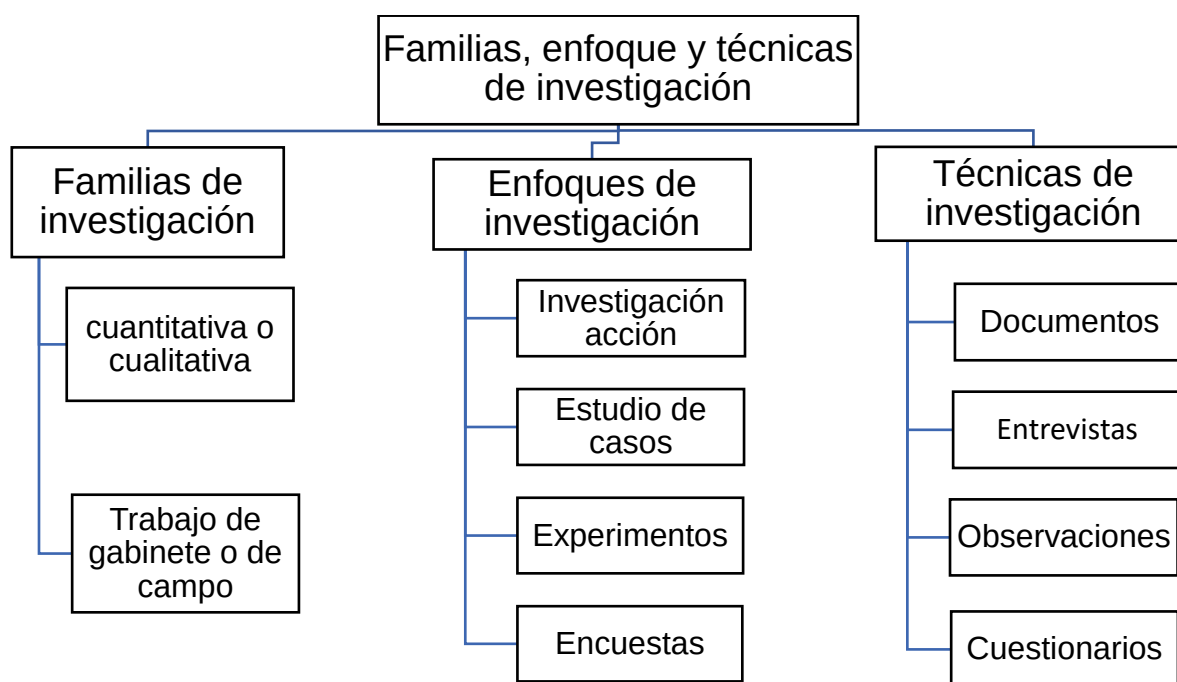


Figura 9. Esquema familias, enfoque y técnicas de investigación (Blaxter, Hughes, Tight, 2000: 90)

El estudio presentado en esta tesis tiene una naturaleza cualitativa con base a la ingeniería didáctica como metodología de investigación que incorpora un análisis robusto en la recopilación de datos. Este proceso, incluyó el diseño de un instrumento con preguntas y actividades (igualdades de completar, ecuaciones y problemas) relacionadas con los significados del signo igual.

3.2 Población de estudio

Para la aplicación del instrumento de investigación se optó por trabajar con estudiantes de secundaria entre 12 a 15 años, especialmente estudiantes de segundo y tercer grado debido a

que se encuentran en la introducción formal al estudio del álgebra, después de haber recibido la enseñanza de la aritmética, En estos grados se comienza el trabajo con ecuaciones y expresiones algebraicas. A esta edad, los estudiantes reconocen igualdades numéricas y algebraicas por lo cual presentan un nivel de cognición ideal para la realización del material. Además, su conocimiento se encuentra en una etapa de transición entre lo aritmético y lo algebraico, donde el signo igual adquiere un papel fundamental como equivalencia. Por último, en este nivel se han registrado concepciones inadecuadas de tipo operacional, o bien se puede manifestar una concepción adecuada dentro de lo relacional, lo que permitió analizar y evidenciar las producciones de los estudiantes.

En este sentido, se aplicó el medio con estudiantes de educación secundaria. Se analizó el trabajo de los estudiantes al resolver la secuencia de actividades concentradas en el material. En suma, se trabajó una sesión tipo taller con docentes de educación media superior de diversas preparatorias de la región de Hidalgo. En este taller, además de la aplicación del instrumento, se discutió sobre las producciones de los estudiantes que manifestaron una concepción inadecuada del signo igual y aquellos que se identificaron de manera correcta.

3.3 Fase 1: Análisis preliminares

En esta fase se analizaron estudios relacionados con la resolución de igualdades numéricas abiertas, preguntas sobre el significado del símbolo “=”, igualdades de verdadero/falso, cadenas de igualdad, problemas de situaciones reales y expresión de valor desconocido tipo figura y tipo letra (Essien, 2006; Abrate et al., 2008; Molina et al., 2009; Mathews et al., 2012; Burgell y Ochoviet, 2015; Baiduri, 2015; Broitman et al., 2017; Vermeulen y Meyer, 2017; Parodi et al., 2017; Fyfe et al., 2020; Parodi et al., 2020; Wardat et al., 2021; Donovan et al., 2022; Madej, 2022; Milinkovic et al., 2022; y Lee y Pang, 2023). Todos estos trabajos permitieron establecer el orden y tipo de actividades que se utilizaron en el instrumento de investigación.

El instrumento se dividió en cuatro momentos, el primero de ellos relativa a las palabras y significados que estudiantes asocian al símbolo “=” y el uso que se le atribuye al signo con igualdades cerradas verdadero/falso. El segundo, referente al trabajo de una equivalencia numérica con igualdades abiertas. El tercero, asociado con expresiones equivalentes, resolución de problemas aplicados a situaciones reales y resolución de ecuaciones, y el

cuarto, dirigido a docentes con la intención de concientizar acerca de la enseñanza y necesidad de trabajar la interpretación del signo igual.

El *primer momento* se llamó exploración con el propósito de indagar y dejar al descubierto las palabras y significados que se asocian al signo igual. Por lo cual, la primera pregunta del instrumento es: ¿Qué palabras asocias y usas para referirte a este símbolo “=”? Según los resultados de Mathews et al. (2012), Burgell y Ochoviet (2015), Baiduri (2015), Vermeulen y Meyer (2017), Fyfe et al. (2020), Parodi et al. (2020) y Madej (2022), los estudiantes al responder esta pregunta utilizaron palabras como: resultado, igual, igualdad, equivalencia, entre otras. Estos estudios señalaron que usar palabras como resultado obstaculiza la comprensión del signo igual al asociar este símbolo con significados de *señal de hacer algo*, *operador*, *expresión de una acción*. Estos significados ponen de manifiesto una concepción inadecuada del signo igual por los estudiantes. Mientras que, el uso de palabras igual e igualdad según Lee y Pang (2023) no garantiza que se manifieste una comprensión incorrecta o completa, incluso puede entenderse como una comprensión simultánea, por último, el asociar con las palabras como equivalencia o equivalente dejan entre ver una posible concepción adecuada del signo igual por los estudiantes.

Por otra parte, estudios con igualdades verdadero/falso como $7 + 3 = 10 + 3$ (Molina, 2009); $16 = 7 + 9$ (Burgell, 2015); o $6 + 4 = 5 + 5$ (Donovan, 2022). Además, se incluyó el uso de cadenas de igualdades como $5 + 9 = 14 \div 2 = 7 \times 3 = 21$ reportada en Essien (2006). Los investigadores señalan que este tipo de igualdades dejan al descubierto la presencia de una lectura unidireccional asociado a interpretar un orden de izquierda a derecha tipo *operación = resultado*, mientras que, expresiones tipo $a = b + c$ en este caso los estudiantes llegaron a interpretar un orden inverso, y en algunos casos rechazaron o aceptaron la expresión recurriendo a reescribir la igualdad de la forma $b + c = a$, situación que obstaculiza una lectura bidireccional de la igualdad. Por otro lado, el rechazo en expresiones tipo $a + b = c + d$ dejan de manifiesto dificultades en comprender la propiedad simétrica de la igualdad.

Por último, en el uso inadecuado o aprobación de las cadenas de igualdad, las investigaciones señalaron que los estudiantes asociaron el significado de *separador*, además este orden de realizar operaciones viola las propiedades transitiva y simétrica de la igualdad. para analizar

estos resultados y evidenciar dichas situaciones se propusieron las siguientes cuatro igualdades:

$$15 - 8 = 7 + 1; 22 = 15 + 7; 6 + 5 = 7 + 4; \text{ y } 12 + 3 = 15 + 1 = 16.$$

El *segundo momento* llamado *ampliación* concentró igualdades abiertas de completar relacionadas con el concepto de equivalencia numérica, basados en Broitman et al. (2017) trabajar con igualdades como $228 + 49 = __ + 50$, junto con cadenas de igualdad apropiadas como $350 + __ = __ * 20 = __ / 2 = 700$ (Milinkovic et al., 2022), posibilitan una ampliación del conocimiento y significado del signo igual en la aritmética. En suma, Mathews (2012) destacó que este tipo de igualdades permite que el estudiante observe una comparación en las cantidades, sin la necesidad de recurrir al cálculo, hecho que favorece a mostrar un nivel avanzado en la comprensión del signo igual. En este sentido, las igualdades propuestas fueron:

$$215 + __ = 175 + 216; 5 + 6 = __ + 4 = 11; 350 + __ = __ * 20 = __ / 2 = 700; \text{ y } \frac{3}{4}(-) = 2; \text{ con esta última, se examinaron las dificultades que se manifestaron en la resolución de igualdades con fracciones equivalentes y sus propiedades.}$$

El *tercer momento* se llamó *transición* en este apartado se concentró con actividades de expresiones algebraicas con ecuaciones tipo $ax + b = cx + d$ con el valor desconocido tipo letra en ambos lados, investigaciones como Abrate et al. (2008) han señalado que este tipo de ecuaciones requieren métodos algebraicos formales, como el método de la balanza o soluciones por equilibrio de igualdades, en lugar de recurrir a modelos aritméticos, situación que favorece a una transición del conocimiento y aprendizaje de la aritmética al álgebra. Por otro lado, según Fyfe et al. (2020) y Milinkovic et al. (2022) señalaron que el trabajo con problemas de aplicación con situaciones reales favorece a relacionar al signo igual con significados más apropiados como una expresión de correspondencia.

En suma, con base en Filloy y Rojano (1989) las nociones aritméticas no son suficientes en ecuaciones tipo $ax + b = cx + d$; su resolución implica procesos de origen fuera de la aritmética. Esto deriva en un cambio en el concepto de ecuación o de la igualdad entre números.

El estudiante debe al menos comprender que ambas expresiones son de la misma naturaleza, y que existe un significado para la igualdad más allá de una operación: Por ejemplo, hallar el valor desconocido de una ecuación significa comprobar que ambas expresiones son equivalentes. Al respecto, se propusieron las expresiones:

- Escribe dos formas de expresar la sentencia $13y - 8y = \underline{\hspace{1cm}}$.
- Resuelve: El costo de tres rosas es equivalente a comprar dos rosas y dos girasoles ¿Cuánto cuesta una rosa?, si el costo de un girasol es de treinta pesos.
- Encuentra el valor de “x” que cumple la expresión: $2x + 7 = 4x - 5$.
- Si $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, consideras que la expresión $(a + b)^2 = b^2 + a^2 + 2b$ es verdadero; si no ¿Por qué?
- Completa las expresiones con el término algebraico faltante:

$$(x + \quad)^2 = 6x + 9 + \quad; (y - 5)(y + \quad) = y^2 - 25; x^2 + 9x + \quad = (x + 3)(6 + \quad)$$

Las últimas actividades del momento según Parodi (2020) útil para la evaluación del trabajo con polinomios.

En el *cuarto momento* llamado reflexión, dirigido a docentes, con base a las investigaciones de Vermeulen y Meyer (2017) y Parodi et al. (2024) es importante evaluar los conocimientos y concientizar sobre los métodos de solución que se enseñan y las ventajas que se manifiestan al trabajar con actividades que involucran la comprensión del signo igual. En este apartado se aplicó el instrumento de investigación en una sesión tipo taller con docentes las preguntas fueron:

- ¿Sueles enseñar con un enfoque hacia el pensamiento relacional en clase?
- ¿Identificas si este tipo de ejercicios aparecen en los libros de texto?
- ¿Cómo crees que ayudarían a tus estudiantes la implementación de actividades enfocadas a entender una relación de equivalencia del signo igual para el desarrollo de sus habilidades?
- ¿En clase promueves actividades que involucran las propiedades del signo igual y las de los reales?}

Para describir este proceso se elaboró la figura 10, junto con los objetivos que se plantearon en cada momento.

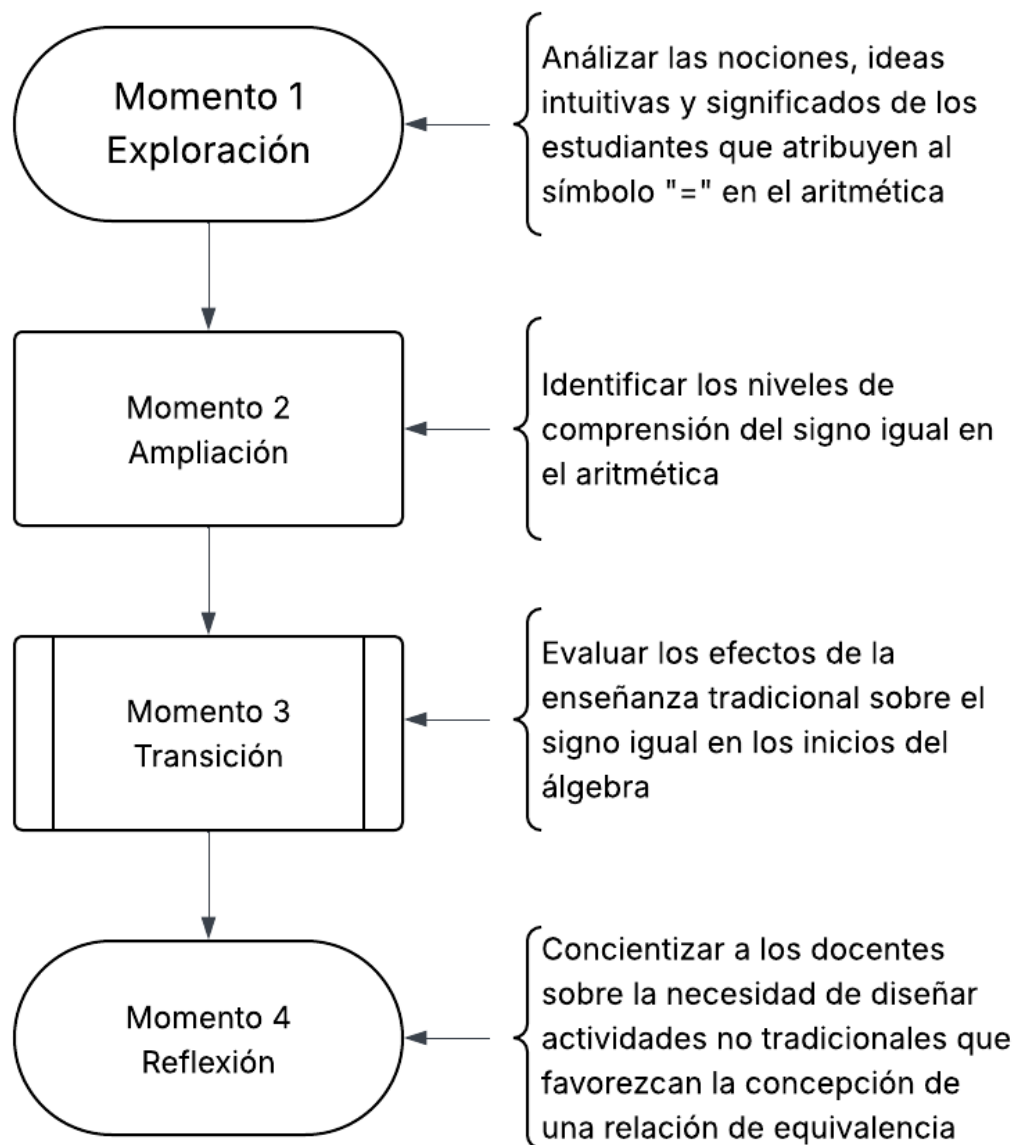


Figura 10. Fases y propósitos de la prueba. *Elaboración propia*

3.4 Fase 2: Concepción y análisis a priori

3.4.1 Análisis del programa de estudios

La segunda fase comprende una situación descriptiva y otra predictiva. En consecuencia, se realizó una revisión de los planes de estudio anteriores y actuales, los libros de texto distribuidos por la Secretaría de Educación Pública (SEP) y los libros que actualmente proporciona la Nueva Escuela Mexicana (NEM).

El programa curricular de la SEP plan 2017 se organiza en tres ejes temáticos distribuidos en doce temas:

Propósitos generales, SEP 2017

Concebir las matemáticas como una construcción social en donde se formulan y argumentan hechos y procedimientos matemáticos.

Adquirir actitudes positivas y críticas hacia las matemáticas: desarrollar confianza en sus propias capacidades y perseverancia al enfrentarse a problemas; disposición para el trabajo colaborativo y autónomo; curiosidad e interés por emprender procesos de búsqueda en la resolución de problemas.

Desarrollar habilidades que les permitan plantear y resolver problemas usando herramientas matemáticas, tomar decisiones y enfrentar situaciones no rutinarias.

https://www.ipmp.gob.mx/web/acervo_digital/documentos/Libros%20Digitales%20Coleccion%20AC/Aprendizajes%20Clave%20para%20la%20Educacion%20Integral.pdf

Tabla 9. Mapa curricular de la SEP plan 2017 (matemáticas)

Número, álgebra y variación
• Número • Adición y sustracción • Multiplicación y división • Proporcionalidad • Ecuaciones • Funciones

• Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes
Forma, espacio y medida • Ubicación espacial • Figuras y cuerpos geométricos • Magnitudes y medidas
Análisis de datos • Estadística • Probabilidad

Los mapas curriculares de la NEM ubican a los grados 1,2 y 3 de secundaria dentro de la fase 6 de su desarrollo con respecto a los saberes y conocimiento científico, la tabla 10 se elaboró con los temas principales que se abordan:

Tabla 10. *Programa de estudio para la educación secundaria de la fase 6 (matemáticas)*

• Expresión de fracciones como decimales y de decimales como fracciones • Extensión de los números positivos y negativos y su orden • Extensión del significado de las operaciones y sus relaciones inversas • Regularidades y patrones • Introducción al álgebra • Ecuaciones lineales y cuadráticas • Funciones • Rectas y ángulos • Construcción y propiedades de las figuras planas y cuerpos • Circunferencia, círculo y esfera • Medición y cálculo en diferentes contextos • Obtención y representación de información • Interpretación de la información a través de medidas de tendencia central y dispersión • Azar y probabilidad

Se analizó el contenido de los libros de texto distribuidos por la NEM identificando los temas y subtemas que favorecen o influyen en la interpretación del signo igual:

Tabla 11. *Análisis del contenido temático de los libros de la NEM*

Grado	Temas	Subtemas	Comprensión del signo igual que favorece	
			Operacional	Relacional
1°	Conversión de números	Conversión de números decimales a fracciones Conversión de fracciones a números decimales	Sentido de aproximación si la equivalencia no es exacta	Solo si es exacta
1°	El cero y los números negativos	Ubicación de los números negativos en la recta numérica	Asocian una diferencia operativa con los signos	Distinguen entre un número positivo y un negativo
1°	Extensión del significado de la suma y la multiplicación	Propiedad conmutativa Propiedad asociativa Propiedad distributiva		Profundiza las propiedades de los números reales
1°	Introducción a la medición y el cálculo	Concepto de longitud y segmento Concepto de distancia entre dos puntos		Se definen equivalencias de aplicación en unidades de medida
1°	Jerarquía de operaciones	Identificación de la jerarquía de operaciones Ejemplos de resolución	No se define la razón del orden Se promueve la simplificación de expresiones Uso frecuente de la palabra “resultado”	Se subraya que hay una agrupación formal en la ejecución de las operaciones
1°	Operaciones básicas positivas y negativas	Suma y resta de fracciones Números decimales	Adoptan el término de fracción Se encuentra ambigüedad en la diferencia de	No definen el conjunto de los números racionales

		Multiplicación y división de fracciones Números decimales	números negativos y positivos Formato $a + b = c$ Leyes de los signos	
1°	Porcentajes	Procedimientos para obtener un porcentaje Representación gráfica	Uso de fórmulas Cancelar expresiones	Se habla de proporcionalidad
1°	Sistemas de ecuaciones	Ecuación de la forma $Ax = B$ Ecuación de la forma $Ax + B = C$ Ecuación de la forma $Ax + B = Cx + D$	Promueve la búsqueda de una solución	Fomenta el uso de procedimientos de balance de la ecuación Respetar las propiedades de adición y multiplicación No se realiza la comprobación
2°	Representación algebraica de áreas	Comprensión de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ Ejemplos de uso		
2°	Propiedades de los exponentes en el álgebra	Comprensión de las operaciones algebraicas mediante las propiedades de los exponentes		Reconocimiento de equivalencias y propiedades de los exponentes
2°	Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas	Método de reducción Método de igualación Método de sustitución	Uso de procesos algorítmicos	Aplican propiedades de la igualdad con los reales

2°	Proporcionalidad inversa	Cálculo de la proporcionalidad inversa Representación gráfica	Solo se trabajan con proporcionalidades enteras	
2°	Múltiplos y submúltiplos de sistemas de medidas	Relación metro, litro y kilogramo Sistema inglés Problemas de aplicación	Uso reservado de la “x” como incógnita	Se definen equivalencias entre unidades de medida
2°	Sucesiones cuadráticas	Representación algebraica con figuras Representación algebraica de sucesiones	Mecanización de procesos	Relación objetos no matemáticos
3°	Ecuaciones de la forma $Ax^2 + Bx + C = 0$	Fórmula general Resolución de ecuaciones Método de factorización	Memorización de una fórmula	No evidencia una simetría entre la ecuación y su factorización
3°	Reparto proporcional	Métodos de resolución Problemas de reparto proporcional	Mecanización de procesos	

En conclusión, el análisis evidenció un contenido temático orientado a favorecer una interpretación relacional del signo igual; no obstante, se continúan promoviendo prácticas de carácter operativo y unidireccional en los procesos de resolución, así como igualdades tipo “*operación = resultado* “. Al respecto, se identificaron dos situaciones relevantes para promover una comprensión sólida del signo igual en los temas de ecuaciones de la forma “ $ax + b = cx + d$ ” y en la resolución mediante las propiedades de adición y multiplicación de términos en una igualdad (Figura 11).

Por otra parte, El análisis sobre el contenido de los libros de la NEM permitió identificar que, cuando los estudiantes recurren a procesos monótonos como la reducción de términos semejantes o la transposición de términos, esto puede atribuirse a la enseñanza recibida, o bien a la práctica que se manifiesta en el aula.

Si se desea encontrar la solución que satisfaga la ecuación $16x + 4 = 8x + 10$, es necesario agrupar los términos semejantes de la ecuación por medio de la propiedad aditiva y multiplicativa de la igualdad:

$$16x + 4 - 4 = 8x + 10 - 4 \quad \text{Se resta menos cuatro en ambos lados de la igualdad.}$$

$$16x = 8x + 6 \quad \text{Ecuación resultante}$$

$$16x - 8x = 8x - 8x + 6 \quad \text{Se resta ocho veces } x \text{ de ambos lados de la igualdad.}$$

$$8x = 6 \quad \text{Ecuación resultante}$$

$$8x \left(\frac{1}{8} \right) = 6 \left(\frac{1}{8} \right) \quad \text{Se divide entre ocho en ambos lados de la igualdad.}$$

$$\frac{8x}{8} = \frac{6}{8} \quad \text{Como } 8x \text{ se divide entre 8, se puede afirmar que se cancela el ocho en la fracción.}$$

$$x = \frac{6}{8} \quad \text{Ecuación obtenida de la división entre ocho}$$

$$x = \frac{3}{4} \quad \text{Se simplifica la fracción.}$$

Agrupar los términos semejantes en una ecuación ayuda a la simplificación de las operaciones por realizar; además, para que se pueda sumar o restar alguna cantidad, ésta debe estar acompañada de la misma incógnita y tener el mismo exponente.

Figura 11. Proceso de solución, libro saberes científicos en ecuaciones $ax + b = cx + d$

3.4.2 Justificación del Instrumento de investigación

Con base, a la fase predictiva de la ingeniería didáctica se estableció una sección justificada donde se especifican los objetivos de cada momento y las igualdades del instrumento, así como, los indicadores para identificar la comprensión del signo igual que predomina en las respuestas de los estudiantes.

Tabla 12. Metodología del instrumento de investigación

Momento	Actividades	Justificación	Comprensión del signo igual	Indicador y conocimientos implicados	Objetivo
Momento 1 Exploración.	1. ¿Qué palabras asocias y usas para referirte a este símbolo “=”? (Burgell y Ochoviet, 2015)	Kieran (1981) menciona que varios estudiantes al comenzar el estudio del álgebra después de su paso por la aritmética suelen interpretar el uso del signo igual como la “señal de hacer algo” ellos conciben que el uso de este símbolo es para separar una secuencia de operaciones e indicar un resultado, lo que los lleva a no comprender las propiedades simétrica y transitiva del signo igual.	Operacional	Si los estudiantes asocian el uso del signo igual con una estructura <i>operación = resultado</i> , indicador de una respuesta o solución.	Identificar y clasificar las palabras y usos que los estudiantes asocian al signo igual con el propósito de evidenciar la presencia de comprensión operacional y relacional, posteriormente reflexionar sobre el uso del lenguaje adecuado para promover una comprensión relacional en los estudiantes.
	2. Determina si las igualdades son verdaderas o falsas.	Basados en el trabajo de Molina (2006), Burgell y Ochovieth (2015)	Operacional	Si la estructura de la igualdad #1, causa conflicto y es	Identificar si la práctica de una enseñanza

	Igualdad #1: $15 - 8 = 7 + 1$ (Molina, 2009) Igualdad #2 $22 = 15 + 7$ (Burgell, 2015) Igualdad #3 $12 + 3 = 15 + 1 = 16$ (Essien, 2006) Igualdad #4 $6 + 5 = 7 + 4$ Donovan et al. (2022)	destacan que los estudiantes pueden mostrar deficiencias en su entendimiento del signo igual si trabajan con ecuaciones que involucren operaciones en ambos miembros de una igualdad, así mismo, mostrar rechazo en estructuras de la forma $a = b + c$, también llegan a confundir el uso del signo igual como una secuencia e interpretarlo como un separador de operaciones. Documentaron que la poca atención de la didáctica hace que los estudiantes no desarrollen los conceptos principales para entender la evolución del signo igual en el álgebra.	Relacional	aceptada los estudiantes demuestran una visión operacional. Lo mismo sucede si rechazan la igualdad #2 por el orden en su estructura. También se considera como operacional si validan la igualdad #3 y rechazan la número #4. Rechazan la igualdad #1 al identificar que no expresan el mismo valor, También, si aceptan la estructura de la igualdad #2 con el argumento de que son lo mismo, además logran identificar el mal uso de una cadena de igualdades en la igualdad #3, por último, si logran, Identificar la igualdad #4 como equivalente. La presencia de estos casos permitirá	tradicional, como el enfoque en la realización de operaciones, influye en la presencia de comprensión operacional en los estudiantes. También se pretende, evidenciar malos usos del signo igual que desarrollan los estudiantes al hacer uso del signo igual como separador de una secuencia de operaciones durante la práctica de la aritmética y por último identificar si los alumnos hacen uso de las propiedades del signo igual para resolver las igualdades.
--	--	--	------------	--	---

		de leer las ecuaciones de forma bidireccional favorece a la realización de operaciones en ambos miembros de la igualdad y ayuda a su comprensión una relación de equivalencia. Relacional comparativo: se identifica gracias a una lectura bidireccional que se apoya en las propiedades del signo y de las operaciones disminuyendo el enfoque en realizar cálculos.			
Momento 3 Transición	1. Escribe al menos dos formas de expresar la sentencia: $13y - 8y = \underline{\hspace{2cm}}$ $13y - 8y = \underline{\hspace{2cm}}$	1. Serres (2011) define que la conceptualización del álgebra escolar está previamente vinculada con la aritmética, el enfoque en realizar operaciones algebraicas como la reducción de términos semejantes como única solución, presenta dificultades al tomar un carácter de generalización esto inhibe percibir los cambios y evolución del significado de los símbolos en el álgebra,	Operacional Relacional	Los participantes completan la igualdad solo con una expresión basada en lo que se conoce como simplificación de términos semejantes y no ofrecen otra respuesta. Los participantes conocen la reducción de términos, además ofrecen al menos una	Evidenciar que el enfoque de algunos estudiantes se centra en la realización de operaciones algebraicas al resolver únicamente con una reducción de términos semejantes.

		entre ellos la comprensión del signo igual. Destaca que los estudiantes experimentan una etapa de transición de su estudio de la aritmética al álgebra.		o dos expresiones equivalentes	
	2. Resuelve y describe el uso del signo igual en el siguiente contexto: “El costo de tres rosas es equivalente a comprar dos rosas y dos girasoles. ¿Cuánto cuesta una rosa?, si el costo de un girasol es de treinta pesos” Milinkovic et al. (2022) a) Encuentra el valor de “x” que cumple la expresión $2x + 7 = 4x - 5$ Parodi et al. (2017)	2. a) Milinkovic et al. (2022) sostiene que la modelación de situaciones de la “vida real” contribuye favorablemente a la correcta comprensión del signo igual, señala que la elaboración de esquemas y manipulativos logran ayudar a los estudiantes en identificar una relación de equivalencia. 2. b) Abrate et al. (2008) señalan que el uso de metodologías como la transposición de términos obstaculizan el razonamiento de los estudiantes desde un principio al hacer uso del lenguaje en acciones descritas como “pasar términos al otro lado de la igualdad con operación contraria” ignorando las	Operacional Relacional	Los estudiantes analizan la redacción del problema y no logran construir una ecuación, intentan resolver haciendo cálculos y proponen una respuesta que resulta ser incorrecta o incompleta. En otros casos logran proponer la ecuación, pero la resuelven de forma algorítmica y tradicional usando las variables comunes (x,y) y con el enfoque en obtener la solución. Los participantes resuelven mediante un razonamiento, en ciertos casos se apoyan con la elaboración de diagramas para	2.a) Evidenciar como los estudiantes llegan a usar esquemas, diagramas y razonamiento lógico para resolver problemas de aplicación de situaciones que pueden experimentar en el mundo real, y esto les ayuda a un entendimiento más completo del signo igual. 2.b) Evidenciar que el uso de la metodología conocida como transposición de términos provoca que los estudiantes solo centren su atención en la solución y no comprueban la

		propiedades de equilibrio de la igualdad.		encontrar la respuesta. Al resolver una ecuación se realiza un procedimiento que involucra el balance de expresiones, también llegan a realizar la comprobación de la ecuación con el valor que cumple la igualdad.	expresión, también se pretende evidenciar que el uso de esta metodología viola las propiedades de equilibrio del signo igual y así mismo, los estudiantes no lo perciben.
	3. Si $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, consideras que la expresión $(a + b)^2 = b^2 + a^2 + 2ab$ es verdadero; si no ¿Por qué?	3 y 4. Ake (2020) advierte que los estudiantes no logran percibir el uso del signo igual como identidad algebraica debido a que en la aritmética tradicionalmente se enseña con énfasis en algoritmos que se apegan a la resolución de operaciones y posteriormente memorización de fórmulas. Se generan entonces una serie de obstáculos incluyendo la comprensión incompleta del signo igual en el contexto algebraico	Operacional	Los participantes rechazan las expresiones, no logran identificar las características de una identidad algebraica basan su conocimiento del álgebra en la memorización y secuencia de pasos.	Identificar si los estudiantes reconocen las propiedades de los reales con el uso del signo igual en una identidad algebraica.
	4. Completa las expresiones con el término algebraico faltante Equivalencia #1 $(x +)^2 = 6x + 9 +$ Equivalencia #2 $(y - 5)(y +) = y^2 - 25$ Equivalencia #3 $x^2 + 9x + = (x + 3)(6 +)$ Aké (2020)		Relacional	Los participantes aceptan las expresiones algebraicas argumentando con las propiedades de la igualdad y de los números reales,	Analizar si los estudiantes resuelven a base de memorización y fórmulas, las cuales les hacen creer un orden estricto en la resolución de expresiones equivalentes. Evidenciar que esto provoca que los

				resuelven con eficacia las equivalencias propuestos aún con modificación en el orden al cual se practica en la enseñanza tradicional.	estudiantes no identifican los elementos que conforman la expresión.
Momento 4 Reflexiones	1. ¿Sueles enseñar con un enfoque hacia el pensamiento relacional en clase? 2. ¿Identificas si este tipo de ejercicios aparecen en los libros de texto? 3. ¿Cómo crees que ayudarían a tus estudiantes la implementación de actividades enfocadas a entender una relación de equivalencia del signo igual para el desarrollo de sus habilidades? 4. ¿En clase promueves actividades que involucran las propiedades del signo igual y las de los reales?	Vermeulen y Meyer (2017) destacan que en algunos casos el currículo, la preparación no orientada y los propios conocimientos del docente resultan ser obstáculos debido a la falta de atención y capacidad para percibir e interpretar las limitaciones conceptuales de sus estudiantes y es una problemática importante en el estudio del álgebra. Fyfe et al. (2020) documentaron que la población de estudiantes adultos y profesores es la menos estudiada porque se atribuye que las concepciones matemáticas se desarrollan por la posible experiencia académica de los individuos y que este		Los docentes reflexionan sobre la influencia de la didáctica en la forma de resolución de las igualdades por parte de los estudiantes, se espera la toma de conciencia sobre los principales factores que se presentan para que los alumnos interpreten de manera operacional o relacional al signo igual.	Evidenciar como el uso de metodologías tradicionales usadas en la práctica docente afecta directamente en el entendimiento de los estudiantes provocando el desarrollo de interpretaciones operacionales en los estudiantes y la baja presencia de interpretaciones relacionales. El objetivo es promover la práctica de una intervención didáctica para fomentar la concepción relacional del signo igual.

		resulta ser un indicador crítico de la manifestación operacional del signo igual en estudios avanzados. Parodi et al. (2024) recomiendan el uso de la mirada profesional docente como método de análisis para identificar, percibir y reflexionar sobre la enseñanza del signo igual.			
--	--	---	--	--	--

3.5 Fase 3 Experimentación.

La aplicación de la prueba se llevó a cabo en tres escuelas secundarias públicas del estado de Hidalgo. Esta prueba se aplicó a cuatro grupos: tres grupos de tercer grado y uno más de segundo grado. Con el propósito de mantener la seguridad en la identidad de los participantes las escuelas se han nombrado como S1 (grupos 3°A y 3°B), S2 (grupo 2°E) y S3 (grupo 3°C). Se contó con la participación de un total de 123 estudiantes de 12 a 15 años de edad. En cada institución se adaptó un aula especial para realizar la prueba bajo la supervisión del personal de dirección de cada escuela. Para los primeros dos grupos participaron 48 estudiantes, 25 del grupo 3°A y 23 del grupo 3°B de la S1. La aplicación de la prueba fue durante dos módulos de 50 minutos para cada grupo, posteriormente la prueba se aplicó a 41 estudiantes de segundo grado 2°E en un salón de la S2 durante un módulo de 50 minutos, por último, la tercera aplicación de la prueba se llevó a cabo en las instalaciones de la S3 se contó con la participación de 34 estudiantes del grupo 3°C durante 2 módulos de 50 minutos. La razón por la cual se han numerado como S1, S2 y S3 fue por el orden cronológico en cómo se aplicaron las pruebas en las escuelas siendo la S1 la primera escuela en aplicarse la prueba y así sucesivamente,

Se presenta la tabla 13 con la información pertinente de la aplicación del instrumento.

Tabla 13. *Población de estudio*

Escuela	Ubicación	Tiempo de la sesión	Grupo	Total, de estudiantes
Escuela Secundaria (S1)	Hidalgo	Dos módulos de 50 minutos	3°A 3°B	48
Escuela Secundaria (S2)	Pachuca	Un módulo de 50 minutos	2°E	41
Escuela Secundaria (S3)	Pachuca	Dos módulos de 50 minutos	3°C	34

3.6 Taller Reflexivo

Con el objetivo de reflexionar y hacer conscientes como profesores de matemáticas, se diseñó una sesión dinámica tipo taller dividida en cuatro momentos, durante este taller se analizaron dos aspectos: el primero sugiere explorar las nociones, didáctica y significados que poseen

los docentes con respecto al signo igual, el segundo factor consiste en evaluar los hallazgos recopilados de las respuestas que se obtuvieron en la aplicación previa con los estudiantes.

La sesión contó con el apoyo de la organización de un coloquio de enseñanza de las matemáticas, celebrado en las instalaciones del Centro de Extensión Universitaria (CEUNI) campus perteneciente a la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH), Dentro de las instalaciones del plantel en el taller de cómputo, la sala cuenta con un cañón adecuado para proyectar las diapositivas que guían el tiempo e información detallada de la bibliografía, y así también, se comparten las producciones de los estudiantes junto con el instrumento de investigación.

Para aplicación del instrumento con los docentes participantes, las primera tres actividades del taller pertenecen a los momentos de exploración, ampliación y transición, descritas anteriormente. Finalmente, el cuarto momento diseñado exclusivamente para profesores está conformado por cuatro preguntas:

1. ¿Sueles enseñar con un enfoque hacia el pensamiento relacional en clase?
2. ¿Identificas si este tipo de ejercicios aparecen en los libros de texto?
3. ¿Cómo crees que ayudarían a tus estudiantes la implementación de actividades enfocadas a entender una relación de equivalencia del signo igual para el desarrollo de sus habilidades?
4. ¿En clase promueves actividades que involucran las propiedades del signo igual y la de los reales? Menciona que propiedades fomentas en cada caso.

Cada profesor contó con un material impreso del instrumento ([Anexo 1](#)), así mismo, las actividades se llevaron a cabo durante una sesión de dos horas con treinta minutos, se anexó la ficha técnica de participación del taller ([Anexo 2](#)).

Por otra parte, basados en Vermeulen y Meyer (2017) y Fyfe et al. (2020) sugieren que el trabajo sobre la población adulta profesores y estudiantes de nivel superior es importante porque en ocasiones se considera que el conocimiento y significado del signo igual se construye conforme a la experiencia académica, sin embargo, el análisis en este taller permitió analizar y reflexionar junto con docentes, los efectos de la enseñanza en las respuestas de los estudiantes y concientización del obstáculo didáctico. Además, la toma de

conciencia con los profesores destacó la necesidad de diseñar actividades no rutinarias y también la reflexión de saber identificar las características de los niveles de comprensión del signo igual en los estudiantes y la Importancia de trabajar las propiedades del signo igual y de los números reales.

3.7 Categorías de Análisis

Una vez realizado el taller reflexivo con docentes se analizaron las producciones de los estudiantes, además de confrontar las respuestas de los profesores. A detalle, se analizó con las siguientes categorías basadas en los trabajos de Weiss et al. (2019) y Alsina (2007).

La primera categoría se llama Nociones del significado, (Conocimiento de las nociones matemáticas, Weiss et al. 2019) el objetivo de este análisis se centra en identificar las concepciones, creencias, ideas intuitivas, experiencias previas, conocimiento empírico y formas de comunicación de los objetos matemáticos en el aula. Señalar que bajo el nombre de “práctica reflexiva” (Alsina, 2007), el estudio y la reflexión es un proceso necesario para validar una posible resignificación hacia una comunicación asertiva del uso del lenguaje adecuado para enseñar matemáticas de manera efectiva y así evitar una concepción inadecuada del signo igual.

En la segunda categoría sobre la atención y concientización de los actos (proceso de concientización de la actuación propia, Alsina, 2007) el análisis consiste en evaluar, si los docentes son capaces de reconocer las prácticas que obstaculizan o favorecen la comprensión de los procesos matemáticos a enseñar, a través de sus propios actos de solución expuestos en sus respuestas de las igualdades en el material impreso. Cabe destacar que, al tener la posibilidad de comparar con las producciones previas de los estudiantes, se espera una reflexión profunda sobre las formas de solución. Al respecto, Chiqui quito (2015) señala que el diseño de actividades capaces de generar desequilibrios cognitivos en el conocimiento de los estudiantes favorece a una comprensión sólida. Por lo cual, es importante que el docente sea capaz de diseñar problemas que promuevan la confrontación y estimulen la comprensión de equivalencia. cabe destacar que, el análisis se realizó a partir de los conocimientos previos tanto de los estudiantes como de la enseñanza.

Para la tercera categoría sobre la diversidad de solución en los procesos (concientización de prácticas susceptibles de ser modificadas, Alsina 2007; la diversidad de procedimientos: manifestación de un avance, Weiss et al. 2019). En Alsina (2007) este análisis resulta ser esencial en la búsqueda de una reflexión individual y grupal, a través de los procesos de solución que se practican en el aula y que en ocasiones es reflejada en las respuestas de los estudiantes. El estudio de esta categoría se centra en identificar las metodologías tradicionales que obstaculizan la comprensión y el aprendizaje para facilitar una transición de la aritmética al álgebra. Reconocer la toma de conciencia sobre la diversidad de procesos y adaptación de resultados posibles, así, como el diseño de estrategias en la enseñanza que suplante la búsqueda de algoritmos y prácticas de memorización que obstaculizan la comprensión del álgebra. Weiss et al. (2019) menciona que la aceptación de la diversidad de procedimientos para resolver un problema es lo que caracteriza y valora la calidad de resignificación.

La cuarta categoría reflexión sobre el obstáculo (investigación y aplicación de nuevo conocimiento en el aula, Alsina 2007; los problemas se plantean con limitaciones, Weiss et al. 2019). Con base en Alsina (2007) destacó que al promover una reflexión de manera consciente el docente buscará respuestas para poder mejorar, lo que debe facilitar y otorgar una visión factible para completar una comprensión. Por otra parte, Weiss et al. (2019) mencionó que los problemas resueltos bajo la tutoría del docente cuando realiza operaciones de forma tradicional en clases cierran la oportunidad a la aparición de errores que evolucionen en una conceptualización, lo que es importante para un “análisis de lo cognitivo” en el aprendizaje de los estudiantes con el bien de fomentar y originar una autonomía. Se elaboró una tabla con la asignación de categorías con respecto a los momentos del instrumento.

Tabla 14. *Asignación de las categorías en los momentos del instrumento de investigación*

Categoría	Momento
Nociones del significado	Exploración
Usos del Lenguaje	Exploración
Atención y concientización de los actos	Ampliación
Diversidad de solución en los procesos	Transición
Reflexión sobre el obstáculo	Transición

CAPÍTULO 4 ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados y evidencias obtenidas de la aplicación del instrumento de investigación con los estudiantes. Este primer análisis está dividido en tres momentos que fueron descritos en la metodología: exploración, ampliación y transición. Posteriormente se realizó el análisis sobre el taller reflexivo, en donde, se concentró la categorización de las reflexiones de los docentes que participaron con base a los trabajos de Alsina (2007) y Weiss et al. (2019).

4.1 Análisis del momento 1: Exploración

El momento 1 de exploración consistió en dos actividades, la primera pregunta dejó al descubierto las nociones e ideas primitivas sobre la percepción del símbolo de igualdad. Mientras que la segunda pregunta permitió un análisis a priori de los significados que se vinculan con una comprensión operacional o relacional.

4.1.1 Actividad #1: Nociones del significado

El primer apartado del instrumento de investigación fue diseñado con el propósito de identificar las nociones, ideas intuitivas y el conocimiento empírico que poseen los estudiantes. Para ello, se planteó la pregunta: *¿Qué palabras asocias y usas para referirte a este símbolo “=”?*

Los estudiantes tuvieron la posibilidad de escribir más de una palabra en sus respuestas. Entre las más frecuentes se encontraron igual e igualdad, seguidas por aquellas que asocian el símbolo con la idea de *resultado*. En contraste, las palabras de menor frecuencia fueron equivalente o equivalencia y otras que aparecieron únicamente una vez.

En conjunto, los hallazgos de esta primera exploración evidenciaron una tendencia predominante hacia una comprensión de tipo operacional en los estudiantes, mientras que solo en pocos casos se identificó una posible comprensión de carácter relacional.

La tabla 15, presenta la recopilación y frecuencia total de las palabras escritas por los estudiantes.

Tabla 15. Frecuencia de palabras usadas por estudiantes

	S1		S2	S3	Total
Estudiantes	25	23	41	34	123
Palabras Mencionadas / Grupo	3°A	3°B	2°E	3°C	Frecuencia
Resultado	15	17	21	18	71
Respuesta	4	2	2	4	12
Operación	5	2	7	9	23
Igual/Igualdad	13	16	37	31	97
Mismo	5	0	8	1	14
Equivalente/Equivalencia	0	0	8	1	9
Otras (Sobranste, Total, Idéntico, Residuo, Semejante, Interrogación)	4	1	1	1	7

También se elaboró un gráfico de pastel (figura 12) como representación para mostrar la distribución porcentual de las palabras escritas.

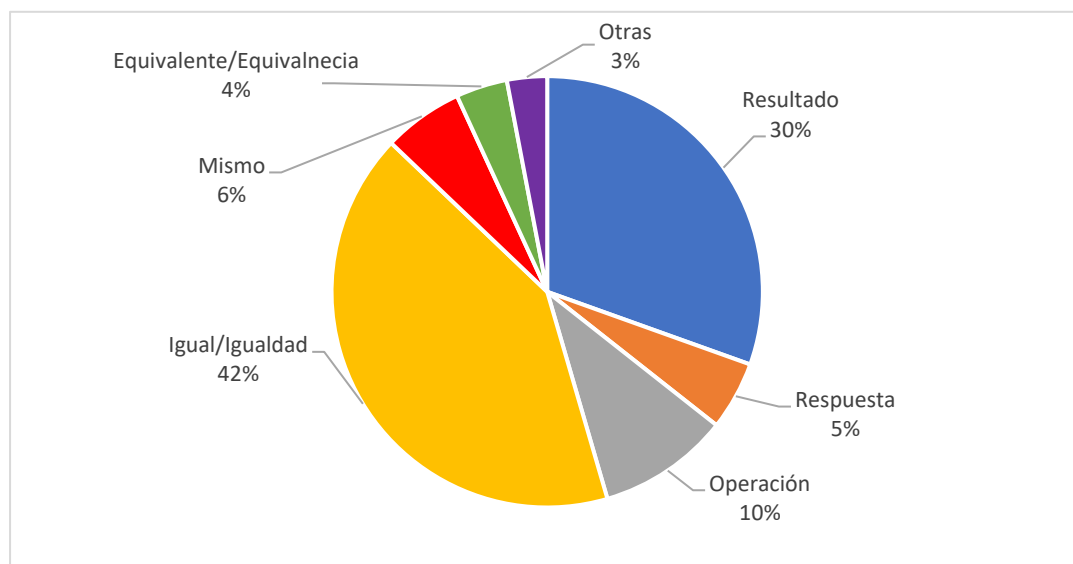


Figura 12. Palabras escritas por los estudiantes

Se adjuntó la tabla 16 correspondiente al análisis descriptivo acerca de las palabras escritas dentro de una comprensión:

Tabla 16. *Análisis sobre las palabras*

Comprensión del signo igual	Justificación	Palabras
Operacional	Kieran (1981) documentó que los estudiantes de nivel básico suelen comprender el signo igual como una “señal para hacer algo”, lo cual obstaculiza su concepción como símbolo de equivalencia, En consecuencia, los alumnos tienden a asociarlo con la obtención de un resultado, una respuesta o el fin de una operación.	Resultado, Respuesta, Operación, Total, Residuo, Sobrante, etc.
Relacional	Lee y Pang (2023) señalaron que los estudiantes que asocian el signo igual con significados como equivalencia, equivalente o balance desarrollan una mejor comprensión de la aritmética y el álgebra. En cambio, asociarlo con términos como igual, igualdad o lo mismo que, no garantiza una concepción relacional del símbolo, lo que implica, la posibilidad de manifestar una comprensión simultánea, que podría facilitar u obstaculizar su tránsito a una comprensión más profunda de las matemáticas.	Igual, Igualdad. Equivalente, Equivalencia, Balance, etc.

Para ilustrar este cuadro, se diseñó la Figura 13, que demuestra la distribución de palabras y su asociación con las comprensiones operacional y relacional.

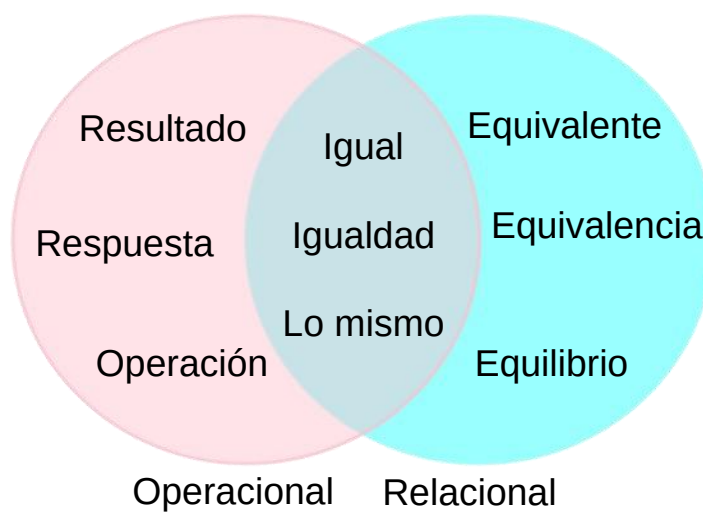


Figura 13. *Distribución de palabras asociadas al signo igual. Elaboración propia*

En la Figura 14 aparece la frase escrita de un estudiante de tercer grado de la secundaria S1

1. ¿Qué palabras asocias y usas para referirte a este símbolo "="?
 Pues para mí la palabra igual se refiere a un
 resultado de una suma o resta

Figura 14. Evidencia de las palabras asociadas con el uso del signo igual de un estudiante; caso de comprensión operacional, Alumna M, 3°A, S1. Momento 1. Exploración

Este escrito dejó al descubierto un significado como indicador de resultado por parte del estudiante, su interpretación sugiere una asociación restringida a una comprensión de tipo operacional del signo igual.

En contraste, la Figura 15, constituye evidencia del uso de las palabras *igual* y *equivalente* lo que sugirió una posible comprensión de tipo relacional por parte de un alumno de segundo grado de la secundaria S2.

1. ¿Qué palabras asocias y usas para referirte a este símbolo "="?
 La palabra "igual", o "equivalente".

Figura 15. Uso de las palabras igual o equivalente por parte de un alumno.

Comprensión de tipo relacional, Alumno M, 2°E, S2. Momento 1. Exploración

4.1.2 Actividad #2: Usos del signo igual

En esta segunda actividad se propusieron cuatro igualdades tipo verdadero/falso con el propósito de observar las dificultades en el aprendizaje de los estudiantes, las igualdades propuestas fueron previamente investigadas y clasificadas en la bibliografía. Al respecto, se incluyó la tabla 17 como cuadro de análisis de las comprensiones operacional y relacional, en el cual se compararon dichas categorías con las producciones de los estudiantes.

Tabla 17. Análisis sobre el Nivel de Comprensión

Igualdad	Operacional	Relacional
1. " $15 - 8 = 7 + 1$ "	Kieran (1989) detalló que estudiantes en sus inicios de la aritmética interpretan la lectura	Broitman et al. (2017) recomendó el trabajo con igualdades que presenten

	de las operaciones en un solo sentido generalmente de izquierda a derecha, sin descartar que también lo hacen de derecha a izquierda, en vez, de una lectura bidireccional.	operaciones en ambos lados de la igualdad con el objetivo de ampliar la visión de los estudiantes y desarrollar una lectura bidireccional más adecuada a las propiedades de los números.
2. “ $22 = 15 + 7$ ”	Burgell y Ochoviet (2015) argumentó que los estudiantes que interpretan la lectura del signo igual únicamente de izquierda a derecha, rechazan el significado de otras igualdades “ <i>resultado = operación</i> ”.	En contraste, la investigación de Burgell y Ochoviet (2015) destacó que los estudiantes que trabajan con una lectura bidireccional comprenden el significado de operaciones en el lado derecho de una igualdad.
3. “ $12 + 3 = 15 + 1 = 16$ ”	Muñoz (2011) describió que una problemática muy presente en el conocimiento de los estudiantes es ver al signo igual como un separador de operaciones. Lo que implica tratar de usarlo dentro de una cadena de igualdades.	Molina (2006) resaltó los posibles beneficios que se podrían manifestar en los estudiantes al trabajar las propiedades de los números reales y los operadores desde edades tempranas para facilitar un desarrollo en su comprensión de las matemáticas.
4. “ $5 + 6 = 7 + 4$ ”	Parodi (2020) destacó que los estudiantes que interpretan el signo igual como el indicador de un resultado, les permite dar significado a expresiones del tipo “ $a + b = c$ ”, pero que dicha visión obstaculiza la comprensión de igualdades tipo “ $a + b = c + d$ ”, las cuales	Mathews (2012) señaló que los estudiantes con una visión más profunda del signo igual, son capaces de reconocer las propiedades del símbolo como una relación de equivalencia, lo que favorece su comprensión y reduce la tendencia a un enfoque operacional.

	requieren de una comprensión relacional	
--	---	--

Igualdad (1) " $15 - 8 = 7 + 1$ ". La igualdad es falsa; sin embargo, en diversos casos observados en los cuatro grupos, los estudiantes la aceptaron, posiblemente debido a la apreciación de un resultado en ambos lados de la igualdad. Por otro lado, se analizaron los casos en donde se observó el rechazo de la igualdad.

Con base en el trabajo de Lee y Pang (2023), las respuestas de los estudiantes se clasificaron en categorías operacional, relacional y simultánea; esta última corresponde a aquellos estudiantes que evidenciaron un uso particular, pero que por su enfoque aún no prevalece una comprensión hacia lo relacional.

La tabla 18 se elaboró a partir de la información sobre la aceptación y rechazo, en la cual se registraron los porcentajes correspondientes a esta primera igualdad.

Tabla 18. *Aceptación y Rechazo de la igualdad 1*

Momento 1: Actividad 2: Igualdad 1				
Categoría de Comprensión	S1		S2	S3
	3°A	3°B	2°E	3°C
Operacional: Estudiantes que aceptaron la igualdad argumentando que el resultado de las operaciones corresponde a las primeras cantidades después del signo igual.	7 (28 %)	6 (26 %)	7 (17 %)	7 (20 %)
Simultánea Estudiantes que rechazaron la igualdad sin justificación.	9 (36 %)	9 (39 %)	20 (49 %)	18 (53 %)
Relacional Estudiantes que rechazaron la igualdad argumentando que no son iguales y que no representan el mismo valor.	9 (36 %);	8 (35 %)	14 (34 %)	9 (27 %)
Total	25	23	41	34

En esta primera igualdad se observó un porcentaje relevante: cerca del 20% de los estudiantes aceptó la igualdad lo que pone de manifiesto una lectura unidireccional, asociada con el significado del signo igual como el indicador de resultado. En contraste, aproximadamente una tercera parte de los estudiantes justificó el rechazo, tras haber realizado las operaciones y concluir que las cantidades propuestas son diferentes.

Por último, se identificó que alrededor de la mitad de los participantes, particularmente en los grupos 2°E de la S2 y 3°C de la S3, rechazaron la igualdad sin ninguna justificación, lo cual se interpretó como una posible inseguridad en sus respuestas, es posible que los estudiantes hayan optado por el rechazo al no percibir las mismas cantidades en ambos lados.

Igualdad (2) “ $22 = 15 + 7$ ”. La igualdad debió haber sido catalogada como verdadera; sin embargo, en algunos casos observados en los cuatro grupos, los estudiantes llegaron a rechazar la igualdad, esto debido a que para ellos es una igualdad en orden inverso y que por lo tanto no observaron un resultado. Por otro lado, en una acción similar, los estudiantes recurrieron a reescribir la igualdad, pero en formato tipo $a + b = c$ para tratar de afirmar su respuesta. Por último, los casos de aceptación, quienes validaron la igualdad tras concluir con una interpretación de derecha a izquierda.

La Tabla 19 se elaboró como registro de la aceptación y rechazo para esta segunda igualdad.

Tabla 19. *Aceptación y Rechazo de la igualdad 2*

Momento 1: Actividad 2: Igualdad 2				
Categoría de Comprensión	S1		S2	S3
	3°A	3°B	2°E	3°C
Operacional Estudiantes que rechazaron la expresión justificando que se trata de una operación invertida.	4 (16 %)	5 (21 %)	5 (12 %)	3 (9 %)
Simultánea Estudiantes que aceptaron la expresión, pero que recurrieron a reacomodar la igualdad.	17 (68 %)	14 (61 %)	24 (59 %)	26 (76 %)
Relacional Estudiantes que validaron la igualdad argumentando que también se puede manifestar una lectura de derecha a izquierda.	4 (16 %)	4 (18%)	12 (29 %)	5 (15 %)
Total	25	23	41	34

En esta igualdad se señaló el recurso a reescribir la igualdad en el formato $a + b = c$, hecho que puso de manifiesto el hábito de interpretar operaciones e igualdades de izquierda a derecha, situación que se clasificó como comprensión simultánea.

Igualdad (3) “ $12+3=15+1=16$ ”. La igualdad es falsa y representa un uso inadecuado de una cadena de igualdad; En contraste, gran parte de los estudiantes optó por acreditar el orden de la igualdad, debido a que la interpretaron como una secuencia de operaciones, en la que el signo igual funciona como un operador o separador.

Por otro lado, se identificó a los estudiantes que rechazaron la igualdad. La clasificación de tipo relacional se asignó a aquellos que manifestaron una interpretación adecuada, al justificar su rechazo señalando que se trata de una igualdad falsa en la que no se respeta una relación.

La Tabla 20 se elaboró a partir de la recopilación y análisis de las producciones de los estudiantes en esta igualdad.

Tabla 20. *Aceptación y Rechazo de la igualdad 3*

Momento 1: Actividad 2: Igualdad 3				
Categoría de Comprensión	S1		S2	S3
	3°A	3°B	2°E	3°C
Operacional Estudiantes que aceptaron la expresión manifestando el uso del signo igual como un separador de operaciones y la obtención de un resultado.	20 (80 %)	17 (74 %)	18 (44 %)	3 (9 %)
Simultánea Estudiantes que rechazaron la expresión, pero que su explicación resulta ser poco clara, además de realizar operaciones para justificar su decisión.	1 (4 %)	4 (17 %)	14 (34 %)	26 (76 %)
Relacional Estudiantes que rechazaron la expresión argumentando que las cantidades no completan una relación.	4 (16 %)	2 (9 %)	9 (22 %)	5 (15 %)
Total	25	23	41	34

En las respuestas analizadas en esta igualdad, se observó que los grupos de la S1 interpretaron el signo igual como un separador, asociándolo con una secuencia de operaciones. En este sentido, se destacó que cerca de la mitad de los estudiantes del grupo 2°E de la S2 aceptó la

igualdad al escribir justificaciones semejantes, donde describieron el uso de una cadena de operaciones. Por su parte, el grupo 3°C de la S3 ofreció una menor proporción de aceptación de la igualdad.

Este significado se caracteriza como dificultad en el aprendizaje del signo igual, ya que los estudiantes lo interpretan como un elemento que separa una serie de operaciones, en lugar de reconocerlo como una relación de equivalencia. En suma, se observó un porcentaje notable; particularmente en el grupo 3°C de la S3 con un 91% de rechazo.

Finalmente, se señaló que un aproximado del 15% del total argumentó la falsedad de la igualdad.

Igualdad (4) " $5 + 6 = 7 + 4$ ". La igualdad debió ser catalogada como verdadera; en contexto, en las producciones de los estudiantes se encontró que la igualdad fue rechazada debido a que la interpretaron como una suma o bien no presenta los mismos valores en ambos lados de la igualdad. El principal objetivo de proponer una igualdad en este formato consistió en analizar la adecuación de la propiedad simétrica de la igualdad.

La tabla 21 se elaboró como registro del análisis de las respuestas.

Tabla 21. *Aceptación y Rechazo de la igualdad 4*

Momento 1: Actividad 2: Igualdad 4				
Categoría de Comprensión	S1		S2	S3
	3°A	3°B	2°E	3°C
Operacional Estudiantes que rechazaron la expresión por la presencia de operaciones en ambos miembros de la igualdad por lo cual carece de un resultado.	7 (28 %)	13 (57 %)	7 (17 %)	8 (24 %)
Simultánea Estudiantes que aceptaron la expresión, pero que su respuesta fue breve y con un enfoque operativo	8 (32 %)	3 (13 %)	6 (15 %)	6 (18 %)
Relacional Estudiantes que validaron la expresión justificando con la realización de las operaciones o bien, argumentando que se trata de la representación de un mismo valor.	10 (40 %)	7 (30 %)	28 (68 %)	20 (58 %)
Total	25	23	41	34

En los resultados se observó un porcentaje notable en la aceptación de la igualdad; gran parte de los estudiantes realizó operaciones para justificar su respuesta. Por otra parte, aquellos que

rechazaron la igualdad aún mostraron una comprensión unidireccional de las operaciones, mientras que solo unos pocos no proporcionaron justificación alguna para clasificar su respuesta como relacional.

En conclusión, a partir de las cuatro igualdades propuestas, se ubicó entre una comprensión de tipo operacional y simultánea. Para evidenciar esta situación, se seleccionó la respuesta de un alumno del grupo 3°A de la S1, presentada en la Figura 16, como evidencia de un procedimiento operativo del signo igual.

2. Determina si las sentencias son verdaderas o falsas, explica ¿Por qué?

Sentencia	Justificación
$15 - 8 = 7 + 1$	es verdadera por que $15 - 8$ da 7 y pues si se puede restar y sumar
$22 = 15 + 7$	falsa por que no hay ningún número que pueda restarlo o sumarlo
$12 + 3 = 15 + 1 = 16$	verdadera por que hay sumas al igual que restas y pues el resultado da correcto.
$6 + 5 = 7 + 4$	falsa por que $6 + 5 =$ no puede dar 7 tendría que ser $5 + 2 =$

Figura 16. Evidencia de la actividad 2, Momento 1. Exploración caso de comprensión operacional.
Alumno JE, 3°A, S1

En contraste, la Figura 17 corresponde al conjunto de respuestas de un alumno de la misma secundaria, en este caso como evidencia de una comprensión tipo relacional.

2. Determina si las sentencias son verdaderas o falsas, explica ¿Por qué?

Sentencia	Justificación
$15 - 8 = 7 + 1$	es falso porque $15 - 8 = 7$ y $7 + 1 = 8$ lo cual no es lo mismo 7 y 8 no es igual
$22 = 15 + 7$	verdadero porque $15 + 7 = 22$ y 22 es lo mismo
$12 + 3 = 15 + 1 = 16$	es falso porque $12 + 3$ no es igual a $15 + 1$ pero $15 + 1$ si es igual a 16 pero aun así es falso
$6 + 5 = 7 + 4$	es verdadero porque $6 + 5 = 11$ y $7 + 4 = 11$ lo cual es igual

Figura 17. Evidencia de la actividad 2, Momento 1. Exploración caso de comprensión relacional.
Alumno R, 3°A, S1

Realizando un análisis comparativo de las evidencias seleccionadas, el estudiante JE interpretó inadecuadamente la función del signo igual en las cuatro igualdades, mientras que el estudiante R, justificó correctamente cada igualdad propuesta.

4.2 Análisis del momento 2: Ampliación

Para un análisis a detalle de las producciones de los estudiantes se elaboró la Tabla 22 junto con los aportes importantes de investigaciones relativas al trabajo y resignificación de una equivalencia numérica.

Tabla 22. *Justificación de las igualdades del momento 2, Ampliación.*

Autor	Justificación
Broitman et al (2017).	Destacó el trabajo con expresiones matemáticas tipo $a + b = c + d$, para ampliar el significado del signo igual desde los estudios de la aritmética en estudiantes de primaria.
Muñoz (2011)	Señaló que es importante corregir el uso de cadenas de igualdades con el fin de resignificar las propiedades de una relación de equivalencia.
Milinkovic et al. (2022)	Resaltó que es importante el trabajo con valores desconocidos tipo figuras o espacio en blanco para analizar los significados del signo igual en los estudiantes.
Mathews et al. (2012)	Caracterizó cuatro niveles de comprensión del signo igual: Operacional Rígido, Operacional Flexible, Relacional Básico y Relacional Comparativo.

Igualdad (1): “ $215 + _ = 175 + 216$ ”. En esta igualdad, la mayoría de los estudiantes no presentó dificultades para proponer el valor numérico correcto en el espacio. No obstante, se identificaron algunos casos en los que estudiantes manifestaron una lectura unidireccional, al centrarse únicamente en la operación del lado derecho, realizando la suma o intentando obtener un total.

En otros casos, los estudiantes completaron la igualdad sin ofrecer una justificación. Mientras que, los de los alumnos restantes logró el llenado correcto del espacio; al respecto, se observó

que para la comprobación de su respuesta recurrieron a la manipulación de las cantidades mediante el traslado de valores y operaciones inversas. Finalmente, también se identificaron estudiantes que justificaron su respuesta a partir de un análisis comparativo de las cantidades, argumentando una haber observado una mínima diferencia sin necesidad de efectuar cálculos.

La elaboración de la Tabla 23 permitió concentrar la diversidad de casos, incluyendo aquellos sin respuesta. En conclusión, en esta primera igualdad, se observó una tendencia vinculada dentro de una comprensión relacional básica.

Tabla 23. *Respuestas del momento 2 de la igualdad 1*

Momento 2: Igualdad 1				
Nivel de Comprensión	S1		S2	S3
	3°A	3°B	2°E	3°C
Sin Respuesta	1 (4 %)	0	5 (12%)	0
Operacional Rígido Los estudiantes manifestaron una lectura unidireccional completando el espacio con la suma de las cantidades que se encuentran del lado derecho de la igualdad.	9 (36 %)	13 (56 %)	15 (37 %)	13 (38%)
Operacional Flexible Estudiantes que completaron la expresión sin justificación	2 (8 %)	2 (9 %)	0	3 (9 %)
Relacional Básico Estudiantes que completaron la igualdad basados en la manipulación de las cantidades al realizar operaciones.	11 (44 %)	6 (26 %)	19 (46%)	12 (35 %)
Relacional Comparativo Estudiantes que argumentaron su respuesta con base a la comparación de cantidades.	2 (8 %)	2 (9 %)	2 (5 %)	6 (18 %)
Total	25	23	41	34

En la recopilación de datos presentada en la tabla, se identificó que cerca del 40% del total de los estudiantes, interpretó las igualdades de izquierda a derecha. También, se observó el recurso de varios estudiantes debido a la manipulación de los valores usando operaciones de suma y resta para justificar su respuesta.

Igualdad (2) “ $5 + 6 = _ + 4 = 11$ ”. Esta igualdad se elaboró a partir del uso adecuado de una cadena de igualdad. En este caso, varios estudiantes completaron correctamente la

equivalencia. En este sentido, se señaló la ausencia de identificar la propiedad transitiva de la equivalencia.

En contraste, se identificaron casos de estudiantes que completaron con una cantidad errónea al realizar la suma de las primeras cantidades de izquierda a derecha. En estos casos, se destacó la intención de extender la igualdad hacia otra cantidad.

La Tabla 24 presenta la clasificación de la comprensión. En conclusión, se descartó la categoría comparativa, ya que no se observaron casos vinculados con una propiedad de la igualdad; por ello, se consideró que el nivel de comprensión predominante en los estudiantes corresponde a una comprensión relacional básica.

Tabla 24. *Respuestas del momento 2, igualdad 2*

Momento 2: Igualdad 2				
Nivel de Comprensión	S1		S2	S3
	3°A	3°B	2°E	3°C
Sin Respuesta	1 (4 %)	0	3 (7 %)	0
Operacional Rígido Estudiantes que manifestaron una lectura unidireccional y completaron el espacio con una cantidad errónea.	8 (32 %)	7 (30 %)	4 (10 %)	1 (3 %)
Operacional Flexible Estudiantes cuya respuesta no fue justificada.	6 (24 %)	2 (9 %)	4 (10 %)	15 (44 %)
Relacional Básica Estudiantes que justificaron su respuesta realizando una lectura de derecha a izquierda manipulando la diferencia entre las cantidades.	10 (40 %)	14 (61 %)	30 (73 %)	18 (53 %)
Total	25	23	41	34

En los hallazgos de esta igualdad se identificó un predominio con enfoque relacional en los estudiantes. No obstante, se señaló el caso de 20 estudiantes que interpretaron al signo igual como un separador. En suma, se analizaron los casos en los que los estudiantes únicamente completaron el espacio sin justificar dentro de una comprensión flexible, así como aquellos en los que la justificación escrita evidenció una lectura de derecha a izquierda. Esta última razón se ubicó dentro de una comprensión relacional básica al no comprobar un uso de las propiedades de una relación de equivalencia.

Igualdad (3) “ $350 + _ = _ * 20 = _ / 2 = 700$ ”. De igual forma, se presenta una cadena de igualdades de Milinkovic et al. (2022), diseñada con operaciones de multiplicación y división. En esta igualdad, algunos estudiantes manifestaron dudas sobre el significado de los símbolos “*” y “/”, particularmente en su uso como representación de la multiplicación y la división.

A partir de la recolección de datos, se elaboró la Tabla 25, en la que se describe y clasifica el conjunto de respuestas obtenidas:

Tabla 25. *Respuestas del momento 2, igualdad 3*

Momento 2: Igualdad 3				
Categoría de Comprensión	S1		S2	S3
	3°A	3°B	2°E	3°C
Sin Respuesta	10 (40 %)	8 (35 %)	10 (24 %)	2 (6 %)
Operacional Rígido Estudiantes que manifestaron una lectura unidireccional de izquierda a derecha completando con una cantidad errónea.	9 (36 %)	8 (35 %)	9 (22 %)	16 (46 %)
Operacional Flexible Respuestas incompletas y falta de justificación	0	2 (9 %)	8 (19 %)	5 (15 %)
Relacional Básico Estudiantes que escribieron en el espacio manifestando una lectura de derecha a izquierda manipulando operaciones entre las cantidades.	1 (4 %)	2 (9 %)	5 (12 %)	6 (18 %)
Relacional Comparativo Estudiantes que escribieron en el espacio argumentando una lectura bidireccional señalando que se trata de conceder una equivalencia de un mismo valor	5 (20 %)	3 (12 %)	9 (22 %)	5 (15 %)
Total	25	23	41	34

En conclusión, en esta igualdad se identificó a diversos casos sin respuesta y un predominio significativo de una comprensión operacional, lo cual se relaciona con la confusión en el uso de los operadores. Por otra parte, se señaló a los casos que completaron correctamente la igualdad y se determinó como una comprensión de tipo relacional básica al no justificar su respuesta; mientras que se clasificó como relacional comparativa a quienes argumentaron su procedimiento, evidenciando una lectura bidireccional de la equivalencia.

Igualdad (4) “ $\frac{3}{4}(-) = 2$ ”. La equivalencia se diseñó con el propósito de observar la interacción de los estudiantes con fracciones equivalentes y sus propiedades. En las respuestas, se identificó que varios estudiantes no lograron ofrecer una solución correcta, ya sea porque dejaron el espacio en blanco o porque expresaron “no entendí”, entre estos casos, se incluyó aquellos que completaron el espacio mediante una suma, la cual no corresponde a la solución.

Finalmente, los casos restantes completaron correctamente la equivalencia. En general, a partir de los datos observados, se elaboró la Tabla 26, en la que se presenta el registro y clasificación de las respuestas.

Tabla 26. *Respuestas del momento 2, igualdad 4*

Momento 2: Igualdad 4				
Nivel de Comprensión	S1		S2	S3
	3°A	3°B	2°E	3°C
Sin Respuesta	21 (84 %)	15 (65 %)	23 (56 %)	4 (12 %)
Operacional Los estudiantes completaron el espacio con cantidades erróneas justificando la realización de una suma	4 (16 %)	7 (30 %)	9 (22 %)	19 (56 %)
Relacional Básico Estudiantes cuya respuesta carece de justificación	0	0	5 (12 %)	5 (15 %)
Relacional Comparativo Estudiantes que justificaron su respuesta utilizando implícitamente propiedades de los números	0	1 (5 %)	4 (10 %)	6 (17 %)
Total	25	23	41	34

Dentro del análisis de esta igualdad, se observó un porcentaje notable de más del 80% de respuestas incorrectas incluyendo aquellas sin respuesta. Los datos presentados en la tabla evidenciaron una dificultad en la comprensión de fracciones equivalentes y sus propiedades.

Al respecto, se presenta la Figura 18 correspondiente al conjunto de respuestas de un alumno del grupo 3°A de la S1 como evidencia de procedimientos operacionales.

1. Completa cada espacio con la cantidad faltante. Explica cómo obtuviste la respuesta.
- $215 + 391 = 175 + 216$: por que 391 es el resultado de $175 + 216$
entonces se complementa ya que hice arrebes la operación
 - $5 + 6 = 11 + 4 = 15$: cambie el 11 de lugar ya que el resultado es 15
ya que $5 + 6 = 11$ y si sumamos el once con el 4 da 15.
 - $350 + 350 = 700$: primero te tiene que dar 700 para
multiplicarlo por 20 y luego que te de el resultado lo divides x2
 - $\frac{3}{4}(-) = 2$: es igual a un entero un cuarto 1 $\frac{1}{4}$ ya que se le resta $\frac{3}{4}$ a
2

Figura 18. Evidencia de respuestas, comprensión operacional.

Alumna M, 3°A, S1. Momento 2. Ampliación

En contraste, se presenta la Figura 19 como evidencia de un conjunto de procesos no operacionales, el cual se identificó como una comprensión relacional.

1. Completa cada espacio con la cantidad faltante. Explica cómo obtuviste la respuesta.
- $215 + 176 = 175 + 216$: lo obtuve sumando solo 1 al 175 ya que
Al 215 le faltaba 1
 - $5 + 6 = 7 + 4 = 11$: Sumando las cantidades iniciales
 - $350 + 35 = 35 \times 20 = 700$ solo use operaciones
básicas
 - $\frac{3}{4}(\frac{8}{3}) = 2$: solo se buscan 2 números que multiplicados
de 12 y 24 para representar $24/12 = 2$

$$\begin{array}{r} 350 \\ + 350 \\ \hline 700 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 20 \\ \hline 00 \\ 700 \\ \hline 700 \end{array}$$

Figura 19. Evidencia de respuestas de estudiante con comprensión relacional.

Alumna EA, 3°C, S3. Momento 2. Ampliación

A partir del análisis de la evidencia presentada en las producciones de estudiantes seleccionados, se identificó que el primer alumno manifestó un orden incorrecto en la interpretación de las operaciones, al percibirlas como una invitación al cálculo, en lugar de buscar establecer equivalencias. En este caso, se determinó que el estudiante interpretó el signo igual como operador o separador.

Por su parte, en el segundo caso, el estudiante clasificado dentro de una comprensión avanzada argumentó su respuesta mediante un análisis comparativo de las cantidades propuestas en igualdad #1. En general, explicó cada solución con base en un razonamiento lógico, en lugar de recurrir exclusivamente al cálculo.

4.3 Análisis del momento 3: Transición de la aritmética al álgebra

Este momento del instrumento se diseñó con el objetivo de evidenciar las consecuencias de la enseñanza recibida en las respuestas de los estudiantes. Para ello, se elaboró el siguiente cuadro de análisis, en el cual se destacan las justificaciones documentadas en investigaciones de Serres (2011), Milinkovic et al. (2022), Abrate et al. (2008) y Ake (2020) y su comparación con los resultados encontrados.

Tabla 27. *Justificación de las actividades de Transición*

Autor	
Serres (2011)	Resaltó que una de las dificultades más evidentes y comunes por la cual los estudiantes no completan la comprensión de la aritmética y su posterior estudio en el álgebra es la comprensión del signo igual. Los estudiantes se enfocan en la realización y búsqueda de valores, lo cual obstruye el carácter generalizado del álgebra.
Milinkovic et al. (2022)	Resaltó que el trabajo apoyado con situaciones de la vida cotidiana, ayuda a que los estudiantes manifiesten razonamientos abstractos en la solución de los problemas, lo que apoyaría su transición de significados del signo igual.
Abrate et al. (2008)	Los autores estudiaron sobre el uso de la metodología de transposición de términos como un obstáculo didáctico que viola las propiedades de equilibrio de las ecuaciones. Además, resaltan que el lenguaje informal que utilizan los docentes refuerza una visión restringida de las expresiones. Menciona que los estudiantes

	solo se enfocan en manipular cantidades y términos en la simple búsqueda de una solución.
Ake (2020)	Señaló que el enfoque estricto en la memorización de fórmulas y mecanización de algoritmos son estrategias de aprendizaje que obstruyen la comprensión de los diversos usos y significados que el signo igual representa como: relación de expresiones equivalentes en una ecuación, el uso como identidad y su relación como transformación de una relación de variables.

4.3.1 Actividad 1: Expresiones equivalentes

El propósito de esta actividad fue evidenciar la tendencia hacia el método conocido como “reducción de términos semejantes”, una práctica común dentro de las aulas de clase, en la que se instruye a los estudiantes a reducir y operar con términos algebraicos de manera procesual.

En esta primera actividad, los casos sin respuesta fueron poco frecuentes. Si bien algunos estudiantes proporcionaron respuestas incorrectas, la selección de evidencias se centró en aquellos casos que cumplieron con los indicadores de conocimiento establecidos en la metodología.

Los estudiantes que, en un primer momento, se limitaron a realizar la simplificación de términos como acción predominante, en algunos casos, al no considerar otra forma de expresión, recurrieron a repetir la misma respuesta. Estos casos fueron clasificados como soluciones de tipo operacional en el contexto algebraico. La Figura 20 corresponde a la solución de un alumno del grupo 3ºA en la secundaria S1, quien repitió la respuesta.

1. Escribe dos formas de expresar la sentencia. Explica tus respuestas

a) $13y - 8y = \underline{5y}$ Por que sí $13-8=5$ entonces serían $5y$

$13y - 8y = \underline{5y}$

Figura 20. Evidencia del caso repetición de respuesta.

Alumna J., 3ºA, S1. Actividad 1. Momento 3. Transición

En otros casos se recopilieron las respuestas de 20 estudiantes, de las cuales se seleccionó el caso de un estudiante de la secundaria S1 que completó su respuesta mediante una expresión distinta a la acción de reducir términos.

1. Escribe dos formas de expresar la sentencia. Explica tus respuestas

a) $13y - 8y = \underline{3y + 2y} = 5y$

Ambas operaciones debende dar el mismo resultado.

$13y - 8y = \underline{3y - 2y} = 5y$

En este es con resta pero aún sigue dando el mismo resultado

Figura 21. Evidencia del caso de respuesta una expresión equivalente.

Alumno A., 3°A, S1. Actividad 1. Momento 3. Transición

El objetivo principal de trabajar con este tipo de procesos es ampliar la visión de los estudiantes hacia la resignificación de expresiones del tipo " $a + b = c + d$ " en el contexto algebraico, de modo que se favorezca su tránsito hacia la resolución de ecuaciones.

Finalmente, se subrayó el caso de 17 estudiantes que propusieron dos expresiones equivalentes, lo cual evidenció un mayor nivel de comprensión de la actividad. En consecuencia, este tipo de razonamiento se clasificó dentro del nivel relacional en el álgebra, como se observó en la Figura 22 correspondiente a las expresiones propuestas por un alumno del grupo 3°C en la S3.

1. Escribe dos formas de expresar la sentencia. Explica tus respuestas

a) $13y - 8y = \underline{2y + 3y}$

$13y - 8y = \underline{5y}$

A pesar de no saber, puse eso, porque en uno (a) expreso que ambas operaciones dan el mismo resultado, y en el otro (b) expreso que la operación debe dar lo mismo que el resultado.

Figura 22. Evidencia del caso de respuesta dos expresiones equivalentes.

Alumna V, 3°C, S3. Actividad 1. Momento 3. Transición

La Tabla 28 se elaboró como registro de las respuestas y expresiones propuestas por los estudiantes, incluyendo a aquellos casos que no ofrecieron alguna respuesta.

Tabla 28. *Expresiones Algebraicas momento 3: Transición*

Momento 3: Actividad 1: Expresión 1				
Categoría	S1		S2	S3
	3°A	3°B	2°E	3°C
Sin Respuesta	0	1(4 %)	5(12 %)	2(6 %)
Respuesta Incorrecta	3(12 %)	2(9 %)	3(7 %)	4(12 %)
Solo escribe una respuesta	2(8 %)	11(48 %)	6(15 %)	5(15 %)
Repite la respuesta	16(64 %)	6(26 %)	5(12 %)	13(38 %)
Escribe otra expresión	0	3(13 %)	12(30 %)	7(20 %)
Escribe dos expresiones	4(16 %)	0	10(24 %)	3(9 %)
Total	25	23	41	34

En términos generales, a partir de los datos y respuestas recopiladas en la tabla, se observó que varios estudiantes recurrieron a responder mediante la reducción de términos semejantes, empleándolo como única estrategia de solución. No obstante, este tipo de respuesta puede estar previamente influido por la enseñanza recibida, particularmente en el tópico de operaciones algebraicas, donde se suele incitar al estudiante a simplificar expresiones algebraicas identificando semejanzas entre los términos y aplicando operaciones de suma o resta.

La solución de operaciones algebraicas mediante reducción de términos semejantes puede entenderse como un procedimiento de carácter instrumental. Con base en Skemp (1978), las metodologías instrumentales se caracterizan por el aprendizaje de una secuencia de reglas específicas que permiten la obtención de una solución. El proceso describe los pasos en cada momento e incita a una decisión. En consecuencia, orienta al estudiante a depender de una orden externa, sin tomar en cuenta la comprensión ideal de los procesos.

En cambio, el aprendizaje relacional implica la construcción de significados a partir de la generación de variables dentro de un esquema, lo que permite establecer conexiones entre el concepto y el conocimiento de estructuras matemáticas.

4.3.2 Problema 1: Situaciones de la vida cotidiana

Problema (1). Este problema fue diseñado como propuesta de una aplicación contextualizada de una situación de la vida cotidiana, con base en Milinkovic et al. (2022) el trabajo con actividades que incluyan una adaptación de las matemáticas en actividades diarias, puede en algunos casos, propiciar en los estudiantes a un pensamiento creativo y a la vez abstracto, en este sentido, se planteó una propuesta no algebraica para vincular conceptos matemáticos con objetos reales.

En las producciones de los estudiantes se identificaron tres casos específicos. El primero, y posiblemente el más común, consiste en resolver el problema mediante una ecuación de primer grado, ya sea expresándose en lenguaje verbal o mediante el uso de una ecuación con valores desconocidos.

La Figura 23 presenta la solución de una alumna del grupo 2°E de la S2, quien resolvió el problema mediante el planteamiento de una ecuación.

2. Resuelve y describe el uso del signo igual en el siguiente contexto

a) El costo de tres rosas es equivalente a comprar dos rosas y dos girasoles. ¿Cuánto cuesta una rosa?, si el costo de un girasol es de treinta pesos?

$$\begin{aligned} 3x &= 2x + 2y \\ 3x &= 2x + 2(30) \\ 3x - 2x &= 60 \\ \boxed{x} &= 60 \end{aligned} \quad \begin{aligned} 3x &= 3(60) \\ \downarrow \\ 180 &= 180 \\ 2x + 2y &= 2(60) + 2(30) \\ &= 120 + 60 \\ &= 180 \end{aligned}$$

Figura 23. Evidencia resolución con una ecuación "situaciones de la vida cotidiana".

Alumno M, 2°E, S2. Problema 1, Momento 3. Transición

Otro caso de interés surge cuando los estudiantes resuelven la situación mediante el desarrollo de una estrategia descriptiva, en lugar de proponer una ecuación. En estos casos, se plantea un procedimiento guiado por el pensamiento lógico para hallar la solución.

La Figura 24 muestra el razonamiento y la descripción de un alumno del grupo 3°A de la S1 para hallar la solución.

2. Resuelve y describe el uso del signo igual en el siguiente contexto

- a) El costo de tres rosas es equivalente a comprar dos rosas y dos girasoles. ¿Cuánto cuesta una rosa?, si el costo de un girasol es de treinta pesos?

\$60 porque un girasol cuesta la mitad de una rosa
entonces $30 \times 2 = 60$

Figura 24. Evidencia resolución con un razonamiento lógico "situaciones de la vida cotidiana",

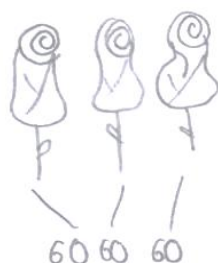
Alumno R, 3ºA, S1. Problema 1. Momento 3. Transición

Por último, el tercer caso de interés, que incluye la solución del problema mediante el uso de esquemas, diagramas o dibujos que expresan el desarrollo de un pensamiento creativo al vincular objetos no matemáticos con el álgebra.

La Figura 25 presenta la proyección de una alumna del grupo 3ºB de la S1, quien elaboró un dibujo de los objetos descritos en el problema para hallar la solución.

2. Resuelve y describe el uso del signo igual en el siguiente contexto

- a) El costo de tres rosas es equivalente a comprar dos rosas y dos girasoles. ¿Cuánto cuesta una rosa?, si el costo de un girasol es de treinta pesos?



Cada rosa vale 60 por que si dos girasoles son
\$60 entonces por dos rosas seran $120 + 60 = 180$
entonces 3 rosas $60 \times 3 = 180$

Figura 25. Evidencia de la actividad 2, Problema (1) "situaciones de la vida cotidiana".

Alumna F, 3ºB, S1

Basados en los estudios de Molina (2006) sobre los significados del signo igual, el empleo de figuras, diagramas o dibujos favorece al aprendizaje debido a que los estudiantes expresan su solución mediante el pensamiento creativo, lo que conduce a desarrollar métodos no

aritméticos para solucionar un problema propuesto en el álgebra. Al respecto, este método de solución es clasificado como relación de correspondencia y que se define como una interpretación favorable para el tránsito del pensamiento aritmético al álgebra.

La tabla 29 se elaboró como registro de la diversidad de métodos empleados por los estudiantes, incluyendo aquellos que ofrecieron una solución incorrecta o simplemente los casos sin respuesta.

Tabla 29. Problema 1, Situación de la vida cotidiana. Momento 3: Transición

Momento 3: Actividad 2: Problema 1				
Categoría	S1		S2	S3
	3°A	3°B	2°E	3°C
Sin Respuesta	1(4%)	0	7(17 %)	1(3 %)
Respuesta Incorrecta/incompleta	9(36 %)	12(52%)	14(34 %)	2(6 %)
Solo escribe la respuesta	7(28 %)	1(4 %)	1(2 %)	10(29 %)
Resuelve o describe una ecuación	2(8 %)	5(22 %)	18(45 %)	15(44 %)
Resuelve con razonamiento lógico	6(24 %)	3(13 %)	0	5(15 %)
Resuelve con mediante un pensamiento creativo	0	2(9 %)	1(2 %)	1(3 %)
Total	25	23	41	34

En conclusión, en este problema se observó una tendencia predominante en las soluciones de los estudiantes a adaptar una ecuación producto de la enseñanza recibida. Esta práctica, es común dentro del aula de clases; sin embargo, puede limitar el desarrollo y experiencia del aprendizaje, además de obstaculizar una resignificación no operacional del signo igual.

4.3.2 Problema 2: Caso b) Resolución de una Ecuación

En el segundo caso se propuso una ecuación con términos algebraicos en ambos lados de la igualdad mediante el planteamiento de una ecuación del tipo “no aritmética” (*expresión = expresión*). En este tipo de ecuaciones el valor desconocido se incluye en ambos miembros de la igualdad, misma que con base en Filloy y Rojano (1989) requiere de soluciones y métodos no operacionales. En suma, Abrate et al. (2008) señaló que el uso de metodologías rutinarias como la transposición de términos (T.T.) constituyen un procedimiento monótono, particularmente desbalanceado si se desarrollan acciones como “*trasladar términos con operaciones supuestamente inversas, por ejemplo, si un término está sumando entonces pasa restando al otro lado de la igualdad o bien si está multiplicando pasarlo dividiendo*”. Este

método orienta al estudiante a desarrollar una lectura unidireccional y guía a una solución que carece de un significado de equivalencia, en consecuencia, el uso desproporcionado de la metodología conocida como T.T. posibilita el origen de dificultades en el aprendizaje y limita darle sentido a una ecuación como una expresión equivalente.

En las producciones de los estudiantes se analizaron cuatro casos específicos. Los primeros dos corresponden al uso de la T.T., mientras que el tercero a la sustitución con un valor numérico y el cuarto que incluye la solución mediante un método de balance.

La Figura 26 presenta el proceso de solución de un alumno del grupo 2ºE de la S2 mediante la estrategia T.T., trasladando los términos de la incógnita en el lado izquierdo de la igualdad y las cantidades en el segundo miembro manifestando en todo momento una lectura unidireccional de la ecuación. Además, de que omite el proceso de comprobación.

b) Encuentra el valor de "x" que cumple la expresión

$$2x + 7 = 4x - 5$$

$$2x - 4x = -5 - 7$$

$$-2x = -12$$

$$x = -12 / -2$$

$$\boxed{x = 6}$$

Figura 26. Evidencia Transposición de términos lado izquierdo,

Alumno M., 2ºE, S2, Problema 2. b) Momento 3. Transición

El segundo caso analizado muestra el uso de la T.T., pero en sentido opuesto concentrando los términos de la incógnita en el lado derecho y los términos constantes en el lado izquierdo.

La Figura 27 presenta el proceso de solución de un alumno del grupo 3ºC de la S3 mediante la T.T.

b) Encuentra el valor de "x" que cumple la expresión
 $2x + 7 = 4x - 5$

$$\begin{aligned} X=6 \quad 2x+7 &= 4x-5 \\ 7+5 &= 4x-2x \\ 12 &= 2x \\ x &= 12/2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Figura 27. Evidencia de Transposición de términos lado derecho,

Alumna V, 3°C, S3. Problema 2.b), Momento 3. Transición

El tercer caso de incluye el proceso de solución mediante la sustitución del valor desconocido con un número que cumple la ecuación. En este sentido, los estudiantes interactúan directamente con la propiedad reflexiva de la igualdad " $a = a$ " y también comprueban la igualdad.

La Figura 28 presenta el proceso de solución de un alumno del grupo 3°A de la S1 mediante la sustitución numérica.

b) Encuentra el valor de "x" que cumple la expresión

$$2x + 7 = 4x - 5 \quad 2x + 7 = 4x - 5$$

$$2(6) + 7 = 4(6) - 5$$

$$12 + 7 = 24 - 5$$

$$19 = 24 - 5$$

$$19 = 19$$

El valor de x es igual a 6
 porque se le encuentra la solución
~~gracias~~ gracias al valor 6

19

Figura 28. Evidencia de solución con valor numérico,

Alumno R, 3°A, S1. Problema 2. b), Momento 3. Transición

Por último, el análisis se centró en los casos donde los estudiantes resolvieron la ecuación mediante un método de balance, hasta hallar el valor que satisface la igualdad. Este proceso

favorece a la comprensión de las propiedades de equilibrio de la igualdad como el inverso aditivo y el inverso multiplicativo.

Al respecto, dichas producciones pueden clasificarse dentro de una comprensión de carácter comparativo, ya que los estudiantes mantienen el equilibrio de la ecuación.

La Figura 29 muestra el proceso de solución de un alumno del grupo 3°C de la S3 mediante el método de balance.

b) Encuentra el valor de "x" que cumple la expresión

$$2x + 7 = 4x - 5$$

$$(2x + 7) : (4x - 5)$$

$$2x + 7 - 2x = 4x - 5 - 2x$$

$$7 = 2x - 5$$

$$7 + 5 = 2x - 5 + 5$$

$$12 = 2x$$

$$\frac{12}{2}$$

$$x = 6$$

Figura 29. Evidencia de solución con procedimiento de balance de una ecuación.

Alumno C., 3°C, S3. Problema 2.b). Momento 3. Transición

La Tabla 30 se elaboró a partir de los registros y análisis de los procesos de solución manifestados por los estudiantes, incluyendo a los casos sin respuesta y aquellos que ofrecieron una respuesta incorrecta o no terminaron el proceso.

Tabla 30. Resolución de una Ecuación, Momento 3: Transición

Momento 3: Problema 2, "resolución de una ecuación"				
Categoría	S1		S2	S3
	3°A	3°B	2°E	3°C
Sin Respuesta	17 (68 %)	11 (48 %)	16 (40 %)	2 (6 %)
Respuesta Incorrecta/incompleta	2 (8 %)	6 (26 %)	11 (27 %)	6 (18 %)
Solo escribe la respuesta	1 (4 %)	3 (13 %)	1 (2 %)	9 (26 %)
Transposición de términos lado izquierdo	1 (4 %)	3 (13 %)	11 (27 %)	3 (9 %)

Transposición de términos lado derecho	0	0	1 (2 %)	4 (12 %)
Resuelve con valor numérico	4 (16 %)	0	1 (2 %)	3 (9 %)
Resuelve utilizando procedimiento de balance	0	0	0	7 (20 %)
Total	25	23	41	34

4.4 Problema 3: Comprensión de una identidad algebraica

Con el objetivo de trabajar una expresión particular dentro del tema de identidades algebraicas, se abordó la estructura conocida como binomio al cuadrado y el desarrollo de un trinomio cuadrado perfecto (TCP). En la fase de investigación previa el diseño del material, el trabajo de Aké (2020) señaló que uno de los principales obstáculos en la evolución del aprendizaje del álgebra radica en la práctica de metodologías monótonas, tales como el enfoque en fórmulas, la memorización y el uso mecánico de algoritmos.

En este sentido, Godino (2012) mencionó que el signo igual evoluciona en tres dimensiones fundamentales dentro del álgebra: *la comprensión de expresiones equivalentes, la relación de una función como objeto matemático y el uso como elemento de una identidad algebraica*. No obstante, en la enseñanza de este contenido se suelen promover estrategias poco reflexivas. Un ejemplo frecuente es el uso del enunciado: “*el cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo*”.

Al analizar esta formulación, se observa que conduce a los estudiantes a seguir un algoritmo basado en la memorización y en la aplicación rígida de una fórmula, lo que conlleva a interpretar un orden estricto en los términos.

Al respecto, en los resultados se observó que algunos estudiantes rechazaron la veracidad de la expresión, cuando se presentó la igualdad en un orden distinto manifestado su apego a

interpretar esta igualdad como una fórmula centrada en un orden establecido por la enseñanza recibida.

La Figura 30 se recuperó como evidencia de las producciones de los estudiantes.

3. Si $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, consideras que la expresión $(a + b)^2 = b^2 + a^2 + 2ab$ es verdadero;
sí no ¿Por qué?

1º Verdadera, tienen bien el orden
2º Falso, no tiene orden correcto, no tiene congruencia

Figura 30. Evidencia de rechazo a la expresión de identidad algebraica.

Alumna AJ., 3ºA, S1, Momento 3. Transición

Para la realización de esta sección se trabajó exclusivamente con los grupos de tercer grado. La Figura 31 se recuperó como evidencia de un alumno del grupo 3ºA de la S1 que comprobó la expresión señalando a la propiedad conmutativa de la suma.

3. Si $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, consideras que la expresión $(a + b)^2 = b^2 + a^2 + 2ab$ es verdadero;
sí no ¿Por qué?

Sí por que la expresión es verdadera B por que la suma conmutativa

Figura 31. Evidencia de aceptación a la expresión de producto notable,

Alumna JE., 3ºA, S1, Tarea 3. Momento 3. Transición.

Posteriormente, se elaboró la Tabla 31 que concentró el registro de la aceptación y rechazo, incluyendo aquellos que no ofrecieron una justificación.

Tabla 31. Recopilación de respuestas en la actividad 3: Expresión 1 “identidad algebraica”

Momento 3: Actividad 3: Expresión 1 “identidad algebraica”			
Categoría	S1		S3
	3°A	3°B	3°C
Sin Respuesta	1(4 %)	5(22 %)	1(3%)
Rechazan la expresión por el orden	14(56%)	9(39 %)	7(20%)
Aceptaron la expresión sin justificación	0	0	3(9%)
Aceptaron la expresión con una justificación alusiva a una operación/resultado	0	3(13 %)	6(18%)
Aceptaron la expresión con una justificación a una estructura algebraica	2(8%)	3 (13%)	7(20%)
Aceptaron la expresión con una justificación donde resaltaron una propiedad algebraica	8(32%)	3 (13%)	10(29%)
Total	25	23	34

En los datos presentados en la tabla, se señaló que aproximadamente el 36% del total de las respuestas de los estudiantes rechazó la veracidad de la expresión debido al cambio en el orden de los términos.

En conclusión, el uso de metodologías rutinarias, como el enfoque en fórmulas, la memorización y el trabajo con algoritmos, limita la comprensión de los estudiantes para identificar una identidad algebraica. Al trabajar de manera habitual con un orden rígido de los términos, los estudiantes restringen su comprensión de las propiedades de la igualdad en las estructuras algebraicas, particularmente en lo que respecta a la equivalencia entre expresiones.

4.5 Actividad 2: Desarrollo de expresiones equivalentes

En la última sección del instrumento se diseñaron tres expresiones algebraicas especiales para completar. No obstante, la mayoría de las respuestas correspondió a omisiones, ya que los estudiantes dejaron en blanco este apartado. Por otro lado, se señaló que únicamente siete casos lograron resolver correctamente las equivalencias propuestas.

La Figura 32 se recuperó como evidencia de las respuestas correctas de un alumno del grupo 3°A de la S1.

4. Completa las expresiones con el término algebraico faltante. Explica cada respuesta

A) $(x+3)^2 = 6x + 9 + x^2$: la respuesta es cero porque con esas cantidades cuadradas toda la ecuación

B) $(y-5)(y+5) = y^2 - 25$: Porque $(y-5)(y+5) = y^2 - 25$

C) $x^2 + 9x + 18 = (x+3)(6+x)$: Porque así tiene sentido toda la ecuación

Figura 32. Evidencia de resolución de expresiones equivalentes.

Alumno R., 3ºA, S1. Tarea 4, Momento 3. Transición

En los planes de estudio, estos contenidos suelen organizarse en dos secciones: “productos notables y factorización”. Una desventaja de esta distribución es que no se expresa la equivalencia de las expresiones representada como factores y su desarrollo, en consecuencia, la enseñanza en estas expresiones se centra en comunicar una serie de estrategias operacionales

La Tabla 32 se elaboró como registro de las producciones de los estudiantes.

Tabla 32. Expresiones equivalentes, Momento 3: Transición

Momento 3: Actividad 4: Expresión 1-3 “expresiones equivalentes”			
Categoría	S1		S3
	3ºA	3ºB	3ºC
Sin Respuesta	14(56%)	20(87 %)	9(26%)
Respuestas Incorrectas	3(12%)	1(5 %)	7(21%)
Completan una expresión correctamente	4(16%)	2(8 %)	12(35%)
Completan dos expresiones correctamente	1(4%)	0	6(18%)
Completan las tres expresiones correctamente	3(12%)	0	0
Total	25	23	34

En estas últimas expresiones algebraicas, el caso más frecuente fue la omisión de respuestas. Aproximadamente el 90% del grupo 3ºB de la S1 no contestó este apartado; de manera

similar, en el grupo 3°A más de la mitad optó por no completar las expresiones. Por su parte, en el grupo 3°C de la S3, poco más de la cuarta parte también dejó espacios sin resolver.

En contexto, el segundo caso más frecuente consistió en responder únicamente un ejercicio, en particular al completar la segunda expresión. Cabe señalar que esta igualdad sólo requiere identificar un término, por lo que se clasificó de menor exigencia, mientras que, las expresiones 1 y 3 presentan una complejidad no rutinaria en el orden de sus términos. En general, en las actividades habituales en clase se suele promover un orden con respecto al grado del polinomio, lo cual se puede interpretar como una regla monótona, que limita interactuar con la propiedad conmutativa de la identidad.

En conclusión, se recomienda promover una enseñanza que favorezca la flexibilidad en el orden de los términos, con el fin de ampliar la comprensión de sus propiedades, Además, de facilitar la comprensión de estas expresiones como equivalentes, en lugar de orientar exclusivamente al desglosarlo en productos notables y factorización.

4.6 Reflexiones del Análisis de Respuestas de los Estudiantes

En síntesis, el momento 1, correspondiente a la exploración, las producciones de los estudiantes respecto al uso de palabra para identificar el significado que se asocia al uso del símbolo “=”, evidenciaron un predominio de interpretaciones de tipo operacional, en consecuencia, se señaló la frecuencia en vincular el significado del signo igual con la palabra *resultado*. Mientras tanto, el uso de palabras como “equivalencia” fue menos frecuente.

En relación con las igualdades de tipo Verdadero/Falso, se observó un poco más de la mitad manifestó una lectura unidireccional. En particular, se observó la tendencia a interpretar el signo igual como un “indicador de resultado” o un “separador”, este último, dentro de una cadena de igualdad.

En el momento 2, orientado al análisis de la equivalencia numérica, se plantearon cuatro igualdades con el propósito de identificar el nivel de comprensión de los estudiantes. En particular, las producciones de los estudiantes manifestaron una tendencia a manipular las cantidades, ya sea para expresar un resultado, o en algunos casos, no completar adecuadamente la igualdad. En conjunto, las respuestas y justificaciones evidenciaron una comprensión operacional-relacional, vinculada con procedimientos de tipo aritmético.

Por último, en el momento 3, los procesos de solución evidenciaron el uso de metodologías rutinarias, como la reducción de términos semejantes o la transposición de términos. De acuerdo con la bibliografía, este tipo de procedimientos puede obstaculizar la comprensión de los procesos de resolución, al conducir a enfoques mecánicos. Por otra parte, el segundo problema de aplicación a situaciones de la vida cotidiana se destaca por el uso de dibujos como estrategia creativa para hallar la solución, ya que este recurso favorece a una comprensión capaz de relacionar objetos no matemáticos con el álgebra, abriendo la posibilidad de interpretar el signo igual como una relación de correspondencia.

Finalmente, en el planteamiento de expresiones asociadas a productos notables, más de la mitad de los estudiantes dejó sin respuesta este apartado. Este resultado pone de manifiesto la necesidad de diseñar actividades que faciliten la comprensión de estos contenidos dentro del contexto algebraico, particularmente en lo que respecta al reconocimiento de la equivalencia entre expresiones.

En términos generales, los conocimientos previos manifestados por las respuestas escritas por los estudiantes dentro del instrumento de investigación permitieron identificar diversos obstáculos de tipo didáctico, tales como la lectura unidireccional en el contexto aritmético, el uso predominante de algoritmos, la memorización y el empleo de metodologías rutinarias en la resolución de problemas algebraicos. En múltiples casos, los estudiantes se centraron en la reducción de términos algebraicos mediante procesos aritméticos, lo que pone de manifiesto tanto una comprensión de tipo operacional como dificultades en el aprendizaje del álgebra.

En relación a estos hallazgos, se decidió implementar una sesión tipo taller con el propósito de fomentar la reflexión, el análisis y la concientización sobre la necesidad de desarrollar actividades que promuevan una comprensión avanzada del signo igual.

4.7 Análisis del taller reflexivo

En esta sección se analizaron los datos recopilados a partir del instrumento de investigación aplicado a los estudiantes. Con base al análisis de resultados, se planteó una sesión tipo taller con una duración de dos horas y media, en la que participaron 14 docentes de diversas escuelas de nivel media superior.

El objetivo principal del taller fue propiciar la reflexión en torno a los significados que favorecen u obstaculizan la comprensión del signo igual, así como promover la toma de conciencia sobre la importancia de identificar las dificultades en el aprendizaje, además de facilitar estrategias de enseñanza y métodos de solución no operacionales.

Para distinguir los niveles de comprensión dentro de las categorías de análisis, se empleó el siguiente código de colores.

Tabla 33. *Categorías y Clasificación del nivel de comprensión*

Categoría	Clasificación de los niveles de comprensión
1. Nociones del significado	Comprensión Operacional
	Comprensión Simultánea
	Comprensión Relacional
1.1 Uso del lenguaje y la práctica	Operacional
	Operacional y Relacional (Simultánea)
	Relacional
	Otra
2. Atención y Concientización de los Actos	Relacional Operativa
	Relacional Comparativa
3. Diversidad de solución en los procesos	Resolución Operacional
	Resolución Operacional y Relacional
	Resolución Relacional
4. Reflexión sobre el Obstáculo	Metodología Tradicional
	Metodología de comprobación numérica
	Metodología de Equivalencia

4.7.1 Categoría 1. Nociones del Significado

El primer análisis en esta fase consistió en la comparación de las respuestas a la pregunta del momento 1: ¿Qué palabras asocias con este símbolo “=”? El propósito de este apartado fue contrastar la frecuencia de las palabras utilizadas por los docentes con aquellas registradas en los hallazgos de las producciones de los estudiantes.

Las Figuras 33 y 34 presentan dos nubes de palabras elaboradas con el software R versión 4.5.1 a partir del registro de palabras utilizadas por los estudiantes en contraste con las empleadas por los docentes. En particular, la primera nube de palabras corresponde a la recopilación de palabras escritas en material impreso por los estudiantes; la cual fue elaborada con el registro de una tabla de frecuencia.

Por otra parte, la segunda nube corresponde a las palabras usadas por docentes, la cual fue generada inicialmente en el sitio web Mentimeter, una herramienta digital para la creación de esquemas interactivos en línea. Posteriormente, esta información fue empleada mediante una tabla de frecuencias y adaptada para su proyección en el software R.

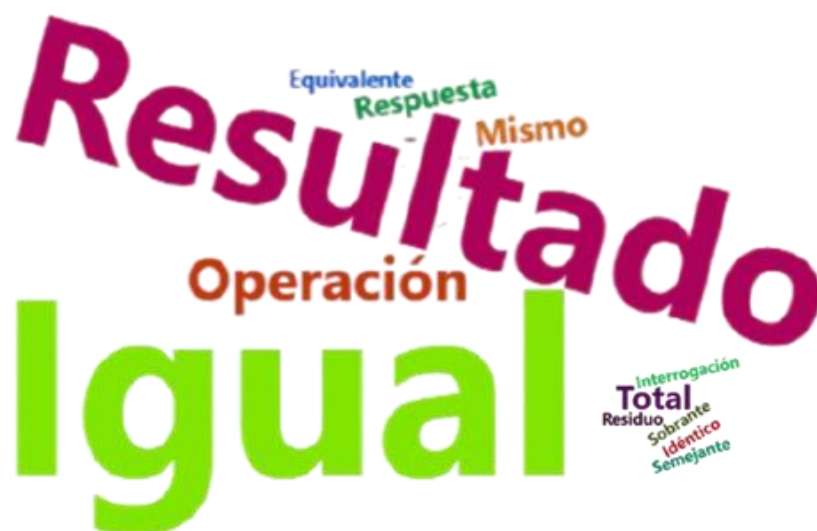


Figura 33. Nube de frecuencia de palabras que los estudiantes asociaron al signo "="

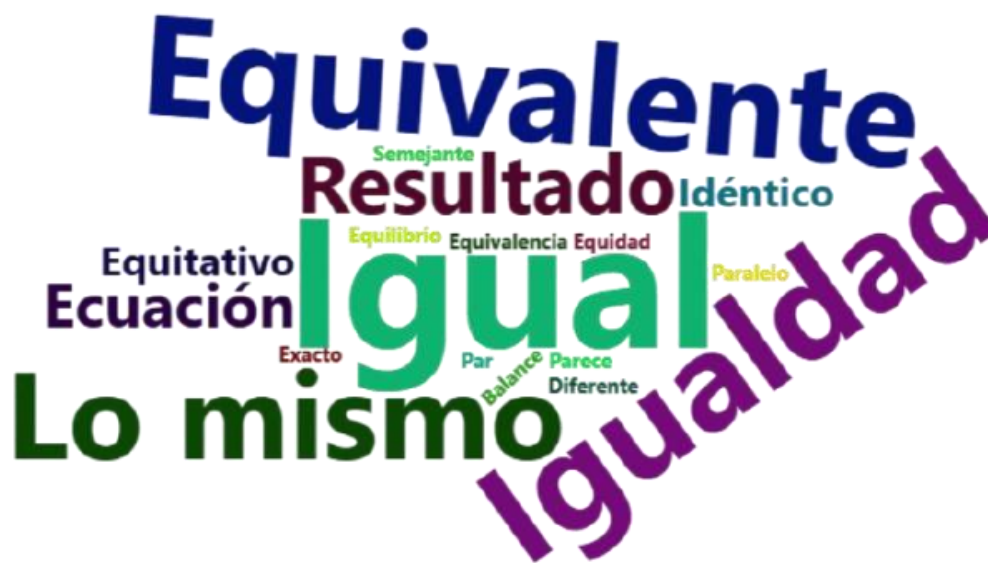


Figura 34. Nube de frecuencia de palabras que los docentes asociaron al signo "="

Para esta primera categoría se clasificaron las palabras orientadas a una **comprensión operacional**, **comprensión simultánea** y las que favorecen a una **comprensión relacional**.

Los hallazgos de esta pregunta evidenciaron una tendencia general a identificar el signo "=" con los términos de **"igual"** e **"igualdad"**, además, se observó diferencia significativa en el uso de la palabra **"resultado"**, la cual se posicionó como la segunda palabra más frecuente en las producciones de los estudiantes, en contraste con una menor presencia en las respuestas de los docentes.

Por su parte. El uso de la palabra **equivalente** se ubicó en el segundo lugar de frecuencia dentro de las respuestas de los docentes; sin embargo, en el caso de los estudiantes, las palabras asociadas a **equivalencia** presentaron una frecuencia mínima, lo cual reflejó en la proyección del tamaño dentro de la nube de palabras.

A partir de esta comparación, se concluyó que los docentes participantes manifestaron un predominio de una comprensión de carácter relacional en el uso de palabras asociadas al signo igual. No obstante, se destacó la importancia de fomentar una mayor toma de conciencia en el uso del lenguaje, particularmente en la incorporación de términos vinculados con la equivalencia, ya que estos favorecen el desarrollo de una comprensión relacional y

permiten evitar el uso reiterado de hábitos que reflejan una comprensión meramente operacional.

Posteriormente, con el apoyo de diapositivas y material seleccionado de la bibliografía, se promovió una reflexión en torno a la importancia de orientar un uso asertivo del lenguaje en la comprensión de la aritmética y en transición hacia el estudio del álgebra.

4.7.1.1 Categoría 1.1. Uso Adecuado del Lenguaje y la Práctica

El proceso seguido durante esta primera fase consistió en evaluar cuatro igualdades relacionadas con los usos y prácticas correctas e incorrectas del signo igual. Las respuestas de los docentes no mostraron ambigüedad; por el contrario, se observó que la mayoría de las justificaciones se asociaron con el uso del término “equivalente” para argumentar sus respuestas.

Las justificaciones se clasificaron en cuatro categorías, de acuerdo al uso del lenguaje y enfoque predominante en cada respuesta: **operacional** (justificaciones que implican la comprobación mediante operaciones), **operacional y relacional** (justificaciones que hacen referencia al significado de igual o igualdad), **relacional** (justificaciones que identifican el signo igual en términos de equivalencia) y *otra* (justificaciones que no evidencian una orientación clara en el uso del lenguaje o que se limitan a describir acciones sin sustento).

En la categoría **operacional** se identificaron las respuestas de dos docentes. Estas fueron analizadas en conjunto con las palabras que orientan hacia una concepción inadecuada del signo igual. Como evidencia, se elaboró un listado de las justificaciones, respetando su redacción original tal y como fueron escritas en material impreso:

$$15 - 8 = 7 + 1$$

- “El **resultado** de la **operación** del lado izquierdo del signo = es diferente a la operación del lado iz.” (Docente 2).
- “Porque la **operación** del lado izquierdo del signo igual es 7 y la **operación** del lado derecho es 8” (Docente 9)

En la segunda categoría, correspondiente a una comprensión **operacional y relacional**, se clasificaron las respuestas de ocho docentes, cuyas justificaciones concluyen con el uso de términos como “igual” o “igualdad”. De acuerdo con Lee y Pang (2023), interpretar el

símbolo “=” únicamente como “igual” o “igualdad” no garantiza el desarrollo de una comprensión relacional. Por el contrario, puede propiciar una comprensión limitada si se emplea para indicar el resultado de una operación; aunque también puede favorecer a una transición hacia una comprensión avanzada cuando se utiliza para representar una equivalencia numérica. Al respecto las justificaciones escritas por los docentes fueron:

- “Falsa, porque las **operaciones** dan distinto resultado, lado izquierdo 7 y lado derecho 8 los cuales no son **iguales**” (Docente 1).
- “La sentencia es falsa, la resta del primer miembro no es **igual** a la suma del segundo miembro” (Docente 3).
- “No se demuestra la **igualdad**” (Docente 6).
- “F suma incorrecta $7 \neq 8$ la **igualdad** no se está cumpliendo” (Docente 16).
- “Falsa – Porque el siete es menor que 8 y no es una **igualdad**” (Docente 15).
- “Siete no es **igual** a 8” (Docente 14).
- “Desde el punto de vista del signo considerándolo no cumple como una **igualdad**, el signo igual entonces no cumple la **igualdad**, pero si la expresión” (Docente 8).
- Falso, ya que 7 es menor que 8, 7 no es **igual** a 8” (Docente 7).

En la tercera categoría, correspondiente a una comprensión *relacional*, se incluyeron aquellas respuestas que incorporaron términos como **equivalencia** o **equivalente**, las cuales evidenciaron una comprensión del signo como una relación de **equivalencia**. En este caso, únicamente se observó la justificación de un docente.

- “Falsa al realizar la operación aritmética no son **equivalentes**” (Docente 10).

Por último, en la cuarta categoría, **otra**, se agruparon aquellas respuestas que no evidenciaron una orientación clara en el uso de términos asociados al signo igual. En este caso, se identificaron cuatro justificaciones escritas centradas en la descripción de un procedimiento, sin incorporar palabras vinculadas a algún significado del signo. Las frases escritas por los docentes fueron:

- “Falso. 7 es una unidad menor a 8” (Docente 12).
- “Como cantidad es falso, porque un valor es menor que otro” (Docente 11).
- “Falsa $15 - 8 \neq 7 + 1, 7 + 1 = 8 \therefore 15 - 8 \neq 8. 15 \neq 16$ por transposición $15 \neq 8 + 8$ ” (Docente 4).

- “falsa porque $15 - 8 = 7$ y $7 + 1 = 8$. (Docente 5).

Posteriormente, se llevó a cabo el análisis de la **segunda igualdad**, la cual fue diseñada con el propósito de identificar la presencia de una lectura unidireccional, así como una lectura bidireccional en el caso de una equivalencia numérica.

Para este análisis se retomaron las mismas cuatro categorías. En la categoría **operacional**, no se identificaron respuestas orientadas a la obtención de un resultado ni al uso de operaciones. Por otro lado, en la categoría **otra** se clasificaron cuatro justificaciones de los docentes que se limitaron a describir una acción o que no evidencian una asociación con algún significado del signo igual. Como evidencia, la información se organizó en el siguiente listado:

$$22 = 15 + 7$$

- “*V suma correcto $22 = 22$* ” (Docente 16)
- “*Verdadero, Son representaciones diferentes de #22*” (Docente 2).
- “*Verdadero, $22 = 2$ decenas y 2 unidades, $15 = 1$ decena y 5 unidades, $7 = 7$ unidades $\therefore 22 = 15 + 7$* ” (Docente 4).
- “*Verdadera porque $22 = 15 + 7$ y $22 = 22$* ” (Docente 5).

En la categoría **operacional y relacional** se incluyeron siete respuestas. Esta clasificación se debió al uso de términos de **igual e igualdad**, lo que puede clasificarse como una combinación de elementos operacionales y relacionales. Al respecto se presenta el listado de justificaciones:

- “*Cumple como una **igualdad***” (Docente 8).
- “*Ambos números son **iguales**, son **lo mismo***” (Docente 14).
- “*Verdadera – de un lado es **lo mismo** que del otro*” (Docente 15).
- “*Se demuestra la **igualdad** $22 = 22$, verdadero*” (Docente 6).
- “*Es una **igualdad** el primer término es **igual** a la suma del segundo término la sentencia es verdadera*” (Docente 3).
- “*Es verdadero, porque son el **mismo** valor $22 = 22$* ” (Docente 11).
- “*22 es la **misma** cantidad que la suma de 15 y 7*” (Docente 12).

En esta categoría se reconoce que la interpretación del signo como “**lo mismo que**” puede entenderse como una forma de comprensión simultánea.

Finalmente, en la categoría *relacional* se clasificaron las respuestas de cuatro docentes, debido a su orientación y uso del término **equivalente** o **equivalencia**, los cuales evidenciaron una concepción adecuada de la igualdad. Las justificaciones fueron:

- “Verdadero, ya que si agregamos 7 a 15 tenemos 22 **equivalente**” (Docente 7).
- “Verdadera, porque la operación del lado derecho es 22 y es **equivalente** al número izquierdo (lo mismo)” (Docente 1).
- “Verdadera porque el 22 es **equivalente** a la suma de 15 más 7” (Docente 9).
- “Verdadera, Son **equivalentes** al hacer la operación aritmética”. (Docente 10).

Como siguiente paso, se analizó la **tercera igualdad** del momento, la cual fue diseñada con el propósito de identificar prácticas inadecuadas en el uso de cadena de igualdades.

Aunque se trata de una igualdad incorrecta, los antecedentes revisados la documentaron como una problemática recurrente, ya que los estudiantes suelen concebir el signo igual como un separador de operaciones. Esta interpretación obstaculiza su comprensión como relación de equivalencia, al violar su propiedad de transitividad.

Posteriormente, las respuestas de los docentes se clasificaron en cuatro categorías establecidas. En primer lugar, en la categoría **otra** se agruparon dos respuestas que manifestaron un uso aislado sin ofrecer una justificación como evidencia de alguna comprensión asociada al signo igual. Al respecto se presenta el listado de las justificaciones.

- “Falsa $15 \neq 16 = 16$ ” (Docente 4).
- “F suma incorrecta $15 \neq 16 = 16$ ” (Docente 16).

En la siguiente categoría, correspondiente a una comprensión **operacional** se agruparon tres justificaciones escritas. Esta clasificación se asignó debido al uso de términos como **operación** y **resultado**, los cuales reflejaron un enfoque centrado en la ejecución de procesos.

El siguiente listado se presenta como registro de la evidencia recuperada de las justificaciones escritas por los docentes identificados:

- “Falso porque la primera **operación** da $12 + 3$ no cumple la misma condición de las otras dos operaciones” (Docente 9).
- “Falsa, porque el primer **resultado** es 15 y es diferente a los otros dos que son 16” (Docente 1).

- “Falsa. Es una combinación de **operaciones**, pero todas son distintas al **operar** y comprobar. (Docente 11).

En contraste, en la categoría relacional, se enlistaron dos justificaciones, cuyo argumento se vinculó a términos de **equivalencia**:

- “Falso el 15 es menor que 16 o bien no es **equivalente a** $15+1$ ” (Docente 7).
- “Falso, Solo en uno es **equivalente**, $15=16$ falsa, $16 = 16$ verdadero” (Docente 10).

Para concluir este análisis, en la categoría **operacional y relacional** se agruparon siete justificaciones:

- “No puedo considerar que la primera parte es **igual** a la segunda” (Docente 2).
- “Falsa, Porque no se cumple la **igualdad** entre las 3 operaciones” (Docente 5).
- “No cumple como una **igualdad**, pero que cambio con otro proceso, ¿Cuál? Por el momento lo desconozco” (Docente 8).
- “Sentencia falsa con relación al primer miembro con el segundo, pero con relación al segundo miembro con el tercero, son **iguales** es una sentencia verdadera” (Docente 3).
- “No se demuestra la **igualdad** (1° miembro y 2° miembro) Falso” (Docente 6).
- “Falso. – la primera no es **igual** a los otros dos resultados” (Docente 15).
- “Los tres números no son **iguales** solo se cumple una parte de **la igualdad**” (Docente 12).

La **cuarta igualdad** de este momento se incluyó con el propósito de trabajar la identificación de la propiedad simétrica en una equivalencia numérica.

$$6 + 5 = 7 + 4$$

En primer lugar, se enlistaron cuatro justificaciones dentro de la categoría **otra**, en las cuales los docentes no emplearon términos asociados al significado del signo igual:

- “Verdadero son 2 representaciones diferentes del # 11” (Docente 2).
- “Verdadero ya que $6+5$ es otra forma de expresar el 11 y $7+4$ también es 11” (Docente 7).
- “Verdadera $6 + 5 = 11$ una decena y una unidad $7 + 4 = 11$ ” (Docente 4).
- “V suma correcta $11 = 11$ ” (Docente 16).

Por otra parte, dentro de la categoría **operacional** se enlistaron tres justificaciones, los cuales evidenciaron un enfoque operativo en su comprobación:

- “Sentencia verdadera ambos miembros generan los mismos **resultados** en sus sumas” (Docente 3).
- “La suma de 6 y 5 **resulta** idéntica al **total** de la suma de 7 y 4” (Docente 12).
- “Verdadera. Ambos miembros se desarrollan en partes distintas, aunque **el resultado es igual**” (Docente 11).

Por su parte, en la categoría **operacional y relacional** se agruparon seis respuestas que evidenciaron un predominio simultáneo:

- “Verdadero, pues la suma de $6+5$ es 11 al **igual** que la suma de 7 y 4” (Docente 1).
- “Verdadera, si se cumple la **igualdad**” (Docente 5).
- “ $3+3+5=3+4+4$, cumple con una **igualdad**, tiene asociados **los mismos** números tanto del lado izq. Como del lado der.” (Docente 8).
- “ $11=11$, Se demuestra la **igualdad**, verdadero” (Docente 6).
- “ $11=11$, Verdadera – de ambos lados me da **lo mismo es igual**” (Docente 15).
- “ $11 = 11$, Ambos números son iguales, se cumple la **igualdad**” (Docente 14).

Finalmente, se clasificaron dos casos dentro de la categoría **relacional**. En sus justificaciones, los docentes emplearon términos asociados a la **equivalencia**:

- “Verdadera Porque la operación del lado izquierdo y derecho de la igualdad son **equivalentes**” (Docente 9).
- “ $11=11$ Verdadera al hacer las operaciones aritméticas son **equivalentes** los valores” (Docente 10).

La Figura 35 presenta el conjunto de anotaciones del docente 12 como evidencia de una confrontación del uso del signo igual.

$15 - 8 = 7 + 1$	Falso. 7 es una unidad menor a 8
$22 = 15 + 7$	Verdadero. 22 es la misma cantidad que la suma de 15 y 7
$12 + 3 = 15 + 1 = 16$ "Cadena de Igualdad" usarla correctamente	Verdadero. Entiendo dos momentos operacionales $15 = 15$ La suma de $15 + 1$ es igual a 16. Falso
$6 + 5 = 7 + 4$	Verdadero. La suma de 6 y 5 resulta idéntica al total de la suma de 7 y 4.

Figura 35. Notas de reflexión docente, momento 1. Exploración

En suma, se destacó la participación del Docente 10, quien, en sus cuatro justificaciones, evidenció un uso adecuado del signo igual al emplear términos como **equivalencia y equivalente**. Una vez recuperadas las respuestas correspondientes a este primer momento de exploración, se procedió a contrastar las evidencias operacionales y relacionales identificadas en las producciones de los estudiantes.

Como parte de esta comparación, se proyectó el caso del estudiante JE del grupo 3°A de la S1, con el propósito de evidenciar una comprensión unidireccional en la lectura de las igualdades, de izquierda a derecha. En colaboración de los docentes, se analizó la justificación correspondiente a la primera igualdad, lo que permitió reflexionar sobre la importancia de trabajar igualdades que involucren operaciones en ambos miembros de la igualdad. Este tipo de actividades favorece a la generación de desequilibrios cognitivos que contribuyen a la resignificación del signo igual y evitar concepciones inadecuadas en los estudiantes.

En cuanto a la **segunda igualdad**, la reflexión se centró en la importancia de promover una lectura bidireccional, con el fin de trascender estructuras del tipo "*operación = resultado*". En este sentido, se señaló la necesidad de diseñar actividades que involucren una interpretación bidireccional, fortaleciendo así una resignificación del signo igual y sus propiedades.

La toma de conciencia sobre la **tercera igualdad** se centró en evidenciar la problemática asociada al uso de cadenas de igualdades, así como en identificar la interpretación del signo igual como separador en la práctica de los estudiantes.

Por último, la **cuarta igualdad** puso de manifiesto una dificultad en la comprensión de la propiedad simétrica de la igualdad. Al respecto, la reflexión con los docentes se orientó a destacar la importancia de promover las propiedades del signo igual como relación de equivalencia.

4.7.2 Categoría 2. Atención y Concientización de los Actos

El siguiente análisis del taller consistió en comparar las respuestas de los docentes en el momento 2, correspondiente a la ampliación, con las producciones de los estudiantes.

Tras solicitar las respuestas a los docentes, al igual que las actividades anteriores no se detectaron errores en sus soluciones. No obstante, la intención de estas igualdades fue propiciar el análisis y reflexión acerca de los métodos de resolución empleados, en contraste con los manifestados por los estudiantes.

En la **igualdad #1** ($215 + _ = 175 + 216$), se analizó, en primer lugar, la presencia de una **comprensión unidireccional** en las producciones de los estudiantes, quienes resolvieron mediante la ejecución de una suma, lo cual constituye una respuesta incorrecta. La toma de conciencia en este ejercicio se centró en identificar este tipo de pensamiento operacional.

Posteriormente, se discutió una práctica frecuente en la resolución de igualdades, relacionada con la manipulación y transposición de números, la cual fue señalada y empleada por varios docentes en sus respuestas.

Las producciones de los docentes evidenciaron, en algunos casos, un enfoque algorítmico, al recurrir a procedimientos operacionales como el traslado de las cantidades con operaciones opuestas o, en otros casos, resolver dichas operaciones con el uso de calculadoras. Con el fin de ampliar el debate, se compartió información sobre los niveles de comprensión del signo igual de acuerdo a Mathews et al. (2012), destacando el nivel comparativo como comprensión óptima.

Se señaló que este nivel puede identificarse cuando la argumentación del estudiante se vincula con las propiedades de equilibrio. Por lo tanto, la conclusión de esta igualdad se orientó a fomentar estrategias basadas en la observación y balance, con el propósito de construir la noción de equilibrio entre igualdades aritméticas.

Posteriormente, las justificaciones y respuestas de los docentes se clasificaron en dos categorías: **relacional operativa** y **relacional comparativa**, las cuales se vinculan con la descripción del método o razonamiento empleado para obtener la solución.

En la categoría **relacional operativa** se concentraron seis justificaciones escritas que manifestaron un enfoque algorítmico mediante la manipulación desproporcionada de las cantidades que, en determinado momento, violan el equilibrio de la igualdad:

$$215 + _ = 175 + 216$$

- “176, con **operaciones aritméticas**” (Docente 10)
- “176, $175 + 216 = 391$; $391 - 215 = 176$, resuelvo la suma indicada y al **resultado** le resto la cantidad conocida” (Docente 12).
- “176, **sume** $175 + 216 = 391$ y le **reste** $391 - 215 = 176$ ” (Docente 11)
- “176, porque ambas **operaciones** deben dar 391. Busque un número que sumado con 215 dieran 391” (Docente 5).
- “176, Primero sume las dos últimas y luego reste el 215 para obtener una **igualdad** de ambos lados” (Docente 15).
- “176, $175 + 216 = 391$, $391 - 215 = 176$, $215 + 176 = 391$, Realizando **sumas y restas**” (Docente 14).

En la categoría **relacional comparativa** se incluyeron ocho justificaciones vinculadas a un razonamiento avanzado, argumentando su respuesta con términos asociados a una relación de equivalencia:

- 176, observé que tenía del lado derecho 216 y del lado izquierdo 215 entonces solamente **subí un punto a otro sumando**” (Docente 2).
- 176, observando el lado derecho de la igualdad, **le quite uno** al 216 para que sea 215 y 175 **se lo agregue**” (Docente 7).
- “176, tengo 2 sumandos y el 2º miembro tengo 216 y en el primero 215 si 216 le resto 1 tengo 215 **ese 1 se lo sumo a 175** para completar” (Docente 4).
- “176, **la diferencia únicamente** para generar la igualdad **es de 1**, por lo tanto, solo le sume el uno a 175, para generar la igualdad” (Docente 3).
- “176, observando que los 2 números del lado derecho **son similares** al del lado izquierdo y hacer una diferencia” (Docente 1).

- “176, complete el 175 **le sume uno**, para tener los mismos números” (Docente 8).
- “176, primer miembro 215 segundo miembro 216 por lo tanto **sumo 1** a 175 para que se demuestre la igualdad” (Docente 6).
- 176, del lado derecho de la igualdad está el número 216 y del lado izquierdo 215, por lo tanto, al número 175 **le sume 1** para obtener 176” (Docente 9).

El análisis posterior de resultados se orientó a la toma de conciencia respecto a las cadenas de **igualdades #2 y #3** del momento 2. En este sentido, se destacó la importancia de interpretar la equivalencia mediante una lectura bidireccional.

En consecuencia, el trabajo con igualdades que involucran cadenas de igualdades debe fundamentarse en el respeto de las propiedades simétrica y transitiva propias de una relación de equivalencia. Por definición, esto implica que la expresión inicial **es equivalente** a la representación final dentro de la cadena.

En la categoría **relacional operativa** se enlistaron nueve declaraciones de los docentes. Esta clasificación se asignó debido a que, en la descripción de los métodos de resolución, se observó una interpretación del signo como un separador, lo cual refleja un enfoque centrado en procedimientos, en lugar de favorecer a la ampliación en la comprensión del signo igual.

$$5 + 6 = _ + 4 = 11$$

- “7, Me aseguro que las tres cantidades **separadas** por el signo igual, tengan el mismo valor” (Docente 12).
- “7, Busque un número que en las tres partes izquierdas de 11” (Docente 11).
- “7, Las **tres operaciones** dan 11 y busque un número que sumado con 4 de 11” (Docente 5).
- “7, Es una igualdad **5+6=11 y 7+4=11**” (Docente 15).
- “7, **Realizando sumas**” (Docente 14).
- “7, al 11 le **reste el 4**” (Docente 7).
- “7, una diferencia al **11 restarle 4**” (Docente 1).
- “7, sumo $5+6=11$ a 11 **le quito 4 para demostrar la igualdad**” (Docente 6).
- “7, con **operaciones** aritméticas” (Docente 10).

Por otra parte, en la categoría **relacional comparativa** se enlistaron cinco justificaciones. Esta clasificación se asignó debido a la interpretación bidireccional e interactuar con la propiedad transitiva.

- “7, porque del lado derecho e izquierdo la cantidad es 11 por lo tanto del número 4 **faltan** 7 para obtener 11” (Docente 9).
- “7, observé la **equivalencia** entre los 3 términos y completé” (Docente 2).
- “7, $5+6=11$ para cumplir con la igualdad en el primer miembro me faltan 7 para cumplir con la **condición de igualdad**” (Docente 4).
- “7, solo realicé la suma del primer miembro y **lo comparé** con el tercer miembro y lo coloqué” (Docente 3).
- “7, Busco un número que me de 11” (Docente 8).

Posteriormente, con el fin de evidenciar el análisis de la tercera igualdad, se realizó una comparación de las justificaciones de los docentes. En este caso, se observó que la mayoría de sus respuestas ofrecieron procesos no operacionales.

Para profundizar este análisis, se ubicaron dos justificaciones dentro de la categoría **relacional comparativa**:

$$350 + _ = _ * 20 = _ / 2 = 700$$

- “Revise el resultado final y me di cuenta de que al dividir entre 2 es 350 y lo sume me dio 700, luego multiplique 35 por 20 y me dio $1400/2=700$ ” (Docente 15).
- “Observando el último número y viendo la operación y dada para encontrar los números faltantes, en caso 1. 350 es la mitad de 700, caso 2: al 20 hay que multiplicar por 35 y caso 3 es resultado de una división” (Docente 1).

En contraste, se enlistaron dos declaraciones dentro de la categoría **relacional operativa**, las cuales evidencian una lectura unidireccional o el uso de procedimientos como la transposición de términos mediante el uso de operaciones inversas.

- “Se buscaron números que sumados, multiplicados y dividido se obtenga el número 700” (Docente 9).
- “invertí operaciones, es decir primero multiplique dividí y finalmente reste” (Docente 2).

Finalmente, **la cuarta igualdad**, relacionada con fracciones equivalentes, evidenció soluciones centradas en el *despeje* y manipulación de números. La presencia de estas prácticas refleja un enfoque orientado a la ejecución de operaciones, que viola el equilibrio y las propiedades de los números reales.

Se seleccionaron dos casos como evidencia del uso del denominado *despeje*, un método que puede considerarse como un **obstáculo didáctico** cuando se emplea de manera indiscriminada por el docente y de forma coloquial en el aula. En consecuencia, esta estrategia orienta al estudiante a una comprensión monótona y algorítmica. Este proceso se agrupó dentro de la categoría operacional

- “Despeje de la fracción conocida” (Docente 1).

Finalmente, se enlistaron dos justificaciones que argumentaron el uso del inverso multiplicativo para hallar el valor que satisface la equivalencia, las cuales se ubicó en la categoría **relacional comparativa**:

- “se buscó un numerador que divido con el 4 de 2 y un denominador que se anule con el numerador de la primera fracción” (Docente 9).
- “Dividí 2 entre 3/4 y en ambos lados de la igualdad resulta el 2” (Docente 5).

La Figura 36 presenta las respuestas y justificaciones como evidencia de una reflexión del docente 12:

1. Completa cada espacio con la cantidad faltante. Explica como obtuviste la respuesta.

- $215 + \overset{391}{176} = 175 + \overset{391}{216}$: Resuelvo la suma indicada y al resultado le resto la cantidad conocida. Relacional Básica
 obtuve sumando 1 al 175 ya que al 215 le faltaba 1. Interpretación Relacional comparativa
- $5 + 6 = 7 + 4 = 11$: Me aseguro que las tres cantidades separadas por el signo igual, tengan el mismo valor ✓
- $350 + \overset{350}{350} = 350 + 20 = 1400/2 = 700$ Me aseguro respetar la cadena de igualdad
- $\frac{3}{4}(\frac{8}{3}) = 2 : \frac{24}{12}$ Busco la fracción adecuada para que resulte la igualdad.

Figura 36. Evidencia de las respuestas y justificaciones del docente 12

4.7.3 Categoría 3. Diversidad de Solución en los Procesos

En esta fase del análisis se evaluaron las respuestas correspondientes al momento 3: transición. La primera expresión se elaboró con la intención de involucrar el trabajo con *expresiones equivalentes* en el álgebra. Por ello, se organizaron las respuestas en tres categorías, de acuerdo con el método de solución empleado: *resolución operacional*, *resolución operacional y relacional* y *resolución relacional*.

La categoría de *resolución operacional* se asignó a aquellas respuestas en las que se observó el uso de la *reducción de términos semejantes*. Este procedimiento, ampliamente utilizado en la enseñanza para la simplificación de expresiones algebraicas, si bien conduce a resultados correctos, tiende a promover una actividad mecánica.

Al respecto, se diseñó la expresión 1:

Escribe dos formas de expresar la expresión. Explica tu respuesta

$$13y - 8y = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$13 - 8y = \underline{\hspace{2cm}}$$

El propósito de la expresión propuesta radica en identificar el uso de metodologías rutinarias como la reducción de términos semejantes. Por otra parte, se orientó a los docentes a proponer al menos una expresión equivalente vinculada a la propiedad simétrica de la igualdad.

La Tabla 34 presenta el conjunto de respuestas dentro de esta categoría, las cuales repiten el término algebraico.

Tabla 34. Trabajo con expresiones equivalentes

$13 - 8y = 5y$ $13 - 8y = 8y + 5y - 8y = 5y$ <i>“por descomposición del número”</i> <i>Docente 8</i>	$13 - 8y = 5y$ $13y - 8y = 5y$ <i>“al $13y$ restándole los $8y$ con una recta”</i> <i>Docente 7</i>
$13 - 8y = 5y$ $13y - 8y = 5y$ <i>“son términos semejantes”</i>	$13y - 8y = 5y$ $13y - 8y = (13 - 8)y = 5y$ <i>“Restando y aplicando leyes de los signos”</i>

Docente 4	Docente 11
-----------	------------

Como se observó, los cuatro procesos se basaron en la representación de la expresión mediante un único término algebraico, a partir de una acción simple. En este sentido, la expresión se interpreta como una extensión de las operaciones algebraicas vinculadas a una metodología de tipo operacional.

En la categoría de **resolución operacional y relacional** se agruparon siete respuestas. La principal ventaja en estos casos fue la propuesta de una expresión equivalente distinta a la obtenida por una operación, lo que favorece a la interpretación de expresiones equivalentes.

La Tabla 35 se elaboró a partir de la variedad de expresiones escritas por los docentes:

Tabla 35. Respuestas operacionales y relacionales de siete docentes

$13 - 8y = 3y + 2y$ Docente 14	$13y - 8y = 3y + 2y$ Docente 6	$13y - 8y = 7y - 2y$ Docente 1
$13y - 8y = 3y + 2y$ Docente 15	$13y - 8y = 10y - 5y$ Docente 5	$13y - 8y = 4y + 1y$ Docente 2
	$13y - 8y = 20y - 15y$ Docente 12	

Finalmente, en la categoría de **resolución relacional** se agruparon tres respuestas, incluyendo dos expresiones distintas, sin tomar en cuenta la reducción de términos:

Tabla 36. Resolución relacional de tres docentes

$13y - 8y = 5y = 10y - 5y$ $13y - 8y = 7y - 2y$ Docente 3	$13y - 8y = 10y - 5y$ $13y - 8y = 4y + y$ Docente 10	$13y - 8y = 10y - 5y$ $13y - 8y = 7y - 2y$ Docente 9
---	--	--

La Figura 37 presenta la variedad de expresiones escritas por el docente 2, quien completó con más de una expresión, además de agregar varias expresiones después del diálogo.

1. Escribe dos formas de expresar la sentencia. Explica tus respuestas

a) $13y - 8y = 4y + 1y$ $13y - 8y = 15y - 10y$ $13y - 8y = 6y - 1y$

$13y - 8y = 5y$ $13y - 8y = \frac{26y - 16y}{2}$ $13y - 8y = 10y - 2y - 3y$

2. Resuelve y describe el uso del signo igual en el siguiente contexto

$13y - 8y = 10y + 3y - 4y - 4y$

Figura 37. Expresiones propuestas por el Docente 2, momento 3. Transición

La reflexión final sobre esta expresión, se orientó hacia la propuesta que permita transitar de la interpretación de operaciones algebraicas hacia expresiones equivalentes, lo cual favorece al trabajo con ecuaciones.

Posteriormente, se realizó el análisis sobre el **problema 1** “situaciones de la vida cotidiana”. De acuerdo a lo establecido en la revisión bibliográfica, la aplicación de problemas vinculados con actividades diarias favorece a la construcción de significados no operacionales del signo igual, lo que se define como una relación de una cierta correspondencia.

La Figura 39 presenta el método de solución como evidencia de una estrategia creativa empleada por el Docente 8:

a) El costo de tres rosas es equivalente a comprar dos rosas y dos girasoles. ¿Cuánto cuesta una rosa?, si el costo de un girasol es de treinta pesos. Dónde $R = \text{rosa}$, $G = \text{girasol}$.

$$3R = 2R + 2G \Rightarrow 3R = 2R + 2(30) \Rightarrow$$

$$3R = 2R + 60 \Rightarrow 3R - 2R = 60$$

$$R = 60$$

$$3(60) = 2(60) + 2(30) = 180 = 120 + 60 \Rightarrow 180 = 180 //$$

Figura 39. Resolución de una situación real del Docente 8

La ventaja de resolver el problema mediante el pensamiento creativo radica en que los dibujos permiten simbolizar la ecuación, sin la necesidad de relacionarla directamente con procesos aritméticos, lo que contribuye a resignificar el signo igual, ofreciendo un uso novedoso de las matemáticas.

Por último, se observaron 13 respuestas que se centraron en la solución mediante una ecuación directa. Este procedimiento constituye un método frecuente para abordar este tipo de problemas; sin embargo, puede tanto facilitar como limitar el desarrollo de la creatividad y autonomía de los estudiantes, dependiendo del enfoque en el que se promueve el aprendizaje.

4.7.4 Categoría 4. Reflexión sobre el obstáculo

Para esta sección del análisis de resultados se identificaron las metodologías rutinarias como la transposición de términos mediante el planteamiento de una ecuación del tipo no aritmético $ax + b = cx + d$, la cual requiere de una comprensión de equivalencia,

A partir de este parámetro, se establecieron tres categorías: *metodología tradicional*, *metodología de comprobación numérica* y *metodología de equivalencia*.

En la categoría de *metodología tradicional* vinculada al uso de estrategias rutinarias como la T.T., se agruparon once respuestas de docentes que resolvieron la ecuación mediante el traslado y manipulación de los términos. Este procedimiento, en muchos casos, viola el equilibrio de la expresión

Se señaló que el primer método observado en las producciones de los docentes consistió en la solución del problema mediante la metodología conocida como transposición de términos.

Al respecto, se constató que el uso de esta estrategia encapsula al estudiante, especialmente cuando no se realiza un proceso de comprobación.

La Tabla 37 presenta el proceso de solución de dos docentes ubicados dentro de la categoría *metodología por comprobación numérica*, quienes realizaron la sustitución del valor numérico para satisfacer la equivalencia de la ecuación:

Tabla 37. Solución de la ecuación mediante la sustitución de un valor numérico

$2x + 7 = 4x - 5$	<i>Comprobación</i>
$2x - 4x = -5 - 7$	$2(6) + 7 = 4(6) - 5$
$-2x = -12$	$12 + 7 = 24 - 5$
$x = -\frac{12}{-2}$	$19 = 19$
$x = 6$	

En consecuencia, este proceso de solución fomenta el desarrollo e interacción con la propiedad reflexiva.

Por otro lado, la Figura 39 presenta el proceso de solución del docente 12 mediante la reflexión y empleo del método de balance ubicado dentro de la categoría de **metodología de equivalencia**, quien, además agregó información acerca de los obstáculos didácticos presentes en la enseñanza del álgebra.

$K = 2(30^\circ) = 60^\circ$

b) Encuentra el valor de "x" que cumple la expresión

$19 = 19$

$2x + 7 = 4x - 5$
 $7 + 5 = 4x - 2x$
 $12 = 2x$
 $6 = x$

Otro método:

$2x + 7 = 4x - 5$
 $7 = 4x - 5 - 2x$
 $7 = 2x - 5$
 $7 + 5 = 2x - 5 + 5$
 $12 = 2x$
 $\frac{12}{2} = \frac{2x}{2}$
 $6 = x$

Obstáculos en el álgebra

- Algoritmos
- Despeje
- Lenguaje
- Enfoque en memorización

En mi solución:

- No soy unidireccional
- Hay transposición de términos
- Buscar método de "equilibrio"

Figura 39. Reflexión efectiva en la solución de una ecuación Docente 12

En conclusión, es importante abordar la enseñanza del álgebra mediante el diseño de ecuaciones no aritméticas.

El siguiente análisis corresponde a la tercera expresión de este momento, en el cual se reflexionó acerca de saber identificar una identidad algebraica.

Con base a la expresión:

“Si $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, consideras que la expresión $(a + b)^2 = b^2 + a^2 + 2ab$ es verdadero; si no ¿Por qué?”, como se sabe es una declaración correcta, por la cual se les preguntó a los profesores que ¿Creen que contestaron los estudiantes al realizar la prueba?

En respuesta, se enlistaron once justificaciones en las que los docentes señalaron que los alumnos rechazan la igualdad debido a que no reconocen el orden de los términos.

Al respecto, la producción del Docente 7 evidenció el posible rechazo, también declaró los términos en lo que aceptan la expresión:

- *“El alumno podría decir que es falso ya que ha memorizado la regla del producto notable, los resultados no corresponden”.*
- *También podría decir verdadero si conoce las propiedades de la suma (conmutativa)”.*

En conclusión, es importante orientar la enseñanza a la comunicación asertiva y vincular los procesos de solución con las propiedades del signo igual como relación de equivalencia.

Por último, se centró el análisis de las respuestas correspondientes a las expresiones:

- a) $(x +)^2 = 6x + 9 +$
- b) $(y - 5)(y +) = y^2 - 25$
- c) $x^2 + 9x + = (x + 3)(6 +)$

El propósito de trabajar estas actividades es resignificar el orden de las expresiones y favorecer la construcción de expresiones equivalentes, en lugar de centrarse únicamente en el desarrollo de productos algebraicos.

La Figura 40 presenta las soluciones del docente 10 mediante la identificación del término faltante en cada expresión, sin premeditar un orden.

4. Completa las expresiones con el término algebraico faltante. Explica cada respuesta

A) $(x+3)^2 = 6x + 9 + x^2$: Identificando los términos cuadráticos y el doble producto

B) $(y-5)(y+5) = y^2 - 25$: Identificas el término independiente y no hay otro producto que de -25

C) $x^2 + 9x + \quad = (x+3)(6+x)$: $6x + x^2 + 18 + 3x$ visualizar que debe haber un producto de x^2 y $9x$.

Figura 40. Actividades de complemento de expresiones equivalentes docente 10

Finalmente, se elaboró la Figura 41 a partir de las categorías establecidas con base en los trabajos de Alsina (2007) y Weiss et al. (2019).

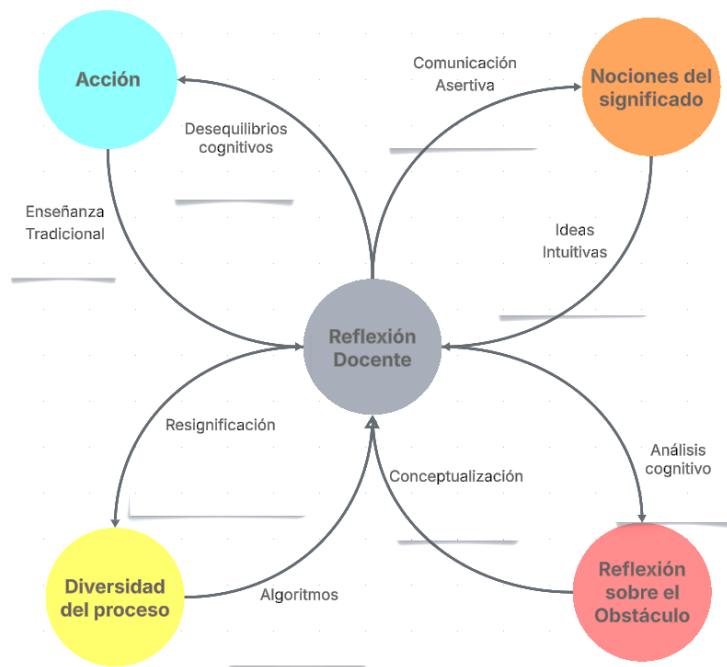


Figura 41. Diagrama del análisis de reflexión docente

La descripción de este diagrama tiene como eje central los procesos de entrada y respuesta de una reflexión docente. En este sentido, se concentró el análisis en las nociones del significado, donde la primera fase de búsqueda consistió en identificar las ideas intuitivas y

el conocimiento empírico con respecto al símbolo “=” En esta etapa se destacó la importancia del lenguaje, así como de los usos y prácticas inadecuadas.

El segundo eje se orientó hacia la acción, la atención y la toma de conciencia acerca de los actos habituales dentro de la enseñanza como el enfoque a resolver operaciones y estrategias novedosas, con el fin de devolver actividades que generan desequilibrios cognitivos que favorecen el desempeño de los estudiantes como la caracterización de una **equivalencia numérica** dentro de la aritmética.

El tercer análisis (diversidad del proceso) consistió en evidenciar las consecuencias de la enseñanza tradicional en los inicios del contexto algebraico. Dado que se trata de un contenido de carácter complejo. Al respecto, se señaló la presencia de un obstáculo didáctico derivado de la enseñanza recibida, la cual se manifiesta al reproducir las mismas estrategias con las que fue formado. A ello se suma el uso de un lenguaje poco robusto, que puede propiciar la violación de las propiedades del signo igual al centrarse exclusivamente en la ejecución de operaciones mediante estrategias rutinarias que carecen de una interpretación.

A partir del trabajo de reflexión con los docentes, se concluyó la importancia de diseñar estrategias no tradicionales que faciliten la transición de la aritmética al contexto algebraico. Para ello, se recomendó el trabajo con problemas de aplicación a situaciones de la vida cotidiana, así como la ampliación de actividades con expresiones equivalentes.

En suma, se planteó la resignificación de una ecuación como una expresión equivalente condicionada, la interacción del signo igual como relación de equivalencia y sus propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, además de apoyarse en el orden de los números reales conmutativa, asociativa, distributiva, elemento neutro de la adición y el producto, así como el inverso aditivo y el multiplicativo.

La intención no es comunicar estas propiedades de manera explícita y memorística, sino propiciar que el estudiante interactúe en diversos de modo que reconstruya sus ideas sobre el uso y significado del signo igual como una relación de variables, y la construcción de una identidad, como constructos que requieren una comprensión relacional del álgebra.

El cuarto análisis; reflexión del obstáculo permitió concluir la necesidad de reconocer las prácticas que dificultan la enseñanza y aprendizaje del álgebra. En este sentido, se optó por

un análisis cognitivo sobre la forma en que los estudiantes aprenden e interactúan con los conceptos y objetos matemáticos, con el fin de profundizar y ampliar su conocimiento, además de promover estrategias que favorezcan el desempeño de los estudiantes y el papel de la enseñanza.

4.8 Reflexiones Finales de los docentes, Momento 4

El último momento del instrumento de investigación corresponde a la evaluación de las respuestas a cuatro preguntas clave sobre la didáctica del signo igual. El primer análisis se centró en la comunicación asertiva del significado; para ello, se preguntó a los docentes:

¿Sueles enseñar con un enfoque hacia el pensamiento relacional en clase?

Se ubicó a tres respuestas que declararon una enseñanza con enfoque operacional y basada en prácticas inadecuadas, El cuadro presenta el registro de respuestas.

<i>“después de este taller me doy cuenta que manejo más el enfoque operacional”</i>	<i>“Considero que, en diversas ocasiones, pero estoy consciente que caigo en lo que me enseñaron”</i>	<i>“Intento realizarlo, pero al observar que mis alumnos no cuentan con los conocimientos básicos terminó enseñando de la forma tradicional”</i>
Docente 12	Docente 2	Docente 14

Posteriormente, se observó a dos reflexiones en las que los docentes argumentaron no contar con tiempo suficiente para abordar los temas, ya que, en ocasiones, el diseño de actividades y planes de estudio corresponden a las autoridades educativas.

<i>“lo intento, pero debo de realizar más actividades”</i>	<i>“Si, aunque no sabía lo que hacía y suelo hacerlo siempre. Y seguramente debo mejorar ya que al hacerlo sin tener la conciencia ha faltado el sustento pedagógico”</i>
Docente 15	Docente 7

Por último, aquellos profesores que declararon una enseñanza con enfoque relacional:

<i>“Si, al explicar un ejemplo de aritmética o álgebra les</i>	<i>“Si, trabajo inicialmente con los</i>	<i>“Parcialmente considero que sí, al resolver ecuaciones</i>
--	--	---

<i>comentó las equivalencias que podría tener el resultado”</i>	<i>alumnos las propiedades y leyes”</i>	<i>lineales utilizó el despeje y la comprobación”</i>
Docente 9	Docente 11	Docente 10

En conclusión, esta pregunta se diseñó para la toma de conciencia en la comunicación. En los primeros casos se consideró una orientación hacia lo operacional, lo cual se percibe como un obstáculo didáctico para el aprendizaje del signo igual, también se consideró que se necesita atención especial sobre el tiempo y espacio para el diseño de actividades que promuevan una comprensión relacional.

La segunda pregunta consistió en el análisis a partir del material didáctico con el que se cuenta en el aula:

¿Identificas si este tipo de ejercicios aparecen en los libros de texto?

Esta pregunta se refiere a si en los libros de texto se proponen actividades que involucren equivalencias numéricas en la aritmética, con operaciones en ambos lados de la igualdad, así como aplicaciones algebraicas en situaciones de la vida cotidiana.

Se identificaron cinco casos de negación, en los que los docentes señalaron no reconocer este tipo de actividades en los libros. Las respuestas abarcaron desde un simple “no” hasta la mención, en al menos un caso, de no contar con libros de texto.

La tercera pregunta correspondió a un análisis sobre lo cognitivo, es decir, centrado en la forma en que los estudiantes comprenden y aprenden; por lo cual se planteó la pregunta:

¿Cómo crees que ayudarían a tus estudiantes la implementación de actividades enfocadas a entender una relación de equivalencia del signo igual para el desarrollo de sus habilidades?

En este caso, el profesorado afirmó su respuesta señalando que este enfoque contribuiría significativamente a la comprensión y desempeño de los estudiantes, además, se reconoció la necesidad de brindar herramientas para el desarrollo de estrategias que favorezcan una comprensión relacional del signo igual.

En conclusión, el análisis cognitivo consistió en reflexionar sobre el efecto favorable que tiene el saber identificar una comprensión operacional y trabajar en la resignificación del

signo igual como una relación de equivalencia. En este sentido, resultó relevante compartir con los docentes diversos formatos de igualdades que se pueden emplear en la aritmética para construir equivalencias numéricas. Posteriormente, se destacó el diseño de actividades que faciliten la transición de lo operacional a lo relacional, así como la toma de conciencia sobre las consecuencias de las metodologías rutinarias.

Finalmente, se incluyó la participación de una docente que resaltó el beneficio de la implementación con actividades no operacionales y su intervención en otras disciplinas como la química y la física. Este aspecto, lo importante que es identificar las dificultades en el aprendizaje de los estudiantes y la matematización de problemas que implican retos y proyectos multidisciplinarios.

En la cuarta pregunta se analizó la práctica docente, la cual se formuló de la siguiente manera:

¿En clase promueves actividades que involucran las propiedades del signo igual y las de los números reales? Menciona que propiedades fomentas en cada caso.

Dentro de las respuestas del profesorado, se identificaron cuatro justificaciones en las que se declaró “No” promover las propiedades del signo igual ni de los números reales.

En estos casos, se señaló que algunos docentes admitieron desconocer dichos conceptos o asumieron que el estudiante puede desarrollarlos de acuerdo a su formación académica.

Por otra parte, se distinguieron siete justificaciones de docentes que argumentan utilizar las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva propias de una relación de equivalencia, así como las propiedades conmutativa, asociativa, distributiva, además de los inversos aditivo y multiplicativo,

En suma, se resaltó el recurso de resolver ecuaciones mediante procedimientos de balance que preservan las propiedades de equivalencia. Al respecto, se observó la respuesta de un docente que reconoció el uso de las propiedades del signo igual como tema relevante para la comprensión de la simbología en otras ciencias.

4.9 Reflexión Global

La implementación del instrumento de investigación permitió explorar las nociones, creencias, ideas intuitivas y conocimientos previos de los estudiantes acerca de los

significados y su comprensión del signo igual. Cada respuesta fue analizada con el propósito de evidenciar la presencia de dificultades en aprendizaje documentadas en la revisión bibliográfica.

Por su parte, las sesiones de trabajo con los estudiantes y docentes permitieron la recopilación de respuestas vinculadas con **obstáculos didácticos**.

- Los docentes fueron confrontados con las palabras utilizadas por los estudiantes en la pregunta de exploración sobre el uso del símbolo “=”. El primer momento del taller reveló un contraste significativo: mientras los estudiantes tendieron hacia una comprensión *operacional*, evidenciada en el uso de términos como “resultado”. En cambio, los docentes manifestaron una comprensión *relacional* al emplear palabras como “equivalente”. Esta comparación propició la apertura de un espacio de reflexión sobre el uso asertivo del lenguaje para comunicar el significado de equivalencia.
- El momento 2, correspondiente a la ampliación, dejó al descubierto la necesidad de construir el conocimiento de equivalencia numérica para favorecer el desempeño de los estudiantes desde la aritmética. Por lo cual, se recomienda el diseño de actividades en las que los estudiantes sean capaces de manifestar procesos de comparación y equilibrio, en lugar de proponer tareas simples que promuevan concepciones inadecuadas del signo igual.
- El empleo de metodologías como la reducción y la transposición de términos permitió constatar que los estudiantes experimentan una transición de la aritmética al álgebra. En este proceso, los métodos de solución evidenciaron los conocimientos previos que se desarrollan por la enseñanza de la aritmética. Al respecto, se trabajó con actividades de contextualización algebraica mediante problemas con aplicaciones en situaciones reales, que favorezcan la resignificación del signo igual.
- Las respuestas de los docentes a las preguntas sobre el papel de la didáctica en el momento 4. Permitted la concientización de los docentes sobre su propia enseñanza. A partir de sus respuestas se desprenden diversas reflexiones; por ejemplo; en el caso del docente 12, quien en cada momento realizó anotaciones sobre la información analizada y los tipos de obstáculos didácticos presentes en su práctica, así como las posibles estrategias para favorecer el desempeño.

Finalmente, se reconoció la necesidad de trabajar sobre los elementos esenciales para promover la comprensión de equivalencia, así como de proyectar la equivalencia numérica desde el contexto de la aritmética. En conjunto, se señaló el uso de metodologías favorezcan un proceso de evolución en los significados del signo igual, necesarios para su construcción en el álgebra.

4.10 Discusión: Desafíos en la comprensión del signo igual

Los resultados evidenciaron que persisten diversas metas en la comprensión del signo igual, particularmente asociados a interpretaciones que favorezcan la construcción del conocimiento relacional. Es esencial identificar las dificultades que limitan una interpretación. En este sentido se reconoció la necesidad de plantear objetivos que promuevan el análisis, confrontación y resignificación del signo igual como relación de equivalencia.

Comunicar de manera asertiva el significado del signo igual

Uno de los principales factores que influyen en la interpretación del signo igual, radica en las explicaciones de los maestros y la experiencia que tienen los estudiantes en la escuela con los contextos que atribuyen en los libros (Essien y Setati, 2006). En esta línea, parece importante promover contextos y palabras que conlleven a los estudiantes a una comprensión avanzada del signo igual.

Valorar los diversos usos y significados que se atribuyen al signo igual

Alcanzar una comprensión relacional durante los primeros niveles escolares contribuye al aprendizaje de conocimientos en niveles superiores, como equivalencia numérica, ecuaciones, identidades y expresiones equivalentes. Al respecto, Pincheira et al. (2026) señala que los docentes de matemáticas deben tener conocimientos y habilidades para identificar y organizar las actividades que involucran el uso del signo igual como evaluar la equivalencia a ambos lados promoviendo la comparación y balance de cantidades numéricas, utilizar correctamente cadenas de igualdad y expresiones equivalentes.

Identificar las dificultades que el alumnado manifiesta en sus procesos de solución

Una concepción inadecuada del signo igual, constituye una valiosa fuente de información que permite analizar las estrategias y planteamiento de actividades, así como las formas de razonamiento en la resolución matemática. En este contexto, identificar las dificultades que enfrentan los estudiantes, tales como la lectura unidireccional de las expresiones y la tendencia a de manera reiterada al cálculo, permite evidenciar los obstáculos presentes en los métodos de solución.

Integrar metodologías y actividades que favorezcan la construcción y el tránsito de una interpretación adecuada del signo igual

Con base en los resultados, se consideró relevante el trabajo con estrategias no rutinarias que enriquezcan la resignificación del signo igual. Entre estas metodologías se resaltó la implementación de igualdades de equilibrio numérico, empleo de representaciones múltiples, que permitan validar la igualdad sin recurrir exclusivamente al cálculo y la contextualización en situaciones reales, como problemas de equivalencia o reparto que ofrezcan un sentido práctico al uso del signo igual como relación de equivalencia (Pincheira, 2026).

Concientizar al profesorado acerca de la problemática de la interpretación del signo igual

En esta línea, Parodi (2024) consideró la creación de espacios en los que los docentes puedan practicar el ciclo completo de percibir, interpretar y gestionar errores en situaciones auténticas del aula, evidenciando dificultades con producciones reales de estudiantes.

En conclusión, los resultados confirmaron que es importante explorar los significados que los estudiantes atribuyen al signo igual como punto de partida para identificar las dificultades en el aprendizaje de la aritmética y la transición al álgebra. Reconocer y gestionar las metodologías de enseñanza para avanzar y transformar los obstáculos didácticos en motivación para construir un significado apropiado de los procesos y resoluciones matemáticas.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y APORTES DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presentan las conclusiones de la investigación a partir de los objetivos planteados, con la finalidad de resaltar la comprensión del signo igual como un tema de relevancia didáctica. Con este propósito, se realizó un análisis acerca de los obstáculos didácticos asociados a su comprensión. El reconocimiento de las dificultades que enfrentan los estudiantes favoreció el diseño de actividades orientadas a analizar la comprensión y aprendizaje, en lugar de concebirlas como una simple invitación al cálculo. En este sentido, se constató la relevancia de comprender la aritmética y el álgebra como un proceso de transición fundamental en la formación de los estudiantes.

De igual manera, se concluyó la necesidad de que los docentes tomen conciencia de la manera en que comunican los conceptos matemáticos, particularmente, desde el uso de palabras adecuadas para referirse al signo igual como equivalencia, así como de la importancia de revisar las metodologías y el uso de material didáctico. Finalmente, se presentan los aportes derivados de este trabajo.

5.1 Conclusiones

El propósito de la investigación fue reflexionar sobre las dificultades que enfrentan los estudiantes en la comprensión del signo igual, considerando que la didáctica desempeña un papel fundamental en la apropiación de los conceptos matemáticos. En este sentido, como docente e investigador, se reconoció la importancia de saber identificar y atender los obstáculos en el aprendizaje. Además, se buscó generar interés y aportar información que contribuya al diseño de actividades que fortalezcan el desempeño de los estudiantes y el trabajo docente.

En este marco, se planteó la pregunta: ¿De qué manera la enseñanza y los significados que asocian los estudiantes al signo igual revelan las dificultades que persisten en el tránsito de la aritmética al álgebra?

Para responder a esta interrogante, se consultaron diversos estudios cuya información sustentó que la comprensión del signo igual constituye un proceso de análisis didáctico. A partir de las metodologías de búsqueda en revistas especializadas, libros, memorias de congresos y tesis de posgrado se concluyó lo siguiente:

- Las dificultades en el aprendizaje se analizan a partir de las respuestas de los estudiantes. Cuando estas persisten, obstaculizan la construcción de un conocimiento adecuado de los símbolos matemáticos, como ocurre con el signo igual, el cual suele interpretarse como operador, separador o indicador de resultado, lo que limita su comprensión como una relación de equivalencia.
- El lenguaje es un factor crucial en la comprensión del signo igual.
- El planteamiento frecuente de igualdades del tipo $a + b = c$, suele interpretarse como una relación *operación = resultado*; En consecuencia, los estudiantes desarrollan una lectura unidireccional de las expresiones matemáticas.
- El trabajo con igualdades tipo $a + b = c + d$, propician conflictos cognitivos que favorecen a una interpretación adecuada como el significado de una equivalencia numérica.
- El uso de metodologías como la reducción y transposición de términos limita el significado e interpretación de los procesos de solución, al centrarse únicamente en la obtención de una respuesta, lo que rompe el equilibrio y análisis de una expresión.
- La incorporación de situaciones reales en problemas matemáticos, posibilitan el pensamiento creativo que permite la construcción de significados avanzados del signo igual como relación de correspondencia, al vincular objetos no matemáticos con el planteamiento de ecuaciones sin la necesidad de recurrir al cálculo.
- La resignificación del signo igual como relación de equivalencia favorece al desempeño e interpretación de los procesos matemáticos.

Posteriormente se planteó el objetivo

Analizar las dificultades en el aprendizaje que se manifiestan en los procesos de solución de los estudiantes, con el propósito de identificar el carácter de obstáculo didáctico, en especial, las que se vinculan con la comprensión del signo igual.

El análisis de las producciones de los estudiantes permitió orientar la investigación en la observación de estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver igualdades numéricas y expresiones algebraicas. Primero, se identificó el uso frecuente de la palabra “resultado” para referirse a la conclusión de una operación o proceso matemático; en contraste, se observó una atribución mínima con los términos de equivalencia. De acuerdo a los resultados,

el estudiante manifiesta una concepción inadecuada vinculada a la dificultad para distinguir entre el carácter operativo y relacional del lenguaje. En suma, se evidenció una divergencia en la aceptación y rechazo de usos incorrectos de igualdades, como la asociación del signo igual con la función de separador dentro de una cadena de igualdades, producto de la omisión de la bidireccionalidad de la igualdad, al interpretar únicamente las expresiones de izquierda a derecha como un proceso que conduce a un cálculo.

Explorar los significados que los estudiantes atribuyen al signo igual en contextos aritméticos y algebraicos.

De acuerdo a las justificaciones de los estudiantes se evidenciaron diversos significados atribuidos al signo igual, principalmente de carácter operacional, tales como indicador de una acción, operador y separador. Por otra parte, se observó el significado como relación de correspondencia, derivado de la propuesta con problemas contextualizados en situaciones de la vida cotidiana; interpretación que posibilita una transición en el conocimiento del signo. Al respecto, en otros casos se observó la capacidad de organizar y comparar cantidades numéricas de ambos miembros de una igualdad, lo que corresponde a una comprensión del signo igual como elemento de una equivalencia numérica. Finalmente, se analizó la resolución de ecuaciones y proposición de expresiones algebraicas con el fin de indagar la comprensión de equivalencia simbólica.

Identificar los niveles de comprensión que los estudiantes manifiestan en sus procesos de solución de actividades que involucran el uso del signo igual.

Tanto las estrategias como los procesos de solución empleados por los estudiantes desempeñaron un papel crucial en la clasificación del nivel manifestado por los estudiantes. Las justificaciones y respuestas se centraron principalmente en la obtención de una solución mediante el cálculo; de este modo se reconocieron tres niveles en la comprensión del signo igual: operacional rígido, operacional flexible y relacional básico. Este último, considerando una comprensión simultánea que posibilita la transición de los conocimientos relacionados entre la aritmética hacia el álgebra.

Reconocer los métodos de enseñanza que obstaculizan el desarrollo de una concepción adecuada del signo igual.

El planteamiento constante de igualdades numéricas ($a + b = c$) y ecuaciones algebraicas ($ax + b = c$), respectivamente, limita la interpretación del signo igual como propuesta de

actividad, al reforzar una visión centrada en la obtención de solución, en lugar de facilitar una comprobación de las expresiones como equivalentes.

En suma, la impartición de clase y resolución de actividades mediante metodologías rutinarias, memorización, dictado y práctica de algoritmos, como la reducción y transposición de términos obstaculiza la comprensión de los métodos de solución de igualdades, ecuaciones e identidades algebraicas.

Reflexionar acerca de cómo la comprensión del signo igual limita o favorece al tránsito del conocimiento aritmético hacia el algebraico.

Con respecto a la evolución de la comprensión del signo igual, se identificó que está es positiva cuando se enfatiza su carácter relacional y se fomenta la observación, comparación y análisis, sin la necesidad de recurrir al cálculo ni a la obtención de un resultado. En particular, se destacaron aquellos procesos y métodos que favorecen el aprendizaje, como el diseño de igualdades con operaciones en ambos miembros, con el fin de representar un mismo valor numérico, así como el uso de expresiones que promuevan la comprensión de las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva del signo igual. En conjunto, estas metodologías permiten promover procesos de solución basados en el balance de ecuaciones, respetando las propiedades de los operadores.

Por último, en el análisis de resultados para la clasificación de categorías se analizaron los trabajos de Alsina (2007), Weiss et al. (2019) con el fin de resaltar la importancia de los procesos y fases de la reflexión docente. Se realizó un listado de las conclusiones que se observaron después de la realización y aplicación del instrumento de investigación con los estudiantes y posterior análisis en la sesión de taller reflexivo con docentes:

- Se confirmó la tendencia de algunos estudiantes al concebir el signo igual como indicador de un resultado, la cual se manifiesta como una dificultad que enfrentan los docentes. Se recomienda la práctica de una comunicación asertiva en el uso del lenguaje, lo cual implica asociar palabras que relacionen el equilibrio y la equivalencia con el fin de concebir un desempeño adecuado y posterior resignificación de las ideas y creencias sobre la comprensión del signo igual.
- Después de la aplicación de la prueba escrita se identificó que gran parte de los estudiantes manifestaron un predominio operacional, de este modo se constató que

comprender el signo igual como equivalencia favorece al desempeño académico. Se resaltó que el aprendizaje tiende a evolucionar si se trabajan y diseñan actividades que desarrollen una lectura bidireccional de las expresiones numéricas con el propósito de generar desequilibrios cognitivos para ampliar y construir la concepción de una equivalencia numérica desde los estudios de la aritmética, lo cual busca favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje.

- Saber identificar el nivel de comprensión matemática de los estudiantes, permitió predecir y establecer objetivos de análisis sobre lo cognitivo, lo cual favorece a la reflexión y planteamiento de métodos de enseñanza y aprendizaje.
- Reconocer que los estudiantes experimentan un proceso de transición, permitió identificar los obstáculos didácticos que se manifiestan en las limitaciones de los estudiantes al comenzar el estudio del álgebra. Al respecto, el uso de metodologías como la transposición de términos, la memorización y el dictado orientado a un orden, resultan ser prácticas que adoptan los estudiantes y que con el tiempo obstaculizan la construcción de conocimiento matemático. Tras este análisis se subrayó la necesidad de concientizar acerca de las metodologías de enseñanza, por ejemplo, promover el uso de situaciones de la vida cotidiana para la gradual formulación de expresiones algebraicas y la conceptualización de una relación de equivalencia para el signo igual, en lugar de memorizar algoritmos y ejercicios repetitivos; prácticas que subyacen en la enseñanza tradicional.
- Evidenciar y profundizar en las dificultades sobre la comprensión del signo igual, favoreció a la reflexión docente propuesta en la sesión de taller. Después del análisis de las respuestas. Se destacó la toma de conciencia sobre la enseñanza y la atención didáctica que se debe considerar sobre la comprensión del signo igual. Un objetivo fundamental de este taller fue desarrollar un proceso de confrontación y posterior resignificación en los conocimientos y métodos de enseñanza, en conclusión, se recomendó adoptar metodologías que enriquezcan el proceso de enseñanza desde un profundo conocimiento de los conceptos involucrados, la matemática y la didáctica. Todo ello de manera articulada.

5.2 Aportes de la investigación

Como se mencionó en las conclusiones, el trabajo con actividades que involucren la comparación y equilibrio favorecen el desarrollo de conceptos matemáticos asociados al signo igual. Si estas actividades se plantean en expresiones numéricas posibilitan el desarrollo cognitivo de una *equivalencia numérica* en el estudio de la aritmética. Este conocimiento además permite predecir las limitaciones y dificultades que manifiestan los estudiantes al usar el signo igual. Por lo que se recomienda a las y los docentes diseñar propuestas y métodos de enseñanza orientadas al análisis de equivalencias base de una interpretación del signo igual capaz de evolucionar de lo operacional a lo relacional.

Se reconoció que la didáctica de las matemáticas estudia la permanencia de los obstáculos didácticos a partir de las limitaciones y dificultades que manifiestan los estudiantes. Se constató que las prácticas enfocadas a reflexionar y analizar la comprensión de las matemáticas de los estudiantes favorecen a la concientización de la práctica docente, tal como lo han reportado investigaciones previas.

Las actividades propuestas despiertan el interés y generan reflexiones importantes que favorecen la toma de conciencia, confrontación y resignificación de las nociones y creencias sobre los métodos de enseñanza tradicionales.

Se estudiaron las limitaciones que presentaron algunos estudiantes de tres escuelas secundarias, haciendo un análisis a profundidad se observó la oportunidad de investigar y ampliar el área de estudio. Distinguir y predecir las respuestas de los participantes (estudiantes y docentes) permitió evaluar los niveles de comprensión del signo igual. se analizó el contraste, entre la comprensión de estudiantes y docentes al utilizar el signo igual como un operador. Lo que da lugar a dificultades en la enseñanza para los docentes y de aprendizaje para estudiantes. Se concluyó que la falta de atención en la comprensión genera obstáculos didácticos debido a que en ocasiones los docentes no comunican de forma adecuada los conceptos matemáticos a enseñar.

Una limitación de este estudio es la ausencia de entrevistas individuales, que habría permitido indagar a detalle en las justificaciones y perspectivas de los participantes. Al respecto, Se constató que es necesario trabajar una formación docente que enriquezca la construcción del conocimiento matemático desde el estudio de la aritmética y diseñar metodologías flexibles

a la mejora para transitar en la comprensión y usos de los conceptos matemáticos, siendo el análisis cognitivo un campo de investigación abierto a futuras investigaciones deberían ampliar el análisis a otros dominios del aprendizaje y evaluar una intervención docente oportuna diseñada para potenciar la enseñanza y comprensión del signo igual.

La elaboración de este trabajo implicó cuatro etapas. La primera elegir y ubicar el tema de tesis a desarrollar para realizar una amplia revisión bibliográfica, la segunda adoptar un marco de investigación que permitió tomar decisiones en los procesos de experimentación. Posteriormente en la tercera etapa se seleccionó a la ingeniería didáctica como una metodología de investigación esencial para el análisis y diseño del instrumento de investigación y con ello, se desarrollaron dos procesos relevantes la aplicación de la prueba y la reflexión de la sesión tipo taller con la participación docente. La cuarta etapa fue el análisis de los resultados y selección de las evidencias para la elaboración de las conclusiones. Cada etapa contó con justificaciones y objetivos previamente establecidos. Por último, se destacó que la realización de esta investigación contribuye plenamente al desarrollo profesional y académico, al respecto brindó las herramientas fundamentales para el crecimiento y diseño de actividades constructivas.

Finalmente, la realización de este trabajo resultó ser un gran aporte personal para el desarrollo y toma de conciencia de la práctica docente, se recomienda que la profunda reflexión y análisis contribuya al interés de investigaciones productivas y orientadas para atender las dificultades y limitaciones derivadas de los obstáculos didácticos.

Agradezco la atención y honestidad de los participantes, reconozco al apoyo y compañerismo de los colegas docentes de la maestría y asesoramiento de la directora de tesis, concluyó con la frase:

“El conocimiento matemático es una responsabilidad, un don para ayudar a la sociedad”

GRACIAS.

BIBLIOGRAFÍA

- Abrate, R., Font, V., y Pochulu, M. (2008). Obstáculos y dificultades que ocasionan algunos modelos y métodos de resolución de ecuaciones. *Reunión Pampeana de Educación Matemática REPEM*, 2, 164 – 171.
- Aké, L. P., Barragan, J. A., Hernández, C. M., y Flores, G. A. (2020). Reflexión sobre la enseñanza de los productos notables: Una propuesta para el trabajo con profesores de matemáticas en formación. *Secuencias didácticas para el aprendizaje de las ciencias y las matemáticas*, 113 – 128.
- Alsina, A., (2007). El aprendizaje reflexivo en la formación permanente del profesorado: un análisis desde la didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*, 19 (1), 99 – 126. <https://scielo.org.mx/pdf/ed/v19n1/1665-5826-ed-19-01-99.pdf>
- Andrade, C. (2011). Obstáculos didácticos en el aprendizaje de la matemática y la formación de docentes. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa ALME*, 24(1), 1001 – 1007. <https://core.ac.uk/download/pdf/33251698.pdf>
- Arcavi, A., Drijvers, P. y Stacey, K. (2017). The learning and teaching of algebra: ideas, insights, and activities. *Routledge*.
- Artigue, M. (1992). Didactical engineering. En *didactique des mathématiques*, 41 – 70.
- Artigue, M., Moreno, L. A., Douady, R. y Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. *Editorial Iberoamérica*, 38 – 49.
- Ausubel, D. Novak, J., y Hanesian, H. (1998). Psicología educativa, un punto de vista cognoscitivo. *Trillas*
- Bachelard, G. (1938). *La Formación del espíritu científico. Siglo XXI*.
- Báez, M., y Farfán, R. M. (2022). Sistematización y análisis de un proceso de reflexión sobre la matemática escolar: Aspectos para la Profesionalización Docente. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 25 (1), 35 – 62. <https://doi.org/10.12802/relime.22.2512>.
- Baiduri. (2015). Mathematics education students' understanding of equal sign and equivalent equation. *Asian Social Science*, 25(11), 15 – 24. <http://dx.doi.org/10.5539/ass.v11n25p15>
- Broitman, C., Castillo, C., y Echeverría, A. B. (2017). Hacia la ampliación de sentidos del símbolo igual en los primeros grados de escuela primaria. *Yupana*, (11) 17, 8 – 37.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. En *Didactique des mathématiques*, 4(2), 165 – 198.
- Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques, 1970 - 1990. *Kluwer Academic Publishers*.

- Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*, 12(1), 5 – 38.
- Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. *Zorzal*.
- Burgell, F., y Ochoviet, C. (2015). Significados del signo igual y aspectos de su enseñanza. Un estudio realizado con estudiantes de primer año de enseñanza secundaria y sus profesores. *Enseñanza de las ciencias*, 33(3), 77 – 98.
<http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1561>
- Celi, S. Z., Quilca, M. S., Sánchez, V. (2021). Estrategias didácticas para el desarrollo del pensamiento lógico matemático en niños de educación inicial. *Horizontes*, 5(19), 1 – 13.
- Chiqui Quito, L., Matute, T., (2015). El desequilibrio cognitivo como elemento determinante en la construcción de conocimientos. Tesis de Licenciatura.
- Daros, W. (2002). ¿Qué es un marco teórico? *Enfoques*, 73 – 112.
<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=25914108>
- Devlin, K. (1994). *Mathematics: The science of patterns*. Ed. *Scientific American Library*.
- Donovan, A. M., Stephens, A., Alapala, B., Monday, A., Szkudlarek, E., Alibali, M. W., y Matthews, P. G. (2022). Is a substitute the same? Learning from lessons centering different relational conceptions of the equal sign. *ZDM-Mathematics Education*, 54, 1999 – 1213. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01405-y>
- Eisenhart, M.A. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991: ideas from a cultural anthropologist; implications for mathematics education researches. En *Proceedings of the thirteenth annual meeting of the north American Chapter of the Psychology of Mathematics Education*, 1, 202 – 219.
- Essien A., y Setati, M. (2006). Revisiting the equal sign: some grade 8 and 9 learner's interpretations. *African Journal of Research in SMT Education*, 10(1), 47 – 58.
[doi: 10.1080/10288457.2006.10740593](https://doi.org/10.1080/10288457.2006.10740593)
- Filloy, E., y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics*, 9(2). 19 – 25.
<https://www.jstor.org/stable/40247950?origin=JSTOR-pdf>
- Fyfe, E. R., Matthews, P. G., y Amsel, E. (2020). College developmental math students' knowledge of the equal sign. *Educational Studies in Mathematics*, 104, 65 – 85.
<https://doi.org/10.1007/s10649-020-09947-2>
- Gálvez, G., Block, D., La Teoría de Situaciones Didácticas, legado fundamental de Guy Brousseau a la educación matemática. *Educación Matemática*, 36 (1), 258 – 263.
<https://doi.org/10.24844/EM3601.14>

- Gálvez, L. F., González, J. R. y Vasyunkina, O. (2020). Obstáculos en la enseñanza – aprendizaje de la matemática. Revisión sistemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa ALME*, 33(1), 295 – 304.
- García, S., Borjón, E., Calvillo, N. J., y Torres, M. (2022). Enseñanza-aprendizaje de la raíz cuadrada con uso de geometría en el nivel bachillerato. *Educación Matemática*, vol. 34(3), 352 – 371. <https://doi.org/10.24844/EM3403.13>
- Godínez, H. F., (1997), Una relación breve y sumaria sobre el origen y evolución del significado de la palabra matemáticas. *Educación Matemática*, 9(3), 44 – 51.
- Godino, J, Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros <https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/>
- Godino, J., Castro, W., Aké, L., y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema*, 26(42B), 483 – 511. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291223574005>
- Gómez, M.A., Deslauriers, J.P., y Alzate, M.V. (2010). Cómo hacer tesis de maestría y doctorado. 1ª edición.
- Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 317–326. <http://www.jstor.org/stable/3482333>
- Kieran, C., y Yagüe, F. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias*, 3(7), 229 – 240. <https://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v7n3/02124521v7n3p229.pdf>
- Lárez, J. D. (2018). Algunos obstáculos que imposibilitan el aprendizaje efectivo de la matemática. *Investigación y Postgrado*, 33(1), 53 – 74.
- Leal, S. (2024). Ingeniería didáctica: un enfoque para la innovación en la enseñanza de las matemáticas. En *Zenodo*, 1 – 20.
- Lee, J., y Pang, J. (2023). What is so complicated in developing students’ conception of the equal sign. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 21, 559 – 580. <https://doi.org/10.1007/s10763-022-10248-8>
- Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *ZDM-Mathematics Education*, 37(6), 457 – 467. <https://doi.org/10.1007/BF02655854>
- Lugo, J. K. (2019). Didáctica y desarrollo del pensamiento lógico matemático. Un abordaje hermenéutico desde el escenario de la educación inicial. *Logos ciencia y tecnología*, 11(3), 18 – 29. <https://doi.org/10.22335/rlct.vlli3.991>
- Matthews, P., Rittle-Johnson B., McEldoon, K., y Taylor, R., (2012). Measure for measure: what combining diverse measures reveals about children’s understanding of the

equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for research in mathematics education*. 43 (3), 316-350.

<https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.43.3.0316>

Madej, L. (2022). Primary School Students' Knowledge of equal sign - the Swedish case. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20, 321 – 343.

<https://doi.org/10.1007/s10763-020-10144-z>

Meece, J. (2000). Desarrollo del niño y del adolescente. *Compendio para educadores, SEP*, 101 – 127.

Milinkovic, N., Maricic, S. y Dokic, O. (2022). The equals sign - the problem of early algebra learning and how to solve it. *Teaching Innovations*, 3(35), 26 – 42.

<https://doi.org/10.5937/INOVACIJE2203026M>

Molina. (2006). Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria. *Tesis de Doctorado*.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2007). Historia del signo igual. *Humanidades y Ciencias. Aspectos Disciplinarios y Didácticos*, Atrio, 249 – 261.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2009). Cómo entienden los alumnos de primaria el signo igual en las ecuaciones numéricas. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 1(7). 341 – 368.

<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=293121936017>

Muñoz, H., (2011). El significado del signo igual. *Primeros pasos en el álgebra, partículas elementales*. Ed. LOM. 1, 7 – 55.

Osorio, O., y Moreno, V., (2022). Habitus académico y obstáculos en la práctica docente. *Diálogos sobre educación*, 24, 1 – 15. <https://doi.org/10.32870/dse.v0i24.980>

Parodi, S., (2016). Significados del signo igual en la entrada al álgebra: un estudio de casos con estudiantes de segundo año de enseñanza secundaria. Tesis de maestría.

Parodi, S., Ochoviet, C., y Lezama, J. (2017). La comprensión del signo igual en la entrada al álgebra: el diseño de tareas y la conversación en la clase matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 35(3), 51 - 57. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2302>

Parodi, S., Ochoviet, C., y Lezama, J. (2020). Interpretaciones del signo igual en un contexto algebraico de polinomios. *Bolema*, 34(68), 1264 – 1284.

<https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n68a20>

Parodi, S., Ochoviet, C., y Lezama, J. (2024). Mirada profesional del futuro profesor en torno al signo igual. *Enseñanza de las ciencias*, 42(1), 43 – 63.

<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5806>

- Pecharromán, C., (2014). El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica. *Educación matemática*, 26(2), 111 – 133.
<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40532665005>
- Piaget, J. (1972). The psychology of the child. *Basic books*.
- Piaget, J. (1975). El Desarrollo del pensamiento. *Paidós*
- Piaget, J. (1978). La equilibración de las estructuras y pensamiento casual. *Visor*.
- Piaget, J. (1991). Seis estudios de psicología. *Labor*.
- Pincheira, N., Alsina, A. y Acosta, Y. (2026). Competencia diagnóstica de futuros docentes en tareas algebraicas: detección, causas y gestión de errores sobre el signo igual. *Educación Matemática*, 38 (1), 122 – 147. <https://doi.org/10.24844/EM3801.05>
- Saldarriaga, P. J., Bravo, G., Loo, M. R. (2016) La teoría constructivista de Jean Piaget y su significación para la pedagogía contemporánea. *Revista Científica Dominio de las Ciencias*. 2, 127 – 137.
<https://dominiodelasciencias.com/ojs/index.php/es/article/view/298/355>
- Sánchez, M. (2012). Sobre los roles de la teoría en una investigación en didáctica de las matemáticas. En memorias del “4º Seminario Taller de Educación Matemática: La enseñanza del cálculo y las componentes de su investigación”, 13 – 21.
- Sánchez, M., y Molina, J. G., (2012). Un método para realizar una búsqueda bibliográfica en didáctica de las matemáticas. *En metodología en matemática educativa: visiones y reflexiones*, 29 - 39.
- Santos, J. H. (2023). Reivindicando la Teoría de las Situaciones Didácticas: un Paradigma de Investigación Vigente en la Didáctica de las Matemáticas. *Bolema, Rio Claro (SP)*, 37(76), 625 – 642. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a12>
- Sensevy, G. (2007). Categorías para describir y comprender la acción didáctica. 5 – 34.
- Serres, Y. (2011). Iniciación del Aprendizaje del Álgebra y sus Consecuencias para la Enseñanza. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación*, 12(1), 122 – 142.
<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=41030367007>
- Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The arithmetic teacher*, 26(3), 9 – 15.
<http://www.jstor.org/stable/41187667?origin=JSTOR-pdf>
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas: Análisis desde el enfoque lógico semiótico. *Investigación en educación matemática*. 19 – 52.
- Stacey, K. y MacGregor, M. (2000). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of mathematical behavior*, 18(2), 149 – 167.
- Steen, L. A. (1988). The science of patterns, *Science*, 240, 611 – 616.

- Vermeulen, C., y Meyer, B. (2017). The equal sign: Teachers' knowledge and students' misconceptions. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 1 – 12. <https://doi.org/10.1080/18117295.2017.1321343>
- Weiss, E., Block, D., Civera, A., Dávalos, A., y Naranjo G. (2019). La enseñanza de distintas asignaturas en escuelas primarias: una mirada a la práctica docente. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 24 (81), 349 – 374. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_serial&pid=1405-6666&lng=es&nrm=iso
- Wardat, Y., Jarrah, A. M., & Stoica, G. (2020). Understanding the meaning of the equal sign: a case study of middle school students in the United Arab Emirates. *European Journal of Educational Research*, 10 (3), 1505 – 1514. <https://doi.org/10.12973/eu-jer.10.3.1505>

ANEXO 1. Instrumento de Investigación

Significados del signo igual de la aritmética al álgebra

Nombre: _____

Inicio: Momento 1 – Exploración

1. ¿Qué palabras asocias y usas para referirte a este símbolo “=”?

2. Determina si las sentencias son verdaderas o falsas, explica ¿Por qué?

Sentencia	Justificación
$15 - 8 = 7 + 1$	
$22 = 15 + 7$	
$12 + 3 = 15 + 1 = 16$	
$6 + 5 = 7 + 4$	

Ampliación: Momento 2

1. Completa cada espacio con la cantidad faltante. Explica cómo obtuviste la respuesta.
- $215 + \underline{\hspace{1cm}} = 175 + 216$: _____

 - $5 + 6 = \underline{\hspace{1cm}} + 4 = 11$: _____

 - $350 + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} * 20 = \underline{\hspace{1cm}} / 2 = 700$: _____

 - $\frac{3}{4}(-) = 2$: _____

Nombre: _____

Transición: Momento 3

1. Escribe dos formas de expresar la sentencia. Explica tus respuestas

a) $13y - 8y = \underline{\hspace{2cm}}$

$13y - 8y = \underline{\hspace{2cm}}$

2. Resuelve y describe el uso del signo igual en el siguiente contexto

a) El costo de tres rosas es equivalente a comprar dos rosas y dos girasoles. ¿Cuánto cuesta una rosa?, si el costo de un girasol es de treinta pesos.

b) Encuentra el valor de “x” que cumple la expresión

$$2x + 7 = 4x - 5$$

Nombre: _____

3. Si $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, consideras que la expresión $(a + b)^2 = b^2 + a^2 + 2ab$ es verdadero; sí no ¿Por qué?

4. Completa las expresiones con el término algebraico faltante. Explica cada respuesta

A) $(x + \quad)^2 = 6x + 9 + \quad$: _____

B) $(y - 5)(y + \quad) = y^2 - 25$: _____

C) $x^2 + 9x + \quad = (x + 3)(6 + \quad)$: _____

Nombre: _____

Momento 4: Conclusiones y Reflexiones

¿Sueles enseñar con un enfoque hacia el pensamiento relacional en clase?

¿Identificas si este tipo de ejercicios aparecen en los libros de texto?

¿Cómo crees que ayudarían a tus estudiantes la implementación de actividades enfocadas a entender una relación de equivalencia del signo igual para el desarrollo de sus habilidades?

¿En clase promueves actividades que involucren las propiedades del signo igual y la de los reales? Menciona que propiedades fomentas en cada caso.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

Escuela Preparatoria No. 1

Senior High School Number 1

X Coloquio de Actualización en la Enseñanza de la Matemática y la Física

Academias de Física y Matemáticas

Ficha de participación

ANEXO 2. Ficha de impartición del taller

NOMBRE DEL PONENTE:	Ing. Alberto García García Dra. María Guadalupe Simón Ramos
GRADO ACADÉMICO :	Ingeniero en Nanotecnología Doctora en Ciencias en Matemática Educativa
INSTITUCIÓN DE ADSCRIPCIÓN Y CARGO QUE DESEMPEÑA EN EL MISMO:	Profesora Investigadora del Área Académica de Matemática y Física del Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
DISTINCIONES:	Investigador en formación en la Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica Integrante del Sistema Nacional de Investigadoras de Investigadores Nivel 1. Presidenta de la Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa
CORREO ELECTRÓNICO:	ga507094@uaeh.edu.mx maria_simon@uaeh.edu.mx
TÍTULO DEL TALLER Y/O CONFERENCIA:	Desarrollo de significados del signo igual en el paso de la aritmética al álgebra.



Av. Juárez No. 1100,
Col. Constitución
Pachuca, Hidalgo, México; C.P. 42080
Teléfono: 01 (771) 71 720 00 Ext. 2301
preparatoria1@uaeh.edu.mx

www.uaeh.edu.mx



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

Escuela Preparatoria No. 1

Senior High School Number 1

X Coloquio de Actualización en la Enseñanza de la Matemática y la Física

Academias de Física y Matemáticas

Ficha de participación

ÁREA DE CONOCIMIENTO	Matemáticas
TEMAS A ABORDAR:	Las interpretaciones del signo igual que se comunican en el aula. Propiedades de los operadores y del signo igual. Los significados del signo igual.
REQUERIMIENTOS PARA EL TALLER Y/O CONFERENCIA:	Conexión a Internet para los participantes y talleristas. Equipo de cómputo o dispositivo móvil de parte de los participantes.
RESUMEN DEL TALLER Y/O CONFERENCIA:	Este taller tiene como objetivo reflexionar junto con los docentes sobre los significados del signo igual que han desarrollado los estudiantes a lo largo de su formación básica. Se realizarán actividades para indagar la forma en que en el aula de matemáticas se comunica el concepto de equivalencia (relacionado al signo igual) a los estudiantes. Con base en esta reflexión se abordarán las diferencias entre el pensamiento operacional y relacional y sus implicaciones para el desarrollo del pensamiento algebraico. Se trabajará con las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva del signo igual como una relación de equivalencia, así como las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la adición y el producto para los números reales. Se espera que al finalizar el taller los participantes tengan una guía para la toma de decisiones sobre la elaboración de actividades que involucren la comprensión relacional.



Av. Juárez No. 1100,
Col. Constitución
Pachuca, Hidalgo, México; C.P. 42080
Teléfono: 01 (771) 71 720 00 Ext. 2301
preparatoria1@uaeh.edu.mx

www.uaeh.edu.mx