



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Soluciones pares e impares de ecuaciones en diferencias de primer orden con operador de Rubin

Tesis para obtener el título de

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

presenta

Alicia García Loma

bajo la dirección de

Dr. Raúl Temoltzi Ávila

Mineral de la Reforma, Hidalgo, México, junio de 2026



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
School of Engineering and Basic Sciences
Director

Mineral de la Reforma, Hgo., a 11 de marzo 2026

Número de control: ICBI-D/373/2026
Asunto: Aceptación de jurado de tesis.

DR. RONALD RICHARD JIMÉNEZ MUNGUÍA
COORDINADOR DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
APLICADAS DEL ICBI.

Por este conducto me dirijo a usted, respetuosamente, para informar que con base en lo establecido en el Título Cuarto, artículo 34 del Capítulo I; artículos 42, fracción II y 43, fracción I del Capítulo II del Reglamento de Titulación, el jurado de tesis de la egresada **Alicia García Loma** con número de cuenta **333492**, queda designado de la siguiente forma:

Presidente: Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz
Secretario: Dr. Jorge Viveros Rogel
Vocal: Dr. Raúl Temoltzi Ávila
Suplente: Dr. Ronald Richard Jiménez Munguía

Sin otro particular por el momento, reciba un cordial saludo.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

Dr. Gabriel Vergara Rodríguez
Director del ICBI

Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo
Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo,
México. C.P 42184
Teléfono: 52 (771) 71 720 00 Ext. 40001
direccion_icbi@uaeh.edu.mx, vergarar@uaeh.edu.mx

GVR/MMM

"Amor, Orden y Progreso"



uaeh.edu.mx



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

School of Engineering and Basic Sciences

Dirección

Office of the Director

Mineral de la Reforma, Hgo., a 9 de junio de 2026

Número de control: ICBI-D/1074/2026

Asunto: Autorización de impresión.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UA EH

Con Título Quinto, Capítulo II, Capítulo V, Artículo 51 Fracción IX del Estatuto General de nuestra Institución, por este medio, le comunico que el Jurado asignado a la egresada de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas **Alicia García Loma**, quien presenta el trabajo de titulación **"Soluciones pares e impares de ecuaciones en diferencias de primer orden con operador de Rubin"**, ha decidido, después de revisar fundamento en lo dispuesto en el Título Tercero, Capítulo I, Artículo 18 Fracción IV; dicho trabajo en la reunión de sinodales, **autorizar la impresión del mismo**, una vez realizadas las correcciones acordadas.

A continuación, firman de conformidad los integrantes del Jurado:

Presidente: Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz

Secretario: Dr. Jorge Viveros Rogel

Vocal: Dr. Raúl Temoltzi Ávila

Suplente: Dr. Ronald Richard Jiménez Munguía

Sin otro particular por el momento, reciba un cordial saludo.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

Dr. Gabriel Vergara Rodríguez
Director del ICBI



GVR/MMM

"Amor, Orden y Progreso"



Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo
Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo,
México. C.P 42184

Teléfono: 52 (771) 71 720 00 Ext. 40001

direccion_icbi@uaeh.edu.mx, vergara@uaeh.edu.mx

uaeh.edu.mx

Resumen

El propósito de esta tesis es estudiar las soluciones de ecuaciones en diferencias de primer orden en el marco del q -cálculo utilizando el operador de Rubin, en particular, soluciones pares e impares. Para lograrlo, primero se desarrollan las herramientas necesarias a partir de los operadores q -derivada de Jackson y del operador q^{-1} -derivada de Jackson. Como punto de partida, se analiza la ecuación en diferencias con q -derivada de Jackson, la cual se transforma en una relación funcional entre $y(x)$ y $y(qx)$. Esto permite obtener una ecuación en diferencias que ayuda a construir la solución mediante iteraciones, expresándola en términos de una fracción continua iterada. Posteriormente, se estudia la ecuación en diferencias con q^{-1} -derivada de Jackson. En este caso, la ecuación genera una ecuación en diferencias que relaciona los términos $y(x)$ y $y(q^{-1}x)$, sin embargo, el método de solución es similar. Se transforma la ecuación en una expresión funcional y, mediante iteración, se obtiene una solución explícita. Finalmente, se analizan las soluciones pares e impares de ecuaciones en diferencias de primer orden con operador de Rubin, lo cual constituye el objetivo principal de la tesis. A diferencia de los operadores de Jackson, este operador presenta una estructura más simétrica, lo que facilita clasificar las soluciones en pares e impares. El estudio previo de los operadores de Jackson permiten adaptar el método iterativo al operador de Rubin y, de esta manera, alcanzar el objetivo principal de la tesis.

Abstract

The purpose of this thesis is to study the solutions of first-order difference equations within the framework of q -calculus using the Rubin operator, specifically even and odd solutions. To achieve this, the necessary tools are first developed from the Jackson q -derivative and the Jackson q^{-1} -derivative operators. As a starting point, the difference equation with the Jackson q -derivative is analyzed, transforming it into a functional relationship between $y(x)$ and $y(qx)$. This yields a difference equation that facilitates the iterative construction of the solution, expressing it in terms of an iterated continued fraction. Subsequently, the difference equation with the Jackson q^{-1} -derivative is studied. In this case, the equation generates a difference equation relating the terms $y(x)$ and $y(q^{-1}x)$, but the solution method remains similar. The equation is transformed into a functional expression, and through iteration, an explicit solution is obtained. Finally, the even and odd solutions of first-order difference equations with the Rubin operator are analyzed, which constitutes the main objective of this thesis. Unlike Jackson operators, this operator has a more symmetric structure, which facilitates classifying solutions as even or odd. The prior study of Jackson operators allows the iterative method to be adapted to the Rubin operator, thus achieving the main objective of this thesis.

Dedicatoria

A mi familia.

Así como el operador de Rubin permite observar una función desde distintas perspectivas y comprender mejor su estructura, ustedes me enseñaron a afrontar cada desafío con perseverancia, fortaleza y esperanza.

Esta tesis refleja no solo años de estudio y dedicación, sino también los valores y enseñanzas que me han acompañado a lo largo del camino.

Gracias por su apoyo incondicional, por alentarme en los momentos difíciles y por compartir conmigo cada logro alcanzado.

Agradecimientos

Las ecuaciones en diferencias muestran que cada paso depende de los anteriores. Mirando hacia atrás, reconozco que durante el desarrollo de esta tesis tuve la fortuna de contar con la guía del Dr. Raúl Temoltzi Ávila, quien me ayudó a analizar cada problema con mayor profundidad y a encontrar nuevos caminos cuando las respuestas no eran evidentes.

Le agradezco por ser un excelente profesor y asesor, por compartir su experiencia y conocimientos con dedicación y generosidad. Gracias por su paciencia, por responder cada una de mis dudas y por acompañarme durante todo el desarrollo de esta investigación. Valoro profundamente que siempre estuviera al pendiente de mi trabajo, brindándome orientación cuando más la necesitaba y motivándome a continuar ante las dificultades. Sus consejos, tanto académicos como personales, fueron una parte importante de la culminación de esta tesis.

Asimismo, agradezco los momentos de aprendizaje y las experiencias compartidas que hicieron de este proceso una etapa especialmente significativa y gratificante.

En matemáticas, una idea alcanza su mejor versión cuando es examinada desde distintas perspectivas. Por ello, agradezco profundamente a los miembros del jurado, Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz, Dr. Jorge Viveros Rogel y Dr. Ronald Richard Jiménez Munguía, por aportar sus diferentes perspectivas y observaciones lo que me permitió analizar este trabajo con mayor profundidad y reconocer aspectos que de otro modo habrían pasado inadvertidos para mí. Gracias por su disposición, sus recomendaciones y el interés mostrado hacia este trabajo.

A mi mamá, una de las personas más importantes de mi vida, por su amor, apoyo y compañía incondicional. Gracias por estar siempre al pendiente de mí y por acompañarme incluso en aquellas mañanas en las que madrugabas conmigo para comenzar un nuevo día de clases. Tu confianza, tus consejos y tu presencia han sido fundamentales para alcanzar esta meta. Espero que este logro te haga sentir tan orgullosa como yo me siento de ser tu hija. Gracias por estar siempre a mi lado.

A mi papá, por sus enseñanzas, consejos y confianza a lo largo de mi vida. Gracias por brindarme las herramientas y los valores que me han permitido afrontar los retos que se han presentado en mi camino. Agradezco profundamente tu preocupación constante, por estar siempre al pendiente de mi regreso y por procurar en todo momento mi bienestar. Gracias también por tratar de guiarme por el buen camino con tu ejemplo, tus consejos y tu apoyo incondicional.

A mi hermano mayor Daniel, gracias por cada consejo, cada palabra de aliento y cada apoyo que me has brindado a lo largo de mi vida. Gracias porque, aunque muchas veces te molesté más de la cuenta, siempre encontraste la manera de ayudarme y acompañarme. Gracias por defenderme cuando fue necesario, por cuidarme y por darme mucho más de lo que alguna vez esperé recibir. Saber que podía contar contigo me dio tranquilidad y confianza en muchos momentos. Este logro también lleva una parte de tu apoyo y cariño.

A mi hermano menor Alvaro, gracias por permitirme ser alguien en quien puedes apoyarte y

confiar. Tu cariño y compañía han sido una parte muy importante de mi vida y de este recorrido. Saber que me observabas y que, de alguna manera, podía influir en tu camino me motivó a dar lo mejor de mí en cada etapa. Espero haber logrado ser un buen ejemplo para ti y deseo seguir acompañándote, apoyándote y celebrando tus logros en el futuro. Gracias por estar presente y por hacer que este camino fuera aún más significativo.

A Gina y Joshuan, quienes comenzaron siendo compañeros de clase y terminaron convirtiéndose en amigos que hicieron esta etapa mucho más especial. Gracias por todas las risas, las pláticas, los desvelos y los momentos que compartimos a lo largo de estos años. La universidad no habría sido la misma sin ustedes. A pesar de todas las dificultades que implicó llegar hasta aquí, sé que este logro también tiene una parte de su apoyo. Gracias por las horas de estudio compartidas, por resolver dudas juntos, por los ánimos cuando las cosas no salían como esperábamos y por hacer más ligeros los momentos de mayor estrés.

A todas aquellas personas que han sido parte de mi vida fuera de las aulas: familiares, amigos y seres queridos. Gracias por sus palabras de aliento, por interesarse en mis avances y por celebrar conmigo cada pequeño logro alcanzado.

A quienes celebraron mis éxitos como si fueran propios, a quienes me tendieron una mano en los momentos difíciles y a quienes, con pequeños gestos, hicieron más ligero este camino, les guardo un profundo agradecimiento.

Entre demostraciones, dudas, descubrimientos y algunos desvelos, esta tesis fue tomando forma poco a poco. Hoy, al escribir estas últimas líneas, me quedo con la satisfacción de haber recorrido este camino y con el agradecimiento hacia quienes formaron parte de este recorrido. Cada una de ellas dejó una huella que permanecerá mucho más allá de estas páginas.

Índice general

Resumen	III
Abstract	v
Dedicatoria	vii
Agradecimientos	ix
Introducción	3
1. Preliminares	7
1.1. Introducción al q -cálculo	7
1.2. Operadores q -derivada y q -integral de Jackson	11
1.2.1. q -derivada de Jackson	11
1.2.2. q -integral de Jackson	21
1.3. Operadores q^{-1} -derivada y q^{-1} -integral de Jackson	24
1.3.1. q^{-1} -derivada de Jackson	24
1.3.2. q -integral de Jackson asociada a la q^{-1} -derivada de Jackson	29
1.4. Operadores q -derivada y q -integral de Rubin	30
1.4.1. q -derivada de Rubin	30
1.4.2. q -integral de Jackson asociada a la q -derivada de Rubin	37
2. Ecuaciones en diferencias de primer orden con diferentes q-derivadas	43
2.1. Solución de ecuaciones en diferencias con q -derivada de Jackson	43
2.2. Solución de ecuaciones en diferencias con q^{-1} -derivada de Jackson	52
2.3. Soluciones pares e impares de ecuaciones en diferencias con operador de Rubin .	57
Conclusión	61
A. Algunos resultados fundamentales	63
A.1. Series de potencias	63
A.2. Productos infinitos	64
Bibliografía	65

Introducción

El q -cálculo tiene sus antecedentes en el siglo XVIII, particularmente en los trabajos de Leonhard Euler sobre series infinitas y particiones de números enteros. Aunque su formulación formal es posterior, varias de sus estructuras fundamentales ya se encuentran implícitas en el estudio de Euler sobre funciones generatrices y productos infinitos, ver Álvarez Nodarse (2020).

El verdadero avance de Euler se produce cuando introduce el estudio de las particiones de números enteros positivos. Una partición de un entero positivo n consiste en escribirlo como suma de enteros positivos, sin distinguir el orden de los sumandos, y el número total de tales representaciones se denota por $p(n)$. Por ejemplo, las particiones de 4 son: 4, 3 + 1, 2 + 2, 2 + 1 + 1 y 1 + 1 + 1 + 1, con lo cual, $p(4) = 5$. En su libro, *Introductio in analysin infinitorum*, Euler demuestra que el número de particiones $p(n)$ se puede obtener como coeficiente en el desarrollo en serie de la función $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k}$, estableciendo así una profunda conexión entre productos infinitos y teoría de números, ver Euler (1748). Esta expresión conduce de manera natural a la introducción del producto infinito $(q; q)_{\infty} = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - q^{i+1})$, a partir del cual se obtiene la función generatriz $\frac{1}{(q; q)_{\infty}} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n$, $p(0) = 1$. Este hecho muestra cómo dichos productos infinitos permiten describir la estructura de las particiones mediante su desarrollo en series y, al mismo tiempo, dan lugar a objetos fundamentales que posteriormente se convierten en elementos centrales del q -cálculo. Lo notable de estas construcciones es que pueden interpretarse como deformaciones de estructuras clásicas: en muchos casos, al considerar el límite $q \rightarrow 1^-$ en los productos, series y operadores definidos en el contexto del q -cálculo, se recuperan sus correspondientes versiones del cálculo tradicional. De este modo, el parámetro q permite generalizar conceptos clásicos sin perder la conexión con la teoría original del cálculo.

Las ecuaciones en diferencias de primer orden, han sido una herramienta fundamental en el desarrollo de la matemática, ya que permiten modelar diversos fenómenos en física, ingeniería y otras áreas de las ciencias. En particular, resultan útiles para describir comportamientos secuenciales, trayectorias poblacionales, modelos financieros y sistemas dinámicos en donde el estado futuro depende únicamente del estado anterior. Estas ecuaciones desempeñan un papel importante debido a que en muchos casos, sus soluciones pueden obtenerse de manera explícita, lo cual permite comprender el comportamiento de diversos modelos considerados.

Puesto que el estudio de las ecuaciones diferenciales se basa en el concepto de derivada clásica, definida mediante el uso de límite y de la razón de cambio de una función,

$$\frac{df}{dx}(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x},$$

resulta natural investigar qué ocurre si, en lugar de tomar el límite, se fija una relación específica entre $x + h$ y x . En este caso, si la relación lineal $x + h$ se intercambia por la relación geométrica

qx , donde q es un número fijo tal que $q \in (0, 1)$, se obtiene una expresión del tipo

$$\frac{f(x) - f(qx)}{x - qx},$$

la cual ya no depende de un proceso de límite, sino del parámetro q . En este contexto, surgen las ecuaciones en diferencias en el q -cálculo, en el cual se elimina el concepto de límite y se reemplaza por un operador en diferencias que depende de un parámetro q . Una forma sencilla de apreciar la transición al q -cálculo es considerar, por ejemplo, la ecuación diferencial

$$\frac{df}{dx}(x) = \lambda f(x),$$

cuya solución es $f(x) = Ce^{\lambda x}$, donde C es una constante arbitraria. En el contexto del q -cálculo, su análogo se expresa mediante la relación

$$\frac{f(x) - f(qx)}{(1 - q)x} = \lambda f(x),$$

en la que el cambio de la función se establece entre x y qx . Se observa que si existe el límite en el lado izquierdo de esta ecuación cuando $q \rightarrow 1^-$, entonces se obtiene la ecuación diferencial propuesta inicialmente.

Uno de los operadores más conocidos en el q -cálculo es la q -derivada de Jackson, definida para $x \neq 0$ y $q \in (0, 1)$ como el operador

$$D_q f(x) := \frac{f(x) - f(qx)}{(1 - q)x},$$

ver la Subsección 1.2.1, la cual es una herramienta fundamental para formular ecuaciones en diferencias que generalizan las ecuaciones diferenciales ordinarias. Este operador actúa sobre una función que compara valores en los puntos x y qx , lo que permite describir su cambio mediante una relación entre estos puntos. A diferencia de la derivada clásica, donde el análisis se basa en el comportamiento de la función cuando el incremento tiende a cero.

De manera complementaria, también se puede considerar la q^{-1} -derivada de Jackson, la cual evalúa el cambio de una función entre los puntos x y $q^{-1}x$. En este contexto, se analiza la función tomando como referencia un punto que se obtiene al multiplicar por q^{-1} , lo cual implica analizar el comportamiento en dirección inversa. De esta manera, la q^{-1} -derivada de Jackson se define para $x \neq 0$ y $q \in (0, 1)$ como el operador

$$\tilde{D}_q f(x) := \frac{f(q^{-1}x) - f(x)}{(1 - q)x},$$

ver la Subsección 1.3.1. Este operador permite estudiar el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones en diferencias desde una perspectiva complementaria, ya que amplía el análisis a valores que pueden interpretarse como anteriores dentro de la sucesión generada por la elección del parámetro q .

Por otra parte, el operador de Rubin se introduce como una opción adicional dentro del q -cálculo, y presenta una definición distinta a la del operador de Jackson con parámetro q y su versión con parámetro q^{-1} . Este operador se define para $x \neq 0$ y $q \in (0, 1)$ como el operador

$$\partial_q f(x) := \frac{f(q^{-1}x) + f(-q^{-1}x) - f(qx) + f(-qx) - 2f(-x)}{2(1 - q)x},$$

ver la Subsección 1.4.1. A diferencia de los operadores $D_q f(x)$ y $\tilde{D}_q f(x)$, cuyas definiciones se basan en comparar valores en puntos relacionados por una sola dirección del parámetro q , el operador de Rubin considera una expresión que involucra de manera más equilibrada los valores de la función, lo que favorece el análisis de propiedades simétricas.

Esta característica resulta especialmente relevante cuando se estudian propiedades relacionadas con la paridad de las funciones. En el cálculo tradicional, las funciones pares e impares desempeñan un papel importante debido a que su simetría facilita el estudio de las ecuaciones diferenciales, lo que permite descomponer soluciones en componentes con propiedades bien definidas. De manera análoga, en el contexto del q -cálculo, el operador de Rubin ofrece un entorno más adecuado para analizar este tipo de simetría, ya que su definición permite mantener con mayor claridad las propiedades de las funciones pares e impares.

El operador de Rubin aporta ventajas analíticas relevantes en el estudio de ecuaciones en diferencias, particularmente en aquellas donde intervienen relaciones funcionales entre valores de la función en puntos opuestos. Su estructura permite tratar de manera más uniforme expresiones que involucran términos como $f(x)$, $f(-x)$, $f(qx)$ y $f(-qx)$, lo que resulta útil en la formulación y resolución de ecuaciones en diferencias con este tipo de dependencias. En particular, facilita el análisis de ecuaciones de primer orden en las que aparecen combinaciones tales como $f(x) + f(-x)$ ó $f(qx) - f(-qx)$, así como las funciones definidas en semiejes, por ejemplo, en el estudio de funciones especiales del q -cálculo, como las funciones q -trigonométricas, donde la paridad desempeña un papel fundamental. Las propiedades esenciales del operador de Rubin se analizan en la Subsección 1.4.1. En particular, se muestra que si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función impar, entonces $\partial_q f(x) = D_q f(x)$, mientras que si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función par, entonces $\partial_q f(x) = \tilde{D}_q f(x)$.

Por esta razón, el uso del operador de Rubin no solo responde a un nuevo enfoque del concepto de q -derivada, sino también a la necesidad de estudiar ecuaciones en diferencias cuyas soluciones puedan clasificarse según su paridad. En este sentido, este enfoque facilita el análisis de condiciones bajo las cuales una ecuación en diferencias de primer orden con operador de Rubin admite soluciones pares o impares, lo cual representa el objetivo principal de este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

El q -cálculo, también conocido como cálculo cuántico o cálculo sin límites, surge como una generalización natural del cálculo clásico en la que el concepto de límite es reemplazado por un parámetro de deformación q . En lugar de considerar incrementos infinitesimales, el q -cálculo estudia variaciones discretas multiplicativas. La idea central consiste en sustituir la noción de diferencia aditiva por una diferencia geométrica. Así, la derivada ordinaria es reemplazada por la q -derivada, definida de manera que, cuando $q \rightarrow 1^-$, se recupera el cálculo clásico. En este capítulo introduciremos los conceptos fundamentales del q -cálculo: q -números y q -factoriales, q -derivadas y q -integrales, así como algunas de sus propiedades básicas.¹ Exploraremos algunos ejemplos que ilustren cómo esta teoría generaliza resultados conocidos.

1.1. Introducción al q -cálculo

Los siguientes conceptos se pueden encontrar en Kac y Cheung (2002). Se supone siempre que $q \in (0, 1)$. Iniciamos denotando un q -análogo de los números reales, llamado q -real y denotado por $[\lambda]_q$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, el cual se define como

$$[\lambda]_q = \frac{1 - q^\lambda}{1 - q}.$$

En particular, si $\lambda = n \in \mathbb{N}$, entonces $[n]_q = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$ es un q -natural. De la definición se observa que $\lim_{q \rightarrow 1^-} [\lambda]_q = \lambda$, lo cual se sigue de aplicar la regla de L'Hôpital. De igual manera, un q -factorial $[n]_q!$ se define como:

$$[n]_q! = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, \\ [n]_q \times [n-1]_q \times \cdots \times [1]_q, & \text{si } n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Se observa también que de la definición se tiene $\lim_{q \rightarrow 1^-} [n]_q! = n!$. Una vez que se definió $[n]_q!$, podemos definir de igual forma un q -análogo del coeficiente binomial como

$$\binom{n}{j}_q = \frac{[n]_q!}{[j]_q! [n-j]_q!} = \frac{[n]_q [n-1]_q \cdots [n-j+1]_q}{[j]_q!}.$$

¹Se destaca que en este trabajo, el cálculo que se explora es un q -cálculo clásico estándar, el cual corresponde a un cálculo particular de un q -cálculo general que se discute en Georgiev y Zennir (2024).

8 Preliminares

Podemos ver que la función que se comporta como la potencia de un binomio $(a - x)^k$ está dada por

$$(a - x)_q^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ (a - x)(a - qx) \cdots (a - q^{k-1}x) & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

De manera similar tenemos un q -análogo del factorial desplazado, o símbolo de Pochhammer, definido como:

$$(x; q)_0 = 1, \quad (x; q)_n = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - q^i x), \quad (x; q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - q^i x).$$

Observamos de las definiciones que se cumple la siguiente identidad:

$$(a; q)_k = (1 - a)_q^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

y por consiguiente,

$$(a; q)_\infty = (1 - a)_q^\infty.$$

Las definiciones anteriores permite obtener la siguiente identidad

$$[k]_q! = \frac{(q; q)_k}{(1 - q)^k}.$$

En efecto, basta observar que

$$\begin{aligned} [k]_q! &= [k]_q [k-1]_q \cdots [1]_q = \frac{1 - q^k}{1 - q} \cdot \frac{1 - q^{k-1}}{1 - q} \cdots \frac{1 - q}{1 - q} \\ &= \frac{(1 - q) \cdots (1 - q^{k-1})(1 - q^k)}{(1 - q)^k} = \frac{(1 - q^0 q) \cdots (1 - q^{k-2} q)(1 - q^{k-1} q)}{(1 - q)^k} \\ &= \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (1 - q^{i+1})}{(1 - q)^k} = \frac{(q; q)_k}{(1 - q)^k}. \end{aligned}$$

En conclusión:

$$[k]_q! = \frac{(1 - q)_q^k}{(1 - q)^k} = \frac{(q; q)_k}{(1 - q)^k}. \quad (1.1)$$

De acuerdo a la definición de $(a - x)_q^k$ los dos siguientes teoremas muestran algunas propiedades que son de utilidad.

Teorema 1.1 (Kac y Cheung, 2002). *Para cualesquiera m y n enteros se tiene*

$$\begin{aligned} a) \quad (a - x)_q^{n+m} &= (a - x)_q^n (a - q^n x)_q^m, & c) \quad (a - x)_q^{-m} &= \frac{1}{(a - q^{-m} x)_q^m}. \\ b) \quad (a - q^n x)_q^{-n} &= \frac{1}{(a - x)_q^n}, \end{aligned}$$

Demostración. Se observa que

$$\begin{aligned} (a - x)_q^{n+m} &= \overbrace{(a - x)(a - qx) \cdots (a - q^{n-1}x)}^{(a-x)_q^n} \overbrace{(a - q^n x)(a - q^{n+1}x) \cdots (a - q^{n+m-1}x)}^{(a-q^n x)_q^m} \\ &= (a - x)_q^n (a - q^n x)_q^m, \end{aligned}$$

mostrando así el inciso a). Además, se tiene que

$$(a - q^n x)_q^m = \frac{(a - x)_q^{n+m}}{(a - x)_q^n}, \text{ si } m \rightarrow \infty, \text{ entonces } (a - q^n x)_q^\infty = \frac{(a - x)_q^\infty}{(a - x)_q^n}.$$

Si $m = -n$ en el inciso a), se tiene

$$1 = (a - x)_q^n (a - q^n x)_q^{-n} \text{ y, por lo tanto, } (a - q^n x)_q^{-n} = \frac{1}{(a - x)_q^n},$$

demostrando así el inciso b). Por otro lado, si $n = -m$ en el inciso a), se tiene

$$1 = (a - x)_q^{-m} (a - q^{-m} x)_q^m \text{ y, por lo tanto, } (a - x)_q^{-m} = \frac{1}{(a - q^{-m} x)_q^m},$$

probando el inciso c). □

Teorema 1.2 (Aral *et al.*, 2013). Para $|x| < 1$, se tiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - a)_q^k}{(1 - q)_q^k} x^k = \frac{(1 - ax)_q^\infty}{(1 - x)_q^\infty},$$

donde $(1 - x)_q^\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - q^k x)$.

Demostración. Sea

$$f_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - a)_q^k}{(1 - q)_q^k} x^k.$$

De ahí que

$$\begin{aligned} f_a(x) - f_a(qx) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - a)_q^k}{(1 - q)_q^k} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - a)_q^k}{(1 - q)_q^k} (qx)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - a)_q^k (1 - q^k)}{(1 - q)_q^k} x^k \\ &= x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - a)_q^{k-1} (1 - q^{k-1} a) (1 - q^k)}{(1 - q)_q^k} x^{k-1}. \end{aligned}$$

Si se realiza el cambio $k \rightarrow m + 1$, se tiene

$$\begin{aligned} f_a(x) - f_a(qx) &= x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1 - a)_q^m (1 - q^m a) (1 - q^{m+1})}{(1 - q)_q^{m+1}} x^m \\ &= x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1 - a)_q^m (1 - q^m a)}{(1 - q)_q^m} x^m \\ &= x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1 - a)_q^m x^m}{(1 - q)_q^m} - ax \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1 - a)_q^m (qx)^m}{(1 - q)_q^m} \\ &= x f_a(x) - ax f_a(qx). \end{aligned}$$

10 Preliminares

De ahí, se obtiene

$$f_a(x) = \frac{1-ax}{1-x} f_a(qx).$$

Iterando esta relación n veces al intercambiar x por qx , se tiene

$$f_a(qx) = \frac{1-aqx}{1-qx} f_a(q^2x), \quad f_a(q^2x) = \frac{1-aq^2x}{1-q^2x} f_a(q^3x),$$

$$\dots, \quad f_a(q^n x) = \frac{1-aq^n x}{1-q^n x} f_a(q^{n+1}x),$$

así

$$f_a(x) = \prod_{k=0}^n \frac{1-aq^k x}{1-q^k x} f_a(q^{n+1}x) = f_a(q^{n+1}x) \prod_{k=0}^n \frac{1-aq^k x}{1-q^k x}.$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene

$$f_a(x) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_a(q^n x) \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n \frac{1-aq^k x}{1-q^k x} \right) = \frac{(1-ax)_q^\infty}{(1-x)_q^\infty},$$

ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_a(q^n x) = 1$. Esto muestra la igualdad. $\square$

Corolario 1.3 (Aral et al., 2013). a) Para $|x| < 1$ se cumple,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q)_q^k} x^k = \frac{1}{(1-x)_q^\infty}.$$

b) Para $x \in \mathbb{R}$ se cumple,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(1-q)_q^k} x^k = (1-x)_q^\infty.$$

Demostración. Para demostrar el primer inciso tomamos $a = 0$ y sustituimos en la igualdad del Teorema 1.2. Mientras que para el segundo inciso remplazamos primero a con $\frac{1}{a}$ y x con ax , así

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\frac{1}{a})_q^k}{(1-q)_q^k} (ax)^k = \frac{(1-\frac{1}{a}ax)_q^\infty}{(1-ax)_q^\infty},$$

o bien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a-1)(a-q)(a-q^2) \cdots (a-q^{k-1})}{(1-q)_q^k} x^k = \frac{(1-x)_q^\infty}{(1-ax)_q^\infty}.$$

Luego, si tomamos $a = 0$, se tiene

$$(1-x)_q^\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)(-q)(-q^2) \cdots (-q^{k-1})}{(1-q)_q^k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (q^{1+2+3+\cdots+k-1})}{(1-q)_q^k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(1-q)_q^k} x^k.$$

Por lo tanto

$$(1-x)_q^\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(1-q)_q^k} x^k,$$

demostrando el inciso b). $\square$

1.2. Operadores q -derivada y q -integral de Jackson

1.2.1. q -derivada de Jackson

Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo tal que $0 \in [a, b]$ y sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función. El llamado operador de Jackson, o q -derivada, $D_q f$ de la función f está dada por

$$D_q f(x) := \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}, \quad \text{si } x \neq 0,$$

y $D_q f(0) := \frac{df}{dx}(0)$, siempre que $\frac{df}{dx}(0)$ exista. Notemos que de la definición se sigue que si f es diferenciable, entonces

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} D_q f(x) = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x} = \frac{df}{dx}(x).$$

Las q -derivadas de orden superior se definen de manera recurrente mediante la relación $D_q^k f(x) := D_q(D_q^{k-1} f)(x)$ para $k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, donde se asume que $D_q^0 f(x) = f(x)$. En particular, de la definición de la q -derivada de Jackson se deduce que:

$$D_q^2 f(x) := \frac{qf(x) - (1+q)f(qx) + f(q^2x)}{(1-q)^2qx^2}, \quad x \neq 0,$$

y $D_q^2 f(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(0)$ siempre que f sea dos veces diferenciable en $x = 0$. Se sigue también de la definición anterior que si f es dos veces diferenciable en $x \in [a, b]$, entonces

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} D_q^2 f(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x).$$

Algunos métodos que se emplean para calcular la q -derivada de una función son similares al cálculo clásico. Por ejemplo, la derivada de cualquier combinación lineal con constantes a y b cumple

$$D_q(af(x) + bg(x)) = aD_q f(x) + bD_q g(x). \quad (1.2)$$

La q -derivada de una función potencia $f(x) = x^n$ se calcula como sigue:

$$D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n - 1}{q-1} x^{n-1} = [n]_q x^{n-1},$$

es decir,

$$D_q x^n = [n]_q x^{n-1}. \quad (1.3)$$

Así mismo, podemos ver que la q -derivada de un producto es

$$\begin{aligned} D_q(f(x)g(x)) &= \frac{f(x)g(x) - f(qx)g(qx)}{(1-q)x} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(qx)g(qx) + f(qx)g(x) - f(qx)g(x)}{(1-q)x} \\ &= \frac{f(qx)(g(x) - g(qx)) + g(x)(f(x) - f(qx))}{(1-q)x} \\ &= \frac{f(qx)(g(x) - g(qx))}{(1-q)x} + \frac{g(x)(f(x) - f(qx))}{(1-q)x} \\ &= f(qx)D_q g(x) + g(x)D_q f(x), \end{aligned}$$

es decir,

$$D_q(f(x)g(x)) = f(qx)D_qg(x) + g(x)D_qf(x). \quad (1.4a)$$

Por otra parte, podemos observar que

$$\begin{aligned} D_q(f(x)g(x)) &= \frac{f(x)g(x) - f(qx)g(qx)}{(1-q)x} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(qx)g(qx) + g(qx)f(x) - g(qx)f(x)}{(1-q)x} \\ &= \frac{f(x)(g(x) - g(qx)) + g(qx)(f(x) - f(qx))}{(1-q)x} \\ &= \frac{f(x)(g(x) - g(qx))}{(1-q)x} + \frac{g(qx)(f(x) - f(qx))}{(1-q)x} \\ &= f(x)D_qg(x) + g(qx)D_qf(x), \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$D_q(f(x)g(x)) = f(x)D_qg(x) + g(qx)D_qf(x). \quad (1.4b)$$

Notemos que las expresiones anteriores no son simétricas en el sentido del cálculo tradicional, donde recordemos que

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x).$$

Si buscamos simetrizar la expresión en (1.4a), notamos que de la definición del operador en diferencias de Jackson se tiene que $f(qx) = f(x) - (1-q)x D_qf(x)$, luego, si sustituimos esta expresión en la q -derivada del producto se tiene

$$\begin{aligned} D_q(f(x)g(x)) &= f(qx)D_qg(x) + g(x)D_qf(x) \\ &= (f(x) - (1-q)x D_qf(x))D_qg(x) + g(x)D_qf(x) \\ &= f(x)D_qg(x) + g(x)D_qf(x) - (1-q)x D_qf(x)D_qg(x), \end{aligned}$$

es decir,

$$D_q(f(x)g(x)) = f(x)D_qg(x) + g(x)D_qf(x) - (1-q)x D_qf(x)D_qg(x),$$

de donde se concluye que el término $-(1-q)x D_qf(x)D_qg(x)$ es una desviación de la simetría de la q -derivada del producto. Un resultado similar se obtiene si se considera la segunda fórmula de derivada de un producto (1.4b).

De igual manera, podemos calcular la q -derivada de un cociente

$$\begin{aligned} D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(qx)}{g(qx)}}{(1-q)x} = \frac{\frac{f(x)g(qx) - g(x)f(qx)}{g(x)g(qx)}}{(1-q)x} \\ &= \frac{f(x)g(qx) - g(x)f(qx) + g(x)f(x) - g(x)f(x)}{g(x)g(qx)(1-q)x} \\ &= \frac{g(x)(f(x) - f(qx)) - f(x)(g(x) - g(qx))}{g(x)g(qx)(1-q)x} \\ &= \frac{g(x)D_qf(x) - f(x)D_qg(x)}{g(x)g(qx)}, \end{aligned}$$

por lo que,

$$D_q \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x)D_q f(x) - f(x)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}. \quad (1.5a)$$

Observamos que podemos obtener otro resultado similar

$$\begin{aligned} D_q \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) &= \frac{f(x)g(qx) - g(x)f(qx) + g(qx)f(qx) - g(qx)f(qx)}{g(x)g(qx)(1-q)x} \\ &= \frac{g(qx)(f(x) - f(qx)) - f(qx)(g(x) - g(qx))}{g(x)g(qx)(1-q)x} \\ &= \frac{g(qx)D_q f(x) - f(qx)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}, \end{aligned}$$

o bien

$$D_q \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(qx)D_q f(x) - f(qx)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}. \quad (1.5b)$$

Finalmente, la q -derivada de una composición de dos funciones de la forma $f(u(x))$, donde $u(x) = \alpha x^\beta$, con α y β constantes, tiene la forma

$$D_q f(u(x)) = D_{q^\beta} f(u(x)) D_q u(x). \quad (1.6)$$

La demostración de este resultado se sigue directamente de la definición, pues

$$\begin{aligned} D_q f(u(x)) &= \frac{f(u(x)) - f(u(qx))}{(1-q)x} = \frac{f(\alpha x^\beta) - f(\alpha q^\beta x^\beta)}{(1-q)x} \\ &= \frac{f(\alpha x^\beta) - f(q^\beta \alpha x^\beta)}{(1-q^\beta)\alpha x^\beta} \frac{(1-q^\beta)\alpha x^\beta}{(1-q)x} \\ &= \frac{f(\alpha x^\beta) - f(q^\beta \alpha x^\beta)}{(1-q^\beta)\alpha x^\beta} \alpha [\beta]_q x^{\beta-1} = D_{q^\beta} f(u(x)) D_q u(x). \end{aligned}$$

Notamos que no existe una regla de la cadena general para determinar la q -derivada de una composición de funciones, pero una excepción es la q -derivada de una composición de la forma anterior.

El siguiente resultado muestra la forma de derivar los q -análogos del binomio de Newton.

Teorema 1.4 (Kac y Cheung, 2002). *Para cualesquiera m y n enteros, se tienen las siguientes identidades*

$$\begin{aligned} a) \quad D_q (x - a)_q^n &= [n]_q (x - a)_q^{n-1}, & c) \quad D_q (a - x)_q^n &= -[n]_q (a - qx)_q^{n-1}, \\ b) \quad D_q \frac{1}{(x - a)_q^n} &= [-n]_q (x - q^n a)_q^{-n-1}, & d) \quad D_q \frac{1}{(a - x)_q^n} &= \frac{[n]_q}{(a - x)_q^{n+1}}. \end{aligned}$$

Demostración. Mostramos únicamente el inciso c), los otros incisos se muestran de forma similar.

Por definición se tiene:

$$\begin{aligned}
 D_q(a-x)_q^n &= \frac{(a-x)_q^n - (a-qx)_q^n}{(1-q)x} \\
 &= \frac{(a-x)(a-qx) \cdots (a-q^{n-1}x) - (a-qx)(a-q^2x) \cdots (a-q^nx)}{(1-q)x} \\
 &= (a-qx)_q^{n-1} \frac{(a-x) - (a-q^nx)}{(1-q)x} \\
 &= (a-qx)_q^{n-1} \frac{(-1+q^n)}{(1-q)} = -[n]_q (a-qx)_q^{n-1}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Podemos ahora presentar algunas funciones especiales y algunas de sus propiedades que serán de utilidad en lo que sigue.

Dos funciones q -exponenciales

Consideramos la siguiente ecuación en diferencias

$$D_q y(x) - y(x) = 0,$$

y planteemos el problema de hallar una solución en series de potencias $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Tomando en cuenta que $D_q y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k [k]_q x^{k-1}$ y sustituyendo $y(x)$ en la ecuación se tiene

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k [k]_q x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+1} [j+1]_q x^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} (a_{j+1} [j+1]_q - a_j) x^j.
 \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes a cero e iterando se tiene

$$0 = a_1 [1]_q - a_0 = a_2 [2]_q - a_1 = \cdots = a_{j+1} [j+1]_q - a_j = \cdots,$$

se observa que

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{a_0}{[1]_q}, \\
 a_2 &= \frac{a_1}{[2]_q} = \frac{a_0}{[1]_q [2]_q} = \frac{a_0}{[2]_q!}, \\
 &\vdots \\
 a_j &= \frac{a_{j-1}}{[j]_q} = \frac{a_0}{[j-1]_q! [j]_q} = \frac{a_0}{[j]_q!}.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor del coeficiente a_k en $y(x)$ se tiene la solución explícita

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]_q!}.$$

Se observa que el radio de convergencia de esta serie es $R = \frac{1}{1-q}$.

Por otro lado, si se considera la ecuación en diferencias

$$D_q y(x) - y(qx) = 0,$$

y se busca una solución en series de potencias de la forma $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, siguiendo el procedimiento anterior se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k [k]_q x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k q^k x^k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+1} [j+1]_q x^j - \sum_{j=0}^{\infty} a_j q^j x^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (a_{j+1} [j+1]_q - a_j q^j) x^j. \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes a cero e iterando se tiene

$$0 = a_1 [1]_q - a_0 = a_2 [2]_q - a_1 q = \cdots = a_{j+1} [j+1]_q - a_j q^j = \cdots,$$

se observa que

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_0}{[1]_q}, \\ a_2 &= \frac{a_1 q}{[2]_q} = \frac{a_0 q}{[1]_q [2]_q} = \frac{a_0 q}{[2]_q!}, \\ &\vdots \\ a_j &= \frac{a_{j-1} q^{j-1}}{[j]_q} = \frac{a_0 q^{1+2+\cdots+j-1}}{[j-1]_q! [j]_q} = \frac{a_0 q^{\frac{j(j-1)}{2}}}{[j]_q!}. \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor del coeficiente a_k en $y(x)$ se tiene que

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k}{[k]_q!}.$$

Se observa que el radio de convergencia de esta serie es $R = \infty$.

Una vez obtenidas las soluciones de las ecuaciones en diferencias consideradas, se observa que las funciones resultantes presentan una estructura en serie de potencias cuyos coeficientes involucran de manera natural el parámetro q . Esta forma sugiere la introducción de funciones que generalizan la exponencial clásica dentro del contexto del q -cálculo. En efecto, dichas expresiones aparecen de manera natural al resolver ecuaciones en diferencias de primer orden asociadas al operador D_q , por lo que resulta conveniente formalizar estas soluciones como nuevas funciones, que juegan un papel análogo al de la función exponencial en el cálculo clásico.

Con base en lo anterior, se define un primer q -análogo de la función exponencial e^x como

$$e_q^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]_q!}, \quad |x| < \frac{1}{1-q},$$

y, de manera análoga, se define un segundo q -análogo de la función exponencial e^x como

$$E_q^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k}{[k]_q!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Notemos que

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} e_q^x = \lim_{q \rightarrow 1^-} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]_q!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\lim_{q \rightarrow 1^-} [k]_q!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x,$$

similarmente, observamos que

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} E_q^x = \lim_{q \rightarrow 1^-} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k}{[k]_q!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lim_{q \rightarrow 1^-} q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k}{\lim_{q \rightarrow 1^-} [k]_q!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x,$$

garantizando que las funciones introducidas constituyen generalizaciones de las funciones clásicas que dependen del parámetro q , y que convergen a estas cuando $q \rightarrow 1^-$.

En la Figura 1.1 se muestra una comparación de estas funciones con la función exponencial clásica.

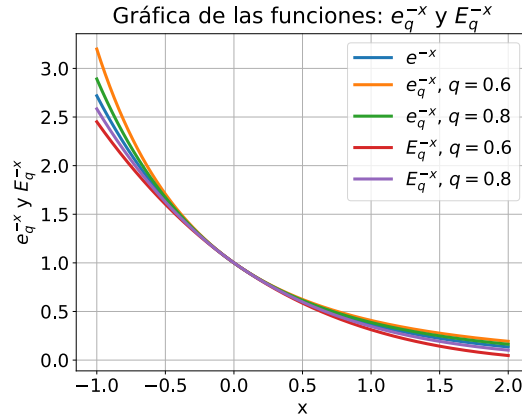


Figura 1.1. Comparación de las funciones e_q^{-x} y E_q^{-x} con respecto a la función exponencial tradicional e^{-x} en el intervalo $[-1, 2]$ con diferentes valores para q .

Existen definiciones análogas cuando la variable real $x \in \mathbb{R}$ es reemplazada por una variable compleja $z \in \mathbb{C}$, ver Aral *et al.* (2013). Aunque la mayoría de los resultados de estas funciones exponenciales que se consideran aquí involucran variables reales, cuando se considere el uso de variables complejas, los resultados correspondientes se emplearán de forma análoga.

Notamos que, utilizando el inciso a) del Corolario 1.3, se tiene que si $|x| < \frac{1}{1-q}$, entonces

$$e_q^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]_q!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q)^k x^k}{(1-q)_q^k} = \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^{\infty}}.$$

Del mismo modo, utilizando el inciso b), se tiene que si $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$E_q^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k}{[k]_q!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{k(k-1)}{2}} (1-q)^k x^k}{(1-q)_q^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} (-(1-q)x)^k}{(1-q)_q^k} = (1 + (1-q)x)_q^{\infty}.$$

Podemos ahora observar de las definiciones que $e_q^0 = E_q^0 = e^0 = 1$.

El siguiente lema proporciona algunas propiedades adicionales de los q -análogos de la función exponencial dados anteriormente.

Lema 1.5 (Aral *et al.*, 2013). a) $D_q e_q^{\lambda x} = \lambda e_q^{\lambda x}$, $|x| < \frac{1}{1-q}$.

b) $D_q E_q^{\lambda x} = \lambda E_q^{\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$.

c) $e_q^x E_q^{-x} = E_q^x e_q^{-x} = 1$, $|x| < \frac{1}{1-q}$.

Demostración. Usando la definición de la función q -exponencial e_q^x se tiene

$$D_q e_q^{\lambda x} = D_q \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{[k]_q!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k D_q (x^k)}{[k]_q!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k [k]_q x^{k-1}}{[k]_q!}.$$

El término para $k = 0$ es cero, así

$$\begin{aligned} D_q (e_q^{\lambda x}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k [k]_q x^{k-1}}{[k]_q!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{k-1}}{[k-1]_q!} \\ &= \sum_{m+1=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m+1} x^{m+1-1}}{[m+1-1]_q!} = \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^m}{[m]_q!} = \lambda e_q^{\lambda x}, \end{aligned}$$

demostrando así el inciso a). De manera similar para el inciso b), y usando la definición de la exponencial E_q^x , se tiene

$$D_q E_q^{\lambda x} = D_q \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{(\lambda x)^k}{[k]_q!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{\lambda^k D_q (x^k)}{[k]_q!} = \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{\lambda^k [k]_q x^{k-1}}{[k]_q!}.$$

El término para $k = 0$ es cero, así

$$\begin{aligned} D_q E_q^{\lambda x} &= \sum_{k=1}^{\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{\lambda^k [k]_q x^{k-1}}{[k]_q!} = \sum_{k=1}^{\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{\lambda^k x^{k-1}}{[k-1]_q!} \\ &= \sum_{m+1=1}^{\infty} q^{\frac{(m+1)(m+1-1)}{2}} \frac{\lambda^{m+1} x^{m+1-1}}{[m+1-1]_q!} = \lambda \sum_{m=0}^{\infty} q^{\frac{(m+1)m}{2}} \frac{(\lambda x)^m}{[m]_q!} \\ &= \lambda \sum_{m=0}^{\infty} q^{\frac{m(m-1)}{2}} \frac{q^m (\lambda x)^m}{[m]_q!} = \lambda \sum_{m=0}^{\infty} q^{\frac{m(m-1)}{2}} \frac{(q\lambda x)^m}{[m]_q!} = \lambda E_q^{q\lambda x}. \end{aligned}$$

Para demostrar el inciso c), hacemos uso del resultado que nos da la equivalencia de la exponencial:

$$e_q^x E_q^{-x} = \frac{1}{(1 - (1-q)x)_q^\infty} \cdot (1 + (1-q)(-x))_q^\infty = \frac{1}{(1 - (1-q)x)_q^\infty} \cdot (1 - (1-q)x)_q^\infty = 1,$$

$$e_q^{-x} E_q^x = \frac{1}{(1 - (1-q)(-x))_q^\infty} \cdot (1 + (1-q)x)_q^\infty = \frac{1}{(1 + (1-q)x)_q^\infty} \cdot (1 + (1-q)x)_q^\infty = 1.$$

Por lo tanto $e_q^x E_q^{-x} = E_q^{-x} E_q^x = 1$. □

Notemos que únicamente se cumple $D_q e_q^{\lambda x} = \lambda e_q^{\lambda x}$. Esta propiedad es importante porque, al igual que en el cálculo tradicional, donde se tiene $\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$, permite expresar la solución de la ecuación en diferencias $D_q y(x) = \lambda y(x)$ directamente como $y(x) = e_q^{\lambda x}$. No obstante, si se tiene la ecuación en diferencias $D_q y(x) = \lambda y(qx)$, entonces su solución tiene la forma $y(x) = E_q^{\lambda x}$. Esto justifica el análisis presentado al inicio de este apartado.

Dos funciones q -trigonométricas

Consideramos ahora la siguiente ecuación en diferencias $D_q^2 y(x) + y(x) = 0$ con el propósito de motivar la definición de las funciones q -trigonométricas. Es importante señalar que esta es la única ocasión en el presente trabajo en la que se recurren a ecuaciones en diferencias de segundo orden, ya que el enfoque principal se centra en el estudio de ecuaciones en diferencias de primer orden. Se propone una solución en la forma $y(x) = e_q^{\lambda x}$ con λ un parámetro por determinar. Debido a que $D_q e_q^{\lambda x} = \lambda e_q^{\lambda x}$, se sigue que $D_q^2 y(x) = D_q D_q e_q^{\lambda x} = D_q \lambda e_q^{\lambda x} = \lambda^2 e_q^{\lambda x}$. Sustituyendo en la ecuación se tiene

$$0 = D_q^2 y(x) + y(x) = \lambda^2 e_q^{\lambda x} + e_q^{\lambda x} = (\lambda^2 + 1) e_q^{\lambda x},$$

lo cual permite obtener la ecuación $\lambda^2 + 1 = 0$, cuyas raíces son $\lambda \pm i$, obteniendo así la solución general

$$y(x) = C_1 e_q^{ix} + C_2 e_q^{-ix}.$$

Partiendo de la solución general, y usando que $D_q e_q^{\lambda x} = \lambda e_q^{\lambda x}$, se tiene que

$$D_q y(x) = iC_1 e_q^{ix} - iC_2 e_q^{-ix}.$$

Suponiendo las condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $D_q y(0) = 0$, observamos que se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1, \quad D_q y(0) = iC_1 - iC_2 = 0,$$

del cual se obtiene que $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$, por lo tanto, la solución de la ecuación es

$$y(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Por otro lado, suponiendo las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $D_q y(0) = 1$, se tiene

$$y(0) = C_1 + C_2 = 0, \quad D_q y(0) = iC_1 - iC_2 = 1,$$

del cual se obtiene $C_1 = \frac{1}{2i}$ y $C_2 = -\frac{1}{2i}$, por lo que, la solución de la ecuación es

$$y(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Un análisis similar al anterior se puede realizar empleando la función q -exponencial $E_q^{\lambda x}$.

De la misma forma en que fue definida la función exponencial, es posible construir funciones q -seno y q -coseno, las cuales también se obtienen como soluciones de ecuaciones en diferencias, lo que permite mostrar sus propiedades fundamentales en términos de la q -derivada. Definimos las siguientes funciones q -seno y q -coseno:

$$\blacksquare \sin_q(x) := \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i},$$

$$\blacksquare \cos_q(x) := \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2},$$

$$\blacksquare \text{Sin}_q(x) := \frac{E_q^{ix} - E_q^{-ix}}{2i}$$

$$\blacksquare \text{Cos}_q(x) := \frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2}$$

De las definiciones se sigue que al tomar el límite $q \rightarrow 1^-$, se recuperan las funciones trigonométricas usuales. En efecto, notemos que

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \sin_q(x) = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i} = \frac{\lim_{q \rightarrow 1^-} e_q^{ix} - \lim_{q \rightarrow 1^-} e_q^{-ix}}{2i} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin(x),$$

y del mismo modo,

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \cos_q(x) = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2} = \frac{\lim_{q \rightarrow 1^-} e_q^{ix} + \lim_{q \rightarrow 1^-} e_q^{-ix}}{2} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(x).$$

Esta misma propiedad se cumple para las funciones q -trigonométricas $\text{Sin}_q(x)$ y $\text{Cos}_q(x)$.

En las Figuras 1.2 y 1.3 se muestran los gráficos de estas funciones haciendo una comparación con las funciones trigonométricas tradicionales en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Haciendo uso de estas definiciones, la siguiente proposición muestra como la derivada cumple propiedades generales análogas al cálculo clásico.

Proposición 1.6 (Kac y Cheung, 2002). *Para cada $x \in \mathbb{R}$ y para $\omega \in \mathbb{R}$ constante se cumplen las siguientes identidades:*

- a) $D_q \sin_q(\omega x) = \omega \cos_q(\omega x),$
- b) $D_q \cos_q(\omega x) = -\omega \sin_q(\omega x),$
- c) $D_q \text{Sin}_q(\omega x) = \omega \text{Cos}_q(\omega q x),$
- d) $D_q \text{Cos}_q(\omega x) = -\omega \text{Sin}_q(\omega q x).$

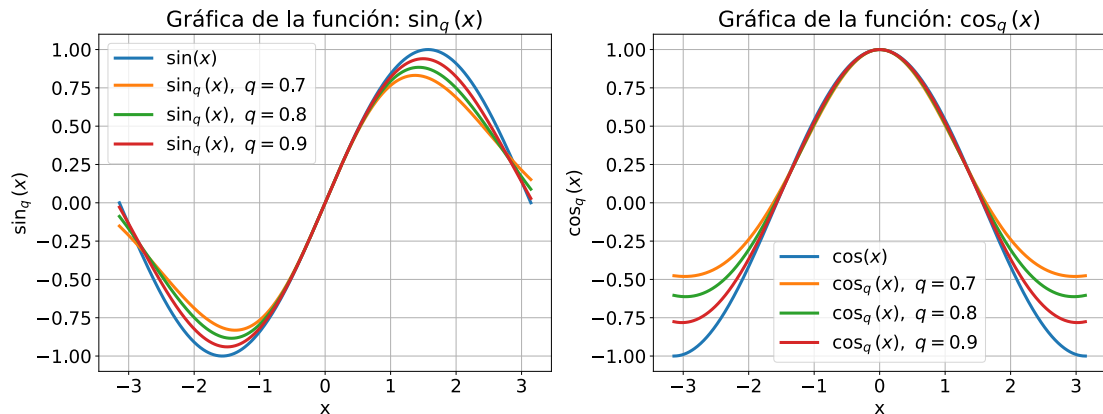


Figura 1.2. Comparación de las funciones $\sin_q(x)$ y $\cos_q(x)$ con respecto a las funciones trigonométricas tradicionales $\sin(x)$ y $\cos(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ con diferentes valores para q .

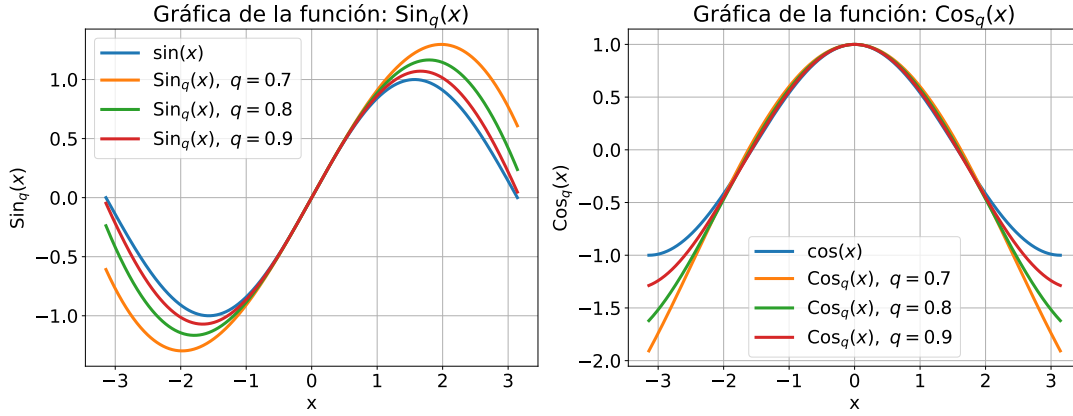


Figura 1.3. Comparación de las funciones $\text{Sin}_q(x)$ y $\text{Cos}_q(x)$ con respecto a las funciones trigonométricas tradicionales $\sin(x)$ y $\cos(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ con diferentes valores para q .

Demostración. De la definición de la función $\text{sin}_q(x)$ y usando la q -derivada de Jackson, se tiene

$$D_q \text{sin}_q(\omega x) = D_q \left(\frac{e_q^{i\omega x} - e_q^{-i\omega x}}{2i} \right) = \frac{1}{2i} \left(D_q(e_q^{i\omega x}) - D_q(e_q^{-i\omega x}) \right),$$

y haciendo uso del Lema 1.5, se tiene

$$D_q \text{sin}_q(\omega x) = \frac{1}{2i} (i\omega e_q^{i\omega x} + i\omega e_q^{-i\omega x}) = \omega \left(\frac{e_q^{i\omega x} + e_q^{-i\omega x}}{2} \right) = \omega \text{cos}_q(\omega x),$$

demostrando el inciso (a). Análogamente, de la definición de $\text{cos}_q(x)$ y usando el Lema 1.5, se tiene

$$\begin{aligned} D_q \text{cos}_q(\omega x) &= D_q \left(\frac{e_q^{i\omega x} + e_q^{-i\omega x}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(D_q(e_q^{i\omega x}) + D_q(e_q^{-i\omega x}) \right) \\ &= \frac{1}{2} (i\omega e_q^{i\omega x} - i\omega e_q^{-i\omega x}) = i\omega \left(\frac{e_q^{i\omega x} - e_q^{-i\omega x}}{2} \right) \\ &= -\omega \left(\frac{e_q^{i\omega x} - e_q^{-i\omega x}}{2i} \right) = -\omega \text{sin}_q(\omega x), \end{aligned}$$

lo cual demuestra el inciso (b). Por otro lado, de la definición de la función $\text{Sin}_q(x)$ se tiene,

$$\begin{aligned} D_q \text{Sin}_q(\omega x) &= D_q \left(\frac{E_q^{i\omega x} - E_q^{-i\omega x}}{2i} \right) = \frac{1}{2i} \left(D_q(E_q^{i\omega x}) - D_q(E_q^{-i\omega x}) \right) \\ &= \frac{1}{2i} (i\omega E_q^{i\omega q x} + i\omega E_q^{-i\omega q x}) = \omega \left(\frac{E_q^{i\omega q x} + E_q^{-i\omega q x}}{2} \right) \\ &= \omega \text{Cos}_q(\omega x), \end{aligned}$$

obteniendo el resultado del inciso (c). Finalmente, haciendo uso de la definición de la función $\text{Cos}_q(x)$, se tiene

$$\begin{aligned} D_q \text{Cos}_q(\omega x) &= D_q \left(\frac{E_q^{i\omega x} + E_q^{-i\omega x}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(D_q(E_q^{i\omega x}) + D_q(E_q^{-i\omega x}) \right) \\ &= \frac{1}{2} (i\omega E_q^{i\omega qx} - i\omega E_q^{-i\omega qx}) = i\omega \left(\frac{E_q^{i\omega qx} - E_q^{-i\omega qx}}{2} \right) \\ &= -\omega \left(\frac{E_q^{i\omega qx} - E_q^{-i\omega qx}}{2i} \right) = -\omega \text{Sin}_q(\omega x), \end{aligned}$$

verificando el resultado del inciso (d). □

1.2.2. q -integral de Jackson

Una función $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una antiderivada de $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si $D_q F(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. En tal caso, esta se suele denotar por

$$\int f(x) d_q x.$$

Se define la integral de Jackson de una función $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\int_0^b f(x) d_q x := (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} f(q^k b) q^k b,$$

ver Kac y Cheung (2002). Si el dominio de la función es distinto de $[0, b]$, como en el caso de una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, la integral de Jackson se define como

$$\int_a^b f(x) d_q x := \int_0^b f(x) d_q x - \int_0^a f(x) d_q x.$$

El siguiente lema nos garantiza la existencia de la q -integral.

Lema 1.7 (Aldwoah, 2009). Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $x = 0$, entonces $\sum_{k=0}^{\infty} |f(q^k s)| q^k s$ converge uniformemente en el intervalo $[a, b]$ y, en consecuencia, f es q -integrable en $[a, b]$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y $M = |f(0)| + \epsilon$, como f es continua en $x = 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(0)| < \epsilon$ siempre que $|x| < \delta$. Observamos que $|q^k s| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ para todo $s \in [a, b]$, por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $s \in [a, b]$ y $k > N$, entonces se cumple $|q^k s| < \delta$ y, por lo tanto, $|f(q^k s) - f(0)| < \epsilon$, de donde $|f(q^k s)| < |f(0)| + \epsilon = M$. De acuerdo al criterio de Dirichlet, ver Apostol (2001), se tiene que $\sum_{k=0}^{\infty} |f(q^k s)| q^k s$ converge uniformemente en el intervalo $[a, b]$.

Se concluye de lo anterior que la serie $(1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} |f(q^k s)| q^k s$ converge uniformemente en el intervalo $[a, b]$, por lo tanto, esta serie está bien definida para toda $s \in [a, b]$, lo cual garantiza que f es q -integrable en $[a, b]$. □

Una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ será llamada q -regular si esta es continua en $x = 0$. Del Lema 1.7 se sigue que una función q -regular es integrable en $[a, b]$. En este trabajo se consideran únicamente funciones q -regulares.

Ya que la integral de Jackson geoméricamente corresponde al área de la unión de un número infinito de rectángulos, definimos la q -integral impropia de $f(x)$ en $[0, +\infty)$ como

$$\int_0^\infty f(x) d_q x = \sum_{j=-\infty}^\infty \int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x) d_q x. \quad (1.7)$$

Como resultado de las definiciones de una antiderivada y de la q -integral, la relación que comparten la q -derivada y la q -integral se puede ver fácilmente del siguiente resultado conocido como teorema fundamental del q -cálculo.

Teorema 1.8 (Kac y Cheung, 2002). *Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ y $F(x)$ es continua en $x = 0$, tenemos*

$$\int_a^b f(t) d_q t = F(b) - F(a), \quad (1.8)$$

donde $0 \leq a < b \leq \infty$.

Demostración. Dado que $F(x)$ es continua en $x = 0$, $F(x)$ se da mediante la definición de Jackson, hasta añadir una constante, es decir,

$$F(x) = (1 - q) \sum_{k=0}^\infty f(q^k x) q^k x + F(0).$$

Por definición

$$\int_0^a f(t) d_q t = (1 - q) \sum_{k=0}^\infty f(q^k a) q^k a,$$

de donde se obtiene

$$\int_0^a f(t) d_q t = F(a) - F(0).$$

Similarmente, se tiene, para b finito

$$\int_0^b f(t) d_q t = F(b) - F(0),$$

por lo tanto

$$\int_a^b f(t) d_q t = \int_0^b f(t) d_q t - \int_0^a f(t) d_q t = F(b) - F(a).$$

Poniendo $a = q^{k+1}$ y $b = q^k$, donde $0 < q < 1$, y considerando la definición de la q -integral impropia (1.7), vemos que (1.8) es verdad para $b = \infty$, siempre que $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ exista. $\square$

Corolario 1.9. *Si $\frac{d}{dx} f(x)$ existe alrededor de $x = 0$ y es continua en $x = 0$, entonces se tiene*

$$\int_a^b D_q f(x) d_q x = f(b) - f(a).$$

Demostración. Usando la regla de L'Hôpital, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_q f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} f(x) - q \frac{d}{dx} f(qx)}{(1-q)} = \frac{d}{dx} f(0),$$

por lo que $\lim_{x \rightarrow 0} D_q f(x) = \frac{d}{dx} f(0)$, es decir, la función $D_q f(x)$ será continua en $x = 0$ si se define $D_q f(0) = \frac{d}{dx} f(0)$. En este caso, por el Teorema 1.8 se tiene

$$\int_a^b D_q f(x) d_q x = f(b) - f(a). \quad \square$$

Teorema 1.10. Si $\frac{d}{dx} f(x)$ existe alrededor de $x = 0$ y es continua en $x = 0$, entonces se tiene

$$D_q \int_a^x f(t) d_q t = f(x).$$

Demostración. Sea

$$F(x) = \int_a^x f(t) d_q t.$$

De la definición de q -derivada de Jackson se tiene

$$D_q F(x) = \frac{F(x) - F(qx)}{(1-q)x},$$

o bien,

$$\begin{aligned} (1-q)x D_q F(x) &= \int_0^x f(t) d_q t - \int_0^a f(t) d_q t - \int_0^{qx} f(t) d_q t + \int_0^a f(t) d_q t \\ &= \int_0^x f(t) d_q t - \int_0^{qx} f(t) d_q t. \end{aligned}$$

Por otra parte, de la definición de la q -integral de Jackson, se tiene

$$\begin{aligned} (1-q)x D_q F(x) &= (1-q) \sum_{k=0}^{\infty} f(q^k x) q^k x - (1-q) \sum_{k=0}^{\infty} f(q^{k+1} x) q^{k+1} x \\ &= (1-q)x \left(\sum_{k=0}^{\infty} f(q^k x) q^k - \sum_{k=0}^{\infty} f(q^{k+1} x) q^{k+1} \right) \\ &= (1-q)x \sum_{k=0}^{\infty} \left(f(q^k x) q^k - f(q^{k+1} x) q^{k+1} \right) \\ &= (1-q)x \left(f(x) - \lim_{k \rightarrow \infty} f(q^{k+1} x) q^{k+1} \right) \\ &= (1-q)x f(x), \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$D_q F(x) = D_q \int_a^x f(t) d_q t = f(x). \quad \square$$

Después de establecer el teorema fundamental del q -cálculo y haciendo uso de la propiedad de la q -derivada del producto de funciones, es natural agregar una q -fórmula de integración por partes.

Proposición 1.11. *Sean f y g dos funciones cuyas derivadas existen alrededor de $x = 0$ y que son continuas en $x = 0$, entonces*

$$\int_a^b f(x) D_q g(x) \, d_q x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(qx) D_q f(x) \, d_q x.$$

Demostración. Partiendo de la propiedad (1.4b), se tiene

$$f(x) D_q g(x) = D_q(f(x)g(x)) - g(qx) D_q f(x),$$

integrando en ambos lados de la igualdad y aplicando la linealidad de la integral, se obtiene

$$\int_a^b f(x) D_q g(x) \, d_q x = \int_a^b D_q(f(x)g(x)) \, d_q x - \int_a^b g(qx) D_q f(x) \, d_q x,$$

o bien,

$$\int_a^b f(x) D_q g(x) \, d_q x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(qx) D_q f(x) \, d_q x,$$

como se quería demostrar. $\square$

1.3. Operadores q^{-1} -derivada y q^{-1} -integral de Jackson

1.3.1. q^{-1} -derivada de Jackson

El operador de Jackson aplicado a una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, la q -derivada $D_q f(x)$, se puede interpretar como una aproximación por la izquierda de la derivada de f cuando $q \in (0, 1)$. No obstante, en ocasiones es necesario considerar una aproximación de dicha derivada por la derecha, ya que $q \in (0, 1)$, esta aproximación por la derecha se puede conseguir si se observa que el parámetro $q^{-1} \in (1, \infty)$, y con ello, considerar el operador de Jackson aplicado a la función f , es decir, la q^{-1} -derivada $D_{q^{-1}} f(x)$. La siguiente proposición muestra la relación que existe entre los operadores D_q y $D_{q^{-1}}$, y presenta algunos resultados importantes.

Proposición 1.12. *Sean D_q y $D_{q^{-1}}$ las derivadas de Jackson asociadas a los parámetros q y q^{-1} , respectivamente, definidos para toda función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$D_q f(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}, \quad D_{q^{-1}} f(x) = \frac{f(x) - f(q^{-1}x)}{(1-q^{-1})x}, \quad x \in [a, b].$$

Entonces se cumplen las siguientes identidades:

- (a) $q D_q f(x) = D_{q^{-1}} f(qx).$
- (b) $q D_q f(q^{-1}x) = D_{q^{-1}} f(x).$
- (c) $q D_q D_q f(x) = D_{q^{-1}} D_q f(qx).$
- (d) $q D_q D_q f(q^{-1}x) = D_{q^{-1}} D_q f(x).$

Demostración. Por la definición de $D_{q^{-1}}$ se tiene

$$D_{q^{-1}}f(qx) = \frac{f(qx) - f(q^{-1}(qx))}{(1 - q^{-1})x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q - 1)x} \frac{(q - 1)x}{(1 - q^{-1})x} = qD_qf(x),$$

lo cual muestra la validez de (a). Análogamente, por definición se tiene que

$$D_{q^{-1}}f(x) = \frac{f(x) - f(q^{-1}x)}{(1 - q^{-1})x} = \frac{f(x) - f(q^{-1}x)}{(q - 1)x} \frac{(q - 1)x}{(1 - q^{-1})x} = qD_qf(q^{-1}x),$$

demostrando el inciso (b). Por otro lado si sustituimos $f(qx)$ con $D_qf(qx)$ en el inciso (a), se tiene

$$D_{q^{-1}}D_qf(qx) = qD_qD_qf(x),$$

obteniendo la propiedad del inciso (c), finalmente si sustituimos $f(x)$ con $D_qf(x)$ en el inciso (b), se tiene

$$D_{q^{-1}}D_qf(x) = qD_qD_qf(q^{-1}x),$$

probando el inciso (d). □

El análisis de la derivada en el q -cálculo permite considerar el siguiente operador

$$\tilde{D}_qf(x) := q^{-1}D_{q^{-1}}f(x),$$

que nombraremos q^{-1} -derivada de Jackson, ya que coincide con el operador de Jackson para el parámetro q^{-1} , tomando en cuenta que

$$\tilde{D}_qf(x) = q^{-1}D_{q^{-1}}f(x) = q^{-1} \frac{f(x) - f(q^{-1}x)}{(1 - q^{-1})x} = \frac{f(q^{-1}x) - f(x)}{(1 - q)x},$$

es decir

$$\tilde{D}_qf(x) := \frac{f(q^{-1}x) - f(x)}{(1 - q)x}, \quad \text{si } x \neq 0,$$

y $\tilde{D}_qf(0) := \frac{df}{dx}(0)$, siempre que $\frac{df}{dx}(0)$ exista. Notemos que de la definición se sigue que si f es diferenciable, entonces

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \tilde{D}_qf(x) = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{f(q^{-1}x) - f(x)}{(1 - q)x} = \frac{df}{dx}(x).$$

Este operador es interesante debido a la similitud con las reglas básicas de derivación que se mostraron para la q -derivada de Jackson, por ejemplo, la regla de la potencia se calcula de la siguiente manera

$$\tilde{D}_q(x^n) = \frac{(q^{-1}x)^n - x^n}{(1 - q)x} = \frac{q^{-n} - 1}{1 - q} x^{n-1} = q^{-n} \frac{1 - q^n}{1 - q} x^{n-1} = q^{-n} [n]_q x^{n-1},$$

es decir,

$$\tilde{D}_q(x^n) = q^{-n} [n]_q x^{n-1}. \tag{1.9}$$

De manera completamente similar, se puede calcular la q^{-1} -derivada del producto de dos funciones $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}_q(f(x)g(x)) &= \frac{f(x)g(x) - f(q^{-1}x)g(q^{-1}x)}{(q-1)x} \\
 &= \frac{f(x)g(x) - f(q^{-1}x)g(q^{-1}x) + f(q^{-1}x)g(x) - f(q^{-1}x)g(x)}{(q-1)x} \\
 &= \frac{f(q^{-1}x)(g(x) - g(q^{-1}x)) + g(x)(f(x) - f(q^{-1}x))}{(q-1)x} \\
 &= \frac{f(q^{-1}x)(g(x) - g(q^{-1}x))}{(q-1)x} + \frac{g(x)(f(x) - f(q^{-1}x))}{(q-1)x} \\
 &= f(q^{-1}x)\tilde{D}_q g(x) + g(x)\tilde{D}_q f(x),
 \end{aligned}$$

por lo que

$$\tilde{D}_q(f(x)g(x)) = f(q^{-1}x)\tilde{D}_q g(x) + g(x)\tilde{D}_q f(x).. \quad (1.10a)$$

Análogamente si cambiamos f y g en el termino $f(q^{-1}x)g(x)$ que sumamos y restamos en el numerador se obtiene

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}_q(f(x)g(x)) &= \frac{f(x)g(x) - f(q^{-1}x)g(q^{-1}x)}{(q-1)x} \\
 &= \frac{f(x)g(x) - f(q^{-1}x)g(q^{-1}x) + g(q^{-1}x)f(x) - g(q^{-1}x)f(x)}{(q-1)x} \\
 &= \frac{f(x)(g(x) - g(q^{-1}x)) + g(q^{-1}x)(f(x) - f(q^{-1}x))}{(q-1)x} \\
 &= \frac{f(x)(g(x) - g(q^{-1}x))}{(q-1)x} + \frac{g(q^{-1}x)(f(x) - f(q^{-1}x))}{(q-1)x} \\
 &= f(x)\tilde{D}_q g(x) + g(q^{-1}x)\tilde{D}_q f(x),
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\tilde{D}_q(f(x)g(x)) = f(x)\tilde{D}_q g(x) + g(q^{-1}x)\tilde{D}_q f(x) \quad (1.10b)$$

Es importante notar que, al igual que en la q -derivada de Jackson, estas expresiones no son simétricas en el sentido del cálculo tradicional, debido a la presencia del término $f(q^{-1}x)$. Partiendo de la identidad $f(q^{-1}x) = \tilde{D}_q f(x)(1-q)x + f(x)$ y siguiendo la misma idea empleada, se tiene

$$\tilde{D}_q(f(x)g(x)) = f(x)\tilde{D}_q g(x) + g(x)\tilde{D}_q f(x) + (1-q)x\tilde{D}_q f(x)\tilde{D}_q g(x),$$

de donde el término $(1-q)x\tilde{D}_q f(x)\tilde{D}_q g(x)$ se puede entender como una desviación de la simetría de la q^{-1} -derivada del producto.

Antes de calcular la q^{-1} -derivada de un cociente, primero veamos que

$$\begin{aligned}\tilde{D}_q \left(\frac{1}{g(x)} \right) &= q^{-1} D_{q^{-1}} \left(\frac{1}{g(x)} \right) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(q^{-1}x)}}{(q-1)x} = \frac{\frac{g(q^{-1}x) - g(x)}{g(x)g(q^{-1}x)}}{(q-1)x} \\ &= \frac{g(q^{-1}x) - g(x)}{g(x)g(q^{-1}x)(q-1)x} = -\frac{q^{-1} D_{q^{-1}} g(x)}{g(x)g(q^{-1}x)} \\ &= -\frac{\tilde{D}_q g(x)}{g(x)g(q^{-1}x)},\end{aligned}$$

es decir,

$$\tilde{D}_q \left(\frac{1}{g(x)} \right) = -\frac{\tilde{D}_q g(x)}{g(x)g(q^{-1}x)}. \quad (1.11)$$

Haciendo uso de (1.11), se tiene que

$$\begin{aligned}\tilde{D}_q \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) &= f(x) \tilde{D}_q \left(\frac{1}{g(x)} \right) + \frac{1}{g(q^{-1}x)} \tilde{D}_q f(x) \\ &= -\frac{f(x)}{g(x)g(q^{-1}x)} \tilde{D}_q g(x) + \frac{g(x)}{g(x)g(q^{-1}x)} \tilde{D}_q f(x) \\ &= \frac{g(x) \tilde{D}_q f(x) - f(x) \tilde{D}_q g(x)}{g(x)g(q^{-1}x)},\end{aligned}$$

por lo que

$$\tilde{D}_q \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x) \tilde{D}_q f(x) - f(x) \tilde{D}_q g(x)}{g(x)g(q^{-1}x)}. \quad (1.12a)$$

Dado que tenemos dos fórmulas para el producto, similarmente obtenemos otra fórmula para el cociente

$$\begin{aligned}\tilde{D}_q \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) &= f(q^{-1}x) \tilde{D}_q \left(\frac{1}{g(x)} \right) + \frac{1}{g(x)} \tilde{D}_q f(x) \\ &= -\frac{f(q^{-1}x)}{g(x)g(q^{-1}x)} \tilde{D}_q g(x) + \frac{g(q^{-1}x)}{g(x)g(q^{-1}x)} \tilde{D}_q f(x) \\ &= \frac{g(q^{-1}x) \tilde{D}_q f(x) - f(q^{-1}x) \tilde{D}_q g(x)}{g(x)g(q^{-1}x)},\end{aligned}$$

de donde

$$\tilde{D}_q \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(q^{-1}x) \tilde{D}_q f(x) - f(q^{-1}x) \tilde{D}_q g(x)}{g(x)g(q^{-1}x)}. \quad (1.12b)$$

Como se hizo anteriormente, veamos que pasa con la derivada de la composición de funciones, sea $u(x) = \alpha x^\beta$, aplicando la q^{-1} -derivada a $f(u(x))$ se tiene

$$\begin{aligned}\tilde{D}_q f(u(x)) &= q^{-1} D_{q^{-1}} f(u(x)) = q^{-1} q D_q f(q^{-1}u(x)) = D_q f(q^{-1}u(x)) \\ &= D_{q^\beta} f(q^{-1}u(x)) D_q (q^{-1}u(x)) = q^{-\beta} D_{q^{-\beta}} f(u(x)) q^{-1} D_{q^{-1}} (u(x)) \\ &= \tilde{D}_{q^\beta} f(u(x)) \tilde{D}_q u(x),\end{aligned}$$

por lo tanto la q^{-1} -derivada de Jackson de la composición de funciones se ve como

$$\tilde{D}_q f(u(x)) = \tilde{D}_{q^\beta} f(u(x)) \tilde{D}_q u(x). \quad (1.13)$$

El siguiente lema es un análogo al lema que se probó usando la q -derivada de Jackson.

Lema 1.13. a) $\tilde{D}_q e_q^{\lambda x} = q^{-1} \lambda e_q^{q^{-1} \lambda x}$, $|x| < \frac{1}{1-q}$.

b) $\tilde{D}_q E_q^{\lambda x} = q^{-1} \lambda E_q^{\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Usando la definición de la exponencial e_q^x se tiene

$$\tilde{D}_q e_q^{\lambda x} = \tilde{D}_q \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{[k]_q!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \tilde{D}_q (x^k)}{[k]_q!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k q^{-k} [k]_q x^{k-1}}{[k]_q!}.$$

El primer término en la sumatoria para $k = 0$ es cero, así

$$\begin{aligned} \tilde{D}_q (e_q^{\lambda x}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k q^{-k} [k]_q x^{k-1}}{[k]_q!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k q^{-k} x^{k-1}}{[k-1]_q!} \\ &= \sum_{m+1=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m+1} q^{-m-1} x^{m+1-1}}{[m+1-1]_q!} = q^{-1} \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m q^{-m} x^m}{[m]_q!} \\ &= q^{-1} \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(q^{-1} \lambda x)^m}{[m]_q!} = q^{-1} \lambda e_q^{q^{-1} \lambda x}, \end{aligned}$$

demostrando así el inciso a). De manera similar para el inciso b) usando la definición de la exponencial E_q^x , se tiene

$$\tilde{D}_q E_q^{\lambda x} = \tilde{D}_q \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{(\lambda x)^k}{[k]_q!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{\lambda^k \tilde{D}_q (x^k)}{[k]_q!} = \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{\lambda^k q^{-k} [k]_q x^{k-1}}{[k]_q!}.$$

El primer término en la sumatoria para $k = 0$ es cero, así

$$\begin{aligned} \tilde{D}_q E_q^{\lambda x} &= \sum_{k=1}^{\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{\lambda^k q^{-k} [k]_q x^{k-1}}{[k]_q!} = \sum_{k=1}^{\infty} q^{\frac{k(k-3)}{2}} \frac{\lambda^k x^{k-1}}{[k-1]_q!} \\ &= \sum_{m+1=1}^{\infty} q^{\frac{(m+1)(m+1-3)}{2}} \frac{\lambda^{m+1} x^{m+1-1}}{[m+1-1]_q!} = \lambda \sum_{m=0}^{\infty} q^{\frac{m(m-1)}{2}} q^{-1} \frac{\lambda^m x^m}{[m]_q!} \\ &= q^{-1} \lambda \sum_{m=0}^{\infty} q^{\frac{m(m-1)}{2}} \frac{(\lambda x)^m}{[m]_q!} = q^{-1} \lambda E_q^{\lambda x}, \end{aligned}$$

demostrando el inciso b). □

Nótese que, a diferencia de la q -derivada donde se cumple que $D_q e_q^{\lambda x} = \lambda e_q^{\lambda x}$, la q^{-1} -derivada de Jackson lo cumple para la función exponencial $E_q^{\lambda x}$, es decir, se cumple la identidad $D_{q^{-1}} E_q^{\lambda x} = \lambda E_q^{\lambda x}$.

En el siguiente resultados se muestran las q^{-1} -derivadas de Jackson para las funciones q -trigonométricas.

Proposición 1.14. Para $x \in \mathbb{R}$ y para $\omega \in \mathbb{R}$ constante se cumplen las siguientes identidades,

$$\begin{aligned}
 a) \quad \widetilde{D}_q \sin_q(\omega x) &= q^{-1} \omega \cos_q(q^{-1} \omega x) & c) \quad \widetilde{D}_q \operatorname{Sin}_q(\omega x) &= q^{-1} \omega \operatorname{Cos}_q(\omega x) \\
 b) \quad \widetilde{D}_q \cos_q(\omega x) &= -q^{-1} \omega \sin(q^{-1} \omega x) & d) \quad \widetilde{D}_q \operatorname{Cos}_q(\omega x) &= -q^{-1} \omega \operatorname{Sin}_q(\omega x).
 \end{aligned}$$

Demostración. Usando la Proposición 1.12, y luego aplicando la Proposición 1.6, se pueden comprobar las siguientes identidades. Para el inciso a) se tiene

$$\begin{aligned}
 \widetilde{D}_q \sin_q(\omega x) &= q^{-1} D_{q^{-1}} \sin_q(\omega x) = q^{-1} q D_q \sin_q(q^{-1} \omega x) \\
 &= D_q \sin_q(q^{-1} \omega x) = q^{-1} \omega \cos_q(q^{-1} \omega x).
 \end{aligned}$$

Para el inciso b), se tiene

$$\begin{aligned}
 \widetilde{D}_q \cos_q(\omega x) &= q^{-1} D_{q^{-1}} \cos_q(\omega x) = q^{-1} q D_q \cos_q(q^{-1} \omega x) \\
 &= D_q \cos_q(q^{-1} \omega x) = -q^{-1} \omega \sin_q(q^{-1} \omega x).
 \end{aligned}$$

Mientras que para el inciso c), se tiene

$$\begin{aligned}
 \widetilde{D}_q \operatorname{Sin}_q(\omega x) &= q^{-1} D_{q^{-1}} \operatorname{Sin}_q(\omega x) = q^{-1} q D_q \operatorname{Sin}_q(q^{-1} \omega x) \\
 &= D_q \operatorname{Sin}_q(q^{-1} \omega x) = q^{-1} \omega \operatorname{Cos}_q(q^{-1} \omega x) \\
 &= q^{-1} \omega \operatorname{Cos}_q(\omega x).
 \end{aligned}$$

Finalmente para el inciso d), se tiene

$$\begin{aligned}
 \widetilde{D}_q \operatorname{Cos}_q(\omega x) &= q^{-1} D_{q^{-1}} \operatorname{Cos}_q(\omega x) = q^{-1} q D_q \operatorname{Cos}_q(q^{-1} \omega x) \\
 &= D_q \operatorname{Cos}_q(q^{-1} \omega x) = -q^{-1} \omega \operatorname{Sin}_q(q^{-1} \omega x) \\
 &= -q^{-1} \omega \operatorname{Sin}_q(\omega x),
 \end{aligned}$$

como se quería mostrar. □

1.3.2. q -integral de Jackson asociada a la q^{-1} -derivada de Jackson

El siguiente resultado nos muestra como es la interacción entre D_q y $D_{q^{-1}}$, lo que permite evaluar integrales con $D_{q^{-1}} f(x)$ usando el operador D_q ,

Lema 1.15. Si $\frac{d}{dx} f(x)$ existe en un vecindad de $x = 0$ y es continua en $x = 0$, entonces

$$\int_a^b \widetilde{D}_q f(x) d_q x = f(q^{-1} b) - f(q^{-1} a).$$

Demostración. Basta con notar que si $g(x) = f(q^{-1} x)$, entonces

$$D_q g(x) = D_q f(q^{-1} x) = q^{-1} D_{q^{-1}} f(x) = \widetilde{D}_q f(x),$$

por lo tanto, del Corolario 1.9, se sigue que

$$\int_a^b \widetilde{D}_q f(x) d_q x = \int_a^b D_q g(x) d_q x = g(b) - g(a) = f(q^{-1} b) - f(q^{-1} a). \quad \square$$

Teorema 1.16. Si $\frac{d}{dx}f(x)$ existe alrededor de $x = 0$ y es continua en $x = 0$, entonces se tiene

$$\tilde{D}_q \int_a^x f(t) d_q t = q^{-1} f(q^{-1}x)$$

Demostración. Sea

$$F(x) = \int_a^x f(t) d_q t,$$

así

$$\tilde{D}_q \int_a^x f(t) d_q t = \tilde{D}_q F(x) = q^{-1} D_{q^{-1}} F(x).$$

Usando la Proposición 1.12, se tiene

$$q^{-1} D_{q^{-1}} F(x) = q^{-1} q D_q F(q^{-1}x) = D_q F(q^{-1}x) = D_q \int_a^{q^{-1}x} f(t) d_q t = q^{-1} f(q^{-1}x),$$

donde en la última igualdad hemos empleado la identidad (1.6). Por lo tanto

$$\tilde{D}_q \int_a^x f(t) d_q t = q^{-1} f(q^{-1}x). \quad \square$$

1.4. Operadores q -derivada y q -integral de Rubin

1.4.1. q -derivada de Rubin

Consideramos ahora una forma alternativa de una q -derivada definida mediante el siguiente operador que se denomina q -derivada de Rubin, que se introduce en Rubin (2007) para una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\partial_q f(x) := \frac{f(q^{-1}x) + f(-q^{-1}x) - f(qx) + f(-qx) - 2f(-x)}{2(1-q)x}, \quad x \neq 0,$$

y $\partial_q f(x)(0) := \frac{df}{dx}(0)$, siempre que $\frac{df}{dx}(0)$ exista. Notemos que de la definición se sigue que si f es diferenciable, entonces

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \partial_q f(x) = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{f(q^{-1}x) + f(-q^{-1}x) - f(qx) - f(-qx) + 2f(x) - 2f(-x)}{2(1-q)x} = \frac{df}{dx}(x).$$

La siguiente proposición muestra una importante propiedad sobre la derivada del operador de Rubin.

Proposición 1.17 (Haddad y Mastouri, 2020). Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces el operador de Rubin se puede simplificar si f es una función par o impar, y en tal caso, se cumple

$$\partial_q f(x) = \begin{cases} D_q f(x), & \text{si } f(x) \text{ es impar,} \\ \tilde{D}_q f(x), & \text{si } f(x) \text{ es par.} \end{cases}$$

Demostración. Supongamos que $f(x)$ es una función impar, es decir para todo x en el dominio de f se cumple $f(-x) = -f(x)$, o bien, $-f(-x) = f(x)$. Entonces

$$\begin{aligned}\partial_q(-f(-x)) &= -\partial_q f(-x) = -\left(\frac{f(-q^{-1}x) + f(q^{-1}x) - f(-qx) + f(qx) - 2f(x)}{2(1-q)x}\right) \\ &= \frac{f(q^{-1}x) - f(q^{-1}x) - f(qx) - f(qx) + 2f(x)}{2(1-q)x} \\ &= \frac{2f(x) - 2f(qx)}{2(1-q)x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} = D_q f(x).\end{aligned}$$

Por otra parte, supongamos ahora que $f(x)$ es una función par, es decir que para todo x en el dominio de f se cumple $f(x) = f(-x)$. Entonces

$$\begin{aligned}\partial_q f(-x) &= \frac{f(-q^{-1}x) + f(q^{-1}x) - f(-qx) + f(qx) - 2f(x)}{2(1-q)x} \\ &= \frac{f(q^{-1}x) + f(q^{-1}x) - f(qx) + f(qx) - 2f(x)}{2(1-q)x} \\ &= \frac{2f(q^{-1}x) - 2f(x)}{2(1-q)x} = \frac{f(q^{-1}x) - f(x)}{q(q^{-1}-1)x} \\ &= \frac{f(q^{-1}x) - f(x)}{q(q^{-1}-1)x} = q^{-1}D_{q^{-1}}f(x).\end{aligned}$$

□

Como conclusión del resultado anterior, y tomando en cuenta que toda función de valores reales $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se puede expresar como la suma $f(x) = f_p(x) + f_i(x)$ para todo $x \in [a, b]$, donde las funciones $f_p: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son las partes par e impar de la función f , definidas respectivamente por

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad x \in [a, b],$$

entonces se cumple la identidad

$$\partial_q f(x) = q^{-1}D_{q^{-1}}f_p(x) + D_q f_i(x), \quad x \in [a, b].$$

Antes de ver quien es la q -derivada de Rubin del producto de funciones, veamos el siguiente caso particular de la q -derivada de Rubin de la función $f(u(x)) = f(\alpha x^\beta)$, es decir,

$$\begin{aligned}\partial_q f(u(x)) &= \frac{f(q^{-1}\alpha x^\beta) + f(-q^{-1}\alpha x^\beta) - f(-q\alpha x^\beta) + f(q\alpha x^\beta) - 2f(-\alpha x^\beta)}{2(1-q)x} \\ &= \frac{f(q^{-1}\alpha x^\beta) + f(-q^{-1}\alpha x^\beta) - f(-q\alpha x^\beta) + f(q\alpha x^\beta) - 2f(-\alpha x^\beta)}{2(1-q)\alpha x^\beta} \cdot \frac{2(1-q)\alpha x^\beta}{2(1-q)x} \\ &= \frac{f(q^{-1}u) + f(-q^{-1}u) - f(-qu) + f(qu) - 2f(-u)}{2(1-q)u} \cdot \alpha x^{\beta-1} \\ &= \alpha x^{\beta-1} \partial_q f(u(x)) = \alpha x^{\beta-1} \partial_q f(\alpha x^\beta).\end{aligned}$$

Concluyendo así que la deriva de una composición de funciones de la forma $f(u(x))$, donde $u(x) = \alpha x^\beta$ con α y β constantes es

$$\partial_q f(u(x)) = \alpha x^{\beta-1} \partial_q f(u(x)) = \alpha x^{\beta-1} \partial_q f(\alpha x^\beta). \quad (1.14)$$

En el siguiente lema hacemos uso del resultado anterior.

Lema 1.18 (Haddad y Mastouri, 2020). *Los siguientes resultados se cumplen:*

a) *Si f es una función par y g es una función impar, entonces*

$$\begin{aligned}\partial_q(f(x)g(x)) &= f(x)\partial_q g(x) + qg(qx)\partial_q f(qx) \\ &= qg(x)\partial_q f(qx) + f(qx)\partial_q g(x).\end{aligned}$$

b) *Si f y g son funciones pares, entonces*

$$\partial_q(f(x)g(x)) = g(q^{-1}x)\partial_q f(x) + f(x)\partial_q g(x).$$

c) *Si f y g son funciones impares, entonces*

$$\partial_q(f(x)g(x)) = q^{-1}g(q^{-1}x)\partial_q f(q^{-1}x) + q^{-1}f(x)\partial_q g(q^{-1}x).$$

Demostración. Supongamos que f es una función par y que g es una función impar, entonces

$$\partial_q(f(x)g(x)) = \frac{f(x)g(x) - f(qx)g(qx)}{(1-q)x}.$$

Notemos que si $u(x) = qx$, entonces por el resultado anterior resulta $\partial_q f(qx) = q\partial_q f(qx)$, es decir,

$$\partial_q f(qx) = q \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}.$$

De la misma manera se tiene que

$$\partial_q g(x) = \frac{g(x) - g(qx)}{(1-q)x}.$$

Así

$$\begin{aligned}\partial_q(f(x)g(x)) &= \frac{f(x)((1-q)x\partial_q g(x) + g(qx)) - g(qx)(-q(1-q)x\partial_q f(qx) - f(x))}{(1-q)x} \\ &= \frac{f(x)(1-q)x\partial_q g(x) + g(qx)q(1-q)x\partial_q f(qx)}{(1-q)x} \\ &= f(x)\partial_q g(x) + qg(qx)\partial_q f(qx).\end{aligned}$$

De igual forma, vemos que $\partial_q g(qx) = q\partial_q g(qx)$ y, por lo tanto,

$$\partial_q g(qx) = q \frac{g(x) - g(qx)}{(1-q)x}.$$

Además, se tiene que

$$\partial_q f(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}.$$

Así

$$\begin{aligned}
 \partial_q(f(x)g(x)) &= \frac{f(x)g(x) - f(qx)g(qx)}{(1-q)x} \\
 &= \frac{g(x)(q(1-q)x\partial_q f(qx) + f(qx)) + f(qx)((1-q)x\partial_q g(x) - g(x))}{(1-q)x} \\
 &= \frac{g(x)q(1-q)x\partial_q f(qx) + f(qx)(1-q)x\partial_q g(x)}{(1-q)x} \\
 &= qg(x)\partial_q f(qx) + f(qx)\partial_q g(x).
 \end{aligned}$$

Ahora supongamos que f y g son funciones pares, entonces

$$\begin{aligned}
 \partial_q(f(x)g(x)) &= \frac{f(q^{-1}x)g(q^{-1}x) - f(x)g(x)}{(1-q)x} \\
 &= \frac{g(q^{-1}x)((1-q)x\partial_q f(x) + f(x)) + f(x)((1-q)x\partial_q g(x) - g(q^{-1}x))}{(1-q)x} \\
 &= \frac{g(q^{-1}x)(1-q)x\partial_q f(x) + f(x)(1-q)x\partial_q g(x)}{(1-q)x} \\
 &= g(q^{-1}x)\partial_q f(x) + f(x)\partial_q g(x).
 \end{aligned}$$

Finalmente si f y g son funciones impares, entonces $\partial_q f(q^{-1}x) = q^{-1}\partial_q f(q^{-1}x)$ y, por lo tanto,

$$\partial_q f(q^{-1}x) = q^{-1} \frac{f(q^{-1}x) - f(x)}{(1-q)x}.$$

De la misma manera,

$$\partial_q g(q^{-1}x) = q^{-1} \frac{g(q^{-1}x) - g(x)}{(1-q)x}.$$

Así

$$\begin{aligned}
 \partial_q(f(x)g(x)) &= \frac{f(q^{-1}x)g(q^{-1}x) - f(x)g(x)}{(1-q)x} \\
 &= \frac{g(q^{-1}x)(f(x) + q^{-1}(1-q)x\partial_q f(q^{-1}x))}{(1-q)x} \\
 &\quad - \frac{f(x)(q^{-1}(1-q)x\partial_q g(q^{-1}x) + g(q^{-1}x))}{(1-q)x} \\
 &= \frac{q^{-1}g(q^{-1}x)(1-q)x\partial_q f(q^{-1}x) + q^{-1}f(x)(1-q)x\partial_q g(q^{-1}x)}{(1-q)x} \\
 &= q^{-1}g(q^{-1}x)\partial_q f(q^{-1}x) + q^{-1}f(x)\partial_q g(q^{-1}x). \quad \square
 \end{aligned}$$

Para obtener la q -derivada de Rubin del producto de funciones consideramos la parte par e

impar de las funciones f y g , es decir, $f(x) = f_p(x) + f_i(x)$ y $g(x) = g_p(x) + g_i(x)$. Entonces

$$\begin{aligned}
 \partial_q(f(x)g(x)) &= \partial_q[(f_p(x) + f_i(x))(g_p(x) + g_i(x))] \\
 &= \partial_q[f_p(x)g_p(x) + f_p(x)g_i(x) + f_i(x)g_p(x) + f_i(x)g_i(x)] \\
 &= \underbrace{\partial_q f_p(x)g_p(x)}_{\text{par}} + \underbrace{\partial_q f_p(x)g_i(x)}_{\text{impar}} + \underbrace{\partial_q f_i(x)g_p(x)}_{\text{impar}} + \underbrace{\partial_q f_i(x)g_i(x)}_{\text{par}} \\
 &= g_p(q^{-1}x)\partial_q f_p(x) + f_p(x)\partial_q g_p(x) + f_p(x)\partial_q g_i(x) + qg_i(qx)\partial_q f_p(qx) \\
 &\quad + qf_i(x)\partial_q g_p(qx) + qg_p(qx)\partial_q f_i(x) + q^{-1}g_i(q^{-1}x)\partial_q f_i(q^{-1}x) + q^{-1}f_i(x)\partial_q g_i(q^{-1}x) \\
 &= f_p(x)\partial_q g(x) + f_i(x)(q^{-1}\partial_q g_i(q^{-1}x) + q\partial_q g_p(qx)) + g_p(q^{-1}x)\partial_q f_p(x) \\
 &\quad + g_p(qx)\partial_q f_i(x) + qg_i(qx)\partial_q f_p(qx) + q^{-1}g_i(q^{-1}x)\partial_q f_i(q^{-1}x).
 \end{aligned}$$

Podemos notar que si se buscara utilizar las funciones q -exponenciales e_q^x y E_q^x , como posibles soluciones de ecuaciones en diferencias con la q -derivada de Rubin, es necesario ver que pasa con $\partial_q e_q^x$ y $\partial_q E_q^x$. Para ello haremos uso de la parte par e impar de las funciones e_q^x y E_q^x , debido a que estas funciones nos son pares ni impares. Así

$$\begin{aligned}
 \partial_q e_q^x &= \tilde{D}_q\left(\frac{e_q^x + e_q^{-x}}{2}\right) + D_q\left(\frac{e_q^x - e_q^{-x}}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2}\left(\tilde{D}_q(e_q^x) + \tilde{D}_q(e_q^{-x}) + D_q(e_q^x) - D_q(e_q^{-x})\right) \\
 &= \frac{1}{2}\left(q^{-1}e_q^{q^{-1}x} - q^{-1}e_q^{-q^{-1}x} + e_q^x + e_q^{-x}\right) \\
 &= q^{-1}\left(\frac{e_q^{q^{-1}x} - e_q^{-q^{-1}x}}{2}\right) + \left(\frac{e_q^x + e_q^{-x}}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Mientras que

$$\begin{aligned}
 \partial_q E_q^x &= \tilde{D}_q\left(\frac{E_q^x + E_q^{-x}}{2}\right) + D_q\left(\frac{E_q^x - E_q^{-x}}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2}\left(\tilde{D}_q(E_q^x) + \tilde{D}_q(E_q^{-x}) + D_q(E_q^x) - D_q(E_q^{-x})\right) \\
 &= \frac{1}{2}\left(q^{-1}E_q^x - q^{-1}E_q^{-x} + E_q^{qx} + E_q^{-qx}\right) \\
 &= q^{-1}\left(\frac{E_q^x - E_q^{-x}}{2}\right) + \left(\frac{E_q^{qx} + E_q^{-qx}}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Concluyendo así que las funciones q -exponenciales e_q^x y E_q^x no pueden ser usadas para resolver ecuaciones en diferencias con operador de Rubin debido a que no cumplen con $\partial_q e_q^x = e_q^x$, ni $\partial_q E_q^x = E_q^x$.

Las siguientes definiciones de q -análogos de las funciones trigonométricas y la función exponencial se encuentran en Haddad y Mastouri (2020):

$$\blacksquare \cos(x; q^2) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)} x^{2n}}{[2n]_q!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)} (1-q)^{2n} x^{2n}}{(q; q)_{2n}}.$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \sin(x; q^2) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)} x^{2n+1}}{[2n+1]_q!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)} (1-q)^{2n+1} x^{2n+1}}{(q; q)_{2n+1}}. \\ \blacksquare e(x; q^2) &:= \cos(-ix; q^2) + i \sin(-ix; q^2). \end{aligned}$$

Las gráficas de estas funciones y su comparación con las respectivas funciones trigonométricas y la correspondiente función exponencial del cálculo tradicional se muestra en las Figuras 1.4 y 1.5. La importancia de estas funciones se puede observar en el siguiente resultado, donde se aprecia que el operador de Rubin actúa de forma similar a como sucede en el cálculo tradicional sobre estas funciones.

Proposición 1.19. *Se cumplen las siguientes identidades:*

$$\begin{aligned} a) \quad \partial_q \cos(x; q^2) &= -\sin(x; q^2), & c) \quad \partial_q e(\lambda x; q^2) &= \lambda e(\lambda x; q^2). \\ b) \quad \partial_q \sin(x; q^2) &= \cos(x; q^2), \end{aligned}$$

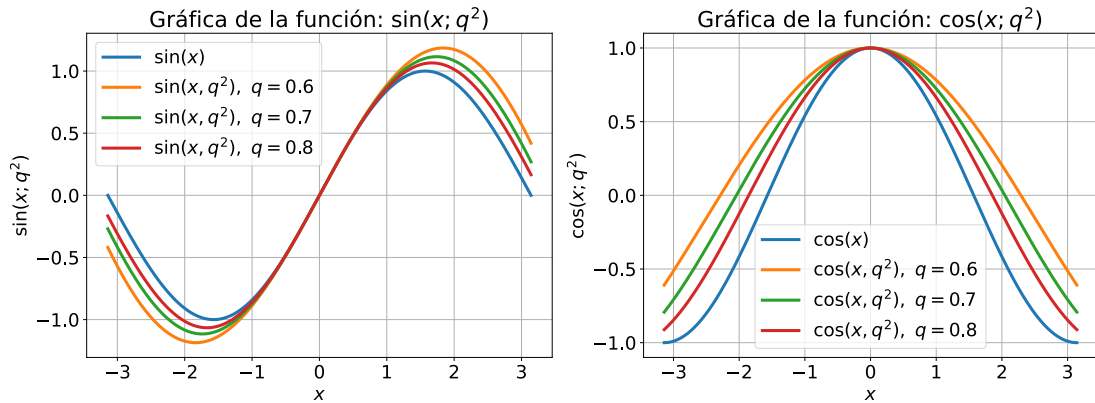


Figura 1.4. Comparación de las funciones $\sin(x; q^2)$ y $\cos(x; q^2)$ con respecto a las funciones trigonométricas tradicionales $\sin(x)$ y $\cos(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ con diferentes valores para q .

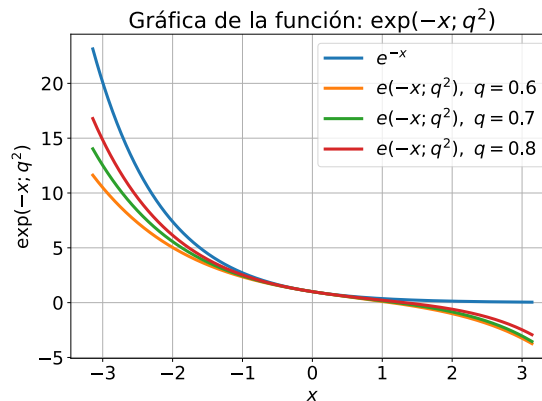


Figura 1.5. Comparación de la función $e(-x; q^2)$ con respecto a la función exponencial tradicional e^{-x} en el intervalo $[-\pi, \pi]$ con diferentes valores para q .

Demostración. Observamos primero que se cumple la siguiente derivada

$$\begin{aligned}
 \partial_q(\lambda x)^{2n} &= \frac{(q^{-1}\lambda x)^{2n} + (-q^{-1}\lambda x)^{2n} - (q\lambda x)^{2n} + (-q\lambda x)^{2n} - 2(-\lambda x)^{2n}}{2(1-q)x} \\
 &= \frac{(\lambda x)^{2n}(q^{-2n} + q^{-2n} - q^{2n} + q^{2n} - 2)}{2(1-q)x} \\
 &= \frac{q^{-2n} - 1}{1-q} \lambda(\lambda x)^{2n-1} = \frac{1 - q^{2n}}{q^{2n}(1-q)} \lambda(\lambda x)^{2n-1} = \frac{[2n]_q \lambda(\lambda x)^{2n-1}}{q^{2n}}.
 \end{aligned}$$

Empleando esto, se sigue que,

$$\begin{aligned}
 \partial_q \cos(\lambda x; q^2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)} \frac{[2n]_q \lambda(\lambda x)^{2n-1}}{q^{2n}}}{[2n]_q!} \\
 &= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)} [2n]_q (\lambda x)^{2n-1}}{q^{2n} [2n]_q!} \\
 &= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n-1)} (\lambda x)^{2n-1}}{[2n-1]_q!} \\
 &= -\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m q^{m(m+1)} (\lambda x)^{2m+1}}{[2m+1]_q!} = -\lambda \sin(\lambda x; q^2).
 \end{aligned}$$

Esto muestra el inciso a). Por otra parte, si resolvemos la siguiente q -derivada

$$\begin{aligned}
 \partial_q(\lambda x)^{2n+1} &= \frac{(q^{-1}\lambda x)^{2n+1} + (-q^{-1}\lambda x)^{2n+1} - (q\lambda x)^{2n+1} + (-q\lambda x)^{2n+1} - 2(-\lambda x)^{2n+1}}{2(1-q)x} \\
 &= \frac{(\lambda x)^{2n+1}(q^{-2n-1} - q^{-2n-1} - q^{2n+1} - q^{2n+1} + 2)}{2(1-q)x} \\
 &= \frac{1 - q^{2n+1}}{1-q} \lambda(\lambda x)^{2n} = [2n+1]_q \lambda(\lambda x)^{2n},
 \end{aligned}$$

entonces podemos observar que

$$\begin{aligned}
 \partial_q \sin(\lambda x; q^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)} \lambda(\lambda x)^{2n} [2n+1]_q}{[2n+1]_q!} \\
 &= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)} (\lambda x)^{2n}}{[2n]_q!} \\
 &= \lambda \cos(\lambda x; q^2),
 \end{aligned}$$

demostrando así el inciso b). Finalmente si resolvemos la siguiente derivada

$$\partial_q e(\lambda x; q^2) = \partial_q (\cos(-i\lambda x; q^2) + i \sin(-i\lambda x; q^2)),$$

y consideramos $\mu = -i\lambda$, entonces

$$\begin{aligned}
 \partial_q e(\lambda x; q^2) &= \partial_q \cos(\mu x; q^2) + i \partial_q \sin(\mu x; q^2) \\
 &= -\mu \sin(\mu x; q^2) + i \mu \cos(\mu x; q^2) \\
 &= i\lambda \sin(-i\lambda x; q^2) + \lambda \cos(-i\lambda x; q^2) \\
 &= \lambda (\cos(-i\lambda x; q^2) + i \sin(-i\lambda x; q^2)) \\
 &= \lambda e(\lambda x; q^2),
 \end{aligned}$$

lo cual muestra el inciso c). □

1.4.2. q -integral de Jackson asociada a la q -derivada de Rubin

Los siguientes resultados se demuestran usando directamente la definición de la q -integral de Jackson y son útiles para la demostración de la integral por partes.

Lema 1.20. *Sea f una función continua en $x = 0$, entonces si $\int_0^x f(t) d_q t$ existe, tenemos:*

a) *si f es una función impar, entonces*

$$\int_0^x \partial_q f(t) d_q t = f(x) - \lim_{k \rightarrow \infty} f(xq^{k+1}) = f(x) - f(0),$$

b) *si f es una función par, entonces*

$$\int_0^x \partial_q f(t) d_q t = f(q^{-1}x) - \lim_{k \rightarrow \infty} f(xq^k) = f(q^{-1}x) - f(0).$$

Demostración. De la definición de la q -integral de Jackson se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \partial_q f(t) d_q t &= (1-q)x \sum_{k=0}^{\infty} q^k \partial_q f(q^k x) \\
 &= (1-q)x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(q^{-1}q^k x) + f(-q^{-1}q^k x) - f(qq^k x) + f(-qq^k x) - 2f(-q^k x)}{2(1-q)x} \\
 &= (1-q)x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(q^{k-1}x) + f(-q^{k-1}x) - f(q^{k+1}x) + f(-q^{k+1}x) - 2f(-q^k x)}{2(1-q)x}.
 \end{aligned}$$

Ahora supongamos que f es una función impar, entonces obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \partial_q f(t) d_q t &= (1-q)x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(q^{k-1}x) - f(q^{k-1}x) - f(q^{k+1}x) - f(q^{k+1}x) + 2f(q^k x)}{2(1-q)x} \\
 &= (1-q)x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(q^k x) - f(q^{k+1}x)}{(1-q)x} = \sum_{k=0}^{\infty} (f(q^k x) - f(q^{k+1}x)) \\
 &= f(x) - \lim_{k \rightarrow \infty} f(q^{k+1}x) = f(x) - f(0),
 \end{aligned}$$

lo cual demuestra el inciso a). Por otro lado, si f es una función par, entonces se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^x \partial_q f(t) d_q t &= (1-q)x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(q^{k-1}x) + f(q^{k-1}x) - f(q^{k+1}x) + f(q^{k+1}x) - 2f(q^k x)}{2(1-q)x} \\ &= (1-q)x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(q^{k-1}x) - f(q^k x)}{(1-q)x} = \sum_{k=0}^{\infty} (f(q^{k-1}x) - f(q^k x)) \\ &= f(q^{-1}x) - \lim_{k \rightarrow \infty} f(q^k x) = f(q^{-1}x) - f(0), \end{aligned}$$

lo cual demuestra el inciso b). □

De acuerdo a la definición de la integral de Jackson en un intervalo $[-a, a]$, tenemos que

$$\int_{-a}^a f(x) d_q x = \int_0^a f(x) d_q x - \int_0^{-a} f(x) d_q x.$$

Podemos notar que si tomamos $g(x) = f(-x)$, por la definición de la integral de Jackson se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^a g(x) d_q x &= \int_0^a f(-x) d_q x = (1-q)a \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(-q^k a) \\ &= -(1-q)(-a) \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k(-a)) = - \int_0^{-a} f(x) d_q x, \end{aligned}$$

por lo que

$$\int_{-a}^a f(x) d_q x = \int_0^a f(x) d_q x + \int_0^{-a} f(-x) d_q x = \int_0^a (f(x) + f(-x)) d_q x.$$

Se sigue que si f es una función par, entonces $\int_{-a}^a f(x) d_q x = 2 \int_0^a f(x) d_q x$, mientras que si f es una función impar, entonces $\int_{-a}^a f(x) d_q x = 0$.

Por otro lado, notemos que si f es una función par, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \partial_q f(x) &= \frac{f(q^{-1}x) + f(-q^{-1}x) - f(qx) + f(-qx) - 2f(-x)}{2(1-q)x} \\ &= \frac{f(-q^{-1}x) + f(q^{-1}x) - f(-qx) + f(+qx) - 2f(x)}{2(1-q)x} \\ &= \frac{f(q^{-1}(-x)) + f(-q^{-1}(-x)) - f(q(-x)) + f(-q(-x)) - 2f(-(-x))}{2(1-q)x} \\ &= \partial_q f(-x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si f es una función par, entonces $\partial_q f(x)$ es también una función par. De igual forma,

si f es una función impar, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\partial_q(-f(-x)) &= -\partial_q f(-x) = -\left(\frac{f(-q^{-1}x) + f(q^{-1}x) - f(-qx) + f(qx) - 2f(x)}{2(1-q)x}\right) \\ &= \frac{-f(-q^{-1}x) - f(q^{-1}x) + f(-qx) - f(qx) + 2f(x)}{2(1-q)x} \\ &= \frac{f(q^{-1}x) + f(-q^{-1}x) - f(qx) + f(-qx) - 2f(-x)}{2(1-q)x} \\ &= \partial_q f(x),\end{aligned}$$

es decir, $\partial_q f(x)$ es también una función impar.

Teorema 1.21. Sea $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, si $F(x)$ es continua en $x = 0$ y $\partial_q F(x)$ existe alrededor de $x = 0$, se tiene

$$\int_a^b \partial_q F(t) \, d_q t = (F_p(q^{-1}b) + F_i(b)) - (F_p(q^{-1}a) + F_i(a)).$$

Demostración. Consideramos la parte par e impar de la función F , es decir, $F = F_p + F_i$, de donde F_p es la parte par y F_i es la parte impar. Así

$$\int_a^b \partial_q(F(t)) \, d_q t = \int_a^b (\partial_q F_p(t) + \partial_q F_i(t)) \, d_q t = \int_a^b \partial_q F_p(t) \, d_q t + \int_a^b \partial_q F_i(t) \, d_q t.$$

Para

$$\int_a^b \partial_q F_p(t) \, d_q t = \int_0^b \partial_q F_p(t) \, d_q t - \int_0^a \partial_q F_p(t) \, d_q t,$$

Usamos el Lema 1.20, considerando que F_p es una función par, por lo que

$$\int_a^b \partial_q F_p(t) \, d_q t = F_p(q^{-1}b) - F_p(0) - F_p(q^{-1}a) + F_p(0) = F_p(q^{-1}b) - F_p(q^{-1}a).$$

Similarmente, usando que F_i es una función impar, se tiene

$$\begin{aligned}\int_a^b \partial_q F_i(t) \, d_q t &= \int_0^b \partial_q F_i(t) \, d_q t - \int_0^a \partial_q F_i(t) \, d_q t \\ &= F_i(b) - F_i(0) - F_i(a) + F_i(0) \\ &= F_i(b) - F_i(a).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_a^b \partial_q F(t) \, d_q t = (F_p(q^{-1}b) + F_i(b)) - (F_p(q^{-1}a) + F_i(a)). \quad \square$$

Proposición 1.22. Sean f y g funciones en $[-a, a]$, donde $a > 0$. Si $\int_{-a}^a \partial_q f(t)g(t) \, d_q t$ existe, entonces la regla de la q -integral por partes asociada al operador de Rubin esta dada por:

$$\int_{-a}^a \partial_q f(t)g(t) \, d_q t = 2(f_p(q^{-1}a)g_i(a) + f_i(a)g_p(q^{-1}a)) - \int_{-a}^a f(t)\partial_q g(t) \, d_q t.$$

Demostración. Si utilizamos la descomposición $h = h_p + h_i$ y observamos que la función h_p cumple: $h_p(-q^{-1}t) = h_p(q^{-1}t)$, $h_p(-qt) = h_p(qt)$ y $h_p(-t) = h_p(t)$, entonces se sigue que

$$\begin{aligned}\partial_q h_p(t) &= \frac{h_p(q^{-1}t) + h_p(-q^{-1}t) - h_p(qt) + h_p(-qt) - 2h_p(-t)}{2(1-q)t} \\ &= \frac{h_p(q^{-1}t) - h_p(t)}{(1-q)t},\end{aligned}$$

la cual es una función impar. De manera similar, como h_i cumple: $h_i(-q^{-1}t) = -h_i(q^{-1}t)$, $h_i(-qt) = -h_i(qt)$ y $h_i(-t) = -h_i(t)$, entonces resulta que:

$$\begin{aligned}\partial_q h_i(t) &= \frac{h_i(q^{-1}t) + h_i(-q^{-1}t) - h_i(qt) + h_i(-qt) - 2h_i(-t)}{2(1-q)t} \\ &= \frac{h_i(t) - h_i(qt)}{(1-q)t},\end{aligned}$$

es una función par. Combinando ambas identidades, obtenemos la identidad

$$\partial_q h(t) = \frac{h_p(q^{-1}t) - h_p(t)}{(1-q)t} + \frac{h_i(t) - h_i(qt)}{(1-q)t},$$

Sean ahora f y g funciones definidas en $[-a, a]$ tales que la integral $\int_{-a}^a \partial_q f(t)g(t) d_q t$ existe. Descomponemos $g = g_p + g_i$. Entonces se tiene

$$\partial_q f(t)g(t) = \left(\frac{f_p(q^{-1}t) - f_p(qt)}{(1-q)t} + \frac{f_i(t) - f_i(qt)}{(1-q)t} \right) (g_p(t) + g_i(t)).$$

Al integrar en el intervalo simétrico $[-a, a]$, todos los términos impares se anulan. Por consiguiente,

$$\int_{-a}^a \partial_q f(t)g(t) d_q t = \int_{-a}^a \left(\frac{f_p(q^{-1}t) - f_p(qt)}{(1-q)t} g_i(t) + \frac{f_i(t) - f_i(qt)}{(1-q)t} g_p(t) \right) d_q t. \quad (1.15)$$

Ahora evaluamos el primer término. Aplicando la definición de la integral de Jackson, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a \frac{f_p(q^{-1}t) - f_p(qt)}{(1-q)t} g_i(t) d_q t &= (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} aq^n \left(\frac{f_p(aq^{n-1}) - f_p(aq^{n+1})}{(1-q)aq^n} g_i(aq^n) \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_p(aq^{n-1}) - f_p(aq^{n+1})}{(1-q)(-aq^n)} g_i(-aq^n) \right) \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(f_p(aq^{n-1}) - f_p(aq^{n+1}) \right) g_i(aq^n) \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} f_p(aq^{n-1}) g_i(aq^n) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} f_p(aq^{n+1}) g_i(aq^n).\end{aligned}$$

En la primera suma separamos el primer término y hacemos el cambio de índice $m = n - 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_p(aq^{n-1}) g_i(aq^n) = f_p(q^{-1}a) g_i(a) + \sum_{m=0}^{\infty} f_p(aq^m) g_i(aq^{m+1}),$$

mientras que en la segunda hacemos el cambio de índice $m = n + 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_p(aq^{n+1})g_i(aq^n) = \sum_{m=1}^{\infty} f_p(aq^m)g_i(aq^{m-1}).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{f_p(q^{-1}t) - f_p(qt)}{(1-q)t} g_i(t) \, d_q t &= 2f_p(q^{-1}a)g_i(a) \\ &+ 2 \sum_{m=0}^{\infty} f_p(aq^m) \left(g_i(aq^{m+1}) - g_i(aq^{m-1}) \right). \end{aligned}$$

Observamos que

$$\partial_q g_i(aq^m) = \frac{g_i(aq^{m-1}) - g_i(aq^{m+1})}{(1-q)aq^m},$$

y, por la definición de la integral de Jackson, se tiene que

$$\int_{-a}^a \frac{f_p(q^{-1}t) - f_p(qt)}{(1-q)t} g_i(t) \, d_q t = 2f_p(q^{-1}a)g_i(a) - \int_{-a}^a f_p(t) \partial_q g_i(t) \, d_q t.$$

Ahora evaluamos el segundo término, obteniendo de manera análoga,

$$\int_{-a}^a \frac{f_i(t) - f_i(qt)}{(1-q)t} g_i(t) \, d_q t = 2f_i(a)g_p(q^{-1}a) - \int_{-a}^a f_i(t) \partial_q g_p(t) \, d_q t.$$

Finalmente, considerando la derivada de g y repitiendo el análisis anterior para la integral $\int_{-a}^a f(t) \partial_q g(t) \, d_q t$, se observa que las sumas interiores coinciden con las que aparecen en (1.15), pero con signo opuesto. Por tanto, dichas contribuciones se cancelan exactamente. Al reunir los términos restantes, se obtiene la identidad

$$\int_{-a}^a \partial_q f(t) g(t) \, d_q t = 2(f_p(q^{-1}a)g_i(a) + f_i(a)g_p(q^{-1}a)) - \int_{-a}^a f(t) \partial_q g(t) \, d_q t,$$

como se deseaba mostrar. □

Capítulo 2

Ecuaciones en diferencias de primer orden con diferentes q -derivadas

2.1. Solución de ecuaciones en diferencias con q -derivada de Jackson

Consideramos la siguiente ecuación en diferencias lineal de primer orden

$$D_q y(x) + p(x)y(x) = r(x), \quad y(0) = y_0. \quad (2.1)$$

Si buscamos comprobar si es posible aplicar los métodos clásicos de la teoría de ecuaciones diferenciales, podemos considerar multiplicar en ambos lados de la igualdad por un factor integrante $\mu(x)$ con el fin de resolver esta ecuación en diferencias, con lo cual obtenemos

$$\mu(x)D_q y(x) + p(x)\mu(x)y(x) = \mu(x)r(x).$$

Es conocido que dicho método busca determinar la función $\mu(x)$ con el fin de expresar el término $\mu(x)D_q y(x) + p(x)\mu(x)y(x)$ como la q -derivada de un producto, es decir, de tal manera que $D_q(y(x)\mu(x)) = \mu(x)D_q y(x) + p(x)\mu(x)y(x)$, ver por ejemplo Simmons (2017). Siguiendo este procedimiento, podemos observar que para hallar una solución de la ecuación en diferencias como en el cálculo clásico, podemos considerar la función

$$\mu(x) = e^{\int_0^x p(t) d_q t}.$$

Es importante notar que

$$\begin{aligned} D_q e^{\int_0^x p(t) d_q t} &= \frac{e^{\int_0^x p(t) d_q t} - e^{\int_0^{qx} p(t) d_q t}}{(1-q)x} = \frac{e^{\int_0^x p(t) d_q t} - e^{\int_0^x p(t) d_q t + \int_x^{qx} p(t) d_q t}}{(1-q)x} \\ &= e^{\int_0^x p(t) d_q t} \frac{1 - e^{\int_x^{qx} p(t) d_q t}}{(1-q)x}, \end{aligned}$$

es decir, resulta que $D_q \mu(x) \neq p(x)\mu(x)$, lo que nos indica que no podemos resolver la ecuación en diferencias usando el factor integrante $\mu(x)$. Este resultado es esperado debido a que la derivada de una composición de funciones sólo existe si es de la forma (1.6).

Lo anterior nos sugiere que es posible determinar una solución sólo si $p(x) = \alpha$ con α constante. El siguiente resultado muestra esta posibilidad.

Teorema 2.1. *La función*

$$y(x) = e_q^{-\alpha x} \left(y_0 + \int_0^x E_q^{\alpha q t} r(t) d_q t \right), \quad t \in [0, b], \quad (2.2)$$

es solución de la ecuación en diferencias con condiciones iniciales

$$D_q y(x) + \alpha y(x) = r(x), \quad y(0) = y_0. \quad (2.3)$$

Demostración. Notemos que $D_q E_q^{\alpha x} = \alpha E_q^{\alpha q x}$. Siguiendo la técnica de factor integrante, se tiene que si $\mu(x) = E_q^{\alpha q x}$, entonces

$$\begin{aligned} E_q^{\alpha q x} r(t) &= E_q^{\alpha q x} D_q y(x) + \alpha E_q^{\alpha q x} y(x) \\ &= E_q^{\alpha q x} D_q y(x) + D_q E_q^{\alpha x} y(x) \\ &= D_q (E_q^{\alpha x} y(x)). \end{aligned}$$

Integrando en ambos lados de la igualdad se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^x E_q^{\alpha q t} r(t) d_q t &= \int_0^x D_q (E_q^{\alpha t} y(t)) d_q t \\ &= E_q^{\alpha x} y(x) - y(0). \end{aligned}$$

Así,

$$E_q^{\alpha x} y(x) = y_0 + \int_0^x E_q^{\alpha q t} r(t) d_q t,$$

y, por lo tanto,

$$y(x) = e_q^{-\alpha x} \left(y_0 + \int_0^x E_q^{\alpha q t} r(t) d_q t \right). \quad \square$$

Ejemplo 2.2. La solución de la ecuación en diferencias

$$D_q y(x) + \alpha y(x) = \sin_q(x), \quad y(0) = 0,$$

de acuerdo con la expresión (2.2), es

$$y(x) = e_q^{-\alpha x} \int_0^x E_q^{\alpha q t} \sin_q(t) d_q t.$$

Para verificar que $y(x)$ es la solución buscada de la ecuación en diferencias, primero se verifica que se cumple la condición inicial, es decir, evaluando la función $y(x)$ en $x = 0$, se obtiene

$$y(0) = e_q^0 \int_0^0 E_q^{\alpha q t} \sin_q(t) d_q t.$$

Como $e_q^0 = 1$ y la integral de Jackson sobre un intervalo donde el límite superior e inferior coinciden es nula, se concluye que $y(0) = 0$. Después, si derivamos con respecto al operador

D_q , y utilizamos la propiedad de la derivada de funciones junto con algunas propiedades de la q -exponencial y la q -integral de Jackson, se tiene

$$\begin{aligned}
 D_q y(x) &= D_q \left(e_q^{-\alpha x} \int_0^x E_q^{\alpha q t} \sin_q(t) d_q t \right) \\
 &= e_q^{-\alpha q x} D_q \int_0^x E_q^{\alpha q t} \sin_q(t) d_q t + D_q e_q^{-\alpha x} \int_0^x E_q^{\alpha q t} \sin_q(t) d_q t \\
 &= e_q^{-\alpha q x} E_q^{\alpha q x} \sin_q(x) - \alpha e_q^{-\alpha x} \int_0^x E_q^{\alpha q t} \sin_q(t) d_q t \\
 &= \sin_q(x) - \alpha e_q^{-\alpha x} \int_0^x E_q^{\alpha q t} \sin_q(t) d_q t.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Por otro lado, notamos que

$$\alpha y(x) = \alpha e_q^{-\alpha x} \int_0^x E_q^{\alpha q t} \sin_q(t) d_q t. \tag{2.5}$$

Finalmente, por (2.4) y (2.5), se concluye

$$\begin{aligned}
 D_q y(x) + \alpha y(x) &= \sin_q(x) - \alpha e_q^{-\alpha x} \int_0^x E_q^{\alpha q t} \sin_q(t) d_q t + \alpha e_q^{-\alpha x} \int_0^x E_q^{\alpha q t} \sin_q(t) d_q t \\
 &= \sin_q(x).
 \end{aligned}$$

Para determinar la forma explícita de $y(x)$, intentamos calcular $\int_0^x E_q^{\alpha q t} \sin_q(t) d_q t$ al buscar una función $F(x)$ tal que $D_q F(x) = E_q^{\alpha q x} \sin_q(x)$. Podemos proceder de forma similar al cálculo tradicional empleando el método de coeficientes indeterminados. Suponemos que

$$F(x) = E_q^{\alpha x} (k_1 \cos_q(x) + k_2 \sin_q(x)),$$

donde k_1 y k_2 son constantes por determinar. De la Subsección 1.2.1 conocemos las reglas básicas del q -cálculo de Jackson:

$$D_q E_q^{\alpha x} = \alpha E_q^{\alpha q x}, \quad D_q \sin_q(x) = \cos_q(x), \quad D_q \cos_q(x) = -\sin_q(x),$$

junto con la regla del producto

$$D_q(f(x)g(x)) = f(qx)D_q g(x) + g(x)D_q f(x).$$

Si aplicamos estas reglas a la función $F(x)$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
 D_q F(x) &= k_1 D_q (E_q^{\alpha x} \cos_q(x)) + k_2 D_q (E_q^{\alpha x} \sin_q(x)) \\
 &= k_1 (-E_q^{\alpha q x} \sin_q(x) + \alpha E_q^{\alpha q x} \cos_q(x)) + k_2 (E_q^{\alpha q x} \cos_q(x) + \alpha E_q^{\alpha q x} \sin_q(x)) \\
 &= (-k_1 + \alpha k_2) E_q^{\alpha q x} \sin_q(x) + (\alpha k_1 + k_2) E_q^{\alpha q x} \cos_q(x).
 \end{aligned}$$

Se debe cumplir el sistema de ecuaciones $-k_1 + \alpha k_2 = 1$ y $\alpha k_1 + k_2 = 0$, cuya solución es $k_1 = -\frac{1}{1+\alpha^2}$ y $k_2 = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$. Por lo tanto, se tiene

$$F(x) = -\frac{1}{1+\alpha^2} E_q^{\alpha x} (\cos_q(x) - \alpha \sin_q(x)).$$

Por lo tanto, de acuerdo con los resultados de la Subsección 1.2.2, se tiene que

$$\begin{aligned}
 y(x) &= e_q^{-\alpha x} \int_0^x E_q^{\alpha q t} \sin_q(t) d_q t \\
 &= -\frac{1}{1+\alpha^2} e_q^{-\alpha x} \int_0^x D_q(E_q^{\alpha t} (\cos_q(t) - \alpha \sin_q(t))) d_q t \\
 &= -\frac{1}{1+\alpha^2} e_q^{-\alpha x} \left(E_q^{\alpha x} (\cos_q(x) - \alpha \sin_q(x)) - E_q^{\alpha 0} (\cos_q(0) - \alpha \sin_q(0)) \right) \\
 &= -\frac{1}{1+\alpha^2} e_q^{-\alpha x} \left(E_q^{\alpha x} (\cos_q(x) - \alpha \sin_q(x)) - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{1+\alpha^2} \left(e_q^{-\alpha x} - \cos_q(x) + \alpha \sin_q(x) \right).
 \end{aligned}$$

En la Figura 2.1 se muestra la gráfica de esta función para distintos valores de q .

Se observa finalmente que si se define

$$z(x) = \lim_{q \rightarrow 1^-} y(x) = \frac{1}{1+\alpha^2} (e^{-\alpha x} - \cos(x) + \alpha \sin(x)),$$

entonces la función $z(x)$ es solución de la ecuación diferencial clásica

$$\frac{dz}{dx}(x) + \alpha z(x) = \sin(x), \quad z(0) = 0.$$

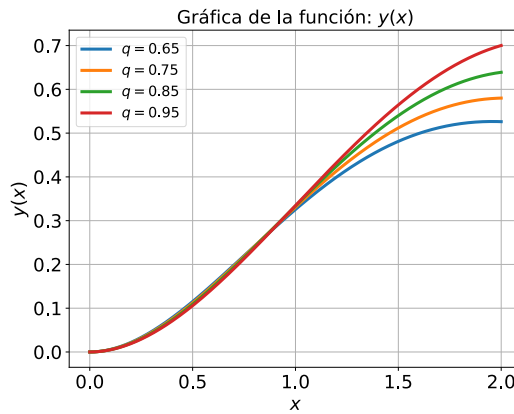


Figura 2.1. Gráfica de la solución $y(x)$ del Ejemplo 2.2 en el intervalo $[0, 2]$ con diferentes valores para q .

Consideremos ahora el problema general de hallar una solución de la ecuación en diferencias (2.1). Observamos que de la definición del operador q -derivada de Jackson se sigue que la ecuación en diferencias (2.1) tiene la forma

$$\frac{y(x) - y(qx)}{(1-q)x} + p(x)y(x) = r(x), \quad y(0) = y_0,$$

donde las funciones $p: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $r: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se suponen continuas en $x = 0$.

Si la función $p(x)$ es tal que $1 + (1 - q)q^k x p(q^k x) \neq 0$ para todo $q^k x \in [0, b]$ y todo $k \in \mathbb{N}$, entonces podemos escribir (2.1) en la siguiente forma equivalente

$$y(x) = \frac{(1 - q)xr(x) + y(qx)}{1 + (1 - q)xp(x)}.$$

Luego, si definimos las funciones $A, B: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$A(x) = (1 - q)xr(x), \quad B(x) = 1 + (1 - q)xp(x),$$

entonces la ecuación en diferencias de (2.1) se puede escribir en la siguiente forma recurrente más simple

$$y(x) = \frac{A(x) + y(qx)}{B(x)}. \quad (2.6)$$

Se observa que las funciones A y B satisfacen: $A(0) = 0$ y que $B(0) = 1$. Adicionalmente, de la ecuación en diferencias (2.6) se observa que para todo $x \in [0, b]$ se cumple

$$y(q^k x) = \frac{A(q^k x) + y(q^{k+1} x)}{B(q^k x)}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.7)$$

Por lo tanto, si iteramos n veces la ecuación (2.6) empleando la identidad (2.7), obtenemos la siguiente cadena de igualdades validas para todo $x \in [0, b]$:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{A(x) + y(qx)}{B(x)} \\ &= \frac{A(x) + \frac{A(qx) + y(q^2 x)}{B(qx)}}{B(x)} \\ &= \frac{A(x) + \frac{A(qx) + \frac{A(q^2 x) + y(q^3 x)}{B(q^2 x)}}{B(qx)}}{B(x)} \\ &\vdots \\ &= \frac{A(x) + \frac{A(qx) + \frac{A(q^2 x) + \cdots + \frac{A(q^n x) + y(q^{n+1} x)}{B(q^n x)}}{B(q^2 x)}}{B(qx)}}{B(x)}. \end{aligned}$$

De acuerdo con la forma de la expresión anterior para $y(x)$, es necesario demostrar si la fracción iterada converge cuando $n \rightarrow \infty$. Para conseguir esto, basta con demostrar que existe una sucesión de funciones $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con la propiedad de que exista $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$ para todo $x \in [0, b]$, es decir, se busca que la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sea uniformemente convergente sobre el intervalo $[0, b]$. Si lo anterior es posible, entonces se puede definir la solución como $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$ para todo $x \in [0, b]$. Adicionalmente, es necesario buscar las condiciones con las cuáles se satisface la condición inicial $y(0) = y_0$.

Observamos primero que, la validez de la ecuación (2.7) para todo $x \in (0, b]$ y todo $k \in \mathbb{N}$, implican que la función y es continua en $x_0 = 0$.

Lema 2.3. Sea $y: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in (0, b]$ se cumple: $\lim_{k \rightarrow \infty} y(q^k x) = y_0$, entonces y es continua en $x_0 = 0$.

Demostración. Queremos mostrar que si $\lim_{k \rightarrow \infty} y(q^k x) = y_0$ para todo $x \in (0, b]$, entonces y es continua en $x_0 = 0$, es decir, que para toda sucesión $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset (0, b]$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0$, se debe cumplir $\lim_{k \rightarrow \infty} y(t_k) = y_0$. Notemos primero que $(0, b] = \bigcup_{n=0}^{\infty} (q^{n+1}b, q^n b]$. Sea pues $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset (0, b]$ arbitraria tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $t_k \in (q^{n_k+1}b, q^{n_k}b]$, es decir, podemos escribir $t_k = q^{n_k}x_k$ para algún $x_k \in (qb, b] \subset (0, b]$. Se observa que $n_k \rightarrow \infty$ siempre que $k \rightarrow \infty$. Luego, como $\lim_{k \rightarrow \infty} y(q^k x) = y_0$ para todo $x \in (0, b]$, se sigue que $\lim_{k \rightarrow \infty} y(t_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} y(q^{n_k}x_k) = y_0$, de acuerdo con la hipótesis. Esto muestra que y es continua en $x_0 = 0$. Se sigue de esto que se cumple $y(0) = y_0$. $\square$

Los siguientes resultados serán de utilidad también en lo que sigue.

Lema 2.4. Sea $p: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $x_0 = 0$ y sea $B: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $B(x) = 1 + (1 - q)xp(x)$. El producto

$$\prod_{k=0}^{\infty} B(q^k x)$$

converge para todo $x \in [0, b]$ si, y sólo si, p es q -integrable en $[0, b]$.

Demostración. Notemos que para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $x \in [0, b]$ se tiene

$$B(q^k x) = 1 + (1 - q)q^k x p(q^k x).$$

Definimos para cada $x \in [0, b]$:

$$a_k(x) = (1 - q)q^k x p(q^k x),$$

así

$$\prod_{k=0}^{\infty} B(q^k x) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + a_k(x)).$$

Se observa que si p es continua en $x = 0$, entonces de acuerdo con el Lema 1.7, se tiene que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} |p(q^k x)|q^k x,$$

converge uniformemente en el intervalo $[0, b]$, y si se multiplica por $(1 - q)$, entonces la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(x)| = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - q)|p(q^k x)|q^k x$$

converge uniformemente en el intervalo $[0, b]$. De acuerdo a un resultado presentado en el Teorema A.1, ver también Knopp (2019), la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ converge absolutamente para todo $x \in [0, b]$, si y solo si $\prod_{k=0}^{\infty} B(q^k x) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + a_k(x))$ converge para todo $x \in [0, b]$. $\square$

Lema 2.5. Sea $s: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $x_0 = 0$ que satisface la condición $s(0) = 0$. Entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} s(q^k x) = 0$ para todo $x \in [0, b]$.

Demostración. Observamos que para $x = 0$ la conclusión del resultado es cierta. Sea $x \in (0, b]$ arbitrario y sea $\epsilon > 0$. Es claro que $q^k x \in (0, q^k b]$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Como s es continua en $x_0 = 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < t < \delta$, entonces $|s(t)| < \frac{1}{2}\epsilon$. Por otra parte, como $\lim_{k \rightarrow \infty} q^k b = 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$, entonces $q^k b < \delta$. Por lo tanto, si $k \geq N$, entonces $|s(q^k b)| < \frac{1}{2}\epsilon$. Luego, para $k \geq N$, se sigue que $0 < q^k x \leq q^k b < \delta$ para todo $x \in [0, b]$, lo cual implica que $|s(q^k x)| < \frac{1}{2}\epsilon$ para todo $x \in (0, b]$. Lo anterior muestra que, si $k \geq N$, entonces $\sup_{x \in [0, b]} |s(q^k x)| \leq \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon$. Esto muestra que $\lim_{k \rightarrow \infty} s(q^k x) = 0$ para todo $x \in [0, b]$. $\square$

Corolario 2.6. Sea $u: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $x_0 = 0$ que satisface la condición $u(0) = y_0$. Entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} (u(q^k x) - u(q^{k+1} x)) = 0$ para todo $x \in [0, b]$.

Demostración. Si definimos $s(q^k x) = u(q^k x) - u(q^{k+1} x)$ para todo $x \in (0, b]$, entonces es claro que s es una función continua en $x_0 = 0$ que cumple $s(0) = 0$. De acuerdo con el Lema 2.3 se concluye que $\lim_{k \rightarrow \infty} s(q^k x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (u(q^k x) - u(q^{k+1} x)) = 0$ para todo $x \in [0, b]$. $\square$

Se define ahora la siguiente sucesión de funciones:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{A(x) + y(qx)}{B(x)}, \\ y_2(x) &= \frac{A(x) + \frac{A(qx) + y(q^2x)}{B(qx)}}{B(x)}, \\ y_3(x) &= \frac{A(x) + \frac{A(qx) + \frac{A(q^2x) + y(q^3x)}{B(q^2x)}}{B(qx)}}{B(x)}, \\ &\vdots \\ y_n(x) &= \frac{A(x) + \frac{A(qx) + \frac{A(q^2x) + \cdots + \frac{A(q^n x) + y(q^{n+1}x)}{B(q^n x)}}{B(q^2x)}}{B(qx)}}{B(x)}. \end{aligned}$$

Se observa que la sucesión de funciones definida cumple $y_n(0) = y(0) = y_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se busca ahora la posibilidad de hacer $|y_n(x) - y_m(x)|$ arbitrariamente pequeño para todo $x \in [0, b]$ con algún $n \in \mathbb{N}$ y $m = n + k$ con $k \in \mathbb{N}$ arbitrario, es decir, se busca mostrar que la sucesión de funciones $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sea una sucesión de Cauchy. Debido a que no conocemos la función límite de la fracción iterada, buscamos probar convergencia uniforme mediante el criterio de Cauchy. Es conocido que en un espacio normado completo, toda sucesión de Cauchy converge a un elemento del espacio, ver Bartle y Sherbert (2011). En particular, el espacio $C[a, b]$ con la norma $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ es un espacio completo. Debido a esta propiedad, basta con demostrar que $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $C[a, b]$ con la norma previamente definida.

Sea pues $\epsilon > 0$ arbitrario. Se observa que para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario se tiene

$$\begin{aligned}
 |y_n(x) - y_m(x)| &\leq |y_n(x) - y_{n+1}(x)| + |y_{n+1}(x) - y_{n+2}(x)| + \cdots + |y_{m-1}(x) - y_m(x)| \\
 &= \frac{|y(q^n x)B(q^n x) - A(q^n x) - y(q^{n+1}x)|}{|B(x) \cdots B(q^n x)|} \\
 &\quad + \cdots + \frac{|y(q^{m-1}x)B(q^{m-1}x) - A(q^{m-1}x) - y(q^m x)|}{|B(x) \cdots B(q^{m-1}x)|} \\
 &= \left| \frac{y(q^n x)}{B(x) \cdots B(q^{n-1}x)} - \frac{y(q^{n+1}x)}{B(x) \cdots B(q^n x)} - \frac{A(q^n x)}{B(x) \cdots B(q^n x)} \right| \\
 &\quad + \cdots + \left| \frac{y(q^{m-1}x)}{B(x) \cdots B(q^{m-2}x)} - \frac{y(q^m x)}{B(x) \cdots B(q^{m-1}x)} - \frac{A(q^{m-1}x)}{B(x) \cdots B(q^{m-1}x)} \right|.
 \end{aligned}$$

Sea

$$M_{mn} = \min \left\{ \inf_{x \in [0, b]} \prod_{j=0}^{n-1} |B(q^j x)|, \inf_{x \in [0, b]} \prod_{j=0}^n |B(q^j x)|, \inf_{x \in [0, b]} \prod_{j=0}^{m-1} |B(q^j x)| \right\}.$$

Notemos que $M_{mn} > 0$ debido al supuesto que $p(x)$ es tal que $1 + (1 - q)q^k x p(q^k x) \neq 0$ para todo $q^k x \in [0, b]$. Así

$$\begin{aligned}
 |y_n(x) - y_m(x)| &\leq \frac{|y(q^n x) - y(q^{n+1}x)| + |y(q^{n+1}x) - y(q^{n+2}x)| + \cdots + |y(q^{m-1}x) - y(q^m x)|}{M_{mn}} \\
 &\quad + \frac{|A(q^n x)| + \cdots + |A(q^{m-1}x)|}{M_{mn}}.
 \end{aligned}$$

Buscamos hallar una cota para las expresiones en el lado derecho de esta desigualdad. Se observa del Lema 2.3 que y es continua en $x_0 = 0$, ya que $\lim_{k \rightarrow \infty} y(q^k x) = y_0$ para todo $x \in (0, b]$, y por el Corolario 2.6 existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_1$ se cumplen las siguientes desigualdades para la función y :

$$\begin{aligned}
 \sup_{x \in [0, b]} |y(q^n x) - y(q^{n+1}x)| &\leq \frac{M_{mn}\epsilon}{2^{n+2}}, \\
 \sup_{x \in [0, b]} |y(q^{n+1}x) - y(q^{n+2}x)| &\leq \frac{M_{mn}\epsilon}{2^{n+3}}, \\
 &\vdots \\
 \sup_{x \in [0, b]} |y(q^{m-1}x) - y(q^m x)| &\leq \frac{M_{mn}\epsilon}{2^{m+2}},
 \end{aligned}$$

obteniendo así que si $n \geq N_1$, entonces

$$\begin{aligned}
 &\frac{|y(q^n x) - y(q^{n+1}x)| + |y(q^{n+1}x) - y(q^{n+2}x)| + \cdots + |y(q^{m-1}x) - y(q^m x)|}{M_{mn}} \\
 &\leq \frac{M_{mn}\epsilon}{M_{mn}2^{n+2}} + \frac{M_{mn}\epsilon}{M_{mn}2^{n+3}} + \cdots + \frac{M_{mn}\epsilon}{M_{mn}2^{m+2}} < \frac{\epsilon}{4}.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, como A es continua en $x = 0$ y además $\lim_{n \rightarrow \infty} A(q^n x) = A(0) = 0$ para todo $x \in [0, b]$, se observa por el Lema 2.5 que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$, entonces se cumple las siguientes desigualdades para la función A :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, b]} |A(q^n x)| &\leq \frac{M_{mn} \epsilon}{2^{n+2}}, \\ \sup_{x \in [0, b]} |A(q^{n+1} x)| &\leq \frac{M_{mn} \epsilon}{2^{n+3}}, \\ &\vdots \\ \sup_{x \in [0, b]} |A(q^{m-1} x)| &\leq \frac{M_{mn} \epsilon}{2^{m+2}}, \end{aligned}$$

así, para $n \geq N_1$, se sigue que

$$\frac{|A(q^n x)| + \cdots + |A(q^{m-1} x)|}{M_{mn}} \leq \frac{M_{mn} \epsilon}{M_{mn} 2^{n+2}} + \frac{M_{mn} \epsilon}{M_{mn} 2^{n+3}} + \cdots + \frac{M_{mn} \epsilon}{M_{mn} 2^{m+2}} < \frac{\epsilon}{4}.$$

Finalmente sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Entonces para todo $n \geq N$ se cumple

$$\sup_{x \in [0, b]} |y_n(x) - y_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

demostrando así que la sucesión de funciones $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Por lo tanto, concluimos que

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(x) + \frac{A(qx) + \cdots + \frac{A(q^n x) + y(q^{n+1} x)}{B(q^n x)}}{B(q^2 x)}}{B(qx)},$$

donde se cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} A(q^n x) = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} B(q^n x) = 1$. Esto muestra el siguiente resultado:

Teorema 2.7. *Suponga que $p: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es q -integrable en el sentido de Jackson, entonces la función*

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(x) + \frac{A(qx) + \cdots + \frac{A(q^n x) + y(q^{n+1} x)}{B(q^n x)}}{B(q^2 x)}}{B(qx)},$$

donde $A(x) = (1 - q)xr(x)$ y $B(x) = 1 + (1 - q)xp(x)$ son funciones continuas en $[0, b]$, es solución de la ecuación en diferencias lineal de primer orden con condición inicial:

$$D_q y(x) + p(x)y(x) = r(x), \quad y(0) = y_0.$$

Ejemplo 2.8. Si consideramos una vez más la ecuación en diferencias del Ejemplo 2.2:

$$D_q y(x) + \alpha y(x) = \sin_q(x), \quad y(0) = 0,$$

y determinamos la sucesión de funciones $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que se obtuvieron en la demostración del Teorema 2.7 que convergen a la solución y , entonces obtenemos el gráfico que se muestra en la Figura 2.2

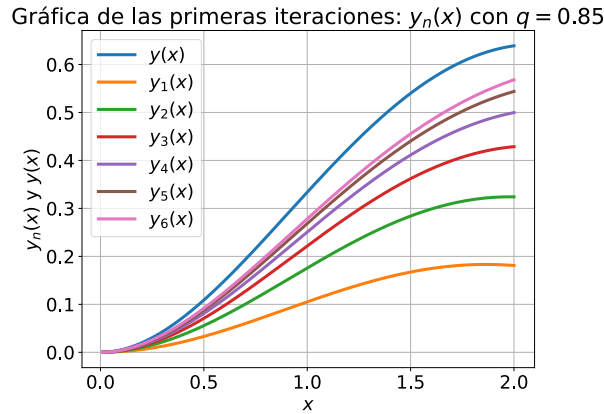


Figura 2.2. Gráfica de la solución $y(x)$ del Ejemplo 2.8 en el intervalo $[0, 2]$ con diferentes valores para q .

2.2. Solución de ecuaciones en diferencias con q^{-1} -derivada de Jackson

En esta sección se busca resolver la siguiente ecuación en diferencias lineal de primer orden asociada a la q^{-1} -derivada de Jackson

$$\tilde{D}_q y(x) + p(x)y(x) = r(x). \quad (2.8)$$

De manera similar al caso de la q -derivada de Jackson, el método del factor integrante no puede aplicarse directamente a ecuaciones en diferencias asociadas a la q^{-1} -derivada de Jackson, debido a que este operador no satisface la derivada de una composición de funciones general, únicamente para funciones de la forma (1.13).

Anteriormente se analizó la ecuación en diferencias asociada a la q -derivada de Jackson, mostrando que si $p(x) = \alpha$, con α una constante, entonces tal ecuación en diferencias admite una solución explícita en términos de las funciones exponenciales e_q y E_q . Ahora al considerar la ecuación en diferencias (2.8), y suponiendo lo anterior sobre la función p , podemos observar que sí es posible obtener un resultado análogo.

Teorema 2.9. *La función*

$$y(x) = E_q^{-\alpha x} \left(y_0 + \int_0^{qx} e_q^{q^{-1}\alpha t} r(t) d_q t \right), \quad x \in [0, b], \quad (2.9)$$

es solución de la ecuación en diferencias

$$\tilde{D}_q y(x) + q^{-1} \alpha y(x) = r(x), \quad y(0) = y_0. \quad (2.10)$$

Demostración. Notemos que

$$\tilde{D}_q e_q^{\alpha x} = q^{-1} \alpha e_q^{q^{-1} \alpha x}.$$

Siguiendo la técnica de factor integrante, se tiene que si $\mu(x) = e_q^{q^{-1} \alpha x}$, entonces

$$\begin{aligned} e_q^{q^{-1} \alpha x} r(x) &= e_q^{q^{-1} \alpha x} \tilde{D}_q y(x) + e_q^{q^{-1} \alpha x} q^{-1} \alpha y(x) \\ &= e_q^{q^{-1} \alpha x} \tilde{D}_q y(x) + \tilde{D}_q e_q^{\alpha x} y(x) \\ &= \tilde{D}_q (e_q^{\alpha x} y(x)). \end{aligned}$$

Si se integra en ambos lados de la igualdad, se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^{qx} e_q^{q^{-1} \alpha t} r(x) \, d_q t &= \int_0^{qx} \tilde{D}_q (e_q^{\alpha t} y(t)) \, d_q t \\ &= e_q^{\alpha x} y(x) - y(0), \end{aligned}$$

de lo cual se obtiene

$$e_q^{\alpha x} y(x) = y(0) + \int_0^{qx} e_q^{\alpha q^{-1} t} r(x) \, d_q t,$$

por lo tanto

$$y(x) = E_q^{-\alpha x} \left(y_0 + \int_0^{qx} e_q^{\alpha q^{-1} t} r(x) \, d_q t \right). \quad \square$$

Ejemplo 2.10. Como ejemplo del Teorema 2.9, se observa que la solución de la siguiente ecuación en diferencias

$$\tilde{D}_q y(x) + \alpha q^{-1} y(x) = E_q^{-\alpha q^{-1} x} \sin_q(x), \quad y(0) = 0,$$

de acuerdo con la expresión (2.9), es

$$\begin{aligned} y(x) &= E_q^{-\alpha x} \int_0^{qx} e_q^{\alpha q^{-1} t} E_q^{-\alpha q^{-1} t} \sin_q(t) \, d_q t \\ &= E_q^{-\alpha x} \int_0^{qx} \sin_q(t) \, d_q t \\ &= E_q^{-\alpha x} (1 - \cos_q(qx)), \end{aligned}$$

de acuerdo con el Teorema 1.8, es decir

$$y(x) = E_q^{-\alpha x} (1 - \cos_q(qx)).$$

Se verifica que $y(x)$ cumple la condición inicial $y(0) = 0$, ya que $\cos_q(0) = 1$. Luego, si derivamos con respecto al operador $\tilde{D}_q$ y utilizamos la propiedad de la derivada de funciones junto con algunas propiedades de la q -exponencial y la q^{-1} -integral de Jackson, se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{D}_q y(x) &= \tilde{D}_q \left(E_q^{-\alpha x} (1 - \cos_q(qx)) \right) \\ &= E_q^{-\alpha q^{-1} x} \tilde{D}_q (1 - \cos_q(qx)) + (1 - \cos_q(qx)) \tilde{D}_q E_q^{-\alpha x} \\ &= E_q^{-\alpha q^{-1} x} D_q (1 - \cos_q(x)) - \alpha q^{-1} E_q^{-\alpha x} (1 - \cos_q(qx)) \\ &= E_q^{-\alpha q^{-1} x} \sin_q(x) - \alpha q^{-1} E_q^{-\alpha x} (1 - \cos_q(qx)). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Por otro lado, notamos que

$$\alpha q^{-1}y(x) = \alpha q^{-1}E_q^{-\alpha x}(1 - \cos_q(qx)). \quad (2.12)$$

Finalmente por (2.11) y (2.12), se concluye

$$D_q y(x) + \alpha q^{-1}y(x) = E_q^{-\alpha q^{-1}x} \sin_q(q^{-1}x),$$

como se deseaba mostrar. En la Figura 2.3 se muestran los gráficos de la solución $y(x)$ con diferentes valores de q .

Por otra parte, se observa que la función

$$z(x) = \lim_{q \rightarrow 1^-} y(x) = e^{-\alpha x}(1 - \cos(x))$$

es solución del problema de valores iniciales

$$\frac{dz}{dx}(x) + \alpha z(x) = e^{-\alpha x} \sin(x), \quad z(0) = 0.$$

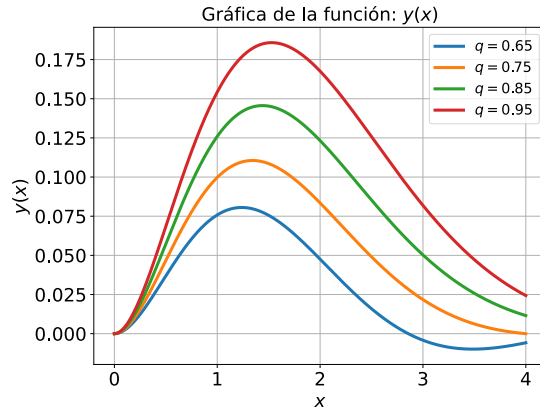


Figura 2.3. Gráfica de la solución $y(x)$ del Ejemplo 2.10 en el intervalo $[0, 4]$ con diferentes valores para q .

Una vez obtenida la solución explícita del caso particular en que la función p es una constante, ahora se busca hallar la solución general de la ecuación en diferencias con q^{-1} -derivada de Jackson (2.8), donde p es una función general. De acuerdo a la Proposición 1.12, la ecuación en diferencias (2.8) se ve como

$$D_q y(q^{-1}x) + p(x)y(x) = r(x), \quad y(0) = y_0. \quad (2.13)$$

Haciendo el siguiente cambio de variable $u(x) = y(q^{-1}x)$, de modo que $u(qx) = y(x)$, y usando la definición de la q -derivada de Jackson,

$$D_q u(x) = \frac{u(x) - u(qx)}{(1 - q)x}$$

se tiene que (2.13) se puede expresar como

$$\frac{u(x) - u(qx)}{(1-q)x} + p(x)u(qx) = r(x),$$

de donde

$$u(x) = (1-q)xr(x) + (1 - (1-q)xp(x))u(qx), \quad u(0) = y_0.$$

Por lo tanto, si se definen las funciones $\tilde{A}, \tilde{B}: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\tilde{A}(x) = (1-q)xr(x), \quad \tilde{B}(x) = 1 - (1-q)xp(x),$$

se obtiene así

$$u(x) = \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x)u(qx). \quad (2.14)$$

Si elegimos $x \in (0, b]$ e iteramos dicha función, se observa que

$$u(q^k x) = \tilde{A}(q^k x) + \tilde{B}(q^k x)u(q^{k+1} x).$$

Suponemos ahora que $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ son funciones continuas en $x_0 = 0$ y que $\tilde{B}(x) \neq 0$ para todo $x \in [0, b]$. De la ecuación (2.13) se sigue que

$$\begin{aligned} u(x) &= \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x)u(qx) \\ &= \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x)(\tilde{A}(qx) + \tilde{B}(qx)u(q^2 x)) \\ &\dots \\ &= \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x)(\tilde{A}(qx) + \tilde{B}(qx)(\tilde{A}(q^2 x) \\ &\quad + \dots + \tilde{B}(q^{n-1} x)(\tilde{A}(q^n x) + \tilde{B}(q^n x)u(q^{n+1} x))))). \end{aligned}$$

Veamos si el proceso iterativo en la expresión anterior para $u(x)$ converge. Para ello se define la siguiente sucesión de funciones:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x)u(qx) \\ u_2(x) &= \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x)(\tilde{A}(qx) + \tilde{B}(qx)u(q^2 x)) \\ &\dots \\ u_n(x) &= \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x)(\tilde{A}(qx) + \tilde{B}(qx)(\tilde{A}(q^2 x) \\ &\quad + \dots + \tilde{B}(q^{n-1} x)(\tilde{A}(q^n x) + \tilde{B}(q^n x)u(q^{n+1} x))))). \end{aligned}$$

Podemos observar que si se desarrolla la expresión anterior, entonces la función $u_n(x)$ tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \tilde{A}(x) + \tilde{A}(qx)\tilde{B}(x) + \tilde{A}(q^2 x)\tilde{B}(x)\tilde{B}(qx) \\ &\quad + \dots + \tilde{A}(q^n x) \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{B}(q^j x) + \prod_{j=1}^n \tilde{B}(q^j x)u(q^{n+1} x). \end{aligned}$$

Para mostrar que la sucesión de funciones anterior es convergente, observemos el siguiente corolario que es consecuencia directa del Lema 2.4.

Corolario 2.11. Sea $p: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $x_0 = 0$ y sea $\tilde{B}: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\tilde{B}(x) = 1 - (1 - q)xp(x)$. El producto

$$\prod_{k=0}^{\infty} \tilde{B}(q^k x)$$

converge para todo $x \in [0, b]$ si, y sólo si, p es q -integrable en $[0, b]$.

Demostración. Notemos que para todo $k \in \mathbb{N}_0$ se tiene

$$\tilde{B}(q^k x) = 1 - (1 - q)q^k xp(q^k x),$$

y se define para $x \in [0, b]$ fijo:

$$b_k(x) = -(1 - q)q^k xp(q^k x).$$

Así

$$\prod_{k=0}^{\infty} \tilde{B}(q^k x) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + b_k(x)).$$

De acuerdo a la demostración del Lema 2.4, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)$ converge absolutamente en el intervalo $[0, b]$, si y solo si $\prod_{k=0}^{\infty} \tilde{B}(q^k x) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + b_k(x))$ converge para todo $x \in [0, b]$. $\square$

Podemos mostrar ahora que la sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Sea $\epsilon > 0$ dado y sea $x \in (0, b]$ arbitrario. Observamos que

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(x) - u_n(x)| &= \left| \tilde{A}(q^n x) \prod_{j=0}^{n-1} \tilde{B}(q^j x) + u(q^{n+1} x) \prod_{j=0}^n \tilde{B}(q^j x) - u(q^n x) \prod_{j=0}^{n-1} \tilde{B}(q^j x) \right| \\ &\leq M(|\tilde{A}(q^n x)| + |u(q^{n+1} x) - u(q^n x)|), \end{aligned}$$

donde

$$M = \max \left\{ \sup_{x \in [0, b]} \prod_{j=0}^{n-1} |\tilde{B}(q^j x)|, \sup_{x \in [0, b]} \prod_{j=0}^n |\tilde{B}(q^j x)| \right\}.$$

Por otro lado, como $\tilde{A}$ es continua en $x_0 = 0$ y como $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}(q^n x) = \tilde{A}(0) = 0$ para todo $x \in (0, b]$, se observa por el Lema 2.5 que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$, entonces

$$\sup_{x \in [0, b]} |\tilde{A}(q^n x)| \leq \frac{\epsilon}{4M}.$$

De la misma manera, de acuerdo con el Corolario 2.6, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$, entonces

$$\sup_{x \in [0, b]} |u(q^k x) - u(q^{k+1} x)| \leq \frac{\epsilon}{4M}.$$

Por lo tanto, si $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$, se sigue que

$$\sup_{x \in [0, b]} |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq M \left(\frac{\epsilon}{4M} + \frac{\epsilon}{4M} \right) = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Lo cual muestra que existe una función $u: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua definida por

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x), \quad x \in [0, b],$$

tal que la sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy uniformemente convergente a u en el intervalo $[0, b]$. Finalmente, para obtener una expresión explícita de y , se regresa al cambio de variable inicial $y(x) = u(qx)$, así la función y se ve de la siguiente forma

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(qx), \quad x \in [0, b].$$

Una aproximación para dicha función es

$$\begin{aligned} y(x) &= u(qx) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\tilde{A}(qx) + \tilde{B}(qx)(\tilde{A}(q^2x) + \tilde{B}(q^2x)(\tilde{A}(q^3x) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \tilde{B}(q^n x)(\tilde{A}(q^{n+1}x) + \tilde{B}(q^{n+1}x)y(q^{n+1}x)))) \right). \end{aligned}$$

Teorema 2.12. *Suponga que $p: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es q -integrable en el sentido de Jackson, entonces la función*

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\tilde{A}(qx) + \tilde{B}(qx)(\tilde{A}(q^2x) + \tilde{B}(q^2x)(\tilde{A}(q^3x) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \tilde{B}(q^n x)(\tilde{A}(q^{n+1}x) + \tilde{B}(q^{n+1}x)y(q^{n+1}x)))) \right). \end{aligned}$$

donde $\tilde{A}(x) = (1 - q)xr(x)$ y $\tilde{B}(x) = 1 - (1 - q)xp(x)$ son funciones continuas en $[0, b]$, es solución de la ecuación en diferencias lineal de primer orden con condición inicial:

$$\tilde{D}_q y(x) + p(x)y(x) = r(x), \quad y(0) = y_0.$$

2.3. Soluciones pares e impares de ecuaciones en diferencias con operador de Rubin

El introducir el operador de Rubin nos permite considerar la siguiente ecuación en diferencias de primer orden asociada a la derivada de Rubin

$$\partial_q y(x) + p(x)y(x) = r(x). \tag{2.15}$$

Al igual que con los anteriores operadores, si se busca resolver la ecuación en diferencias de primer orden mediante el método de factor integrante, se considera como primer caso encontrar una solución teniendo en cuenta que la función p es constante, es decir, $p(x) = \alpha$. Así, la ecuación diferencial se ve como

$$\partial_q y(x) + \alpha y(x) = r(x).$$

Antes de resolver la ecuación diferencial podemos tomar en cuenta como un primer paso la paridad de la función y , eso debido a que si la función y es impar, se considera la q -derivada de Jackson, mientras que si la función y es par, se considera la q^{-1} -derivada de Jackson.

Supongamos que y es una función impar, entonces la ecuación (2.15) es equivalente a la ecuación (2.1), que de acuerdo al Teorema 2.1 cuando $p(x) = \alpha$, la ecuación tiene como solución la función

$$y(x) = e_q^{-\alpha x} \left(y_0 + \int_0^x r(t) E_q^{\alpha q t} d_q t \right), \quad t \in [0, b].$$

Análogamente si suponemos que la función y es par, entonces la ecuación (2.15) es equivalente a la ecuación (2.8), que por el Teorema 2.9 cuando $p(x) = \alpha$, la función

$$y(x) = E_q^{-\alpha x} \left(y_0 + \int_0^{q^x} r(t) e_q^{q^{-1} \alpha t} d_q t \right), \quad x \in [0, b],$$

es solución de la ecuación. Sin embargo, regresando al problema original de resolver la ecuación en diferencias de primer orden (2.15), se considera p una función general, y nuevamente como en el caso anterior se analiza la paridad de la función y , esto debido a que si se busca usar como en los caso anteriores un método de factor integrante, nos enfrentamos al problema de la derivada de Rubin del producto de funciones que no satisface una regla simple como es en el caso del cálculo clásico, además de que este operador sólo satisface la derivada de una composición de funciones de la forma (1.14). De esta manera se supone primero que y es una función impar, así la ecuación en diferencias (2.15) se ve de la forma (2.1), que de acuerdo con el Teorema 2.7 tiene como solución la función

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(x) + \frac{A(qx) + \frac{A(q^2x) + \dots + \frac{A(q^n x) + y(q^{n+1}x)}{B(q^n x)}}{B(q^2x)}}{B(qx)}}{B(x)},$$

donde $A(x) = (1 - q)xr(x)$ y $B(x) = 1 + (1 - q)xp(x)$ son funciones continuas en $[0, b]$. Por otro lado, si y es una función par, la ecuación en diferencias (2.15) tiene la forma (2.8), que de acuerdo con el Teorema 2.12 tiene como solución la función

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\tilde{A}(qx) + \tilde{B}(qx) \left(\tilde{A}(q^2x) + \tilde{B}(q^2x) \left(\tilde{A}(q^3x) + \dots + \tilde{B}(q^n x) \left(\tilde{A}(q^{n+1}x) + \tilde{B}(q^{n+1}x) y(q^{n+1}x) \right) \right) \right) \right).$$

donde $\tilde{A}(x) = (1 - q)xr(x)$ y $\tilde{B}(x) = 1 - (1 - q)xp(x)$ son funciones continuas en $[0, b]$. Es importante tomar en cuenta que para estos casos la función p tiene que ser q -integrable en el sentido de Jackson.

El siguiente ejemplo permite analizar el uso del operador de Rubin en la resolución de ecuaciones en diferencias de primer orden, destacando su comportamiento respecto a funciones pares. En particular, se muestra cómo la estructura del operador permite aprovechar la simetría de este tipo de funciones para simplificar el análisis y obtener una descripción más clara de las soluciones.

Ejemplo 2.13. Consideramos la ecuación en diferencias

$$\partial_q y(x) - \lambda y(x) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad (2.16)$$

donde λ es una constante arbitraria. Si suponemos que $y(x)$ es una función par, es decir, si

$$y(x) = \begin{cases} y_p(x), & x > 0, \\ y_p(-x), & x < 0, \end{cases}$$

entonces la ecuación en diferencias con condición inicial (2.16) tiene la forma

$$\tilde{D}_q y_p(x) - \lambda y_p(x) = 0, \quad y_p(0) = y_0.$$

De acuerdo al Teorema 2.9, y considerando $-\lambda = q^{-1}\alpha$, es decir, $\alpha = -q\lambda$, se obtiene como solución

$$y_p(x) = y_0 E_q^{q\lambda x}.$$

Por otra parte, si suponemos que $y(x)$ no es función par ni impar, entonces de la Proposición 1.19 se obtiene que la solución se expresa como

$$y(x) = y_0 e(\lambda x; q^2).$$

Conclusión

El resultado principal de este trabajo se obtuvo al analizar la ecuación en diferencias de primer orden con operador de Rubin. Debido a su estructura simétrica y a sus propiedades relacionadas con la paridad, fue necesario considerar previamente los operadores q -derivada de Jackson y q^{-1} -derivada de Jackson, lo cual permitió desarrollar las herramientas necesarias para la construcción de soluciones explícitas. Se mostró que las ecuaciones asociadas a la q -derivada de Jackson pueden reformularse como relaciones funcionales entre $y(x)$ y $y(qx)$, lo cual hace posible aplicar un método iterativo para la construcción de soluciones. Este procedimiento condujo a expresiones representables mediante fracciones continuas, cuya convergencia puede justificarse utilizando herramientas de cálculo, tales como series de potencias y productos infinitos. De forma similar, el caso correspondiente a la q^{-1} -derivada de Jackson se abordó mediante la adaptación del método iterativo previamente desarrollado, lo que permitió comparar y comprender la estructura entre ambos enfoques.

Se estableció que el operador de Rubin constituye una herramienta adecuada para el estudio de ecuaciones en diferencias dentro del q -cálculo, no solo por permitir la construcción explícita de soluciones, sino también por proporcionar un marco natural para el análisis de sus propiedades de simetría. De este modo, el trabajo aporta una comprensión más profunda de la estructura interna de estas ecuaciones en diferencias y establece una base sólida para investigaciones posteriores, como el estudio de ecuaciones de orden superior o el análisis de otros operadores dentro del q -cálculo. Este trabajo no solo aporta herramientas para resolver ecuaciones en diferencias, sino que también resalta el papel fundamental de la paridad de funciones como una herramienta clave en matemáticas, mostrando cómo su incorporación puede conducir a una comprensión más profunda del comportamiento de las soluciones.

Una posible línea de trabajo que se puede realizar a futuro consiste en aplicar esta teoría para obtener q -polinomios ortogonales. En particular, diversas familias de q -polinomios ortogonales clásicos pueden caracterizarse como soluciones de ecuaciones en diferencias de tipo Sturm–Liouville, las cuales involucran operadores de segundo orden. Por ello, el operador de Rubin, al incorporar de manera simétrica la q -derivadas de Jackson y la q^{-1} -derivada de Jackson, sugiere una posible formulación alternativa de operadores tipo Sturm–Liouville en q -cálculo. Esta estructura podría facilitar el estudio de propiedades espectrales, relaciones de ortogonalidad y ecuaciones en diferencias, lo que permite observar su posible aplicación en el análisis de familias de polinomios ortogonales.

Apéndice A

Algunos resultados fundamentales

El estudio de ecuaciones en diferencias de primer orden da lugar a representaciones en términos de series de potencias, productos infinitos y expresiones iterativas cuyo comportamiento depende de criterios de convergencia. A continuación se enuncian ciertos resultados fundamentales que forman parte de los resultados obtenidos.

A.1. Series de potencias

Las series de potencias desempeñan un papel fundamental en el q -cálculo, ya que muchas funciones especiales se definen precisamente mediante desarrollos en serie. En particular, las funciones q -exponenciales utilizadas en la resolución de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes se introducen como series de potencias cuyo radio de convergencia determina el dominio donde están definidas.

Asimismo, el estudio del radio de convergencia resulta esencial para garantizar la validez de operaciones como derivación e integración término a término dentro del intervalo de convergencia. Como se cita en Simmons (2017), una serie infinita de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

se denomina serie de potencias en x . La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots$$

es una serie de potencias $(x - x_0)$, lo cual es simplemente una traslación del sistema de coordenadas. Es importante ver que toda serie de potencias tiene un radio de convergencia R , $0 \leq R \leq \infty$, tal que si R es finito y distinto de cero, entonces determina un intervalo de convergencia $-R < x < R$ tal que dentro del intervalo la serie converge y fuera de él diverge, Este radio de convergencia está determinado mediante el criterio de razón

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

cuando el límite existe.

A.2. Productos infinitos

En este apartado se analiza el concepto de producto infinito cuyos resultados se puede encontrar en Apostol (1976) o en Knopp (2019). Sea $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales o complejos. Se define el producto parcial n -ésimo como

$$p_n = u_1 u_2 u_3 \cdots u_n = \prod_{k=1}^n u_k.$$

Sea $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ un producto infinito y sea $p_n = \prod_{k=1}^n u_k$. Si ningún u_n es cero, diremos que $\prod_{n=1}^{\infty} u_k$ converge si existe un número $p \neq 0$ tal que $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a p . En este caso, p se llama valor del producto y se escribe $p = \prod_{n=1}^{\infty} u_n$. Si $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a cero, diremos que el producto diverge a cero.

El siguiente resultado nos muestra una equivalencia de la convergencia del producto.

Teorema A.1. *Un producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ con a_n positivos converge si, y sólo si, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

Una definición fundamental en términos de convergencia absoluta es la siguiente. Decimos que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ es absolutamente convergente si $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)$ es convergente. Como consecuencia de esta definición es conocido el siguiente resultado:

Teorema A.2. *La convergencia absoluta de $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ implica la convergencia.*

Bibliografía

- Aldwoah, K. A. (2009). *Generalized time scales and associated difference equations*. Tesis doctoral, Cairo University.
- Apostol, T. M. (1976). *Análisis matemático*, volumen 1. Reverté, Barcelona.
- Apostol, T. M. (2001). *Cálculo*, volumen I: Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Editorial Reverté, Barcelona, 2a edición.
- Aral, A., Gupta, V., y Agarwal, R. P. (2013). *Applications of q -calculus in operator theory*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer, New York.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6946-9>.
- Bartle, R. G. y Sherbert, D. R. (2011). *Introducción al análisis matemático de una variable*. Limusa Wiley, México, 3 edición.
- Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum*. Marc-Michel Bousquet, Lausanne.
- Georgiev, S. G. y Zennir, K. (2024). *General quantum numerical analysis*. CRC Press, Boca Raton.
<https://doi.org/10.1201/9781003472131>.
- Haddad, M. y Mastouri, M. (2020). q -difference equations associated with the Rubin's q -difference operator ∂_q . *arXiv*.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2001.10901>.
- Kac, V. y Cheung, P. (2002). *Quantum calculus*. Universitext. Springer, New York.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0071-7>.
- Knopp, K. (2019). *Theory and Application of Infinite Series*. Dover Publications, New York.
- Rubin, R. L. (2007). Duhamel solutions of non-homogeneous q^2 -analogue wave equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 135(3):777–785.
<https://doi.org/10.1090/S0002-9939-06-08525-X>.
- Simmons, G. F. (2017). *Differential equations: with applications and historical notes*. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 3rd edición.
<https://doi.org/10.1201/9781315371825>.
- Álvarez Nodarse, R. (2020). Ramanujan y las q -series. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 23(2):263–302.
<https://hdl.handle.net/11441/178556>.

