



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área académica de Física y Matemáticas

¿Pueden existir escenarios sostenibles entre actividades humanas y arrecifes de coral?

Tesis que para obtener el título de
Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Luis Horacio Ríos Carrillo

bajo la supervisión de:

Dr. José Geiser Villavicencio Pulido

y

Dr. Roberto Ávila Pozos

Mineral de la Reforma, Hidalgo, Mayo de 2026.



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

School of Engineering and Basic Sciences

Dirección

Office of the Director

Mineral de la Reforma, Hgo., a 13 de marzo de 2026

Número de control: ICBI-D/399/2026

Asunto: Autorización de impresión.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UA EH

Con Título Quinto, Capítulo II, Capítulo V, Artículo 51 Fracción IX del Estatuto General de nuestra Institución, por este medio, le comunico que el Jurado asignado al egresado de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas **Luis Horacio Ríos Carrillo**, quien presenta el trabajo de titulación “¿Pueden existir escenarios sostenibles entre actividades humanas y arrecifes de coral?”, ha decidido, después de revisar fundamento en lo dispuesto en el Título Tercero, Capítulo I, Artículo 18 Fracción IV; dicho trabajo en la reunión de sinodales, **autorizar la impresión del mismo**, una vez realizadas las correcciones acordadas.

A continuación, firman de conformidad los integrantes del Jurado:

Presidente: Dr. Ricardo Cruz Castillo

Secretario: Dr. José Geiser Villavicencio Pulido

Vocal: Dr. Roberto Ávila Pozos

Suplente: Dra. Erika Elizabeth Rodríguez Torres

1961 - 2026

Sin otro particular por el momento, reciba un cordial saludo.

Atentamente
“Amor, Orden y Progreso”

Dr. Gabriel Vergara Rodríguez
Director del ICBI



GVR/MMM

“Amor, Orden y Progreso”



Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo
Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo,
México. C.P 42184
Teléfono: 52 (771) 71 720 00 Ext. 40001
direccion_icbi@uaeh.edu.mx, vergara@uaeh.edu.mx

uaeh.edu.mx

Dedicatoria

A mi papá, mi mamá y mi hermano, gracias por darme todo en esta vida.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi familia por su cariño y apoyo constante durante toda mi vida, en especial a mis padres, mi hermano y mis abuelos.

Agradezco a todos los amigos que me han acompañado en mi trayectoria universitaria, en especial a **los Casqueros, J-cios y mis amigos de Tulancingo** por siempre ayudarme a ver el lado positivo de las cosas incluso en los días que no había nada para ser positivo.

A Diana, Xally, Dara, Alain y Cheque por ser algunos de los mejores amigos que cualquiera podría desear.

A Liz, por ser mi apoyo durante los últimos meses de este trabajo.

Al Doctor Ricardo Cruz Castillo en la revisión de este proyecto, fue de gran ayuda para poder centrar mis ideas y asegurarme que iba por buen camino.

Y por último, al Dr. Roberto Ávila y al Dr. Geiser Villavicencio, su confianza y guía constante fue lo que me permitió comprender el verdadero valor de un asesor académico en el desarrollo de la ciencia, espero que podamos seguir trabajando juntos en un futuro.

Índice general

Resumen	7
Introducción	8
1. Preliminares	11
1.1. Sistemas Dinámicos y Modelación Matemática	11
1.1.1. Flujo, órbitas y comportamiento cualitativo	13
1.2. Análisis Cualitativo	13
1.2.1. Conjuntos Límite	13
1.2.2. Puntos de equilibrio	14
1.2.3. Campos de Direcciones y Ceroclinas	16
1.3. Criterios de Hurwitz	18
1.3.1. Polinomios de Hurwitz y Criterios de Estabilidad	19
1.4. Teoría de Poincaré-Bendixson y sus implicaciones	20
1.4.1. Criterio de Bendixson	21
1.4.2. Criterio de Dulac	21
1.4.3. Implicaciones de Estabilidad	21
2. Modelado	23
2.0.1. Construcción del modelo	23
2.0.2. Modelo final	27
2.0.3. Submodelos y consideraciones	28
3. Análisis del modelo	29
3.0.1. Submodelo 1: Pescadores y Corales	29
3.0.2. Submodelo 2: Corales y Turistas	34
3.0.3. Submodelo 3: Pescadores y Turistas	42
3.0.4. Submodelo 4: Turistas y Capital	45
3.0.5. Submodelo 5: Corales, Pescadores y Turistas	56
3.0.6. Submodelo 6: Corales, Turistas y Capital	66
3.0.7. Submodelo 7: Pescadores, Turistas y Capital	75
3.0.8. Modelo 8: Modelo Corales, Turistas, Pescadores y Capital	83
4. Discusión:	101

Resumen

Debido al rápido deterioro que están teniendo los arrecifes de coral alrededor del mundo, resulta importante comprender la manera en que las actividades humanas resultan nocivas para estos. Dos de las actividades antropogénicas que cuentan con mayor evidencia de daño a los arrecifes coralinos alrededor del mundo, son la pesca y el turismo. En este trabajo se propone un modelo con ecuaciones diferenciales que describe la dinámica entre corales, pescadores y actividades turísticas. Además, se hace un estudio exhaustivo de los submodelos que se pueden obtener. Se estudia la estabilidad de los puntos de equilibrio para cada modelo de manera teórica y/o numérica. Desde el análisis del modelo, se concluye que escenarios de coexistencia son posibles cuando algunas condiciones sobre los parámetros del modelo se satisfacen. Por último, se hace una discusión de las implicaciones biológicas, económicas y sociales de la estabilidad de los puntos de equilibrio para cada sistema estudiado.

Introducción

Los arrecifes de coral son ecosistemas indispensables para el ser humano. Estos ecosistemas son importantes desde una perspectiva social, cultural y económica por los servicios ecosistémicos que brindan. Existen múltiples definiciones de servicios ecosistémicos debido a la necesidad de precisar el concepto de servicio y cuales funciones ambientales podemos considerar como uno (Camacho Valdéz, Ruiz Luna et al., 2012). Debido a su simpleza, utilizaremos la definición propuesta en Fisher et al., 2009: "Los servicios ecosistémicos son los aspectos de los ecosistemas utilizados (activa o pasivamente) para producir bienestar humano". Algunos de los servicios sociales y culturales que brindan los arrecifes de coral son: recreación (para los turistas y nativos de la zona), inspiración artística (para pinturas, vídeos y fotos) y espirituales (siendo un ejemplo Kenya, donde algunos rituales para apaciguar espíritus se desarrollan alrededor de los arrecifes de coral) (Moberg y Folke, 1999). Un ejemplo de la relevancia económica que los arrecifes de coral presentan en una comunidad es mostrada por los trabajos de Cinner y Pollnac (Cinner y Pollnac, 2004) y Enrique Nunez-Lara (Nunez-Lara et al., 2003) en los que se menciona que algunas comunidades de Quintana Roo, México, dependen de la pesca en arrecifes para alimentarse. Pero además de la pesca, los arrecifes brindan otros servicios de gran interés económico y biológico, como el turismo, educación, investigación científica, protección de costas y bancos de biodiversidad marina (Aguilera et al., 2017; Cesar, 2002; Spurgeon, 1992). Recientemente, con el desarrollo de la biotecnología, los corales han sido estudiados por su uso potencial en procesos industriales y en la creación de nuevos medicamentos (van de Water et al., 2022). Entre los servicios que ofrecen los arrecifes de coral, sobresalen dos que han sido asociados al deterioro de los ecosistemas marinos, la pesca y el turismo (Lachs y Oñate-Casado, 2020).

Se estimó que durante el año 2013 aproximadamente 6 millones de personas pescaban de manera frecuente en arrecifes de coral (Teh et al., 2013). El número anterior resulta preocupante debido a que la sobre-pesca cercana a los arrecifes de coral promueve su deterioro. Uno de los principales efectos adversos de la sobre-pesca, es la eliminación de especies vitales para la funcionalidad del ecosistema. Un ejemplo de los daños producidos por la sobre-pesca de especies esenciales se puede ver en (Dulvy et al., 2004), donde la pesca de los depredadores de algunas estrellas de mar consumidoras de corales, permitió un crecimiento considerable de estrellas de mar que ocasionó un decrecimiento en la cobertura

de corales en el área. La sobre-pesca de peces herbívoros también genera daños en los arrecifes, debido a que se eliminan a los reguladores naturales de las algas con las que los corales compiten por recursos (López-Jiménez et al., 2020). Además, se ha visto que la sobre-pesca puede cambiar la biomasa y el tamaño de los peces herbívoros, lo que podría llevar a un descenso en el consumo de algas en la zona, permitiendo así la proliferación de macroalgas (Leitão et al., 2023). Los efectos de la pesca sobre el tamaño y distribución de peces herbívoros se han podido observar en un estudio producido por Sandin y sus colaboradores en el año 2008 (Sandin et al., 2008). En un análisis realizado en las islas de la Línea, ubicadas en el Océano Pacífico, se encontró que los arrecifes de coral sin actividades pesqueras tienen asociadas una mayor concentración de peces grandes, crecimiento de corales y supervivencia de los corales ante enfermedades. Mientras que en los arrecifes de las islas con altas actividades pesqueras había una mayor concentración de macroalgas junto con mayor presencia de peces pequeños.

El turismo, además de la pesca, representa una amenaza para el bienestar de los arrecifes coralinos. El incremento de nutrientes inorgánicos y cambios en la sedimentación debido a construcciones humanas como los centros turísticos, así como incrementos en la materia orgánica asociada al drenaje de los mismos han sido asociados a la degradación de arrecifes de coral (Fabricius, 2005; Redding et al., 2013). Se ha observado que los nutrientes provenientes de actividades humanas tienen una relación directa con los florecimientos de algas nocivas en los ecosistemas marinos (Davidson et al., 2014; Lapointe et al., 2005). Incluso en un estudio realizado por Bauman y sus colaboradores en el año 2010 (Bauman et al., 2010), se encontró que los daños tras un florecimiento de algas nocivas en los arrecifes del Océano Índico generaban cambios estructurales en las comunidades de corales similares a las de eventos severos de blanqueamiento de arrecifes. Además, se ha encontrado que cambios en la sedimentación y el aumento de nutrientes en la zona aumentan la habilidad competitiva de algas filamentosas (Nugues y Roberts, 2003; Vermeij et al., 2010). En este escenario ocurre competencia por interferencia entre las algas filamentosas y los corales, afectándose más la población de corales (Brown et al., 2017). Un ejemplo de cómo las actividades antropogénicas han dañado los arrecifes en una zona se da en Akumal, México. En un estudio publicado por Gil y colaboradores en el año 2015 (Gil et al., 2015) se mostró que la presencia del snorkel como actividad turística presenta correlación con la reducción en cobertura de los arrecifes de coral, cambiando la composición en las especies de corales y afectando la abundancia de peces herbívoros en la zona, lo que podría fomentar el incremento de macroalgas en la zona.

Por último, otro caso de estudio se dio en Miches, República Dominicana, un municipio que depende de sus arrecifes coralinos para alimentarse y generar dinero. Debido al desarrollo humano en la zona, se observó como las vías acuáticas que llegaban a la costa contenían residuos provenientes de procesos agrícolas, sedimentos de áreas deforestadas y desperdicio humano generado por drenajes que no tratan el agua. Todos estos factores junto a la presión constante pro-

veniente de la pesca y turismo en los arrecifes, generaron un decrecimiento en la cobertura de los corales permitiendo el desarrollo de macroalgas en la zona (Eastwood et al., 2017).

En el campo de la modelación matemática se han propuesto modelos que analizan los efectos negativos de la industrialización sobre el medio ambiente (Agarwal y Devi, 2012; Chaudhary et al., 2013, 2015; Dubey et al., 2003; Jyotsna y Tandon, 2017). Casagrandi y Rinaldi propusieron un modelo que analiza las interacciones entre turistas, capital (edificaciones o estructuras para actividades turísticas) y la calidad del ambiente (Casagrandi y Rinaldi, 2002). Posteriormente Lacitignola y colaboradores en el año 2007 propusieron un modelo basado en el de Casagrandi y Rinaldi, con la diferencia de que su modelo dividía la población de turistas en aquellos que cuidan el ambiente y los que no (Lacitignola et al., 2007). Por su parte, Diop y Sène proponen dos modelos estacionales que estudian las interacciones entre aves y peces en presencia de turistas en una reserva ecológica (Diop y Sène, 2016, 2018). También se ha estudiado la dinámica entre bosques, la vida silvestre que depende de los bosques y turistas en una zona (Villavicencio-Pulido et al., 2023). Los efectos de la sobrepesca en arrecifes de coral también han sido estudiados por medio de modelos matemáticos (Singh et al., 2012; Zikkah, Anggriani y Supriatna, 2020; Zikkah, Pratama et al., 2020). Por último, se han hecho trabajos con modelación basada en agentes que consideran las interacciones entre la ecología de los arrecifes de coral, las pesquerías, el turismo y la urbanización con un enfoque más numérico (Melbourne-Thomas et al., 2011; Perez et al., 2009).

El decrecimiento en la cobertura de arrecifes de corales en el mundo lleva años ocurriendo (Côté et al., 2005). Además, aproximadamente 500 millones de personas son en alguna medida dependientes de los servicios producidos por los arrecifes de coral (Hoegh-Guldberg et al., 2019). Con estas dos últimas consideraciones resulta natural preguntarse ¿podemos modelar la dinámica entre las poblaciones de corales y las actividades antropogénicas que las dañan?

Y junto a esa pregunta surge una de igual o mayor relevancia ¿es posible la sustentabilidad entre los arrecifes de coral y actividades antropogénicas?

En este trabajo se propone y analiza un modelo con ecuaciones diferenciales que estudia la dinámica entre corales, pescadores, turistas y capital (edificaciones o estructuras para actividades turísticas). A partir del modelo propuesto, se obtendrán 7 submodelos que también serán analizados con detalle. Se obtendrán condiciones suficientes para garantizar la existencia y estabilidad de varios puntos de equilibrio en cada subsistema. Se analizará el modelo que estudia la dinámica de las 4 poblaciones en conjunto utilizando la información obtenida a partir de los 7 subsistemas de menor dimensión. Para cada modelo estudiado se realizaron simulaciones numéricas con el fin de observar el comportamiento de las soluciones asociadas a distintos escenarios. Por último, se discute a fondo la interpretación biológica y social de los resultados obtenidos para todos los modelos estudiados.

Capítulo 1

Preliminares

En esta sección se presentarán algunos antecedentes matemáticos que permitirán comprender mejor la generación del modelo matemático y el análisis posterior que se realizará.

1.1. Sistemas Dinámicos y Modelación Matemática

Un sistema dinámico es cualquier tipo de sistema matemático que estudia un fenómeno que cambia con respecto al tiempo. Una de las propuestas más comunes dentro de la modelación matemática es generar sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que exploren la evolución de distintas variables que interactúan entre sí.

Un ejemplo clásico del uso de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias para el modelado matemático se ve en el modelo Lotka-Volterra para presas y depredadores. En este modelo se considera que una población X de presas interactúa con una población Y de depredadores. En este modelo se consideran las siguientes interacciones entre las poblaciones a estudiar:

1. La población de las presas crece de manera exponencial si en ausencia de depredadores.
2. La población de los depredadores decrece de manera exponencial en ausencia de presas.
3. La interacción entre ambas especies resulta en bajas para el número de presas y ayuda a mantener a la población de depredadores.

Bajo esos supuestos es que uno puede generar el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy, \\ \frac{dy}{dt} &= cxy - dy.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Donde los términos que tienen xy en (1.1) indican la interacción entre ambas poblaciones a lo largo del tiempo.

La existencia de soluciones para los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias está garantizada bajo el Teorema de Existencia y Unicidad. Para fines de este trabajo vamos a enunciarlo en el caso de sistemas vectoriales, ya que el modelo que se propondrá en los siguientes apartados está constituido por múltiples variables.

Teorema 1 (Existencia y Unicidad para sistemas de EDO) *Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ y sus derivadas parciales $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ son continuas. Para un valor inicial $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, existe un intervalo de tiempo $I = (-\tau, \tau)$ y una única solución $\mathbf{x}(t)$ para el sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ que satisface $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.*

Demostración La idea general reside en los iterados de Picard. Se construye una sucesión de curvas $\{y^n(t)\}$ mediante la ecuación integral:

$$y^n(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{F}(y^{n-1}(s)) ds, \tag{1.2}$$

junto con algunos resultados de análisis funcional se puede demostrar que esta sucesión converge uniformemente a una función que satisface la ecuación diferencial original en un intervalo suficientemente pequeño. (Si se desea ver una prueba de este resultado se puede ver en Kreyszig, 1991) $\square$

Una vez que el Teorema 1 nos garantiza que para cada condición inicial existe una trayectoria única, resulta sumamente instructivo estudiar estas trayectorias desde una perspectiva geométrica en lugar de solo observar su evolución temporal por separado.

Definición 1 (Espacio y Retrato de Fase) *Para un sistema de ecuaciones diferenciales $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, definimos los siguientes conceptos técnicos:*

- **Espacio de fases:** *Es el espacio $\mathbf{x}$ (normalmente $\mathbb{R}^n$) donde se representan las variables del sistema. En el caso particular de dos variables ($n = 2$), este espacio se denomina **plano de fases** (Robinson, 2012).*
- **Retrato de fase:** *Es la representación gráfica de las soluciones en el espacio de fases, visualizadas como curvas parametrizadas por el tiempo. En estas gráficas, no se indica el tiempo de forma explícita, sino que se utilizan flechas para señalar la dirección del movimiento de las trayectorias conforme aumenta t (Robinson, 2012).*

1.1.1. Flujo, órbitas y comportamiento cualitativo

Una vez garantizada la unicidad, podemos estudiar la evolución del sistema desde una perspectiva geométrica. Es aquí donde introducimos el concepto de *flujo*, el cual permite ver la solución no solo como una función del tiempo, sino como una transformación del espacio de estados.

Definición 2 (Flujo y Órbita) *La función $\phi(t; \mathbf{x}_0)$, que asigna a cada condición inicial $\mathbf{x}_0$ su solución en el tiempo t , se denomina **flujo** del sistema dinámico.*

- Para una condición inicial fija $\mathbf{x}_0$, la curva parametrizada por t en $\mathbb{R}^n$ se denomina **órbita** o **trayectoria**.
- El flujo satisface la **propiedad de grupo**: $\phi(t + s; \mathbf{x}_0) = \phi(t; \phi(s; \mathbf{x}_0))$ (Robinson, 2012).

Una consecuencia fundamental de la unicidad es que las trayectorias en el espacio de fases no pueden cruzarse. Si dos trayectorias se intersectarán en un punto, la solución a partir de ese punto dejaría de ser única, lo cual contradice el Teorema 1.

Teorema 2 *Si dos trayectorias $\phi(t_0; \mathbf{x}_0)$ y $\phi(t_1; \mathbf{y}_0)$ se intersectan en algún momento, entonces ambas pertenecen a la misma trayectoria global.*

En el contexto de modelos como Lotka-Volterra, esto implica que si el sistema comienza con poblaciones positivas, nunca podrá alcanzar valores negativos o nulos en tiempo finito si los ejes son trayectorias por sí mismos.

1.2. Análisis Cualitativo

Una vez que se propone un modelo matemático por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias, lo siguiente que nos interesa es realizar un análisis exhaustivo del comportamiento que tendrán sus soluciones sin resolverlas analíticamente. Por este motivo es que en esta sección se presentarán las herramientas necesarias para poder comprender el comportamiento a largo plazo de los modelos.

1.2.1. Conjuntos Límite

Para describir la evolución del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, utilizamos la noción de flujo antes definida de modo que podamos estudiar propiedades de este mientras avanza (o retrocede) en el tiempo.

Un concepto fundamental en la modelación socio-ecológica es la **invariancia**, que asegura que las trayectorias permanezcan dentro de un conjunto de interés. De manera más formal podemos dar la siguiente definición:

Definición 3 (Conjunto Invariante) *Un subconjunto S del espacio fase es **positivamente invariante** si para todo $\mathbf{x}_0 \in S$, se tiene que $\phi(t; \mathbf{x}_0) \in S$ para todo $t \geq 0$ (Robinson, 2012).*

Un ejemplo clave de esto surge al analizar los modelos de poblaciones ya que no hay manera en que se pueda tener una cantidad negativa de individuos. Siendo entonces necesario que las soluciones sean invariantes en el espacio donde todas las variables son no negativas.

Siguiendo con el estudio del flujo y sus propiedades, el siguiente concepto que debe atraer nuestro interés viene dado por pensar cual es el comportamiento que tiene una trayectoria mientras avanza el tiempo, por lo tanto pasaremos a definir lo que son los ω y α límites asociados a alguna trayectoria.

Definición 4 (Puntos y conjuntos límite) *Un punto $\mathbf{q}$ es un ω -límite de la trayectoria de $\mathbf{x}_0$ si existe una secuencia de tiempos $t_j \rightarrow \infty$ tal que $\phi(t_j; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{q}$. El conjunto de todos estos puntos se denota como $\omega(\mathbf{x}_0)$. Análogamente, el conjunto α -límite, denotado por $\alpha(\mathbf{x}_0)$, se define considerando el límite cuando $t \rightarrow -\infty$ (Robinson, 2012).*

Ya con estas definiciones podemos apuntar mejor a lo que buscaremos estudiar en nuestro modelo, estaremos buscando analizar las soluciones asociadas al sistema para ver cual es el comportamiento que tendrán cuando tiendan a infinito, buscando que sean invariantes a la región de no negatividad.

1.2.2. Puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio de un sistema de ecuaciones diferenciales son soluciones en las cuales la dinámica no cambia en el fenómeno estudiado. Es decir, un punto donde el sistema deja de cambiar con respecto al tiempo (las derivadas son iguales a cero). De manera más formal podemos dar la siguiente definición:

Definición 5 (Punto de equilibrio) *Un punto de equilibrio x^* es tal que para un sistema*

$$\dot{x} = F(x) \tag{1.3}$$

se cumple que

$$\dot{x} = F(x^*) = 0. \tag{1.4}$$

Regresando al modelo de Lotka-Volterra, podemos obtener los puntos de equilibrio al resolver el siguiente sistema ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} ax - bxy &= 0, \\ cxy - dy &= 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

A partir de (1.5) podemos encontrar que los puntos de equilibrio para el modelo presa-depredador son $p_1 = (0, 0)$ y $p_2 = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$.

Una vez que se ha definido lo que es un punto de equilibrio, resulta natural plantearse la pregunta: **¿Bajo que condiciones es que un fenómeno puede llegar a un punto de equilibrio?**. Es decir, ¿que tiene que ocurrir para que la dinámica sea constante en un sistema?

Para contestar estas preguntas analizaremos lo que significa que un punto de equilibrio sea estable o inestable, dando condiciones y definiciones para poder comprender que debe de suceder para que las soluciones se vean atraídas o repelidas por un punto.

Estabilidad de los puntos de equilibrio, Linealización y Clasificación

Para comenzar es preciso enunciar la definición de estabilidad con la que estaremos trabajando mientras estudiemos el comportamiento de los puntos de equilibrio.

Definición 6 (Estabilidad de Lyapunov) *Un punto fijo $\mathbf{x}^*$ es **Lyapunov estable** (L -estable) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta$, entonces $\|\phi(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$ (Robinson, 2012).*

Si además de ser estable, las trayectorias cercanas tienden al punto de equilibrio ($\phi(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^*$ cuando $t \rightarrow \infty$), se dice que el punto es **asintóticamente estable**. Por el contrario, si el equilibrio es asintóticamente estable en el tiempo inverso ($t \rightarrow -\infty$), se denomina **punto repelente** o fuente.

Para determinar la estabilidad en sistemas no lineales, podemos aproximar el sistema cerca de un punto de equilibrio $\mathbf{x}^*$ mediante su matriz de derivadas parciales, denominada **matriz Jacobiana** (normalmente expresada como $D\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)$). Si bien nos

Definición 7 (Punto de Equilibrio Hiperbólico) *Un punto de equilibrio x^* se llama **hiperbólico** si todos los valores propios λ de la matriz Jacobiana $D\mathbf{F}(x^*)$ tienen parte real distinta de cero, es decir, $\text{Re}(\lambda) \neq 0$ para todo λ (Robinson, 2012).*

La importancia de los puntos hiperbólicos está en que su estabilidad es "robusta" en el sentido de que el comportamiento cualitativo del sistema linealizado es idéntico al del sistema no lineal original, por lo que resulta ser una de las herramientas más útiles centrarse en estos puntos para el estudio de modelos matemáticos. Esto se formaliza en el siguiente teorema encontrado en (Robinson, 2012):

Teorema 3 (Teorema de Estabilidad Lineal) *Sea x^* un punto de equilibrio de un sistema no lineal $\dot{x} = F(x)$. Si x^* es un punto hiperbólico, su estabilidad queda determinada por los valores propios de la matriz Jacobiana de la siguiente manera :*

1. **Estabilidad Asintótica (Sumidero):** Si todos los valores propios tienen parte real negativa ($\text{Re}(\lambda) < 0$), entonces x^* es asintóticamente estable para el sistema no lineal. En este caso, existe una vecindad llamada cuenca de atracción $W^s(x^*)$ desde la cual todas las trayectorias convergen al equilibrio.
2. **Inestabilidad (Fuente o Silla):** Si al menos un valor propio tiene parte real positiva ($\text{Re}(\lambda) > 0$), entonces x^* es inestable para el sistema no lineal. Dependiendo del resto de los valores propios, el punto puede ser una **fuentes** (si todos son positivos) o un **punto de silla** (si hay mezcla de signos).
3. **Caso No Hiperbólico (Inconcluso):** Si existe al menos un valor propio con parte real igual a cero, el sistema se encuentra en un estado crítico donde la linealización no es suficiente para determinar la estabilidad, y se deben emplear métodos más avanzados como las Funciones de Lyapunov o la Teoría de Variedad Central.

Con el teorema anterior ya tenemos una idea general de lo que se buscará hacer durante todo el trabajo: Encontrar los puntos de equilibrio asociados al modelo y posteriormente inferir (si se puede) su estabilidad para encontrar información de las dinámicas a estudiar.

1.2.3. Campos de Direcciones y Ceroclinas

Para visualizar la dinámica global del sistema sin resolver las ecuaciones, recurrimos al estudio geométrico del plano fase. El primer paso para esto será definir la manera en que podremos ver hacia donde será "empujada" una solución del sistema.

Definición 8 (Campo de Vectores) Asociamos a cada punto (x, y) en el plano un vector $\mathbf{F}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. Este vector tiene su base en (x, y) y su dirección y magnitud indican la velocidad y el sentido del flujo en ese punto exacto. La colección de estos vectores se denomina **campo de direcciones** (Robinson, 2012).

Por medio del campo de direcciones podemos hacer una aproximación visual del comportamiento de las soluciones incluso en situaciones donde no podamos conocer la estabilidad exacta de un punto de equilibrio.

Definición 9 (Ceroclinas) Las **ceroclinas** (o nullclines) son el conjunto de puntos donde una componente del campo vectorial es nula, es decir:

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Notemos además que por ende, las intersecciones entre las ceroclinas darán como resultado los puntos de equilibrio asociados al sistema.

Análisis de Regiones: El Modelo Lotka-Volterra

Consideremos el modelo presa-depredador con ceroclinas no triviales en $y = \frac{a}{b}$ y $x = \frac{d}{c}$. Estas rectas dividen el cuadrante positivo en cuatro regiones donde los signos de $\dot{x}$ y $\dot{y}$ permanecen constantes, dictando la dirección del flujo en toda la región. Esto se puede observar en la siguiente tabla:

Región	Condición	Signo $\dot{x}$	Signo $\dot{y}$	Dirección del Flujo
I	$x > \frac{d}{c}, y < \frac{a}{b}$	+ (Crece)	+ (Crece)	$\nearrow$
II	$x < \frac{d}{c}, y < \frac{a}{b}$	+ (Crece)	- (Decrece)	$\searrow$
III	$x < \frac{d}{c}, y > \frac{a}{b}$	- (Decrece)	- (Decrece)	$\swarrow$
IV	$x > \frac{d}{c}, y > \frac{a}{b}$	- (Decrece)	+ (Crece)	$\nwarrow$

Tabla 1.1: Análisis cualitativo del flujo según las regiones delimitadas por las ceroclinas.

Este análisis revela que las soluciones no escapan al infinito, sino que parecen orbitar alrededor del punto de equilibrio $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$. Para darnos una mejor idea de como se ve esto, observe la Figura 1.1.

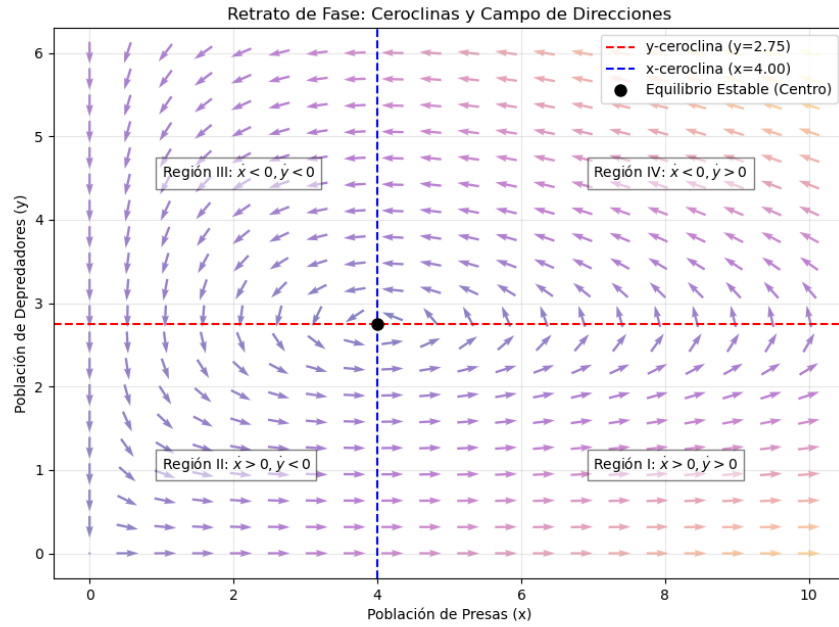


Figura 1.1: El campo de direcciones asociado al modelo Lotka-Volterra asociado a la información presentada en la Tabla 1.

1.3. Criterios de Hurwitz

El criterio de Hurwitz es una herramienta muy poderosa en la modelación matemática ya que brinda una respuesta clara a la pregunta: ¿Bajo qué criterio podemos asegurar la estabilidad de un punto de equilibrio analizando solamente

su polinomio característico?

Si bien esta teoría tiene un trasfondo muy amplio, lo único que se hará en este apartado es mencionar el principal resultado con respecto a polinomios de Hurwitz que se utilizará en este trabajo y algunas implicaciones para polinomios de mayor dimensión, todo esto respaldado por el trabajo de Aguirre–Hernández, Loredó–Villalobos, Díaz–González y Campos–Cantón (Aguirre Hernández et al., 2017).

1.3.1. Polinomios de Hurwitz y Criterios de Estabilidad

Para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio, es necesario conocer el signo de las raíces del polinomio característico asociado a la matriz Jacobiana del sistema. En el contexto de la teoría de sistemas dinámicos, decimos que un polinomio con coeficientes reales es Hurwitz si todas sus raíces tienen parte real negativa, es decir, si se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo $\mathbb{C}^- = \{a + ib : a < 0\}$ (Aguirre Hernández et al., 2017).

Ya que tenemos una idea clara de lo que es un polinomio de Hurwitz, lo siguiente es empezar a mostrar ejemplos de su utilidad.

Criterio para polinomios de grado 2

Consideremos un polinomio cuadrático de la forma:

$$p(\lambda) = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2. \quad (1.6)$$

Una condición necesaria para que $p(\lambda)$ sea un polinomio Hurwitz es que todos sus coeficientes sean del mismo signo. Para el caso específico de grado 2, esta condición se vuelve necesaria y suficiente.

Teorema 4 *El polinomio $p(\lambda) = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ es Hurwitz, si y sólo si, a_0 , a_1 y a_2 son del mismo signo.*

Demostración Basta con utilizar la formula general para ecuaciones de segundo grado para observar que si a_0, a_1 y a_2 son del mismo signo, las raíces del polinomio tendrán parte real negativa. $\square$

En la práctica de la modelación biológica, los coeficientes principales siempre tienden a ser positivos, por lo que el criterio se reduce a verificar que a_0, a_1 , y $a_2 > 0$.

Ejemplo de aplicación:

Consideremos el siguiente polinomio característico:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 7. \quad (1.7)$$

Observamos los coeficientes del polinomio: $a_0 = 1$, $a_1 = 5$ y $a_2 = 7$. Dado que los tres coeficientes son mayores a cero, podemos concluir inmediatamente que $p(\lambda)$

es Hurwitz. Esto implicaría que el sistema dinámico asociado a este polinomio es estable, sin necesidad de calcular explícitamente las raíces $\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-28}}{2}$.

Criterio para polinomios de grado 3

Para sistemas de mayor dimensión, las condiciones se vuelven un poco más estrictas. Consideremos el polinomio cúbico:

$$p(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3. \quad (1.8)$$

Al igual que en el caso anterior, una condición inicial es que todos los coeficientes tengan el mismo signo. Sin embargo, se requiere una condición adicional de desigualdad entre los coeficientes.

Teorema 5 *El polinomio $p(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ es Hurwitz, si y sólo si, a_0, a_1, a_2, a_3 son del mismo signo y se cumple la desigualdad:*

$$a_1a_2 - a_3a_0 > 0. \quad (1.9)$$

Este resultado es fundamental para analizar modelos donde el espacio fase es $\mathbb{R}^3$, es muy común encontrar aplicaciones de estos resultados en trabajos de epidemiología matemática.

Para este trabajo no se utilizan los criterios de Hurwitz más allá del caso para sistemas de dimensión 2, sin embargo es preciso mencionar que existen generalizaciones para dimensiones mayores o iguales que 4 (Aguirre Hernández et al., 2017).

1.4. Teoría de Poincaré-Bendixson y sus implicaciones

La teoría de Poincaré-Bendixson es fundamental en el estudio de sistemas dinámicos en $\mathbb{R}^2$, ya que impone restricciones sobre el comportamiento de las trayectorias. A diferencia de sistemas en dimensiones superiores en el plano solo tenemos que tratar con algunos escenarios que podemos formular con ayuda del siguiente teorema (disponible en Robinson, 2012).

Teorema 6 (Teorema de Poincaré-Bendixson) *Sea $\dot{x} = f(x)$ un sistema de ecuaciones diferenciales en el plano, donde f es continuamente diferenciable. Supongamos que una solución $x(t)$ permanece en una región compacta (cerrada y acotada) K que no contiene puntos de equilibrio. Entonces, la trayectoria $x(t)$ debe converger a una órbita periódica dentro de K cuando $t \rightarrow \infty$.*

En términos prácticos, este teorema nos dice que si una solución no crece indefinidamente (es acotada) y no se extingue ni converge a un equilibrio, entonces necesariamente debe oscilar de manera periódica. Sin embargo, para algunos modelos de poblaciones buscamos demostrar la estabilidad de un equilibrio descartando la existencia de oscilaciones. Para ello, utilizamos el Criterio de Bendixson y los resultados que se originan a partir de este.

1.4.1. Criterio de Bendixson

El criterio de Bendixson es una herramienta que nos permite descartar la existencia de soluciones periódicas no constantes en una región simplemente conexa para sistemas de dos ecuaciones diferenciales.

Teorema 7 (Criterio de Bendixson) *Considere el sistema plano:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y).\end{aligned}\tag{1.10}$$

Si la divergencia del campo vectorial, dada por la expresión $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$, no es idénticamente cero y no cambia de signo en una región simplemente conexa $D \subset \mathbb{R}^2$, entonces el sistema no admite soluciones periódicas no constantes que estén enteramente dentro de D .

Esto implica que si la suma de las derivadas parciales es siempre positiva o siempre negativa en la región de interés biológico (el cuadrante positivo ya que estamos en el plano), ninguna población oscilará indefinidamente en un ciclo cerrado; toda órbita será no acotada o su conjunto omega límite contendrá un equilibrio.

1.4.2. Criterio de Dulac

El criterio de Bendixson puede ser insuficiente si la divergencia cambia de signo o es cero en algunas partes. El criterio de Dulac generaliza este resultado introduciendo una función escalar auxiliar que facilita el análisis.

Teorema 8 (Criterio de Dulac) *Si existe una función escalar continuamente diferenciable $\alpha(x, y)$ definida en $\mathbb{R}^2$ tal que la expresión:*

$$\frac{\partial(\alpha P)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha Q)}{\partial y} \neq 0\tag{1.11}$$

mantiene el mismo signo en una región simplemente conexa, entonces no existen órbitas periódicas en dicha región.

Normalmente las funciones de Dulac que se utilizan suelen ser de la forma $\alpha(x, y) = \frac{1}{x}$, $\alpha(x, y) = \frac{1}{y}$ ó $\alpha(x, y) = \frac{1}{xy}$, de modo que sea posible quitar los efectos de la no-linealidad y que la divergencia mantenga su signo.

1.4.3. Implicaciones de Estabilidad

La utilidad del criterio de Bendixson trasciende la simple exclusión de ciclos; bajo condiciones de acotación, este resultado actúa como un mecanismo para garantizar la estabilidad global del sistema. En el modelado matemático, esto es crucial: no solo nos interesa saber que las poblaciones no oscilarán para siempre, sino asegurar que eventualmente alcanzarán un estado de equilibrio estable.

Análisis de Convergencia basado en McCluskey y Muldowney

De acuerdo con el Teorema de Poincaré-Bendixson, si una trayectoria es positivamente acotada, su conjunto ω -límite, $\Omega(x_0, y_0)$, debe ser un punto de equilibrio, una órbita periódica o un conjunto de puntos que genera una solución no acotada. El argumento de McCluskey y Muldowney (ver McCluskey y Muldowney, 1998) permite descartar casos con el siguiente teorema:

Teorema 9 *Sea $\dot{x} = f(x)$ un sistema de ecuaciones diferenciales en el plano, donde f es continuamente diferenciable. Supongamos que una solución $x(t)$ es acotada y cumple el criterio de Bendixson (o Dulac), entonces el omega límite de la solución consiste de solo un punto de equilibrio.*

Este resultado es de suma potencia ya que si logramos demostrar que las poblaciones están acotadas (por ejemplo, debido a la capacidad de carga del sistema) y encontramos una función de Dulac $\alpha(x, y)$ tal que la divergencia del campo modificado no cambie de signo, habremos probado que el sistema es **globalmente convergente a un equilibrio**. Esto significa que, independientemente de las condiciones iniciales, el modelo posee una resiliencia matemática que lo conduce siempre hacia un estado estacionario predecible.

Capítulo 2

Modelado

Este modelo consiste de 4 ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan la dinámica de las siguientes densidades poblacionales en zonas turísticas cercanas a arrecifes de coral:

- C := Densidad de la población de los corales.
- T := Número de turistas.
- P := Número de pescadores.
- K := El capital, en este caso representa la infraestructura creada para su uso en actividades turísticas.

Ahora que conocemos las poblaciones cuya dinámica se analizará, procederemos a construir un modelo que permitirá conocer los escenarios posibles que surgen de la interacción entre las variables.

2.0.1. Construcción del modelo

En esta sección se construirá un modelo general basándonos en resultados de la ecología matemática de poblaciones y resultados empíricos de otros trabajos.

Modelación de la dinámica poblacional de los corales

Para construir la ecuación que describe la dinámica de los corales, se supone que en ausencia de turistas, pescadores y capital, la densidad de los corales presenta un crecimiento logístico. Esta dinámica es modelada comúnmente por la ecuación

$$\frac{dC}{dt} = rC \left(1 - \frac{C}{Q} \right),$$

donde el parámetro $r > 0$ representa la tasa de reproducción de la población de corales y $Q > 0$ siendo la capacidad de carga de la población de corales, es

decir, el número máximo de individuos que pueden vivir en el ecosistema. En un escenario en el que existan tanto la industria turística como la industria pesquera se considerarán en la construcción del modelo las siguientes suposiciones:

- Actividades turísticas sin regulación como el snorkel y scuba-diving pueden tener efectos negativos en los arrecifes de coral (Gil et al., 2015; Jakšić et al., 2013). Además, los nutrientes de origen antropogénico que introduzcan los turistas pueden tener efectos dañinos en los arrecifes Davidson et al., 2014.
- El estrés ocasionado por las actividades de los pescadores provoca decrecimiento en la calidad de los arrecifes de coral, esto debido a la sobre-pesca de especies vitales para la estructura al ecosistema. Llevando así a cambios en las poblaciones que habitan en ellos e incitando la proliferación de macroalgas (Leitão et al., 2023; López-Jiménez et al., 2020).
- La infraestructura creada para los turistas genera daños a la calidad de los arrecifes de coral, ya que los drenajes y el desperdicio sólido han sido clasificados como amenazas para la salud de los corales (Fabricius, 2005; Redding et al., 2013).
- A medida que el turismo crece y se va degradando el ambiente, se pueden generar arrecifes artificiales para aligerar el estrés de los arrecifes naturales y de esa manera mitigar un poco el daño (Al-Horani y Khalaf, 2013; Jakšić et al., 2013).

Por lo tanto, la ecuación que describe la dinámica de los corales está dada por

$$\frac{dC}{dt} = rC \left(1 - \frac{C}{Q}\right) + CD(T, P, K) + CB(K).$$

Con $D(T, P, K)$ siendo una función que modela el daño ocasionado por los pescadores, los turistas y el capital en conjunto. En contraste, $B(K)$ es una función que modela el beneficio recibido por los corales al haber capital. En este trabajo, se considera que el daño que reciben los corales es una función lineal de los turistas, los pescadores y del capital. Por lo que se tiene que

$$D(T, P, K) = -(\alpha_1 T + \alpha_2 P + \alpha_3 K),$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ representan las tasas de contacto entre Turistas, Pescadores y Capital con los corales respectivamente. De igual manera se va a considerar que la función B tiene la siguiente forma lineal:

$$B(K) = \alpha_4 K,$$

con $\alpha_4 > 0$ representando una tasa de contacto entre la población de corales y el capital que resulta beneficiosa. Por lo tanto, la ecuación que representa la dinámica de la población de corales con los efectos dañinos y beneficiosos en presencia de las demás poblaciones es:

$$\frac{dC}{dt} = rC \left(1 - \frac{C}{Q}\right) - C(\alpha_1 T + \alpha_2 P + \alpha_3 K) + \alpha_4 CK. \quad (2.1)$$

Modelación de la dinámica poblacional de los pescadores.

Para construir la ecuación que describe la dinámica de los pescadores, se supone que en ausencia de turistas, corales, y capital, el número de pescadores en la zona presenta un crecimiento logístico. Esta dinámica es modelada comúnmente por la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = r_1 P \left(1 - \frac{P}{Q_1} \right),$$

donde el parámetro $r_1 > 0$ representa la tasa en que llegan más pescadores a la zona y $Q_1 > 0$ siendo la capacidad de carga del número de pescadores, es decir, el número máximo de individuos que pueden trabajar en la zona. En un escenario en el que existan tanto la industria turística como arrecifes de coral en la zona, se considerarán en la construcción del modelo las siguientes suposiciones.

- Las actividades pesqueras y turísticas compiten por el mismo espacio para trabajar (Lachs y Oñate-Casado, 2020), por lo cual, se supone que en presencia de actividades turísticas, hay un decrecimiento en la población de pescadores.
- Se supondrá que la presencia de arrecifes de coral en una zona permite el aumento de pescadores en la zona gracias a la biodiversidad marina que atraen.

El modelo se puede ampliar entonces como

$$\frac{dP}{dt} = r_1 P \left(1 - \frac{P}{Q_1} \right) + P B_1(C) - P D_1(T).$$

Siendo B_1 y D_1 funciones de beneficio por la población de corales y daño por las actividades turísticas en la zona respectivamente.

Por lo tanto podemos considerar que $B_1(C)$ y $D_1(T)$ tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned} B_1(C) &= \beta_1 C, \\ D_1(T) &= \beta_2 T, \end{aligned}$$

donde $\beta_1, \beta_2 > 0$ representan las tasas de contacto de los pescadores con la población de corales y con los turistas en la zona respectivamente. Por lo cual la ecuación que describe la dinámica de los pescadores en presencia de actividades turísticas y arrecifes de coral se da por:

$$\frac{dP}{dt} = r_1 P \left(1 - \frac{P}{Q_1} \right) + \beta_1 P C - \beta_2 P T. \quad (2.2)$$

Modelación de la dinámica poblacional de los turistas

Para modelar la dinámica de los turistas se considerará un enfoque parecido al utilizado en el artículo de Casagrandi y Rinaldi, así como el de Lacitignola y

colaboradores (Casagrandi y Rinaldi, 2002; Licitignola et al., 2007).

La dinámica de los turistas que arriban a las zonas turísticas es modelada por una función que representa la atractividad relativa de la zona turística:

$$\frac{dT}{dt} = A(C, P, T, K).$$

Esta atractividad relativa, $A(C, P, T, K)$, se puede descomponer en

$$A(C, P, T, K) = T (\bar{A}(C, P, T, K) - w),$$

siendo $\bar{A}$ la atractividad absoluta y $w > 0$ siendo una constante que representa la degradación natural que ocurre en los centros turísticos.

La atractividad absoluta se puede ver como la suma de la atractividad que atribuyen los corales, los pescadores, los mismos turistas y el capital a la zona, es decir:

$$\bar{A}(C, P, T, K) = a_C(C) + a_P(P) + a_T(T) + a_K(T, K).$$

Ahora, tenemos que considerar los distintos términos que modelarán la atractividad que brinda cada una de las poblaciones.

La atractividad que brinda la población de corales se modela por

$$a_C(C) = \mu_c \frac{C}{C + \phi_c},$$

esta es una función monod de saturación que representa el atractivo turístico de los arrecifes de coral en la zona. Donde $\mu_c > 0$ es una constante que representa la atractividad asociada a una gran cobertura de corales en el área. Por otra parte, $\phi_c > 0$ es una constante de saturación media para la atractividad de los corales.

Siguiendo con la función que determina la atractividad que generan los turistas, esta será un termino lineal con signo negativo de la forma

$$a_T(T) = -\gamma_1 T,$$

siendo $\gamma_1 > 0$ la tasa de competencia intraespecífica entre los turistas de la zona. Esto ya que siguiendo el enfoque de Casagrandi y Rinaldi (Casagrandi y Rinaldi, 2002), los turistas no ven atractivo sitios muy concurridos por otros turistas.

La función que representa como los pescadores afectan la atractividad en la zona será modelada por una función lineal de la forma

$$a_P(C, P, T, K) = -\gamma_2 P,$$

donde $\gamma_2 > 0$ representa la tasa de contactos entre turistas y pescadores. Se considera que tiene signo negativo debido a que las actividades turísticas y los

pescadores compiten por espacio para trabajar (Lachs y Oñate-Casado, 2020), por lo tanto en presencia de pescadores, hay menos atractividad para el espacio turístico.

Por último, la atractividad que genera el capital se va a modelar con la misma función que Casagrandi y Rinaldi propusieron:

$$a_K(C, P, T, K) = \mu_K \frac{K/(T+1)}{K/(T+1) + \phi_K}.$$

Esta función monod de saturación representa la atractividad limitada de las facilidades disponibles per capita, donde $\mu_k > 0$ es una constante que representa la atractividad asociada a capital de gran calidad y $\phi_k > 0$ siendo una constante de saturación media para la atractividad del capital.

Por lo tanto la ecuación que representa la dinámica de los turistas que arriban a la zona se da por

$$\frac{dT}{dt} = T \left(\mu_c \frac{C}{C + \phi_c} - (\gamma_1 T + \gamma_2 P) + \mu_k \frac{K/(T+1)}{K/(T+1) + \phi_k} - w \right). \quad (2.3)$$

Modelación de la dinámica poblacional del capital.

La ecuación del capital está igualmente basada en la del trabajo de Casagrandi y Rinaldi (Casagrandi y Rinaldi, 2002). Esta ecuación tiene como términos a $-\delta K$, la cuál representa la degradación natural de las edificaciones por el paso del tiempo y el termino ϵT representando los ingresos generados por los turistas.

Con los supuestos anteriores, la ecuación que modela el comportamiento del capital es:

$$\frac{dK}{dt} = -\delta K + \epsilon T. \quad (2.4)$$

Donde $\epsilon > 0$ representa una tasa de inversión para más capital. Mientras que $\delta > 0$ es la tasa de degradación de las estructuras turísticas mientras pasa el tiempo. Una consideración importante es que δ tiene que ser pequeña ya que la degradación de las edificaciones turísticas es lenta.

2.0.2. Modelo final

El modelo propuesto en este trabajo esta dado por las ecuaciones (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4). Por lo tanto, el sistema que describe la dinámica entre corales, pescadores, turistas y capital está dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= rC \left(1 - \frac{C}{Q}\right) - C(\alpha_1 T + \alpha_2 P + \alpha_3 K) + \alpha_4 CK, \\
\frac{dP}{dt} &= r_1 P \left(1 - \frac{P}{Q_1}\right) + \beta_1 PC - \beta_2 PT, \\
\frac{dT}{dt} &= T \left(\mu_C \frac{C}{C + \phi_C} - \gamma_1 T - \gamma_2 P + \mu_K \frac{K}{K + \phi_K(T + 1)} - w \right), \\
\frac{dK}{dt} &= -\delta K + \epsilon T.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

2.0.3. Submodelos y consideraciones

Como se mencionó en la introducción, en este trabajo estudiaremos también la dinámica de los siguientes submodelos

- Corales y Pescadores.
- Corales y Turistas.
- Corales y Capital.
- Pescadores y Turistas.
- Pescadores y Capital.
- Turistas y Capital.
- Corales, Pescadores y Turistas.
- Corales, Turistas y Capital.
- Corales, Pescadores y Capital.
- Pescadores, Turistas y Capital.
- Corales, Pescadores, Turistas y Capital.

Esto con el fin, de conocer el comportamiento del sistema socioecológico en los subespacios (CP , CT , CK , PT , PK , TK , CPT , CTK , CPK , PTK y $CPTK$). Los submodelos **Corales y Capital**, **Pescadores y Capital**, y **Corales, Pescadores y Capital** se mencionaran brevemente ya que si no hay presencia de turistas la ecuación que describe la dinámica del capital sería

$$\frac{dK}{dt} = -\delta K.$$

Esto implicaría que para cualquier condición inicial de K , su solución decrecería hasta llegar a cero. Es decir, la dinámica de los sistemas Corales-Capital y Pescadores-Capital se reduce a la dinámica logística para los corales y los pescadores mientras que la dinámica del modelo Corales, Pescadores y Capital está dada por la dinámica de un modelo del tipo víctima-explotador.

Capítulo 3

Análisis del modelo

3.0.1. Submodelo 1: Pescadores y Corales

A continuación se estudiará la dinámica de la interacción entre Pescadores y Corales la cual está dada por el siguiente submodelo.

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= rC \left(1 - \frac{C}{Q}\right) - \alpha_2 CP, \\ \frac{dP}{dt} &= r_1 P \left(1 - \frac{P}{Q_1}\right) + \beta_1 PC.\end{aligned}\tag{3.1}$$

El modelo dado en (3.1) presenta los siguientes puntos de equilibrio

$$\begin{aligned}\chi_0 &= (0, 0), \\ \chi_1 &= (Q, 0), \\ \chi_2 &= (0, Q_1), \\ \chi_3 &= (C_{M1}, P_{M1}).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Los puntos de equilibrio de frontera mostrados en (3.2), describen los siguientes escenarios: χ_0 describe un escenario donde dejan de existir arrecifes de coral y pescadores en la zona. χ_1 representa la exclusión de la población de pescadores, persistiendo únicamente la población de corales. χ_2 presenta una exclusión de los corales, persistiendo únicamente la población de pescadores. Finalmente, el equilibrio interior χ_3 dado en (3.2) describe un escenario de coexistencia entre las poblaciones de corales y pescadores. Este punto de equilibrio de forma explícita está dado por

$$\begin{aligned}\chi_3 &= (C_{M1}, P_{M1}), \\ &= \left(\frac{Qr_1(r - \alpha_2 Q_1)}{rr_1 + QQ_1\alpha_2\beta_1}, \frac{Q_1r(r_1 + \beta_1 Q)}{rr_1 + QQ_1\alpha_2\beta_1} \right).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Notamos que se garantiza que χ_3 es un punto de equilibrio positivo si y sólo si $r - \alpha_2 Q_1 > 0$. En este caso, se dice que el equilibrio χ_3 tiene sentido biológico

si y sólo si $r - \alpha_2 Q_1 > 0$ (Es decir, si la capacidad de carga de la población de pescadores, Q_1 , es menor que la cantidad $\frac{r}{\alpha_2}$). Obsérvese que la coexistencia entre los pescadores y arrecifes de coral en una zona no siempre es posible.

Estabilidad de los equilibrios del submodelo 1:

A continuación se analizará la estabilidad de los puntos de equilibrio del modelo descrito en (3.1). Para esto se utilizará la matriz Jacobiana asociada al modelo, la cual está dada por

$$J(C, P) = \begin{bmatrix} r - 2\frac{r}{Q}C - \alpha_2 P & -\alpha_2 C \\ \beta_1 P & r_1 - 2\frac{r_1}{Q_1}P + \beta_1 C \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Teorema 10 Para el modelo dado por (3.1) con χ_0 y χ_1 definidos en (3.2).

- El punto de equilibrio χ_0 es inestable para todos los valores de los parámetros del modelo.
- El punto de equilibrio χ_1 es inestable para todos los valores de los parámetros del modelo.

Demostración Utilizando la matriz Jacobiana dada en (3.4) para calcular los polinomios característicos de los puntos χ_0 y χ_1 obtendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} P_c(\chi_0) &= (r - \lambda)(r_1 - \lambda), \\ P_c(\chi_1) &= (-r - \lambda)(r_1 + \beta_1 Q - \lambda). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Observemos que los polinomios característicos dados en (3.5) admiten al menos una raíz positiva, por ende ambos son puntos de equilibrio inestables. Ya que para χ_0 , un valor propio es $\lambda = r > 0$ y para χ_1 un valor propio es $\lambda = r_1 + \beta_1 Q > 0$ s. $\square$

Teorema 11 Para el modelo dado en (3.1) con χ_2 , χ_3 definidos en (3.2) y (3.3) respectivamente, se tiene que:

- El punto de equilibrio χ_2 es estable si y solo si $Q_1 > \frac{r}{\alpha_2}$.
- El punto de equilibrio χ_3 es estable si y solo si $Q_1 < \frac{r}{\alpha_2}$.

Demostración Utilizaremos de nuevo la matriz definida en (3.4) para probar este teorema. Notemos que el polinomio característico asociado al punto χ_2 está dado por:

$$P_c(\chi_2) = (r - \alpha_2 Q_1 - \lambda)(-r_1 - \lambda). \quad (3.6)$$

De aquí se observa que para que ambos valores propios sean negativos se tiene que cumplir que $r - \alpha_2 Q_1 < 0$, lo cual ocurre si $Q_1 > \frac{r}{\alpha_2}$. Para analizar la estabilidad de χ_3 , observe que su polinomio característico está dado por:

$$P_c(\chi_3) = \lambda^2 + B\lambda + C, \quad (3.7)$$

con $B = rr_1(r - \alpha_2 Q_1) + rr_1^2 + Qr_1r\beta_1 > 0$ y $C = \frac{rr_1(r - \alpha_2 Q_1)(Q\beta_1 + r)}{rr_1 + QQ_1\alpha_2\beta_1} > 0$.

Ya que los coeficientes del polinomio característico para este punto son todos positivos cuando $Q_1 < \frac{r}{\alpha_2}$, se concluye que este es un polinomio tipo Hurwitz y por ende, χ_3 es estable. $\square$

Se acaba de demostrar que si $\chi_3 > 0$, el equilibrio χ_2 será inestable, implicando que o bien existe coexistencia entre ambas especies o las actividades pesqueras generan daño irreversible a los arrecifes de la zona.

Simulaciones numéricas:

A continuación, por medio de simulaciones numéricas se muestra gráficamente la estabilidad de los puntos de equilibrio asociados al modelo mostrado en (3.1).

El primer caso que se tiene es cuando el punto de coexistencia existe y por ende, las soluciones convergen a él (Figura 3.1). Los valores de los parámetros utilizados fueron $r = 0.9$, $r_1 = 0.9$, $\alpha_2 = 0.005$, $\beta_1 = 0.9$, $Q = 30$ y $Q_1 = 20$ con condiciones iniciales $C_0 = 5$ y $P_0 = 10$.

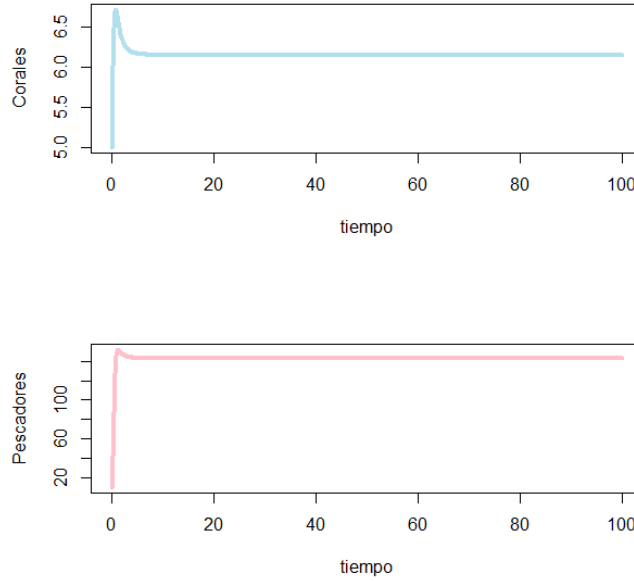


Figura 3.1: Para el modelo mostrado en (3.1), cuando el equilibrio χ_2 tiene sentido biológico las soluciones del modelo convergen a este equilibrio. En este caso, se tiene un escenario de coexistencia entre las poblaciones de C y P.

El segundo caso que se tiene es la exclusión de la población de corales convergiendo las soluciones a la capacidad de carga de los pescadores (Figura 3.2). Los valores de los parámetros fueron $r = 0.9$, $r_1 = 0.9$, $\alpha_2 = 0.05$, $\beta_1 = 0.9$, $Q = 30$ y $Q_1 = 20$ con condiciones iniciales $C_0 = 25$ y $P_0 = 5$.

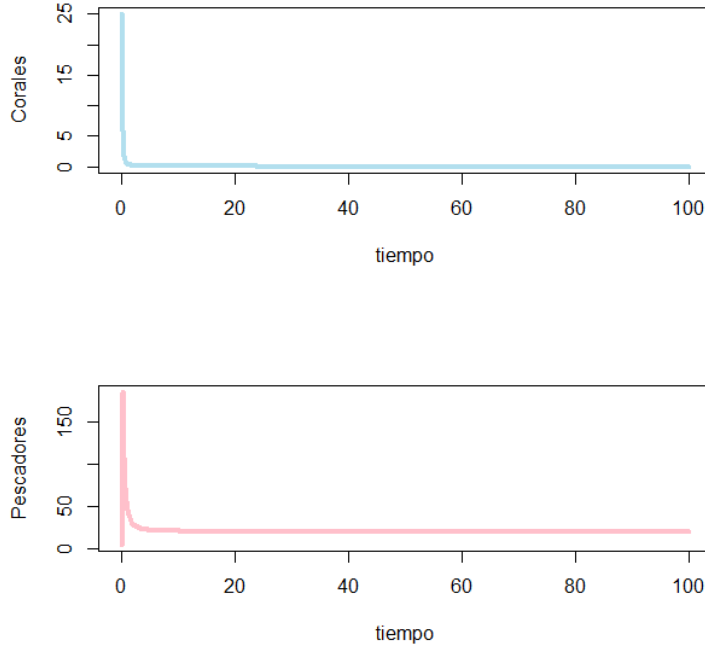


Figura 3.2: Para el modelo mostrado en (3.1) se tiene que cuando χ_2 es estable, las poblaciones de corales se extinguen mientras que la población de pescadores persiste.

3.0.2. Submodelo 2: Corales y Turistas

A continuación se estudiará la dinámica de la interacción entre Corales y Turistas la cual está dada por el siguiente submodelo.

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= rC \left(1 - \frac{C}{Q}\right) - \alpha_1 CT, \\ \frac{dT}{dt} &= T \left(\mu_C \frac{C}{C + \phi_C} - \gamma_1 T - w \right).\end{aligned}\tag{3.8}$$

El modelo dado en (3.8) presenta los siguientes puntos de equilibrio de frontera

$$\begin{aligned}\chi_0 &= (0, 0), \\ \chi_1 &= (Q, 0).\end{aligned}\tag{3.9}$$

Los puntos de equilibrio de frontera mostrados en (3.9), describen los siguientes escenarios: χ_0 describe una situación donde los arrecifes de coral de la zona desaparecen y dejan de llegar turistas a la misma. χ_1 describe un escenario donde dejan de llegar turistas a la zona, persistiendo unicamente los arrecifes de coral en la zona.

Ya que se mostraron los equilibrios de frontera, ahora se darán condiciones necesarias para la existencia de un punto de coexistencia entre ambas poblaciones.

Teorema 12 *Para el modelo dado por (3.8) si definimos las constantes:*

- $a_{m2} = \frac{r}{Q},$
- $b_{m2} = \frac{r}{Q}\phi_c - \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\omega + \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\mu_c - r,$
- $c_{m2} = -r\phi_c - \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\omega\phi_c,$

entonces existe al menos un punto de equilibrio de coexistencia entre las 2 poblaciones si la ecuación

$$a_{m2}C^{*2} + b_{m2}C^* + c_{m2} = 0,$$

tiene alguna solución real positiva C_E^* y además:

$$\mu_c > \omega \left(1 + \frac{2a_{m2}\phi_c}{-b_{m2} + \sqrt{b_{m2}^2 - 4a_{m2}c_{m2}}} \right) > 0.$$

Demostración Para encontrar el punto de equilibrio asociado al modelo es necesario resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineal:

$$\begin{aligned}0 &= r - \frac{r}{Q}C^* - \alpha_1 T^*, \\ 0 &= \mu_C \frac{C^*}{C^* + \phi_c} - \gamma_1 T^* - w.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Observamos que podemos escribir T^* a partir de la segunda ecuación de (3.10) como:

$$T^* = \left(\mu_c \frac{C^*}{C^* + \phi_c} - \omega \right) \frac{1}{\gamma_1}. \quad (3.11)$$

Si en la primer ecuación de (3.10), sustituimos el valor de T^* por la expresión dada en (3.11) obtendremos la siguiente ecuación cuadrática:

$$\frac{r}{Q} C^{*2} + \left(\frac{r}{Q} \phi_c - \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \omega + \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \mu_c - r \right) C^* - r \phi_c - \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \omega \phi_c = 0. \quad (3.12)$$

Ahora definiremos a_{m2} , b_{m2} y c_{m2} de la siguiente manera para hacer más fácil la lectura de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} a_{m2} &= \frac{r}{Q}, \\ b_{m2} &= \frac{r}{Q} \phi_c - \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \omega + \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \mu_c - r, \\ c_{m2} &= -r \phi_c - \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \omega \phi_c. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por lo que, encontrando las raíces de la ecuación (3.12) obtendremos dos posibles valores de C^* para un equilibrio de coexistencia:

$$C_{1,2} = \frac{-b_{m2} \pm \sqrt{b_{m2}^2 - 4a_{m2}c_{m2}}}{2a_{m2}} \quad (3.14)$$

Notamos que el discriminante es positivo debido a que $c_{m2} < 0$ y $a_{m2} > 0$, ademas se tiene que siempre será mayor que b_{m2} , por lo tanto siempre existirá un solo valor positivo de C^* :

$$C_1^* = \frac{-b_{m2} + \sqrt{b_{m2}^2 - 4a_{m2}c_{m2}}}{2a_{m2}} \quad (3.15)$$

Ahora solo resta encontrar el valor T^* para el punto de coexistencia entre ambas poblaciones, es decir, sustituyamos en T^* (mostrado por la expresión (3.11)) el valor que encontramos para C^* en la expresión (3.15), obtendremos que:

$$T^* = \frac{\mu_c}{\gamma_1} \frac{C_1^*}{C_1^* + \phi_c} - \frac{\omega}{\gamma_1}. \quad (3.16)$$

Sustituyendo a C^* en (3.16) por el valor encontrado en (3.15) y simplificando un poco, obtenemos:

$$T^* = \frac{\mu_c}{\gamma_1} \frac{-b_{m2} + \sqrt{b_{m2}^2 - 4a_{m2}c_{m2}}}{-b_{m2} + \sqrt{b_{m2}^2 - 4a_{m2}c_{m2}} + 2a_{m2}\phi_c} - \frac{\omega}{\gamma_1}. \quad (3.17)$$

De modo que la positividad de T^* está sujeta a que

$$\mu_c \left(\frac{-b_{m2} + \sqrt{b_{m2}^2 - 4a_{m2}c_{m2}}}{-b_{m2} + \sqrt{b_{m2}^2 - 4a_{m2}c_{m2}} + 2a_{m2}\phi_c} \right) - \omega > 0, \quad (3.18)$$

que de manera un poco más simplificada mostraría la necesidad de que:

$$\mu_c > \omega \left(1 + \frac{2a_{m2}\phi_c}{-b_{m2} + \sqrt{b_{m2}^2 - 4a_{m2}c_{m2}}} \right). \quad (3.19)$$

Cumpliendo así lo que menciona el teorema y garantizando que bajo las hipótesis establecidas puede existir un equilibrio de coexistencia

$$\chi_2 = (C_{M2}^*, T_{M2}^*), \quad (3.20)$$

cuyas componentes están dadas por las expresiones mostradas en (3.15) y (3.16) respectivamente, terminando así la demostración. $\square$

Para simplificar las referencias mostradas en este y los siguientes apartados, se dirá que el punto de equilibrio de coexistencia para el modelo presentado en (3.8) será dado por la siguiente expresión

$$\chi_2 = (C_{M2}, T_{M2}). \quad (3.21)$$

Estabilidad de los equilibrios del submodelo 2:

Para analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio asociados al modelo descrito en (3.8), nos apoyaremos de la matriz Jacobiana asociada al modelo, siendo esta

$$J(C, T) = \begin{bmatrix} r - 2\frac{r}{Q}C - \alpha_1 T & -\alpha_1 C \\ \mu_c \frac{T\phi_c}{(C+\phi_c)^2} & \mu_c \frac{C}{C+\phi_c} - 2\gamma_1 T - \omega \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Teorema 13 *Para el modelo dado por (3.8), con χ_0 mostrado en (3.9).*

El punto de equilibrio χ_0 es inestable para todos los valores de los parámetros del modelo.

Demostración Calculando el polinomio característico asociado a χ_0 utilizando la matriz Jacobiana mostrada en (3.22), obtendremos lo siguiente:

$$P_c(\chi_0) = (r - \lambda)(-\omega - \lambda). \quad (3.23)$$

Observe que, el polinomio característico dado en (3.23) admite una raíz positiva, siendo esta $\lambda = r$. Por lo tanto, χ_0 es inestable. $\square$

Teorema 14 *Para el modelo (3.8), con χ_1 y χ_2 mostrados en (3.9) y (3.20)*

- El punto de equilibrio χ_1 es estable si y sólo si $\mu_c \frac{Q}{Q+\phi_c} - \omega < 0$.
- El punto de equilibrio χ_2 es estable si existe y χ_1 es inestable.

Demostración Calculando el polinomio característico asociado a χ_1 utilizando la matriz Jacobiana mostrada en (3.22), obtendremos:

$$P_c(\chi_1) = (-r - \lambda) \left(\mu_c \frac{Q}{Q + \phi_c} - \omega - \lambda \right). \quad (3.24)$$

El polinomio característico dado en (3.24) tiene asociado los valores propios $\lambda_1 = -r$ y $\lambda_2 = \mu_c \frac{Q}{Q+\phi_c} - \omega$. Por lo tanto, el equilibrio χ_1 es estable si y sólo si $\mu_c \frac{Q}{Q+\phi_c} - \omega < 0$.

Para analizar la estabilidad del equilibrio χ_2 utilizaremos el criterio de Dulac y un análisis del campo de direcciones (Figura 3.3).

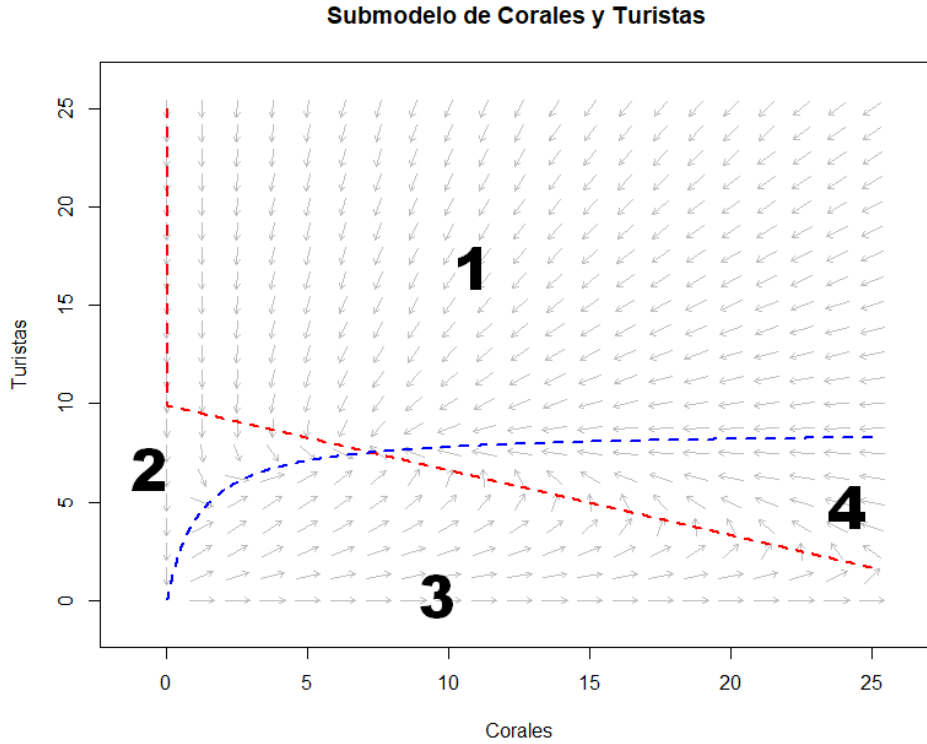


Figura 3.3: El campo de direcciones para el modelo mostrado en (3.8).

Notemos que se puede expresar el modelo dado por (3.8) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= M(C, T), \\ \frac{dT}{dt} &= N(C, T).\end{aligned}\tag{3.25}$$

Ahora, sea $h(C, T)$ la siguiente función de Dula:

$$h(C, T) = \frac{1}{CT}.\tag{3.26}$$

Posteriormente, multipliquemos el campo vectorial por $h(C, T)$ y calculemos la divergencia asociada al nuevo campo, obteniendo así:

$$\nabla(hM, hN) = -r\frac{1}{QT} - \gamma_1\frac{1}{C} < 0.\tag{3.27}$$

Observe que la divergencia del campo vectorial no cambia de signo para valores positivos de C y T , por lo tanto utilizando el criterio de Dulac, podemos garantizar que no existen orbitas periódicas en este sistema.

Por último, notemos que toda solución asociada al modelo dado por (3.8) es acotada. Esto se puede observar fácilmente si consideramos una solución que empiece en la región 1. Si la solución no es acotada eso significaría que no converge a un punto de equilibrio y que además, crece indefinidamente para los valores de C o de T . Esto resultaría imposible ya que para la región 1 se tiene que $\frac{dC}{dt} < 0$ y $\frac{dT}{dt} < 0$, por lo tanto la solución decrecería para los valores de C y T . Esto muestra que la solución debe converger a un punto de equilibrio o bien cruzar a otra de las regiones. Un análisis análogo se puede hacer para las demás regiones mostradas en la Figura 3.3, lo cual implicaría que para toda solución del modelo estudiado sin importar la región donde empiece, converge a un punto de equilibrio o pasa a otra región.

El razonamiento anterior nos muestra que las soluciones están acotadas. Una vez probado que no hay orbitas periódicas y que toda solución del modelo es acotada, por el argumento de McCluskey y Muldowney (McCluskey y Muldowney, 1998) nos garantiza que para cualquier condición inicial positiva, la solución de la ecuación diferencial convergerá al punto de equilibrio χ_2 . $\square$

Simulaciones numéricas:

A continuación, utilizando simulaciones numéricas se muestra gráficamente la estabilidad de los puntos de equilibrio asociados al modelo mostrado en (3.8). En la Figura 3.4 se puede observar que las soluciones convergen a la capacidad de carga de los corales, dejando de visitar los turistas esa zona. Los valores de los parámetros siendo $r = 0.798$, $Q = 300$, $\alpha_1 = 0.01201$, $\mu_c = 2.35$, $\phi_c = 1.744$, $\gamma_1 = 0.000151$ y $\omega = 0.44$ con las condiciones iniciales $C_0 = 12,91$ y $T_0 = 100$.

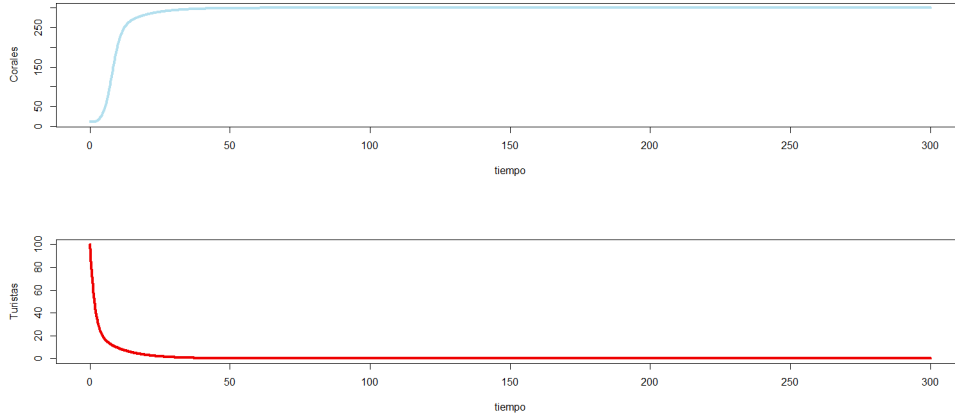


Figura 3.4: Para el modelo mostrado en (3.8), las soluciones pueden converger a la capacidad de carga de la población de corales.

En la Figura 3.5 se observa que las soluciones convergen al punto de coexistencia entre corales y turistas. Los valores de los parámetros siendo $r = 0.798$, $Q = 300$, $\alpha_1 = 0.01201$, $\mu_c = 2.35$, $\phi_c = 1.744$, $\gamma_1 = 0.00151$ y $\omega = 0.44$ con las condiciones iniciales $C_0 = 4.91$ y $T_0 = 100$.



Figura 3.5: Para el modelo dado por (3.8), las soluciones convergen al punto de coexistencia entre corales y turistas luego de oscilar un poco.

Por último, en la Figura 3.6 se puede observar que modificando los parámetros del modelo obtenemos más oscilaciones, lo cual indicaría un escenario poco favorable para ambas poblaciones. Los valores de los parámetros siendo $r = 0.798$, $Q = 300$, $\alpha_1 = 0.01201$, $\mu_c = 2.35$, $\phi_c = 1.744$, $\gamma_1 = 0.000151$ y $\omega = 0.44$ con las condiciones iniciales $C_0 = 12.91$ y $T_0 = 100$.

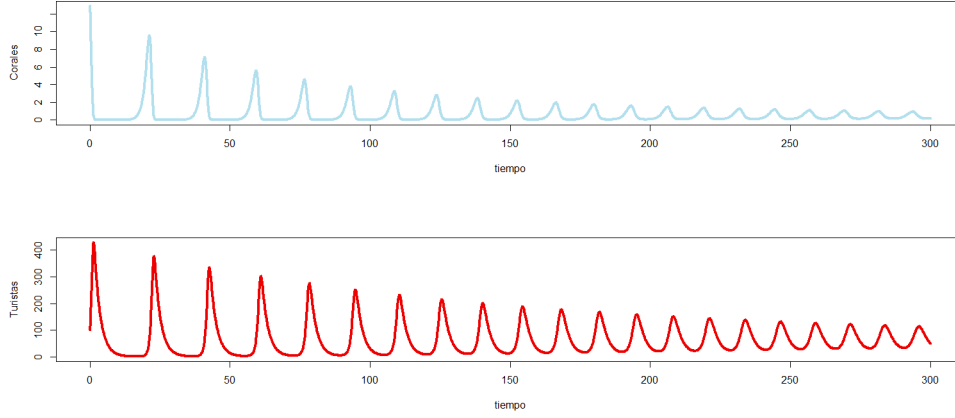


Figura 3.6: Para el modelo dado por (3.8), las soluciones empiezan a oscilar con mayor amplitud cuando el valor γ_1 se hace más chico.

3.0.3. Submodelo 3: Pescadores y Turistas

A continuación se estudiará la dinámica de la interacción entre Pescadores y Turistas la cual está dada por el siguiente submodelo.

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= r_1 P \left(1 - \frac{P}{Q_1}\right) - \beta_2 P T, \\ \frac{dT}{dt} &= T(-\gamma_1 T - \gamma_2 P - w).\end{aligned}\tag{3.28}$$

El modelo dado en (3.28) presenta los siguientes puntos de equilibrio de frontera

$$\begin{aligned}\chi_0 &= (0, 0), \\ \chi_1 &= (Q_1, 0).\end{aligned}\tag{3.29}$$

Los puntos de equilibrio de frontera mostrados en (3.29), describen los siguientes escenarios: χ_0 es un escenario de exclusión para ambas poblaciones, es decir, uno donde deja de haber pescadores en la zona y dejan de llegar turistas. χ_1 muestra exclusión de la población de turistas, persistiendo únicamente la población de pescadores.

Ahora mostraremos que bajo ninguna condición puede existir un punto de coexistencia entre la población de Pescadores y Turistas.

Teorema 15 *Para el modelo dado por (3.28), no pueden existir puntos de coexistencia.*

Demostración Las ceroclinas asociadas al sistema son:

$$\begin{aligned}0 &= r_1 - \frac{r_1 P}{Q_1} - \beta_2 T, \\ 0 &= -\gamma_1 T - \gamma_2 P - w.\end{aligned}\tag{3.30}$$

Veamos que la primera ecuación de (3.30) puede reescribirse como

$$T^* = \left(r_1 - \frac{r_1 P^*}{Q_1}\right) \frac{1}{\beta_2}.\tag{3.31}$$

Evalutando T^* en la segunda ecuación de (3.30), obtenemos

$$\begin{aligned}-r_1 \frac{\gamma_1}{\beta_2} + \frac{r_1}{Q_1} \frac{\gamma_1}{\beta_2} P - \gamma_2 P - \omega &= 0, \\ P \left(\frac{r_1}{Q_1} \frac{\gamma_1}{\beta_2} - \gamma_2 \right) &= r_1 \frac{\gamma_1}{\beta_2} + \omega, \\ P^* &= \frac{r_1 \frac{\gamma_1}{\beta_2} + \omega}{\left(\frac{r_1}{Q_1} \frac{\gamma_1}{\beta_2} - \gamma_2 \right)}.\end{aligned}\tag{3.32}$$

Por lo tanto, la positividad de P^* está sujeta a

$$\frac{r_1 \gamma_1}{Q_1 \beta_2} - \gamma_2 > 0.\tag{3.33}$$

Ahora en (3.31) reemplacemos a P^* por el valor obtenido en (3.32)

$$\begin{aligned}
T^* &= \frac{r_1}{\beta_2} - \frac{r_1}{Q_1\beta_2} \frac{r_1 \frac{\gamma_1}{\beta_2} + \omega}{\left(\frac{r_1}{Q_1} \frac{\gamma_1}{\beta_2} - \gamma_2\right)}, \\
T^* &= \frac{r_1}{\beta_2} - r_1 \frac{r_1 \frac{\gamma_1}{\beta_2} + \omega}{(r_1\gamma_1 - \gamma_2 Q_1\beta_2)}, \\
T^* &= \frac{r_1(r_1\gamma_1 - \gamma_2 Q_1\beta_2)}{\beta_2(r_1\gamma_1 - \gamma_2 Q_1\beta_2)} - r_1\beta_2 \frac{r_1 \frac{\gamma_1}{\beta_2} + \omega}{\beta_2(r_1\gamma_1 - \gamma_2 Q_1\beta_2)}, \\
T^* &= \frac{-r_1\gamma_2\beta_2 Q_1 - r_1\beta_2\omega}{\beta_2(r_1\gamma_1 - \gamma_2 Q_1\beta_2)}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

De la última igualdad mostrada en (3.34) podemos observar que si $P^* > 0$ entonces $T^* < 0$ y viceversa, por lo tanto no puede existir un punto de coexistencia para ambas poblaciones. $\square$

Estabilidad de los equilibrios del submodelo 3:

Ahora analicemos la estabilidad de los dos puntos de equilibrio asociados al modelo descrito en (3.28). Para esto de nuevo ocuparemos la matriz Jacobiana asociada al modelo, la cual es:

$$J(P, T) = \begin{bmatrix} r_1 - 2\frac{r_1}{Q_1}P - \beta_2 T & -\beta_2 P \\ -\gamma_2 T & -2\gamma_1 T - \gamma_2 P - \omega \end{bmatrix}. \tag{3.35}$$

Teorema 16 *Para el modelo dado por (3.28) y los puntos χ_0 y χ_1 mostrados en (3.29), se tiene que:*

- *El punto χ_0 es inestable para todos los valores de los parámetros del modelo.*
- *El punto χ_1 es estable para todos los valores de los parámetros del modelo.*

Demostración Calculemos los polinomios característicos asociados a los puntos χ_0 y χ_1 a partir de la matriz Jacobiana mostrada en (3.35). El punto χ_0 tiene el siguiente polinomio característico:

$$P_c(\chi_0) = (r_1 - \lambda)(-\omega - \lambda). \tag{3.36}$$

Se concluye que el polinomio característico admite una raíz positiva, siendo esta $\lambda = r_1$. Por lo tanto se concluye que el punto es inestable.

Para la segunda afirmación basta con ver que el polinomio característico asociado al punto χ_1 es

$$P_c(\chi_1) = (-r_1 - \lambda)(-\gamma_2 - \omega - \lambda). \tag{3.37}$$

Por lo tanto se tiene que las raíces asociadas al punto χ_1 son $\lambda = -r_1$ y $\lambda = -\gamma_2 - \omega$, por lo tanto se concluye que χ_1 es estable. $\square$

Simulaciones numéricas

A continuación, utilizando simulaciones numéricas se muestra gráficamente la estabilidad de los puntos de equilibrio asociados al modelo mostrado en (3.28). En la Figura 3.7 se puede observar que las soluciones convergen únicamente a la capacidad de carga de los pescadores, mientras que la cantidad de turistas que visita la zona decae hasta cero.

Los valores de los parámetros utilizados para la simulación fueron $r_1 = 0.98$, $Q_1 = 200$, $\beta_2 = 1.122$, $\gamma_1 = 0.151$, $\gamma_2 = 0.162$ y $\omega = 0.44$ con condiciones iniciales $P_0 = 0.19$ y $T_0 = 100$.

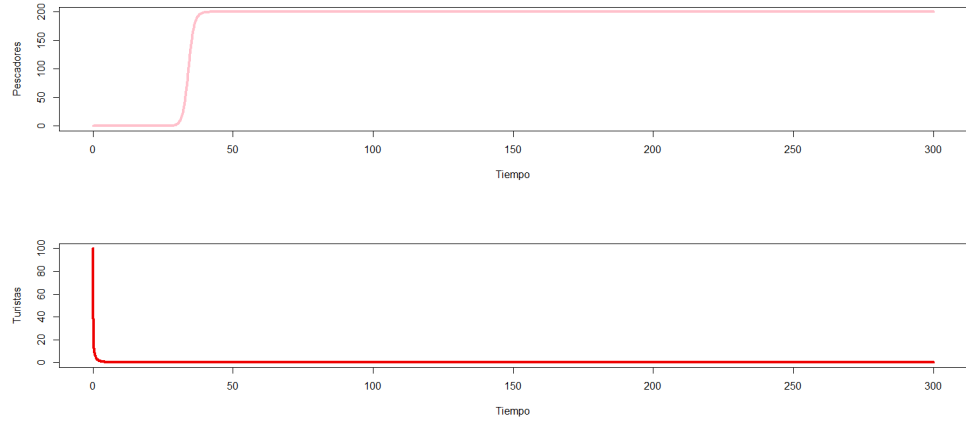


Figura 3.7: Para el modelo dado por (3.28), la solución converge a la capacidad de carga de los pescadores, presentando así un escenario donde dejan de ir turistas a la zona por falta de atraktividad que los mantenga.

3.0.4. Submodelo 4: Turistas y Capital

A continuación se estudiará la dinámica de la interacción entre Turistas y Capital en ausencia de arrecifes de coral y pescadores, la cual está dada por el siguiente submodelo:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= T \left(-\gamma_1 T + \mu_K \frac{K}{K + \phi_K(T + 1)} - w \right), \\ \frac{dK}{dt} &= -\delta K + \epsilon T.\end{aligned}\tag{3.38}$$

El modelo dado en (3.38) presenta el siguiente punto de equilibrio de frontera

$$\chi_0 = (0, 0),\tag{3.39}$$

este punto describe un escenario donde dejan de llegar turistas a la zona y todas las construcciones dedicadas al turismo desaparecen.

Para analizar la existencia de puntos de equilibrio no triviales, veamos el siguiente teorema:

Teorema 17 *Para el modelo (3.38), definamos a_{m4} , b_{m4} y c_{m4} de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned}a_{m4} &= (\gamma_1 \frac{\epsilon}{\delta} + \gamma_1 \phi_k), \\ b_{m4} &= -\omega(\mu_k \frac{\epsilon}{\delta \omega} - \gamma_1 \frac{\phi_k}{\omega} - \frac{\epsilon}{\delta} - \phi_k), \\ c_{m4} &= \omega \phi_k.\end{aligned}$$

Entonces, los siguientes casos pueden ocurrir:

- Si $b_{m4} < 0$ y además $b_{m4}^2 - 4a_{m4}c_{m4} > 0$, entonces existen dos puntos de coexistencia.
- Si $b_{m4} < 0$ y además $b_{m4}^2 - 4a_{m4}c_{m4} < 0$, entonces no existen puntos de coexistencia.
- Si $b_{m4} < 0$ y además $b_{m4}^2 - 4a_{m4}c_{m4} = 0$, entonces solo existe un punto de coexistencia.
- Si $b_{m4} > 0$ entonces no existen puntos de coexistencia.

Demostración Las ceroclinas del modelo están dadas por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}0 &= -\gamma_1 T^* + \mu_k \frac{K^*/(T^* + 1)}{K^*/(T^* + 1) + \phi_k} - \omega, \\ 0 &= -\delta K^* + \epsilon T^*.\end{aligned}\tag{3.40}$$

De aquí podemos ver la siguiente igualdad:

$$K^* = \frac{\epsilon}{\delta} T^*. \quad (3.41)$$

Sustituyendo a K^* en (21), obtendremos la siguiente ecuación cuadrática

$$(\gamma_1 \frac{\epsilon}{\delta} + \gamma_1 \phi_k) T^{*2} - \omega(\mu_k \frac{\epsilon}{\delta \omega} - \gamma_1 \frac{\phi_k}{\omega} - \frac{\epsilon}{\delta} - \phi_k) T^* + \omega \phi_k = 0. \quad (3.42)$$

Si definimos los coeficientes a_{m4} , b_{m4} y c_{m4} de la misma manera que en el enunciado del teorema, obtendremos:

$$\begin{aligned} a_{m4} &= (\gamma_1 \frac{\epsilon}{\delta} + \gamma_1 \phi_k), \\ b_{m4} &= -\omega(\mu_k \frac{\epsilon}{\delta \omega} - \gamma_1 \frac{\phi_k}{\omega} - \frac{\epsilon}{\delta} - \phi_k), \\ c_{m4} &= \omega \phi_k. \end{aligned} \quad (3.43)$$

La solución de la ecuación (3.42), nos dará la expresión para T^* , siendo esta

$$T_{1,2}^* = \frac{-b_{m4} \pm \sqrt{b_{m4}^2 - 4a_{m4}c_{m4}}}{2a_{m4}} \quad (3.44)$$

De igual manera podemos obtener $K_{1,2}^*$

$$K_{1,2}^* = \frac{\epsilon}{\delta} \frac{-b_{m4} \pm \sqrt{b_{m4}^2 - 4a_{m4}c_{m4}}}{2a_{m4}} \quad (3.45)$$

De esta forma ya tenemos expresiones precisas para los puntos de equilibrio, y queda demostrada la conclusión del teorema. $\square$

Para no tener que recurrir a citar las expresiones en forma explícita mostradas en (3.44) y (3.45), usaremos la siguiente notación

$$\begin{aligned} T_1^* &= \frac{-b_{m4} - \sqrt{b_{m4}^2 - 4a_{m4}c_{m4}}}{2a_{m4}}, \\ K_1^* &= \frac{\epsilon}{\delta} T_1^*, \end{aligned} \quad (3.46)$$

y también

$$\begin{aligned} T_2^* &= \frac{-b_{m4} + \sqrt{b_{m4}^2 - 4a_{m4}c_{m4}}}{2a_{m4}}, \\ K_2^* &= \frac{\epsilon}{\delta} T_2^*. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Estabilidad de los equilibrios triviales del submodelo 4:

Ahora analicemos la estabilidad del punto de equilibrio trivial asociado al modelo descrito en (3.38). Para esto de nuevo ocuparemos la matriz Jacobiana asociada al modelo, la cual es:

$$J(T, K) = \begin{bmatrix} -2\gamma_1 T - \omega + \mu_k \frac{K^2 + K\phi_k}{(K + \phi_k(T+1))^2} & \mu_k \frac{\phi_k(T^2 + T)}{(K + \phi_k(T+1))^2} \\ \epsilon & -\delta \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Teorema 18 *Para el modelo dado por (3.38) se tiene que el punto χ_0 mostrado en (3.39) es estable para todos los valores de los parámetros del modelo.*

Demostración Calculando el polinomio característico asociado al punto χ_0 a partir de la matriz Jacobiana mostrada en (3.48) obtendremos lo siguiente:

$$P_c(\chi_0) = (-\lambda - \omega)(-\lambda - \delta). \quad (3.49)$$

Notemos que las raíces asociadas al punto χ_0 son $\lambda = -\omega$ y $\lambda = -\delta$. Por lo tanto, se concluye que χ_0 es un punto estable. $\square$

Estabilidad de un único punto de coexistencia para el submodelo 4:

Debido a la complejidad de este modelo se tienen que hacer análisis para los casos separados de existencia para uno o dos puntos de equilibrio de coexistencia asociados al modelo descrito en (3.38). En esta sección se tratará la estabilidad de un único punto de equilibrio de coexistencia.

Teorema 19 *En caso de existir solo un punto de equilibrio de coexistencia para el modelo definido en (3.38), este sera inestable.*

Demostración Para que exista solo un punto de equilibrio de coexistencia entre ambas poblaciones, el discriminante de las soluciones $T_{1,2}^*$ dada por la ecuación (3.44) debe ser igual a cero, es decir

$$\omega^2 \left(\mu_k \frac{\epsilon}{\delta\omega} - \gamma_1 \frac{\phi_k}{\omega} - \frac{\epsilon}{\delta} - \phi_k \right)^2 - 4 \left(\gamma_1 \frac{\epsilon}{\delta} + \gamma_1 \phi_k \right) (\omega \phi_k) = 0, \quad (3.50)$$

para poder garantizar que eso ocurra despejemos al parámetro μ_k de la ecuación (3.50), obteniendo así

$$\mu_k = \omega + \frac{\delta}{\epsilon} \phi_k (\gamma_1 + \omega) + \frac{\delta}{\epsilon} \sqrt{4\gamma_1 \omega \phi_k \left(\frac{\epsilon}{\delta} + \phi_k \right)}. \quad (3.51)$$

Sustituyendo el valor de μ_k por aquel encontrado en (3.51), las expresiones para

T^* y K^* en el único punto de coexistencia serán:

$$\begin{aligned} T_0^* &= \sqrt{\frac{\omega\phi_k}{\gamma_1\frac{\epsilon}{\delta} + \gamma_1\phi_k}}, \\ K_0^* &= \frac{\epsilon}{\delta} \sqrt{\frac{\omega\phi_k}{\gamma_1\frac{\epsilon}{\delta} + \gamma_1\phi_k}}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Ya que tenemos los valores que definen a nuestro punto de equilibrio, procederemos a analizar la estabilidad del punto utilizando el campo de direcciones asociado a la existencia de este punto de equilibrio.

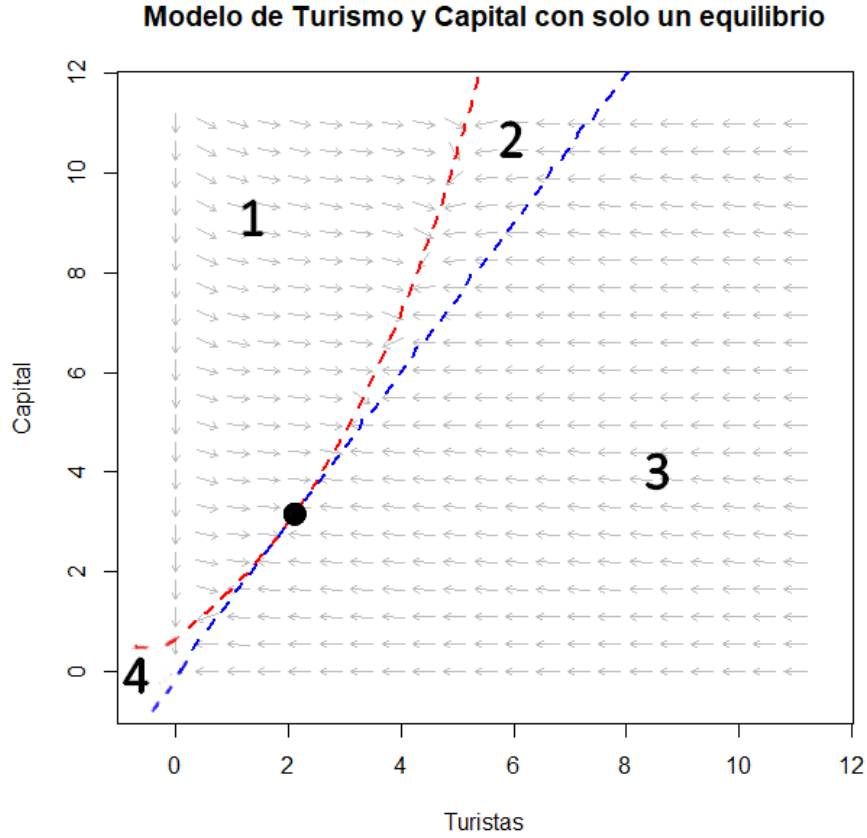


Figura 3.8: El campo de direcciones asociado al modelo mostrado en (3.38) cuando solo existe un punto de coexistencia. Siendo la linea punteada azul la ceroclina asociada a T y la linea roja a K .

A partir de la Figura 3.8, se puede apreciar que solo la región 2 garantiza

la convergencia al equilibrio de coexistencia. Mientras que la región 4 garantiza convergencia al origen, por lo tanto, en caso de existir solo un punto de equilibrio de coexistencia este será inestable. $\square$

Estabilidad de dos puntos de coexistencia para el submodelo 4:

En esta sección se hará un análisis de la estabilidad de los dos puntos de equilibrio de coexistencia en caso de que ambos existan. Para esto se utilizarán múltiples teoremas que servirán para analizar la estabilidad de las diversas secciones que aparecen a causa de las cetroclinas. Específicamente se empezará por demostrar que no existen orbitas periódicas en este modelo.

Teorema 20 *Para el modelo dado por (3.38) no existen orbitas periódicas.*

Demostración Sea

$$\psi(T, K) = \frac{1}{T}, \quad (3.53)$$

la función de Dulac a utilizar para este modelo. Notemos que podemos expresar el sistema asociado al modelo de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= M_1(T, K), \\ \frac{dK}{dt} &= N_1(T, K). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Consideremos un nuevo campo vectorial dado por

$$F' = (\psi * M_1(T, K), \psi * N_1(T, K)), \quad (3.55)$$

de modo que si calculamos la divergencia asociada a F' obtendremos:

$$\nabla(F') = -\gamma_1 - \mu_k \frac{K\phi_k}{(K + \phi_k(T+1))^2} - \frac{\delta}{T} < 0. \quad (3.56)$$

La divergencia de nuestro nuevo campo vectorial es siempre negativa para $T, K > 0$, por lo tanto gracias al criterio de Dulac, garantizamos que no hay orbitas periódicas. $\square$

Ya que probamos que no existen orbitas periódicas asociadas al modelo, podemos garantizar que o bien las soluciones pasarán entre las distintas regiones dadas por las cetroclinas o que permanecerán en una sola.

Para probar que en el modelo dado por (3.38), las soluciones convergen al punto de coexistencia T_m o al origen hagamos un análisis del comportamiento de las soluciones con el campo de direcciones asociado al sistema (ver Figura 3.9).

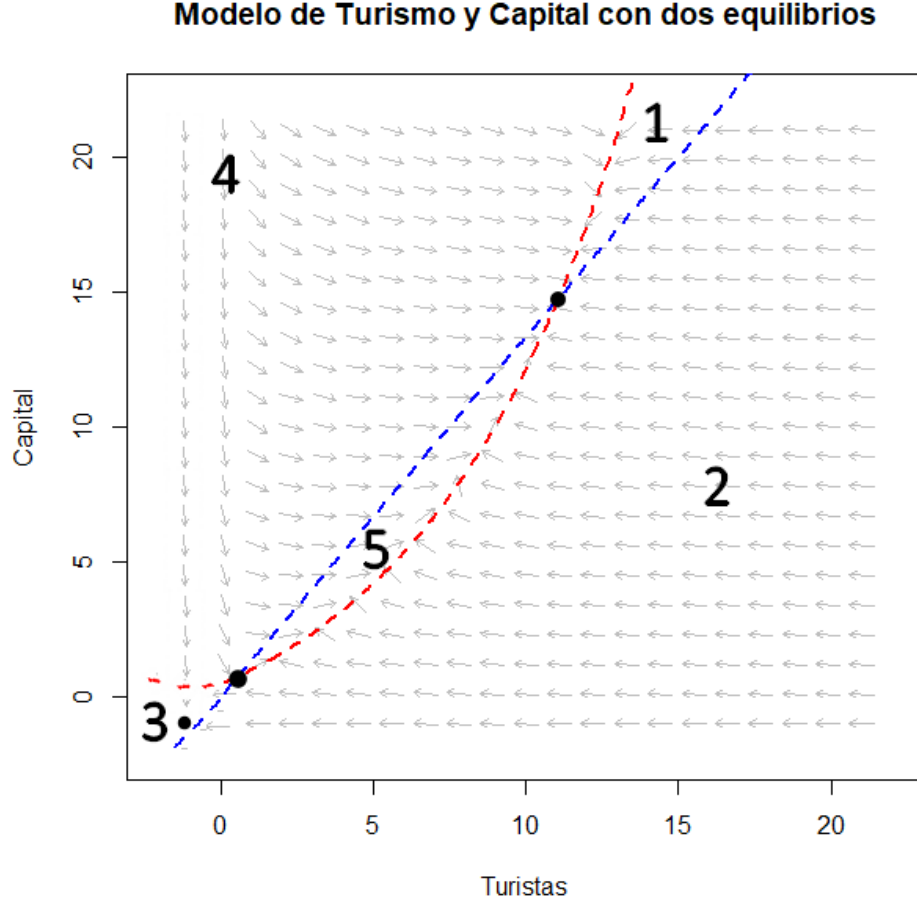


Figura 3.9: El campo de direcciones asociado al modelo mostrado en (3.38), cuando existen dos puntos de equilibrio positivos. Siendo la línea punteada azul la ceroclina asociada a T y la línea roja a K .

Teorema 21 Para el modelo dado por (3.38) se tiene que:

- Toda solución $(T(t), K(t))$ que empiece en la región 1 o 5 en tiempo $t = t_0$ se mantiene en esa región para $t \geq t_0$ y finalmente tiende al punto de equilibrio de coexistencia T^*, K^* .

- Toda solución $(T(t), K(t))$ que empiece en la región 3 para $t = t_0$, se mantendrá en esa región para $t \geq t_0$ y finalmente convergerá al origen.

Demostración Supongamos que la solución abandona la región 1 en tiempo $t = t^*$. Entonces $\frac{dT}{dt}(t^*) = 0$ o bien $\frac{dK}{dt}(t^*) = 0$, ya que la solución tendría que pasar por la recta l_1 o por la curva c_1 . Sin pérdida de generalidad supongamos que cruza la recta l_1 y por ende $\frac{dT}{dt}(t^*) = 0$.

Notemos que

$$\frac{d^2T}{dt^2}(t^*) = \mu_k \frac{K'(t^*)T(t^*)(\phi_k T(t^*) + \phi_k)}{(K(t^*) + \phi_k(T(t^*) + 1))^2} < 0, \quad (3.57)$$

por lo tanto al cruzar la recta l_1 tendríamos un máximo, lo cual no podría ser posible ya que $T(t)$ es decreciente en la región 1.

Ya que las opciones anteriores no sirvieron, la única elección factible es que la solución cruce la curva c_1 y por ende $\frac{dK}{dt}(t^*) = 0$. Veamos que

$$\frac{d^2K}{dt^2} = \epsilon T'(t^*) < 0. \quad (3.58)$$

Es decir que cuando se cruza la curva c_1 se tiene un máximo para la solución del sistema, lo cual no es posible ya que en la región 1 $K(t)$ es decreciente.

Por ende, la solución $(T(t), K(t))$ no puede salir de la región 1 para $t \geq t_0$. Debido a que $T(t)$ y $K(t)$ son monótonas decrecientes y no salen de la región 1, solamente pueden converger al punto de equilibrio T_{m4} .

Para finalizar, las demostraciones para soluciones que empiecen en las regiones 3 y 5 son análogas. $\square$

Teorema 22 Para el modelo dado por (3.38) se tiene que una solución $(T(t), K(t))$ que empiece en la región 2 o 4 y que no converja en la misma región a un punto de equilibrio, podrá pasar a la región 1, 3 o 5.

Demostración Sea $(T(t), K(t))$ una solución para el modelo propuesto tal que empiece dentro de la región 2. Ahora supongamos que lo mencionado en el teorema no es cierto, es decir que la solución $(T(t), K(t))$ permanece en la región 2 para todo $t \geq t_0$. Es decir, se tiene que $\frac{dT}{dt} < 0$ y $\frac{dK}{dt} > 0$. Notemos que si la solución no puede converger a un punto de equilibrio ni pasar a otra región, eso significa que eventualmente la solución tocará a la recta l_1 o a la curva c_1 . Pero como la solución no puede converger a un punto sobre la misma ni atravesarla, eso significa que la solución debe seguir su trayectoria, por ende tendría que ocurrir que $\frac{dT}{dt} > 0$ ó $\frac{dK}{dt} < 0$, lo cual es una contradicción a que la solución permanezca en la región 2. Por lo tanto las soluciones que empiecen en la región 2 pueden pasar a la región 1, 3 o 5.

Para finalizar, la demostración de las soluciones que empiecen en la región 4 es análoga al caso anterior. $\square$

Ahora solo resta unir lo demostrado en teoremas anteriores para generar el siguiente resultado:

Teorema 23 *Si para el modelo dado por (3.38) existen dos puntos de equilibrio de coexistencia (definidos en las expresiones (3.46) y (3.47)), entonces uno de ellos será inestable y el otro será estable.*

Demostración Este resultado es inmediato al considerar los dos teoremas anteriores. $\square$

Simulaciones numéricas:

A continuación, se presentan simulaciones numéricas que muestran gráficamente la estabilidad de los puntos de equilibrio asociados al modelo mostrado en (3.38).

Cuando solo existe un punto de coexistencia este será inestable. Por lo tanto las soluciones pueden converger a ese punto (ver Figura 3.10) o al origen si se está lo suficientemente cerca (ver Figura 3.11). Los valores de los parámetros utilizados para la Figura 3.10 fueron $\gamma_1 = 0.151$, $\mu_k = \omega + \frac{\delta}{\epsilon} \phi_k (\gamma_1 + \omega) + \frac{\delta}{\epsilon} \sqrt{4\gamma_1 \omega \phi_k (\frac{\epsilon}{\delta} + \phi_k)}$, $\phi_k = 1.72$, $\omega = 2$, $\delta = 1.4$, $\epsilon = 0.46$, con condiciones iniciales $T_o = 2.13$ y $K_o = 2.17$.

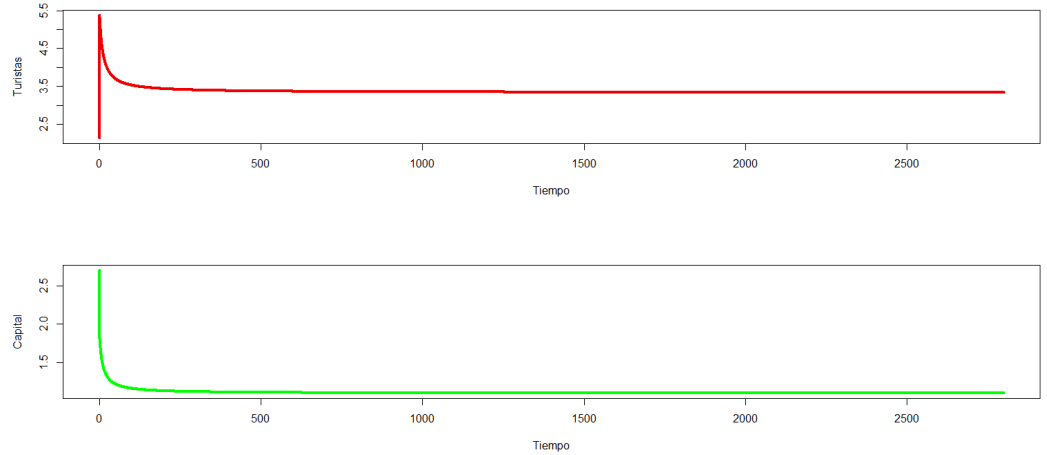


Figura 3.10: Para el modelo descrito en (3.38), cuando solo existe un punto de equilibrio, las soluciones pueden converger a un punto de coexistencia.

Mientras que para la Figura 3.11 los valores de los parámetros fueron $\gamma_1=0.151$, $\mu_k = \omega + \frac{\delta}{\epsilon}\phi_k(\gamma_1 + \omega) + \frac{\delta}{\epsilon}\sqrt{4\gamma_1\omega\phi_k(\frac{\epsilon}{\delta} + \phi_k)}$, $\phi_k=1.72$, $\omega=2$, $\delta=1.4$, $\epsilon=0.46$, con condiciones iniciales $T_o=0.13$ y $K_o=0.17$.

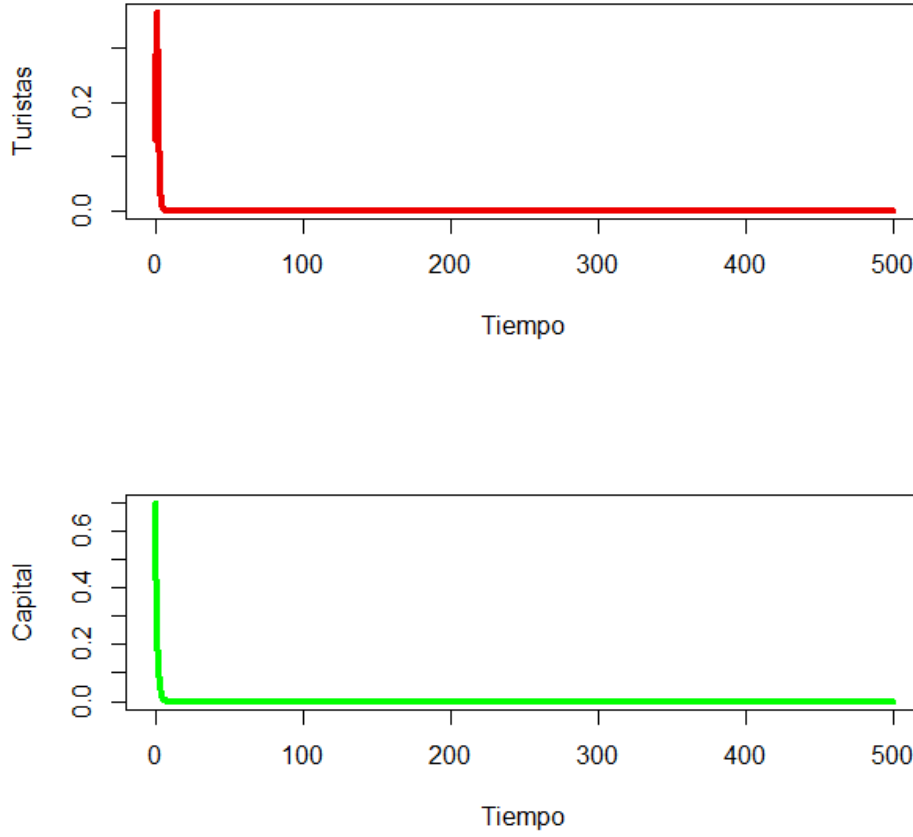


Figura 3.11: Para el modelo descrito en (3.38), cuando solo existe un punto de equilibrio, las soluciones pueden converger al origen. Esto quiere decir que los turistas dejarán de visitar la zona y que no habrá edificios con atractividad turística.

Por otra parte, cuando existen dos puntos de equilibrio, de coexistencia, uno tendrá gran atractividad para condiciones iniciales grandes y chicas (ver Figura 3.12 y Figura 3.13 respectivamente). Los valores de los parámetros para ambas figuras fueron $\gamma_1 = 0.151$, $\mu_k = 3.46$, $\phi_k = 1.72$, $\omega = 0.025$, $\delta = 0.4$ y $\epsilon = 0.12$ con condiciones iniciales $T_o = 28$ y $K_o = 1$, mientras que para la Figura 3.13 las condiciones iniciales son $T_0 = 0.0013$ y $K = 0.007$.

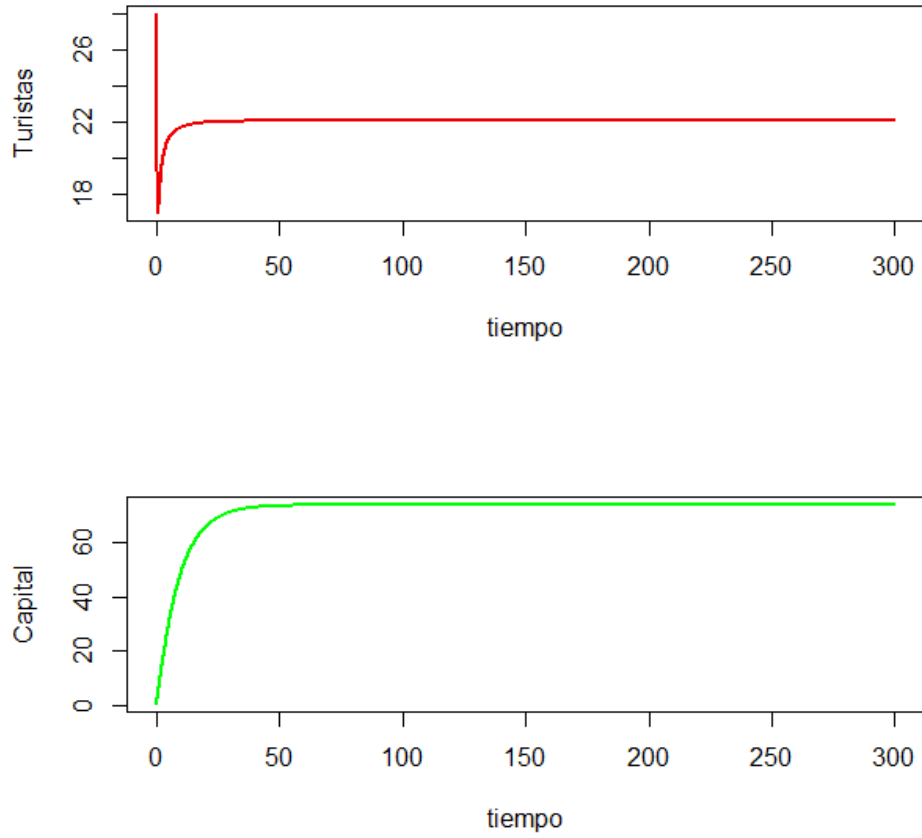


Figura 3.12: Para el modelo descrito en (3.38), cuando existen dos puntos de equilibrio de coexistencia, las soluciones con condición inicial grandes son atraídas por uno de ellos.

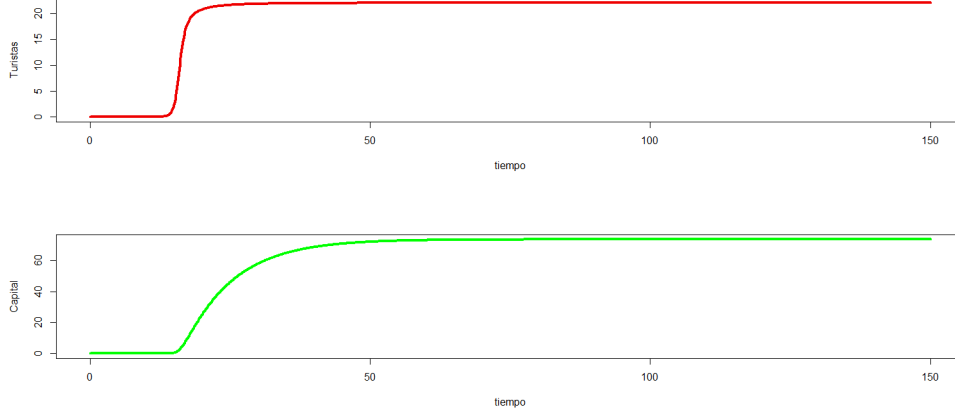


Figura 3.13: Para el modelo descrito en (3.38), cuando existen dos puntos de equilibrio de coexistencia, las soluciones con condición inicial chicas también son atraídas por uno de ellos.

Por último, incluso cuando existen dos puntos de equilibrio de coexistencia, el origen permanece estable para condiciones iniciales chicas (Figura 3.14). Para la Figura 3.14 fueron utilizados los valores de los parámetros $\gamma_1 = 0.151$, $\mu_k = 3.46$, $\phi_k = 1.72$, $\omega = 0.025$, $\delta = 0.4$, $\epsilon = 0.12$, con condiciones iniciales $T_o = 0.000013$ y $K_o = 0.00007$.

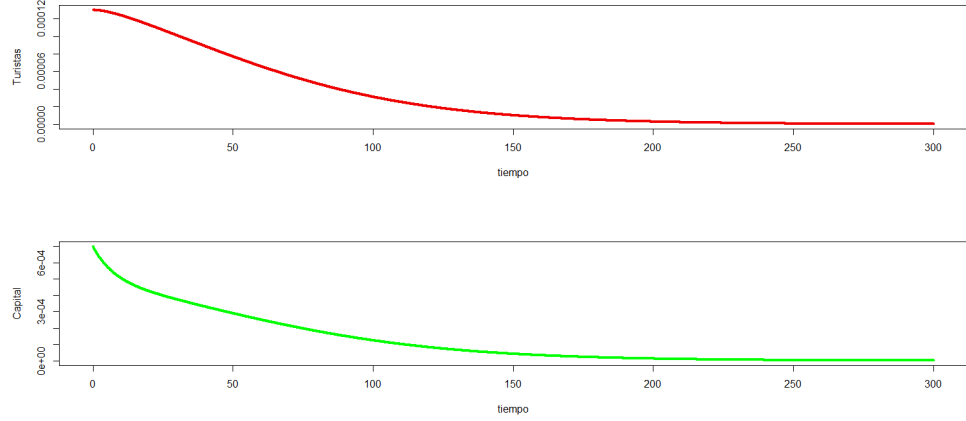


Figura 3.14: Para el modelo descrito en (3.38), cuando existen dos puntos de equilibrio de coexistencia, las soluciones con condición inicial muy pequeñas serán atraídas al origen.

3.0.5. Submodelo 5: Corales, Pescadores y Turistas

A continuación se estudiará la dinámica de la interacción entre Corales, Pescadores y Turistas la cual está dada por el siguiente submodelo.

$$\begin{aligned}
 \frac{dC}{dt} &= rC \left(1 - \frac{C}{Q} \right) - C(\alpha_1 T + \alpha_2 P), \\
 \frac{dP}{dt} &= r_1 P \left(1 - \frac{P}{Q_1} \right) + \beta_1 PC - \beta_2 PT, \\
 \frac{dT}{dt} &= T \left(\mu_C \frac{C}{C + \phi_C} - \gamma_1 T - \gamma_2 P - w \right).
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

El modelo dado en (3.59) presenta los siguientes puntos de equilibrio de frontera

$$\begin{aligned}
 \chi_0 &= (0, 0, 0), \\
 \chi_1 &= (Q, 0, 0), \\
 \chi_2 &= (0, Q_1, 0), \\
 \chi_3 &= (C_{M2}, 0, T_{M2}), \\
 \chi_4 &= (C_{M1}, P_{M1}, 0).
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Los puntos de equilibrio de frontera mostrados en (3.60), describen los siguientes escenarios: χ_0 describe un escenario de extinción de las tres especies. χ_1 describe exclusión de las poblaciones de pescadores y turistas, persistiendo únicamente la población de corales. χ_2 describe exclusión de los corales y turistas, persistiendo únicamente la población de pescadores. χ_3 describe un escenario

donde la población de corales y turistas habitan en coexistencia, mientras que la población de pescadores es excluida. Finalmente, χ_4 describe un escenario de coexistencia entre las poblaciones de corales y de pescadores, con exclusión de los turistas.

Siendo las coordenadas entradas C y T en el punto χ_3 las mismas que en (3.21) y las entradas χ_4 las mismas que en (3.3) Ahora, para ver qué pasa con los puntos de coexistencia asociados a este sistema, veamos el siguiente teorema:

Teorema 24 *Para el modelo dado por (3.59) definamos las constantes:*

- $\Upsilon = \alpha_1 \frac{Q}{r} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} - \alpha_2 \frac{Q}{r}.$
- $\Delta = \frac{1}{r_1 \gamma_1 - \beta_2 Q_1 \gamma_2}.$
- $\xi = Q + \alpha_1 \frac{Q}{r} \frac{\omega}{\gamma_1}.$
- $\zeta = r_1 \gamma_1 Q_1 + \beta_2 Q_1 \omega.$
- $A_{m5} = \Upsilon \Delta \beta_1 \gamma_1 Q_1 - 1.$
- $B_{m5} = \Upsilon \Delta \zeta + \Upsilon \Delta \beta_1 Q_1 \phi_c - \Upsilon \Delta \beta_2 Q_1 \mu_c - \frac{\alpha_1 Q \mu_c}{r \gamma_1} + \xi - \phi_c.$
- $D_{m5} = \Upsilon \Delta \zeta \phi_c + \xi \phi_c.$

Entonces existe al menos un punto de equilibrio de coexistencia entre las 3 poblaciones si la ecuación

$$A_{m5} C^{*2} + B_{m5} C^* + D_{m5} = 0,$$

tiene alguna solución real positiva C_E^* que además cumple:

$$P_E^* = \frac{r_1 \gamma_1 Q_1 + \beta_1 \gamma_1 Q_1 C_E^* - \beta_2 Q_1 \mu_c \frac{C_E^*}{C_E^* + \phi_c} + \beta_2 Q_1 \omega}{r_1 \gamma_1 - \beta_2 Q_1 \gamma_2} > 0,$$

y también

$$T_E^* = \frac{\mu_c}{\gamma_1} \frac{C_E^*}{C_E^* + \phi_c} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} P_E^* - \frac{\omega}{\gamma_1} > 0.$$

Demostración Para encontrar los valores de equilibrio para C, P y T necesitamos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0 &= r - \frac{r}{Q} C^* - \alpha_1 T^* - \alpha_2 P^*, \\ 0 &= r_1 - \frac{r_1 P^*}{Q_1} + \beta_1 C^* - \beta_2 T^*, \\ 0 &= \mu_C \frac{C^*}{C^* + \phi_c} - \gamma_1 T^* - \gamma_2 P^* - w. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Ahora, despejando a C^* , P^* y T^* de la primera, segunda y tercera ecuación de (3.61) respectivamente, obtendremos:

$$\begin{aligned}
C^* &= Q - \alpha_1 \frac{Q}{r} T^* - \alpha_2 \frac{Q}{r} P^*, \\
P^* &= Q_1 + \frac{\beta_1 Q_1}{r_1} C^* - \frac{\beta_2 Q_1}{r_1} T^*, \\
T^* &= \frac{\mu_c}{\gamma_1} \frac{C^*}{C^* + \phi_c} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} P^* - \frac{\omega}{\gamma_1}.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Sustituiremos T^* en las expresiones para P^* y C^* en (3.62), obteniendo de esa manera que:

$$\begin{aligned}
P^* &= Q_1 + \frac{\beta_1 Q_1}{r_1} C^* - \frac{\beta_2 Q_1}{r_1} \left(\frac{\mu_c}{\gamma_1} \frac{C^*}{C^* + \phi_c} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} P^* - \frac{\omega}{\gamma_1} \right), \\
C^* &= Q - \alpha_1 \frac{Q}{r} \left(\frac{\mu_c}{\gamma_1} \frac{C^*}{C^* + \phi_c} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} P^* - \frac{\omega}{\gamma_1} \right) - \alpha_2 \frac{Q}{r} P^*.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Despejando a P^* a partir de la expresión mostrada en (3.63) obtendremos:

$$P^* = \frac{r_1 \gamma_1 Q_1 + \beta_1 \gamma_1 Q_1 C^* - \beta_2 Q_1 \mu_c \frac{C^*}{C^* + \phi_c} + \beta_2 Q_1 \omega}{r_1 \gamma_1 - \beta_2 Q_1 \gamma_2}. \tag{3.64}$$

Para poder trabajar de manera más limpia con algunas ecuaciones, definamos:

$$\begin{aligned}
\Upsilon &= \alpha_1 \frac{Q}{r} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} - \alpha_2 \frac{Q}{r}, \\
\Delta &= \frac{1}{r_1 \gamma_1 - \beta_2 Q_1 \gamma_2}, \\
\xi &= Q + \alpha_1 \frac{Q}{r} \frac{\omega}{\gamma_1}, \\
\zeta &= r_1 \gamma_1 Q_1 + \beta_2 Q_1 \omega.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Sustituyamos el valor obtenido en (3.64) dentro del valor de C^* mostrado en (3.63) para así obtener que:

$$C^* = \xi - \alpha_1 \frac{Q \mu_c}{r \gamma_1} \frac{C^*}{C^* + \phi_c} + \Upsilon \Delta \left(\zeta + \beta_1 \gamma_1 Q_1 C^* - \beta_2 Q_1 \mu_c \frac{C^*}{C^* + \phi_c} \right). \tag{3.66}$$

Por último, para encontrar el valor de C^* en términos de las constantes declaradas en el modelo, multipliquemos por $C^* + \phi_c$ ambos lados de (3.66) y reordenemos para obtener una ecuación cuadrática de la forma:

$$A_{m5} C^{*2} + B_{m5} C^* + D_{m5} = 0, \tag{3.67}$$

donde

$$\begin{aligned}
A_{m5} &= \Upsilon \Delta \beta_1 \gamma_1 Q_1 - 1, \\
B_{m5} &= \Upsilon \Delta \zeta + \Upsilon \Delta \beta_1 Q_1 \phi_c - \Upsilon \Delta \beta_2 Q_1 \mu_c - \frac{\alpha_1 Q \mu_c}{r \gamma_1} + \xi - \phi_c, \\
D_{m5} &= \Upsilon \Delta \zeta \phi_c + \xi \phi_c.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Por lo tanto, podemos concluir que un valor de equilibrio para C^* existe sí y solo sí la ecuación (3.67) tiene al menos una solución real positiva.

Para finalizar, si existe C_E^* tal que satisface (3.67), para que exista un punto de equilibrio de coexistencia entre las tres poblaciones se tiene que cumplir lo siguiente:

$$P_E^* = \frac{r_1\gamma_1Q_1 + \beta_1\gamma_1Q_1C_E^* - \beta_2Q_1\mu_c\frac{C_E^*}{C_E^* + \phi_c} + \beta_2Q_1\omega}{r_1\gamma_1 - \beta_2Q_1\gamma_2} > 0, \quad (3.69)$$

y también que

$$T_E^* = \frac{\mu_c}{\gamma_1} \frac{C_E^*}{C_E^* + \phi_c} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} P_E^* - \frac{\omega}{\gamma_1} > 0. \quad (3.70)$$

Concluyendo así la prueba. $\square$

Con esto se acaba de probar que la existencia de al menos un punto de equilibrio asociado al modelo definido en (3.59) es posible bajo lo descrito en el teorema anterior, diremos que este punto de coexistencia es igual a:

$$\chi_5 = (C^*, P^*, T^*), \quad (3.71)$$

por lo tanto, solo resta ver la estabilidad de los puntos de equilibrio asociados al modelo.

Estabilidad de los equilibrios del submodelo 5:

Ahora analicemos la estabilidad de los puntos de equilibrio asociados al modelo descrito en (3.59). Para esto de nuevo ocuparemos la matriz Jacobiana asociada al modelo, la cual es:

$$J(C, P, T) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

Con cada J_{ig} siendo:

- $J_{11} = -2\frac{r}{Q}C - \alpha_1T - \alpha_2P + r.$
- $J_{12} = -\alpha_2C.$
- $J_{13} = -\alpha_1C.$
- $J_{21} = \beta_1P.$
- $J_{22} = \beta_1C - \beta_2T - 2\frac{r_1}{Q_1} + r_1.$
- $J_{23} = -\beta_2P.$
- $J_{31} = \mu_cT\frac{\phi_c}{(\phi_c + C)^2}.$

- $J_{32} = -\gamma_2 T$.
- $J_{33} = \mu_c \frac{C}{\phi_c + C} - 2\gamma_1 T - \gamma_2 P - \omega$.

Teorema 25 *Para el modelo dado por (3.59), con χ_0 y χ_1 definidos en (3.60) se tiene que:*

- *El punto χ_0 es inestable para todos los valores de los parámetros del modelo.*
- *El punto χ_1 es inestable para todos los valores de los parámetros del modelo.*

Demostración Utilizando la matriz Jacobiana dada en (3.72) para calcular los polinomios característicos de los puntos χ_0 y χ_1 obtendremos lo siguiente:

$$P_c(\chi_0) = (r - \lambda)(r_1 - \lambda)(-\omega - \lambda) \quad (3.73)$$

De la expresión (3.73) podemos observar que el punto χ_0 admite dos raíces positivas, siendo estas $\lambda_1 = r > 0$ y $\lambda_2 = r_1 > 0$, concluyendo así que χ_0 un equilibrio inestable.

Por otra parte, el polinomio característico asociado a χ_1 es:

$$P_c(\chi_1) = (-\lambda - r)(-\lambda + Q\beta_1 + r_1)(-\lambda + \mu_c \frac{Q}{Q + \phi_c} - \omega). \quad (3.74)$$

Se observa en (3.74) que el punto χ_1 admite la raíz positiva $\lambda = Q\beta_1 + r_1 > 0$, siendo por lo tanto χ_1 un punto de equilibrio inestable. $\square$

Teorema 26 *Para el modelo dado por (3.59), con χ_2 , χ_3 y χ_4 definidos en (3.60) se tiene que:*

- *El punto χ_2 es estable si y solo si $Q_1 > \frac{r}{\alpha_2}$*
- *El punto χ_3 es estable si y solo si $\beta_2 T_{M2} > \beta_1 C_{M2} + r_1$.*
- *El punto χ_4 es estable si y solo si $\gamma_2 P_{M1} > \mu_c \frac{C_{M1}}{C_{M1} + \phi_c}$*

Demostración Utilizaremos la matriz Jacobiana dada en (3.72) para calcular los polinomios característicos de los puntos χ_2 , χ_3 y χ_4 . De modo que obtendremos lo siguiente:

$$P_c(\chi_2) = (-\lambda - r_1)(-\lambda - Q_1\alpha_2 + r)(-\lambda - \omega - Q_1\gamma_2). \quad (3.75)$$

Se observa en (3.75) que el punto χ_2 admite dos raíces siempre negativas, siendo estas $\lambda = -r_1$ y $\lambda = -\omega - Q_1\gamma_2$. Por lo tanto, χ_2 es estable si y solo si la raíz $\lambda = r - Q_1\alpha_2 < 0$, lo cual ocurre cuando $Q_1 > \frac{r}{\alpha_2}$.

Por otra parte, el polinomio característico del punto χ_3 es:

$$P_c(\chi_3) = (-\lambda - \beta_2 T_{M2} + \beta_1 C_{M2} + r_1) P_c(J(C_{M2}, T_{M2})). \quad (3.76)$$

Podemos notar gracias a (3.76) que el polinomio característico asociado al punto χ_3 , consiste del polinomio característico asociado al punto dado por (3.21) en el modelo (3.8), multiplicado por el termino $(-\lambda - \beta_2 T_{M2} + \beta_1 C_{M2} + r_1)$.

De ahí obtenemos que el punto χ_3 es estable si y solo si

$$\lambda = -\beta_2 T_{M2} + \beta_1 C_{M2} + r_1 < 0, \quad (3.77)$$

lo cual ocurre cuando $\beta_2 T_{M2} > \beta_1 C_{M2} + r_1$.

Por último, el polinomio característico del punto χ_4 es:

$$P_c(\chi_4) = (-\lambda - \gamma_2 P_{M1} + \mu_c \frac{C_{M1}}{C_{M1} + \phi_c}) P_c(J(C_{M1}, P_{M1})), \quad (3.78)$$

obteniendo así que el punto de equilibrio χ_4 es estable si y solo si

$$\gamma_2 P_{M1} > \mu_c \frac{C_{M1}}{C_{M1} + \phi_c}. \quad (3.79)$$

Esto debido a que $P_c(J(C_{M1}, P_{M1}))$ es el mismo polinomio característico asociado al punto de coexistencia en el modelo (3.1). Debido a que es un polinomio de tipo Hurwitz, entonces podemos garantizar la existencia de dos raíces con parte real negativa. $\square$

La estabilidad del posible punto de equilibrio de coexistencia será estudiada de manera numérica durante la siguiente sección.

Simulaciones numéricas:

A continuación, utilizando simulaciones numéricas se muestra gráficamente la estabilidad de los puntos de equilibrio asociados al modelo mostrado en (3.59). Para la Figura 3.15 se utilizaron los parámetros $r = 0.9$, $\alpha_1 = 0.01$, $\alpha_2 = 0.005$, $Q = 30$, $r_1 = 0.8$, $Q_1 = 200$, $\beta_1 = 0.05$, $\beta_2 = 0.00022$, $\mu_c = 2.35$, $\phi_c = 1.44$, $\gamma_1 = 0.000151$, $\gamma_2 = 0.000162$ y $\omega = 0.0044$ con condiciones iniciales $C_0 = 28$, $T_0 = 150$ y $P_0 = 13$.

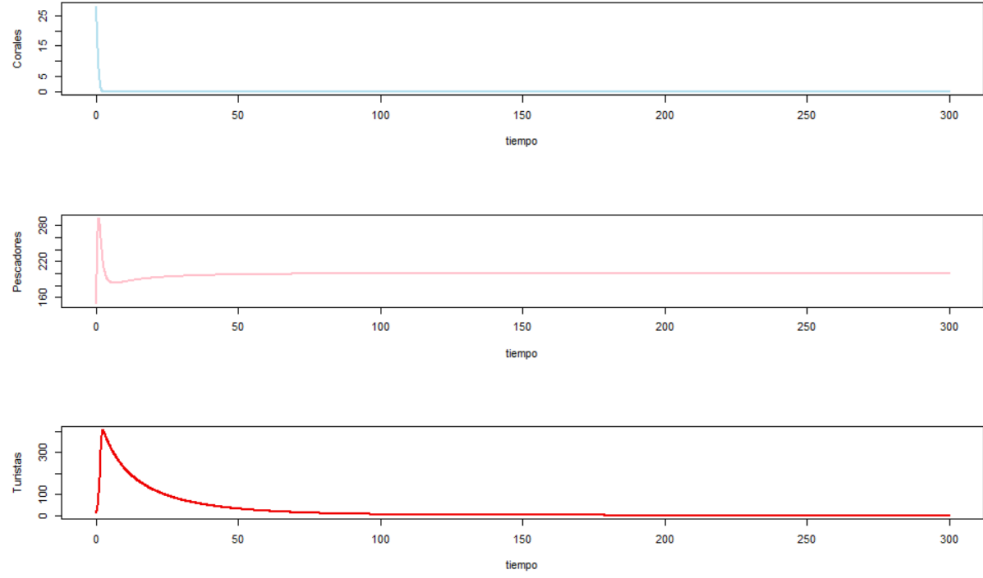


Figura 3.15: Para el modelo mostrado en (3.59), las soluciones pueden converger a Q_1 . Esto sujeto a las condiciones de estabilidad del punto mostradas en el Teorema 16.

Para la Figura 3.16 se utilizaron los valores de los parámetros dados por $r=0.99$, $\alpha_1=0.01$, $\alpha_2=0.005$, $Q=30$, $r_1=0.8$, $Q_1=20$, $\beta_1=0.05$, $\beta_2=0.00022$, $\mu_c=0.035$, $\phi_c=1.44$, $\gamma_1=0.000151$, $\gamma_2=1.162$ y $\omega=0.0044$ con condiciones iniciales $C_0=15$, $T_0=40$ y $P_0=13$.

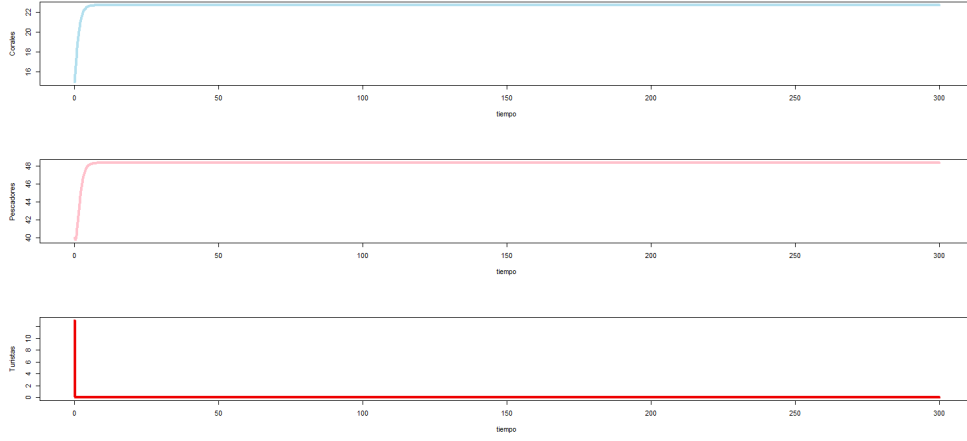


Figura 3.16: Para el modelo mostrado en (3.59), las soluciones pueden converger al punto de coexistencia entre corales y pescadores. Mostrando un escenario donde no llegan más turistas a la zona.

Para la Figura 3.17 se utilizaron los valores de los parámetros dados por $r = 0.99$, $\alpha_1 = 0.011$, $\alpha_2 = 0.005$, $Q = 300$, $r_1 = 0.68$, $Q_1 = 20$, $\beta_1 = 0.000045$, $\beta_2 = 3.72$, $\mu_c = 1.35$, $\phi_c = 1.44$, $\gamma_1 = 0.000151$, $\gamma_2 = 0.000162$ y $\omega = 0.44$ con condiciones iniciales $C_0 = 0.1$, $T_0 = 40$ y $P_0 = 13$.

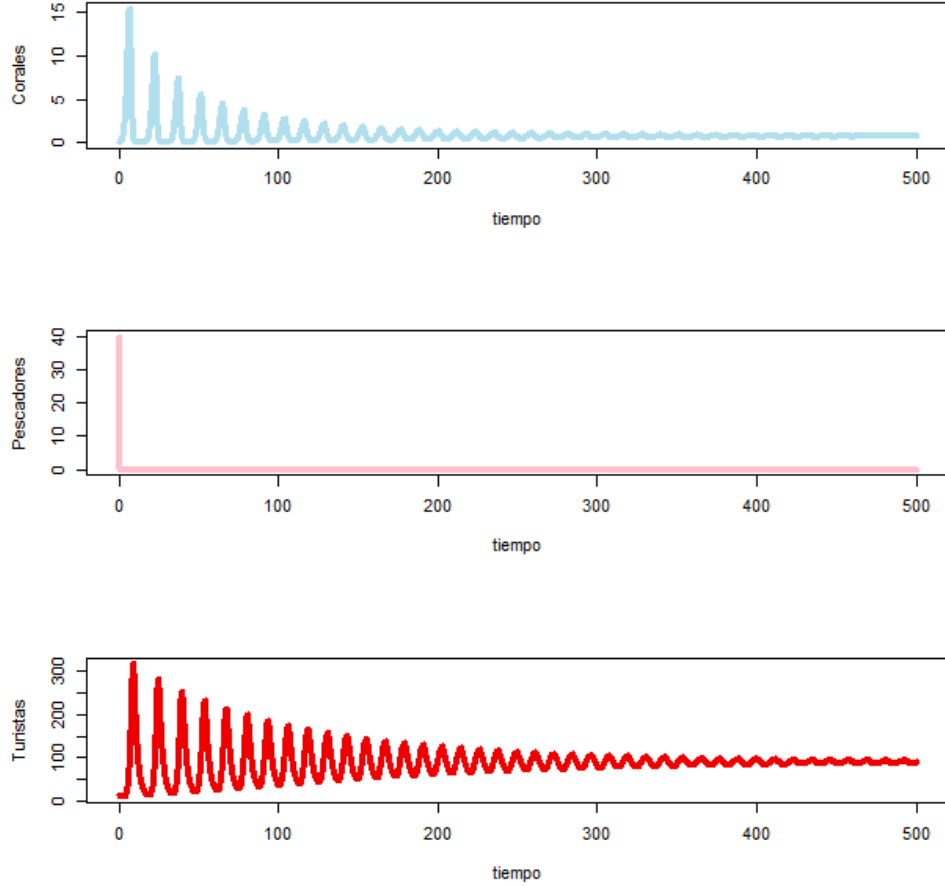


Figura 3.17: Para el modelo mostrado en (3.59), las soluciones pueden converger al punto de coexistencia entre corales y turistas. Lo anterior indicaría un escenario donde las actividades pesqueras fueron desplazadas por el turismo en la zona.

Para la Figura 3.18 se utilizaron los valores de los parámetros dados por $r = 0.99$, $\alpha_1 = 0.011$, $\alpha_2 = 0.005$, $Q = 300$, $r_1 = 0.68$, $Q_1 = 200$, $\beta_1 = 0.045$, $\beta_2 = 0.722$, $\mu_c = 2.5$, $\phi_c = 1.44$, $\gamma_1 = 0.151$, $\gamma_2 = 0.000162$ y $\omega = 0.044$ con condiciones iniciales $C_0 = 150$, $T_0 = 20$ y $P_0 = 13$.

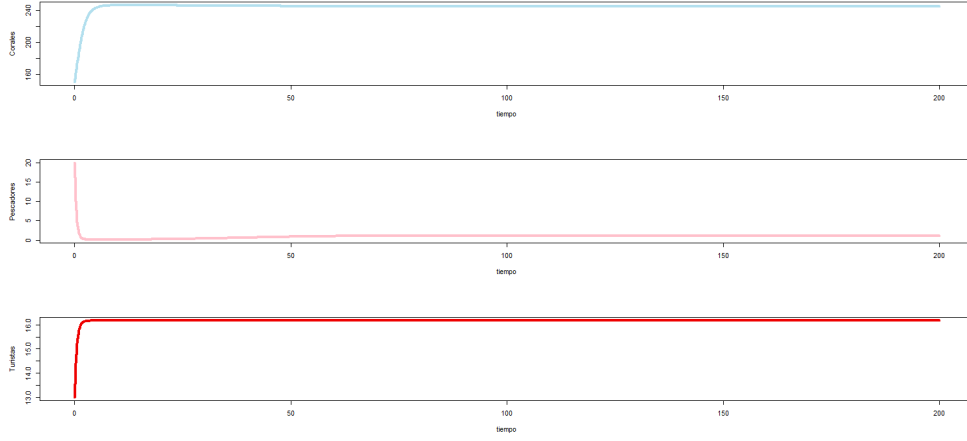


Figura 3.18: Para el modelo mostrado en (3.59), las soluciones pueden converger al punto de coexistencia entre corales, pescadores y turistas en caso de que exista.

3.0.6. Submodelo 6: Corales, Turistas y Capital

A continuación se estudiará la dinámica de la interacción entre Corales, Turistas y Capital, la cual está dada por el siguiente submodelo.

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt} &= rC \left(1 - \frac{C}{Q}\right) - C(\alpha_1 T + \alpha_3 K) + \alpha_4 CK, \\ \frac{dT}{dt} &= T \left(\mu_C \frac{C}{C + \phi_C} - \gamma_1 T + \mu_K \frac{K}{K + \phi_K(T + 1)} - w \right), \\ \frac{dK}{dt} &= -\delta K + \epsilon T.\end{aligned}\tag{3.80}$$

El modelo dado en (3.80) presenta los siguientes puntos de equilibrio de frontera

$$\begin{aligned}\chi_0 &= (0, 0, 0), \\ \chi_1 &= (Q, 0, 0), \\ \chi_2 &= (0, T_1^*, K_1^*), \\ \chi_3 &= (0, T_2^*, K_2^*), \\ \chi_4 &= (C_{M2}, T_{M2}, 0).\end{aligned}\tag{3.81}$$

Los puntos de equilibrio de frontera mostrados en (3.81), describen los siguientes escenarios: χ_0 describe un escenario de extinción de las tres especies. χ_1 describe exclusión de las poblaciones de turistas y capital, persistiendo únicamente la población de corales. χ_2 describe exclusión de los corales, persistiendo la población de turistas y capital. χ_3 describe otro escenario donde la población de corales es excluida, persistiendo la población de turistas y capital. Finalmente, χ_4 describe un escenario de coexistencia entre las poblaciones de corales y turistas, con exclusión del capital.

Ahora, utilizaremos el siguiente teorema para observar condiciones necesarias para la existencia de puntos de equilibrio de coexistencia en este modelo.

Teorema 27 *Para el modelo dado por (3.80) existe un único punto de equilibrio de coexistencia, dado que $\alpha_4 - \alpha_3 > 0$, $\frac{\epsilon}{\delta} - \frac{\alpha_1}{\alpha_4 - \alpha_3} > 0$ y $\mu_k - \omega > 0$.*

Demostración Las ceroclinas asociadas al modelo se dan por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}0 &= r - \frac{r}{Q}C - \alpha_1 T^* - \alpha_3 K^* + \alpha_4 K, \\ 0 &= \mu_c \frac{C}{C + \phi_c} - \gamma_1 T + \mu_k \frac{K^*}{K^* + \phi_k(T^* + 1)} - \omega, \\ 0 &= -\delta K + \epsilon T.\end{aligned}\tag{3.82}$$

Despejando a K de cada una de las ecuaciones en (3.82), obtendremos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
K_1 &= (-r + \alpha_1 T + \frac{r}{Q}C) \frac{1}{\alpha_4 - \alpha_3}, \\
K_2 &= \frac{-\frac{\mu_c \phi_k}{C + \phi_c}CT - \frac{\mu_c \phi_k}{C + \phi_c}C + \gamma_1 \phi_k T^2 + \gamma_1 \phi_k T + \omega \phi_k T + \omega \phi_k}{\mu_c \frac{C}{C + \phi_c} - \gamma_1 T + \mu_k - \omega}, \\
K_3 &= \frac{\epsilon}{\delta}T.
\end{aligned} \tag{3.83}$$

La intersección entre K_1 y K_3 definidas en (3.83), se da por:

$$T = \left(-\frac{r}{\alpha_4 - \alpha_3} + \frac{r}{Q(\alpha_4 - \alpha_3)}C \right) \left(\frac{\epsilon}{\delta} - \frac{\alpha_1}{\alpha_4 - \alpha_3} \right)^{-1} \tag{3.84}$$

Ya que buscamos una intersección en el octante positivo, entonces resulta necesario que:

$$\frac{\epsilon}{\delta} - \frac{\alpha_1}{\alpha_4 - \alpha_3} > 0. \tag{3.85}$$

Podemos expresar la T -ceroclina representada por K_2 definida en (3.83) como:

$$\begin{aligned}
K_2 &= \frac{-\frac{\mu_c \phi_k}{C + \phi_c}CT - \frac{\mu_c \phi_k}{C + \phi_c}C + \gamma_1 \phi_k T^2 + \gamma_1 \phi_k T + \omega \phi_k T + \omega \phi_k}{\mu_c \frac{C}{C + \phi_c} - \gamma_1 T + \mu_k - \omega}, \\
&= \frac{m(T, C)}{j(T, C)}.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

El denominador $j(T, C)$ definido en (3.86) se hace cero en la siguiente curva:

$$T_f = \left(\mu_c \frac{C}{C + \phi_c} + \mu_k - \omega \right) \frac{1}{\gamma_1}. \tag{3.87}$$

Evaluando $m(T, C)$ de la expresión (3.86) en T_f definido en (3.87) obtendremos:

$$m(T_f, C) = \left(\mu_c \frac{C}{C + \phi_c} (\mu_k - \omega) + (\mu_k - \omega)^2 + \omega (\mu_k - \omega) + \omega \mu_c \frac{C}{C + \phi_c} \right) \frac{\phi_k}{\gamma_1}. \tag{3.88}$$

Cada termino es mayor que cero, por lo tanto se concluye que por continuidad a medida que T crece hasta llegar a $(\mu_c \frac{C}{C + \phi_c} + \mu_k - \omega) \frac{1}{\gamma_1}$ la función crecerá hasta $+\infty$.

Para garantizar que existe al menos solo un punto donde la intersección de los planos (ecuación (3.84)) y T_f (definida en (3.87)) chocan, basta con igualarlos y ver que la intersección se da por la ecuación cuadrática:

$$a_{m6}C^2 + b_{m6}C + d_{m6} = 0. \tag{3.89}$$

Donde:

$$\begin{aligned} a_{m6} &= \frac{r\delta}{Q\epsilon(\alpha_4 - \alpha_3) - Q\delta\alpha_1}, \\ b_{m6} &= \frac{r\delta\phi_c}{Q\epsilon(\alpha_4 - \alpha_3) - Q\delta\alpha_1} - \frac{\mu_k - \omega}{\gamma_1}, \\ d_{m6} &= -\frac{r\delta}{\epsilon(\alpha_4 - \alpha_3) - \delta\alpha_1} - \frac{\mu_k - \omega}{\gamma_1}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

que por las hipótesis del teorema, podemos ver directamente que $a_{m6} > 0$ y $d_{m6} < 0$. De modo que sin importar el signo de b_{m6} , bajo las hipótesis del teorema siempre existirá una solución negativa y una positiva para (3.89). Siguiendo el argumento anterior, concluimos que los planos K_1 y K_2 bajo las hipótesis del teorema siempre van a tener una intersección con la curva donde K_3 se dispara a infinito. Por último, para garantizar que exista una intersección entre las 3 superficies basta con observar que ninguno de los planos contiene parámetros de K_3 , por lo que podemos manipular sus valores para garantizar una intersección y de esa manera, concluir que existe un único punto de coexistencia. $\square$

Gracias al teorema anterior podemos concluir que existe un punto de coexistencia χ_5 que representa un escenario de coexistencia entre las 3 poblaciones asociadas al submodelo 6, el cual tiene la forma:

$$\chi_5 = (C^*, T^*, K^*) \quad (3.91)$$

Estabilidad de los equilibrios del submodelo 6:

Ahora analicemos la estabilidad de los puntos de equilibrio asociados al modelo descrito en (3.80). Para esto de nuevo ocuparemos la matriz Jacobiana asociada al modelo, la cual es:

$$J(C, T, K) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.92)$$

Con cada J_{ig} siendo:

- $J_{11} = r - 2\frac{r}{Q}C - \alpha_1T - \alpha_3K + \alpha_4K.$
- $J_{12} = -\alpha_1C.$
- $J_{13} = (\alpha_4 - \alpha_3)C.$
- $J_{21} = \mu_c\phi_c\frac{T}{(C+\phi_c)^2}.$
- $J_{22} = \mu_c\frac{C}{C+\phi_c} - 2\gamma_1T + \mu_kK\frac{K+\phi_k}{(K+\phi_k(T+1))^2} - \omega.$
- $J_{23} = \mu_kT\frac{\phi_k(T+1)}{(K+\phi_k(T+1))^2}.$

- $J_{31} = 0.$
- $J_{32} = \epsilon.$
- $J_{33} = -\delta.$

Teorema 28 *Para el modelo dado por (3.80), con χ_0 y χ_2 definidos en (3.81)*

- *El punto χ_0 es inestable para todos los valores de los parámetros del modelo.*
- *El punto χ_2 es inestable para todos los valores de los parámetros del modelo.*

Demostración Utilizaremos la matriz Jacobiana dada en (3.92) para calcular los polinomios característicos de los puntos χ_0 y χ_2 . De modo que el polinomio característico de χ_0 es:

$$P_c(\chi_0) = (r - \lambda)(-\omega - \lambda)(-\delta - \lambda). \quad (3.93)$$

A partir de (3.93) podemos observar que el polinomio característico asociado al punto χ_0 admite la raíz positiva $\lambda = r$, siendo así un punto inestable.

Por otra parte, el polinomio característico de χ_2 es:

$$P_c(\chi_2) = (-\lambda + \alpha_4 K_1^* - \alpha_3 K_1^* - \alpha_1 T_1^* + r)P_c(J(T_1^*, K_1^*)). \quad (3.94)$$

Se puede observar de la expresión (3.94) que el polinomio característico asociado al punto χ_2 para el sistema (3.80) se da por el producto de $(-\lambda + K\alpha_4 - \alpha_3 K - \alpha_1 T + r)$ y del polinomio característico asociado al punto (T_1^*, K_1^*) para el modelo dado por (3.38). Ya que para ese modelo se probó que el equilibrio es inestable, se concluye que también es inestable para el modelo dado por (3.80). $\square$

Teorema 29 *Para el modelo dado por (3.80), con χ_1 y χ_3 definidos en (3.81)*

- *El punto χ_1 es estable si y solo si $\omega > \mu_c \frac{Q}{Q + \phi_c}$.*
- *El punto χ_3 es estable si y solo si $T_2^*(\alpha_4 \frac{\epsilon}{\delta} - \alpha_3 \frac{\epsilon}{\delta} - \alpha_1) + r < 0$.*

Demostración Utilizaremos la matriz Jacobiana dada en (3.72) para calcular los polinomios característicos de los puntos χ_1 y χ_3 , de modo que obtendremos lo siguiente:

$$P_c(\chi_1) = (-r - \lambda)(-\lambda + \frac{\mu_c Q}{Q + \phi_c} - \omega)(-\lambda - \delta). \quad (3.95)$$

Podemos observar a partir de (3.95) que el polinomio característico asociado al punto χ_1 admite las raíces $\lambda = -r$, $\lambda = -\delta$ y por último $\lambda = \frac{\mu_c Q}{Q + \phi_c} - \omega$. Ya que

dos de las raíces son siempre negativas, entonces es necesario que $\frac{\mu_c Q}{Q+\phi_c} - \omega < 0$ para que el punto χ_0 sea un punto estable, lo cual ocurre cuando $\omega > \mu_c \frac{Q}{Q+\phi_c}$.

Por otra parte, el polinomio característico del punto χ_3 es:

$$P_c(\chi_3) = (-\lambda + \frac{\epsilon}{\delta}\alpha_4 T_2^* - \frac{\epsilon}{\delta}\alpha_3 T_2^* - \alpha_1 T_2^* + r)P_c(J(T_2^*, K_2^*)). \quad (3.96)$$

A partir de (3.96) se puede apreciar que el polinomio característico asociado al punto χ_3 es un producto entre $(-\lambda + \frac{\epsilon}{\delta}\alpha_4 T_2^* - \frac{\epsilon}{\delta}\alpha_3 T_2^* - \alpha_1 T_2^* + r)$ y el polinomio característico asociado al punto (T_2^*, K_2^*) para el modelo dado por (3.38). Como para ese modelo (T_2^*, K_2^*) era un punto estable, entonces podemos garantizar que las raíces de su polinomio característico tienen parte real negativa. Por lo tanto, para que χ_3 sea inestable basta con que la otra raíz sea negativa, lo cual ocurre cuando $\frac{\epsilon}{\delta}\alpha_4 T_2^* - \frac{\epsilon}{\delta}\alpha_3 T_2^* - \alpha_1 T_2^* + r < 0$. $\square$

La estabilidad de χ_4 y χ_5 se analizará numéricamente en el apartado de simulaciones numéricas para este submodelo.

Simulaciones numéricas:

A continuación, utilizando simulaciones numéricas se muestra gráficamente la estabilidad de los puntos de equilibrio asociados al modelo mostrado en (3.80). Para la Figura 3.19 se utilizaron los valores de los parámetros dados por $r=0.9$, $\alpha_1=0.01$, $\alpha_3=0.02$, $\alpha_4=0.1$, $Q=20$, $\mu_c=0.32$, $\phi_c=0.4$, $\gamma_1=0.02$, $\mu_k=0.502$, $\omega=0.54$, $\phi_k=0.391$, $\delta=0.35$ y $\epsilon=0.49$ con condiciones iniciales $C_0=0.5$, $T_0=0.1$ y $K_0=0.5$.

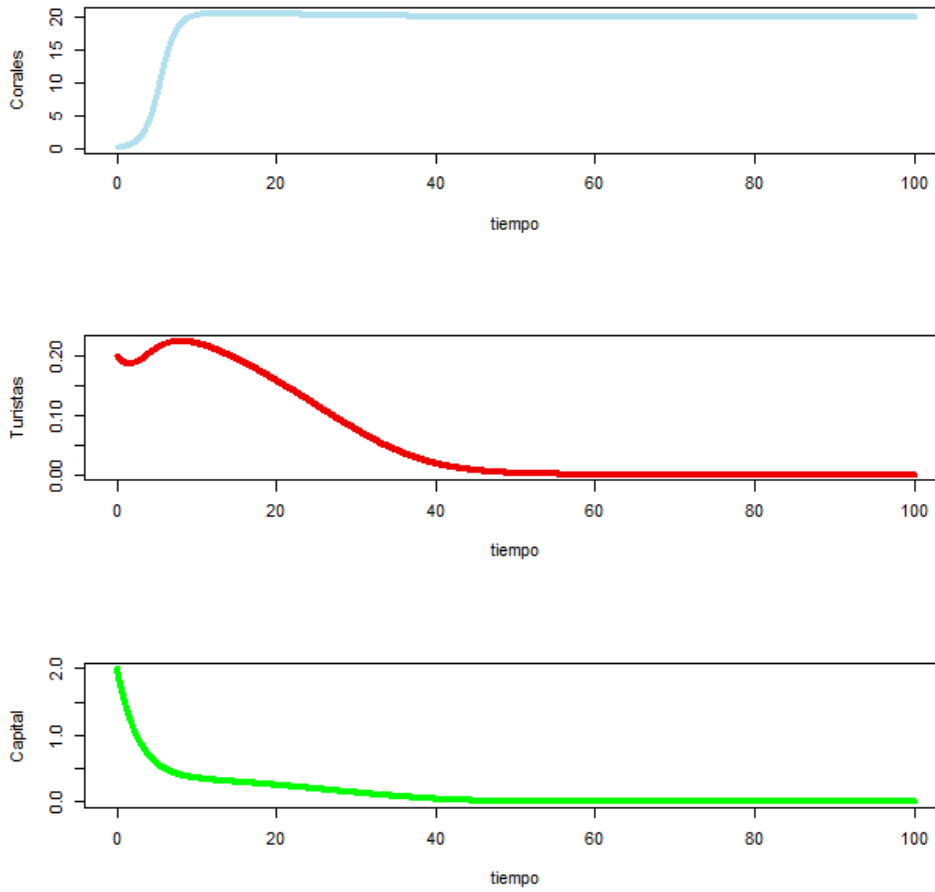


Figura 3.19: Para el modelo mostrado en (3.80), se observa que bajo las condiciones mostradas en el Teorema 29, el punto χ_1 es estable y por ende, las soluciones convergen a la capacidad de carga de los Corales.

Para la Figura 3.20 se utilizaron los valores de los parámetros dados por $r = 0.8$, $\alpha_1 = 0.211$, $\alpha_3 = 0.2$, $\alpha_4 = 0.1$, $Q = 20$, $\mu_c = 1.32$, $\phi_c = 0.4$, $\gamma_1 = 0.02$, $\mu_k = 2.502$, $\omega = 0.054$, $\phi_k = 0.291$, $\delta = 0.65$ y $\epsilon = 0.0349$ con condiciones iniciales $C_0 = 0.1$, $T_0 = 0.2$ y $K_0 = 2$.

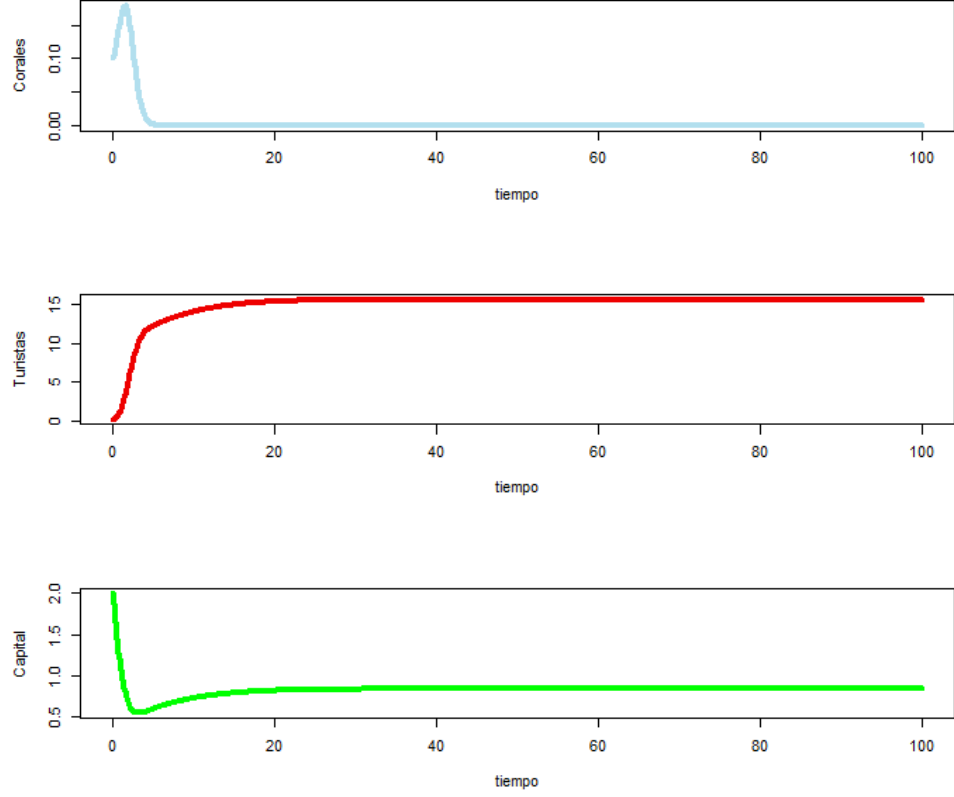


Figura 3.20: Para el modelo mostrado en (3.80), se observa que bajo las condiciones mostradas en el Teorema 29, el punto χ_3 es estable y por ende, las soluciones convergen a un punto de coexistencia entre Turistas y Capital.

Para la Figura 3.21 se utilizaron los valores de los parámetros dados por $r = 0.99$, $\alpha_1 = 0.211$, $\alpha_3 = 0.02$, $\alpha_4 = 0.21$, $Q = 300$, $\mu_c = 1.035$, $\phi_c = 1.44$, $\gamma_1 = 0.0002$, $\mu_k = 0.1502$, $\omega = 0.054$, $\phi_k = 0.2391$, $\delta = 0.88$ y $\epsilon = 0.00349$ con condiciones iniciales $C_0 = 2.1$, $T_0 = 0.2$ y $K_0 = 2$.

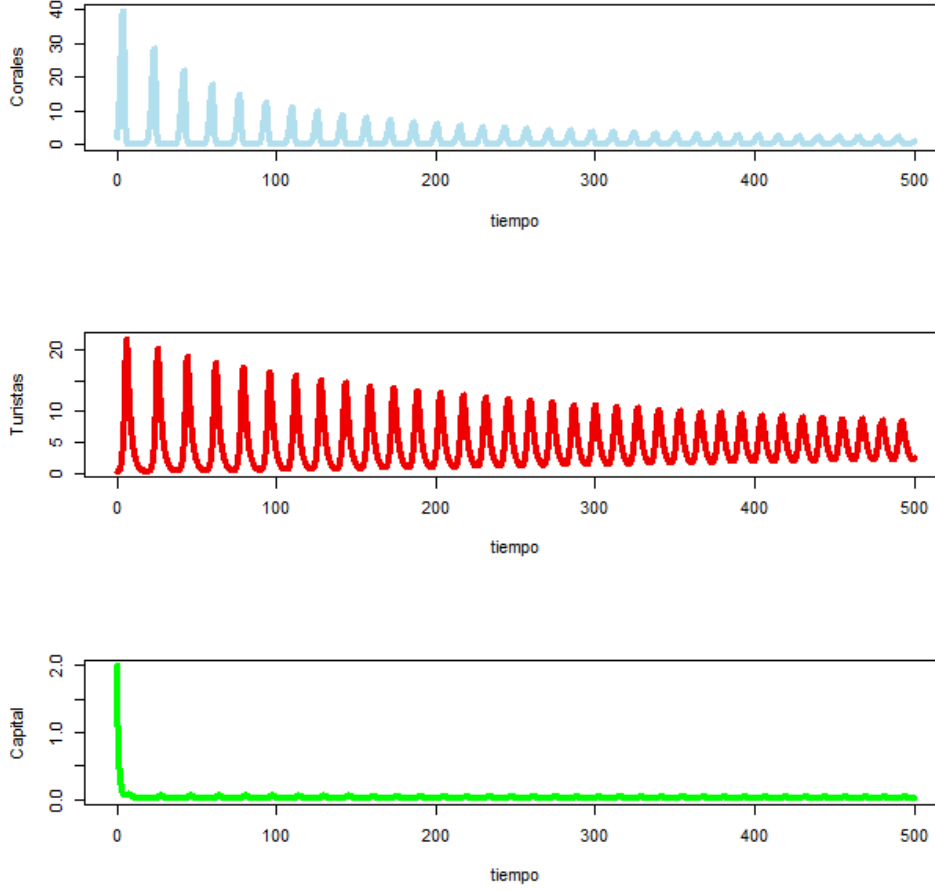


Figura 3.21: Para el modelo mostrado en (3.80), el punto de coexistencia entre Corales y Turistas, mostró ser estable numéricamente bajo condiciones particulares donde ϵ es muy bajo y δ alto.

Para la Figura 3.22 se utilizaron los valores de los parámetros dados por $r = 0.9$, $\alpha_1 = 0.01$, $\alpha_3 = 0.02$, $\alpha_4 = 0.1$, $Q = 20$, $\mu_c = 1.32$, $\phi_c = 0.4$, $\gamma_1 = 0.02$, $\mu_k = 0.502$, $\omega = 0.4$, $\phi_k = 0.391$, $\delta = 0.35$, $\epsilon = 0.49$ con condiciones iniciales $C_0 = 2.1$, $T_0 = 0.2$ y $K_0 = 2$.

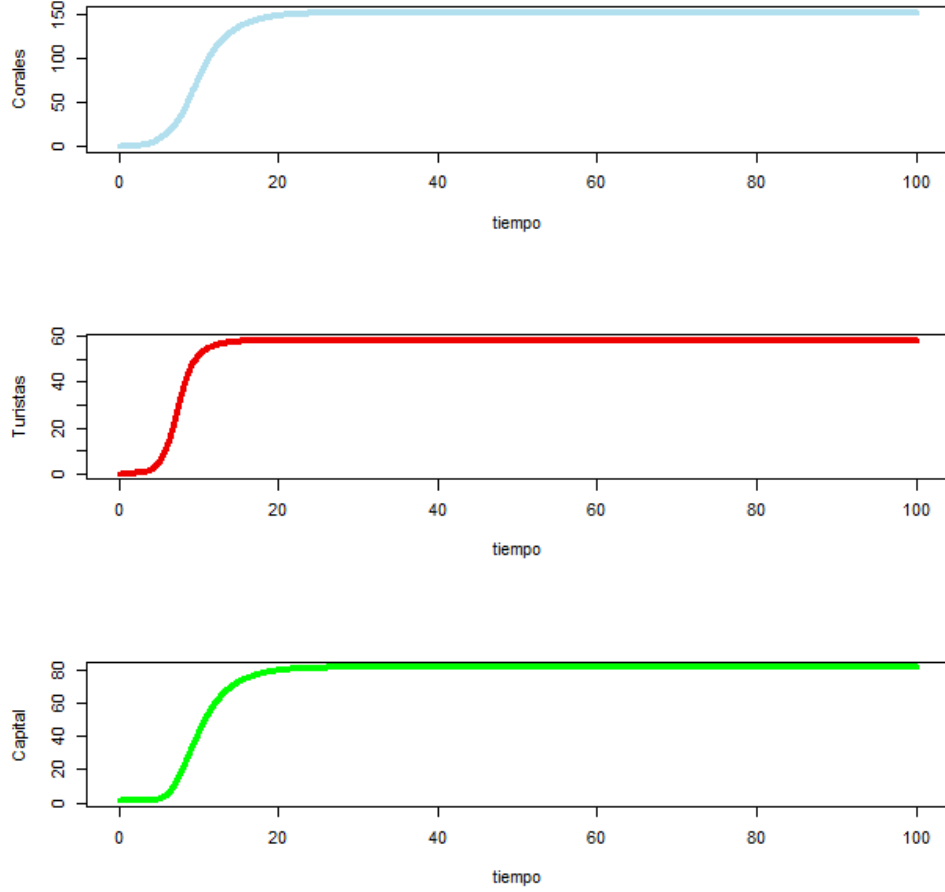


Figura 3.22: Para el modelo mostrado en (3.80), bajo las condiciones mostradas por el Teorema 27, existe un punto de equilibrio de coexistencia entre Corales, Turistas y Capital. Además, es un punto estable.

3.0.7. Submodelo 7: Pescadores, Turistas y Capital

A continuación se estudiará la dinámica de la interacción entre Pescadores, Turistas y Capital la cual, está dada por el siguiente submodelo:

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= r_1 P \left(1 - \frac{P}{Q_1}\right) - \beta_2 PT, \\ \frac{dT}{dt} &= T \left(-\gamma_1 T - \gamma_2 P + \mu_k \frac{K}{K + \phi_k(T+1)} - w\right), \\ \frac{dK}{dt} &= -\delta K + \epsilon T.\end{aligned}\tag{3.97}$$

El modelo presentado en (3.97), presenta los siguientes puntos de equilibrio de frontera:

$$\begin{aligned}\chi_0 &= (0, 0, 0), \\ \chi_1 &= (Q_1, 0, 0), \\ \chi_2 &= (0, T_1^*, K_1^*), \\ \chi_3 &= (0, T_2^*, K_2^*).\end{aligned}\tag{3.98}$$

Los puntos de equilibrio de frontera mostrados en (3.98), describen los siguientes escenarios: χ_0 describe un escenario de extinción de las tres especies. χ_1 describe exclusión de las poblaciones de turistas y capital, persistiendo únicamente la población de pescadores. χ_2 describe exclusión de los pescadores, persistiendo la población de turistas y capital. Por último, χ_3 describe otro escenario donde la población de pescadores es excluida, persistiendo en coexistencia la población de turistas y capital.

Para este modelo hay varias posibilidades para la existencia de puntos de equilibrio de coexistencia, las cuales son una consecuencia directa del siguiente teorema:

Teorema 30 *Para el modelo dado por (3.97) y definiendo a_{m7} , b_{m7} y c_{m7} como:*

$$\begin{aligned}a_{m7} &= \left(\gamma_1 \frac{\delta}{\epsilon} - \beta_2 \gamma_2 \frac{\delta Q_1}{\epsilon r_1}\right) \left(1 + \frac{\delta}{\epsilon} \phi_k\right), \\ b_{m7} &= \left[Q_1 \gamma_2 \left(1 + \phi_k \frac{\delta}{\epsilon}\right) + \left(\gamma_1 \frac{\delta}{\epsilon} - \beta_2 \gamma_2 \frac{\delta Q_1}{\epsilon r_1}\right) \phi_k - \mu_k + \omega \left(1 + \phi_k \frac{\delta}{\epsilon}\right)\right], \\ c_{m7} &= \omega \phi_k + Q_1 \gamma_2 \phi_k,\end{aligned}$$

se tiene que pueden existir puntos de equilibrio de coexistencia entre las 3 poblaciones si y solo si existe una solución real positiva K_E a la ecuación:

$$a_{m7} K^2 + b_{m7} K + c_{m7} = 0$$

y además

$$Q_1 - \beta_2 \frac{Q_1 \delta}{r_1 \epsilon} K_E > 0.$$

Demostración Las ceroclinas asociadas al modelo dado por (3.97) son las siguientes

$$\begin{aligned} 0 &= r_1 - \frac{r_1}{Q_1}P - \beta_2 T, \\ 0 &= -\gamma_1 T - \gamma_2 P + \mu_k \frac{K}{K + \phi_k(T + 1)} - w, \\ 0 &= -\delta K + \epsilon T. \end{aligned} \tag{3.99}$$

Despejando a T de la K -ceroclina en (3.99), obtendremos

$$T = \frac{\delta}{\epsilon} K. \tag{3.100}$$

Para hacer una simplificación en las siguientes ecuaciones, usaremos el hecho de que $T = \frac{\delta}{\epsilon} K$ mostrado en (3.100) en la primera y segunda expresión de (3.99), con lo cual obtendremos:

$$\begin{aligned} 0 &= r_1 - \frac{r_1}{Q_1}P - \beta_2 \frac{\delta}{\epsilon} K, \\ 0 &= -\gamma_1 \frac{\delta}{\epsilon} K - \gamma_2 P + \mu_k \frac{K}{K + \phi_K(\frac{\delta}{\epsilon} K + 1)} - w. \end{aligned} \tag{3.101}$$

Despejando a P de ambas ecuaciones mostradas en (3.101), obtendremos lo siguiente

$$\begin{aligned} P &= Q_1 - \beta_2 \frac{\delta}{\epsilon} \frac{Q_1}{r_1} K, \\ P &= (-\gamma_1 \frac{\delta}{\epsilon} K + \mu_k \frac{K}{K + \phi_K(\frac{\delta}{\epsilon} K + 1)} - w) \frac{1}{\gamma_2}. \end{aligned} \tag{3.102}$$

Ahora igualemos ambas expresiones de P mostradas en (3.102) asociadas a la P - y T -ceroclinas respectivamente

$$\begin{aligned} Q_1 - \beta_2 \frac{\delta}{\epsilon} \frac{Q_1}{r_1} K &= (-\gamma_1 \frac{\delta}{\epsilon} K + \mu_k \frac{K}{K + \phi_K(\frac{\delta}{\epsilon} K + 1)} - w) \frac{1}{\gamma_2}, \\ Q_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_2 \frac{\delta}{\epsilon} \frac{Q_1}{r_1} K &= -\gamma_1 \frac{\delta}{\epsilon} K + \mu_k \frac{K}{K + \phi_K(\frac{\delta}{\epsilon} K + 1)} - w, \\ Q_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_2 \frac{\delta}{\epsilon} \frac{Q_1}{r_1} K + \gamma_1 \frac{\delta}{\epsilon} K - \mu_k \frac{K}{K + \phi_K(\frac{\delta}{\epsilon} K + 1)} + w &= 0. \end{aligned} \tag{3.103}$$

Multiplicando por $K(1 + \phi_k \frac{\delta}{\epsilon}) + \phi_k$ la tercera ecuación mostrada en (3.103) y posteriormente agrupando los términos semejantes podemos ver que la intersección entre la P - y T -ceroclina se da por las soluciones de la ecuación cuadrática:

$$a_{m7}K^2 + b_{m7}K + c_{m7} = 0, \quad (3.104)$$

donde a_{m7} , b_{m7} y c_{m7} son:

$$\begin{aligned} a_{m7} &= \left(\gamma_1 \frac{\delta}{\epsilon} - \beta_2 \gamma_2 \frac{\delta}{\epsilon} \frac{Q_1}{r_1} \right) \left(1 + \frac{\delta}{\epsilon} \phi_k \right), \\ b_{m7} &= \left[Q_1 \gamma_2 \left(1 + \phi_k \frac{\delta}{\epsilon} \right) + \left(\gamma_1 \frac{\delta}{\epsilon} - \beta_2 \gamma_2 \frac{\delta}{\epsilon} \frac{Q_1}{r_1} \right) \phi_k - \mu_k + \omega \left(1 + \phi_k \frac{\delta}{\epsilon} \right) \right], \\ c_{m7} &= \omega \phi_k + Q_1 \gamma_2 \phi_k. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Por lo tanto, las tres ceroquinas se intersectan en el o los valores de K dados por:

$$K_{1,2} = \frac{-b_{m7} \pm \sqrt{b_{m7}^2 - 4a_{m7}c_{m7}}}{2a_{m7}}. \quad (3.106)$$

Para finalizar, supongamos que K_E es una solución a la ecuación (3.104) de modo que como esta es la intersección de las tres ceroquinas, representa el valor de K^* para un punto de equilibrio de coexistencia.

Notamos que si $K^* > 0$ entonces por (3.100) se concluye que $T^* > 0$. Por lo que, si buscamos la expresión de P^* para el punto de coexistencia a partir de la primera ecuación de (3.99), obtenemos que:

$$P^* = Q_1 - \beta_2 \frac{Q_1}{r_1} \frac{\delta}{\epsilon} K_E. \quad (3.107)$$

Demostrando así lo mencionado en el teorema. $\square$

Estabilidad de los equilibrios del submodelo 7:

Ahora analicemos la estabilidad de los puntos de equilibrio asociados al modelo descrito en (3.97). Para esto de nuevo ocuparemos la matriz Jacobiana asociada al modelo, la cual es:

$$J(P, T, K) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.108)$$

Con cada J_{ig} siendo:

- $J_{11} = r_1 - 2 \frac{r_1}{Q_1} P - \beta_2 T.$
- $J_{12} = -\beta_2 P.$
- $J_{13} = 0.$
- $J_{21} = -\gamma_2 T.$

- $J_{22} = -2\gamma_1 T - \gamma_2 P + \mu_k K \frac{K + \phi_k}{(K + \phi_k(T+1))^2} - \omega.$
- $J_{23} = \mu_k T \frac{\phi_k(T+1)}{(K + \phi_k(T+1))^2}.$
- $J_{31} = 0.$
- $J_{32} = \epsilon.$
- $J_{33} = -\delta.$

Ya con la matriz Jacobiana, podemos empezar a ver que estabilidad tienen todos los puntos de equilibrio.

Teorema 31 *Para el modelo dado por (3.97), con χ_0 y χ_2 definidos en (3.98) se tiene que:*

- *El punto χ_0 es inestable para todos los valores de los parámetros del modelo.*
- *El punto χ_2 es inestable para todos los valores de los parámetros del modelo.*

Demostración Utilizaremos la matriz Jacobiana dada en (3.108) para calcular los polinomios característicos de los puntos χ_0 y χ_2 . De modo que el polinomio característico de χ_0 es:

$$P_c(\chi_0) = (-\lambda + r_1)(-\lambda - \omega)(-\lambda - \delta). \quad (3.109)$$

Podemos notar gracias a (3.109) que el polinomio característico asociado al punto χ_0 admite la raíz positiva $\lambda = r_1$. Concluyendo así que χ_0 es un equilibrio inestable.

Por otra parte, el punto χ_2 tiene el siguiente polinomio característico:

$$P_c(\chi_2) = (-\lambda - \beta_2 T_1^* + r_1)P_c(J(T_1^*, K_1^*)). \quad (3.110)$$

Podemos observar en (3.110) que el polinomio característico de χ_2 para el modelo descrito en (3.97), tiene como factor al polinomio característico asociado al punto (T_1^*, K_1^*) para el modelo dado en (3.38). Como para el modelo anterior se probó que (T_1^*, K_1^*) es un punto inestable, entonces se mantiene la inestabilidad para el modelo descrito en (3.97). $\square$

Teorema 32 *Para el modelo dado por (3.97), con χ_1 y χ_3 definidos en (3.98) se tiene que:*

- *El punto χ_1 es estable para todos los valores de los parámetros del modelo.*
- *El punto χ_3 es estable si y solo si $\beta_2 T_2^* > r_1$.*

Demostración Utilizaremos la matriz Jacobiana dada en (3.108) para calcular los polinomios característicos de los puntos χ_1 y χ_3 . De modo que el polinomio característico de χ_1 es:

$$P_c(\chi_1) = (-\lambda - r_1)(-\lambda - \delta)(-\lambda - \omega - Q_1\gamma_2). \quad (3.111)$$

Podemos notar en (3.111) que el polinomio característico asociado a χ_1 admite las raíces $\lambda = -r_1$, $\lambda = -\delta$ y $\lambda = -\omega - Q_1\gamma_2$. Por lo tanto, ya que todas las raíces del polinomio son negativas, se concluye que χ_1 es un punto de equilibrio estable.

Por otra parte, el polinomio característico de χ_3 es el siguiente:

$$P_c(\chi_3) = (-\lambda - \beta_2 T_2^* + r_1)P_c(J(T_2^*, K_2^*)). \quad (3.112)$$

Podemos observar en (3.112) que el polinomio característico de χ_3 para el modelo descrito en (3.97), tiene como factor al polinomio característico asociado al punto (T_2^*, K_2^*) para el modelo dado en (3.38). Como para el modelo anterior se probó que (T_1^*, K_1^*) es un punto estable, entonces tiene asociadas dos raíces negativas. Por lo tanto, se concluye que χ_3 es estable si y solo si $\beta_2 T_2^* > r_1$. $\square$

La estabilidad de los equilibrios de frontera y coexistencia restantes serán estudiados por medio de simulaciones en el siguiente apartado.

Simulaciones numéricas:

A continuación, utilizando simulaciones numéricas se muestra gráficamente la estabilidad de los puntos de equilibrio asociados al modelo mostrado en (3.97).

Para la Figura 3.23 se utilizaron los valores de los parámetros dados por $r_1 = 0.998$, $\beta_2 = 0.22$, $Q_1 = 2000$, $\gamma_1 = 0.00151$, $\gamma_2 = 0.00162$, $\mu_k = 3.46$, $\omega = 0.044$, $\phi_k = 0.1$, $\delta = 0.12$ y $\epsilon = 0.4$ con condiciones iniciales $C_0 = 0.001$, $T_0 = 0.001$ y $K_0 = 0.001$.

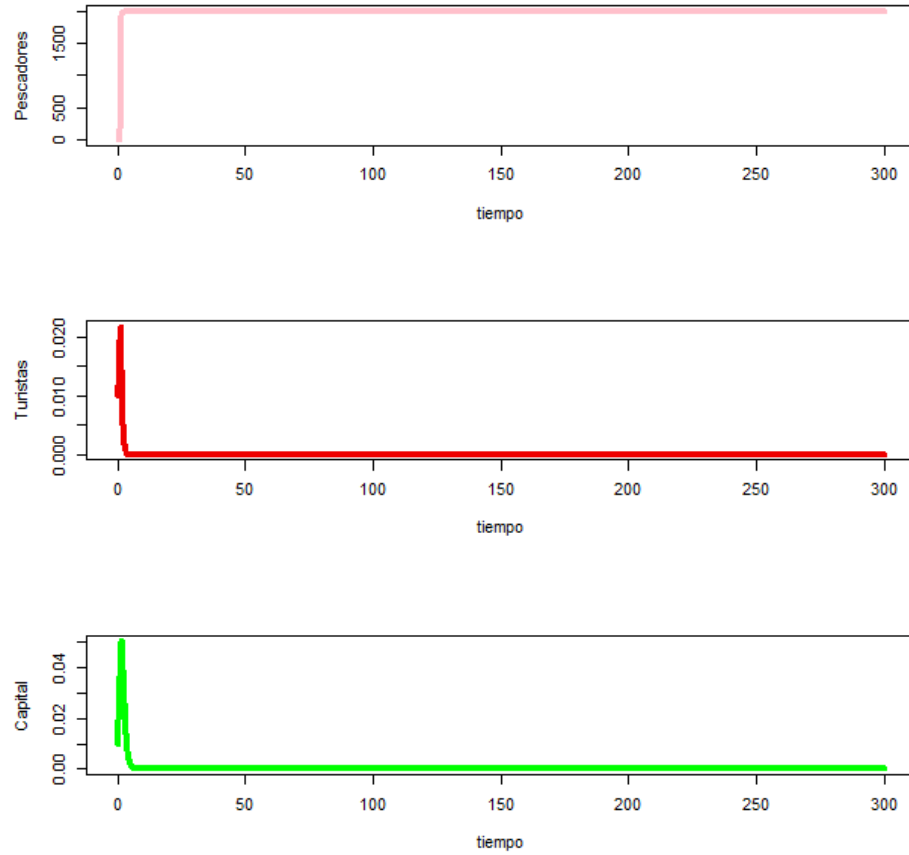


Figura 3.23: Para el modelo mostrado en (3.97), bajo condiciones iniciales muy cercanas al origen, las soluciones convergen a la capacidad de carga de los pescadores χ_1 . Describiendo un escenario donde las actividades turísticas en la zona desaparecieron mientras que la pesca se mantuvo.

Para la Figura 3.24 se utilizaron los valores de los parámetros dados por $r_1 = 0.8$, $\beta_2 = 0.00022$, $Q_1 = 200$, $\gamma_1 = 0.000151$, $\gamma_2 = 0.000162$, $\mu_k = 3.46$, $\omega = 0.0044$, $\phi_k = 0.1$, $\delta = 0.12$ y $\epsilon = 0.4$ con condiciones iniciales $C_0 = 150$, $T_0 = 13$ y $K_0 = 1$.

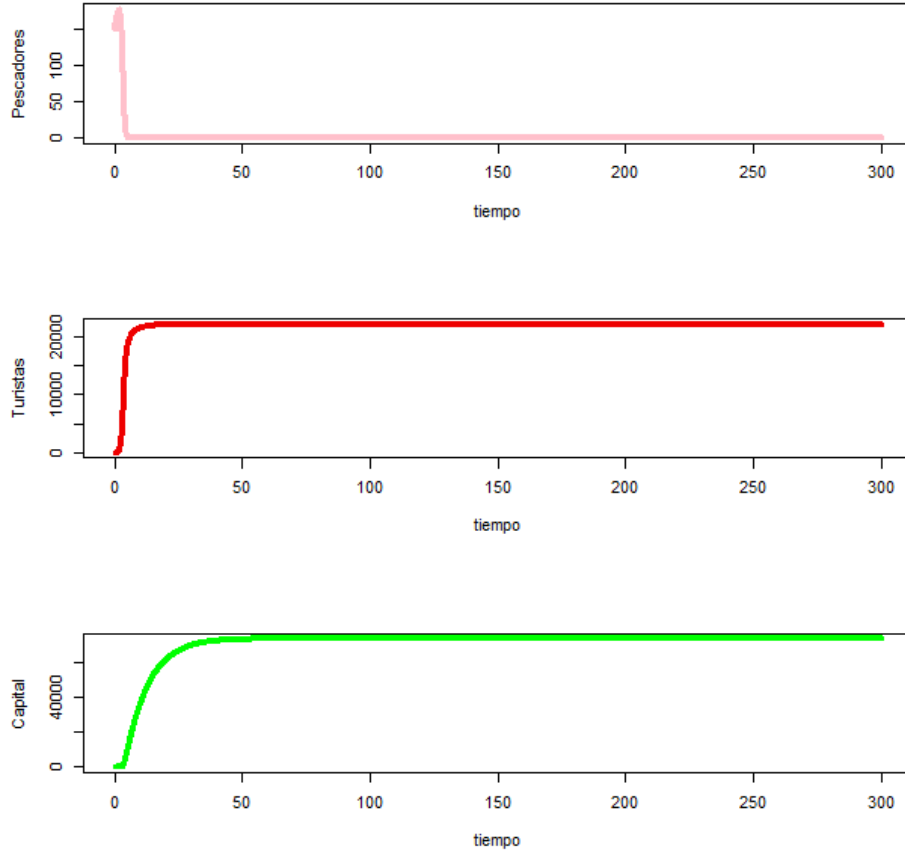


Figura 3.24: Para el modelo mostrado en (3.97), bajo las condiciones descritas en el Teorema 32, las soluciones convergen al punto de coexistencia entre Turistas y Capital χ_3 . Mostrando un escenario donde las actividades pesqueras fueron desplazadas por actividades turísticas.

Para la Figura 3.25 se utilizaron los valores de los parámetros dados por $r_1 = 9.998$, $\beta_2 = 0.0000000000000022$, $Q_1 = 2000$, $\gamma_1 = 0.00151$, $\gamma_2 = 0.00162$, $\mu_k = 34.6$, $\omega = 0.044$, $\phi_k = 1$, $\delta = 1.2$ y $\epsilon = 4$ con condiciones iniciales $C_0 = 100$, $T_0 = 1000$ y $K_0 = 1000$.

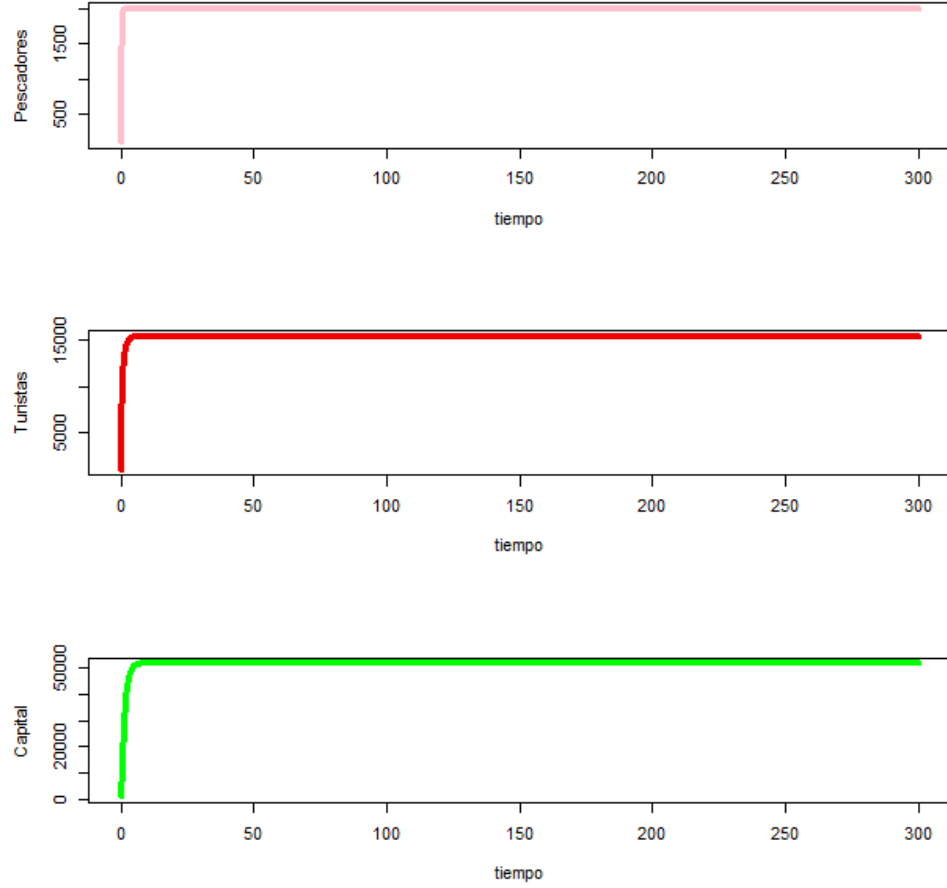


Figura 3.25: Para el modelo mostrado en (3.97), cuando existen dos puntos de equilibrio de coexistencia entre Pescadores, Turismo y Capital, las soluciones convergen solo a uno de ellos.

3.0.8. Modelo 8: Modelo Corales, Turistas, Pescadores y Capital

A continuación se analizará el modelo asociado al sistema socio-ecológico que describe la dinámica entre las variables Corales, Turistas, Pescadores y Capital.

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dt} &= rC \left(1 - \frac{C}{Q}\right) - C(\alpha_1 T + \alpha_2 P + \alpha_3 K) + \alpha_4 CK, \\
\frac{dT}{dt} &= T \left(\mu_C \frac{C}{C + \phi_C} - \gamma_1 T - \gamma_2 P + \mu_K \frac{K}{K + \phi_K(T + 1)} - w \right), \\
\frac{dP}{dt} &= r_1 P \left(1 - \frac{P}{Q_1}\right) + \beta_1 PC - \beta_2 PT, \\
\frac{dK}{dt} &= -\delta K + \epsilon T.
\end{aligned} \tag{3.113}$$

Notemos que para el modelo dado por (3.113) existen los siguientes puntos de frontera:

$$\begin{aligned}
\chi_0 &= (0, 0, 0, 0), \\
\chi_1 &= (Q, 0, 0, 0), \\
\chi_2 &= (0, Q_1, 0, 0), \\
\chi_3 &= (C_{M1}, P_{M1}, 0, 0), \\
\chi_4 &= \left(0, 0, T_1^*, \frac{\epsilon}{\delta} T_1^*\right), \\
\chi_5 &= \left(0, 0, T_2^*, \frac{\epsilon}{\delta} T_2^*\right), \\
\chi_6 &= (C_{M2}, 0, T_{M2}, 0), \\
\chi_7 &= (C, P, T, 0), \\
\chi_8 &= (0, P, T, K), \\
\chi_9 &= (C, 0, T, K).
\end{aligned} \tag{3.114}$$

Cada uno de los equilibrios de frontera mostrados en (3.114) describen escenarios en el que al menos una de las cuatro poblaciones se extingue para tiempos suficientemente grandes.

Sin embargo, lo que resultaría de mayor atractivo para este modelo sería que existieran puntos de coexistencia positivos entre las cuatro poblaciones, ya que la existencia de dichos puntos permitiría aplicar estrategias de control para evitar la extinción de las poblaciones. Por lo tanto, a continuación analizaremos la existencia de puntos de equilibrio positivos para el modelo dado por (3.113).

Lema 1 *Para el modelo dado por (3.113) la T -ceroclina asociada es cóncava para todo $C, T, P, K > 0$.*

Demostración Las T - y K -ceroclinas asociadas al modelo dado en (3.113) están dadas por

$$\begin{aligned} 0 &= T \left(\mu_C \frac{C}{C + \phi_C} - \gamma_1 T - \gamma_2 P + \mu_K \frac{K/(T+1)}{K/(T+1) + \phi_K} - w \right), \\ 0 &= -\delta K + \epsilon T, \end{aligned} \quad (3.115)$$

respectivamente. Dado que estamos interesados en los equilibrios interiores, excluimos del análisis la cercolina $T = 0$ de la expresión mostrada en (3.115). Notemos que podemos expresar la T -ceroclina no trivial de la siguiente manera.

$$P = \left(\mu_c \frac{C}{C + \phi_c} - \gamma_1 T + \mu_k \frac{K}{K + \phi_k(T+1)} - \omega \right) \frac{1}{\gamma_2} \quad (3.116)$$

Por otra parte la K -ceroclina puede reescribirse como:

$$T = \frac{\delta}{\epsilon} K. \quad (3.117)$$

Sustituyendo a T en (3.116), obtenemos:

$$P = \left(\mu_c \frac{C}{C + \phi_c} - \gamma_1 \frac{\delta}{\epsilon} K + \mu_k \frac{K}{K + \phi_k(\frac{\delta}{\epsilon} K + 1)} - \omega \right) \frac{1}{\gamma_2} \quad (3.118)$$

Para analizar el comportamiento geométrico de la superficie dada por (3.118) usaremos la matriz Hessiana asociada, la cual está dada por

$$H(C, K) = \begin{bmatrix} \frac{\mu_c \phi_c}{\gamma_2} \frac{-2}{(C + \phi_c)^3} & 0 \\ 0 & \frac{\mu_k \phi_k}{\gamma_2} \frac{-2(1 + \phi_k \frac{\delta}{\epsilon})}{(K + \phi_k \frac{\delta}{\epsilon} K + \phi_k)^3} \end{bmatrix}. \quad (3.119)$$

Posteriormente, si queremos calcular los valores propios de la matriz (3.119), obtenemos el siguiente polinomio característico asociado a la matriz Hessiana:

$$P_C(H) = \left(2 \frac{\mu_c \phi_c}{\gamma_2} \frac{1}{(C + \phi_c)^3} + \lambda \right) \left(2 \frac{\mu_k \phi_k}{\gamma_2} \frac{(1 + \phi_k \frac{\delta}{\epsilon})}{(K + \phi_k \frac{\delta}{\epsilon} K + \phi_k)^3} + \lambda \right) \quad (3.120)$$

Por lo tanto, para $C, K > 0$, se tiene que la matriz Hessiana es negativa definida, lo que implica a su vez que, la T -ceroclina es una función cóncava en el octante positivo. $\square$

Teorema 33 *Para el modelo dado por (3.113) pueden existir 0, 1 o 2 puntos de equilibrio en coexistencia para las 4 poblaciones si*

$$\frac{\alpha_4}{\alpha_2} + \beta_2 \frac{Q_1}{r_1} \frac{\delta}{\epsilon} > \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\delta}{\epsilon} + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}$$

y además

$$\sqrt{\frac{\mu_k \epsilon}{\gamma_1 \delta}} > \sqrt{\phi_k}.$$

Demostración Las ceroclinas del sistema se dan por

$$\begin{aligned} 0 &= rC \left(1 - \frac{C}{Q}\right) - C(\alpha_1 T + \alpha_2 P + \alpha_3 K) + \alpha_4 CK, \\ 0 &= T \left(\mu_C \frac{C}{C + \phi_C} - \gamma_1 T - \gamma_2 P + \mu_K \frac{K/(T+1)}{K/(T+1) + \phi_K} - w \right), \\ 0 &= r_1 P \left(1 - \frac{P}{Q_1}\right) + \beta_1 PC - \beta_2 PT, \\ 0 &= -\delta K + \epsilon T. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Notemos que podemos expresar la C -, P - y T - ceroclinas de las siguientes maneras respectivamente:

$$P = \left(r - \frac{r}{Q}C - \alpha_1 T - \alpha_3 K + \alpha_4 K\right) \frac{1}{\alpha_2}, \quad (3.122)$$

$$P = (r_1 + \beta_1 C - \beta_2 T) \frac{Q_1}{r_1}, \quad (3.123)$$

$$P = \left(\mu_c \frac{C}{C + \phi_c} - \gamma_1 T + \mu_k \frac{K}{K + \phi_k(T+1)} - \omega \right) \frac{1}{\gamma_2}. \quad (3.124)$$

El valor de equilibrio para la variable T es

$$T^* = \frac{\delta}{\epsilon} K \quad (3.125)$$

Sustituyendo el valor T^* en las ceroclinas dadas en las expresiones (3.122), (3.123) y (3.124) se obtienen las siguientes expresiones:

$$P = \left(r - \frac{r}{Q}C - \alpha_1 \frac{\delta}{\epsilon} K - \alpha_3 K + \alpha_4 K\right) \frac{1}{\alpha_2} \quad (3.126)$$

$$P = (r_1 + \beta_1 C - \beta_2 \frac{\delta}{\epsilon} K) \frac{Q_1}{r_1} \quad (3.127)$$

$$P = \left(\mu_c \frac{C}{C + \phi_c} - \gamma_1 \frac{\delta}{\epsilon} K + \mu_k \frac{K}{K + \phi_k(\frac{\delta}{\epsilon} K + 1)} - \omega \right) \frac{1}{\gamma_2} \quad (3.128)$$

La C- y P- ceroclinas dadas en (3.126) y (3.127) generan planos en función de C y K. La intersección entre estas dos superficies se da por la siguiente recta

$$C = \left[\frac{r}{\alpha_2} - Q_1 + \left(\frac{\alpha_4}{\alpha_2} - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} + \beta_2 \frac{Q_1}{r_1} \frac{\delta}{\epsilon} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\delta}{\epsilon} \right) K \right] \left(\beta_1 \frac{Q_1}{r_1} + \frac{r}{Q\alpha_2} \right)^{-1} \quad (3.129)$$

Calculemos la derivada parcial de esta recta, como función de K, generada por la intersección entre ambos planos:

$$\frac{\partial C}{\partial K} = \left(\frac{\alpha_4}{\alpha_2} - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} + \beta_2 \frac{Q_1}{r_1} \frac{\delta}{\epsilon} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\delta}{\epsilon} \right) \left(\beta_1 \frac{Q_1}{r_1} + \frac{r}{Q\alpha_2} \right)^{-1}. \quad (3.130)$$

Por lo tanto para garantizar que la recta sea creciente, supondremos que:

$$\frac{\alpha_4}{\alpha_2} + \beta_2 \frac{Q_1}{r_1} \frac{\delta}{\epsilon} > \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \frac{\delta}{\epsilon} + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}. \quad (3.131)$$

Siendo esta una de las condiciones necesarias en el teorema para que los tres planos se intersequen en el octante positivo. Utilizando el Lema 1 sabemos que la T-ceroclina es cóncava, por lo cual solo bastaría ver bajo que condiciones podemos manipular la T-ceroclina para garantizar cero, una o dos intersecciones. Esto lo lograremos haciendo un análisis de sensibilidad con respecto a uno de los parámetros.

Tomemos ahora las derivadas parciales de la T-ceroclina mostrada en (3.124):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial C} &= \frac{\mu_c}{\gamma_2} \frac{\phi_c}{(C + \phi_c)^2} > 0, \\ \frac{\partial P}{\partial K} &= \frac{\mu_k}{\gamma_2} \frac{\phi_k}{(K + \phi_k \frac{\delta}{\epsilon} K + \phi_k)^2} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{\delta}{\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Igualemos a cero la derivada parcial de la T-ceroclina con respecto a K mostrada en (3.132)

$$0 = \frac{\mu_k}{\gamma_2} \frac{\phi_k}{(K + \phi_k \frac{\delta}{\epsilon} K + \phi_k)^2} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{\delta}{\epsilon} \quad (3.133)$$

Despejando a K de la ecuación (3.133) y renombrándolo como K_m , obtenemos:

$$K_M = \left(\sqrt{\frac{\mu_k \phi_k \epsilon}{\gamma_1 \delta}} - \phi_k \right) \frac{1}{1 + \phi_k \frac{\delta}{\epsilon}} \quad (3.134)$$

Este valor de K_M será positivo siempre y cuando la siguiente desigualdad sea cierta

$$\sqrt{\frac{\mu_k \epsilon}{\gamma_1 \delta}} > \sqrt{\phi_k}. \quad (3.135)$$

Que bajo el supuesto del teorema es cierta. Ahora, evaluemos la T-ceroclina en K_M la cual es una función del parametro μ_k , obteniendo así que:

$$f(\mu_k) = \left(\mu_c \frac{C}{C + \phi_c} - \gamma_1 \frac{\delta}{\epsilon} K_M + \mu_k \frac{K_M}{K_M + \phi_k \left(\frac{\delta}{\epsilon} K_M + 1 \right)} - \omega \right) \frac{1}{\gamma_2} \quad (3.136)$$

Una vez hecho esto, derivemos la función dada en (3.136) con respecto a μ_k .

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu_k} f(\mu_k) &= \left(-\gamma_1 \frac{\delta}{\epsilon} K'_M + \frac{d}{d\mu_k} \left[\mu_k K_M \frac{1}{K_M (1 + \phi_k \frac{\delta}{\epsilon}) + \phi_k} \right] \right) \frac{1}{\gamma_2} \\ &= \left(-\gamma_1 \frac{\delta}{\epsilon} K'_M + \frac{d}{d\mu_k} \left[\sqrt{\mu_k} K_M \frac{1}{\sqrt{\frac{\phi_k \epsilon}{\gamma_1 \delta}}} \right] \right) \frac{1}{\gamma_2} \\ &= \left(-\gamma_1 \frac{\delta}{\epsilon} K'_M + \left(\sqrt{\frac{\phi_k \epsilon}{\gamma_1 \delta}} - \frac{\phi_k}{2\sqrt{\mu_k}} \right) \left(\frac{1}{1 + \phi_k \frac{\delta}{\epsilon}} \right) \left(\sqrt{\frac{\gamma_1 \delta}{\phi_k \epsilon}} \right) \right) \frac{1}{\gamma_2} \end{aligned} \quad (3.137)$$

Simplificando la expresión (3.137) obtenemos:

$$\frac{d}{d\mu_k} f(\mu_k) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} \sqrt{\frac{\gamma_1 \delta \phi_k}{\epsilon}} \right) \left(\frac{1}{1 + \phi_k \frac{\delta}{\epsilon}} \right) \frac{1}{\gamma_2}. \quad (3.138)$$

Al analizar el comportamiento de la derivada de la función $f(\mu_k)$, observese que para valores de μ_k cercanos a cero, obtenemos una derivada negativa, pero mientras que μ_k crece, tendremos una derivada positiva, creciendo así los valores de la función.

Si queremos ver en que punto la derivada empieza a crecer, basta con ver que

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} \sqrt{\frac{\gamma_1 \delta \phi_k}{\epsilon}} &> 0 \\ \sqrt{\mu_k} &> \sqrt{\frac{\gamma_1 \delta \phi_k}{\epsilon}} \\ \mu_k &> \frac{\gamma_1 \delta \phi_k}{\epsilon} \end{aligned} \quad (3.139)$$

Por lo tanto, modificando el parámetro μ_k podemos subir o bajar a voluntad la T-ceroclina y dado que las ceroclinas $C-$ y $P-$ mostradas en (3.122) y (3.123) respectivamente no depende de este parámetro, podemos dejar fija la intersección entre ambas mientras subimos y bajamos a voluntad la $T-$ ceroclina para garantizar una, dos o ninguna intersección entre las ceroclinas. $\square$

Estabilidad de los equilibrios del modelo 8:

Ahora analicemos la estabilidad de los puntos de equilibrio asociados al modelo descrito en (3.113). Para esto de nuevo ocuparemos la matriz Jacobiana asociada al modelo, la cual es:

$$J(C, P, T, K) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} \end{bmatrix}. \quad (3.140)$$

Con cada J_{ig} siendo:

- $J_{11} = r - 2\frac{r}{Q}C - \alpha_1T - \alpha_2P - \alpha_3K + \alpha_4K.$
- $J_{12} = -\alpha_2C.$
- $J_{13} = -\alpha_1C.$
- $J_{14} = (\alpha_4 - \alpha_3)C.$
- $J_{21} = \beta_1P.$
- $J_{22} = r_1 - 2\frac{r_1}{Q_1}P + \beta_1C - \beta_2T.$
- $J_{23} = -\beta_2P.$
- $J_{24} = 0.$
- $J_{31} = \mu_c\phi_c \frac{T}{(C+\phi_c)^2}.$
- $J_{32} = -\gamma_2T.$
- $J_{33} = \mu_c \frac{C}{C+\phi_c} - 2\gamma_1T + \mu_k K \frac{K+\phi_k}{(K+\phi_k(T+1))^2} - \omega.$
- $J_{34} = \mu_k T \frac{\phi_k(T+1)}{(K+\phi_k(T+1))^2}.$
- $J_{41} = 0.$
- $J_{42} = 0.$
- $J_{43} = \epsilon.$
- $J_{44} = -\delta.$

Teorema 34 Para el modelo dado por (3.113), con χ_0 , χ_1 y χ_4 definidos en (3.114).

- El punto χ_0 es inestable para todos los valores de los parámetros del modelo.
- El punto χ_1 es inestable para todos los valores de los parámetros del modelo.

- El punto χ_4 es inestable para todos los valores de los parámetros del modelo.

Demostración Utilizaremos la matriz Jacobiana dada en (3.140) para calcular los polinomios característicos de los puntos χ_0 , χ_1 y χ_4 . De modo que el polinomio característico de χ_0 es:

$$P_c(\chi_0) = (r - \lambda)(r_1 - \lambda)(-\delta - \lambda)(-\omega - \lambda). \quad (3.141)$$

A partir de (3.141) se puede notar fácilmente que el polinomio característico asociado a χ_0 admite las raíces positivas $\lambda = r$ y $\lambda = r_1$. Concluyendo así que el punto χ_0 es un equilibrio inestable.

Posteriormente, el polinomio característico de χ_1 es:

$$P_c(\chi_1) = (-r - \lambda)(-\lambda + r_1 + Q\beta_1)(-\lambda + \frac{\mu_c Q}{Q + \phi_c} - \omega)(-\lambda - \delta). \quad (3.142)$$

Podemos ver en (3.142) que el polinomio característico asociado a χ_1 admite la raíz positiva $\lambda = r_1 + Q_1\beta_1$, concluyendo así que χ_1 es un punto de equilibrio inestable.

Por último, el polinomio característico de χ_4 es:

$$P_c(\chi_4) = (-\lambda + \alpha_4 K_1^* - \alpha_3 K_1^* - \alpha_1 T_1^* + r)(-\lambda + r_1 - \beta_2 T_1^*) P_c(J(T_1^*, K_1^*)) \quad (3.143)$$

A partir de (3.143) se puede observar que el polinomio característico asociado al punto χ_4 tiene como factor al polinomio característico de (T_1^*, K_1^*) asociado para el modelo dado por (3.38), ya que como para ese modelo el punto era inestable, se concluye que tiene asociado al menos un valor propio positivo. Por lo tanto, se concluye que χ_4 es inestable. $\square$

Teorema 35 Para el modelo dado por (3.113), con χ_2 , χ_3 y χ_5 definidos en (3.114).

- El punto χ_2 es estable si y solo si $Q_1 > \frac{r}{\alpha_2}$.
- El punto χ_3 es estable si y solo si $\gamma_2 P_{M1} + \omega > \mu_c \frac{C_{M1}}{C_{M1} + \phi_C}$.
- El punto χ_5 es estable si y solo si $\alpha_3 K_2^* + \alpha_1 T_2^* > \alpha_4 K_2^* + r$ y además $\beta_2 T_2^* > r_1$.

Demostración Utilizaremos la matriz Jacobiana dada en (3.140) para calcular los polinomios característicos de los puntos χ_2 , χ_3 y χ_5 . De modo que el polinomio característico de χ_2 es:

$$P_c(\chi_2) = (-r_1 - \lambda)(-\lambda + r - Q_1\alpha_2)(-\lambda - Q_1\gamma_2 - \omega)(-\lambda - \delta). \quad (3.144)$$

A partir de (3.144) podemos observar que el polinomio característico asociado al punto χ_2 admitiría solamente raíces negativas si $r - Q_1\alpha_2 < 0$, es decir, el punto χ_2 es estable si y solo si $Q_1 > \frac{r}{\alpha_2}$.

Por otra parte, el polinomio característico de χ_3 es:

$$P_c(\chi_3) = (-\delta - \lambda)(\mu_c \frac{C_{M1}}{C_{M1} + \phi_C} - \gamma_2 P_{M1} - \omega - \lambda)P_c(J(C_{M1}, P_{M1})). \quad (3.145)$$

En (3.145) podemos observar que el polinomio característico asociado al punto χ_3 tiene como factor al polinomio característico asociado al punto (C_{M1}, P_{M1}) para el modelo dado por (3.1). Como para ese modelo anterior (C_{M1}, P_{M1}) es un punto estable, entonces podemos garantizar que dos raíces cuentan con parte real negativa. Ya que la otra raíz es $\lambda = -\delta$, entonces solo bastaría que la raíz $\lambda = \mu_c \frac{C_{M1}}{C_{M1} + \phi_C} - \gamma_2 P_{M1} - \omega < 0$ para que el punto χ_3 sea estable. Por lo tanto, se concluye que χ_3 es estable si y solo si $\gamma_2 P_{M1} + \omega > \mu_c \frac{C_{M1}}{C_{M1} + \phi_C}$.

Por último, el polinomio característico de χ_5 es

$$P_c(\chi_5) = (-\lambda + \alpha_4 K_2^* - \alpha_3 K_2^* - \alpha_1 T_2^* + r)(-\lambda + r_1 - \beta_2 T_2^*)P_c(J(T_2^*, K_2^*)). \quad (3.146)$$

Podemos observar en (3.146) que el polinomio característico asociado a χ_5 tiene como factor, al polinomio característico del punto (T_2^*, K_2^*) para el modelo (3.38). Ya que para ese modelo anterior (T_2^*, K_2^*) es un equilibrio estable, garantizamos que tiene asociadas dos raíces con parte real negativa en su polinomio característico. Por lo tanto, para que el punto χ_5 sea estable, bastaría que las raíces $\lambda = +\alpha_4 K_2^* - \alpha_3 K_2^* - \alpha_1 T_2^* + r$ y $\lambda = r_1 - \beta_2 T_2^*$ sean negativas. Concluyendo así que el punto de equilibrio χ_5 es estable si y solo si $\alpha_3 K_2^* + \alpha_1 T_2^* > \alpha_4 K_2^* + r$ y además $\beta_2 T_2^* > r_1$. $\square$

Teorema 36 Para el modelo completo mostrado en (3.113), con un punto de equilibrio de la forma $(0, P^*, T^*, K^*)$ se tiene que:

- Si el punto de la forma $(0, P^*, T^*, K^*)$ es estable en el modelo dado por (3.97), entonces el punto también será para el modelo definido en (3.113) si y solo si $(\alpha_4 - \alpha_3)K^* - \alpha_2 P^* - \alpha_1 T^* + r < 0$.
- Si el punto de la forma $(0, P^*, T^*, K^*)$ es inestable en el modelo dado por (3.97), entonces es inestable en el modelo dado por (3.113).

Demostración Sea $C = 0$ en la matriz Jacobiana definida en (3.140). Ahora, si calculamos el polinomio característico asociado a esa matriz obtendremos la siguiente expresión:

$$P_c(J(0, P, T, K)) = (-\lambda + \alpha_4 K - \alpha_3 K - \alpha_2 P - \alpha_1 T + r) P_c(J(P, T, K)) \quad (3.147)$$

Podemos observar que el polinomio característico asociado al modelo dado por (3.97) es un factor de (3.147). Si un punto de coexistencia para el modelo dado por (3.97) es estable, entonces tendría asociados tres valores propios negativos, siendo por ende estable para el modelo definido en (3.113) si $(\alpha_4 - \alpha_3)K - \alpha_2 P - \alpha_1 T + r < 0$.

Por último, si el punto de equilibrio fuera inestable para el modelo definido en (3.97), entonces tendría asociado al menos un valor propio positivo, haciendo al punto inestable también en el modelo mostrado por (3.113). $\square$

La estabilidad de los puntos de equilibrio χ_6 , χ_7 , χ_8 y χ_9 mostrados en (3.114) y los posibles puntos de equilibrio de coexistencia entre las 4 poblaciones se analizará de manera numérica en la siguiente sección.

Simulaciones numéricas:

A continuación, utilizando simulaciones numéricas se muestra gráficamente la estabilidad de los puntos de equilibrio asociados al modelo mostrado en (3.113). Para la Figura 3.26 se utilizaron los valores de los parámetros dados por $r = 0.9$, $\alpha_1 = 0.01$, $\alpha_2 = 0.005$, $\alpha_3 = 0.02$, $\alpha_4 = 0.03$, $Q = 30$, $r_1 = 0.8$, $\beta_1 = 0.05$, $\beta_2 = 0.00022$, $Q_1 = 200$, $\gamma_1 = 0.000151$, $\gamma_2 = 0.162$, $\mu_c = 2.35$, $\mu_k = 0.01$, $\omega = 0.44$, $\phi_k = 0.1$, $\phi_c = 1.44$, $\delta = 0.12$ y $\epsilon = 0.4$ con condiciones iniciales $C_0 = 28$, $P_0 = 150$, $T_0 = 13$ y $K_0 = 1$.

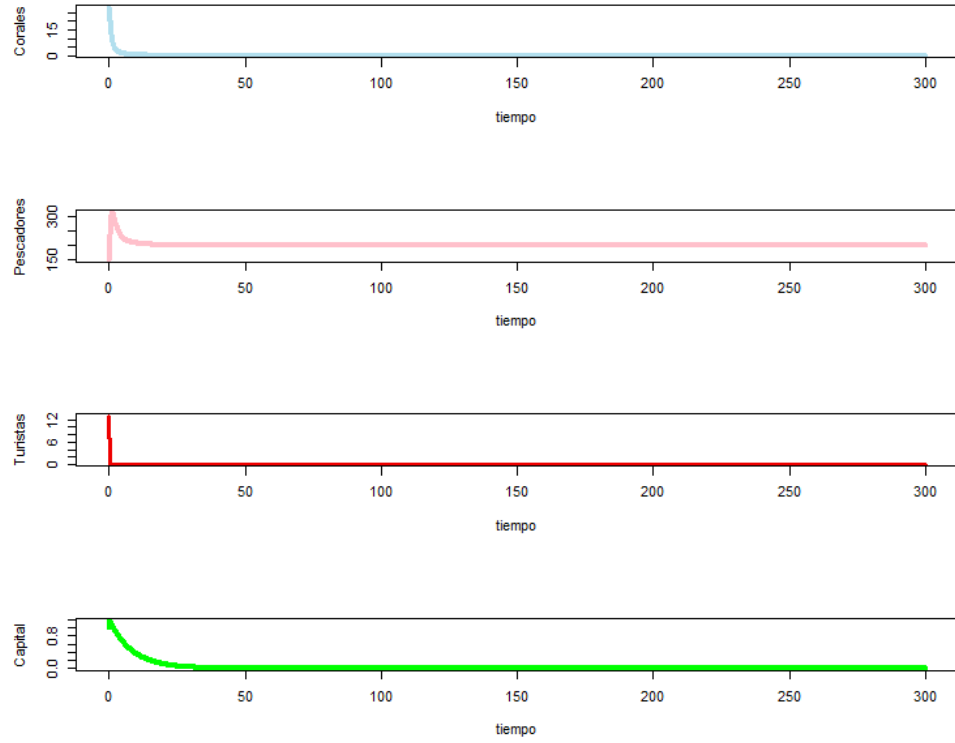


Figura 3.26: Para el modelo mostrado en (3.113), bajo las condiciones de estabilidad mostradas en el Teorema 35, las soluciones pueden converger a la capacidad de carga de los pescadores.

Para la Figura 3.27 se utilizaron los valores de los parámetros dados por $r = 0.9$, $\alpha_1 = 0.01$, $\alpha_2 = 0.005$, $\alpha_3 = 0.02$, $\alpha_4 = 0.03$, $Q = 30$, $r_1 = 0.8$, $\beta_1 = 0.05$, $\beta_2 = 0.00022$, $Q_1 = 200$, $\gamma_1 = 0.000151$, $\gamma_2 = 0.162$, $\mu_c = 2.35$, $\mu_k = 0.01$, $\omega = 0.44$, $\phi_k = 0.1$, $\phi_c = 1.44$, $\delta = 0.12$ y $\epsilon = 0.4$ con condiciones iniciales $C_0 = 28$, $P_0 = 150$, $T_0 = 13$ y $K_0 = 1$.

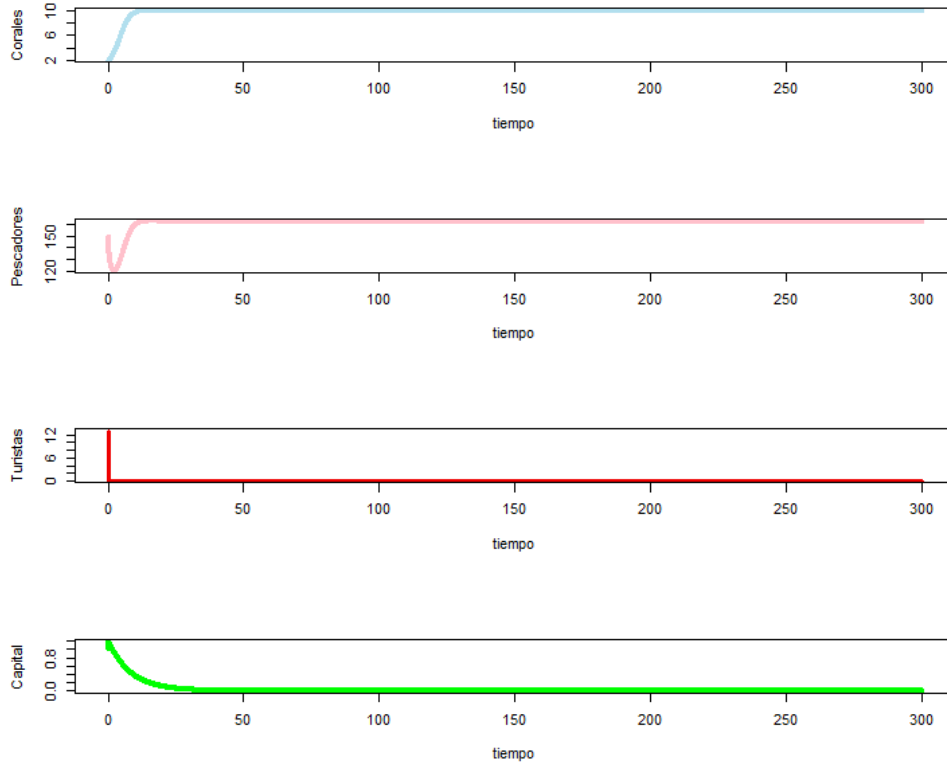


Figura 3.27: Para el modelo mostrado en (3.113), bajo las condiciones de estabilidad mostradas en el Teorema 35, las soluciones pueden converger al punto de coexistencia entre Corales y Pescadores.

Para la Figura 3.28 se utilizaron los valores de los parámetros dados por $r = 0.798$, $\alpha_1 = 0.01201$, $\alpha_2 = 0.005$, $\alpha_3 = 0.02$, $\alpha_4 = 0.003$, $Q = 300$, $r_1 = 0.008$, $\beta_1 = 0.05$, $\beta_2 = 0.022$, $Q_1 = 100$, $\gamma_1 = 0.000151$, $\gamma_2 = 0.0000162$, $\mu_c = 2.35$, $\mu_k = 0.01$, $\omega = 0.44$, $\phi_k = 0.1$, $\phi_c = 1.74$, $\delta = 2.712$ y $\epsilon = 0.000004$ con condiciones iniciales $C_0 = 12.91$, $P_0 = 0.1$, $T_0 = 100$ y $K_0 = 0.1$.

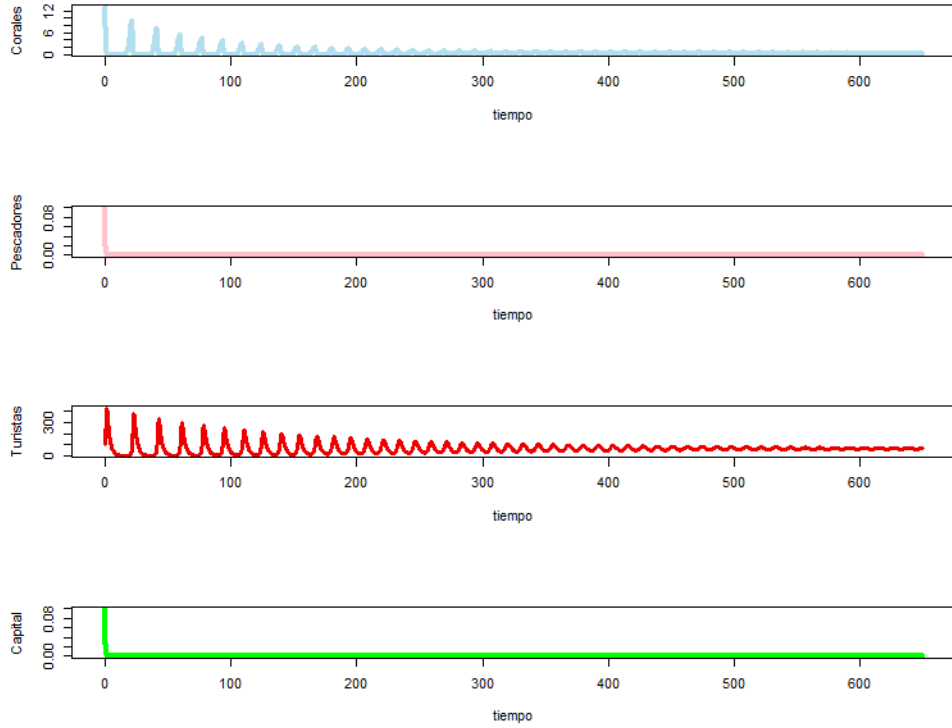


Figura 3.28: Para el modelo mostrado en (3.113), bajo supuestos muy grandes sobre los parámetros de la población de Pescadores y de Capital, podemos garantizar la convergencia al punto de equilibrio entre Corales y Turistas.

Para la Figura 3.29 se utilizaron los valores de los parámetros dados por $r = 1.98$, $\alpha_1 = 0.012$, $\alpha_2 = 0.005$, $\alpha_3 = 0.0202$, $\alpha_4 = 0.05$, $Q = 30$, $r_1 = 0.98$, $\beta_1 = 0.9875$, $\beta_2 = 1.122$, $Q_1 = 200$, $\gamma_1 = 0.000151$, $\gamma_2 = 0.000162$, $\mu_c = 2.35$, $\mu_k = 6.46$, $\omega = 0.044$, $\phi_k = 0.1$, $\phi_c = 1.74$, $\delta = 1.12$ y $\epsilon = 0.54$ con condiciones iniciales $C_0 = 200.91$, $P_0 = 0.19$, $T_0 = 100$ y $K_0 = 0.000001$.

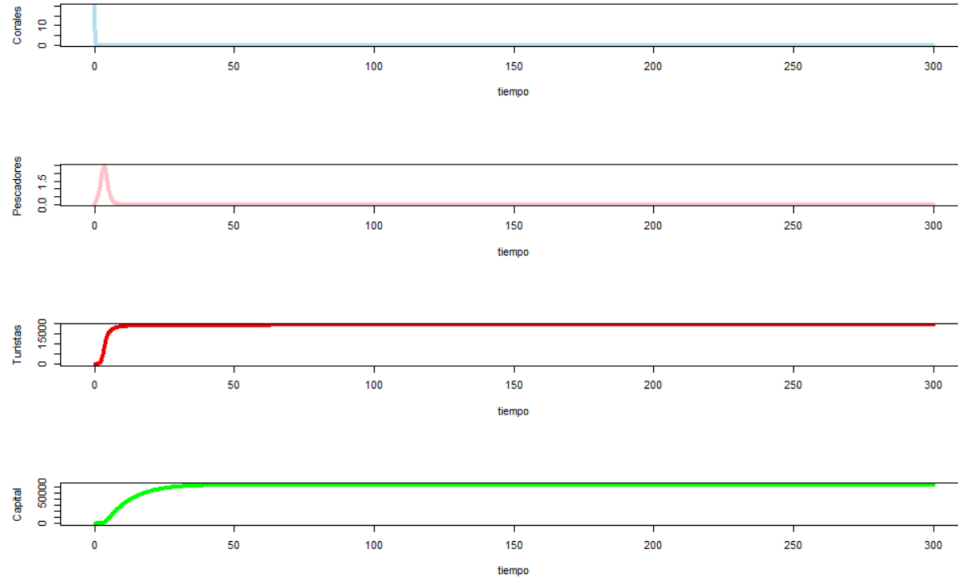


Figura 3.29: Para el modelo mostrado en (3.113), las soluciones pueden converger a un punto de coexistencia entre Turismo y Capital.

Para la Figura 3.30 se utilizaron los valores de los parámetros dados por $r=0.98$, $\alpha_1=0.201$, $\alpha_2=0.5$, $\alpha_3=0.202$, $\alpha_4=0.03$, $Q=30$, $r_1=0.98$, $\beta_1=1.9875$, $\beta_2=0.00000122$, $Q_1=200$, $\gamma_1=0.000151$, $\gamma_2=0.000162$, $\mu_c=2.35$, $\mu_k=3.46$, $\omega=0.44$, $\phi_k=0.1$, $\phi_c=1.44$, $\delta=0.12$ y $\epsilon=0.4$ con condiciones iniciales $C_0=20.91$, $P_0=0.005$, $T_0=20.1$ y $K_0=0.001$.

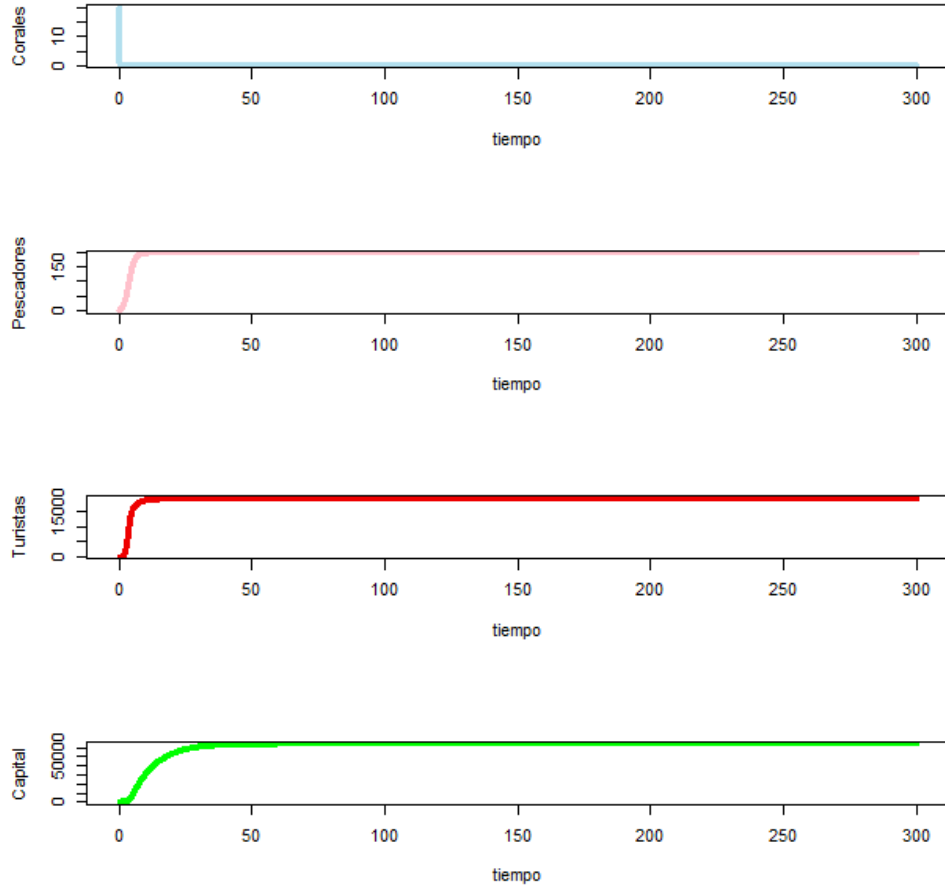


Figura 3.30: Para el modelo mostrado en (3.113), las soluciones pueden converger al punto de equilibrio entre Pesca, Turismo y Capital. Siendo un escenario donde las actividades humanas ocasionaron la extinción de la población de corales.

Para la Figura 3.31 se utilizaron los valores de los parámetros dados por $r = 1.98$, $\alpha_1 = 0.012$, $\alpha_2 = 0.005$, $\alpha_3 = 0.0202$, $\alpha_4 = 0.05$, $Q = 30$, $r_1 = 0.98$, $\beta_1 = 0.9875$, $\beta_2 = 1.122$, $Q_1 = 200$, $\gamma_1 = 0.000151$, $\gamma_2 = 0.000162$, $\mu_c = 2.35$, $\mu_k = 6.46$, $\omega = 0.044$, $\phi_k = 0.1$, $\phi_c = 1.74$, $\delta = 1.12$ y $\epsilon = 0.54$ con condiciones iniciales $C_0 = 200.91$, $P_0 = 0.19$, $T_0 = 100$ y $K_0 = 0.000001$.

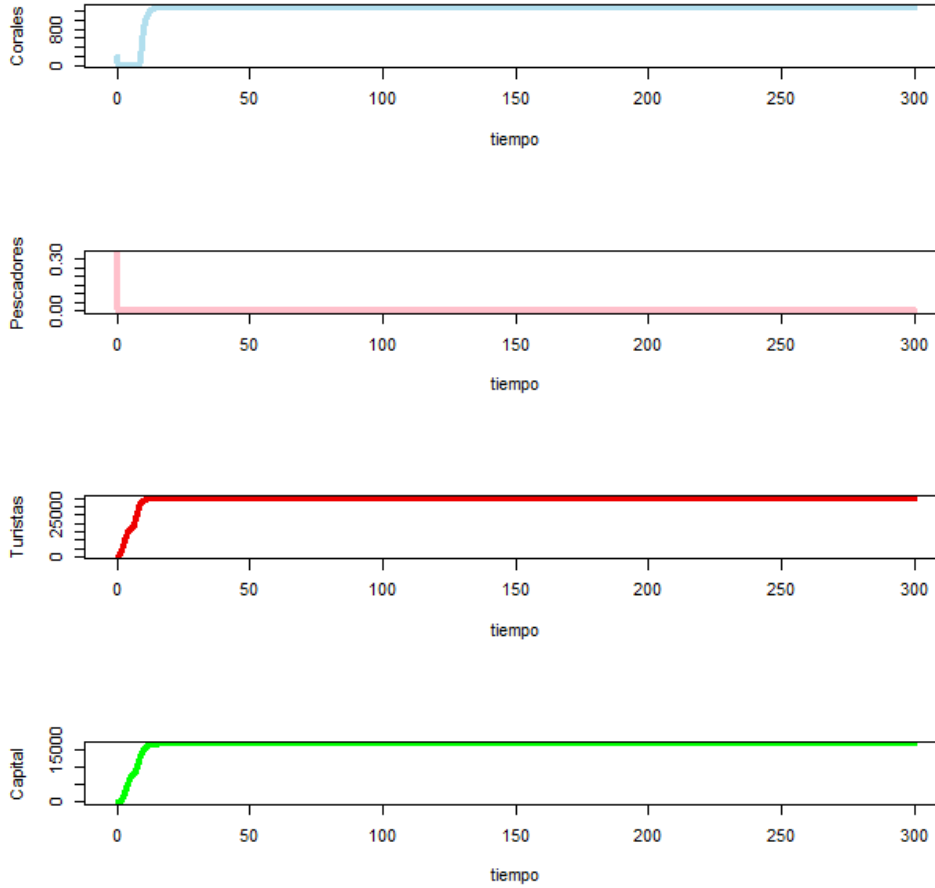


Figura 3.31: Para el modelo mostrado en (3.113), las soluciones pueden converger a un punto de coexistencia entre Corales, Turismo y Capital. Mostrando un escenario donde las actividades pesqueras fueron desplazadas por las actividades turísticas.

Para la Figura 3.32 se utilizaron los valores de los parámetros dados por $r = 9.98$, $\alpha_1 = 0.01201$, $\alpha_2 = 0.005$, $\alpha_3 = 0.0202$, $\alpha_4 = 0.05$, $Q = 30$, $r_1 = 0.98$, $\beta_1 = 12.9875$, $\beta_2 = 0.00000000000000122$, $Q_1 = 200$, $\gamma_1 = 0.000151$, $\gamma_2 = 0.000162$, $\mu_c = 2.35$, $\mu_k = 6.46$, $\omega = 0.044$, $\phi_k = 0.9$, $\phi_c = 1.74$, $\delta = 1.12$, $\epsilon = 0.54$ con condiciones iniciales $C_0 = 200.91$, $P_0 = 0.19$, $T_0 = 100$ y $K_0 = 0.000001$.

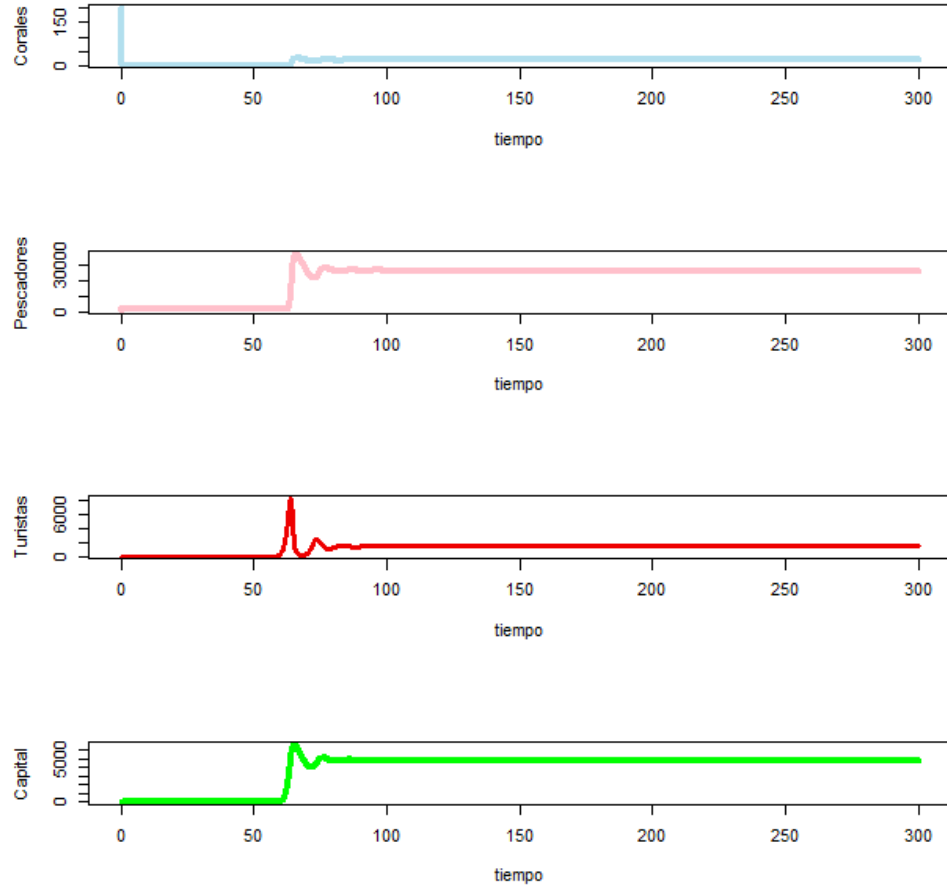


Figura 3.32: Para el modelo mostrado en (3.113), las soluciones pueden converger a un punto de coexistencia entre Corales, Turistas, Pescadores y Capital.

Para la Figura 3.33 se utilizaron los valores de los parámetros dados por $r = 9.98$, $\alpha_1 = 0.01201$, $\alpha_2 = 0.005$, $\alpha_3 = 0.0202$, $\alpha_4 = 0.05$, $Q = 30$, $r_1 = 0.98$, $\beta_1 = 12.9875$, $\beta_2 = 0.000000000000000122$, $Q_1 = 200$, $\gamma_1 = 0.000151$, $\gamma_2 = 0.000162$, $\mu_c = 2.35$, $\mu_k = 6.46$, $\omega = 0.044$, $\phi_k = 0.05$, $\phi_c = 1.74$, $\delta = 1.12$ y $\epsilon = 0.54$ con condiciones iniciales $C_0 = 200.91$, $P_0 = 0.19$, $T_0 = 100$ y $K_0 = 0.000001$.

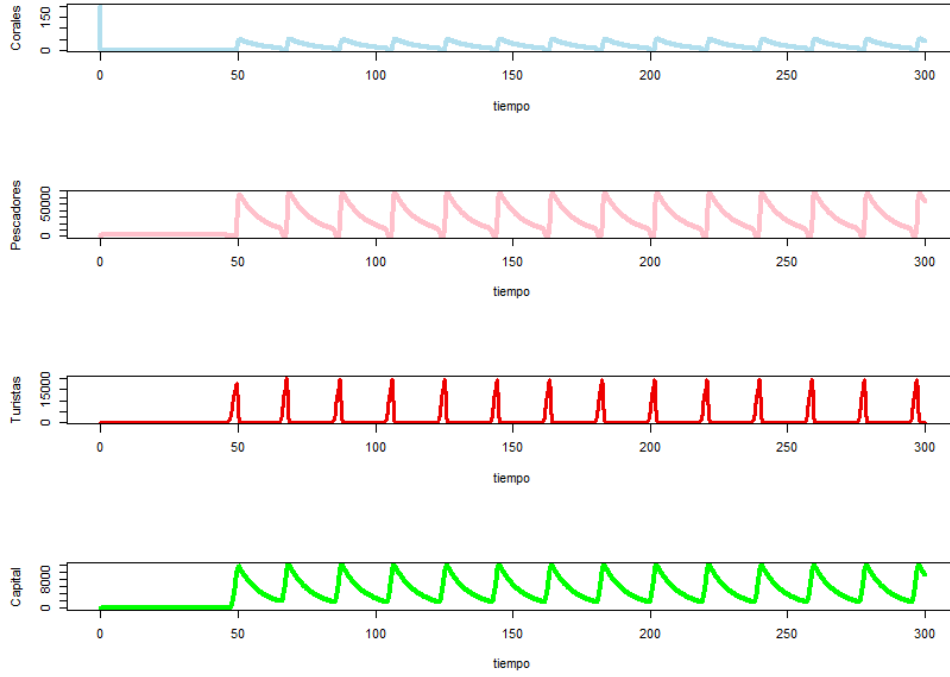


Figura 3.33: Para el modelo mostrado en (3.113), modificando el parámetro ϕ_k , podemos cambiar la estabilidad del punto de coexistencia entre las 4 poblaciones para obtener orbitas periódicas.

Para la Figura 3.34 se utilizaron los valores de los parámetros dados por $r=0.9$, $\alpha_1=0.01$, $\alpha_2=0.005$, $\alpha_3=0.02$, $\alpha_4=0.03$, $Q=30$, $r_1=0.8$, $\beta_1=0.05$, $\beta_2=0.00022$, $Q_1=200$, $\gamma_1=0.000151$, $\gamma_2=0.000162$, $\mu_c=2.35$, $\mu_k=3.46$, $\omega=0.044$, $\phi_k=0.1$, $\phi_c=1.44$, $\delta=0.12$, $\epsilon=0.4$ con condiciones iniciales $C_0=28$, $P_0=150$, $T_0=13$ y $K_0=1$.

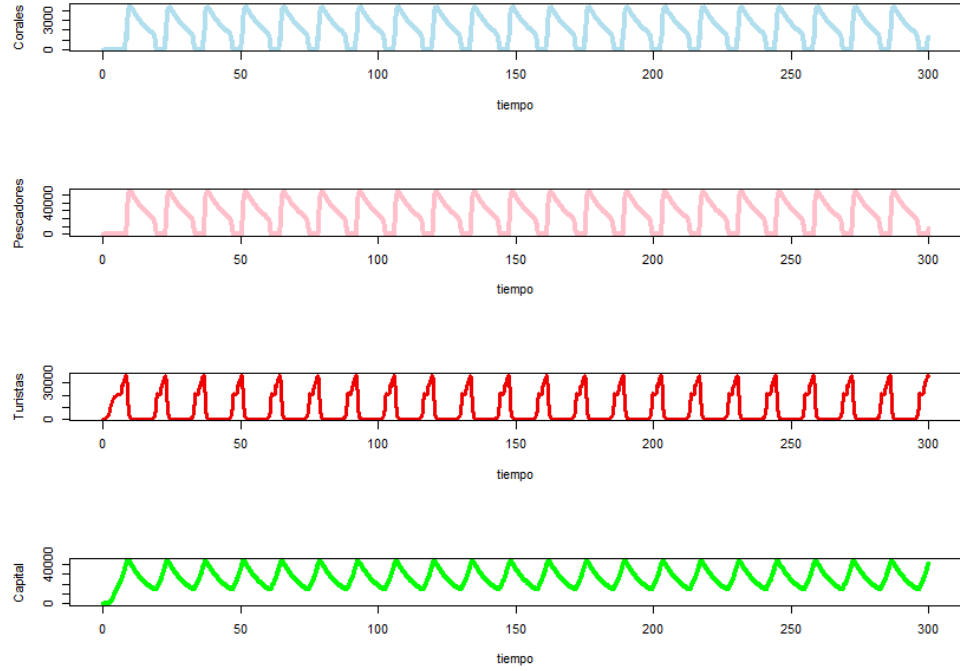


Figura 3.34: Uno de los patrones de las orbitas periódicas generadas por las soluciones para el modelo mostrado en (3.113), se puede apreciar que mientras los pescadores y corales decaen, los turistas y el capital crecen (y viceversa).

Capítulo 4

Discusión:

Con el rápido declive que están teniendo los arrecifes de coral alrededor del mundo, resulta natural querer comprender de que manera las actividades antropogénicas fomentan este daño. El turismo y la pesca son algunas de las actividades que generan más estrés en los arrecifes a nivel mundial, ya que muchas comunidades costeras dependen en gran parte de esos servicios para solventarse económicamente (Cinner y Pollnac, 2004; Lachs y Oñate-Casado, 2020; Nunez-Lara et al., 2003). Aunque ya se han hecho modelos matemáticos que estudian la interacción entre humanos con ecosistemas y modelos que analizan dinámicas en arrecifes de coral (Agarwal y Devi, 2012; Casagrandi y Rinaldi, 2002; Chaudhary et al., 2013, 2015; Dubey et al., 2003; Jyotsna y Tandon, 2017; Lacitignola et al., 2007; Villavicencio-Pulido et al., 2023), no existen muchos modelos matemáticos que estudien los efectos de actividades antropogénicas en ecosistemas marinos. En este trabajo se propuso y analizó un modelo que describe la dinámica entre arrecifes de coral, pescadores, turistas y capital. A partir de ese modelo se generaron 7 submodelos que fueron estudiados a profundidad de manera teórica y numérica, para comprender de manera más profunda el modelo general.

En este apartado se presentarán los resultados que se obtuvieron para cada uno de los modelos, así como algunas interpretaciones biológicas y sociales de los mismos.

Submodelo 1: Corales y Pescadores

La información que se obtuvo a partir del análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio asociados al modelo mostrado en (3.1) y los puntos de equilibrio definidos en (3.2) es la siguiente:

- Resulta imposible que ambas poblaciones se extingan, es decir, que desaparezcan los arrecifes de coral y los pescadores de la zona si son las únicas poblaciones en el área (El punto χ_0 es inestable).

- Puede extinguirse la población de corales y mantenerse la población de pescadores (El punto χ_1 es inestable y χ_2 puede ser estable).
- Las actividades pesqueras y los arrecifes de coral pueden coexistir sin que ninguna de las poblaciones se extinga (el punto χ_3 es estable si existe).

Submodelo 2: Corales y Turistas

La información que se obtuvo a partir del análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio asociados al modelo mostrado en (3.8) es la siguiente:

- Resulta imposible que ambas poblaciones se extingan, es decir, que desaparezcan los arrecifes y dejen de llegar turistas en la zona (El punto χ_0 es inestable).
- Podría ocurrir que el atractivo turístico de los arrecifes de coral no sea suficiente para mantener las actividades turísticas a flote, provocando un descenso rápido en la cantidad de turistas que llegan a la zona (el punto χ_1 puede ser estable).
- El atractivo natural de los arrecifes de coral puede ser suficiente para mantener un número constante de turistas, sin embargo, la dinámica entre estos generará oscilaciones hasta converger a un punto constante (el punto de coexistencia χ_2 puede ser estable).

En caso de que el principal atractivo turístico de nuestra zona sean los arrecifes de coral y las actividades que se pueden realizar en ellos, resulta necesario hacer que su popularidad crezca entre los turistas.

Submodelo 3: Pescadores y Turistas

La información que se obtuvo a partir del análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio asociados al modelo mostrado en (3.28) y los puntos de equilibrio definidos en (3.29) es la siguiente:

- Resulta imposible que los pescadores y turistas desaparezcan en conjunto de la zona (El punto χ_0 es inestable).
- Sin atractivos turísticos dados por el ecosistema, por infraestructuras, ni la pesca, tenemos que la única población que se mantiene es la de pescadores (el punto χ_1 es el único punto estable y además no existen puntos de coexistencia).

Los resultados del análisis de estabilidad podrían estar bien justificados en un escenario de la vida real donde sin un atractivo extra para atraer turistas, las actividades pesqueras van a prevalecer sobre una industria de turismo emergente. Eso debería de motivar a mantener un ecosistema de buena calidad para actividades turísticas o a una inversión buena en edificaciones atractivas.

Submodelo 4: Turistas y Capital

La información que se pudo obtener a partir del análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio asociados al modelo mostrado en (3.38) y los puntos de equilibrio definidos en (3.39) es la siguiente:

- Tener poca atractividad asociada a infraestructura puede ocasionar la desaparición del turismo en una zona (El punto χ_0 es siempre estable).
- Puede suceder que para ciertas condiciones iniciales en la cantidad de turistas que se reciben y en el número de edificaciones que se tengan, se puede conseguir sustentabilidad a largo plazo de la industria turística (solo existe un equilibrio de coexistencia χ_1 y es semiestable).
- Es posible la existencia teórica de dos equilibrios donde los turistas en la zona y el capital se mantengan, siendo solamente uno de ellos estable (el punto χ_2 es inestable y χ_3 estable).

Esta cantidad de casos nos muestran que es posible mantener las actividades turísticas en una zona que no cuenta con un ecosistema atractivo. Sin embargo, la desventaja de no tener atractividad extra es la necesidad de condiciones iniciales altas para garantizar la permanencia de las actividades turísticas.

Esto indicaría que para tener una zona turística basada en edificaciones atractivas, se necesitaría una inversión inicial muy alta para así mantener el interés de los turistas, lo cual no resulta tan rentable si no se cuenta con el espacio y dinero para crearlas.

Submodelo 5: Corales, Pescadores y Turistas

La información que se pudo obtener a partir del análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio asociados al modelo mostrado en (3.59) y los puntos de equilibrio definidos en (3.60) es la siguiente:

- Resulta imposible que las tres poblaciones se extingan, es decir, en cualquier escenario se mantendrá alguna de las industrias (El punto χ_0 es inestable).
- Es imposible que las actividades pesqueras y turísticas desaparezcan y dejen de afectar a los arrecifes de coral (el punto χ_1 es inestable).
- Los arrecifes de coral y las actividades turísticas pueden desaparecer, mientras que las actividades pesqueras prevalecen (el punto χ_2 puede ser estable).
- La pesca podría verse desplazada por las actividades turísticas (el punto χ_3 puede ser estable).
- La atractividad de los arrecifes de coral y la interferencia de las actividades pesqueras para el turismo, puede dar como resultado la desaparición de turistas en el área (el punto χ_4 puede ser estable).

- La coexistencia entre las tres poblaciones es posible (el punto de coexistencia χ_5 puede existir y numéricamente se pudo comprobar estabilidad).

Esto es importante ya que podría darse el caso donde los daños ocasionados por ambas industrias terminen acabando con los arrecifes de coral en el área, afectando al mismo tiempo el atractivo turístico en la zona lo que a largo plazo solo permitiría la supervivencia de las actividades pesqueras en la zona.

Resulta crucial para empezar a generar estrategias de pesca controladas y el mantenimiento adecuado de actividades turísticas cercanas a arrecifes de coral.

Submodelo 6: Corales, Turistas y Capital

La información que se pudo obtener a partir del análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio asociados al modelo mostrado en (3.80) y los puntos de equilibrio definidos en (3.81) es la siguiente:

- Resulta imposible que los arrecifes y las actividades turísticas desaparezcan en conjunto de la zona (el punto χ_0 es inestable).
- Puede que las actividades turísticas desaparezcan si los arrecifes de coral no presentan suficiente atraktividad en el área (el punto χ_1 puede ser estable).
- Existen dos puntos de equilibrio teóricos donde los arrecifes de coral en el área desaparecen y solo se mantiene la industria turística, siendo uno de ellos inestable (el punto χ_2 es inestable).
- La población de arrecifes de coral podría extinguirse en el área y las actividades turísticas podrían mantenerse (el punto χ_3 puede ser estable).
- Bajo supuestos de re-inversión en edificaciones y centros turísticos muy baja, se encontró solamente en simulaciones numéricas que los arrecifes de coral y los turistas podrían mantenerse, mientras que el capital decaería de manera rápida (el punto χ_4 parece ser estable bajo condiciones muy específicas).
- Puede existir coexistencia entre una población de corales y actividades turísticas en la zona (el punto de coexistencia χ_5 puede existir y se pudo comprobar estabilidad numéricamente).

Submodelo 7: Pescadores, Turistas y Capital

La información que se pudo obtener a partir del análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio asociados al modelo mostrado en (3.97) y los puntos de equilibrio definidos en (3.98) es la siguiente:

- Resulta imposible que las tres poblaciones se extingan, es decir, las industrias pesqueras y turísticas son relativamente robustas una vez que están asentadas en una zona (El punto χ_0 es inestable).

- Puede ocurrir que las actividades turísticas en la zona decaigan pero las actividades pesqueras seguirán de cualquier manera (El punto χ_1 es siempre estable).
- Los pescadores podrían verse desplazados por las actividades turísticas de la zona de tal manera que no podrían seguir trabajando (El punto χ_3 puede ser estable).
- Puede existir coexistencia entre la población de pescadores y las actividades turísticas en una zona.

Notemos como la estabilidad de $\chi_1 = (Q_1, 0, 0)$, implica que es muy factible la desaparición de actividades turísticas sin atractivos extras a las edificaciones. Esto puede verse como que las actividades pesqueras representan una fuente de ingreso más segura para la gente que habita en la zona.

Lo anterior implica que en una zona donde predominan las actividades pesqueras, el intentar hacer crecer una industria basada en turismo podría requerir de una inversión inicial muy grande.

Modelo completo: Corales, Pescadores, Turistas y Capital

La información que se pudo obtener a partir del análisis de estabilidad de los puntos de equilibrio asociados al modelo mostrado en (3.113) y los puntos de equilibrio definidos en (3.114) es la siguiente:

- Resulta imposible que las 4 poblaciones se extingan simultáneamente (El punto χ_0 es inestable)
- No es posible que las actividades pesqueras y turísticas desaparezcan y que las poblaciones de corales sobrevivan (El punto χ_1 es inestable).
- Las actividades turísticas en la zona y los arrecifes de coral pueden desaparecer, mientras que las actividades pesqueras se mantienen a un nivel más bajo (El punto χ_2 puede ser estable).
- Es posible que las actividades turísticas en una zona desaparezcan y que las actividades pesqueras junto a los arrecifes de coral permanezcan en coexistencia (El punto χ_3 puede ser estable).
- Las actividades turísticas podrían mantenerse ante la extinción de los corales en una zona, además de desplazar las actividades pesqueras (El punto χ_5 puede ser estable).
- Puede ocurrir que los arrecifes de coral se extingan, mientras que las actividades pesqueras y turísticas permanezcan en la zona (los puntos de coexistencia entre P, T, K pueden ser estables).
- La coexistencia entre Corales y Turistas sin Pescadores y Capital es un escenario poco probable, ya que se necesitaría que la inversión en nuevo capital sea casi inexistente, de manera que las edificaciones turísticas

estuvieran destinadas a colapsar (el punto χ_6 resultó ser estable numéricamente para condiciones extremas).

- La dinámica del sistema puede llevar a soluciones periódicas donde mientras la población de Corales y Turistas llega a valores mínimos, las actividades turísticas aumentan y viceversa (escenario que se muestra en la Figura 3.34).
- Puede existir la coexistencia entre Corales, Pescadores, Turistas y Capital bajo condiciones muy específicas que incluyen el apoyo con re-inversión a la creación de arrecifes de coral artificiales.

La existencia de sustentabilidad para las 4 poblaciones está sujeta a la creación de arrecifes artificiales para mitigar el daño que se pueda ocasionar por la pesca y las actividades turísticas en una zona. Pero además de la existencia de arrecifes artificiales, la expresión mostrada en la ecuación (3.139), nos permite apreciar que la re-inversión en Capital puede ser clave para la existencia de escenarios beneficiosos en las 4 poblaciones.

A partir de (3.139), se puede apreciar que con poca re-inversión en capital podríamos impedir la coexistencia entre las 4 poblaciones. Lo cual significaría que no solo necesitamos un buen control de los desechos en zonas costeras, si no que también se necesita destinar dinero obtenido a partir del turismo en acciones que apoyen a los ecosistemas.

Conclusión

Gracias al análisis realizado al modelo propuesto, se pudo encontrar que la sustentabilidad entre las siguientes poblaciones es posible:

- Corales y Pescadores.
- Corales y Turistas.
- Turistas y Capital.
- Corales, Pescadores y Turistas.
- Corales, Turistas y Capital.
- Pescadores, Turistas y Capital.
- Corales, Pescadores, Turistas y Capital.

Este trabajo sirve como un antecedente teórico para la creación de programas enfocados a la recuperación de los arrecifes de coral. Además abre las puertas a generalizaciones de los submodelos propuestos, como por ejemplo un trabajo enfocado en la dinámica de los arrecifes de coral artificiales y su relación con el turismo.

Bibliografía

- Agarwal, M., & Devi, S. (2012). A resource-dependent competition model: effects of population pressure augmented industrialization. *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing*, 03(02), 1250003. <https://doi.org/10.1142/S1793962312500031>
- Aguilera, L. E. C., Bonilla, H. R., López, C. O. N., & Pérez, R. A. L. (2017). Los arrecifes coralinos de México: servicios ambientales y secuestro de carbono. *Elementos para políticas públicas*, 1(1), 53-62.
- Aguirre Hernández, B., Loredó Villalobos, C. A., Díaz González, E. C., & Campos Cantón, E. (2017). Estabilidad de sistemas por medio de polinomios Hurwitz. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*.
- Al-Horani, F. A., & Khalaf, M. A. (2013). Developing artificial reefs for the mitigation of man-made coral reef damages in the Gulf of Aqaba, Red Sea: coral recruitment after 3.5 years of deployment. *Marine Biology Research*, 9(8), 749-757. <https://doi.org/10.1080/17451000.2013.765582>
- Bauman, A. G., Burt, J. A., Feary, D. A., Marquis, E., & Usseglio, P. (2010). Tropical harmful algal blooms: An emerging threat to coral reef communities? *Marine Pollution Bulletin*, 60(11), 2117-2122. <https://doi.org/10.1016/j.marpolbul.2010.08.015>
- Brown, K. T., Bender-Champ, D., Bryant, D. E., Dove, S., & Hoegh-Guldberg, O. (2017). Human activities influence benthic community structure and the composition of the coral-algal interactions in the central Maldives. *Journal of Experimental Marine Biology and Ecology*, 497, 33-40. <https://doi.org/10.1016/j.jembe.2017.09.006>
- Camacho Valdéz, V., Ruiz Luna, A., et al. (2012). Marco conceptual y clasificación de los servicios ecosistémicos. *Revista Bio Ciencias*.
- Casagrandi, R., & Rinaldi, S. (2002). A theoretical approach to tourism sustainability. *Conservation Ecology*, 6(1), art13. <https://doi.org/10.5751/ES-00384-060113>
- Cesar, H. S. (2002). Coral reefs: their functions, threats and economic value.
- Chaudhary, M., Dhar, J., & Misra, O. P. (2015). A mathematical model for the conservation of forestry biomass with an alternative resource for industrialization: a modified Leslie Gower interaction. *Modeling Earth*

- Systems and Environment*, 1(4), 43. <https://doi.org/10.1007/s40808-015-0056-8>
- Chaudhary, M., Dhar, J., & Sahu, G. P. (2013). Mathematical model of depletion of forestry resource: effect of synthetic based industries. *International Journal of Biological and Ecological Engineering*, 7(4), 639-643.
- Cinner, J., & Pollnac, R. (2004). Poverty, perceptions and planning: why socio-economics matter in the management of Mexican reefs. *Ocean & Coastal Management*, 47(9-10), 479-493. <https://doi.org/10.1016/j.ocecoaman.2004.09.002>
- Côté, I., Gill, J., Gardner, T., & Watkinson, A. (2005). Measuring coral reef decline through meta-analyses. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, 360(1454), 385-395. <https://doi.org/10.1098/rstb.2004.1591>
- Davidson, K., Gowen, R. J., Harrison, P. J., Fleming, L. E., Hoagland, P., & Moschonas, G. (2014). Anthropogenic nutrients and harmful algae in coastal waters. *Journal of Environmental Management*, 146, 206-216. <https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2014.07.002>
- Diop, O., & Sène, A. (2016). Mathematical model of the dynamics of fish, waterbirds and tourists in the djoudj national park, senegal. *Acta Biotheoretica*, 64(4), 447-468. <https://doi.org/10.1007/s10441-016-9290-3>
- Diop, O., & Sène, A. (2018). Mathematical model of fish, birds and tourists in wetlands: the impact of periodic fluctuations on the coexistence of species. *Afrika Matematika*, 29(5-6), 841-859. <https://doi.org/10.1007/s13370-018-0583-3>
- Dubey, B., Upadhyay, R. K., & Hussain, J. (2003). Effects of industrialization and pollution on resource biomass: a mathematical model. *Ecological Modelling*, 167(1), 83-95. [https://doi.org/10.1016/S0304-3800\(03\)00168-6](https://doi.org/10.1016/S0304-3800(03)00168-6)
- Dulvy, N. K., Freckleton, R. P., & Polunin, N. V. C. (2004). Coral reef cascades and the indirect effects of predator removal by exploitation. *Ecology Letters*, 7(5), 410-416. <https://doi.org/10.1111/j.1461-0248.2004.00593.x>
- Eastwood, E. K., Clary, D. G., & Melnick, D. J. (2017). Coral reef health and management on the verge of a tourism boom: A case study from Miches, Dominican Republic. *Ocean & Coastal Management*, 138, 192-204. <https://doi.org/10.1016/j.ocecoaman.2017.01.023>
- Fabricius, K. E. (2005). Effects of terrestrial runoff on the ecology of corals and coral reefs: review and synthesis. *Marine Pollution Bulletin*, 50(2), 125-146. <https://doi.org/10.1016/j.marpolbul.2004.11.028>
- Fisher, B., Turner, R. K., & Morling, P. (2009). Defining and classifying ecosystem services for decision making. *Ecological Economics*, 68(3), 643-653. <https://doi.org/10.1016/j.ecolecon.2008.09.014>
- Gil, M. A., Renfro, B., Figueroa-Zavala, B., Penié, I., & Dunton, K. H. (2015). Rapid tourism growth and declining coral reefs in Akumal, Mexico. *Marine Biology*, 162(11), 2225-2233. <https://doi.org/10.1007/s00227-015-2748-z>

- Hoegh-Guldberg, O., Pendleton, L., & Kaup, A. (2019). People and the changing nature of coral reefs. *Regional Studies in Marine Science*, 30, 100699. <https://doi.org/10.1016/j.rsma.2019.100699>
- Jakšić, S., Stamenković, I., & Đorđević, J. (2013). Impacts of artificial reefs and diving tourism. *Turizam*, 17(4), 155-165.
- Jyotsna, K., & Tandon, A. (2017). A mathematical model studying the survival of forest resource-dependent wildlife population in the presence of population pressure-induced mining activities. *Natural Resource Modeling*, 30(4), e12139. <https://doi.org/10.1111/nrm.12139>
- Kreyszig, E. (1991). *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons.
- Lachs, L., & Oñate-Casado, J. (2020). Fisheries and tourism: social, economic, and ecological trade-offs in coral reef systems. En S. Jungblut, V. Liebich & M. Bode-Dalby (Eds.), *YOUMARES 9 - The Oceans: Our Research, Our Future: Proceedings of the 2018 conference for YOUnG Marine RESearcher in Oldenburg, Germany* (pp. 243-260). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20389-4_13
- Lacitignola, D., Petrosillo, I., Cataldi, M., & Zurlini, G. (2007). Modelling socio-ecological tourism-based systems for sustainability. *Ecological Modelling*, 206(1-2), 191-204. <https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2007.03.034>
- Lapointe, B. E., Barile, P. J., Littler, M. M., & Littler, D. S. (2005). Macroalgal blooms on southeast Florida coral reefs. *Harmful Algae*, 4(6), 1106-1122. <https://doi.org/10.1016/j.hal.2005.06.002>
- Leitão, M., Hackradt, C. W., Silva, Í. L. E., Ciancio, J. E., & Félix-Hackradt, F. C. (2023). Effect of human impact on coral reef herbivorous fish niche. *Marine Biology*, 170(5), 59. <https://doi.org/10.1007/s00227-023-04199-z>
- López-Jiménez, I. T., Flórez-Leiva, L., & Quan-Young, L. I. (2020). Influencia de la herbivoría sobre la interacción alga-coral en un arrecife coralino de bahía Capurganá, Caribe colombiano. *Revista de Biología Tropical*, 68(3), 729-742. <https://doi.org/10.15517/rbt.v68i3.38760>
- McCluskey, C. C., & Muldowney, J. S. (1998). Stability implications of Bendixson's criterion. *SIAM review*, 40(4), 931-934.
- Melbourne-Thomas, J., Johnson, C. R., Perez, P., Eustache, J., Fulton, E. A., & Cleland, D. (2011). Coupling biophysical and socioeconomic models for coral reef systems in quintana roo, mexican caribbean. *Ecology and Society*, 16(3). Consultado el 2 de octubre de 2024, desde <https://www.jstor.org/stable/26268951>
- Moberg, F., & Folke, C. (1999). Ecological goods and services of coral reef ecosystems. *Ecological Economics*, 29(2), 215-233. [https://doi.org/10.1016/S0921-8009\(99\)00009-9](https://doi.org/10.1016/S0921-8009(99)00009-9)
- Nugues, M. M., & Roberts, C. M. (2003). Coral mortality and interaction with algae in relation to sedimentation. *Coral Reefs*, 22(4), 507-516. <https://doi.org/10.1007/s00338-003-0338-x>

- Nunez-Lara, E., González-Salas, C., Ruiz-Zarate, M. A., Hernandez-Landa, R. C., & Arias-Gonzales, J. E. (2003). Mexico. Condition of coral reef ecosystems in central-couthern Quintana Roo, Mexico (part 2: reef fish communities). *Atoll Research Bulletin*.
- Perez, P., Dray, A., Cheland, D., & Ariaz-Gonzalez, J. (2009). An agent-based model to address coastal management issues in the Yucatan Peninsula, Mexico.
- Redding, J. E., Myers-Miller, R. L., Baker, D. M., Fogel, M., Raymundo, L. J., & Kim, K. (2013). Link between sewage-derived nitrogen pollution and coral disease severity in Guam. *Marine Pollution Bulletin*, 73(1), 57-63. <https://doi.org/10.1016/j.marpolbul.2013.06.002>
- Robinson, R. C. (2012). *An introduction to dynamical systems: continuous and discrete* (Vol. 19). American Mathematical Soc.
- Sandin, S. A., Smith, J. E., DeMartini, E. E., Dinsdale, E. A., Donner, S. D., Friedlander, A. M., Konotchick, T., Malay, M., Maragos, J. E., Obura, D., Pantos, O., Paulay, G., Richie, M., Rohwer, F., Schroeder, R. E., Walsh, S., Jackson, J. B. C., Knowlton, N., & Sala, E. (2008). Baselines and degradation of coral reefs in the northern line islands. *PLOS ONE*, 3(2), e1548. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0001548>
- Singh, A., Wang, H., Morrison, W., & Weiss, H. (2012). MODELING FISH BIOMASS STRUCTURE AT NEAR PRISTINE CORAL REEFS AND DEGRADATION BY FISHING. *Journal of Biological Systems*, 20(01), 21-36. <https://doi.org/10.1142/S0218339011500318>
- Spurgeon, J. P. (1992). The economic valuation of coral reefs. *Marine Pollution Bulletin*, 24(11), 529-536. [https://doi.org/10.1016/0025-326X\(92\)90704-A](https://doi.org/10.1016/0025-326X(92)90704-A)
- Teh, L. S. L., Teh, L. C. L., & Sumaila, U. R. (2013). A global estimate of the number of coral reef fishers. *PLOS ONE*, 8(6), e65397. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0065397>
- van de Water, J. A., Tignat-Perrier, R., Allemand, D., & Ferrier-Pagès, C. (2022). Coral holobionts and biotechnology: from Blue Economy to coral reef conservation. *Current Opinion in Biotechnology*, 74, 110-121. <https://doi.org/10.1016/j.copbio.2021.10.013>
- Vermeij, M. J. A., Moorselaar, I. v., Engelhard, S., Hörnlein, C., Vonk, S. M., & Visser, P. M. (2010). The effects of nutrient enrichment and herbivore abundance on the ability of turf algae to overgrow coral in the caribbean. *PLOS ONE*, 5(12), e14312. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0014312>
- Villavicencio-Pulido, J. G., Vázquez-Hipólito, V., & García-Cruz, G. J. (2023). Catastrophic or sustainable scenarios might occur when the carrying capacities of a tourism-based socioecological system vary. *Natural Resource Modeling*, 36(2), e12365. <https://doi.org/10.1111/nrm.12365>
- Zikkah, R. N., Anggriani, N., & Supriatna, A. K. (2020). Mathematical model of coral reefs with fish harvesting effect. *Journal of Physics: Conference Series*, 1657(1), 012062. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1657/1/012062>

- Zikkah, R. N., Pratama, M. A. A., Anggriani, N., & Supriatna, A. K. (2020). A mathematical model of coral reef response to destructive fishing considering some biological interactions, 050001. <https://doi.org/10.1063/5.0023842>