



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE HIDALGO

ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

**ESTRATEGIAS EMPLEADAS POR ESTUDIANTES DE
TELESECUNDARIA AL RESOLVER PROBLEMAS DE GEOMETRIA NO
RUTINARIOS.**

PRESENTA

JUAN LUIS IBARRA RODRIGUEZ

Director

Dr. Carlos Arturo Soto Campos

Codirector

Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez

Comité tutorial

Dr. Carlos Arturo Soto Campos

Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez

Dra. Anna Tarasenko

Dr. Marcos Campos Nava

Mineral de la Reforma, Hgo., México., abril 2026



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
School of Engineering and Basic Sciences
Área Académica de Matemáticas y Física

Mineral de la Reforma, Hgo., a 11 de marzo de 2026

Número de control: ICBI-AAMyF/227/2026

Asunto: Autorización de impresión de tesis.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

El Comité Tutorial de la tesis titulada "Estrategias empleadas por estudiantes de Telesecundaria al resolver problemas de Geometría no rutinarios", realizada por el sustentante Juan Luis Ibarra Rodríguez, con número de cuenta 156211, perteneciente a la Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica, una vez que se ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el Artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente:

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

El Comité Tutorial


Dr. Carlos Arturo Soto Campos
Director


Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez
Codirector


Dr. Marcos Campos Nava
Miembro del comité


Dra. Anna Tarasenko
Miembro del comité



CASC/EPC

Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo
Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo,
México. C.P 42184
Teléfono: 52 (771) 71 720 00 Ext. 40124, 40119
aamyf_icbi@uaeh.edu.mx

"Amor, Orden y Progreso"



uaeh.edu.mx

DEDICATORIA

Dedico este logro, en primer lugar, a mi mamá, por ser mi mayor ejemplo de fortaleza, amor y perseverancia. Gracias por tu apoyo incondicional, por tus palabras de aliento y por acompañarme en cada paso de este camino. Este logro también es tuyo.

A mis hermanas y mi hermano, por su cariño, comprensión y motivación constante. Gracias por estar presentes en los momentos más importantes, por impulsarme a seguir adelante y por creer en mí incluso en los momentos difíciles.

A ustedes, que han sido parte fundamental de mi vida, les dedico este logro con todo mi amor y gratitud.

AGRADECIMIENTO

Agradezco profundamente a todos los profesores que formaron parte de este proceso de maestría, por compartir sus conocimientos, experiencias y orientación, los cuales fueron fundamentales para mi formación académica y profesional. Su compromiso con la enseñanza y su disposición para guiar este camino dejaron una huella significativa en mi formación docente.

Expreso un agradecimiento especial a mi tutor, asesor y director de tesis Dr. Carlos Arturo Soto Campos, por su acompañamiento constante, sus valiosas orientaciones y su disposición para enriquecer este trabajo de investigación. Su guía, paciencia y conocimientos fueron esenciales para la culminación de este trabajo.

De igual manera, expreso mi sincero agradecimiento a mis compañeros de maestría, con quienes compartí aprendizajes, retos y experiencias enriquecedoras. Su apoyo y colaboración hicieron de este trayecto una etapa muy significativa y motivadora. En especial a los maestros Eduardo Espinoza Ramírez y Sergio Caballero Barrera por su apoyo incondicional en todo momento.

A todos, gracias por contribuir de manera invaluable a este logro.

RESUMEN

En este trabajo se documentan y analizan las estrategias de resolución de problemas utilizadas por estudiantes de Telesecundaria, quienes participaron en un taller de Matemáticas durante 3 meses. El grupo de estudio se conformó por 10 estudiantes, los cuales resolvieron problemas que se consideran no rutinarios al ser de reactivos tipo Olimpiada Mexicana de Matemáticas, primera fase estatal de Hidalgo, al final de este una prueba con 5 reactivos con la posibilidad de responder de manera abierta, con el objetivo de conocer sus formas de solución. El análisis de la información se basó en el marco de resolución de problemas propuesto por Alan Schoenfeld, así como caracterización de los niveles de demanda cognitiva desarrollada por Smith y Stein, además de la adaptación de las características de demanda cognitiva estructurada por Benedicto et al. Entre los principales resultados destacan estrategias de resolución comunes entre estudiantes del nivel secundaria, asimismo se identifican algunos procesos cognitivos que resultan útiles para resolver este tipo de problemas.

ABSTRACT

In this study we document and analyze problem-solving strategies used by Telesecundaria students who participated in a 3-month mathematics workshop. The study group consisted of 10 students, who solved Math Olympiad-type problems during the workshop and, at the end of the workshop, completed a 5-item test with the possibility of open responses, in order to determine their solution approaches. The data analysis was based on the problem-solving framework proposed by A. Schoenfeld, as well as the characterization of cognitive demand levels developed by Smith and Stein, and the adaptation of the structured cognitive demand characteristics developed by Benedicto et al. The main results include common problem-solving strategies among secondary school students, and some cognitive processes useful for solving these types of problems are also identified.

Índice

Contenido	Página
CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	
1. 1. Introducción.	5
1. 2. Revisión de la literatura.	7
1. 3. Planteamiento del problema.	17
CAPÍTULO 2. MARCO DE INVESTIGACIÓN	
2. 1. Introducción.	19
2. 2. La enseñanza de las matemáticas.	21
2. 3. La resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas.	22
2. 4. Demanda cognitiva de las tareas de aprendizaje.	23
2. 5. Métodos de resolución de problemas.	25
2. 5. 1. Método de Alan Schoenfield.	26
2. 6. El modelo de la demanda cognitiva de patrones geométricos.	32
CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA.	
3. 1. Introducción.	35
3. 3. Características de los estudiantes.	35
3. 3. Taller de resolución de problemas.	35
3. 4. Los reactivos de olimpiada de matemáticas.	36
3. 5. Características de los problemas.	36
3. 6. Análisis de la solución de los problemas.	38
3. 7. Instrumento para el análisis de las respuestas de los estudiantes.	41

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS.

4. 1. Introducción.	42
4. 2. Instrumento de análisis de resultados.	42
4. 3. Análisis de las respuestas del reactivo 1.	44
4. 4. Análisis de respuestas del reactivo 2.	52
4. 5. Análisis de respuestas del reactivo 3.	59
4. 6. Análisis de respuestas del reactivo 4.	68

5. CONCLUSIONES

5. 1. Complicaciones al implementar la metodología de resolución de problemas.	75
5. 2. Limitaciones en la enseñanza de la geometría en Telesecundaria.	76
5. 3. Respuesta a preguntas de investigación.	77
5. 4. Caracterización final de los niveles de demanda cognitiva.	79
5. 6. Discusión de los resultados	79
5. 7. Propuestas a futuro.	80

REFERENCIAS	82
--------------------	-----------

APÉNDICES

Apéndice A. Examen de diagnóstico.	84
Apéndice B. Solución de reactivos de prueba.	86

1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1. 1. Introducción

Resolver un problema de Matemáticas implica el encuentro de una solución única a una situación planteada. La National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) establece, en sus Principios y Estándares para la Educación Matemática, que “la resolución de problemas constituye una parte integral de todo el aprendizaje de las matemáticas”, aseverando que la misma debería formar parte de los programas de enseñanza de todas los niveles y modalidades que configuran los sistemas educativos.

La Secretaría de Educación Pública (SEP), plantea por medio de los planes y programas de estudio como principal objetivo de los programas educativos, desde la educación primaria hasta la secundaria, la necesidad de comprender cómo es que los estudiantes aplican los conocimientos adquiridos en diversos contextos a través de la resolución de problemas. La resolución de problemas es importante para los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, independientemente de los enfoques y de los alcances de la investigación (Alarcón et al., 1994).

Ausubel (1983), refiere la importancia del aprendizaje significativo, que se logra cuando la nueva información pone en movimiento y relación conceptos ya existentes en la mente del que aprende y a su vez señala que la resolución de problemas es la forma de actividad o pensamiento dirigido en los que, tanto la representación cognoscitiva de la experiencia previa como los componentes de una situación problemática actual, son reorganizados, o recombinados para lograr un objetivo diseñado.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es una tarea compleja, tomando en cuenta que uno de sus objetivos es que los alumnos puedan resolver problemas y aplicar los conceptos en diversos ámbitos. Para ello, se debe tomar en consideración, no sólo el contenido curricular, sino también la forma de enseñanza, las estrategias utilizadas, la significatividad de los aprendizajes y principalmente la asimilación de los mismos con la finalidad de que los alumnos desarrollen la habilidad de organizar, analizar, comprender, detenerse a pensar, formularse preguntas y verificar el resultado. La resolución de problemas se ha convertido en una parte esencial en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. De acuerdo con Polya (1979), un problema implica buscar una acción apropiada para lograr un objetivo establecido, pero el alcanzarlo no se da de manera inmediata. En este sentido, Rojas (2015), menciona que un problema debe plantear un reto para los estudiantes, de manera que su solución provea una manera de conocer su forma de aprendizaje.

El implementar en el aula una enseñanza basada en la resolución de problemas, requiere al docente proveer a los estudiantes de una concepción de la matemática, un sentido de la disciplina a su alcance y una aproximación al hacer matemático, de acuerdo a sus

posibilidades. Desde esta perspectiva, la enseñanza debe ser vista como una comprensión conceptual más que el desarrollo mecánico de habilidades, fomentar en los estudiantes la habilidad de aplicar los contenidos que han aprendido con flexibilidad y criterio. El docente también debe proveer a los alumnos la oportunidad de explicar un amplio rango de problemas y situaciones problemáticas, que vayan desde los ejercicios tradicionales, hasta los problemas abiertos y de exploración, ayudando a desarrollar “un punto de vista matemático” (Schoenfeld, 1992), caracterizado por la habilidad de analizar y comprender, de percibir regularidades y relaciones estructurales, de expresarse oralmente y por escrito con argumentos claros y coherentes. Por lo tanto, el docente debe preparar a los estudiantes para convertirse, lo más posible, en aprendices independientes, intérpretes y usuarios de la matemática.

Cuando se resuelven problemas matemáticos en la escuela, los alumnos tienden a depender de la aprobación del docente para saber si la forma en que los resolvieron es o no la correcta; sin embargo, es conveniente que ellos mismos reconozcan si el procedimiento que emplearon los llevó a la solución correcta del problema, verificar sus resultados e identificar sus errores, en caso de haberlos. Los errores de los alumnos forman parte de su proceso de aprendizaje y deben aprovecharse para que, a partir de ellos, avancen en sus conocimientos, en la búsqueda de soluciones.

Por ello, uno de los objetivos de la Olimpiada Matemática Mexicana (OMM, s. f.), es promover el estudio de las matemáticas en forma creativa, alejándose del estudio tradicional que favorece la memorización y mecanización, buscando desarrollar el razonamiento y la imaginación de los estudiantes.

En la resolución de problemas se representan objetos, conceptos y se exploran las relaciones con el uso de diversos recursos y tecnologías, los cuales permiten la creación de ambientes de aprendizaje en el que los estudiantes pueden adquirir razonamiento matemático de una forma dinámica, donde se desarrolle la exploración de los objetos matemáticos implícitos en un problema. Ante la variedad de herramientas disponibles, es necesario identificar no solo las ventajas que le puedan ofrecer al estudiante durante la comprensión de las ideas matemáticas y la resolución de problemas, sino también caracterizar las representaciones, estrategias y formas de razonamiento que exhiban los estudiantes como resultado de usar tales herramientas en sus experiencias de aprendizaje (Santos, 2006).

1. 2. Revisión de la literatura.

En esta sección se realizó la revisión de artículos de investigación basados en la resolución de problemas, como propuesta didáctica en la enseñanza de las matemáticas, los cuales se distinguen en diferentes líneas de interés, como el conocer las estrategias y dificultades que se presentan en resolución de problemas (Tambychik y Subahan, 2010), otros se han interesado por comprender el proceso de resolución de problemas de matemáticas a partir del nivel de pensamiento de los estudiantes (Rahman y Ahmar, 2016), y por otra parte se ha analizado los errores que cometen los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos (Pomalato et al., 2020)

Shinariko et al. (2020), menciona que los errores ocurren porque las personas tienen diferencias de comprensión, conocimiento y otros aspectos. Este autor realizó una investigación con el objetivo de identificar errores cometidos por estudiantes al resolver problemas de la olimpiada de matemáticas. Se implementaron pruebas durante cuatro semanas a estudiantes de secundaria en Palembang, Indonesia. Cada semana, se les dio pruebas con diferentes materiales de álgebra, combinatoria, teoría de números y geometría. En cada material se le plantearon 2 preguntas cada una dentro de los 30 minutos. El marco teórico de ese trabajo, se basó en los tipos de errores identificados por Newman (1977, 1983): (1) error de lectura, (2) error de comprensión, (3) error de transformación, (4) el error de habilidad del proceso, y (5) el error de codificación. Se logró identificar que los estudiantes cometen errores en casi todas las preguntas. Se distingue la falta de comprensión, lo cual conlleva a cometer errores de habilidad, como el determinar la relación entre los datos y la incógnita, planteados en los problemas, lo cual, imposibilita que los estudiantes no elijan las estrategias correctas para resolver el problema.

Flores-Mora (2012), menciona que el análisis de las estrategias de resolución de problemas es importante en términos didácticos, para entender cómo piensan sus estudiantes, conocer cuáles son las dificultades de aprendizaje e implementar acciones didácticas que les permitan afrontar esas dificultades. El examen de la olimpiada de matemáticas se caracteriza por contener problemas bien estructurados, entendiendo por problema una actividad o tarea para la cual el estudiante no tiene una forma inmediata para resolverlo; los estudiantes pueden abordar los problemas y proponer soluciones mediante una o varias rutas. Este autor realizó un análisis cualitativo de las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver problemas de la olimpiada de matemáticas con el fin de conocer cómo es que piensan los estudiantes cuando resuelven problemas. En la obra citada, se analizaron las respuestas de 158 exámenes, pertenecientes a la región de Pachuca, correspondientes a la fase estatal de las olimpiadas matemáticas del año 2011. El 34.18% de los participantes son del nivel secundaria y 65.82% pertenecen al nivel medio superior, con rango de edades de 13 a 19 años, siendo la edad promedio de 16 años. Se logró identificar que las estrategias más comunes utilizadas por los estudiantes son: la elaboración de una lista, tabla o diagrama, estrategias algebraicas, semi-

algebraicas, operaciones aritméticas, ensayo y error, conteo, resolución de casos particulares y dibujar figuras; mientras que las menos utilizadas son la simplificación del problema, identificación de patrones y el uso de aritmética modular.

Valle et al. (2007) realizaron una investigación para identificar estrategias generales en la resolución de los problemas planteados en los exámenes de selección de la Olimpiada Estatal de Matemáticas de Puebla. El estudio consideró a 91 estudiantes con edades entre los 14 y 17 años, procedentes del sistema de educación básica y medio superior. Los estudiantes presentaron el examen de selección de la Olimpiada Estatal de Matemáticas, con un tiempo máximo de 4.5 horas. Posteriormente se llevó a cabo el análisis, cuyo procedimiento consistió en la descripción verbal de la estrategia, el cálculo de su frecuencia de uso y la observación de la incidencia de la estrategia. Los resultados obtenidos mostraron que los estudiantes coinciden en las siguientes estrategias: ensayo y error, usar una variable, buscar un patrón, elaboración de esquemas, uso de razonamiento lógico, entre otros. En esta investigación se encontró que únicamente 35 % de los escritos analizados cuentan con evidencias de que los concursantes comprendieron el problema correspondiente, por lo que se propusieron nuevos objetivos de análisis del proceso de resolución de problemas con el propósito de preparar estudiantes a los estudiantes para un concurso nacional y fortalecer el Sistema de Educación Media Superior del Estado de Puebla.

En un trabajo de Rodríguez y Domínguez (2016) la resolución de problemas matemáticos provoca frustración en los alumnos y preocupación en los docentes debido a su complejidad y dificultad. Plantean un estudio relacionando a las dificultades que tienen los alumnos en el lenguaje, como: la comprensión lectora, la verbalización del problema, la identificación de los datos relevantes, la identificación de la pregunta y la expresión de la solución, y su repercusión en la resolución de problemas. Se realizó una observación por medio de un estudio estadístico en un curso de tercero de Educación Primaria del CEIP Romero Peña de La Solana (Ciudad Real), con un grupo experimental, para ver las dificultades que presentan los alumnos en el lenguaje y en la resolución de problemas. La cual se llevó a cabo en dos sesiones semanales, con un total de 17 sesiones de 45 minutos cada una. Las sesiones se distribuyeron de la siguiente manera: las dos primeras fueron exclusivamente destinadas a realizar actividades vinculadas con el lenguaje. En las quince sesiones restantes se trabajaron, por una parte, las dificultades de lenguaje y, por otra parte, las dificultades en resolución de problemas. A lo largo del estudio realizado se favoreció que los alumnos expresaran su pensamiento tras la lectura de un problema, en donde el profesor pudo valorar, a partir de una expresión, si el alumno comprendía o no dicho problema. Se potenció el desarrollo de las capacidades que favorecen la comprensión lectora, tanto del enunciado del problema como de la situación que se planteaba en él. Al mejorar el proceso de lectura analítica, organización de la información, reformulación, elaboración de esquemas, se obtuvo una mejoría que resultó significativa en la comprensión del problema y como consecuencia de la misma, también una mejoría en la resolución de los problemas.

En otros trabajos orientados a la investigación de la geometría Haryanti, Herman y Prabawanto (2019), identificaron algunos errores de los estudiantes al resolver los problemas relacionados con la geometría. La metodología que se utilizó fue con un enfoque cualitativo descriptivo para identificar la habilidad de resolución de problemas en un grupo de 23 estudiantes de séptimo grado, con edades de 13 y 14 años, en una de las escuelas secundarias de Subang, Indonesia. Se les solicitó que resolvieran problemas matemáticos verbales en tareas de geometría plana durante aproximadamente 80 minutos. Con base en los resultados de este estudio, se encontró que la capacidad de los estudiantes que participaron en el estudio para resolver problemas de geometría, fue la más baja. Sin embargo, usaron las estrategias de resolución de problemas basadas en el método “¿cómo plantear y resolver problemas?” de G. Polya (1945) en los tres problemas dados. El principal error se encontró en los procesos de solución; especialmente al realizar operaciones de cálculo y transformar problemas en modelos matemáticos; tanto las fórmulas como las ilustraciones con la imagen. Los autores mencionan que el docente debe tener un papel activo para crear un aprendizaje significativo, ayudando a los estudiantes a dominar los conceptos y las habilidades de los procedimientos relacionados con la geometría.

De acuerdo con Sulistiowati et al. (2019), el nivel de pensamiento geométrico de los estudiantes influye en su competencia matemática en general y en su habilidad de pensamiento geométrico en particular. Los autores desarrollaron un estudio con el objetivo de analizar las dificultades experimentadas por los estudiantes para resolver problemas de geometría. Se realizó una investigación cualitativa a través de pruebas escritas individuales y entrevistas. Tomando en cuenta 38 estudiantes de grado octavo en una de las escuelas secundarias de Bandung, Indonesia. Los resultados obtenidos mostraron que los estudiantes tienen dificultades para interpretar los problemas en un modelo matemático. Otras dificultades fueron la falta de comprensión del problema, la falta de conocimiento de la estrategia, errores de cálculo y la incapacidad para usar las matemáticas correctas. Mientras que las principales dificultades de los estudiantes se encuentran en el análisis y deducción en los procesos de solución. Por lo anterior, los autores consideran que es importante enseñar dentro del aula la capacidad de resolución de problemas de geometría a todos los estudiantes, por lo cual, el profesor de matemáticas debe ayudar a los estudiantes a desarrollar la competencia de resolución de problemas matemáticos, implementando una diversidad de estrategias que permitan mejorar sus habilidades de interpretación y resolución.

Marlon (2017) realizó una investigación de soluciones escritas por estudiantes para someterlas a un análisis que permitiera describir las dificultades experimentadas al resolver problemas matemáticos. Tomando en cuenta el proceso de cuatro pasos en la resolución de problemas desarrollado por G. Polya (1945), el cual se utilizó como base para determinar las dificultades de resolución de problemas en Matemáticas; a) comprensión del problema b) ideación de un plan c) realización el plan y d) mirando hacia atrás. Para dicho estudio se tuvo la participación de veinte estudiantes de tercer año seleccionados al azar de la BSED

(Licenciatura en Ciencias en Educación) especialización en Matemáticas de la Universidad Estatal de Cagayán. Campus Andrews. Quienes realizaron una prueba con 5 reactivos para su resolución en una sesión de 40 minutos. De los resultados obtenidos se encontró que los estudiantes encuestados obtuvieron un total de ochenta y cuatro (84) soluciones incorrectas, lo cual revela que los estudiantes presentan problemáticas al plantear conjeturas de manera adecuada respecto a sus conocimientos y habilidades durante el proceso de resolución de problemas que les permita mejorar. De acuerdo a dichos resultados sugiere adecuar el enfoque de enseñanza para mejorar el plan de estudios de matemáticas, desarrollar material didáctico que permita implementar una diversidad de procesos y estrategias para la resolución de problemas que permita a los estudiantes aprender de una forma más eficiente.

Figuroa y Diaz (2011), señalan que muchos de los errores que los estudiantes cometen en matemáticas no se deben específicamente al tema que se está desarrollando, sino a carencias de conocimientos previos que se transfieren a los nuevos contenidos que son abordados. Brousseau, señala que un error es un concepto equivocado, producto de las combinaciones de los conocimientos previos que poseen los alumnos. Desarrollaron una investigación para identificar y describir las dificultades y errores que tienen los estudiantes de bachillerato al resolver un problema que involucra conocimientos matemáticos donde se deben realizar procedimientos algebraicos. Para poder llevar a cabo su investigación se consideraron 52 estudiantes que lograron avanzar a la fase final de la cuarta olimpiada de matemáticas en el año 2008, realizado en Colombia. Tomando en cuenta los procedimientos desarrollados por los estudiantes, se pueden plantear las siguientes afirmaciones: El 67.8% muestran dificultades para resolver una ecuación de tipo cuadrático, el 32.1% no logran identificar las jerarquías de las operaciones que intervienen en los términos de una expresión y en una ecuación de tipo cuadrático, el 28.6% tienen dificultades cuando aparece una expresión fraccionaria en una ecuación o una expresión algebraica. el 21.4% muestran dificultades en el manejo de propiedades de exponentes y estas se evidencian en errores, el 21.4% presentan dificultades con el significado de “valor” numérico de una expresión, el 17.8% presentan dificultades con expresiones que contienen radicales. De acuerdo a los resultados obtenidos se consideró que algunos de los errores y dificultades que presentaron los estudiantes tienen origen en los procesos de enseñanza y aprendizaje en la disciplina del álgebra. Así también se atribuye a que los estudiantes necesitan saber “la fórmula” para resolver los problemas y algunos no se interesan por los conceptos y el razonamiento necesario para el estudio del álgebra. Por lo que se propuso diseñar la unidad de procesos algebraicos del primer curso de matemáticas en la Universidad e implementar una propuesta didáctica con el fin de disminuir las dificultades y errores encontrados, y de esta manera mejorar la comprensión de los conocimientos matemáticos.

Mientras tanto Intaros, Inprasitha y Srisawadi (2013), basaron sus estudios en analizar los procesos que realizan los estudiantes al resolver problemas matemáticos dentro del salón de clases, los cuales requieren una variedad de habilidades que incluyen la interpretación de

información, la planificación y el trabajo metódico, la verificación de resultados y el intento de estrategias alternativas (Muir, Beswick y Williamson, 2008). En este estudio se empleó la metodología de estudio de caso, apoyándose de grabaciones de audio y video y toma de notas como métodos para recopilar datos, en un grupo de seis estudiantes de primer grado en el año académico 2010 del Proyecto para el desarrollo profesional de profesores de matemáticas. Los datos obtenidos fueron analizados usando estadística descriptiva y descripción analítica. Tales resultados mostraron que los estudiantes hacen uso de distintos procesos de resolución de problemas como; encontrar un patrón, adoptar un punto de vista diferente, resolver problemas simples o análogos, hacer dibujos, entre otros. Los autores consideran que un enfoque abierto puede hacer que el aula de matemáticas cambie de manera diferente al aula tradicional en la que los maestros son el centro y los estudiantes solo practican y practican, por lo que permite que los estudiantes creen los problemas y las estrategias de resolución de problemas por sí mismos.

De acuerdo con Bikić, Maričić y Pikula en el proceso de resolución de problemas, los estudiantes conectan constantemente el conocimiento adquirido con uno nuevo que surge durante el proceso de descubrimiento, conectan la experiencia existente con una nueva, la teoría y la práctica, mientras aprenden a través de un proceso activo de construcción de conocimiento. En este estudio se realizó una investigación con 165 estudiantes de secundaria en Bosnia y Herzegovina, se conformaron dos grupos de alumnos: 88 en un grupo experimental y un grupo control con 79 alumnos, distribuidos en tres niveles A, B y C de acuerdo a sus resultados durante la realización de una prueba inicial y para después realizar 10 lecciones con distintos temas de geometría inducidos por medio de un enfoque metodológico basado en la resolución de problemas. Los resultados obtenidos demostraron que el aprendizaje mediante la resolución de tareas en tres niveles de complejidad, a través del enfoque orientado a problemas en la enseñanza de la geometría, tuvo un impacto significativo en la resolución de las tareas, lo que significa que este tipo de enfoque mejora el conocimiento de los estudiantes. Los investigadores concluyen que la enseñanza que se basa en la resolución de problemas puede contribuir a la mayor actividad de pensamiento de los estudiantes, quienes a su vez exhiben mayor actividad durante la clase, enfoque versátil de los contenidos matemáticos, racionalidad, creatividad y crítica.

En otra investigación desarrollada por Arteaga, Macias y Pizarro centrada en el análisis de tareas de 99 estudiantes de primer y tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) de un colegio de Madrid, para identificar los procesos que tienen en cuenta al abordar de resolución de problemas desde la perspectiva metacognitiva, que son “planificar, monitorear y evaluar”. Se tomaron en cuenta tres objetivos específicos: caracterizar la identificación de la situación problemática a partir de la comprensión del enunciado; analizar las representaciones utilizadas en cada uno de los tipos de problemas y describir las estrategias metacognitivas utilizadas por los estudiantes durante la resolución del problema. Durante la investigación se trabajaron problemas verbales centrados en el manejo numérico y

geométrico. Al concluir las investigaciones se obtuvieron los siguientes resultados; los alumnos no la evidencian al relacionar la representación con el enunciado del problema de tipo geométrico, al contrario que con el numérico. Esto puede ocurrir debido a que la práctica docente tiende a enfocarse en el trabajo numérico, aritmético y algorítmico, en detrimento de la movilización y desarrollo de capacidades en los estudiantes. Estos autores sugieren que dedicamos un tiempo a elegir o formular problemas adecuados para la construcción y consolidación de los contenidos trabajados, apropiados al desarrollo cognitivo de nuestros estudiantes, vinculados con sus inquietudes e intereses, para conseguir que los problemas no solo sean una herramienta que potencia el aprendizaje significativo de nociones matemáticas, sino también un recurso que dota a nuestros alumnos de una serie de capacidades y destrezas.

Rodríguez et al. (2017) realizaron un estudio para analizar las estrategias y procedimientos matemáticos que desplegaron un grupo de 18 estudiantes con habilidades matemáticas sobresalientes de la Universidad de la Ciudad de Valparaíso, Chile. Este grupo participó en un taller dirigido a estudiantes de 12 a 14 años, en donde se les plantearon problemas no rutinarios con el objetivo de conocer las nociones e ideas que usan para dar solución a dichos problemas, considerando la propuesta de resolución de problemas analizada por Santos Trigo (2008), quien postula que dicha resolución de problemas es una actividad que estimula el desarrollo de habilidades y estrategias en el aprendizaje de la matemática. Para este estudio se incorporó el uso del Análisis Estadístico Implicativo (ASI de acuerdo a sus siglas en francés *Annalyze Stastique Implicative*). De acuerdo a los resultados obtenidos se identificó que las estrategias utilizadas por los estudiantes, uso del ensayo y error, búsqueda de regularidades y uso de una lista, fueron articuladas y activadas en distintos momentos del proceso de resolución. Este estudio permitió visualizar dos tipos de procedimientos y estrategias que son; la similaridad e implicación, las cuales indican que una estrategia de ensayo y error conlleva el uso de un procedimiento de operaciones con números arbitrarios, lo cual era esperable *a priori*. Así también se observó la búsqueda de regularidades, relaciones entre variables, lo cual permite trazar una mejor ruta en la resolución correcta de problemas matemáticos. De acuerdo al tipo de problemas planteados, los ejercicios que se entregaron a los estudiantes están al alcance del promedio, dado que el problema de alguna manera lo sugiere: ensayo y error, crear una lista, buscar regularidades. La diferencia radica en la forma en cómo los estudiantes talentosos las utilizan, sistematizando la información que se despliega a medida que utilizan los distintos recursos.

Con lo anterior, es posible identificar cómo influye el uso de resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas, lo cual permite el desarrollo y mejora de habilidades y competencias en específico en el estudio de la Geometría. A continuación, se muestra un cuadro comparativo donde se describe, de forma sintética, las investigaciones mencionadas.

Autor(es)	Objeto de estudio	Metodología	Aportes
Shinariko et al. (2020)	Identificar los errores cometidos por estudiantes al resolver problemas de la olimpiada de matemáticas	Se implementaron pruebas de 30 minutos durante cuatro semanas a estudiantes de secundaria, con diferentes reactivos de álgebra, combinatoria, teoría de números y geometría.	Los estudiantes cometen errores, debido a la falta de comprensión, lo cual, imposibilita no elijan las estrategias correctas para resolver el problema.
Flores-Mora (2012)	Entender y conocer cómo piensan los estudiantes al resolver problemas e identificar las dificultades de aprendizaje.	Se realizó un análisis cualitativo de las estrategias utilizadas en exámenes de 158 estudiantes al resolver problemas de la olimpiada de matemáticas, en nivel secundaria y medio superior.	Las estrategias más utilizadas son: la elaboración de una lista, tablas, operaciones aritméticas, ensayo y error, conteo, resolución de casos particulares y dibujar figuras; las menos utilizadas son la simplificación del problema, identificación de patrones y el uso de aritmética modular.
Valle et al. (2007)	Identificar estrategias generales en la resolución de los problemas planteados en los exámenes de selección de la Olimpiada Estatal de Matemáticas.	Se realizó un análisis de exámenes de 91 de educación básica y medio superior, el procedimiento consistió en la descripción verbal de la estrategia, el cálculo de su frecuencia de uso y la observación de la incidencia de la estrategia.	Los estudiantes coinciden en las siguientes estrategias: ensayo y error, usar una variable, buscar un patrón, elaboración de esquemas, uso de razonamiento lógico, entre otros.

Rodriguez y Domínguez (2016)	Identificar las dificultades que presentan los alumnos en el lenguaje y en la resolución de problemas.	Se realizó un estudio estadístico en un curso de tercero de Educación Primaria. La cual se llevó a cabo en dos sesiones semanales, con un total de 17 sesiones de 45 minutos cada una.	Al mejorar el proceso de lectura analítica, organización de la información, reformulación, elaboración de esquemas, se logra una mejoría significativa en la comprensión del problema, así también en la resolución de los problemas.
Haryanti, Herman y Prabawanto (2019)	Identificar errores de los estudiantes al resolver problemas de geometría.	Se realizó un enfoque cualitativo descriptivo para identificar la habilidad de resolución de problemas de geometría en un grupo de 23 estudiantes de secundaria, durante aproximadamente 80 minutos.	Se identificó que el principal error se encuentra en los procesos de solución al realizar operaciones de cálculo y transformar los problemas en modelos matemáticos.
Sulistiowati et al. (2019)	Analizar las dificultades experimentadas por los estudiantes para resolver problemas de geometría.	Se llevó a cabo un estudio cualitativo a través pruebas escritas individuales y entrevistas. Tomando en cuenta 38 estudiantes de secundaria.	Los resultados obtenidos mostraron que principales dificultades de los estudiantes se encuentran en el análisis y deducción en los procesos de solución.
Marlon (2017)	Describir las dificultades al resolver problemas matemáticos. Tomando en cuenta el proceso resolución de problemas de G. Pólya (1945).	Se realizó una prueba a veinte estudiantes de licenciatura, quienes resolvieron 5 reactivos de matemáticas en una sesión de 40 minutos.	De acuerdo al estudio se observó que los estudiantes presentan problemáticas al plantear conjeturas de manera adecuada respecto a sus conocimientos y habilidades durante el proceso de resolución de problemas.

<p>Figueroa y Diaz (2011)</p>	<p>Identificar y describir las dificultades y errores que tienen los estudiantes al resolver un problema de matemáticas de álgebra.</p>	<p>Se analizaron los exámenes de 52 estudiantes de bachillerato que lograron avanzar a la fase final de la cuarta olimpiada de matemáticas</p>	<p>Los autores consideraron que los errores y dificultades de los estudiantes tienen origen en los procesos de enseñanza. Además, que necesitan saber “la fórmula” para resolver los problemas y algunos no se interesan por los conceptos y el razonamiento necesario para el estudio del álgebra</p>
<p>Intaros, Inprasitha y Srisawadi (2013)</p>	<p>Analizar los procesos que realizan los estudiantes al resolver problemas matemáticos</p>	<p>En este estudio se emplearon estudios de caso, apoyándose de grabaciones de audio y video y toma de notas como métodos para recopilar datos, en un grupo de seis estudiantes para profesores de matemática</p>	<p>Se identificó que los estudiantes hacen uso de distintos procesos de resolución de problemas como; encontrar un patrón, adoptar un punto de vista diferente, resolver problemas simples o análogos, hacer dibujos, entre otros.</p>
<p>Bikić, Maričić y Pikula, M. (2016)</p>	<p>Analizar el proceso de resolución de problemas, en donde los estudiantes conectan el conocimiento adquirido con uno nuevo que surge durante el proceso de descubrimiento, a través de un proceso activo de construcción de conocimiento.</p>	<p>Se realizó una investigación con 165 estudiantes de secundaria, divididos en dos grupos: 88 en un grupo experimental y un grupo control con 79 alumnos, distribuidos en tres niveles de acuerdo a una prueba inicial. Se realizaron 10 lecciones con distintos temas de geometría inducidos por enfoque metodológico basado en la resolución de problemas.</p>	<p>La enseñanza que se basa en la resolución de problemas puede contribuir a la mayor actividad de pensamiento de los estudiantes, quienes a su vez exhiben mayor actividad durante la clase, a través del enfoque orientado a problemas en la enseñanza de la geometría</p>

<p>Arteaga, B. y Macías, J. (2016).</p>	<p>Caracterizar la identificación de la situación problemática a partir de la comprensión del enunciado; analizar las representaciones utilizadas en cada uno de los tipos de problemas y describir las estrategias metacognitivas utilizadas por los estudiantes durante la resolución del problema.</p>	<p>Se analizaron tareas de 99 estudiantes de secundaria. Se trabajaron problemas verbales centrados en el manejo numérico y geométrico. para identificar los procesos de resolución de problemas desde la perspectiva metacognitiva, que son “planificar, monitorear y evaluar”.</p>	<p>Los autores sugieren que dedicamos un tiempo a elegir o formular problemas adecuados para la construcción y consolidación de los contenidos trabajados, apropiados al desarrollo cognitivo de nuestros estudiantes, vinculados con sus inquietudes e intereses,</p>
<p>Rodríguez et al. (2017)</p>	<p>Analizar las estrategias y procedimientos matemáticos utilizados por estudiantes con habilidades matemáticas sobresalientes de universidad.</p>	<p>En la investigación se contempló un grupo de 18 estudiantes, en donde se les plantearon problemas no rutinarios con el objetivo de conocer las nociones e ideas que usan para dar solución a dichos problemas, considerado la propuesta de resolución de problemas analizada por Santos Trigo (2008)</p>	<p>Este estudio permitió visualizar dos tipos de procedimientos y estrategias que son; la similitud e implicación, las cuales indican que una estrategia de ensayo y error. Además de la búsqueda de regularidades, relaciones entre variables, lo cual permite trazar una mejor ruta en la resolución correcta de problemas matemáticos.</p>

Tabla 1. Síntesis de los elementos fundamentales de la literatura revisada.

Con base en la revisión de la literatura, se identificó que la mayoría de los trabajos se han enfocado en analizar los procedimientos y estrategias que usan los estudiantes al momento de resolver problemas matemáticos, partiendo de la observación y el análisis de las actitudes y procesos que se presentan durante su desarrollo, comprensión del problema y reconocer un patrón que les permita diseñar una ruta a seguir para encontrar la solución adecuada, con el objetivo de implementar estrategias que permitan al estudiante mejorar al resolver problemas matemáticos y su desempeño en la asignatura de matemáticas.

1. 3. Planteamiento del problema.

Con lo anterior, se pudo identificar las estrategias que emplean estudiantes al responder pruebas de matemáticas. Sin embargo, no se ha abordado lo suficientemente en artículos de investigación, con base en las estrategias de resolución de Alan Schoenfeld. Así también, entre las investigaciones revisadas se centran en estudios de alumnos del nivel de secundaria en general y de educación media superior, pero no se encuentran centrados en estudiantes de la modalidad de Telesecundaria, la cual se basa en una educación mediante el uso de materiales audiovisuales y tecnológicos.

En esta investigación se pretende implementar un taller basado en la resolución de problemas, haciendo uso de reactivos de la olimpiada de matemáticas, tomando los reactivos relacionados con problemas geométricos, debido a que la mayoría se han concentrado en el estudio de la resolución de problemas, tomando en cuenta las distintas disciplinas de las matemáticas, pero no en reactivos específicos de la geometría, dado que es un tópico en el que regularmente se presentan deficiencias en la enseñanza de los mismos. Particularmente, en el subsistema de telesecundaria, se observan dificultades en la resolución de problemas de naturaleza geométrica.

En una propuesta de aprendizaje basada en la resolución de problemas los estudiantes aprenden matemáticas a partir de la exploración de relaciones, la formulación de preguntas y conjeturas, el uso de diferentes formas de argumentación y justificación, el establecimiento de conexiones, así como la comunicación de resultados, todo ello en una comunidad que valora la construcción de conocimiento matemático (Santos-Trigo, 2007).

De acuerdo con lo anterior, esta investigación se centra identificar los procedimientos que desarrollan de un grupo de estudiantes de telesecundaria, así como también las dificultades que presentan éstos, al resolver problemas de matemáticas, en específico los que se refieren a la geometría, con el propósito de buscar estrategias que permitan potenciar las habilidades del pensamiento matemático, así mismo reflexionar el quehacer pedagógico y el compromiso como docente para orientar a los estudiantes del nivel secundaria dentro del aula escolar. Por lo cual, esta tesis tiene como objetivo caracterizar las estrategias y procedimientos empleados por los estudiantes, cuando resuelven problemas del tipo de las olimpiadas matemáticas al implementar una metodología conforme a la resolución de problemas matemáticos, los cuales no se aplican de forma frecuente durante el estudio de la asignatura.

Pregunta de investigación.

De acuerdo con lo anterior, el sentido de la pregunta de investigación es ¿Cómo influyen las estrategias de resolución en un grupo de estudiantes de telesecundaria en su desempeño al resolver problemas geométricos? Con los resultados se pretende analizar los procedimientos que se usan al resolver este tipo de problemas, los cuales se han expuesto en otras investigaciones planteadas en la revisión de la literatura que profundizan en los elementos mentales puestos en práctica por los estudiantes al resolver problemas de matemáticas.

Objetivos específicos

- Analizar los procedimientos que desarrollan los estudiantes de telesecundaria al resolver problemas de matemáticas.
- Identificar las estrategias que utilizan los estudiantes de telesecundaria al resolver problemas de matemáticas.

2. MARCO DE INVESTIGACIÓN

2. 1. Introducción

En el capítulo se explica en qué consiste un marco de investigación, se exponen los diferentes tipos de marco y sus características. Además, se describe y justifica el marco conceptual de este trabajo. Lester (2005, p. 458) define un marco de investigación como: la “estructura básica de las ideas (es decir, abstracciones y relaciones) que sirven de base para un fenómeno que se va a investigar”. Las abstracciones e interrelaciones que integran un marco tienen como fin proveer de una herramienta que permita dar sustento a una investigación. Un punto fundamental en este marco de investigación es presentar la concepción con respecto a lo que son las matemáticas y cómo es que se desarrolla su aprendizaje. Por lo que resulta importante dar a conocer el marco sobre el cual se fundamenta esta tesis de tal manera que se pueda comprender la razón de ser de las tareas llevadas a cabo por el autor.

Eisenhart (1991), distingue tres tipos de marco de investigación: teórico, práctico y conceptual, cada categoría tiene sus propias características y juegan un papel importante en la investigación en educación matemática. A continuación, se enuncia una breve caracterización de cada uno de ellos, mencionados en trabajos de Eisenhart (1991) y Lester (2005):

- **Marco teórico:** Es una estructura que guía la investigación y que se basa en teoría formal; esto es, el marco es construido mediante el uso de explicaciones establecidas y coherentes de ciertos fenómenos y relaciones. Eisenhart (1991) y Lester (2005) señalan algunas desventajas acerca del uso de marcos teóricos. Estos marcos sirven para establecer un lenguaje académico común; sin embargo, dicho lenguaje no es generalmente funcional fuera de la disciplina académica.
- **Marco práctico:** este guía la investigación mediante el uso de “lo que funciona” de acuerdo a la experiencia de aquellos que están directamente involucrados en la práctica. Este tipo de marco no está estructurado por una teoría formal, sino por el conocimiento práctico acumulado por los profesores, hallazgos de investigaciones previas y de la opinión pública. Una desventaja del uso de marcos prácticos, señalada por Eisenhart (1991) y Lester (2005, p. 459), es que el conocimiento generado por estos marcos tiende a ser solo localmente generalizable (es decir, el investigador descubre "qué funciona" ahora bajo ciertas condiciones y restricciones específicas, pero aprende poco o nada que vaya más allá del contexto específico).
- **Marco conceptual:** De acuerdo a Eisenhart (1991), es una estructura de justificación más que una estructura de explicación basada en la lógica formal o experiencia acumulada. Es un argumento de que los conceptos seleccionados para la investigación o la interpretación, son apropiados y útiles dado el problema que se está investigando.

Dichos argumentos, están basados en la literatura y en investigaciones previas, y son contruidos a partir de diferentes fuentes y aspectos del conocimiento práctico.

Eisenhart (1991) menciona que los marcos conceptuales se adaptan a los puntos de vista del autor, debido a que describen conceptos de interés a estudiar en diversas fuentes, conceptos defendidos y sus interrelaciones, demostrados en un contexto para que tenga validez.

De acuerdo con Canales (1986), Barrantes (2000) y Hernández (2003), un marco conceptual cumple varias acciones dentro de una investigación, algunos de los cuales son:

- Ayuda a precisar y organizar los elementos incluidos en el problema,
- Orienta el estudio en cuanto a la relación de las variables de investigación.
- Los elementos teóricos extraídos de la revisión bibliográfica, estudios y teorías pertinentes al tema de investigación constituyen la base para la descripción y explicación de las hipótesis o supuestos teóricos.
- Sistematiza la información bibliográfica en aras de explicar un fenómeno o situación.
- Orienta la organización de datos o hechos significativos para descubrir las relaciones de un problema con las teorías ya existentes.
- Concibe su estructura como un sistema conceptual integrado por conceptos, hechos, hipótesis y supuestos relacionados entre sí y con el problema de investigación.
- Establece hipótesis y deja planteadas otras para estudios posteriores.
- Integra la investigación teórica con la investigación empírica. Los supuestos o proposiciones teóricas deben tener una base científica que sustente la investigación.

Una componente sobresaliente de los marcos conceptuales es la noción de justificación; esta consiste en que el investigador explicita por qué hace lo que hace, por qué sus interpretaciones y resultados son razonables (Castañeda, 2021). Este trabajo se conforma por un marco conceptual, está integrado por tres dimensiones fundamentales al abordar el aprendizaje de las matemáticas vía resolución de problemas, las cuales son:

La *dimensión ontológica* corresponde a la concepción que se tiene de las matemáticas como la ciencia de los patrones (Steen, 1988), en donde el aprendizaje se entiende como una actividad que incluye identificar relaciones, formular conjeturas y justificarlas, aplicar los conocimientos que se poseen para explorar una situación problemática. De acuerdo con lo anterior, se pretende que el estudiante desarrolle una forma de pensar en donde relacione los objetos matemáticos, comprenda y proponga diferentes representaciones, entender el porqué del funcionamiento y validez de los algoritmos y procedimientos rutinarios, además de comunicar ideas, establecer conexiones y formular nuevos problemas (Barrera y Reyes, 2018).

En la *dimensión epistemológica* se adopta una postura socio-constructivista, por el hecho de que reconocemos el rol que juega el sujeto en la construcción del conocimiento (Glaserfeld,

1996). En la cual, el conocimiento se construye de lo concreto a lo abstracto, por medio de la interacción entre el sujeto-objeto a través de mediadores y herramientas que sean tomadas en cuenta por el sujeto. Schoenfeld (2010), define el conocimiento de un individuo, como la información que tiene disponible para usar para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea.

En la *dimensión didáctica* se plantea que las matemáticas se aprenden a través de la reflexión permanente, la retroalimentación, la implementación de diversas estrategias. Se concibe el aprendizaje basado en el descubrimiento. Ruiz et al (2003, p. 287), menciona que la naturaleza matemática consiste en considerarla como una construcción social que incluye conjeturas, pruebas y refutaciones, cuyos resultados deben de ser juzgados en relación al ambiente social y cultural. “Saber matemática” es “hacer matemática”. Una de las características más relevantes del aprendizaje por descubrimiento, es que el contenido a ser aprendido, no se facilita en su forma final, sino que tiene que ser descubierto por el sujeto, lo que requiere un rol activo de parte del estudiante (Martínez y Zea, 2004), que le permitirá aplicar lo aprendido a situaciones nuevas (Bruner, 1966).

Por lo cual, diseñar un escenario didáctico y la implementación de tareas de aprendizaje orientado a la resolución de problemas, permite cumplir con el objetivo didáctico, el cual es, construir un aprendizaje por descubrimiento y desarrollar el pensamiento matemático en el estudiante, mediante una tarea de instrucción y la actividad docente.

2. 2. La enseñanza de las matemáticas.

El estudio de la didáctica de las matemáticas es una línea de investigación extensa en donde se tiene que partir desde el concepto de la disciplina y la importancia que representa para el ser humano. Lluís Santaló (1993) indica que para aquellos que tienen baja formación en matemáticas, esta ciencia está integrada por cálculos aritméticos comunes y por los nombres y propiedades de algunas figuras geométricas. La NCTM (1989) indica que las matemáticas son una disciplina donde el individuo experimenta, observa, descubre, conjetura, formula problemas y estudia patrones o relaciones en diversos contextos.

En el estudio de las matemáticas es fundamental que el estudiante aprenda a formular preguntas y buscar distintas rutas que permitan encontrar soluciones que den respuesta a sus preguntas. Lakatos (1978) entiende las matemáticas como una actividad humana que encierra en ella misma una dialéctica de conjeturas, refutaciones y demostraciones, hasta llegar al establecimiento de una conclusión.

Alsina (1995) expone que las matemáticas han hecho posible un amplio abanico cuantitativo de modelos, basado en el mundo de los números, de representación y descripción de la realidad física inmediata, de comparación y cuantificación de las magnitudes, de

razonamiento y muchos otros modelos específicos para describir fenómenos y situaciones. Aprender matemáticas va más allá de dominar un conjunto de reglas, algoritmos, fórmulas o procedimientos para resolver listas de problemas rutinarios. Santos Trigo (1994) menciona que un componente esencial en el aprendizaje de los estudiantes es que en sus experiencias interactúen con una variedad de problemas.

2. 3. La resolución de problemas en el aprendizaje de matemáticas.

La enseñanza de las matemáticas en educación básica, de acuerdo con el plan y programas de estudio 2017 de secundaria, tiene como objetivo el desarrollo del pensamiento matemático vía resolución de problemas como medio de aprender los contenidos matemáticos y el fomentar el gusto con actitudes positivas hacia su estudio. En el proceso del aprendizaje de las matemáticas es fundamental que el estudiante aprenda a formular preguntas y a buscar distintos caminos que le permitan encontrar soluciones o respuestas de esas preguntas (Santos, 2014).

La resolución de problemas matemáticos ha sido un aspecto importante de las matemáticas, de su enseñanza y aprendizaje, lo cual es objeto de estudio de investigadores en la Didáctica de las matemáticas, con el propósito de entender los procesos metacognitivos que surgen durante la resolución de problemas y nuevos aportes que permitan mejorar el estudio de la disciplina. Halmos (1980) expresa que los axiomas, teoremas, pruebas, conceptos, definiciones, fórmulas y métodos son ingredientes esenciales de las matemáticas, pero la principal razón del quehacer matemático es resolver problemas.

La NCTM (2000), resalta la importancia de que los estudiantes participen en los procesos de formulación de preguntas, propongan conjeturas, empleen distintas representaciones, presenten argumentos matemáticos y comuniquen resultados. Generar un ambiente de aprendizaje centrado en la resolución de problemas, significa someter a los estudiantes a hacer uso de sus conocimientos y a construir un pensamiento matemático. Aprender a pensar matemáticamente significa a) desarrollar un punto de vista que valore el proceso de matematización y abstracción y tener la tendencia de aplicarlos y, b) desarrollar una competencia con las herramientas de trabajo y usarlas en la meta de entender y construir estructuras, para desarrollar el sentido matemático (Schoenfeld, 1994).

El enfoque en la resolución de problemas está basado en tareas de aprendizaje, las cuales giran en torno a un problema matemático que permite el desarrollo de pensamiento matemático, en donde el estudiante hace uso de los conocimientos que se adquieren en el aula. Polya (1962) establece que tener un problema significa buscar, de forma consciente, una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de manera inmediata. La idea fundamental de trabajar con problemas tiene la finalidad de

enfrentar al alumno con situaciones, en donde sea necesario realizar acciones de reflexión, análisis y evaluación de los procesos que se desarrollan en la búsqueda de solución a problemas propuestos por el docente.

Los problemas pueden caracterizarse de acuerdo a: aquellos que sean de interés para el estudiante, aquellos que no presentan una solución inmediata, los que tienen una o múltiples soluciones, los que establecen criterios de evaluación y generan motivación para resolver más problemas. Por lo que, el resolver un problema implica realizar tareas que demandan procesos de razonamientos más o menos complejos y no simplemente una actividad rutinaria. Gaulin (2001) plantea que “hablar de problemas implica considerar aquellas situaciones que demandan reflexión, búsqueda, investigación y donde para responder hay que pensar en las soluciones y definir una estrategia de resolución que no conduce, precisamente, a una respuesta inmediata” (citado en Del Valle y Curotto, 2008, pág. 464).

La resolución de problemas es considerada parte esencial de la educación matemática, dado a que los estudiantes experimentan la utilidad de la disciplina y el desarrollo amplio del pensamiento matemático, el cual se genera al experimentar con los objetos matemáticos implícitos en el problema. Según la NCTM (2004) el pensamiento matemático es un elemento importante en la preparación de los profesionales, técnicos u hombres y mujeres en sentido general.

2. 4. Demanda cognitiva de las tareas de aprendizaje.

La demanda cognitiva es definida por Stein et al. (2009, p. 1) como “el tipo y nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para poder abordar la tarea y resolverla con éxito”. Este concepto permite clasificar el tipo de razonamiento que una determinada tarea demanda a los estudiantes. Smith y Stein (1996) proponen una categorización de los niveles de exigencia cognitiva de las tareas matemáticas que valoran la complejidad del razonamiento requerido para su solución (tabla 2).

Nivel inferior	Memorización	<ul style="list-style-type: none"> • Implican reproducir hechos, reglas, formulas o definiciones previamente aprendidos o memorizados. • No se puede resolver usando procedimientos, porque el periodo de tiempo en el que se contempla la tarea es demasiado corto para usar un procedimiento. • No son ambiguos. Estas tareas implican la reproducción exacta de un concepto visto previamente. • No tienen conexión con los conceptos o significados que subyacen a los hechos, reglas, formulas o definiciones que se aprenden o reproducen.
	Procedimientos sin conexión	<ul style="list-style-type: none"> • Son algorítmicos. El uso del procedimiento es evidente a partir de instrucción previa o experiencia. • Requieren una demanda cognitiva limitada para completar con éxito. • No tienen conexión con los conceptos o significados que subyacen al procedimiento que se utiliza. • Se centran en producir respuestas correctas en lugar de desarrollar la comprensión matemática. • No requieren explicaciones que se centren únicamente describir el procedimiento.
Nivel superior	Procedimientos con conexiones	<ul style="list-style-type: none"> • Centran la atención de los estudiantes en el uso de procedimientos para desarrollar niveles de comprensión de conceptos e ideas matemáticas. • Sugieren de manera explícita caminos a seguir que sean procedimientos generales amplios que tengan conexiones con ideas conceptuales subyacentes en lugar de algoritmos. • Generalmente se representan de múltiples maneras, como diagramas visuales, objetos manipulables, símbolos y situaciones problemáticas. • Requieren cierto grado de esfuerzo cognitivo. Los estudiantes deben involucrarse con ideas conceptuales que subyacen a los procedimientos para completar la tarea con éxito y que desarrollen una mejor comprensión matemática.
	Hacer matemáticas	<ul style="list-style-type: none"> • Requieren pensamiento complejo y no algorítmico: la tarea no sugiere explícitamente un camino de solución predecible. • Requieren que los estudiantes exploren y comprendan la naturaleza de los conceptos, procesos o relaciones matemáticas. • Exigir autocontrol o autorregulación de los propios procesos cognitivos. • Requieren que los estudiantes accedan a conocimientos y experiencias relevantes y los utilicen apropiadamente al realizar la tarea. • Exige a los estudiantes que analicen la tarea y examinen activamente las limitaciones de la tarea que pueden limitar posibles estrategias y soluciones. • Requieren un esfuerzo cognitivo considerable debido a la naturaleza impredecible del proceso de solución requerido.

Tabla 2. Caracterización de los niveles de demanda cognitiva de las tareas (Smith y Stein, 1996).

Para clasificar una tarea, se debe realizar un análisis de la misma antes de ser aplicada, el docente debe cuestionarse respecto al si el estudiante puede resolver la tarea, que debe saber y qué procedimientos puede utilizar, además de identificar qué ideas matemáticas pueden desarrollar o qué conexiones pueden establecer con los objetos matemáticos aprendidos en determinado periodo o a en el transcurso de su formación académica. El NCTM (2014) señala que un aprendizaje eficaz requiere involucrar a los estudiantes en tareas matemáticas que sean desafiantes, puesto que gran parte del aprendizaje se encuentra condicionado al tipo de tareas a las que se enfrentan los estudiantes. Por lo cual, implementar una metodología basada en resolución de problemas puede ser eficaz para mejorar el desempeño de los estudiantes a temprana edad.

2. 5. Métodos de resolución de problemas.

Uno de los mejores recursos para estimular el desarrollo del pensamiento son los métodos de resolución de problemas, siempre que tengan en cuenta todas las dimensiones del pensamiento matemático a través de cada uno de los momentos de la actividad resolutoria.

La enseñanza de la Matemática donde predomina el método sobre el resto de los contenidos constituye un excelente espacio para lograr los fines señalados. Sausen y Guérios (2010) señalan que una de las metas de la enseñanza de la Matemática es estimular a los estudiantes a pensar de manera fecunda, propiciar el razonamiento lógico, de modo eficaz, que permita resolver situaciones diversas tanto en la escuela como fuera de esta.

Existen numerosos métodos para resolver problemas matemáticos, incluyendo estrategias heurísticas, métodos específicos para resolver sistemas de ecuaciones y enfoques generales como la comprensión del problema, la búsqueda de patrones y la experimentación. A continuación, se mencionan algunas estrategias resolutorias que se consideran relevantes en este estudio (tabla 3).

George Pólya (1945)	<p>Proceso de resolución de problemas, las cuatro fases:</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Comprender el problema ● Concebir un plan ● Ejecución del plan ● Visión retrospectiva
---------------------	---

Alan Schoenfeld (1985)	<p>Factores que influyen en la resolución de problemas:</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Recursos ● Heurísticas ● Control ● Sistema de creencias
Santos Trigo (1993)	<p>Factores que intervienen en la resolución de problemas:</p> <ul style="list-style-type: none"> ● La importancia de ideas conocidas ● Repertorio de estrategias generales y específicas ● El papel del monitoreo o autoevaluación ● La influencia de los componentes individuales y afectivos de la persona que resuelve el problema

Tabla 3. Factores que intervienen en la resolución de problemas de matemáticas.

La habilidad para resolver problemas no sólo se adquiere resolviendo muchos problemas, sino también tomando en cuenta estrategias de resolución, conocidas como heurísticas, para ayudar a los estudiantes a ganar confianza para abordar y resolver problemas. El desarrollo de la capacidad para la resolución de problemas matemáticos se potencia en la medida en que se combina con el estímulo de la capacidad para pensar en la resolución de problemas, es necesario que el estudiante desarrolle un modo de pensar que articule las dimensiones del pensamiento matemático, y, para ello, la instrucción heurística se puede convertir en una excelente estrategia de enseñanza (Díaz, 2018).

En esta investigación se destaca el trabajo realizado por Schoenfeld, en el proceso de resolución de problemas.

2.5.1. Estrategias resolutivas de Alan Schoenfeld.

Schoenfeld menciona, cuando se trabaja con resolución de problemas como una estrategia didáctica hay que tener en cuenta situaciones más allá de las puras heurísticas; de lo contrario no funciona, no tanto porque las heurísticas no sirvan, sino porque hay que tomar en cuenta otros factores. De acuerdo a las observaciones realizadas al trabajo de resolución de problemas sugerido por G. Polya.

Por lo que el trabajo de Shoenfeld sugiere cuatro categorías, las cuales permiten resolver problemas matemáticos. Las cuales se caracterizan en el siguiente esquema que se presenta a continuación (figura 2).



Figura 1. Esquema del proceso de resolución de problemas de Alan Schoenfeld (1985). Elaboración propia.

Recursos

Estos hacen referencia a las herramientas con las que cuenta el sujeto al resolver un determinado problema. Se pueden caracterizar como los conocimientos previos que posee el individuo; se refiere a conceptos, fórmulas, algoritmos, y, en general, todas las nociones que se considere necesario saber para resolver un determinado problema. Lo cual, pretende ser un inventario de hechos, procedimientos y habilidades del conocimiento matemático que el individuo posee, Schoenfeld lo caracteriza como espacio de búsqueda inicial.

Schoenfeld menciona tres tipos de recursos:

- *Inventario de recursos.* Caracteriza el conocimiento que posee el estudiante al resolver problemas y los medios por los cuales accede a dicho conocimiento.
- *Circunstancias estereoscópicas.* Estas provocan respuestas estereotípicas. Se refiere a formalismos de una competencia rutinaria.
- *Recursos defectuosos y patrones de error consistentes.* Se refiere a que el estudiante puede tener información y procesos erróneos durante el estudio de los conceptos matemáticos. Schoenfeld documenta tres puntos principales:
 - Subestimar la complejidad de procedimientos aparentemente simples.

- Un gran número de errores en procedimientos simples puede ser el resultado de un aprendizaje erróneo.
- Las formas en que un individuo representa la información.

Heurísticas.

Aprender a usar las heurísticas, no es suficiente para garantizar un desempeño competente en la resolución de problemas, se considera importante tener decisiones de control y sus efectos en el proceso de RP. Schoenfeld analizó una serie de obstáculos que se producen por la complejidad de las estrategias heurísticas y el conocimiento necesario, se han identificado tres maneras:

1. *Las heurísticas generales están definidas de forma amplia y sus definiciones suelen ser vagas para su implementación.* Al resolver problemas es necesario descomponer y recombinar el problema de formas más simples para que el partir de una estrategia general, te permite seleccionar sub-estrategias que permitan resolver el problema de manera detallada.
2. *El uso exitoso de tales estrategias requiere no solo conocer las estrategias, sino también de una buena toma de decisiones ejecutivas y un amplio repertorio de subhabilidades.* De acuerdo con Polya, aprender a utilizar una estrategia significa contar con las siguientes habilidades: 1) Saber utilizar la estrategia correcta, 2) conocer las versiones apropiadas de un problema, 3) generar problemas relacionados más fáciles y apropiados, 4) evaluar la probabilidad de poder resolver y luego explotar cada uno de los problemas más fáciles, 5) elegir el correcto, 6) resolver el problema elegido, 7) explotar su solución.
3. *Las heurísticas pueden servir como guía para dominios relativamente desconocidos, no reemplazan el conocimiento ni compensan su ausencia.* La implementación de una heurística depende de una base firme de recursos específicos del dominio.

Simón (1980) indica que, al enseñar resolución de problemas, es necesario extraer, hacer explícitas y practicar heurísticas de resolución de problemas, tanto generales, de análisis a medios-fines, como específicas. citado en Schoenfeld (1985).

Control

Se refiere a cómo el sujeto controla su trabajo. Si un estudiante ante un determinado problema ve una serie de caminos posibles para su solución, tiene que ser capaz de darse cuenta si el camino que seleccionó es funcional o no, es decir, el retroceder e intentar de nuevo por otra vía. El estudiante puede contar con una diversidad de heurísticas posibles, las cuales, pueden usarse para resolver un determinado problema. Cada una de las heurísticas que se usen

pueden tener sus diferencias, se pueden seleccionar las que sean útiles y otras que no sirvan para resolver el problema.

Schoenfeld destaca la importancia de la habilidad de monitorear y evaluar el proceso al resolver problemas. También, señala del conocimiento de sí mismo: la persona que está resolviendo el problema debe saber qué es capaz de hacer, con qué cuenta, conocerse en cuanto a la forma de reaccionar ante esas situaciones.

Algunas acciones que involucran el control son:

- Análisis: entender con claridad de lo que trata el problema antes de empezar a resolverlo.
- Exploración: considerar varias formas posibles de solución y seleccionar una específica.
- Diseño: llevar a cabo el esquema de solución y estar dispuesto a cambiarlo en un momento oportuno.
- Implementación: Monitorear el proceso y decidir cuándo abandonar un camino no exitoso y tomar uno nuevo.
- Verificación: revisar el proceso de resolución.

Sistema de creencias.

Schoenfeld se enfoca en cómo el estudiante y los profesores abordan la argumentación matemática formal a la hora de resolver un problema. Dice Schoenfeld que para el estudiante la argumentación matemática solo se puede usar en dos circunstancias:

- Para confirmar algo que es intuitivamente obvio y en cuyo caso la prueba parece redundante o superflua; es decir, demostrar una fórmula es obvio, y no vale la pena hacerlo.
- Para verificar algo que ya es cierto porque lo dice el profesor, algo que no es tan obvio pero que el profesor dice que es cierto; en este caso simplemente se trata de resolver un ejercicio de entrenamiento.

Las creencias condicionan muchos aspectos relacionados con el aprendizaje de la matemática; a) Determinan en el estudiante cuándo considera que debe enfocarse en conocimientos formales, b) determina la forma en que tratan de aprender Matemática, memorizando. Es decir, los estudiantes pueden creer que la matemática es solamente una serie de reglas que simplemente van a memorizar o creer que la matemática es elaboración de conceptos, establecimiento de relaciones, patrones.

Schoenfeld cita a Lampert (1990): *comúnmente la Matemática está asociada con la experiencia escolar, en la cual hacer matemáticas significa seguir las reglas dadas por el profesor y la verdad matemática queda determinada cuando la respuesta es ratificada por el profesor. Las creencias están en hacer matemáticas significa conocerla observando, escuchando y practicando (p. 342).*

Schoenfeld dice que hay que tener en consideración distintos sectores: las creencias de los estudiantes, de los profesores, y las creencias sociales con respecto a lo que es la Matemática.

Creencias del estudiante: Schoenfeld plantea una serie de creencias sobre la matemática que tiene el estudiante:

- Los problemas matemáticos tienen una y solo una respuesta correcta.
- Existe una única manera correcta para resolver cualquier problema, usualmente es la regla que el profesor dio en la clase.
- La Matemática es una actividad solitaria realizada por individuos en aislamiento, no hay nada de trabajo en grupo.
- Los estudiantes que han entendido las matemáticas podrán resolver cualquier problema que se les asigne.
- Las matemáticas aprendidas en la escuela tienen poco que ver con el mundo real.

Las creencias del profesor: las creencias están condicionadas por la forma en que les enseñaron matemáticas.

Las creencias sociales: se puede entender a la forma en que se aprende matemáticas de acuerdo al contexto y cultura en el que se enseñen matemáticas.

Existen grandes diferencias culturales en cuanto a las creencias que tienen los padres, maestros y jóvenes acerca de la naturaleza del aprendizaje de la Matemática. Estas creencias se agrupan en tres categorías:

- Lo que es posible, es decir: lo que los niños pueden aprender en las diferentes edades.
- Lo que es deseable, es decir: lo que los niños deben aprender.
- El método que se usa para enseñar Matemática.

Estas son determinadas por la sociedad quien decide; qué es posible, qué es lo que quiere que se aprende y cómo se debe enseñar.

Durante el proceso solución de un problema se diseña un plan de acción para su implementación, en donde se realiza un análisis conjunto, debido a que el estudiante se encuentra en un proceso pone a prueba y replantea sus ideas, para aplicar las estrategias que resuelvan el problema. Por lo cual, en este estudio se contemplan las aportaciones del método de resolución de problemas Schoenfeld, lo cual se resume en el siguiente esquema (figura 2).

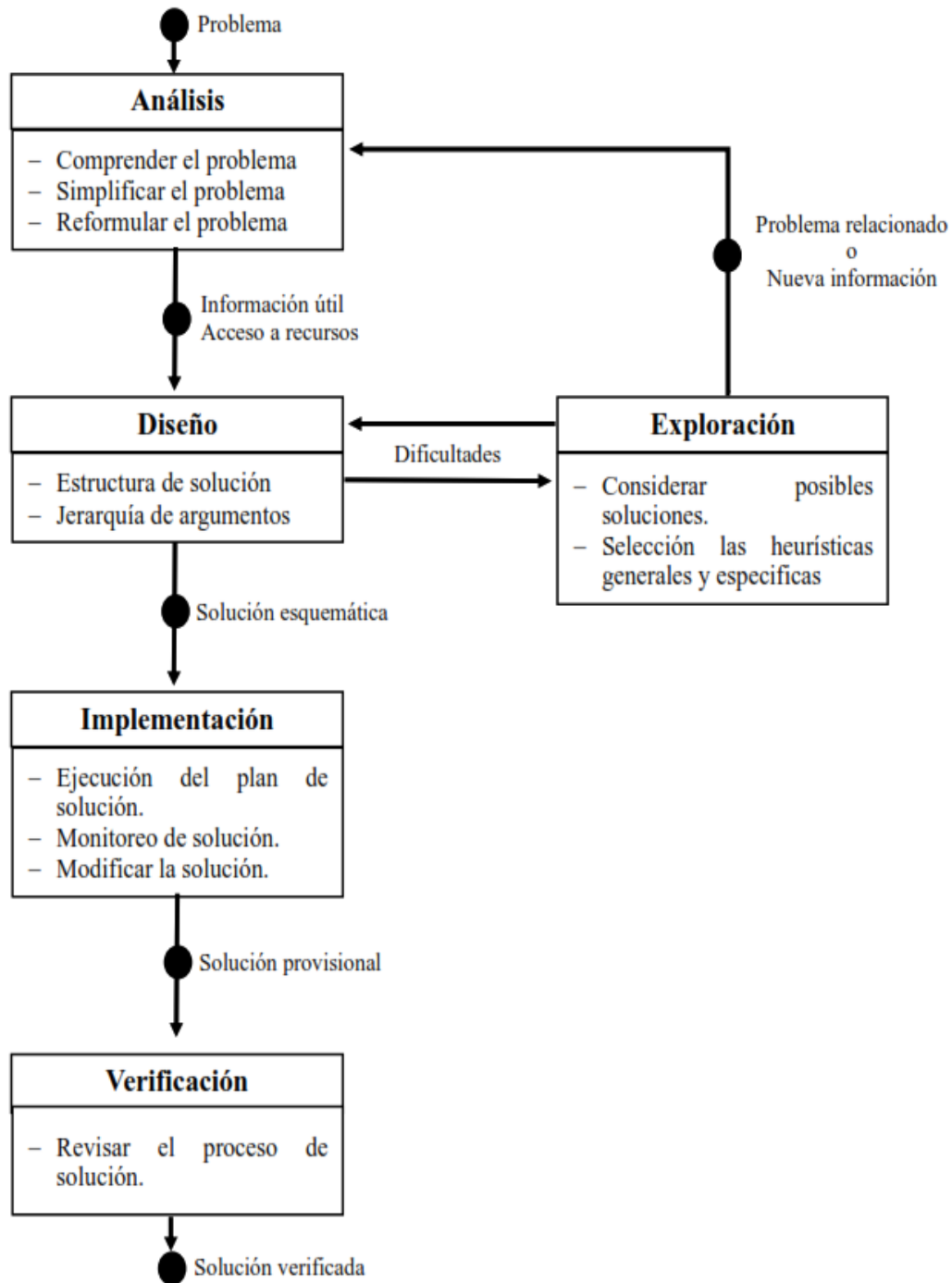


Figura 2. Esquema de la estrategia de resolución de problemas (Tomado de Schoenfeld, 1985, p. 110).

2. 6. Modelo de demanda cognitiva de tareas de patrones geométricos.

Para Stein, Smith, Henningsen y Silver (2009), la demanda cognitiva de una tarea es “el tipo y nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para poder participar en la tarea y resolverla con éxito.”

Benedicto et al (2015), analizaron las características que definen los niveles del modelo de demanda cognitiva de Smith y Stein (1998), identificando seis categorías de forma que cada característica de un nivel se ajusta, por su objetivo, a alguna de estas categorías. Las seis categorías, son:

- a) El procedimiento de resolución que requiere la actividad;
- b) La finalidad con la que se propone la actividad;
- c) El esfuerzo cognitivo necesario para llevar a cabo su resolución;
- d) Los contenidos matemáticos implícitos en su resolución;
- e) El tipo de explicaciones requeridas de los estudiantes; (f) las formas de representación de la solución.

Estructurar los niveles de demanda cognitiva mediante estas categorías, permite organizar las características de cada nivel, localizar necesidades en algunos niveles, completar la caracterización de los niveles, y hacer la clasificación de actividades, lo que facilita el trabajo de análisis. En la siguiente tabla se muestran las categorías de demanda cognitiva, describiendo cada una de sus subcategorías (tabla 4).

Nivel inferior	Memorización	Procedimiento de resolución	No se resuelven usando algoritmos, sino recurriendo a datos recordados o tomados directamente del enunciado.
		Finalidad	Reproducción de elementos (datos, reglas, fórmulas, etc.) previamente aprendidos, recordados o tomados directamente del enunciado.
		Esfuerzo requerido	Su resolución con éxito apenas requiere esfuerzo. No son ambiguas. Indican claramente qué hacer.
		Contenidos implícitos	No tienen conexión con los conceptos o significado subyacente a los datos, reglas, fórmulas o definiciones que se están aprendiendo o reproduciendo.
		Explicaciones	No requieren explicaciones.
		Representación de la solución	El enunciado utiliza la representación geométrica y su resolución, en caso de representarse, utilizará la aritmética.
	Procedimientos sin conexiones	Procedimiento de resolución	Son algorítmicas. Indican expresamente qué algoritmo usar o es evidente por el contexto.
		Finalidad	Enfocadas a obtener respuestas correctas, pero no a desarrollar la comprensión matemática.
		Esfuerzo requerido	Su resolución con éxito requiere un esfuerzo limitado. Existe poca ambigüedad sobre qué hacer y cómo hacerlo.
		Contenidos implícitos	Existe conexión implícita entre los conceptos o significados subyacentes y los algoritmos usados. A pesar de existir dicha conexión, el estudiante no tiene por qué percatarse de ella para resolver correctamente el problema.
		Explicaciones	Explicaciones que se enfocan únicamente a describir el algoritmo usado.
		Representación de la solución	En su resolución se pueden utilizar múltiples representaciones (aritmética, diagramas visuales, materiales manipulativos, etc.), pero sólo se usan aquellas que resultan de más ayuda para resolver el problema.

Tabla 4. Caracterización de los niveles de demanda cognitiva (Benedicto et al, 2015).

Nivel superior	Procedimientos con conexiones	Procedimiento de resolución	Las cuestiones anteriores de la actividad sirven como sugerencia explícita o implícita de la vía a seguir, que es un algoritmo general con conexiones estrechas con las ideas conceptuales subyacentes.
		Finalidad	Orientan al estudiante a usar algoritmos con el objetivo de que tenga una comprensión más profunda de los conceptos e ideas matemáticos.
		Esfuerzo requerido	Su resolución con éxito requiere cierto esfuerzo cognitivo. Se pueden utilizar algoritmos generales, pero al aplicarlos, hay prestar atención a la estructura del patrón.
		Contenidos implícitos	Los estudiantes necesitan considerar conscientemente ideas conceptuales que subyacen a los algoritmos para resolver con éxito la cuestión.
		Explicaciones	Explicaciones que hacen referencia a las relaciones subyacentes utilizando casos concretos (posiciones particulares de la serie).
		Representación de la solución	La resolución conecta diversas representaciones. Se representan de varias formas y los estudiantes utilizan aquellas que los llevan a un razonamiento más abstracto.
	Hacer matemáticas	Procedimiento de resolución	Requieren pensamiento complejo y no algorítmico. El enunciado no sugiere ninguna forma de resolución. Requieren que los estudiantes analicen la actividad y examinen restricciones que puedan limitar posibles estrategias de resolución y soluciones.
		Finalidad	Los estudiantes necesitan explorar y comprender los conceptos, procesos o relaciones matemáticos.
		Esfuerzo requerido	Requieren un considerable esfuerzo cognitivo. Requieren de los estudiantes autocontrol y autorregulación de los propios procesos cognitivos.
		Contenidos implícitos	Requieren que los estudiantes accedan a conocimiento y experiencias relevantes y los usen adecuadamente durante la resolución de la actividad.
		Explicaciones	Explicaciones y demostraciones sobre el término general de la serie.
		Representación de la solución	En la resolución se utiliza una representación algebraica, que algunas veces puede estar conectada con otras formas de representación.

Tabla 4. Continuación.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA.

3. 1. Introducción.

La metodología de investigación de este trabajo es cualitativa, ya que se centra en identificar y caracterizar las cualidades del proceso de razonamiento de estudiantes al resolver problemas de tipo reactivo de olimpiadas de matemáticas. Sandin (2003) define la investigación cualitativa como una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones y también hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimientos.

3. 2. Características de los estudiantes.

Esta investigación se realizó con la participación de un grupo de 10 alumnos, de manera voluntaria e interesada en fortalecer su conocimiento respecto al estudio de las matemáticas, los cuales se consideraron de un total de 34 estudiantes, correspondientes a dos grupos de tercer grado de secundaria en la modalidad de telesecundaria. El grupo se conformó por 7 alumnos del grupo de 3°A y 3 alumnos del grupo de 3°B. El rango de edad de los estudiantes se encuentra de los 14 a 16 años, con una edad promedio de 15 años.

El grupo de alumnos que se consideró para este estudio son de tercer grado de secundaria, debido a que los estudiantes de este nivel cuentan con un dominio más amplio de conceptos de la asignatura de matemáticas, además de que, en el grado en el que se encuentran también se complementa con definiciones, conceptos y teoremas, que tienen relación con el contenido curricular del plan y programas de estudio.

3. 3. Taller de resolución de problemas

El grupo de alumnos participó en un taller de resolución de problemas, el cual inició con una prueba de diagnóstico con el objetivo de conocer la forma de pensar, la estructura de sus respuestas y conocimiento de conceptos matemáticos, así como sus habilidades correspondientes a la resolución de problemas.

Posteriormente, los estudiantes que conformaron el grupo, participaron en la implementación de un taller de resolución de problemas, el cual les permitió conocer la metodología de resolución de problemas basada en las aportaciones del modelo propuesto de Alan Schoenfeld, en un periodo de 3 meses (septiembre, octubre y noviembre del 2023), distribuido en 20 sesiones, con una duración de 90 minutos, en donde se resolvieron distintos problemas de geometría.

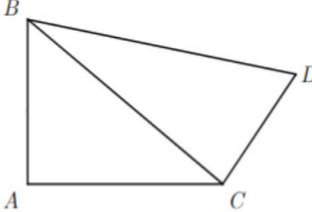
3. 4. Los reactivos de olimpiadas de matemáticas.

Uno de los objetivos centrales de la olimpiada de matemáticas, es identificar y fomentar la capacidad de los participantes para resolver problemas (Flores, s. f.). Los reactivos que se plantean en las pruebas de olimpiadas de matemáticas no son del tipo rutinario, problemas que pueden ser de sentido común para los estudiantes, ya que conocen la ruta solución, los cuales pueden ser similares a los que ven en el aula. Los problemas que se utilizan en este tipo de pruebas requieren el uso de métodos matemáticos no rutinarios para obtener una o varias soluciones. Los exámenes que se aplican en las competencias de olimpiadas de matemáticas representan ser pruebas con la intención de ejercitar la habilidad para resolver problemas debido a que estos requieren de conocimientos elementales en matemáticas, de acuerdo al nivel de estudios de secundaria. Otra de las características de los problemas es su grado de dificultad, la cual no está en el conocimiento de los conceptos matemáticos, sino en la habilidad del alumno para identificar el problema, organizar la información, selección de estrategias y la aplicación adecuada de los conocimientos para identificar la ruta de solución.

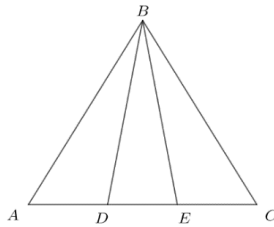
3. 5. Características de los problemas.

Los problemas que se eligieron son de Geometría, debido a que el estudio de esta disciplina de las matemáticas en el nivel de secundaria, representan una diversidad de complicaciones para los estudiantes, por otro lado los problemas que tienen relación con la geometría permiten hacer un análisis amplio de conceptos y definiciones que pueden ser útiles para la resolución de este tipo de problemas, así también permite aplicar conocimientos de las distintas disciplinas de matemáticas, como son los procesos de álgebra, conceptos de cálculo, trigonometría y geometría, en donde se analizan las propiedades de los objetos matemáticos inmersos en los problemas.

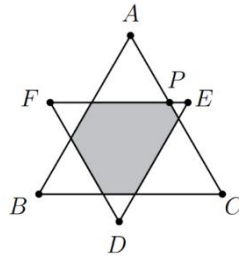
La tabla 5, muestra los problemas implementados en el estudio, reactivos de la 37ª Olimpiada de Mexicana de Matemáticas, examen de la primera fase estatal de Hidalgo, 2023.

Problemas de geometría
<p>1. El triángulo ABC es rectángulo y se cumple que $\underline{AC} = 8$ cm y $\underline{AB} = 6$ cm. Si el segmento \underline{CD} es perpendicular a \underline{BC} y mide 5 cm, ¿Cuál es el área del triángulo BCD?</p>


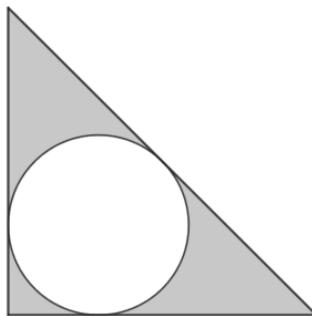
2. En el triángulo equilátero ABC , los segmentos BD y BE dividen al ángulo $\sphericalangle ABC$ en tres iguales. ¿Cuánto miden los ángulos $\sphericalangle BCA$ y $\sphericalangle BDE$?



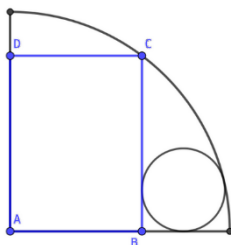
3. Dos triángulos equiláteros ABC y DEF de perímetros 33 cm y 24 cm, respectivamente, están propuestos como en la figura. La intersección de los segmentos AC y FE es P y cumple que $\sphericalangle FPC = 120^\circ$. ¿Cuál es el perímetro del hexágono sombreado?



4. La figura muestra un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales miden 2 cm. Se inscribe una circunferencia en el triángulo. ¿Cuánto mide el área sombreada?



5. En la figura se muestra un arco de circunferencia, el rectángulo ABCD y un círculo que es tangente a BC, a la recta que pasa por AB y al arco de circunferencia. Si los lados del rectángulo miden 3 y 4, ¿cuánto mide el radio del círculo?

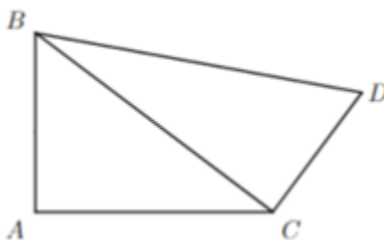


A continuación, se muestra un análisis preliminar de los problemas con el propósito de contar con un panorama de los recursos y los procesos cognitivos que podrían poner en práctica los estudiantes durante el proceso de solución

3. 7. Análisis de la solución de los problemas.

A continuación, se muestra el análisis de los primeros cuatro problemas, debido a que fueron los que se implementaron con el grupo de estudiantes.

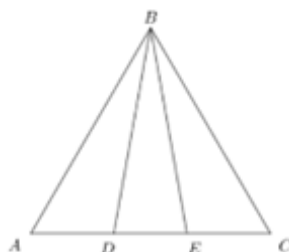
1. El triángulo ABC es rectángulo y se cumple que $\overline{AC} = 8 \text{ cm}$ y $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$. Si el segmento \overline{CD} es perpendicular a \overline{BC} y mide 5 cm, ¿Cuál es el área del triángulo BCD?



En el problema se dan a conocer recursos como son las medidas de los segmentos, y los cuales se pretende que el alumno identifique características de los triángulos rectángulos y defina las fórmulas que sean útiles para determinar las medidas de los segmentos faltantes e identifique el segmento que se requiere para calcular el área del triángulo BCD. Este es un problema de baja demanda cognitiva de procedimientos sin conexiones, debido a que solo se requiere hacer uso del teorema de Pitágoras en el triángulo ABC para conocer el segmento BC, el cual es necesario para poder calcular el área del triángulo BCD. En este problema el estudiante no requiere de hacer uso de trazos auxiliares encontrar una ruta de solución, en donde se puede calcular fácilmente los datos requeridos, un concepto que el alumno debe de conocer es el de una recta perpendicular, el cual es útil para identificar que el triángulo BCD

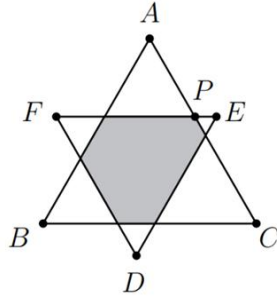
es un triángulo rectángulo, para después poder aplicar la fórmula de área que permita calcular la solución correcta. Las heurísticas que se espera que usen los estudiantes es segmentar la figura en dos triángulos diferentes, además de identificar que el segmento BC es un lado compartido entre los triángulos ABC y BCD. El lado DC es perpendicular a BC. En este problema, las operaciones a realizar son directas, no será necesario despejar ninguna de las variables, para desarrollar la operación.

2. En el triángulo equilátero ABC, los segmentos y dividen al ángulo $\sphericalangle ABC$ en tres iguales. ¿Cuánto miden los ángulos $\sphericalangle BCA$ y $\sphericalangle BED$?



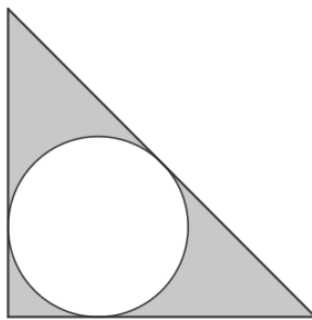
Este problema se considera de alta demanda cognitiva, porque incluye procedimientos con conexiones, ya que el alumno debe tener conocimiento de conceptos que tienen que ver con la clasificación de los triángulos, además de las propiedades de los triángulos que tienen relación con sus ángulos internos, de acuerdo con esto si el alumno logra identificar las características de los triángulos equiláteros, los cuales tienen sus lados y ángulos iguales. Si el alumno es capaz de tener este razonamiento lógico puede establecer una relación de la suma de ángulos internos de los triángulos, para después realizar las operaciones aritméticas necesarias para calcular el valor de los ángulos requeridos por el problema. De igual manera los estudiantes deberán saber la clasificación de los ángulos, los cuales serán fundamentales para establecer relaciones en conjunto con la propiedad de ángulos internos del triángulo ABC. De lograr identificar la relación entre estos objetos matemáticos el grupo de alumnos demostrará el desarrollo de un razonamiento matemático y una respuesta correcta. Así también, si estos cuentan con el conocimiento de algunas convenciones que relacionan los vértices del triángulo con la simbología matemática griega, para establecer conexiones entre los objetos matemáticos que justifiquen sus soluciones, los estudiantes participantes demostraron una mejora en el aprendizaje de las matemáticas. Este problema se considera como un problema con múltiples soluciones, ya que no tiene solo una ruta de solución.

3. Dos triángulos equiláteros ABC y DEF de perímetros 33 cm y 24 cm, respectivamente, están propuestos como en la figura. La intersección de los segmentos AC y FE es P y cumple que $\sphericalangle FPC = 120^\circ$. ¿Cuál es el perímetro del hexágono sombreado?



En este problema es de alta demanda cognitiva, dado que se requieren procesos con conexiones, ya que se pretende que el alumno logre identificar la relaciones que existen entre los segmentos al ser lados de los distintos triángulos equiláteros que se forman en la figura, en donde el dato dado del ángulo $\angle FPC$, es fundamental para justificar que los triángulos nuevos que se forman entre las intersecciones de los triángulos ABC y DEF, también son equiláteros, por lo cual los lados de estos tendrán la misma longitud. El grupo de estudiantes puede tomar como punto de partida medir cada uno de los lados del hexágono para después sumar las medidas obtenidas y obtener el resultado, esto será posible al hacer uso de GeoGebra para simular la figura y analizarla. Al realizar este proceso los estudiantes deberán de identificar que el perímetro que se busca se obtiene de la suma de alguno de los lados del triángulo ABC con un lado del triángulo DEF, se espera que con esto se obtenga una hipótesis, en donde el proceso más complejo del problema es justificar su respuesta en donde se llegue a la conclusión que es el perímetro del hexágono es igual a $AB + DE$. En este proceso de solución se espera que el estudiante logre un grado de razonamiento alto, ya que deberá hacer uso de un conjunto de relaciones y equivalencias entre los segmentos que conforman la figura con el objetivo de justificar el resultado, ya que, de no lograr comprobar su respuesta, al momento de evaluar el reactivo se puede obtener una nota no favorable y una respuesta incompleta.

4. La figura muestra un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales miden 2 cm. Se inscribe una circunferencia en el triángulo. ¿Cuánto mide el área sombreada?



En este reactivo se pretende que los estudiantes realicen trazos auxiliares, los cuales les permitan establecer relaciones entre los segmentos que conforman la figura. Así también el

identificar el rol que juega el radio de la circunferencia en el proceso de solución, ya que si el estudiante no logra establecer una relación adecuada del radio y los segmentos del triángulo, tendrá dificultades para establecer una ruta de resolución. El trabajo con segmentos puede resultar complejo para los estudiantes, ya que el grupo de alumnos no tiene un amplio conocimiento de la forma de trabajo en resolución de problemas, además que el cambio de esquemas e interpretaciones son algo nuevo para ellos. En este reactivo una de las competencias que requiere el estudiante es el operar apropiadamente los valores que se obtengan en los segmentos, además de integrar de manera correcta el valor del radio. Otra necesidad cognitiva que se requiere y es fundamental que el alumno logre desarrollar es identificar las nuevas figuras geométricas que se forman, lo cual en este caso son triángulos isósceles que se forman al identificar la importancia del radio en el problema. De acuerdo a la exigencia de las competencias que se requieren para resolver este problema se considera un problema con demanda cognitiva superior de hacer matemáticas, debido a que se deben de establecer relaciones para operar de manera correcta y comunicar un resultado acertado.

3. 8. Instrumento para el análisis de las respuestas de los estudiantes.

Para el diseño del instrumento de análisis de los resultados de las pruebas realizadas por los estudiantes se tomó en cuenta:

- La metodología de resolución de problemas de Alan Schoenfeld, tomando en cuenta las categorías de recursos, uso de heurísticas y control.
- La caracterización de los niveles de demanda cognitiva propuesta por Smith y Stein (1998), con la intención de identificar si el estudiante logró el desarrollo de competencias en cada nivel.
- La estructuración de Benedicto et al (2015), en donde realiza una adaptación para identificar las características de acuerdo a la demanda cognitiva de Smith y Stein (1998), para relacionar con las actividades específicas a la resolución de problemas de Geometría.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS.

4. 1. Introducción.

En este capítulo se lleva a cabo la caracterización de elementos importantes al resolver problemas de matemáticas, como son el uso de conocimientos previos, recolección de datos, heurísticas utilizadas, control del proceso de solución y algunas dificultades que presentaron los estudiantes durante la resolución de los problemas planteados en este estudio.

En este estudio se realizó un análisis cualitativo de las estrategias que utilizan los estudiantes de secundaria en la modalidad de telesecundaria al resolver problemas de matemáticas. En estos problemas se tomaron en cuenta reactivos de las olimpiadas de matemáticas del estado de Hidalgo, con el objetivo de conocer el abordaje de problemas y la aplicación del conocimiento de las matemáticas en el proceso de resolución.

4. 1. Instrumento de análisis de resultados.

En la realización del análisis de resultados se elaboró una tabla con heurísticas que se consideran para el proceso de solución en cada problema como una herramienta de apoyo para proyectar los procesos cognitivos requeridos para resolver el problema. Para observar las diferencias y coincidencias que existen en la forma de abordar los problemas y en el proceso de solución. El análisis de los resultados también aporta algunas propuestas para realizar actividades de entrenamiento de estudiantes para la resolución de problemas de matemáticas con reactivos de olimpiadas matemáticas.

Se muestran las estrategias utilizadas por los estudiantes al resolver los problemas propuestos en este estudio, las pruebas seleccionadas corresponden a los estudiantes que realizaron el procedimiento con mayor claridad o mostraron procesos o estrategias novedosas en su forma de pensar.

En el caso de los estudiantes que no realizaron algún procedimiento, no se cuenta con elementos para determinar el proceso cognitivo que llevaron a cabo. Por lo que se realizó una tabla de frecuencia en donde se describen los resultados obtenidos por cada reactivo.

Para analizar las respuestas de los estudiantes del presente estudio se considera el uso de la categorización de Schoenfeld, A. (1985), en donde se describen tres de las categorías del autor (tabla 6). Con la finalidad de identificar el uso de recursos inmersos en el problema y los que el estudiante considera de utilidad para resolver el problema. Además, el uso de heurísticas generales y específicas requeridas en cada reactivo. Así también, observar el control que presenta el estudiante al exponer el proceso de resolución.

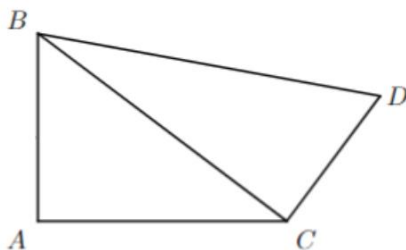
Recursos	<i>Inventario de recursos</i>	Datos que recolecta el estudiante.
	<i>Circunstancias estereoscópicas</i>	El estudiante analiza cómo puede resolver el problema, concibe un plan y busca una posible estrategia de resolución del problema.
	<i>Recursos defectuosos y patrones de error consistentes</i>	El estudiante escribe datos y fórmulas que considera para son necesarias para resolver el problema. Pero resultan no ser útiles.
Heurísticas	<i>Uso de estrategias</i>	El estudiante aplica una estrategia general para resolver el problema.
		El estudiante hace uso de sub-estrategias para resolver el problema.
	<i>Uso apropiado de estrategias</i>	El estudiante hace uso correcto de las estrategias utilizadas en el problema.
Control	<i>Análisis</i>	El estudiante entiende de lo que trata el problema antes de resolverlo.
	<i>Exploración</i>	Considera una o varias formas posibles de solución y seleccionar una específica.
	<i>Diseño</i>	Llevar a cabo el esquema de solución y lo cambia en algún momento.
	<i>Implementación</i>	El estudiante monitorea el proceso, reflexiona si es el correcto y al no ser lo modifica.
	<i>Verificación</i>	El estudiante realiza una revisión minuciosa del proceso de resolución.

Tabla 5. Categorización del método de resolución de problemas de Schoenfield, A. (1985).

Por otra parte, se consideró el modelo de demanda cognitiva propuesto por Benedicto et al. (2015), quienes modificaron el modelo de Smith y Stein (1998), con la finalidad de analizar actividades de patrones geométricos (tabla 4). La cual, se adapta a problemas de geometría con el objetivo de categorizar los procesos de solución de los estudiantes.

4. 3. Análisis de las respuestas del reactivo 1.

El triángulo ABC es rectángulo y se cumple que $AC = 8\text{ cm}$ y $AB = 6\text{ cm}$. Si el segmento CD es perpendicular a BC y mide 5 cm , ¿Cuál es el área del triángulo BCD ?



Respuesta del estudiante 7.

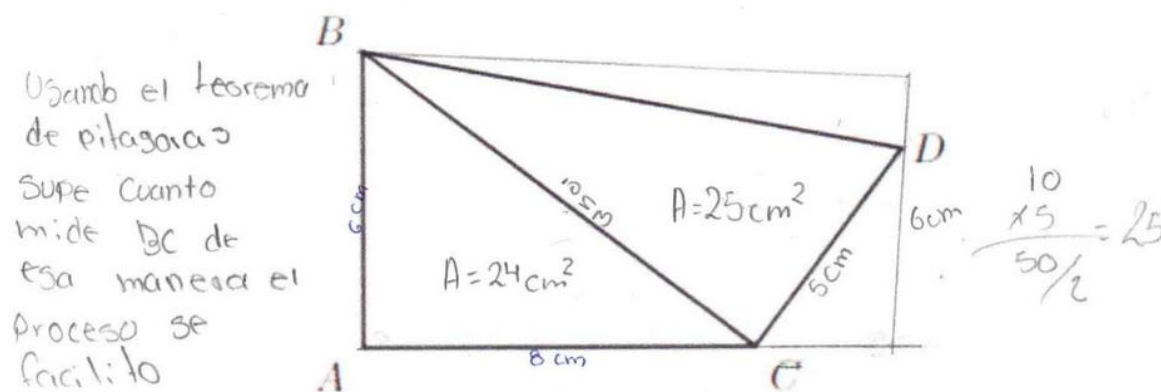


Figura 3. Proceso de solución estudiante 7.

En esta respuesta se observa el uso de estrategias parte desde la recolección e identificación de datos, en donde el estudiante identifica los datos en los lados correspondientes a la figura, mencionados en el enunciado (Figura 3). Por otra parte, hace uso de trazos auxiliares en donde pretende complementar un rectángulo, para transformar la figura inicial, lo cual permita entender de mejor manera el problema. Pero dicha estrategia no influye en la solución, de acuerdo con Schoenfeld, se considera un recurso defectuoso, ya que resulta ser un proceso erróneo en la forma de representar la información de solución.

Durante el proceso el estudiante realiza la aplicación de fórmulas, en donde se puede suponer el uso del Teorema de Pitágoras para obtener el valor del segmento BC , pero no muestra sus resultados de manera ordenada, así también sin establecer una relación de datos con la denominación del segmento con la fórmula. Para el cálculo del área, el estudiante no hace referencia a la fórmula que usa, lo cual expone su idea por medio de operaciones organizados de manera aritmética, así también no hace la representación de las variables que conforman la fórmula de área de un triángulo.

Respuesta del estudiante 2.

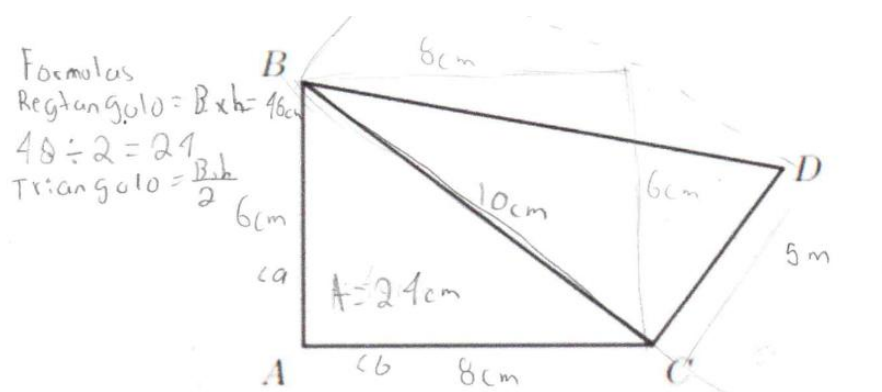


Figura 4. Proceso de solución estudiante 2.

En la figura 4, se observa la primera parte de la respuesta del estudiante se observa el uso de heurísticas como son trazos auxiliares, en donde el estudiante complementa el triángulo ABC con rectas paralelas a los segmentos BA y AC, para formar un rectángulo, el cual le sirvió para orientar su proceso de solución en donde tomo en cuenta la formula del rectángulo, considerando que un triángulo rectángulo es la mitad del rectángulo, este proceso se puede considerar un recurso defectuoso, debido a que este proceso puede considerarse parte inicial del proceso, pero no es necesario calcular el área del triángulo ABC, dado que el problema requiere calcular el área del triángulo BCD.

Datos
cateto $a = 6$
cateto $b = 8$

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$
$$\sqrt{100} = 10$$

Triángulo BCD
 $A = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25 \text{ cm}$

Figura 5. Proceso de solución estudiante 2.

De acuerdo con la figura 5, se tiene como segundo momento del proceso de solución, el estudiante realiza la recolección de datos, en donde hace la relación de los catetos del triángulo ABC con los segmentos AB y AC, lo cual le permite hacer la sustitución de datos en la formula del teorema de Pitágoras, la cual no hace referencia a escribiendo la formula en el proceso a diferencia de la formula del área del triángulo que escribe, pero sin realizar una conexión de datos con las variables que intervienen en dicha formula. Se puede mencionar que el estudiante hace uso de las fórmulas necesarias para resolver el problema, las cuales le permiten obtener una respuesta apropiada, sin embargo, no hace una aplicación apropiada de ellas.

Explicación
 Como conocemos las medidas del cateto a y el cateto b, usando el teorema de pitagoras podremos saber la hipotenusa del triangulo ABC y la que es la altura del triangulo BCD. Con estos datos y sabiendo que el segmento CD mide 5cm podremos resolver el problema.

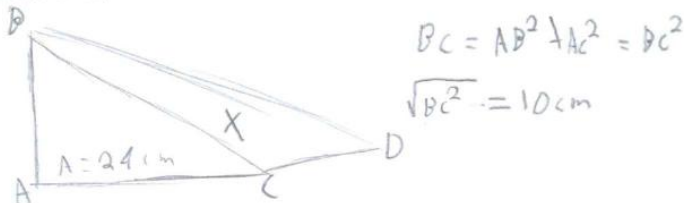


Figura 6. Proceso de solución estudiante 2.

En la figura 6, el estudiante da una breve explicación del proceso que desarrollo para obtener el resultado al presente problema. En donde el estudiante hace referencia a algunas relaciones entre los datos recolectados del problema y las variables que intervienen en las fórmulas necesarias para la resolución.

Respuesta del estudiante 10.

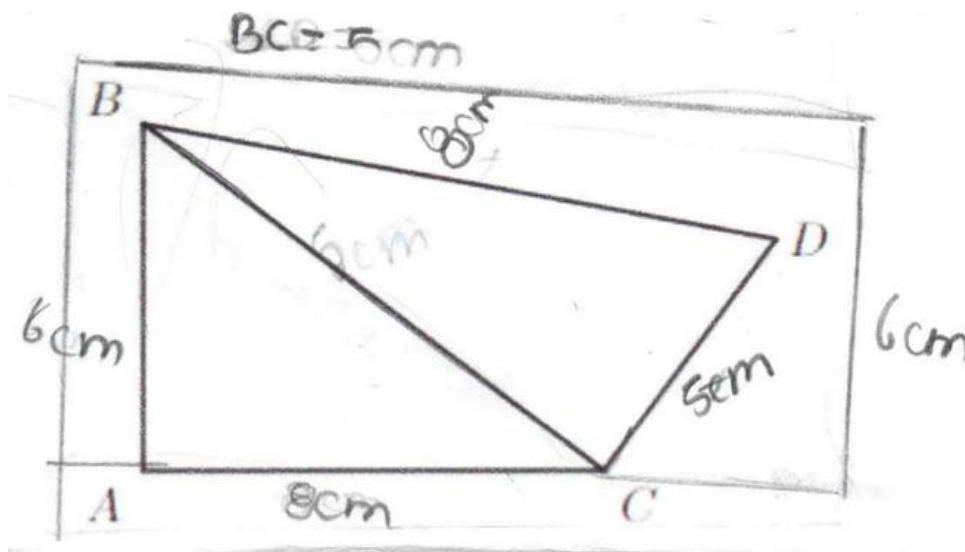


Figura 7. Proceso de solución estudiante 10.

En la respuesta del estudiante 10, se observa que comienza con la asignación de valores en los segmentos correspondientes a la figura planteada en el problema, lo cual le sirve como fase de inicio para comprender el problema (figura 7). Al analizar la respuesta, se puede percibir que el estudiante realiza algunos errores al asignar los valores con sus segmentos adecuados, pero dicha acción puede no influir en el proceso idóneo de la solución.

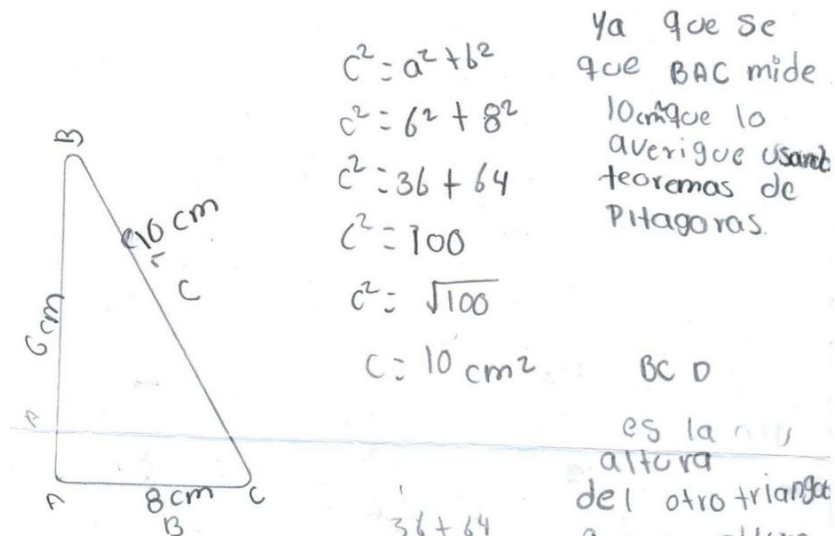


Figura 8. Proceso de solución estudiante 10.

Para continuar en la figura 8, se observa que desarrolla la exposición de ideas de una manera apropiada, en donde se realiza la asignación de valores con el segmento correspondiente, de acuerdo al triángulo BAC, en donde utiliza denomina sus lados con las letras A, B y C, los cuales determinan los catetos y la hipotenusa. Para continuar, el estudiante identifica que es necesario utilizar el teorema de Pitágoras con el objetivo de conocer el valor de C, el cual de acuerdo a su respuesta determina que C es la altura del triángulo BCD, lo que permitirá ser utilizado para calcular el área requerida por el problema.

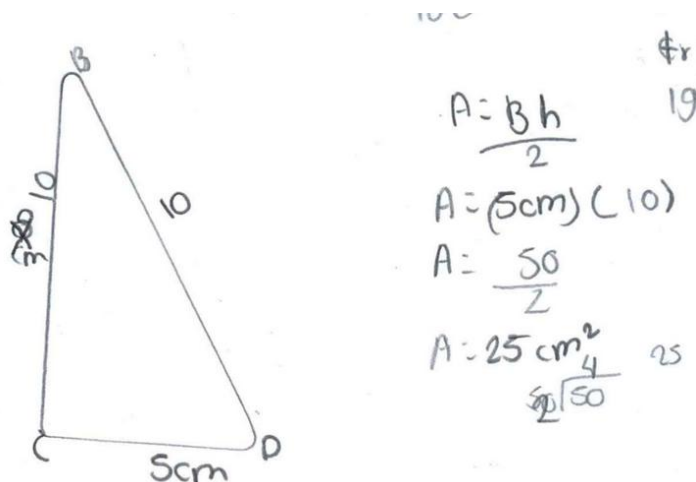


Figura 9. Proceso de solución estudiante 10.

En este momento de solución (figura 9), el estudiante hace uso del valor hallado anteriormente, pero sin especificar la variable que representa en la fórmula del área, la cual es necesaria para resolver el problema. Las operaciones expuestas se desarrollan de una manera asertiva, solo con algunos vacíos en el desarrollo como son el no escribir la operación en su totalidad y las unidades de medida.

Análisis general del reactivo 1

Para continuar el análisis del reactivo se realiza una tabla de las posibles estrategias a utilizarse por parte de los estudiantes para el desarrollo de la solución del presente reactivo.

	Estrategias del proceso de solución
RI	Recolección e identificación de datos.
EE	Ensayo y error
DF	Descomponer la figura
TA	Trazos auxiliares
AF	Aplicación de fórmulas

Tabla 6. Estrategias presentes en el proceso de solución del reactivo 1.

En la siguiente tabla, se hace un análisis de las estrategias utilizadas por el grupo de estudiantes durante el proceso de resolución del problema.

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
RI	●	○	○	●	○	○	●	○	○	○
EE	●	○	●	●	○	●	●	●	●	●
DF	○	●	○	●	●	○	●	○	○	○
TA	○	●	●	●	○	●	●	●	●	●
AF	○	●	○	●	○	○	●	●	○	○
○: Realizó ●: No realizó ●: Realizó de manera regular.										

Tabla 7. Frecuencia de uso de estrategias de los estudiantes del reactivo 1.

Los estudiantes lograron resolver el problema, sin dificultades en dar una respuesta correcta al problema. Pero se observa que aun hace falta trabajar respecto al uso adecuado de las estrategias y organización de la información, en donde expongan apropiada sus ideas al argumentar sus respuestas.

Análisis basado en el Método de Resolución de Problemas de Schoenfeld, A. (1985).

En el siguiente cuadro, se presenta un análisis de las respuestas de solución de las pruebas, basado en la interpretación de instrumento de acuerdo a la metodología de resolución de problemas propuesto por Alan Schoenfeld. En donde, se identifican las características del reactivo, así también describiendo las acciones realizadas por los el grupo de estudiantes (tabla 3).

Categoría	Subcategoría	Descripción
Recursos	<i>Inventario de recursos</i>	La mayoría de estudiantes realizan hacen referencia a la recolección de datos asignando los valores con los segmentos correspondientes en la figura. Pero no lo hacen de manera apropiada al exponer sin tomar notas de los datos de interés, los cuales serán necesarios para resolver el problema, además de sintetizar la información.
	<i>Circunstancias estereoscópicas</i>	Algunos estudiantes hacen uso de algunos cálculos no necesarios en el proceso de solución.
	<i>Recursos defectuosos y patrones de error consistentes</i>	Se presentan casos en donde estudiantes hacen operaciones y trazos, los cuales no intervienen en el proceso de solución, además de que no se exponen las ideas de manera precisa con algún significado relevante para los estudiantes, por lo que confunden al revisor en las distintas respuestas de solución.

Heurísticas	<i>Uso de estrategias</i>	Las estrategias que más se usan por parte de los estudiantes al resolver estos problemas son: RI, DF, TA y AF. Se observa que al ser un problema de baja demanda cognitiva el estudiante identifica que puede resolver el problema aplicando de forma directa las fórmulas que intervienen en el proceso.
		Se puede considerar que como sub-estrategias el descomponer la figura con la finalidad de identificar y asignar los valores correspondientes a los objetos matemáticos que intervienen en la figura que se presenta en este reactivo.
	<i>Uso apropiado de estrategias</i>	El estudiante hace uso de algunas estrategias, pero con algunas deficiencias al momento de exponer sus ideas en papel y lápiz, debido a que no escriben de manera completa y ordenada la información.

Control	<i>Análisis</i>	Los estudiantes comprenden de los que trata el problema sin alguna dificultad.
	<i>Exploración</i>	Exploran algunas rutas de solución utilizando trazos auxiliares para identificar particularidades.
	<i>Diseño</i>	No se observa un diseño de esquemas de solución, se puede percibir que en algunas pruebas consideraron algunas heurísticas, las cuales en la mayoría de pruebas no tuvieron significado relevante para la solución, en otras pruebas se identifican la implementación de distintos procesos utilizados por los estudiantes.
	<i>Implementación</i>	Durante el análisis de pruebas se puede observar que los estudiantes al comprender el problema aplican de manera directa las fórmulas que son necesarias para el proceso de resolución, en donde solo algunos estudiantes tienen muestran unas rutas distintas de solución, pero sin llevarlas a un proceso distinto al aplicado por los demás.
	<i>Verificación</i>	En las distintas pruebas analizadas se puede contemplar la intención del estudiante por explicar y argumentar sus procesos de solución, pero por lo cual es necesario mejorar en esta categoría de la fase de control, ya que el proceso solo es descriptivo, sin alguna modificación en sus rutas de solución.

Tabla 8. Análisis del reactivo 1 por el método de resolución de problemas de Schoenfield, A. (1985).

Análisis de demanda cognitiva basado en la propuesta de Benedicto et al (2015).

En este momento, se presenta un análisis del proceso de solución, basado en la interpretación de instrumento de acuerdo a la demanda cognitiva considerando los aspectos de este instrumento de análisis. En donde, se identifican las características del reactivo, así también asignado un nivel o niveles de demanda cognitiva (tabla 4).

Procedimientos sin conexiones	Procedimiento de resolución	Tomando en cuenta la figura representada en el problema y considerando los datos planteados en el enunciado, permite identificar la solución de manera algorítmica, tomando en cuenta las fórmulas necesarias.
--------------------------------------	-----------------------------	--

	Finalidad	En este reactivo se pretende que los estudiantes identifiquen las definiciones y la relación con los objetos matemáticos representados en la figura. Así también logren reconocer las fórmulas necesarias para resolver el problema.
	Esfuerzo requerido	La resolución de este problema requiere un esfuerzo limitado. El reactivo expone claramente lo que hay que realizar para resolverlo.
	Contenidos implícitos	En el proceso de solución se puede establecer la conexión de los conceptos y las fórmulas necesarias para resolver el problema de manera algorítmica, sin necesidad de realizar modificaciones, lo que permite aplicar las formular de forma directa.
	Explicaciones	Se realiza de manera sencilla enfocándose en describir el proceso realizado al hacer uso de los algoritmos utilizados.
	Representación de la solución	En su resolución se hace uso de la representación geométrica y la segmentación para describir el proceso de solución, para describirlo de manera clara y sencilla.

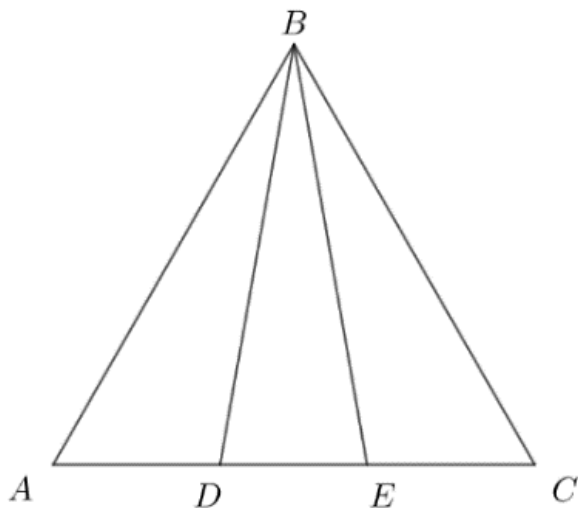
Tabla 9. Análisis de demanda cognitiva por la propuesta de Benedicto et al (2015).

Este reactivo se consideró de demanda cognitiva inferior de procedimientos sin conexiones, debido a que el planteamiento del problema es evidente y solo requiere de establecer algunas relaciones expuestos en el enunciado y están presentes en la figura, por lo cual, resulto ser sencillo para los estudiantes entender el problema e identificar los conceptos necesarios para establecer una representación gráfica y algorítmica de la solución.

De acuerdo con lo anterior, para que este reactivo tenga un nivel de demanda superior se debe hacer cambios en el diseño del reactivo y mejorar su dificultad, como el cambiar los datos por variables o por valores numéricos más complejos, modificar la figura a modo que se complique identificar los triángulos rectángulos de manera sencilla, con el propósito que los estudiantes realicen trazos auxiliares que permitan establecer relaciones entre segmentos y buscar los procesos correctos.

4. 4. Análisis de respuestas del reactivo 2.

En el triángulo equilátero ABC , los segmentos BD y BE dividen al ángulo $\sphericalangle ABC$ en tres iguales. ¿Cuánto miden los ángulos BCA y BDE ?



Respuesta del estudiante 2.

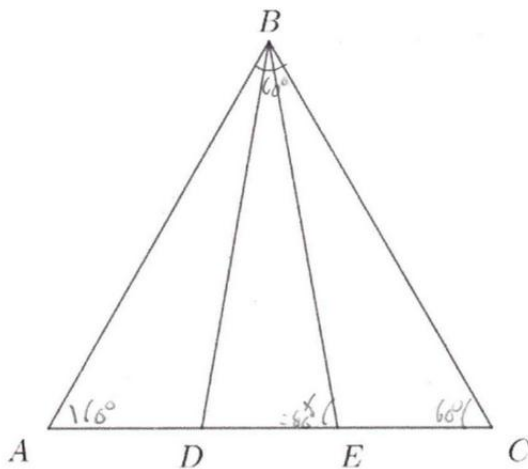


Figura 10. Proceso de solución estudiante 2.

En la figura 10, como primer momento, se puede observar que el estudiante hace referencia a identificar los ángulos correspondientes a un triángulo equilátero, lo cual expone en el siguiente momento considerando lo que conoce de este tipo de triángulos. Así también, identifica el ángulo que se pretende hallar, considerándolo como el uso de una variable, la cual denomino con la letra "x". Aunque se confunde al indicar el ángulo de forma adecuada.

② Datos Un triángulo equilátero tiene las mismas medidas en todos sus lados y misnos angulos.
 Triángulo
 $\angle = 180^\circ$

Figura 11. Proceso de solución estudiante 2.

De acuerdo con la figura 11, el estudiante expone el conocimiento que tiene respecto a las propiedades de un triángulo equilátero, resaltando las medidas de los ángulos del triángulo, haciendo referencia a que la suma total de sus ángulos son los 180° .

Para poder resolver el ejercicio tenemos que dividir 180 entre 3 ya que la suma de los angulos internos de un triángulo son 180° . Despues dividimos el resultado entre 2 y tendremos el resultado.
 Resolución
 $180 \div 3 = 60$

Figura 12. Proceso de solución estudiante 2.

Para continuar, en la figura 12, el estudiante considera los 180° para que al ser dividido entre los 3 ángulos internos del triángulo ABC, estos sean equivalentes y así poder conocer los ángulos BAC, BAC y el BCA, el cual es uno de los requeridos por el problema. Aunque el estudiante no lo expone en su proceso de solución, ya que se centra en hallar el ángulo BDE.

$60 \div 3 = 20$
 Los angulos divididos valen 20° .

Figura 13. Proceso de solución estudiante 2.

El estudiante considera que al dividir el ángulo ABC en 3 partes iguales, le permitirá encontrar $\angle DBE$, el cual en su respuesta es necesario para hallar $\angle BDE$ (figura 13).

Para obtener el agulo BED tendríamos que restar a 180 20 y el resultado dividirlo entre dos.
 $180 - 20 = 160$
 $160 \div 2 = 80$
 El angulo mide 80°



Figura 14. Proceso de solución estudiante 2.

En la figura 14, el estudiante realiza un proceso interesante, ya que no considera como tal la propiedad de los ángulos internos del triángulo ($\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$), sino que toma otra ruta de solución, la cual también le permite encontrar el resultado correcto, ya que considera que a 180° le resta el valor del $\angle DBC$ y después el resultado lo divide entre dos, obtendrá dos ángulos de la misma magnitud, considerando el triángulo DBC como isósceles, el valor que obtenga será la medida de los ángulos BDE y BED, logrando hallar la respuesta correcta del reactivo.

Respuesta del estudiante 3.

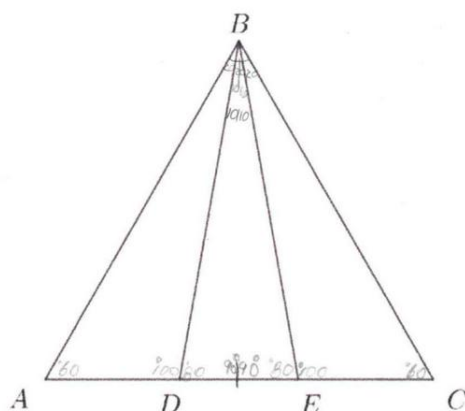


Figura 15. Proceso de solución estudiante 3.

Como primer momento (figura 15), se percibe que el estudiante realiza la identificación de los ángulos con datos conocidos, de acuerdo a las definiciones y propiedades de los triángulos y ángulos que son de su conocimiento. Este momento, se puede considerar como el diseño de la solución, ya que hace uso de estrategias que le permiten encontrar el resultado adecuado, así también se toma como la exposición de la solución en la figura presentada en el planteamiento del problema.

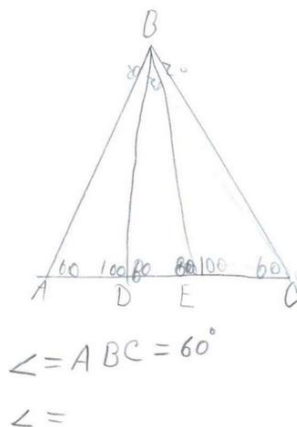


Figura 16. Proceso de solución estudiante 3.

En un segundo momento, en la figura 16, se muestra que la implementación de la solución, en donde el estudiante expone la elaboración de una figura, en donde hace referencia a la división del ángulo $\angle ABC$, esto de acuerdo al enunciado del problema. Considerando que $\angle ABC=60$, el cual, al ser cortado por los segmentos BD y BE, obtiene como resultado tres ángulos de 20° .

El triángulo equilátero tiene 3 lados de 60° los cuales son ABC, el ángulo B se divide en 3 y nos da un resultado de 20° cada uno, para el triángulo ABD el A mide 60° , el B mide 20° y el D mide 100° , para el triángulo BDE, el B mide 20° , el D mide 80° y el E mide 80° , y para el triángulo BCE, el B mide 20° , el C mide 60° y el E mide 100° .

Figura 17. Proceso de solución estudiante 3.

El último momento de la respuesta, el estudiante explica el proceso de solución de acuerdo a su conocimiento. En donde describe de manera escrita lo que realizó para llegar al resultado (figura 17),

Análisis general del reactivo 2.

Para continuar el análisis del reactivo se realiza una tabla de las posibles estrategias a utilizarse por parte de los estudiantes para el desarrollo de la solución del presente reactivo.

	Estrategias en el proceso de solución
RI	Recolección e identificación de datos.
EE	Ensayo y error.
DF	Descomponer la figura.
TA	Trazos auxiliares.

Tabla 10. Estrategias presentes en el proceso de solución del reactivo 2.

En la siguiente tabla, se hace un análisis de las estrategias utilizadas por los estudiantes durante el proceso de resolución del problema.

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
RI	○	●	●	●	●	○	●	●	●	●
EE	○	●	●	●	○	●	●	●	●	●
DF	○	●	●	●	●	○	●	●	○	●
TA	○	●	●	●	●	○	●	●	●	●
PT	○	○	●	●	●	○	●	●	○	●
PA	○	●	●	●	●	○	●	●	○	●
○: Realizó ●: No realizó ●: Realizó de manera regular.										

Tabla 11. Frecuencia de uso de estrategias de los estudiantes del reactivo 2.

La mayoría de estudiantes lograron resolver el problema, sin dificultad alguna. Aunque se observa que aun presentan complicaciones durante la exposición de ideas y organización de la información al momento de argumentar sus respuestas.

Análisis basado en el Método de Resolución de Problemas de Schoenfield, A. (1985).

En la siguiente tabla, se presenta un análisis de las respuestas de solución de las pruebas, basado en la interpretación de instrumento de acuerdo a la metodología de resolución de problemas propuesto por Alan Schoenfield. En donde, se identifican las características del reactivo, así también describiendo las acciones realizadas por los el grupo de estudiantes (tabla 12).

Categoría	Subcategoría	Descripción
Recursos	<i>Inventario de recursos</i>	Los estudiantes realizan la asignación de valores a los ángulos correspondientes de la figura. Pero no lo hacen de manera apropiada, al no realizar notas de los datos relevantes, necesarios en la solución.
	<i>Circunstancias estereoscópicas</i>	Algunos estudiantes realizan cálculos no son necesarios en la solución del problema.
	<i>Recursos defectuosos y patrones de error consistentes</i>	Se presentan casos en donde estudiantes hacen operaciones que no son parte del proceso de solución, así también exponen sus ideas de forma no ordenada.

Heurísticas	<i>Uso de estrategias</i>	Las estrategias que más se usan los estudiantes para resolver el problema son: EE, TA y PT. Se observa que al ser un problema de baja demanda cognitiva el estudiante puede identificar con facilidad la ruta de solución, así también los cálculos necesarios en el proceso.
		Se puede considerar que como sub-estrategias el descomponer la figura con la finalidad de identificar los valores correspondientes a los ángulos de los vértices que conforman la figura.
	<i>Uso apropiado de estrategias</i>	El estudiante hace uso de estrategias, pero no expone de manera clara sus ideas, dado que no las describen completas y forma ordenada.

Control	<i>Análisis</i>	Los estudiantes comprenden el problema sin dificultad.
	<i>Exploración</i>	Exploran la figura utilizando trazos auxiliares para identificar la ruta de solución adecuada.
	<i>Diseño</i>	Los estudiantes no realizan un esquema de solución respecto al problema, ya que identifican de forma directa los datos y estrategias que intervienen en el procedimiento de resolución, No se observa un diseño de esquemas de solución.
	<i>Implementación</i>	Se observa que la mayoría estudiantes lograron comprender el problema al identificar los datos inmersos en la conformación de la figura, así también el uso apropiado de propiedades de triángulos, lo cual permitió obtener distintas rutas distintas de solución.
	<i>Verificación</i>	En las pruebas analizadas se observa que el grupo de estudiantes tienen el propósito por describir y argumentar de forma adecuada sus soluciones, pero se necesita mejorar, ya que solo explican sus ideas de resolución, pero sin ninguna intención de modificar o implementar algo distinto en sus respuestas.

Tabla 12. Análisis del reactivo 2 por método de resolución de problemas de Schoenfield, A. (1985).

Análisis de demanda cognitiva basado en la propuesta de Benedicto et al (2015).

En este momento, se presenta un análisis del proceso de solución, basado en la interpretación de instrumento de acuerdo a la demanda cognitiva considerando los aspectos de este instrumento de análisis. En donde, se identifican las características del reactivo, así también asignado un nivel demanda cognitiva (tabla 8).

Categoría	Subcategoría	Descripción
Procedimientos con conexiones	Procedimiento de resolución	Tomando en cuenta la figura representada en el problema y considerando los datos planteados en el enunciado, permite identificar la solución de manera algorítmica, tomando en cuenta las fórmulas necesarias.
	Finalidad	En este problema se pretende que los estudiantes identifiquen los ángulos correspondientes a los vértices que conforman el triángulo ABC, así también sus propiedades. Además de lograr reconocer fórmulas que se requieren para resolver el problema.
	Esfuerzo requerido	La resolución de este problema requiere un esfuerzo cognitivo, ya que el reactivo es necesario identificar las generalidades y propiedades del triángulo inmerso en la figura.
	Contenidos implícitos	En el proceso de solución se puede establecer la conexión entre las propiedades y características de los ángulos de cada uno de los vértices que conforman el triángulo. Además de realizar las variantes adecuadas de las fórmulas que se requieren para resolver el problema.
	Explicaciones	Se requiere que el estudiante haga referencia a las relaciones entre ángulos y opere de manera adecuada para encontrar las rutas de solución.
	Representación de la solución	La resolución demanda el uso de trazos auxiliares, representaciones o segmentación del triángulo para describir el proceso de solución de manera correcta.

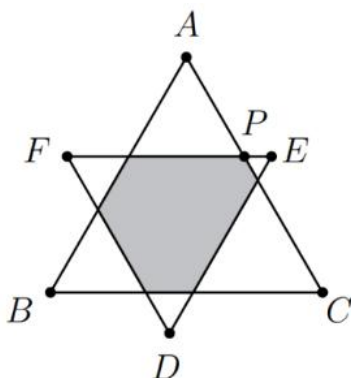
Tabla 13. Análisis de demanda cognitiva por la propuesta de Benedicto et al (2015).

Este reactivo se consideró de demanda cognitiva superior con procedimientos con conexiones, debido a que el planteamiento del problema requiere de establecer algunas relaciones entre ángulos y propiedades del triángulo ABC, por lo que no fue tan complejo para los estudiantes comprender el problema e identificar las relaciones entre los objetos matemáticos para establecer una representación gráfica y aritmética de la solución.

Para que este reactivo sea de un nivel cognitivo superior y resulte de más complejidad para los estudiantes, se debe considerar solicitar a los estudiantes cambiar por el tipo del triángulo, hacer trazos inscritos al triángulo con diferentes posiciones, en donde los ángulos no sean sencillos de identificar.

4. 5. Análisis de respuestas del reactivo 3.

Dos triángulos equiláteros ABC y DEF de perímetros 33 cm y 24 cm, respectivamente, están propuestos como en la figura. La intersección de los segmentos AC y FE es P y cumple que $\angle FPC = 120^\circ$. ¿Cuál es el perímetro del hexágono sombreado?



Respuesta del estudiante 6.

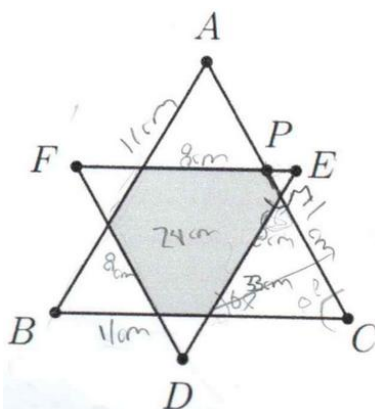


Figura 18. Proceso de solución estudiante 6.

Para iniciar en la figura 18, el estudiante asigna valores al tanteo, respecto a las medidas de los segmentos que conforman los lados de los triángulos, con la intención de obtener una respuesta al problema planteado, pero sin lograr un resultado exitoso. Así también, se observa que hace uso de algunos cálculos relacionados con los ángulos de los distintos vértices de los triángulos iniciales y los nuevos que se forman entre las intersecciones de segmentos.

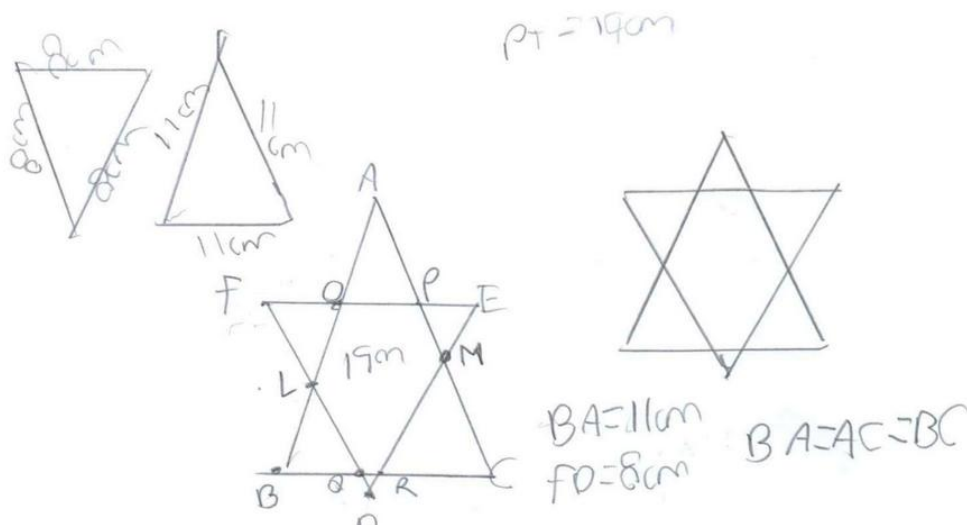


Figura 19. Proceso de solución estudiante 6.

Para continuar, de acuerdo con la figura 19, el estudiante descompone la figura en dos triángulos, determinando valores a cada uno de sus lados, tomando en cuenta que son triángulos equiláteros. Así también, asigna variables a cada uno de sus vértices, con el propósito de hacer uso de la información en otro momento posterior. Además, presenta un valor numérico al centro de la figura, lo cual se considera como una hipótesis a la respuesta y resultado del perímetro del hexágono irregular, contenido entre los dos triángulos.

$$\begin{aligned}
 BA &= BL + LO + OA \\
 BC &= BQ + QR + RC \\
 AC &= AP + PM + MC \\
 FE &= FO + OP + PE \\
 FD &= FL + LQ + QD \\
 ED &= EM + MR + RD \\
 FD &= FE = ED \\
 AB &= BC = AC \quad \Delta + \alpha
 \end{aligned}$$

Figura 20. Proceso de solución estudiante 6.

En otro momento, se observa que el estudiante realiza algunas relaciones entre los segmentos contenidos en la figura, estableciendo algunas igualdades entre ellos con el objetivo de establecer procesos matemáticos que le permitan llegar a la solución del problema (figura 20).

$$FO = FE - PE - OP$$

$$PE = OP + PM + MR + RQ + QL$$

$$LO = BA - BL - OA$$

$$OP = FE - FO - PE$$

$$PE = FE - FO - OP$$

Figura 21. Proceso de solución estudiante 6.

Después en la figura 21, se puede visualizar que realiza algunos despejes de segmentos, de los cuales algunos conforman el perímetro del hexágono. Además, se puede observar que establece una expresión que representa el perímetro con los segmentos correspondientes a cada uno de los lados del hexágono. Pero se puede analizar que el estudiante aún sigue sin encontrar la ruta adecuada para la solución del problema.

$$PA = OP + PM + MR + RQ + QL + LO$$

$$OP = FE - FO - PE$$

$$PM = AC - AP - MC$$

$$MR = ED - EM - RD$$

$$RQ = BC - RC - BQ$$

$$QL = FO - FL - QD$$

$$LO = BA - BL - OA$$

Figura 22. Proceso de solución estudiante 6.

En un cuarto momento (figura 22), contemplar que el estudiante, hace un reacomodo de la información con el propósito de corregir el proceso de solución y lograr argumentar adecuadamente sus ideas y llegar a la respuesta correcta.

$$FE = 8$$

$$AC = 11$$

$$ED = FE = FO$$

$$AC = BC = BA$$

Figura 23. Proceso de solución estudiante 6.

Por último, el estudiante considera algunos segmentos y su valor numérico, así también establece algunas igualdades entre los lados de los triángulos. Pero sin lograr establecer los procesos y operaciones aritmético-algebraicas que permitan trazar la ruta de solución que propicie la comprobación de la hipótesis planteada anteriormente (figura 23).

Respuesta del estudiante 9 (E9R3P2)

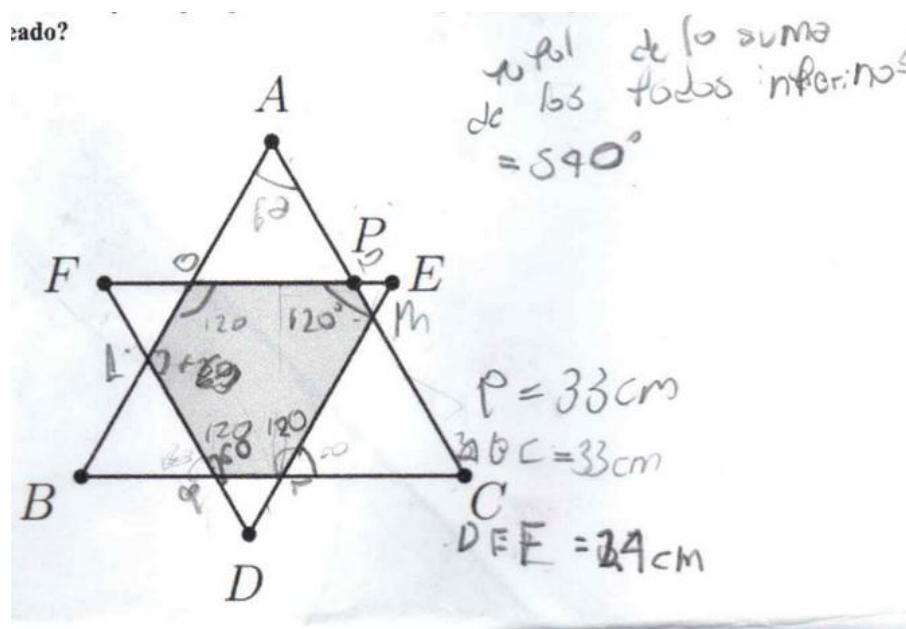


Figura 24. Proceso de solución estudiante 9.

En la figura 24, como primer momento de solución el estudiante inicia con identificar cada uno de los puntos que conforman la figura, asimismo les asigna una variable a cada uno de estos, así también se observa que realiza deducciones respecto a los ángulos internos del hexágono, además de exponer en la suma total de estos. Por otra parte, realiza la recolección de datos expuestos en el enunciado, como son el perímetro de los dos triángulos que conforman la figura.

$$P_D = OL + Lq + qr + rm + mP + PO$$

$$OL = BA - OL$$

$$BA = BL + LO + OA = 11$$

$$Lq = BL + Bq$$

$$qr = Dq + Dr$$

Figura 25. Proceso de solución estudiante 9R3.

En el segundo momento (figura 25), el estudiante presenta una hipótesis en donde expone que la solución corresponde a que el perímetro del hexágono es el resultado de sumar los segmentos que lo conforman. Lo cual, resulta ser cierto, pero no resuelve en su totalidad el problema, ya que no se obtiene un valor o expresión como resultado. Enseguida se observa que empieza establecer algunas relaciones entre los segmentos del perímetro y los segmentos que conforman cada lado de los triángulos ABC y DEF.

$$BA = BL + LO + OA$$

$$AC = cm + pm + AP$$

$$BC = Bq + qr + rC$$

$$OP = cm$$

$$cr = PO$$

$$FE = FO + OP + PE = 8cm$$

$$OB = BL + LO + OA = 11cm$$

$$Am = AP + pm$$

$$rCm_D = mc + cr + rM$$

Figura 26. Proceso de solución estudiante 9.

En este momento, se observa que el estudiante realiza una serie de igualdades entre los segmentos que conforman cada uno de los lados de los triángulos, realizando una verificación de sus ideas anteriores, buscando tomar una ruta de solución distinta a la anterior. El estudiante pretende establecer representaciones con los segmentos, ya que establece algunas relaciones entre estos, con el objetivo de hacer uso adecuado de la información obtenida (figura 26).

Análisis general del reactivo 3

En el análisis del reactivo se consideran las siguientes estrategias, las cuales pueden ser parte de las soluciones propuestas por los estudiantes.

Estrategias en el proceso de solución	
RI	Recolección e identificación de datos.
EE	Ensayo y error.
DF	Descomponer la figura.
TA	Trazos auxiliares.
PT	Uso de propiedades de triángulos.
PA	Uso de propiedades de ángulos.
RS	Relaciones entre segmentos
AL	Procesos algebraicos

Tabla 14. Estrategias presentes en el proceso de solución del reactivo 3.

En la siguiente tabla, se hace un análisis de las estrategias utilizadas por los estudiantes durante el proceso de resolución del problema.

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
RI	○	○	●	○	●	○	●	●	○	○
EE	●	●	○	○	●	○	●	○	○	○
DF	●	●	●	●	●	○	●	●	●	●
TA	●	○	○	●	○	●	●	●	●	●
PT	●	○	●	●	●	●	●	●	○	●
PA	●	○	●	●	●	●	●	●	○	○
RS	○	○	●	○	●	○	●	●	○	○
AL	○	○	●	○	●	○	●	●	○	○

○: Realizó ●: No realizó ○: Realizó de manera regular.

Tabla 15. Frecuencia de uso de estrategias de los estudiantes del reactivo 3.

En este problema ningún estudiante logró resolver el problema, ya que no lograron identificar el proceso correcto para encontrar la ruta de solución. Al ser un problema de alta demanda cognitiva resulta ser complicado para los estudiantes realizar los procesos matemáticos correspondiente.

Análisis basado en el Método de Resolución de Problemas de Schoenfield, A. (1985).

En el siguiente cuadro, se presenta un análisis de las respuestas de solución de las pruebas, basado en la interpretación de instrumento de acuerdo a la metodología de resolución de problemas propuesto por Alan Schoenfield. En donde, se identifican las características del reactivo, así también describiendo las acciones realizadas por los el grupo de estudiantes (tabla 16).

Categoría	Subcategoría	Descripción
Recursos	<i>Inventario de recursos</i>	Los estudiantes identifican los datos correspondientes al perímetro de cada uno de los triángulos, para después calcular el valor de sus lados. Así también, asigna variables a los vértices, para después identificar los distintos segmentos que intervienen en el proceso de solución.
	<i>Circunstancias estereoscópicas</i>	Algunos estudiantes realizan cálculos con los datos establecidos en el enunciado, además de asignar valores aproximados a los segmentos que conforman los lados de los triángulos con el objetivo de llegar a un valor correspondiente al perímetro del hexágono.
	<i>Recursos defectuosos y patrones de error consistentes</i>	Los estudiantes establecen algunas igualdades y las operan de la manera no adecuada, lo cual confunde y desvía el camino a una ruta de solución que permita el éxito en la resolución del problema.

Heurísticas	<i>Uso de estrategias</i>	Las estrategias que más se usan los estudiantes para resolver el problema son: RI, EE y RS. Se analiza que al incrementar el nivel de complejidad y considerar este problema de alta demanda cognitiva el estudiante no logra identificar con facilidad una ruta de solución, así también operar de manera adecuada los segmentos, ya que dependen demasiado de los valores numéricos.
		Se puede considerar que como sub-estrategias el descomponer la figura con la finalidad establecer relaciones entre segmentos, así también el busca hacer uso de los procesos algebraicos que conocen para lograr encontrar una respuesta correcta.

	<i>Uso apropiado de estrategias</i>	En distintas pruebas analizadas se observa un limitado uso de estrategias, ya que, al contar con pocos datos presentados como valores numéricos, complica el diseño de la solución. Dado que, de acuerdo a la perspectiva del grupo de estudiantes, hace falta datos, que posibiliten resolver el problema.
--	-------------------------------------	---

Control	<i>Análisis</i>	Los estudiantes comprenden parte de lo que trata el problema, pero sin tener una idea clara de como resolverlo.
	<i>Exploración</i>	Exploran la figura estableciendo valores aproximados, identificando y renombrando vértices, algunos realizan trazos auxiliares, realiza cálculos con los grados y otros algunos operan con los valores dados en el enunciado.
	<i>Diseño</i>	Los estudiantes no realizan un esquema de solución respecto al problema, debido a que no logran trazar una ruta de solución de acuerdo a sus ideas.
	<i>Implementación</i>	En este problema, se puede observar que los estudiantes presentan complicaciones respecto a como resolver el problema, lo cual no permite implementar un proceso adecuado para encontrar la solución, ya que se requiere de visión y uso apropiado de procedimientos matemáticos para llegar a la solución.
	<i>Verificación</i>	En las pruebas analizadas se observa que el grupo de estudiantes al presentar dificultades para identificar la ruta de solución, por lo que ningún estudiante logra llegar al resultado, además de argumentar y demostrar sus ideas respecto al problema.

Tabla 16. Análisis del reactivo 3 por método de resolución de problemas de Schoenfield, A. (1985).

Análisis de demanda cognitiva basado en la propuesta de Benedicto et al (2015).

En este momento, se presenta un análisis del proceso de solución, basado en la interpretación de instrumento de acuerdo a la demanda cognitiva considerando los aspectos de este instrumento de análisis. En donde, se identifican las características del reactivo, así también asignado un nivel demanda cognitiva (tabla 17).

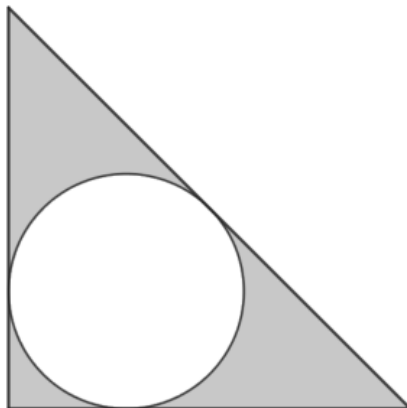
Categoría	Subcategoría	Descripción
Procedimientos sin conexiones	Procedimiento de resolución	Para los estudiantes identifican con facilidad lo que plantea el problema, pero es complicado descubrir los procedimientos necesarios para resolverlos, debido a que consideran que los datos dados, no son suficientes.
	Finalidad	En este problema se pretende que los estudiantes calculen el perímetro del hexágono que se forma entre los puntos de intersección de los triángulos ABC y DEF.
	Esfuerzo requerido	La resolución de este problema requiere un esfuerzo cognitivo mayor a los anteriores, ya que resulta para el estudiante identificar los objetos y procesos matemáticos para poder operarlos.
	Contenidos implícitos	En el proceso de solución primero se requiere identificar que los triángulos son equiláteros, además de considerar sus características principales. Para después, establecer relaciones entre los lados de los triángulos y los segmentos que los conforman. Lo cual, será necesario para realizar igualdades, para poder operar con estas y resolver el problema.
	Explicaciones	Se requiere que el estudiante identifique las relaciones entre los segmentos y los opere de manera adecuada para encontrar las rutas de solución.
	Representación de la solución	La resolución demanda la segmentación de los lados de cada triángulo e igualdades para diseñar el proceso de solución de manera adecuada.

Tabla 17. Análisis de demanda cognitiva por la propuesta de Benedicto et al (2015).

Este reactivo se consideró de demanda cognitiva superior con procedimientos con conexiones, debido a que el planteamiento del problema requiere de establecer relaciones entre los segmentos de los triángulos ABC y DEF, lo cual resulto complejo para los estudiantes comprender el problema apropiadamente e identificar las relaciones entre los objetos matemáticos para elegir la estrategia y los procesos de solución.

4. 6. Análisis de respuestas del reactivo 4.

La figura muestra un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales miden 2 cm. Se inscribe una circunferencia en el triángulo. ¿Cuánto mide el área sombreada?



Respuesta del estudiante 6.

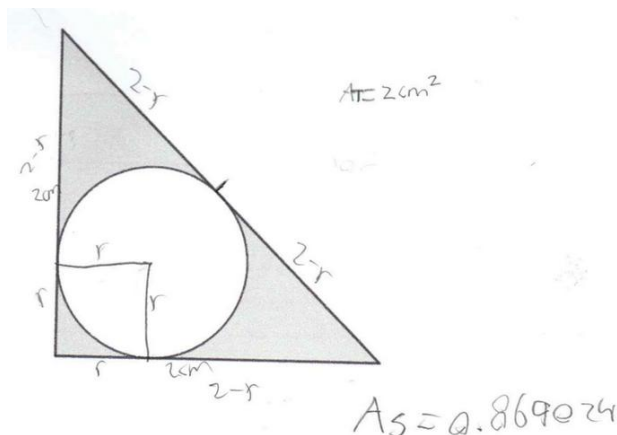


Figura 27. Proceso de solución estudiante 6.

Se muestra en la figura 27, como primer momento se observa que el alumno establece una serie de relaciones entre los lados del triángulo y el radio de la circunferencia inscrita a este. Así también, presenta un resultado asignando la representación A_S , el cual se puede considerar como la respuesta al problema.

$2\sqrt{2}$ $2 \cdot \sqrt{2} = (2-r) + (2+r)$
 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ $2\sqrt{2} = 4 - 2r$
 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ $2\sqrt{2} = 4 - 2r$
 $\sqrt{2} \cdot 4$
 $2 \cdot \sqrt{2}$
 $(-\sqrt{2} + 2)$ $(\sqrt{2} + 2)(-1)$
 $a^2 = b^2 + c^2$
 $a^2 = \sqrt{14}$
 $a = \sqrt{8}$
 $2 \cdot \sqrt{2}$
 $\sqrt{2} = 2 - r$
 $-r = \sqrt{2} - 2$
 $\sqrt{8}$ ~~$\sqrt{2}$~~
 $2\sqrt{2} = 4 - 2r$
 $\sqrt{2} = 2 - r$
 $\sqrt{2}$

Figura 28. Proceso de solución estudiante 6.

En este segundo momento (figura 28), se observa que el alumno realiza una diversidad de cálculos, con las relaciones identificadas en el entendimiento del problema, en donde hace uso del teorema de Pitágoras, cálculo del radio, pero no se tiene un orden apropiado, lo cual no permite entender fácilmente el proceso realizado por el estudiante.

$3 \cdot 14$ $2\sqrt{2}$ 0.869024
 $(3.14) \cdot (2 - \sqrt{2})^2$
 $(3.1416) \cdot (0.6)^2$ 1.130976
 0.36

Figura 29. Proceso de solución estudiante 6.

De acuerdo con la figura 29, el estudiante realiza una representación de un triángulo, el cual se puede considerar isósceles, con el objetivo de encontrar relaciones que le permitan encontrar la ruta de solución. Asimismo, se establecen algunos cálculos que contemplan el valor de π , que multiplican una relación entre un lado del triángulo menos raíz de dos, en donde el resultado de esta operación se puede relacionar con el valor expuesto anteriormente como resultado,

De acuerdo con lo anterior, el estudiante logra resolver considera haber resuelto el problema, pero no realiza una organización de la información, por lo que no tiene un control apropiado de sus ideas para poder demostrarlo de manera adecuada, lo cual es necesario mejorar, ya que con esta información no se tiene una idea clara de solución.

Respuesta del estudiante 9.

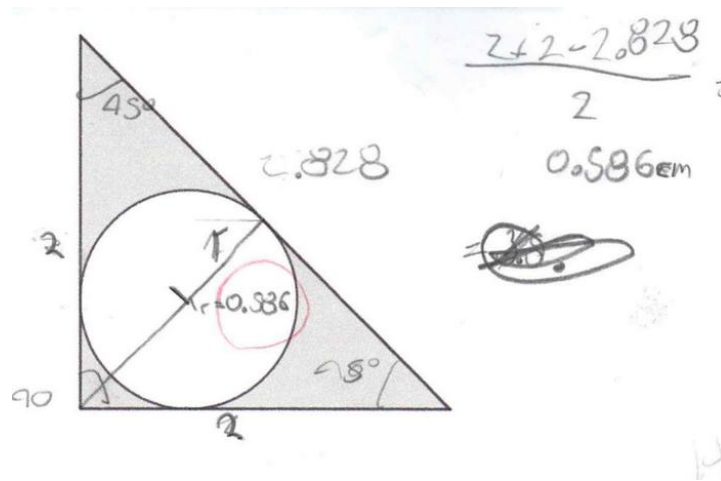


Figura 30. Proceso de solución estudiante 9.

Durante el proceso realizado se puede deducir que el estudiante ha interpretado el problema (figura 30), por lo que asigna valores a los lados del triángulo, además de ángulos en los vértices, aunque estos se pueden considerar como recursos defectuosos, ya que no son necesarios en el proceso de solución. asimismo, realiza un cálculo de con la diferencia de un valor que considera como el valor de la hipotenusa y la suma de los catetos, considerando como valor del radio con el resultado obtenido.

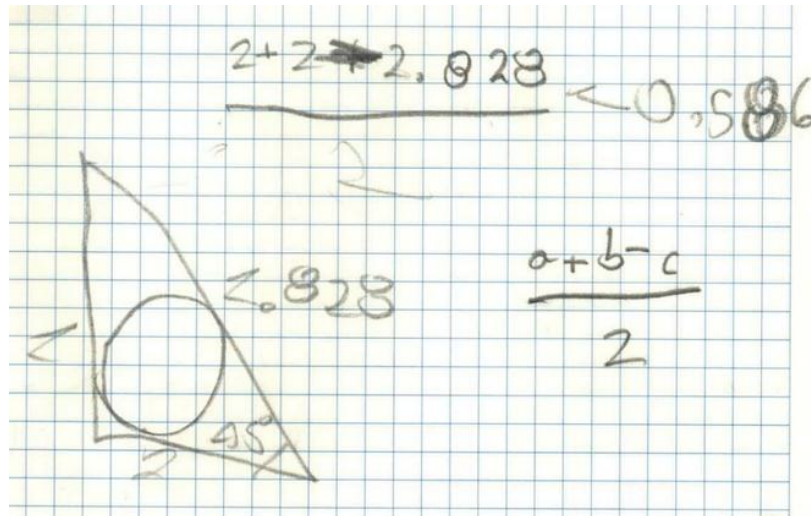


Figura 31. Proceso de solución estudiante 9.

En esta parte del proceso (figura 31), expone una expresión que representa la diferencia entre la suma de los lados a, b y el valor de c, dividido entre dos. Se deduce que el estudiante tiene una conjetura de como poder calcular el radio de la circunferencia, pero no expone una demostración de la expresión, el cual puede resultar no ser valido en la ruta de solución.

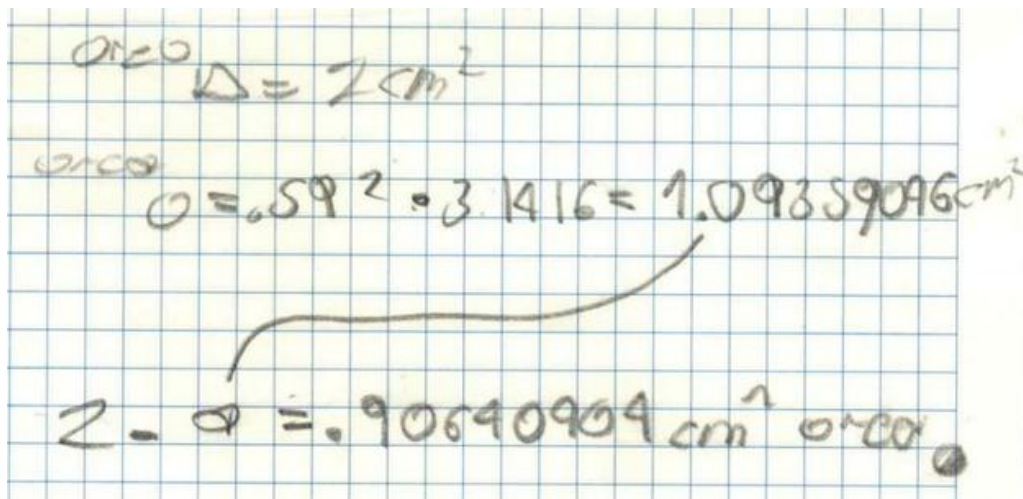


Figura 32. Proceso de solución estudiante 9.

Como se observa en la figura 32, el estudiante pretende hacer uso del concepto de área, en donde considera le valor obtenido en su cálculo anterior para después multiplicar por el valor de pi, después lo considera como "a", para multiplicarlo por 2, aunque no especifica la intención de calcular el valor de esta variable, el cual puede resultar un recurso defectuoso en el proceso de solución. De acuerdo con esto, el estudiante tal vez comprende el problema, pero no logro encontrar una ruta de solución apropiada, la cual resuelva el problema.

Análisis general del reactivo 3

En el análisis del reactivo se consideran las siguientes estrategias, las cuales pueden ser parte de las soluciones del grupo de estudiantes.

	Estrategias en el proceso de solución
RI	Recolección e identificación de datos.
EE	Ensayo y error.
TA	Trazos auxiliares.
RS	Relaciones entre segmentos
AL	Procesos algebraicos

Tabla 18. Estrategias presentes en el proceso de solución del reactivo 3.

En la siguiente tabla, se hace un análisis de las estrategias utilizadas por los estudiantes durante el proceso de resolución del problema.

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
RI	○	○	○	○	●	○	●	○	○	○
EE	●	○	○	●	●	○	●	●	○	○
TA	●	○	●	●	○	○	●	●	●	●
RS	●	○	●	○	●	○	●	●	○	○
AL	●	○	●	●	●	○	●	●	○	○

○: Realizó ●: No realizó ○: Realizó de manera regular.

Tabla 19. Frecuencia de uso de estrategias de los estudiantes del reactivo 3.

La mayoría de estudiantes lograron resolver el problema, sin dificultad alguna. Aunque se observa que aun presentan complicaciones durante la exposición de ideas y organización de la información al momento de argumentar sus respuestas.

Análisis basado en el Método de Resolución de Problemas de Schoenfield, A. (1985).

A continuación, se realiza el análisis de las respuestas de solución de las pruebas, basado en la interpretación de instrumento de acuerdo a la metodología de resolución de problemas propuesto por Alan Schoenfield (tabla 20). En donde, se identifican las características del reactivo, así también describiendo las acciones realizadas por los el grupo de estudiantes.

Recursos	<i>Inventario de recursos</i>	Datos que recolecta el estudiante.
	<i>Circunstancias estereoscópicas</i>	El estudiante interpreta el problema, realiza conjeturas, para después buscar una ruta de solución.

	<i>Recursos defectuosos y patrones de error consistentes</i>	El estudiante identifica datos y relaciones entre segmento que considera necesarios para resolver el problema.
--	--	--

Heurísticas	<i>Uso de estrategias</i>	El estudiante establece relaciones entre segmentos.
		El estudiante realiza expresiones, para llevar a cabo procesos matemáticos.
	<i>Uso apropiado de estrategias</i>	Al estudiante identifica y aplica de forma correcta los procesos necesarios para resolver el problema.

Control	<i>Análisis</i>	El estudiante entiende de lo que trata el problema.
	<i>Exploración</i>	Establece conjeturas que permitan encontrar la ruta de solución satisfactoria.
	<i>Diseño</i>	Llevar a cabo el esquema de solución y modificar en algún momento.
	<i>Implementación</i>	El estudiante reflexiona si proceso es correcto y lo modifica en algún momento.
	<i>Verificación</i>	El estudiante realiza una revisión minuciosa del proceso de resolución.

Tabla 20. Análisis del reactivo 4 por método de resolución de problemas de Schoenfield, A. (1985).

Análisis de demanda cognitiva basado en la propuesta de Benedicto et al (2015).

En la siguiente tabla, se presenta un análisis del proceso de solución, basado en la interpretación de instrumento de acuerdo a la demanda cognitiva considerando los aspectos de este instrumento de análisis. En donde, se identifican las características del reactivo, así también asignado un nivel demanda cognitiva.

Categoría	Subcategoría	Descripción
Procedimientos sin conexiones	Procedimiento de resolución	Para los estudiantes identifican lo que plantea el problema, pero es complicado descubrir los procedimientos necesarios para resolverlo, ya que solo cuentan con la medida de los lados del triángulo.
	Finalidad	En este problema se pretende que los estudiantes calculen el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo.
	Esfuerzo requerido	La resolución de este problema requiere un esfuerzo de alta demanda cognitiva, debido a que resulta complicado estudiante establecer las relaciones entre los objetos matemáticos, que permitan identificar los procesos necesarios para encontrar la ruta de solución correcta.
	Contenidos implícitos	En el proceso de solución primero se requiere calcular la medida de la hipotenusa del triángulo. Para después, establecer relaciones entre los lados de los triángulos y el radio de la circunferencia, con apoyo de trazos auxiliares. Lo cual, será necesario para realizar algunas igualdades entre estos, llevar a cabo las operaciones necesarias que resuelvan el problema.
	Explicaciones	Se requiere que el estudiante identifique las relaciones entre los lados del triángulo y el radio del círculo inscrito, realice las operaciones de manera adecuada para encontrar la solución al problema.
	Representación de la solución	La resolución demanda la relación entre lados del triángulo y el radio de la circunferencia para diseñar la ruta de solución.

Tabla 21. Análisis de demanda cognitiva por la propuesta de Benedicto et al (2015).

Este reactivo se consideró de demanda cognitiva superior con procedimientos con conexiones, debido a que el planteamiento del problema requiere de establecer relaciones entre los segmentos que conforman el triángulo y el radio de la circunferencia, lo cual resulta complejo para los estudiantes, esto dificulta comprender el problema apropiadamente e identificar las relaciones entre los objetos matemáticos, con el objetivo de elegir las estrategias y procesos de solución.

5. CONCLUSIONES

5. 1. Complicaciones al implementar la metodología de resolución de problemas.

El aprender matemáticas vía resolución de problemas puede ser complicado para los estudiantes, ya que desafía su conocimiento, debido a que ahora el estudiante desconoce el proceso de solución, dado que la forma de aprendizaje tradicional se da mediante la resolución de ejercicios, en donde se aplica un algoritmo para responder actividades durante clases y la complejidad de los ejercicios se basa en cambios de estructura o modificación de datos.

Por el contrario, en la metodología de resolución de problemas se implementan diversas estrategias, aunque una de sus limitaciones es el uso adecuado del conocimiento, dado que entre sus aprendizajes tienen un conjunto de ideas relacionadas con los problemas planteados, pero los estudiantes dudan al exponerlas.

De acuerdo con el análisis realizado se puede considerar que el aprendizaje de las matemáticas vía resolución de problemas depende de algunos factores como son: interés de los alumnos por la asignatura, recorrido estudiantil, currículo escolar y formación académica. Los aspectos mencionados pueden ser factores de éxito en los estudiantes, ya que influyen en el aprendizaje y aprecio por el estudio de la asignatura, la cual puede no ser del agrado de los adolescentes por la complejidad de sus contenidos.

La metodología de resolución de problemas es una herramienta de aprendizaje que tiene como uno de sus propósitos generar curiosidad y el interés por aprender conceptos y procesos matemáticos del estudiante de forma diferente, así también el fortalecer el conocimiento y uso de estos durante el estudio de las matemáticas. Por ello, es necesario crear un ambiente favorable que incentive el interés de los estudiantes, tomando en cuenta estrategias de enseñanza y la comunicación de ideas

Otra de las dificultades hacia el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes es la interpretación y entendimiento de los conceptos matemáticos, debido a que algunos pueden presentar dificultades al realizar actividades, como el no entender los contenidos de la asignatura, la forma de enseñanza y atención del docente, evaluaciones bajas, entre otras situaciones. Durante el desarrollo del estudio se observa que se presentan una diversidad de dificultades al resolver problemas de matemáticas, desconocer la manera de trabajo, así también el identificar y establecer las relaciones entre los objetos inmersos en los problemas propuestos.

5. 2. Limitaciones en la enseñanza de la geometría en Telesecundaria.

La enseñanza de la geometría en nivel secundaria es limitada, específicamente en telesecundaria, debido a que las estrategias de enseñanza, que se desarrollan solo involucran actividades que contemplan una diversidad de ejercicios, los cuales son de baja demanda, en donde se repiten los procesos expuestos en el aula. Lo cual, requiere que la información que se comparte sea de utilidad, para que los alumnos aprendan los fundamentos de las matemáticas, ya que no cuentan con información relevante respecto a estructuras matemáticas tales como definiciones y teoremas. Los cuales son conceptos que no tienen algún fundamento que los respalde.

Dentro de este intento de enseñar los contenidos de geometría y ante el amplio número de ejercicios que proponen los profesores para desafiar los temas de geometría, se carece de fundamentos matemáticos, los cuales permitan aprender de manera adecuada. De acuerdo con esto, los docentes de telesecundaria en sus explicaciones no involucran definiciones, teoremas y propiedades de objetos geométricos. Debido a esto, los estudiantes al resolver problemas no entienden identifican los objetos matemáticos inmersos en el este, lo que provoca que no resuelvan el problema de manera adecuada.

Otra de las limitaciones en la enseñanza de las matemáticas es la construcción de los cuerpos geométricos, lo cual complica el aprendizaje de la geometría, ya que en algunos casos los estudiantes no entienden la simbología y la denominación de segmentos con el uso de letras que definen vértices e intersecciones. Además de hacer uso de ejercicios en donde las fórmulas de implementar de manera directa, por lo que los estudiantes caen en la memorización y mecanización de procesos, así también el docente se limita operar los objetos matemáticos de una manera más compleja, en donde se apliquen dos o más procesos que compliquen el pensamiento del alumno. Adicionalmente, el estudiante está acostumbrado a trabajar de manera directa con valores numéricos, pero no opera con las variables que intervienen en la ejercitación o uso de aplicación del conocimiento, en donde en su intento de resolver problemas de matemáticas, los estudiantes exponen estas necesidades cognitivas, las cuales no son implementadas de forma adecuada dentro del aula.

Otra de las limitaciones de la enseñanza de la geometría en telesecundaria es la falta de herramientas tecnológicas, como son equipos de cómputo o tablets, los cuales resultan ser necesarios para que el estudiante investigue y se apoye de la tecnología para resolver los problemas, como es el uso de GeoGebra. De acuerdo con esto, varios profesores no hacen uso de herramientas digitales, debido a que no saben trabajar este tipo de software. Una de las necesidades del docente durante el ciclo escolar, es la capacitación y actualización continua ante la exigencia de avances y nuevas formas de entender las matemáticas, lo cual, en ocasiones el docente lo interpreta de otra manera y cae en el error de solo, buscar nuevas formas de abordar los temas, implementando dinámicas y materiales visuales que le permitan al alumno aprender los temas.

5. 3. Respuesta a preguntas de investigación.

Durante el análisis del presente trabajo se puede observar que, en los primeros momentos de desarrollo, los estudiantes buscan encontrar soluciones de manera directa, sin entender el problema, realizando una diversidad de operaciones, en donde algunas son innecesarias o como menciona Schoenfield, procesos defectuosos, los cuales no tienen que ver con el proceso de solución, además que en algunos casos no son realizados de manera correcta. En algunos procesos se limitan a utilizar una estrategia, en donde solo en algunos casos intentan hacer uso de dos o más estrategias, que permitan resolver los problemas.

Se puede observar que los estudiantes al enfrentarse a este tipo de pruebas pueden entender el problema de forma adecuada, pero no identifican el proceso correcto, lo cual propicia que realicen parte del proceso, pero no concluyan sus soluciones. Así también en algunos casos no logran comprenderlo, por lo que realizan procesos al azar o no hacen intento por resolver el problema. Entre los procesos que realizan los estudiantes al resolver problemas se mencionan las siguientes:

- Interpretar el problema. Realizan lectura de enunciados con el propósito de entender lo que pretende que logre el alumno durante la resolución del problema.
- Realiza preguntas. Los estudiantes hacen preguntas en los momentos de inicio, desarrollo y al finalizar un problema, ya sea de manera intrapersonal y hacia el docente, esto sucede cuando no entienden el lenguaje matemático, la simbología o una expresión matemática, así también en durante el desarrollo tienden a cuestionar si el proceso es el adecuado o que se le realicen algunas sugerencias, otros cuestionan respecto si el resultado es el correcto o tienen que modificar su respuesta.
- Formular conjeturas. Establecen algunas ideas de solución, probando con la identificación de patrones con casos particulares, realizando operaciones, trazos auxiliares, descomposición de figuras, entre otros.
- Establecen conexiones entre sus formas de pensar y los conceptos matemáticos.
- Representación de la información. Realizan distintas formas de representar sus ideas con dibujos, trazos, segmentación, completar y dividir figuras.
- Comprobación de resultados. Reflexionan sobre las rutas de solución para llegar al resultado correcto.
- Comunicación de ideas. Realizan cambios en la manera de transmitir la información, ya sea de manera oral o escrita, a papel y lápiz, así también mediante herramientas digitales de manera gráfica.

De acuerdo con lo anterior, si al estudiante se le orienta de alguna manera de cómo resolver problemas usando los recursos cognitivos y materiales, con el propósito de aprovechar y hacer uso de lo aprendido dentro del aula escolar. Los estudiantes tienen una diversidad en sus formas de pensar, pero esto no se hace presente si el docente no genera un ambiente de confianza, lo cual permite que el estudiante exprese de forma oral y escrita sus ideas respecto a los ejercicios y problemas planteados durante las sesiones de clase.

Durante el proceso de resolución de problemas los estudiantes hacen uso de distintas estrategias con el objetivo de identificar las apropiadas que le permitan trazar una ruta de solución adecuada. Las estrategias más utilizadas por los estudiantes son:

- Identificación de datos relevantes. Durante la comprensión del problema realizan recolección de datos, además de establecer conexiones con sus saberes previos para entender el problema.
- Operaciones aritméticas. Implementación de cálculos con fórmulas conocidas.
- Expresiones algebraicas. Se establecen ecuaciones con los datos de las figuras que representan el problema, para operar y resolver con el fin de llegar al resultado.
- Ensayo y error. Se utiliza debido a que los estudiantes cuentan con pocos recursos conocidos, en búsqueda de una posible solución, ya que no se logra el entendimiento del problema, al no contar con valores numéricos conocidos.
- Trazos auxiliares. Realizan trazos que le permiten establecer relaciones entre los objetos, lo cual expone que han logrado entender el problema.
- Descomponer y representar figuras. Estrategia fundamental en los problemas que permita a los estudiantes simplificar el proceso de solución.

Este trabajo de investigación pretende hacer una aproximación para interpretar y entender cómo piensa el estudiante y para buscar estrategias de enseñanza que permitan promover los procesos cognitivos para abordar este tipo de problemas de geometría.

Es importante que el profesor cuente con el conocimiento de la metodología de resolución de problemas para implementar en clase para orientar de manera apropiada a los estudiantes, además de buscar un amplio repertorio de problemas, ya sean del tipo o no de Olimpiada de Matemáticas para que pueda proporcionar diferentes problemas, para sugerir estrategias de solución, que sean y cuales no son las adecuadas para resolver este tipo de problemas.

5. 4. Caracterización final de los niveles de demanda cognitiva.

La caracterización de la demanda cognitiva permite analizar el nivel de pensamiento que exige una tarea de aprendizaje. Al aplicar el modelo de Smith y Stein (1998) facilita identificar si las tareas propuestas promueven procesos matemáticos de análisis, argumentación y reflexión crítica (Tabla 22).

Categoría	Descripción
Memorización	Para la resolución de este tipo de problemas se requiere un esfuerzo mínimo, en donde los datos se obtienen directamente del enunciado y las operaciones correspondientes a temas vistos, debido a que su finalidad es la reproducción de saberes.
Procedimiento sin conexiones	En este nivel se los procedimientos son algorítmicos y requieren un esfuerzo definido, ya que es fácil identificar lo que se debe de hacer y cómo hacerlo. En este tipo de problemas la comprensión matemática no se hace presente, debido a que existe conexión limitada entre los conceptos o definiciones de forma directa con los algoritmos a utilizarse.
Procedimientos con conexiones	Estos problemas pretenden que el estudiante tiene como objetivo desarrolle una comprensión de los conceptos e ideas matemáticas. En donde se establecen las relaciones correspondientes entre el proceso y los algoritmos que se exponen en la solución de una manera ordenada.
Hacer matemáticas	Ese tipo de problemas requiere un cognitivo, el cual permita a los estudiantes explorar y comprender los conceptos, procesos o relaciones matemáticos. En donde, hagan uso del conocimiento, con el fin de organizar sus procedimientos de manera ordenada con explicaciones y demostraciones de sus ideas.

Tabla 22. Caracterización final de los niveles de demanda cognitiva de la tarea de aprendizaje (Smith y Stein, 1996).

5. 5. Discusión de los resultados

Este estudio tiene algunas coincidencias con trabajos realizados anteriormente, Flores-Mora (2012), menciona que el análisis de estrategias en resolución de problemas es importante para entender cómo piensan los estudiantes, conocer sus dificultades de aprendizaje e implementar acciones didácticas, con el propósito de afrontar esas dificultades. Lo cual, se logra al realizar pruebas propuestas por el docente cuando sea necesario, que permitirá analizar sus estrategias e identificar las más comunes, al igual que Valle et al. (2007) los resultados muestran que los

estudiantes coinciden en estrategias como son: ensayo y error, operaciones aritméticas y algebraicas, búsqueda de patrones, dibujar figuras, uso de trazos auxiliares, entre otros.

Durante el análisis de resultados también se pueden identificar errores frecuentes que se presentan durante la resolución de problemas, en donde Shinariko et al. (2020), menciona que los errores ocurren porque las personas tienen diferencias de comprensión, conocimiento y otros aspectos. De acuerdo con esto, se llega a distinguir la falta de comprensión y conocimiento de procesos, lo cual, dificulta identificar la relación entre los datos y la incógnita, planteados en los problemas, lo que ocasiona que se elijan estrategias incorrectas al resolver problemas de matemáticas. En trabajos orientados al estudio de la geometría Haryanti, Herman y Prabawanto (2019), mencionan que principal error se encuentra en los procesos, al realizar operaciones de cálculo y transformar problemas en modelos matemáticos. En donde, el docente debe tener un papel activo para ayudar a los estudiantes a dominar las definiciones de objetos matemáticos, así como sus propiedades y teoremas, además desarrollar habilidades matemáticas para mejorar en sus formas de interpretar, operar y procesos de resolución de problemas de geometría. Lo que posibilitara tener un pensamiento matemático como lo mencionan Sulistiowati et al. (2019), el nivel de pensamiento geométrico de los estudiantes influye en su competencia matemática en general y en su habilidad de pensamiento geométrico en particular.

También es importante considerar una metodología de resolución de problemas, ya que sirve de modelo para los estudiantes, que guía sus acciones y procesos de una manera organizada hacia una ruta de solución correcta y mejora del aprendizaje de las matemáticas. Marlon (2017) sugiere adecuar el enfoque de enseñanza, desarrollar material didáctico que permita implementar una diversidad de procesos y estrategias para la resolución de problemas que permita a los estudiantes aprender de una forma más eficiente.

Figueroa y Diaz (2011), señalan que las complicaciones que se tienen durante la resolución de problemas, es debido a carencias de conocimientos previos que se transfieren a los nuevos contenidos, lo cual tiene relación al resolver problemas, ya que, en la educación tradicional, el docente implementa la resolución de ejercicios, que pueden variar en dificultad, pero no en sus procesos. Por lo que, Intaros, Inprasitha y Srisawadi (2013), consideran que un enfoque abierto puede hacer que el aula de matemáticas cambie de manera diferente al aula tradicional, que permita que los estudiantes creen los problemas y las estrategias de resolución de problemas por sí mismos.

5. 6. Propuestas a futuro.

El aprender matemáticas por medio de resolución de problemas permite desarrollar competencias y habilidades en el aprendizaje de la disciplina, de acuerdo al análisis realizado en la investigación, se recomienda considerar las siguientes sugerencias para mejorar la enseñanza en el aula escolar:

1. Implementar problemas de aplicación de los contenidos de la asignatura tomando en cuenta distintos niveles de demanda cognitiva.
2. Capacitación continua. Investigar e integrar conceptos, definiciones, teoremas y propiedades de objetos matemáticos.
3. Espacios entre docentes para proponer y resolver problemas.
4. Búsqueda de herramientas digitales para el aprendizaje de las matemáticas.
5. Proponer a los docentes la generación de ambientes de diálogo con los estudiantes y entre ellos mismos, para que compartan sus ideas de manera autónoma dentro y fuera del aula.
6. El investigador debe ser un agente de cambio en sus centros educativos con el propósito de mejorar el aprendizaje de las matemáticas en el nivel de secundaria.

Referencias

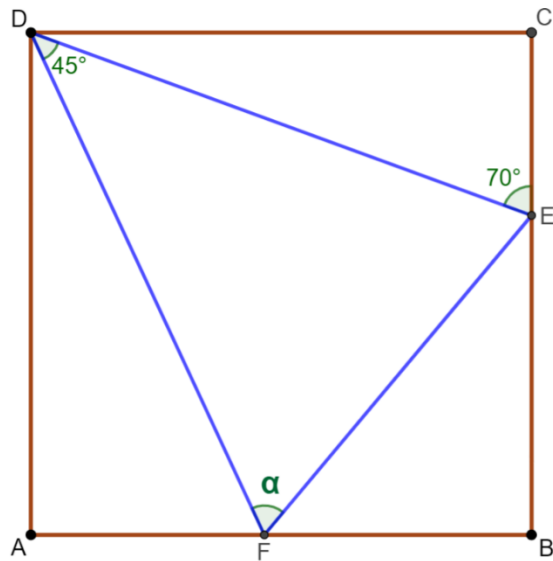
- Ausubel, D. (1983). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognitivo*. México: Trillas
- Arteaga, B. y Macías, J. (2016). La representación en la resolución de problemas matemáticos como diagnóstico de estrategias metacognitivas. XVI Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Cádiz, España. *Revista UNICIENCIA*, vol. 34.
- Barrera Mora, F., y Reyes Rodríguez, A. (2018). El rol de la tecnología en el desarrollo de entendimiento matemático vía la resolución de problemas. *Education Siglo XXI*, 36, 41-72.
- Benedicto, C., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante: SEIEM.
- Bikić, N., Maričić, S. y Pikula, M. (2016), The effects of differentiation of content in problem-solving in learning geometry in secondary school. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12.
- Castañeda, A. (2021). *Diseño de tareas con tecnologías digitales desde una perspectiva de resolución de problemas*. Trabajo de tesis. Pachuca, Hidalgo, México: Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.
- Eisenhart, M. (1991). Ideas from a cultural Anthropologist: Implications for Mathematics Education Researchers. *Proceedings of the 13th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 202-219. Blacksburg, VA.: Conceptual frameworks for research Circa 1991.
- Figuroa, J. y Díaz, D. (2011), Dificultades y errores que presentan los estudiantes de los grados décimo y undécimo de los colegios de Cali al resolver un problema de olimpiadas. Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia. *Scientia et Technica Año XVI*.
- Flores, G. (2012). *Estrategias utilizadas por estudiantes de secundaria y bachillerato para resolver problemas de la olimpiada de matemáticas (Tesis Maestría)*. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH). México.
- Haryanti, M., Herman, T. y Prabawanto, S. (2019), Analysis of students' errors in solving mathematical word problems in geometry. *Journal of Physics: Conference Series*.
- Intaros, P., Inprasitha, M. y Srisawadi, N. (2013), Students' problem-solving strategies in problem solving-mathematics classroom. *Procedia. Social and Behavioral Sciences* 116.
- Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *ZDM Mathematical Education*, 37(6), 457-461.
- NCTM, N. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. United States of America.

- Polya, G. (2005). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- ¿Qué es la OMM? <https://www.ommenlinea.org/presentacion/objetivos/>
- Flores, H. (s. f.). Solución de problemas y temas iniciales para la olimpiada de matemáticas. [https://www.ommenlinea.org/wp-content/uploads/practica/entrenador/Hector_Flores -
Temas iniciales para la olimpiada.pdf](https://www.ommenlinea.org/wp-content/uploads/practica/entrenador/Hector_Flores_-_Temas_iniciales_para_la_olimpiada.pdf)
- Valle, M., Juárez, M. y Guzmán, M. (2017). Estrategias generales en la resolución de problemas de la olimpiada mexicana de matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*. Vol. 9.
- Santos Trigo, M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México: Trillas.
- Santos Trigo, L. M. (2015). *La resolución de problemas matemáticos y el uso coordinado de tecnologías digitales*. Conferencia Interamericana de Educación matemática.
- Santos- Trigo, M., Camacho-Machín, M., & Norte, M.-A. R. (2018). Resolución de problemas matemáticos: Tecnologías Digitales, Procesos Cognitivos y metacognitivos y Formación de Profesores de Matemáticas. *Educativo Siglo XXI*, Vol.36, 13-20.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Schoenfeld, Alan. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in Mathematics. *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (D. Grouws, Ed.). p. 334-370,
- SEP (2017). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Planes y Programas de Estudio para la Educación Básica. Matemáticas*. Mexico: SEP. Pags. 295-321.
- Shinariko, L. J., Saputri, N. W., Hartono, Y. & Araiku1, J. (2020), Analysis of students' mistakes in solving mathematics olympiad problems. *Journal of Physics: Conference Series*. No. 1480.
- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. y Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development*. Nueva York: Teachers College Press.
- Sulistiowati, D., Herman, T. y Jupri, A. (2019), Student difficulties in solving geometry problems based on Van Hiele thinking level. *Journal of Physics: Conference Series*.
- Rodríguez, M., Gregori, P., Riveros, A. y Aceituno, D. (2017). Análisis de las estrategias de resolución de problemas en matemática utilizadas por estudiantes talentosos de 12 a 14 años. *Educación Matemática*, Vol. 29
- Rodríguez, M. y Dominguez, J. (2016), Dificultades del lenguaje que influyen en la resolución de problemas. *Enseñanza & Teaching*, 34.

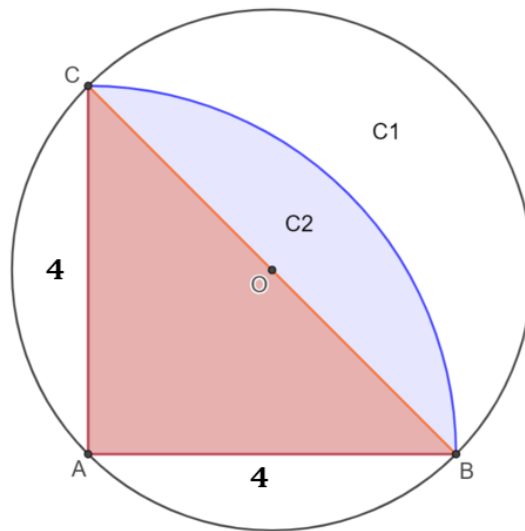
APÉNDICES

Apéndice A. Examen de diagnóstico.

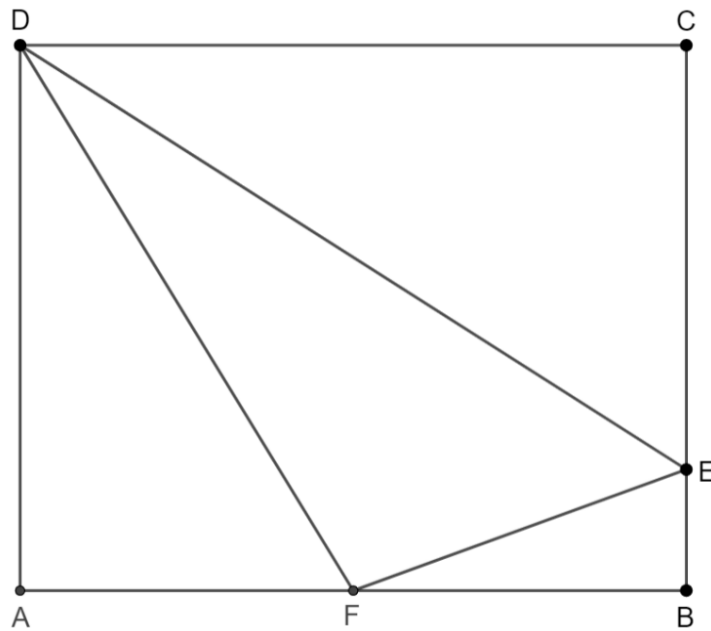
Problema 1. Sean ABCD un cuadrado y DEF un triángulo inscrito al cuadrado, el $\angle CED = 70^\circ$ y $\angle EDF = 45^\circ$. Encontrar el valor del ángulo α .



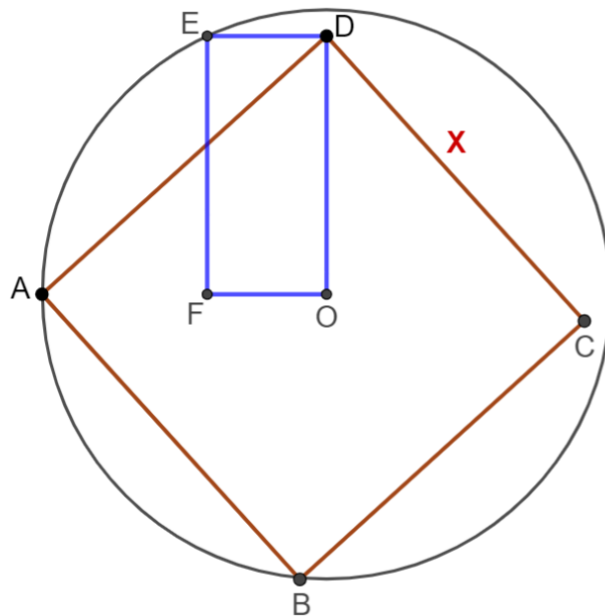
Problema 2. Sean ABC un triángulo inscrito a la circunferencia C1 con centro en el punto O. Encontrar el área azul del segmento de la circunferencia C2.



Problema 3. Sea el rectángulo ABCD con medidas de base 11 cm y altura de 9 cm, en el cual está inscrito el triángulo DFE, ¿Cuál es la medida de BE?

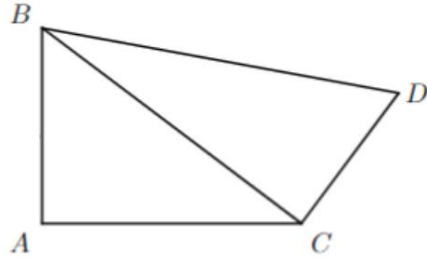


Problema 4. En una circunferencia (C_1), se encuentra inscrito el cuadrado ABCD de lado X y un rectángulo ODEF con medidas de base 4 cm y una altura de 5 cm. Calcular el valor de x y r .



Apéndice B. Solución de problemas.

Reactivo 1. El triángulo ABC es rectángulo y se cumple que $\overline{AC} = 8 \text{ cm}$ y $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$. Si el segmento \overline{CD} es perpendicular a \overline{BC} y mide 5 cm, ¿Cuál es el área del triángulo BCD?



RECURSOS

Datos

ΔABC y ΔBCD son rectángulo

$$\overline{AC} = 8 \text{ cm}$$

$$\overline{AB} = 6 \text{ cm}$$

$$\overline{CD} \perp \overline{BC}$$

$$\overline{BC} = 5 \text{ cm}$$

Formula(s)

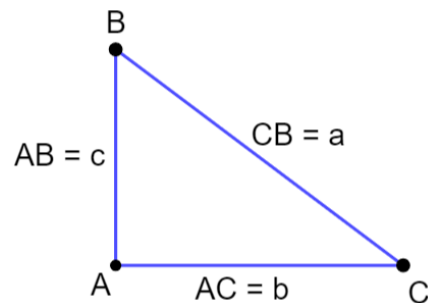
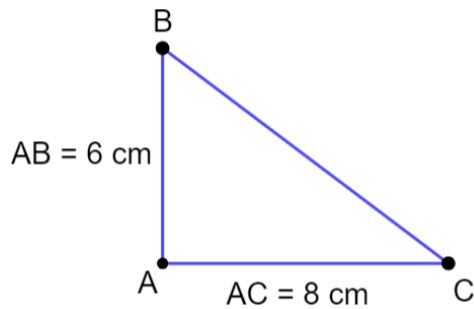
Área triángulo

$$A_{\Delta} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2$$

HEURÍSTICAS



$$a^2 = c^2 + b^2$$

$$a^2 = 6^2 + 8^2$$

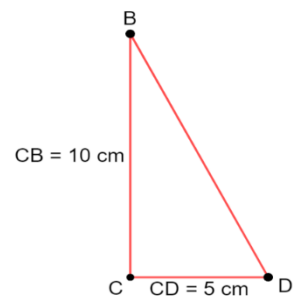
$$a^2 = 36 + 64$$

$$a^2 = 100$$

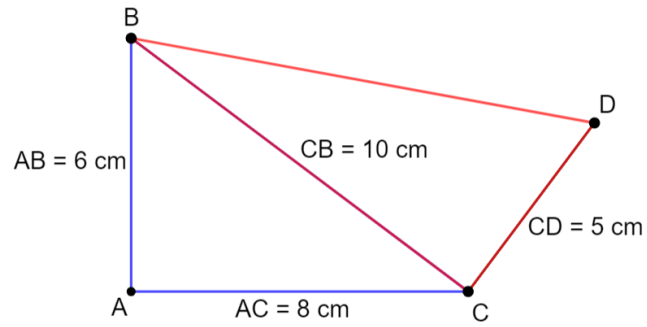
$$\sqrt{a^2} = \sqrt{100}$$

$$a = \sqrt{10^2}$$

$$a = 10$$



PROCESO DE SOLUCIÓN

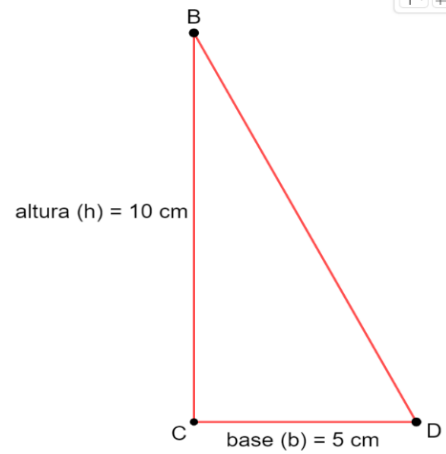


$$A_{\Delta BCD} = \frac{b \cdot h}{2}$$

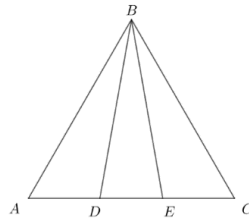
$$A_{\Delta BCD} = \frac{5 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}}{2}$$

$$A_{\Delta BCD} = \frac{50 \text{ cm}^2}{2}$$

$$A_{\Delta BCD} = 25 \text{ cm}^2$$

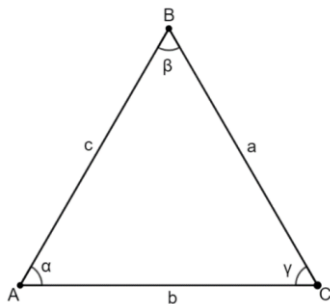


Reactivo 2. En el triángulo equilátero ABC , los segmentos \overline{BD} y \overline{BE} dividen al ángulo $\sphericalangle ABC$ en tres iguales. ¿Cuánto miden los ángulos $\sphericalangle BCA$ y $\sphericalangle BED$?



RECURSOS

$\triangle ABC$ es equilátero, por lo que se tienen 3 lados y ángulos iguales, de acuerdo con lo anterior tenemos que:



$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$

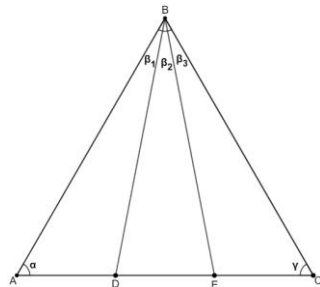
$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA$$

$$\sphericalangle CAB = \alpha = 60^\circ$$

$$\sphericalangle ABC = \beta = 60^\circ$$

$$\sphericalangle BCA = \gamma = 60^\circ.$$

Así también se tiene que el $\sphericalangle ABC$ está dividido en tres ángulos iguales por los segmentos \overline{BD} y \overline{BE} , entonces se tiene que



$$\sphericalangle ABC = \frac{\beta}{3}$$

$$\beta_1 = 20^\circ$$

$$\beta_2 = 20^\circ$$

$$\beta_3 = 20^\circ$$

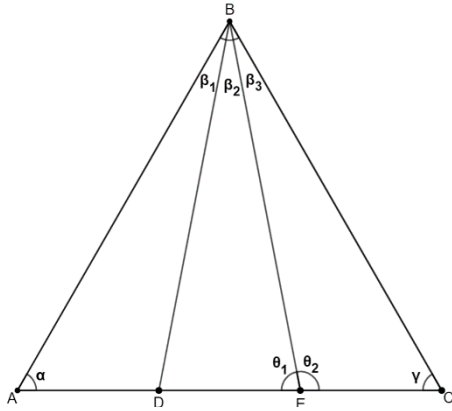
HEURÍSTICAS

De acuerdo con el planteamiento del problema se tiene que el triángulo ABC es equilátero, por lo que tiene tres lados iguales y la propiedad de los triángulos en donde la suma de sus ángulos internos es igual a 180° se tiene que $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Si los ángulos de un triángulo equilátero son iguales se tiene que $\alpha = \beta = \gamma$, de acuerdo se puede escribir la ecuación como $\gamma + \gamma + \gamma = 180^\circ$, lo cual se tiene que $3\gamma = 180^\circ$, entonces tenemos que

$$\gamma = \frac{180^\circ}{3} = 60$$

Como γ representa el ángulo $\angle BCA$, entonces $\angle BCA = 60^\circ$.

Para encontrar el ángulo $\angle BED$ se observa que el ángulo $\angle DEC$ es llano, el cual está conformado por los ángulos $\angle BED$ y $\angle BCE$, entonces se puede representar como;



En donde:

$$\angle BED = \theta$$

$$\angle BED = \angle BED + \angle BCE$$

$$\angle BED = \theta_1$$

$$\angle BCE = \theta_2$$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2$$

PROCESO DE SOLUCIÓN

Ahora, el triángulo $\triangle BCE$ se conforma por tres ángulos internos que son β_3 , γ y θ_2 , de los cuales se conoce que $\beta_3 = 20^\circ$ y $\gamma = 60^\circ$, en donde se desconoce el valor de θ_2 , por lo que haciendo uso de la propiedad de los ángulos internos de un triángulo se tiene que:

$$\beta_3 + \gamma + \theta_2 = 180^\circ, \text{ en donde}$$

$$\theta_2 = 180^\circ - \beta_3 - \gamma$$

$$\theta_2 = 180^\circ - 20^\circ - 60^\circ$$

$$\theta_2 = 180^\circ - 80^\circ$$

$$\theta_2 = 100^\circ$$

Para continuar, como el ángulo $\angle DEC$ es llano, por lo que $\angle DEC = 180^\circ$, en donde $\angle DEC$ está conformado por θ_1 y θ_2 de acuerdo con esto se tiene que $\theta_1 + \theta_2 = 180^\circ$, de lo anterior se conoce que $\theta_2 = 100^\circ$, entonces

$$\theta_1 + \theta_2 = 180^\circ$$

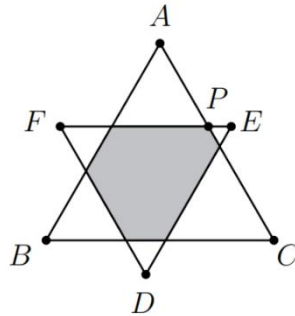
$$\theta_1 + 100^\circ = 180^\circ, \text{ en donde}$$

$$\theta_1 = 180^\circ - 100^\circ$$

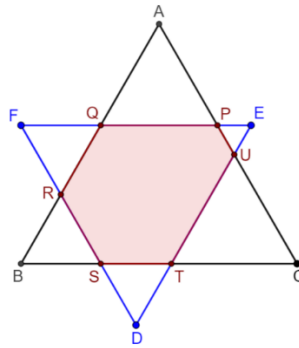
$$\theta_1 = 80^\circ$$

Por lo tanto $\angle BED = 80^\circ$.

Reactivo 3. Dos triángulos equiláteros ABC y DEF de perímetros 33 cm y 24 cm , respectivamente, están propuestos como en la figura. La intersección de los segmentos AC y FE es P y cumple que $\angle FPC = 120^\circ$. ¿Cuál es el perímetro del hexágono sombreado?



Para resolver el problema se nombran nuevos puntos de intersección los cuales podemos identificar como se muestra a continuación:



RECURSOS

De lo anterior se identifica que el perímetro del hexágono sombreado se puede calcular como:

$$P = PQ + QR + RS + ST + TU + UP$$

Como el triángulo ABC es equilátero se tiene que $AB = BC = CA$. En donde

- $AB = AQ + QR + RB$
- $BC = BS + ST + TC$
- $CA = CU + UP + PA$

Como el triángulo DEF es equilátero se tiene que $DE = EF = FD$. En donde

- $DE = DT + TU + UE$
- $EF = EP + PQ + QF$
- $FD = FR + RS + SD$

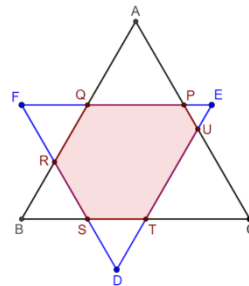
HEURÍSTICAS

De lo anterior se identifican los términos que intervienen en la expresión del perímetro para obtener que

- $PQ = EF - (EP + QF)$
- $QR = AB - (AQ + RB)$
- $RS = FD - (FR + SD)$
- $ST = BC - (BS + TC)$
- $TU = DE - (DT + UE)$
- $UP = CA - (CU + PA)$

Ahora con lo anterior y como se sabe que los triángulos $\triangle EPU$, $\triangle PAQ$, $\triangle FRQ$, $\triangle RBS$, $\triangle SDT$, y $\triangle TCU$, son equiláteros se puede obtener las siguientes equivalencias,

- $EP = PU = UE$
- $PA = AQ = QP$
- $FR = RQ = QF$
- $RB = BS = RS$
- $SD = DT = TS$
- $TC = CU = UT$



De acuerdo con lo anterior se pueden obtener las siguientes expresiones:

- $PQ = DE - (UP + QR)$
- $QR = AB - (PQ + RS)$
- $RS = DE - (QR + ST)$
- $ST = AB - (RS + TU)$
- $TU = DE - (ST + UP)$
- $UP = AB - (TU + PQ)$

Lo anterior se sustituye en la ecuación correspondiente al perímetro para obtener que:

$$P = AB - (PQ + RS) + AB - (RS + TU) + AB - (TU + PQ) + DE - (ST + UP) + DE - (UP + QR) + DE - (QR + ST)$$

$$P = 3AB - (PQ + RS) - (RS + TU) - (TU + PQ) + 3DE - (ST + UP) - (UP + QR) - (QR + ST)$$

$$P = 3AB - PQ - RS - RS - TU - TU - PQ + 3DE - ST - UP - UP - QR - QR - ST$$

$$P = 3AB - 2PQ - 2RS - 2TU + 3DE - 2ST - 2UP - 2QR$$

$$P = 3AB - (2PQ + 2QR + 2RS) + 3DE - (2ST + 2TU + 2UP)$$

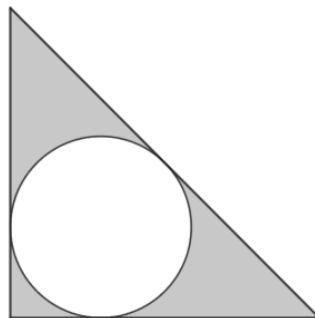
$$P = 3AB - (2AQ + 2QR + 2RB) + 3DE - (2ET + 2TU + 2UE)$$

$$P = 3AB - 2(AQ + QR + RB) + 3DE - 2(ET + TU + UE)$$

$$P = 3AB - 2AB + 3DE - 2DE$$

$$P = AB + DE$$

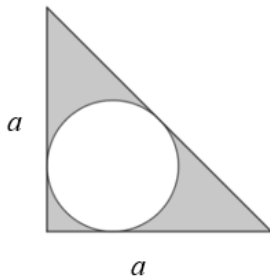
Reactivo 4. La figura muestra un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales miden 2 cm. Se inscribe una circunferencia en el triángulo. ¿Cuánto mide el área sombreada?



RECURSOS

$$\text{Conjetura: } A_{\text{Sombreada}} = A_{\text{Triangulo}} - A_{\text{Circulo}}$$

De acuerdo con la conjetura anterior se inicia con el cálculo del área del triángulo. En donde los datos que se tienen son:



a = altura

b = base

a = b

$$A_{\text{Triangulo}} = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2} = \frac{2^2}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

$$A_{\text{Circulo}} = \pi r^2$$

$$r = 2 - \sqrt{2}$$

PROCESO DE SOLUCIÓN

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 2^2 + 2^2$$

$$c^2 = 4 + 4$$

$$c^2 = 8$$

$$\sqrt{c^2} = \sqrt{8}$$

$$c = \sqrt{2 \cdot 2^2}$$

$$c = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2^2}$$

$$c = 2\sqrt{2}$$

$$A_{\text{Circulo}} = \pi(2 - \sqrt{2})^2$$

$$(2 - \sqrt{2})^2 = 2^2 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - (\sqrt{2})^2$$

$$= 4 - 4\sqrt{2} + 2$$

$$= 6 - 4\sqrt{2}$$

$$A_{\text{Circulo}} = (6 - 4\sqrt{2})\pi$$

$$A_{\text{sombreada}} = 2 - (6 - 4\sqrt{2})\pi$$