Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Caracterización de los principios de selección casi Menger y débilmente Menger en hiperespacios

Tesis que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Froylan Gonzalez Gomez

bajo la dirección de

Dr. Ricardo Cruz Castillo

Pachuca, Hidalgo. Mes de año.

Mineral de la Reforma, Hgo., a 01 de diciembre de 2025

Número de control: ICBI-D/3054/2025
Asunto: Autorización de impresión.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

Con Título Quinto, Capítulo II, Capítulo V, Artículo 51 Fracción IX del Estatuto General de nuestra Institución, por este medio, le comunico que el Jurado asignado al egresado de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas **Froylan Gonzalez Gomez,** quien presenta el trabajo de titulación **"Caracterización de los principios de selección casi Menger y débilmente Menger en hiperespacios",** ha decidido, después de revisar fundamento en lo dispuesto en el Título Tercero, Capítulo I, Artículo 18 Fracción IV; dicho trabajo en la reunión de sinodales, **autorizar la impresión del mismo**, una vez realizadas las correcciones acordadas.

A continuación, firman de conformidad los integrantes del Jurado:

Presidente: Dr. Federico Menéndez Conde Lara

Secretario: Dr. Jorge Viveros Rogel

Vocal: Dr. Ricardo Cruz Castillo

Suplente: Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz

Sin otro particular por el momento, reciba un cordial saludo.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
ICBI
DIRECCIÓN

Mtro. Gabriel Vergara Rodríguez
Director del ICBI

GVR/YCC

Resumen

En este trabajo de tesis, se tiene como objetivo caracterizar los principios de selección *casi Menger* y *débilmente Menger* en hiperespacios dotados con la topología *hit-and-miss*. Para ello, se presentan las pruebas detalladas de las caracterizaciones de las versiones débiles del principio de selección Menger enunciadas en [7], y además, se propone, para cada versión débil, una caracterización adicional con demostraciones detalladas, para la cual se define un nuevo principio de selección.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Ricardo Cruz Castillo, director de esta tesis, por su tiempo y paciencia al dirigir y supervisar este trabajo, su conocimiento y apoyo ha sido una fuente invaluable de inspiración y ánimo para mi.

Agradezco al jurado encargado de revisar este trabajo: el Dr. Federico Menéndez-Conde Lara, el Dr. Jorge Viveros Rogel y el Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz, sus valiosas observaciones fueron indispensables para mejorar la presentación final.

Agradezco de forma especial a mi mamá y mi papá, por su esfuerzo, comprensión y confianza en cada paso de este proceso, su apoyo y compañía siempre me impulsaron a continuar.

Agradezco a mi hermano, por ser mi compañero de vida y siempre estar para mí.

Índice general

Introducción

La *teoría de hiperespacios* es una rama de la topología general que tiene sus orígenes a principios del siglo XX con los trabajos de Felix Hausdorff [11] (1868-1942) y Leopold Vietoris [39] (1891-2002), ver [4]. Dado un espacio topológico X, denotamos con $CL(X)$ a la familia de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de dicho espacio[1]. El conjunto $CL(X)$, equipado con una topología, es conocido como *hiperespacio* de X.

Desde 1942, cuando J.L. Kelley publicó su disertación doctoral [21], la teoría de hiperespacios se convirtió en una herramienta importante para obtener información de la estructura de un espacio topológico X a través del estudio de las propiedades de sus hiperespacios. A partir de entonces, se han estudiado numerosas relaciones entre las propiedades del espacio X y sus hiperespacios. Un compendio de investigaciones recientes en la teoría de hiperespacios se puede consultar en [4], así como en [18], [25] y [28].

Por otro lado, de acuerdo a Kǒcinac (ver [23]), el comienzo de la investigación sobre propiedades de cobertura (*covering properties* en inglés) de espacios topológicos definidas en términos de diagonalización, y hoy en día conocidas como *principios de selección* se remonta a los papers de Hurewicz ([15] y [14]), Menger [26] y Rothberger [33]. Kǒcinac señala que el trabajo de estos autores constituye lo que se considera la *era clásica* de los principios de selección, mientras que la *era moderna* comienza, como lo comenta Tsaban [38], con los trabajos de Scheepers [34] y [19], quien estandarizó la notación y propuso esquemas generales para la definición de diversos principios de selección.

El estudio de los principios de selección unifica nociones y estudios originados en teoría de la dimensión (trabajada por Menger y Hurewicz), teoría de la medida (trabajada por Borel), propiedades de convergencia (trabajadas por (Császár–Laczkovicz), y espacios de funciones (trabajados por Gerlits–Nagy y Arhangel'skiĭ), ver [37]. Una de las lineas de investigación que ha surgido de estos estudios son los principios de selección de Rothberger y Menger, así como diversas versiones débiles, ver [24].

La teoría de hiperespacios y el estudio de los principios de selección son

[1]Es necesario aclarar que dado un espacio topológico, algunos autores (como J. L. Kelley en su disertación doctoral [21]) denotan a la familia de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de X como 2^X, y otros (como Z. Li en [24]) la denotan como $CL(X)$, mientras que reservan el uso del símbolo 2^X para denotar a la familia de todos los subconjuntos cerrados de X (incluyendo el conjunto vacío $\emptyset$). En este trabajo, usaremos la notación de Li.

ramas activas de la topología general que además de tener valor por si mismas, tienen diversas aplicaciones en otras ramas y disciplinas, como se puede ver en la colección "Recent progress in general topology I, II y III" de los simposios de topología de Praga (ver [17], [16] y [10]), en los que aparecen listadas y ofrecen un panorama de las mismas, así como algunos resultados importantes.

Estas dos ramas tienen relaciones que han sido desarrolladas por varios autores. Por ejemplo, en [8] los autores definieron las llamadas π-*redes* (π-*networks* en inglés) con el propósito de caracterizar espacios topológicos cuyo hiperespacio, dotado con la topología superior de *Fell*, satisfacen la propiedad de Rothberger. Otro ejemplo se encuentra en [24], en el que se definieron un nuevo tipo de redes, las π_V-*redes* y las π_F-*redes* (π_V-*networks* y π_F-*networks* en inglés), a raíz de que se buscaba un nuevo tipo de redes de un espacio X tales que $CL(X)$, dotado con la topología de Fell o la topología de Vietoris, tuviera la propiedad de Rothberger.

Más adelante, para caracterizar los principios de selección *casi Rothberger* (*almost Rothberger*), *débilmente Rothberger* (*weakly Rothberger*), *casi Menger* (*almost Menger*) y *débilmente Menger* (*weakly Menger*) en hiperespacios con la topología *hit-and-miss*, en [7] se introducen las nociones de $\pi_\Delta(\Lambda)$-*redes* ($\pi_\Delta(\Lambda)$-*networks*) que generalizan a las π_V-*redes* y las π_F-*redes* propuestas por Li. En dicho paper, para cada una de las versiones débiles del principio de Selección Rothberger, se enuncia y se demuestra una caracterización, y para cada una de las versiones débiles del principio de Selección Menger, se enuncia una caracterización, sin demostración.

En este trabajo de tesis, se tiene como objetivo caracterizar los principios de selección *casi Menger* y *débilmente Menger* en hiperespacios dotados con la topología *hit-and-miss*. Para ello, se presentan las pruebas detalladas de las caracterizaciones de las versiones débiles del principio de selección Menger enunciadas en [7], y además, se propone, para cada versión débil, una caracterización adicional con demostraciones detalladas, para la cual se define un nuevo principio de selección.

La estructura de este trabajo es la siguiente: en el capítulo 1 se exponen los preliminares teóricos necesarios para poder abordar el trabajo; en el capítulo 2 se presenta la teoría de hiperespacios y de principios de selección; en el capítulo 3 se presentan los resultados y las demostraciones originales de este trabajo, y en las conclusiones se da un panorama general de los resultados y su importancia.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan las nociones de teoría de conjuntos, topología, principios de selección e hiperespacios que se requieren para poder leer el presente trabajo. Para teoría de conjuntos y topología, la mayor parte del material es comunmente cubierto en cursos introductorios a dichas disciplinas; para este trabajo, la notación, las definiciones y los resultados que se utilizan son los presentados en [12], y en [13]; en cuanto a principios de selección e hiperespacios, que son temas no habitualmente cubiertos en cursos introductorios por su auge y desarrollo relativamente reciente, las referencias son [8], [24] y [7]; aún así, con lo expuesto en este capítulo se espera que una persona con conocimientos básicos en Topología pueda leer este trabajo.

1.1. Teoría de conjuntos

En este trabajo, usaremos la Teoría Axiomática de Zermelo-Fraenkel de Conjuntos. Recordemos (ver [12]) que esta teoría es fundacional para prácticamente todas las ramas de las Matemáticas, pues formaliza sus conceptos, evita paradojas y permite la definición rigurosa y la manipulación de sus estructuras.

Como se mencionó anteriormente en este capítulo, usaremos la notación, la terminología y algunos resultados de [12]. Sin embargo, en este capítulo incluiremos aquellos que son más importantes para presentar y demostrar los resultados principales.

Definición 1.1.1 (Conjunto potencia)**.** *Sea X un conjunto. Al conjunto de todos los subconjuntos de X (incluyendo $\emptyset$ y X) lo denotaremos por $\mathcal{P}(X)$ y lo llamaremos el conjunto potencia de X.*

Definición 1.1.2 (Complemento de A en X y complemento de A en B)**.** *Sean X un conjunto y $A, B \subseteq X$. Denotamos*

$$X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}.$$

A este conjunto lo llamaremos el complemento de A en X. Denotamos

$$B \setminus A = \{x \in B : x \notin A\}.$$

A este conjunto lo llamaremos el complemento de A en B.

Definición 1.1.3. *Sean X un conjunto y κ un cardinal. Denotamos con:*

- $[E]^{\leq\kappa}$ *a la colección de todos los subconjuntos de E con cardinalidad $\leq \kappa$.*
- $[E]^{<\kappa}$ *a la colección de todos los subconjuntos de E con cardinalidad $< \kappa$.*
- $[E]^{\kappa}$ *a la colección de todos los subconjuntos de E con cardinalidad κ.*

Los siguientes tres teoremas se utilizarán más adelante, tanto en los preliminares como en los resultados principales. El teorema 1.1.1 es un resultado conocido del Álgebra de Conjuntos y se puede consultar en [12], página 34. Para los teoremas 1.1.2 y 1.1.3, que hacen afirmaciones muy específicas, se presenta la demostración.

Teorema 1.1.1. *Sean I y J familias de índices. Sean $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ y $\{B_\beta\}_{\beta\in J}$ familias indizadas de conjuntos. Entonces*

$$\left[\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right] \cap \left[\bigcup_{\beta\in J} B_\beta\right] = \bigcup \{A_\alpha \cap B_\beta : (\alpha,\beta) \in I \times J\}.$$

Teorema 1.1.2. *Sea X un conjunto y $A, B, V \subseteq X$. Entonces*

1) $(X \setminus A) \cap V \neq \emptyset \Leftrightarrow V \setminus A \neq \emptyset$, *y*

2) $(X \setminus A) \subseteq (X \setminus B) \Leftrightarrow B \subseteq A$.

Demostración. Para demostrar 1), bastará notar que $(X\setminus A) \cap V = V \setminus A$, en efecto:

$$\begin{aligned} x \in (X \setminus A) \cap V &\Leftrightarrow x \in (X \setminus A) \text{ y } x \in V \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ y } x \in V \\ &\Leftrightarrow x \in V \text{ y } x \notin A \\ &\Leftrightarrow x \in \{x \in V : x \notin A\} \\ &\Leftrightarrow x \in V \setminus A. \end{aligned}$$

Para demostrar 2), primero supongamos que $(X \setminus A) \subseteq (X \setminus B)$. Sea $x \in B$. Por contradicción, supongamos que $x \notin A$. Entonces, $x \in (X \setminus A)$, y por hipótesis, se seguiría que $x \in (X \setminus B)$, o en otras palabras, $x \in B$ y $x \notin B$, lo cual es una contradicción. Concluimos que $x \in A$ y con ello que $B \subseteq A$ como se quería. Para demostrar la otra dirección se sigue el mismo razonamiento.

□

Teorema 1.1.3. *Sean X un conjunto, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ y $K, U, U_1, \ldots, U_m$ subconjuntos de X. Entonces:*

1) $(X \setminus U) \cap K = \emptyset \Leftrightarrow K \subseteq U$

2) $((X \setminus U) \cap U_i \neq \emptyset, 1 \leq i \leq m) \Leftrightarrow \exists F \in [X]^{<\omega}(F \cap U = \emptyset, F \cap U_i \neq \emptyset, 1 \leq i \leq m)$.

Demostración. Para demostrar 1), primero supongamos que $(X \setminus U) \cap K = \emptyset$. Sea $x \in K$. Procedamos por contradicción, para ello, supongamos que $x \notin U$. Entonces $x \in (X \setminus U)$. De esto, junto con el hecho de que $x \in K$, se seguiría que $(X \setminus U) \cap K \neq \emptyset$, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto, se concluye que $x \in U$ como se quería. Ahora, para probar la otra dirección, supongamos que $K \subseteq U$. Procedamos por contradicción, para ello, supongamos que $(X \setminus U) \cap K \neq \emptyset$. Sea x un elemento en dicha intersección. Entonces $x \in K$ y $x \notin U$, de lo cual se sigue que $K \not\subseteq U$, contradiciendo la hipótesis. Se concluye que $(X \setminus U) \cap K = \emptyset$ como se quería.

Para demostrar 2), primero supongamos que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, se tiene que $(X \setminus U) \cap U_i \neq \emptyset$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, tomemos un $x_i \in (X \setminus U) \cap U_i$. Sea $F = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Por definición de F, se tiene que $F \in [X]^{<\omega}$ y que $F \subseteq (X \setminus U)$, de esto último se sigue que $F \cap U = \emptyset$; también por definición de F se tiene que para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $F \cap U_i \neq \emptyset$, con lo que queda demostrada la primera implicación. Para demostrar la segunda implicación, supongamos que existe $F \in [X]^{<\omega}$ tal que para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $F \cap U = \emptyset$ y $F \cap U_i \neq \emptyset$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, tomemos un $x_i \in F \cap U_i$. Notemos que cada x_i cumple que $x_i \in (X \setminus U)$ y $x_i \in U_i$, de modo que para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ se cumple que $(X \setminus U) \cap U_i \neq \emptyset$ como se quería. □

1.2. Topología

La Topología[1] es una rama de las Matemáticas que se concentra en estudiar las propiedades de un espacio que se preservan por deformaciones continuas; es decir, deformaciones que preservan de algún modo alguna noción de cercanía de puntos que están próximos entre sí. Intuitivamente se puede imaginar que tales transformaciones implican alargar, doblar, torcer, etcétera. No lo son aquellas deformaciones que introducen cortes, ver [13].

De acuerdo a Kalajdzievski [20], el origen histórico de la topología es difuso, puesto que algunos de los objetos matemáticos con los que trabaja han sido estudiados desde siglos antes de que se consolidara como una rama de las Matemáticas. Históricamente, la topología evolucionó del análisis. En sus primeras etapas, se le conocía como "Analysis Situs" (análisis proposicional), que fue el título del paper seminal de Henri Poincaré, publicado en 1895. Posteriormente, en 1906, Maurice Fréchet introdujo espacios abstractos con estructuras topológicas, y más adelante, el término *topology* (topología) fue acuñado por

[1]La palabra "topología" proviene del vocablo griego "$\tau\acute{o}\pi o\varsigma$", que significa "posición" o "localización", ver [6].

Felix Hausdorff en 1914. La teoría axiomática moderna de la Topología fue introducida en 1922 por Kazimierz Kuratowski, ver [20].

En esta sección se expondrán las definiciones y resultados topológicos básicos que se usarán a lo largo del trabajo. Comenzamos con los conceptos fundamentales: topología, espacio topológico, conjunto abierto y vecindad (abierta), sobre los cuales se edifica el resto de la teoría en Topología.

Definición 1.2.1. *Sea X un conjunto y $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$. Diremos que τ es una topología para X si*

1. $\emptyset, X \in \tau$,
2. $\mathcal{F} \subseteq \tau \Rightarrow \cup\mathcal{F} \in \tau$,
3. $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$.

Al par ordenado (X, τ) lo llamaremos espacio topológico; además, si $A \in \tau$ diremos que A es un conjunto abierto.

Definición 1.2.2. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Denotaremos por $\mathcal{V}_x$ a la colección de todos los abiertos en X que contienen al punto x; además, si $U \in \mathcal{V}_x$, diremos que U es una vecindad abierta de x en X.*

En Topología, los conjuntos abiertos y su contraparte, los conjuntos cerrados, son indispensables pues se usan para definir la esencial noción de continuidad, así como también se usan para definir las propiedades topológicas (compacidad, conexidad, etcétera). A continuación se presentan la definición y algunas propiedades elementales de los conjuntos cerrados.

Definición 1.2.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Un conjunto $F \subseteq X$ es cerrado si y sólo si $X \setminus F \in \tau$.*

Teorema 1.2.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces se cumplen:*

1) *$\emptyset, X$ son cerrados.*
2) *Si $\mathcal{F}$ es una familia arbitraria de conjuntos cerrados, entonces $\cap\mathcal{F}$ es cerrado.*
3) *Si A y B son cerrados entonces $A \cup B$ es cerrado.*

Demostración. Para probar 1), bastará con ver que $\emptyset = X \setminus X$ y que $X = X \setminus \emptyset$. Para probar 2), notemos que, por las Leyes de DeMorgan para familias arbitrarias de conjuntos (ver [12]), se sigue que el complemento de una intersección arbitraria de cerrados se puede expresar como una unión arbitraria de conjuntos abiertos. Para probar 3), notemos que por las Leyes de DeMorgan, se tiene que $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$; en otras palabras, el complemento de $A \cup B$ se puede expresar como una intersección finita de abiertos, por lo tanto $A \cup B$ es cerrado. $\square$

Las cubiertas abiertas son usadas para analizar propiedades topológicas. Son de especial interés en este trabajo, pues se utilizan para definir los principios de selección a caracterizar. Por otro lado, las bases de los espacios topológicos permiten trabajar con ellos de manera más sencilla, ya que en general los básicos resultan ser algebraicamente más fáciles de operar, y en la práctica surgen de manera natural teoremas del estilo "El espacio (X, τ) satisface la propiedad P si y solo si la propiedad P se satisface en términos de básicos", por ejemplo, los importantes lemas 2.2.1 y 2.2.2 . A continuación se exponen sus definiciones.

Definición 1.2.4 (Cubierta abierta). *Sea (X, τ) un espacio topológico. Una cubierta abierta de X es una colección de abiertos cuya unión es igual a X. Denotaremos a la colección de cubiertas abiertas de un espacio topológico (X, τ) con $\mathscr{O}_{(X,\tau)}$, o cuando no haya lugar a ambigüedad, simplemente con $\mathscr{O}$.*

Definición 1.2.5. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{B} \subseteq \tau$. Decimos que $\mathcal{B}$ es una base para τ si y solo si para todo $A \in \tau$ y para todo $x \in A$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq A$. A los elementos de la base se les conoce como básicos.*

Definición 1.2.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Una subbase para la topología τ es una familia $\mathcal{S} \subseteq \tau$, tal que la familia de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ forma una base para τ.*

El siguiente teorema nos permitirá trabajar en subespacios de $CL(X)$. Se puede consultar en [13].

A continuación enunciamos las definiciones de interior, cerradura y frontera, que son nociones que nos permiten trabajar con conjuntos abiertos y cerrados de forma más cómoda.

Definición 1.2.7. *Sea (X, τ) un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $x \in X$.*

1. *x es punto de interior de A si y solo si existe $U \in \mathcal{V}_x$ tal que $U \subseteq A$.*

2. *El interior de A es $\mathring{A} = int_\tau(A) = \{x \in X : \exists U \in \mathcal{V}_x(U \subseteq A)\}$.*

Definición 1.2.8. *Sea (X, τ) un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $x \in X$.*

1. *x es punto de adherencia o de clausura de A si y solo si para toda $U \in \mathcal{V}_x$ se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$.*

2. *La cerradura o clausura de A es $\overline{A} = cl_\tau(A) = \{x \in X : \forall U \in \mathcal{V}_x(U \cap A \neq \emptyset)\}$.*

Teorema 1.2.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $Y \subseteq X$. Entonces $\tau_Y = \{A \in \mathcal{P}(Y) : \text{existe } B \in \tau \text{ tal que } A = B \cap Y\}$ es una topología para Y.*

Definición 1.2.9. *Si τ_Y es como en el teorema 1.2.2, diremos que (Y, τ_Y) es un subespacio topológico de (X, τ) y que τ_Y es la topología heredada en Y.*

A continuación presentamos las definiciones de compacidad, σ-compacidad y espacio de Lindelöf. La σ-compacidad es una versión débil de la compacidad, y los espacios de Lindelöf son una versión débil de la σ-compacidad (todo espacio compacto es σ-compacto, y todo espacio σ-compacto es de Lindelöf). La noción de compacidad es una de las más importantes no solo dentro de la Topología sino fuera de ella [13]. Veremos más adelante relaciones entre estas propiedades topológicas y los principios de selección que se van a caracterizar.

Definición 1.2.10. *Un espacio topológico (X, τ) es compacto si toda cubierta abierta de X contiene una subcubierta finita de X. Un subconjunto de X es compacto si con la topología del subespacio es un espacio compacto.*

Definición 1.2.11. *Un espacio topológico (X, τ) es σ-compacto si se puede expresar como una unión numerable de subespacios compactos.*

Definición 1.2.12. *Decimos que un espacio topológico es Lindelöf si toda cubierta abierta posee una subcubierta numerable.*

Teorema 1.2.3. *Todo espacio compacto es σ-compacto y todo espacio σ-compacto es un espacio de Lindelöf.*

Demostración. Sea (X, τ) un espacio topológico compacto. Entonces, si definimos para todo $n \in \mathbb{N}$, $X_n = X$, se sigue que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X$ es una unión numerable de subconjuntos compactos que es igual a X, por lo tanto, el espacio es σ-compacto.

Ahora, supongamos que (X, τ) es un espacio σ-compacto. Entonces existe una sucesión de subconjuntos compactos $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. En particular, $\mathcal{U}$ cubre a todo X_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos una subcubierta finita $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}$ que cubra a X_n. Entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ es una unión numerable de conjuntos finitos, por lo que es un conjunto numerable de conjuntos abiertos que cubren a X, por lo tanto el espacio es de Lindelöf como se quería. $\square$

Los axiomas para definir un espacio topológico son mínimos y eso permite tener una gran variedad de espacios topológicos, sin embargo, esto también puede generar "patologías" como la topología indiscreta, en la cual cualesquiera dos puntos son cercanos, situación que no es conveniente a la hora de "medir" convergencia, ver [13]. Los axiomas de separación son grupos de axiomas adicionales que permiten tener espacios más especializados para desarrollar ciertas tareas. A continuación enunciamos aquellas necesarias para presentar los resultados. Una lista más completa se puede consultar en [13].

Definición 1.2.13. *Decimos que un espacio topológico (X, τ) es T_0 si dados cualesquiera dos puntos en X, al menos uno de dichos puntos tiene una vecindad abierta que no contiene al otro.*

Definición 1.2.14. *Decimos que un espacio topológico (X, τ) es T_1 si dados cualesquiera dos puntos en X, ambos puntos tienen vecindades abiertas que no contienen al otro punto.*

Definición 1.2.15. *Decimos que un espacio topológico* (X, τ) *es* T_2 *o Hausdorff si dados cualesquiera dos puntos* x, y *en* X, *existen dos conjuntos abiertos disjuntos* U *y* V *tales que* $x \in U$ *y* $y \in V$.

Se asume que todos los espacios con los que se trabajarán son Hausdorff. En el resto de esta sección se presentan notaciones y resultados topológicos que serán ampliamente usados en los resultados principales.

Definición 1.2.16. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico.*

- $CL(X)$ *denotará a la familia de todos los subconjuntos cerrados no vacíos.*
- $\mathbb{K}(X)$ *denotará a la familia de todos los subconjuntos compactos no vacíos.*
- $\mathbb{F}(X)$ *denotará a la familia de todos los subconjuntos finitos no vacíos.*
- $\mathbb{CS}(X)$ *denotará a la familia de todas las imágenes de las sucesiones convergentes, junto con su punto de convergencia, en* X.

Como se verá más adelante, los resultados principales tienen corolarios que caracterizan principios de selección en topologías sobre $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ y $\mathbb{CS}(X)$.

Más adelante se definirá la topología *hit-and-miss*, la cual para ser definida hace uso de la siguiente notación.

Definición 1.2.17. *Sean* X *un conjunto,* $U \subseteq X$ *y* $\mathcal{U} \subseteq P(X)$. *Definimos:*

- $U^- = \{A \in CL(X) : A \cap U \neq \emptyset\}$.
- $U^+ = \{A \in CL(X) : A \subseteq U\}$.
- $\mathcal{U}^c = \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$ *(no confundir con* $\{V \in \mathcal{P}(X) : V \notin \mathcal{U}\}$*).*

Podemos pensar en estas colecciones de forma intuitiva como sigue: U^- es la colección de todos los cerrados que le "pegan" (*hit*) al conjunto U, mientras que U^+ es la colección de todos los cerrados que están contenidos en U, de modo que $(X \setminus U)^+$ es la colección de todos los cerrados que "evitan" (*miss*) al conjunto U.

Teorema 1.2.4. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Sea* $n \in \mathbb{N}$ *y* $B_1, \ldots, B_n$ *subconjuntos de* X. *Entonces:*

$$\bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus B_i)^+ = \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i \right)^+ .$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^{n}(X\setminus B_i)^+ &= \bigcap_{i=1}^{n}\{A\in CL(X): A\subseteq (X\setminus B_i)\}\\ &= \{A\in CL(X): A\subseteq \bigcap_{i=1}^{n}(X\setminus B_i)\}\\ &= \left\{A\in CL(X): A\subseteq \left(X\setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)\right\}\\ &= \left(X\setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)^+.\end{aligned}\tag{1.1}$$

□

Teorema 1.2.5. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Sea Δ un subconjunto de X que es cerrado bajo uniones finitas y que contiene a los conjuntos singulares. Sean $B_1,\ldots,B_n\in\Delta\cup\{\emptyset\}$. Entonces existe $B\in\Delta\cup\{\emptyset\}$ tal que*

$$\bigcap_{i=1}^{n}(X\setminus B_i)^+ = (X\setminus B)^+.$$

Demostración. Sea $B=\bigcup_{i=1}^{n}B_i$. Como Δ es cerrado bajo uniones finitas, entonces también lo es $\Delta\cup\{\emptyset\}$, por lo tanto tenemos que $B\in\Delta\cup\{\emptyset\}$. Ahora:

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^{n}(X\setminus B_i)^+ &= \bigcap_{i=1}^{n}\{A\in CL(X): A\subseteq (X\setminus B_i)\}\\ &= \{A\in CL(X): A\subseteq \bigcap_{i=1}^{n}(X\setminus B_i)\}\\ &= \{A\in CL(X): A\subseteq X\setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i\}\\ &= \{A\in CL(X): A\subseteq X\setminus B\}\\ &= (X\setminus B)^+.\end{aligned}\tag{1.2}$$

□

Lema 1.2.1. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Sean $x\in X$, $A\subseteq X$ y $B\in\tau$ tales que $x\in cl_X(A)$ y $x\in B$. Entonces $A\cap B\neq\emptyset$.*

Demostración. Como $B\in\tau$, entonces $B=int_\tau(B)$. Como $x\in B$, entonces $x\in int_\tau(B)$. Por tanto, existe $V\in\overset{\circ}{\mathscr{V}}(x)$ tal que $V\subseteq B$. Como $x\in cl_X(A)$, entonces $A\cap V\setminus\{x\}\neq\emptyset$. Como $V\subseteq B$, se sigue $A\cap B\setminus\{x\}\neq\emptyset$ y así $A\cap B\neq\emptyset$. □

Teorema 1.2.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\{A_i : 1 \leq i \leq n\}$ una colección finita de subconjuntos de X. Entonces*

$$cl_X\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} cl_X(A_i).$$

Teorema 1.2.7. *Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia indizada de conjuntos. Entonces $\bigcup_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha}$.*

Demostración. Notemos que para todo $i \in I$ se tiene $A_i \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$, de modo que $\overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha}$. De lo cual se sigue que $\bigcup_{\alpha\in I}\overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha}$ como se quería. □

La otra contención en el Teorema 1.2.7 no es cierta en general.

Lema 1.2.2. *Sea X un conjunto. Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ una familia indizada tal que para todo $i \in I$, $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{P}(X)$. Entonces:*

$$\bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i^c = \left(\bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i\right)^c.$$

Demostración.

$$\bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i^c = \bigcup_{i\in I}\{(X\backslash U) : U \in \mathcal{U}_i\} = \{(X\backslash U) : U \in \bigcup_{i\in I}(\mathcal{U}_i)\} = \left(\bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i\right)^c.$$

□

Lema 1.2.3. *Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Entonces:*

1. $\mathcal{U}^c \subseteq \mathcal{V}^c \Leftrightarrow \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$.
2. $\mathcal{U}^c = \mathcal{V}^c \Leftrightarrow \mathcal{U} = \mathcal{V}$.

Demostración. Para demostrar (1): Si $\mathcal{U}^c \subseteq \mathcal{V}^c$, entonces tenemos la siguiente cadena de implicaciones:

$$U \in \mathcal{U} \Rightarrow X \setminus U \in \mathcal{U}^c \Rightarrow X \setminus U \in \mathcal{V}^c \Rightarrow U \in \mathcal{V}$$

Por otro lado, si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, entonces tenemos la siguiente cadena de implicaciones:

$$U \in \mathcal{U}^c \Rightarrow X \setminus U \in \mathcal{U} \Rightarrow X \setminus U \in \mathcal{V} \Rightarrow U \in \mathcal{V}^c$$

Con lo que queda demostrado (1). (2) es consecuencia directa de (1). □

Capítulo 2

Marco teórico

En este capítulo se abordará la teoría de principios de selección e hiperespacios necesaria para abordar este trabajo. Al ser dos ramas relativamente recientes de la topología, se requiere un capítulo completo dedicada a ellas para poder abordarlas adecuadamente, tanto por el aspecto teórico como contextual.

2.1. Teoría de hiperespacios

En 1914, Félix Hausdorff publicó su emblemático libro "Grundzuge der Mengenlehre", el cuál fue uno de los primeros libros en teoría de conjuntos y temas afines. En este libro, Hausdorff introdujo una métrica en la colección de conjuntos cerrados de un espacio métrico compacto, proporcionando así una de las primeras formas de dotar a una famila de conjuntos con una topología. Con la notación y la terminología modernas, podemos definirla como sigue:

Teorema 2.1.1. *Sea (E, d) un espacio métrico y sean A y B subconjuntos no vacíos de X. Entonces*

$$\mathcal{H}(A, B) = \text{máx}\{\sup\{d(a, B) : a \in A\}, \sup\{d(b, A) : b \in B\}\}$$

es una métrica en $\mathcal{P}(E)$. A esta métrica se le conoce como métrica de Hausdorff.

A partir de la publicación de su libro, varios investigadores se vieron interesados por la métrica de Hausdorff pues en diversos fenómenos de la naturaleza se tiene la necesidad de tener una noción formal en cuento a la distancia o cercanía entre subconjuntos de algún conjunto dado, no basta con considerar la distancia entre dos puntos; en efecto, la relevancia de este tema que hizo que investigadores de renombre como L. Vietoris [39], K. Borsuk, S. Ulam [3] y E. Michael [27] (ver [1]), además de J.L. Kelley ([21]), se unieran a Hausdorff en el estudio de espacios cuyos elementos son conjuntos, tales espacios son conocidos como hiperespacios. Se puede pensar entonces en la métrica del teorema 2.1.1 como la idea que dió nacimiento a lo que más adelante sería refinado y unificado para consolidar la rama de la topología hoy conocida como la teoría de hiperespacios, la cual hoy en día es muy estudiada (ver [4], [18], [25] y [28]).

En particular, como señala [1], dado un continuo (un espacio métrico no vacío, compacto y conexo, ver [29]) se pueden definir varios hiperespacios del tal continuo y son considerados con la métrica de Hausdorff. Cabe señalar que esta línea de investigación es meramente abstracta, donde la métrica de Hausdorff es fundamental, sin embargo, otras áreas de las matemáticas encontraron en la métrica de Hausdorff una excelente alternativa para adaptar y buscar soluciones a algunos de sus problemas. Por ejemplo, Barragán [1] enuncia algunas aplicaciones en distintas áreas dentro de las matemáticas: ecuaciones diferenciales, optimización, teoría de operadores, estadística y teoría fractal; y más aún, también menciona aplicaciones en otras ciencias como computación, robótica y medicina.

A lo largo de este trabajo, dado un espacio topológico (X, τ), Δ denotará un subconjunto de $CL(X)$ cerrado bajo uniones finitas y que contiene a los conjuntos singulares (aquellos que contienen un solo elemento).

Dado un espacio topológico (X, τ), se pueden definir topologías en el conjunto $CL(X)$. El conjunto $CL(X)$ dotado con alguna topología, recibe el nombre de *hiperespacio*. Desde Hausdorff han surgido diversas topologías en hiperespacios, siendo dos de ellas la topología de Vietoris (introducida por Vietoris en [39]) y la topología de Fell (introducida por Fell en [9]), que son de las más populares (ver [24]), y siendo otra de ellas la topología *hit-and-miss*, que generaliza a las primeras dos (ver [7], todas serán definidas más adelante).

Sobre las primeras dos topologías mencionadas, Beer [2] comenta que aunque la topología de Vietoris resulta más familiar a los topólogos, la topología de Fell ha probado ser superior en términos de aplicaciones, particularmente aplicaciones a la optimización, el análisis convexo, la economía matemática, la teoría de la probabilidad y la teoría de las capacidades.

Puede surgir la pregunta: ¿en qué contextos conviene usar más una topología que la otra? La respuesta será acorde a la situación aplicada a la que se esté enfrentando, sin embargo, del comentario de Beer se puede ver que la topología de Fell ha encontrado más aplicaciones.

Por otro lado, la topología *hit-and-miss* fue introducida por Poppe en [31] y [32], la cual es una generalización natural de las dos topologías presentadas anteriormente (ver [7]). Una razón para estudiar esta topología es que los resultados que se obtengan de su estudio podrán ser aplicados directamente a las topologías que generaliza, siendo la topología de Fell y la topología de Vietoris dos de ellas. Después de este preámbulo, procedemos a definirlas formalmente, junto con notación y definiciones auxiliares de ser necesario, así mismo, mostraremos algunas de las relaciones que guardan entre sí.

Teorema 2.1.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $\Delta \subseteq CL(X)$ una subfamilia de $CL(X)$ cerrada bajo uniones finitas y que contiene a los conjuntos singulares de X. Entonces el conjunto*

$$\mathscr{B}_\Delta = \big\{ \big(\cap_{i=1}^m V_i^-\big) \cap (X \setminus B)^+ : B \in \Delta \cup \{\emptyset\}, \\ V_i \in \tau \text{ para } i \in \{1, \ldots, m\} \big\} \tag{2.1}$$

es una base para alguna topología. Nos referiremos a la topología que genera $\mathscr{B}_\Delta$ como topología hit-and-miss respecto a Δ o, cuando no haya lugar a ambigüedad, simplemente como topología hit-and-miss, y la denotaremos por τ_Δ. Notemos entonces que $(CL(X), \tau_\Delta)$ es un espacio topológico.

Demostración. Demostraremos que $\bigcup \mathscr{B}_\Delta = CL(X)$ y que para cualesquiera $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Delta$ y para todo $X \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, existe $\mathcal{C} \in \mathscr{B}_\Delta$ tal que $X \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.
Veamos que $\bigcup \mathscr{B}_\Delta = CL(X)$. Esto se sigue de los siguientes dos hechos:

- Por definición, $\bigcup \mathscr{B}_\Delta \subseteq CL(X)$, y
- $CL(X) = X^- \cap (X \setminus \emptyset)^+ \subseteq \bigcup \mathscr{B}_\Delta$.

Ahora, sean $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathscr{B}_\Delta$ tales que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Entonces $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (\cap_{i=1}^m V_i^-) \cap (X \setminus B_1)^+ \\ \mathcal{B} &= (\cap_{j=1}^n U_j^-) \cap (X \setminus B_2)^+ \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sea $X \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Sea $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Notemos que, por el teorema 1.2.4:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= (\cap_{i=1}^m V_i^-) \cap (\cap_{j=1}^n U_j^-) \cap (X \setminus B_1)^+ \cap (X \setminus B_2)^+ \\ &= (\cap_{i=1}^m V_i^-) \cap (\cap_{j=1}^n U_j^-) \cap (X \setminus (B_1 \cup B_2))^+ \end{aligned} \tag{2.3}$$

Y como Δ es cerrado bajo uniones finitas, se sigue que $B_1 \cup B_2 \in \Delta \cup \{\emptyset\}$. Por lo tanto $C \in \mathscr{B}_\Delta$. También tenemos que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subseteq C$.En este caso, de hecho, se da la igualdad.
Con lo anterior, concluimos que $\mathscr{B}_\Delta$ es base para alguna topología como se quería. $\square$

Al básico $\left(\cap_{i=1}^m V_i^-\right) \cap (X \setminus B)^+$ lo denotaremos como $(V_1, \ldots, V_m)_B$.

A lo largo de este trabajo, consideraremos la topología $(CL(X), \tau_\Delta)$ heredada en una subfamilia $\Lambda \subseteq CL(X)$ cerrada bajo uniones finitas y que contiene a los conjuntos singulares. En vez de denotar a la topología correspondiente con un símbolo que indique que es una topología heredada, por ejemplo, $(\Lambda, \tau_\Delta(\Lambda))$, denotaremos a este subespacio simplemente con (Λ, τ_Δ).

Notemos que en el espacio (Λ, τ_Δ) los básicos son de la forma

$$\Lambda \cap (V_1, \ldots, V_m)_B.$$

Cuando trabajemos en (Λ, τ_Δ), en vez de denotar a los básicos del subespacio con alguna notación que indique que son básicos en el subespacio, como $(V_1, \ldots, V_m)_B^\Lambda$, los denotaremos simplemente como $(V_1, \ldots, V_m)_B$.

Una forma intuitiva de entender a la topología *hit-and-miss* es la siguiente: dado un espacio topológico (X, τ), contemplamos $CL(X)$ la colección de todos los cerrados no vacíos de dicho espacio. Note que un subconjunto $\mathcal{A}$ de $CL(X)$ es un básico si está conformado por todos los elementos de $CL(X)$ que intersectan o le "pegan" (*hit*) a los conjuntos abiertos $V_1, \ldots, V_n$, y no intersectan o "evitan" (*miss*) al conjunto B tomado en $\Delta \cup \{\emptyset\}$.

Ahora veamos las dos topologías que generaliza:

Teorema 2.1.3. *Sean (X,τ) un espacio topológico, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1,\dots,U_n$, subconjuntos de X. Sea*

$$\langle U_1,\dots,U_n\rangle = \left\{ A \in CL(X) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i, A\cap U_i \neq \emptyset \text{ para } i \in \{1,\dots,m\} \right\}.$$

Entonces el conjunto

$$\mathscr{B}_{\tau_V} = \{\langle U_1,\dots,U_n\rangle : U_1,\dots,U_n \in \tau \text{ para } i\in\{1,\dots,n\}, n\in\mathbb{N}\}$$

es base para alguna topología. A lo largo de este trabajo nos referiremos a esta topología como topología de Vietoris y la denotaremos por τ_V.

Demostración. Primero, notemos que $CL(X) = \langle X\rangle \in \mathscr{B}_{\tau_V}$ por lo que $\bigcup \mathscr{B}_{\tau_V} = CL(X)$.
Ahora, tomemos dos elementos $\mathcal{U},\mathcal{V}$ de $\mathscr{B}_{\tau_V}$ tales que $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\neq\emptyset$. Entonces son de la forma $\mathcal{U} = \langle U_1,\dots,U_n\rangle$, $\mathcal{V} = \langle V_1,\dots,V_m\rangle$ con $U_1,\dots,U_n,V_1,\dots,V_m$ abiertos en X y $m,n\in\mathbb{N}$. Sea $B\in\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$. Notemos que

1) $B \subseteq \cup_{i=1}^{n} U_i$;
2) $B \subseteq \cup_{j=1}^{m} V_j$;
3) $B\cap U_i \neq \emptyset$ para todo $i\in\{1,\dots,n\}$; y
4) $B\cap V_j\neq\emptyset$ para todo $j\in\{1,\dots,m\}$.

Notemos que:

- De 1), 2) y el teorema 1.1.1 se sigue que $B \subseteq (\cup_{i=1}^{n} U_i)\cap\left(\cup_{j=1}^{m} V_j\right) = \bigcup\{U_i\cap V_j : (i,j)\in I\times J\}$, en particular, $B\subseteq \bigcup_{\{i,j:B\cap(U_i\cap V_j)\neq\emptyset\}}(U_i\cap V_j)$.
- De 2) y 3) se sigue que para todo U_i existe al menos un V_j tal que $B\cap(U_i\cap V_j)\neq\emptyset$.
- De 1) y 4) se sigue que para todo V_j existe al menos un U_i tal que $B\cap(U_i\cap V_j)\neq\emptyset$.

Sea $\mathcal{W} = \{U_i\cap V_j : B\cap(U_i\cap V_j)\neq\emptyset\}$. Notemos que $B\in\langle\mathcal{W}\rangle$. Ahora sea $A\in\langle\mathcal{W}\rangle$. Entonces A cumple:

- $A\cap(U_i\cap V_j)\neq\emptyset$, para todos i,j con $B\cap(U_i\cap V_j)\neq\emptyset$
- $A\in\bigcup_{\{i,j:B\cap(U_i\cap V_j)\neq\emptyset\}}(U_i\cap V_j)\subseteq\bigcup\{U_i\cap V_j:(i,j)\in I\times J\} = (\cup_{i=1}^{n}U_i)\cap(\cup_{j=1}^{m}V_j)$

Y por lo tanto:

- $A\cap U_i\neq\emptyset$
- $A\cap V_j\neq\emptyset$

- $A \subseteq \cup_{i=1}^{n} U_i$
- $A \subseteq \cup_{j=1}^{m} V_j$

Por lo tanto $A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.
En resumen, para $B \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ encontramos $\langle \mathcal{W} \rangle \in \mathscr{B}_{\tau_V}$ tal que $B \in \langle \mathcal{W} \rangle \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. □

Podemos pensar en estos básicos de forma intuitiva como sigue: $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ es la colección de cerrados en X que están contenidos en la unión de los conjuntos $U_1, \ldots, U_n$ y que al mismo tiempo intersectan a cada uno de ellos.

Veamos ahora cómo es que la topología *hit-and-miss* generaliza a la topología de Vietoris.

Teorema 2.1.4. *Si* $\Delta = CL(X)$, *entonces* $\tau_\Delta = \tau_V$.

Demostración. Bastará con demostrar que si $\Delta = CL(X)$, entonces $\mathcal{B}_{\tau_V} = \mathcal{B}_{\tau_\Delta}$. Para ver que $\mathcal{B}_{\tau_V} \subseteq \mathcal{B}_{\tau_\Delta}$, notemos que si $U_1, \ldots, U_n$ son abiertos y $B \in CL(X)$, entonces

$$\begin{aligned} (U_1, \ldots, U_n)_B^+ &= \{A \in CL(X) : A \subseteq B^c, A \cap U_i \neq \emptyset\} \\ &= \{A \in CL(X) : A \subseteq B^c, A \cap (U_i \cap B^c) \neq \emptyset\} \\ &= \{A \in CL(X) : A \subseteq B^c, A \cap (U_i \cap B^c) \neq \emptyset, A \cap B^c \neq \emptyset\} \\ &= \langle U_1 \cap B^c, \ldots, U_m \cap B^c, B^c \rangle \end{aligned} \tag{2.4}$$

Donde la última igualdad se sigue de $B^c = (\cup_{i=1}^{n} (U_i \cap B^c)) \cup B^c$.
Ahora, para ver que $\mathcal{B}_{\tau_\Delta} \subseteq \mathcal{B}_{\tau_V}$, notemos que si $U_1, \ldots, U_n$ son abiertos y $B = (\cup_{i=1}^{n} U_i)^c$, entonces

$$\begin{aligned} \langle U_1, \ldots, U_n \rangle &= \{A \in CL(X) : A \subseteq \cup_{i=1}^{n} U_i, A \cap U_i \neq \emptyset\} \\ &= \{A \in CL(X) : A \subseteq B^c, A \cap U_i \neq \emptyset\} \\ &= (U_1, \ldots, U_n)_B^+. \end{aligned} \tag{2.5}$$

□

Revisemos ahora cómo se define la topología de Fell.

Teorema 2.1.5. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Entonces el conjunto*

$$\begin{aligned} \big\{ \big(\cap_{i=1}^{m} V_i^- \big) \cap (X \setminus B)^+ : B \in \mathbb{K} \cup \{\emptyset\}, \\ V_i \in \tau \text{ para } i \in \{1, \ldots, m\} \big\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

es una base para alguna topología. Nos referiremos a la topología que genera este conjunto como la topología de Fell, y la denotaremos por τ_F.

La demostración de que el conjunto anterior es una base es similar a la demostración del teorema 2.1.2. El siguiente teorema demuestra que la topología *hit-and-miss* generaliza a la topología de Fell.

Teorema 2.1.6. *Si* $\Delta = \mathbb{K}(X)$, *entonces* $\tau_\Delta = \tau_F$.

Demostración. Se sigue directamente de las definiciones de τ_Δ y τ_F. □

2.2. Principios de selección

En 1924, Karl Menger publicó su paper “Einige Überdeckungssätze der Punktmengenlehre” [26], en el cuál intentó describir la σ-compacidad en términos de cubiertas abiertas (ver [40]), para ello, introdujo la siguiente propiedad, hoy en día conocia como propiedad de bases de Menger:

Definición 2.2.1. *Un espacio métrico (E, d) tiene la propiedad de bases de Menger si para cada base $\mathcal{B}$ de X existe una sucesión $(B_n : n \in \mathbb{N})$ en $\mathcal{B}$ tal que $\lim_{n\to\infty} diam_d(B_n) = 0$, y $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta de X.*

Más adelante, Hurewicz demostró en [15] que un espacio métrico (E, d) tiene la propiedad de bases de Menger si y solo si satisface las condiciones de la definición 2.2.5.

Estos trabajos, de acuerdo a Kŏcinac [23] fueron la era clásica y el inicio de lo que más adelante se conocería como principios de selección, por lo que se puede pensar en la definición 2.2.1 como la idea que dio surgimiento a este campo de estudio.

Más adelante, motivado por el trabajo de Menger y Hurewicz, Scheepers ([34] y [19]) comenzó, según Tsaban [38], con la era moderna, estandarizando la notación y proponiendo esquemas generales para la definición de diversos principios de selección.

Los principios de selección son una familia de principios combinatorios usados en topología para describir y comparar propiedades relacionadas a cubrir un espacio topológico con una familia de subconjuntos construida de formas específicas. Scheepers dio inicio a una serie de papers dedicada a su estudio con [34]. Como puede verse en dicha serie, los principios de selección unifican propiedades topológicas clásicas como compacidad, σ-compacidad, espacios de Lindelöf, la propiedad de Menger, etcétera; así como también unifica nociones y estudios originados en teoría de la dimensión (trabajada por Menger y Hurewicz), teoría de la medida (trabajada por Borel), propiedades de convergencia (trabajadas por (Császár–Laczkovicz), y espacios de funciones (trabajados por Gerlits–Nagy y Arhangel'skiĭ), como puede verse en [37]. Una de las lineas de investigación que ha surgido de estos estudios son los principios de selección de Rothberger y Menger, así como diversas versiones débiles, ver [24].

Así pues, las nociones de principios de selección y su posterior formalización y estudio comenzaron como una forma de entender y generalizar algunos fenómenos propios de la combinatoria y la topología, así como ciertos procesos infinitos y de elección involucrados en dichos fenómenos.

De ahora en adelante, usaremos la siguiente notación:

Notación 2.2.1. *Dado un espacio topológico (X, τ) y $\mathcal{B}$ una base del espacio. Denotamos con:*

- *$\mathcal{O}_\tau$ a la colección de todas las cubiertas abiertas del espacio, o, cuando no haya lugar a ambigüedad, simplemente con $\mathcal{O}$;*
- *$\mathcal{O}_\mathcal{B}$ a la colección de todas las cubiertas abiertas de X conformadas por básicos de $\mathcal{B}$.*

La siguiente definición se puede consultar en el trabajo de Scheepers [34], la cual fue motivada por los trabajos de Menger y Hurewicz.

Definición 2.2.2 ($\mathbf{S}_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$). *Consideremos un conjunto infinito X y dos colecciones de familias de subconjuntos de X, $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$. $\boldsymbol{S}_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$ denota el principio: Para toda sucesión $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathscr{A}$, existe una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{A}_n$ y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{B}$.*

Definición 2.2.3 ($\mathbf{S}_{fin}(\mathscr{A},\mathscr{B})$). *Consideremos un conjunto infinito X y dos colecciones de familias de subconjuntos de X, $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$. $\boldsymbol{S}_{fin}(\mathscr{A},\mathscr{B})$ denota el principio: Para toda sucesión $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathscr{A}$, existe una sucesión $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n \in [\mathcal{A}_n]^{<\omega}$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n \in \mathscr{B}$.*

Si en las definiciones 2.2.2 y 2.2.3 consideramos el caso particular $\mathscr{A} = \mathscr{B} = \mathscr{O}$, entonces los principios $\mathbf{S}_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$ y $\mathbf{S}_{fin}(\mathscr{A},\mathscr{B})$ son conocidos como *propiedad de Rothberger* y *propiedad de Menger* respectivamente:

Definición 2.2.4 (Espacio Rothberger). *Decimos que un espacio topológico (X,τ) es un espacio Rothberger si y solo si X cumple el principio $\boldsymbol{S}_1(\mathscr{O},\mathscr{O})$, es decir, si para toda sucesión $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de cubiertas abiertas de X, existe una sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in \mathcal{U}_n$ y $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una cubierta abierta de X.*

Definición 2.2.5 (Espacio Menger). *Decimos que un espacio topológico (X,τ) es un espacio Menger si y solo si X cumple el principio $\boldsymbol{S}_{fin}(\mathscr{O},\mathscr{O})$, es decir, si para toda sucesión $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de cubiertas abiertas de X, existe una sucesión $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}_n \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ es una cubierta abierta de X.*

Una forma intuitiva de pensar en estos principios de selección es la siguiente: un espacio topológico es un espacio de Menger si para toda sucesión de cubiertas abiertas, podemos tomar de cada cubierta de la sucesión una cantidad finita de abiertos de modo que la colección de todos los abiertos tomados nuevamente es una cubierta abierta para el espacio. La idea para el principio de selección de Rothberger es similar pero restringiendo a tomar solo un abierto de cada cubierta abierta de la sucesión.

A continuación, presentaremos las dos variaciones del principio de selección de *Menger* que caracterizaremos en hiperespacios con la topología *hit-and-miss*.

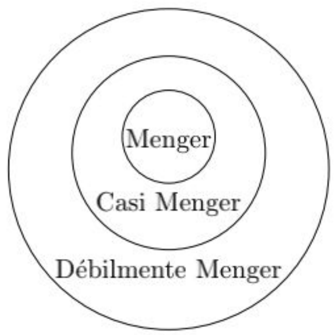
Los espacios casi Menger son una versión débil de los espacios de Menger, y fueron introducidos por Kočinac en [22].

Definición 2.2.6. *Decimos que un espacio topológico es casi Menger (en inglés almost Menger) si para cada sucesión $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de cubiertas abiertas de X, existe una sucesión $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}_n \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{cl_\tau(U) : U \in \mathcal{V}_n\}$ es una cubierta (cerrada) de X.*

Por otro lado, los espacios débilmente Menger son una versión débil de los espacios de Menger, y fueron introducidos por Pansera en [30].

Definición 2.2.7. *Decimos que un espacio topológico es débilmente Menger (en inglés weakly Menger) si para cada sucesión $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de cubiertas abiertas de X, existe una sucesión $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V} \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$ y $cl_\tau\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup \mathcal{V}_n\right) = X$.*

Tenemos que todo espacio de Menger es casi Menger, y todo espacio casi Menger es débilmente Menger, pero los recíprocos no son ciertos en general, como se puede ver en el trabajo de Song [35], quien da ejemplos de espacios casi Menger que no son Menger y de espacios débilmente Menger que no son casi Menger. De modo que se tienen ejemplos que demustran que ninguna de las 3 regiones del siguiente diagrama es vacía. Los ejemplos de Song son muy técnicos y se omiten en este trabajo.



Hemos mencionado anteriormente que la noción de compacidad es una de las más importantes no solo dentro de la Topología sino fuera de ella. Sundström [36] menciona que la compacidad es una herramienta importante para hacer matemáticas de nivel superior. Hernández Hernández [13] señala que la compacidad se puede pensar como una herramienta que permite trabajar conjuntos infinitos como si fueran finitos. Por ejemplo, si f es una función con dominio finito, es inmediato que es una función acotada; por otro lado, si f no tiene dominio finito, entonces no necesariamente es una función acotada, condición que se cumpliría si la función f es continua y tiene dominio compacto.

También hemos visto anteriormente que todo espacio compacto es σ-compacto y que todo espacio σ-compacto es un espacio de Lindelöf, por lo que estas dos últimas propiedades generalizan a la compacidad. Ahora, como se puede consultar en [5], todo espacio σ-compacto es de Menger y todo espacio de Menger es de Lindelöf, y ningún recíproco es cierto en general. De esto podemos ver que podemos pensar en los espacios Menger y sus versiones débiles como una generalización de la compacidad y como un punto intermedio entre los espacios compactos y los espacios de Lindelöf.

La siguiente pregunta es natural: ¿qué relación hay entre estas dos cadenas de implicaciones? Esta pregunta queda fuera de los objetivos de este trabajo, pero puede ser considerada en otras investigaciones.

En la práctica, suelen surgir espacios que son compactos y espacios que no lo son. Cuando los espacios son compactos, la teoría disponible respecto a la compacidad permite trabajar con estos espacios más cómodamente. Sin embargo, cuando surgen espacios que no son compactos, se puede explorar que otras propiedades similares cumple, por ejemplo, se puede investigar si el espacio en cuestión es de Menger, casi Menger o débilmente Menger, para así tener una base teórica que nos permita explorarlos a pesar de no ser compactos.

A continuación, definiremos dos familias de tal forma que podamos expresar estas dos variaciones en términos del principio de selección $\mathbf{S}_{fin}$.

Notación 2.2.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Denotamos:*

$$\mathscr{D}'_{(X,\tau)} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\tau) : X = cl_\tau(\bigcup \mathcal{A})\}.$$

Cuando no haya lugar a ambigüedad, a esta colección la denotaremos simplemente por $\mathscr{D}'$. Note que $\mathscr{D}'$ es la colección de todas las familias de abiertos cuya unión es densa en X.

Notación 2.2.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Denotamos:*

$$\mathscr{D}''_{(X,\tau)} = \{\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\tau) : \bigcup\{cl_\tau(A) : X = A \in \mathcal{A}\}\}.$$

Cuando no haya lugar a ambigüedad, a esta colección la denotaremos simplemente por $\mathscr{D}''$.

Vemos entonces, que el principio de selección *casi Menger* es el principio $\mathbf{S}_{fin}(\mathscr{O}, \mathscr{D}'')$, y que el principio de selección *débilmente Menger* es el principio $\mathbf{S}_{fin}(\mathscr{O}, \mathscr{D}')$.

A continuación, se presenta un lema que nos permitirá caracterizar los principios de selección casi Menger y débilmente Menger en hiperespacios. En Topología, son comunes los lemas del tipo "la colección de cubiertas abiertas de un espacio topológico (X, τ) cumple determinada propiedad si y solo si la colección de cubiertas abiertas conformadas por básicos de dicho espacio topológico cumple esa misma propiedad". Este tipo de lemas suele pensarse de la siguiente manera: "la colección de cubiertas abiertas de un espacio topológico (X, τ) cumple determinada propiedad si y solo si la cumple en términos de básicos".

Teorema 2.2.1 (Principio de selección *casi Menger* en términos de básicos). *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base del espacio. Entonces son equivalentes:*

1. $\boldsymbol{S}_{fin}(\mathscr{O}, \mathscr{D}'')$;

2. $\boldsymbol{S}_{fin}(\mathscr{O}_{\mathcal{B}}, \mathscr{D}'')$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que para el espacio topológico (X, τ) se cumple $\mathbf{S}_{fin}(\mathscr{O}, \mathscr{D}'')$. Sea $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cubiertas abiertas conformadas por básicos. En particular, notemos que $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathscr{O}$. Así, por hipótesis, para esta sucesión existe una sucesión $\{\mathcal{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mathcal{V}_n \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$, y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{cl_X(U) : U \in \mathcal{V}_n\}$ es una cubierta de X. Esto quiere decir que se cumple $\mathbf{S}_{fin}(\mathscr{O}_{\mathcal{B}}, \mathscr{D}'')$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que para el espacio topológico (X, τ) se cumple $\mathbf{S}_{fin}(\mathscr{O}_{\mathcal{B}}, \mathscr{D}'')$. Sea $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cubiertas abiertas. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in X$ existe $U_x^n \in \mathcal{U}_n$ tal que $x \in U_x^n$. Además, existe $B_x^n \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x^n \subseteq U_x^n$. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{U}'_n := \{B_x^n : x \in X\}$. Se sigue que $\{\mathcal{U}'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de cubiertas abiertas, cada una conformada por básicos. Aplicamos la hipótesis y tenemos que existe una sucesión $\{\mathcal{V}'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en la que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple $\mathcal{V}'_n \in [\mathcal{U}'_n]^{\omega}$ y

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{cl_X(B_x^n) : B_x^n \in \mathcal{V}'_n\}$$

es una cubierta de X. Por lo tanto

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{cl_X(U_x^n) : B_x^n \in \mathcal{V}'_n\}$$

también es cubierta de X. Ahora, definimos $\mathcal{V}_n := \{U_x^n : B_x^n \in \mathcal{V}'_n\}$. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{V}_n \in [\mathcal{U}_n]^{\omega}$ y que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{cl_X(U) : U \in \mathcal{V}_n\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{cl_X(U_x^n) : B_x^n \in \mathcal{V}'_n\}$. Así $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{cl_X(U) : U \in \mathcal{V}_n\}$ es una cubierta para X. Entonces se cumple $\mathbf{S}_{fin}(\mathscr{O}, \mathscr{D}'')$. □

Teorema 2.2.2 (Principio de selección *débilmente Menger* en términos de básicos). *Sean (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base del espacio. Entonces son equivalentes:*

1. $\mathbf{S}_{fin}(\mathscr{O}, \mathscr{D}')$;
2. $\mathbf{S}_{fin}(\mathscr{O}_{\mathcal{B}}, \mathscr{D}')$.

Demostración. Primero demostremos que $1 \Rightarrow 2$. Para ello, supongamos que para el espacio topológico (X, τ) se cumple $\mathbf{S}_{fin}(\mathscr{O}, \mathscr{D}')$. Sea $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cubiertas abiertas conformadas por básicos. En particular, notemos que $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathscr{O}$. Así, por hipótesis, para esta sucesión existe una sucesión $\{\mathcal{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mathcal{V}_n \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$, y $cl_X\left(\bigcup\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{U : U \in \mathcal{V}_n\}\right) = X$. Esto quiere decir que se cumple $\mathbf{S}_{fin}(\mathscr{O}_{\mathcal{B}}, \mathscr{D}')$.

Ahora demostremos que $2 \Rightarrow 1$. Para ello, supongamos que para el espacio topológico (X, τ) se cumple $\mathbf{S}_{fin}(\mathscr{O}_{\mathcal{B}}, \mathscr{D}')$. Sea $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cubiertas abiertas. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in X$ existe $U_x^n \in \mathcal{U}_n$ tal que $x \in U_x^n$. Además, existe $B_x^n \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x^n \subseteq U_x^n$. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{U}'_n := \{B_x^n : x \in X\}$. Se sigue que $\{\mathcal{U}'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de cubiertas abiertas, cada una conformada por básicos. Aplicamos la hipótesis y tenemos que existe una sucesión $\{\mathcal{V}'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en la que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple $\mathcal{V}'_n \in [\mathcal{U}'_n]^{\omega}$ y

$$cl_X\left(\bigcup\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{B_x^n : B_x^n \in \mathcal{V}'_n\}\right) = X.$$

Por lo tanto, también se cumple que

$$cl_X\left(\bigcup\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{U_x^n : B_x^n \in \mathcal{V}'_n\}\right) = X.$$

Ahora, definimos $\mathcal{V}_n := \{U_x^n : B_x^n \in \mathcal{V}'_n\}$. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{V}_n \in [\mathcal{U}_n]^\omega$ y que $cl_X\left(\bigcup\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{U : U \in \mathcal{V}_n\}\right) = cl_X\left(\bigcup\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{U_x^n : B_x^n \in \mathcal{V}'_n\}\right) = X$. Entonces se cumple $\mathbf{S}_{fin}(\mathscr{O}, \mathscr{D}'')$. $\square$

2.3. Principios de selección en hiperespacios

Con el fin de caracterizar los principios de selección *casi Menger* y *débilmente Menger* en hiperespacios con la topología *hit-and-miss*, introducimos los resultados y definiciones de esta sección. Las definiciones 2.3.1 y 2.3.2, así como el lema 2.3.1 son tomados de [7].

Definición 2.3.1. *Dada una familia $\Delta \subseteq CL(X)$, denotamos*

$$\begin{aligned}\zeta_\Delta = \{(B; V_1, \ldots, V_n) : & B \in \Delta \cup \{\emptyset\}, \\ & V_1, \ldots, V_n \in \tau, \\ & V_i \cap (X \setminus B) \neq \emptyset, (1 \leq i \leq n), \\ & n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

Definición 2.3.2. *Una familia $\mathcal{J} \subseteq \zeta_\Delta$ es llamada una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red (en inglés $\pi_\Delta(\Lambda)$-network) de X, si para cada $U \in \Lambda^c$, existen $(B; V_1, \ldots, V_n) \in \mathcal{J}$ y $F \in [X]^{<\omega}$ tales que*

(a) $B \subseteq U$,

(b) $F \cap U = \emptyset$ *y*

(c) para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $F \cap V_i \neq \emptyset$.

A la familia de todas las $\pi_\Delta(\Lambda)$-redes la denotaremos por $\Pi_\Delta(\Lambda)$.

Lema 2.3.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Sean*

$$\mathcal{J} = \{(B_s; V_{1,s}, \ldots, V_{m_s,s}) : s \in S\}$$

una familia de arreglos y

$$\mathscr{U} = \{(V_{1,s}, \ldots, V_{m_s,s})^+_{B_s} : (B_s; V_{1,s}, \ldots, V_{m_s,s}) \in \mathcal{J}\}.$$

Entonces, $\mathcal{J}$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X si y solo si $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta de (Λ, τ_Δ).

Demostración. Supongamos que ζ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X y sea $A \in \Lambda^c$. Entonces existe $(B; V_1, \ldots, V_m) \in \zeta$ tal que $B \subseteq (X \setminus A)$ (pues $A \subseteq (X \setminus B)$) y existe $F \in [X]^{<\omega}$ tales que $F \cap (X \setminus A) = \emptyset$ y para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $F \cap V_i \neq \emptyset$. Por lo tanto, $A \in (V_1, \ldots, V_m)_B \in \mathcal{U}$. De modo que $A \in \bigcup \mathcal{U}$. Así, la colección $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de (Λ, τ_Δ).

Para probar la otra dirección, supongamos que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de (Λ, τ_Δ). Sea $U \in \Lambda^c$. Entonces existe $(V_1, \ldots, V_m)_B \in \mathcal{U}$ tal que $(X \setminus U) \in$

$(V_1, \ldots, V_m)_B$. De esto se sigue que $B \subseteq U$. Como $(X \setminus U) \in \cap_{i=1}^m V_i^-$, podemos escoger $x_i \in (X \setminus U) \cap V_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Sea $F = \{x_i : i = 1, \ldots, m\}$. Entonces $F \in [X]^{<\omega}$ y satisface $F \cap U = \emptyset$ y $F \cap V_i \neq \emptyset$. Por lo tanto, como $(V_1, \ldots, V_m)_B \in \mathcal{U}$, tenemos que $(B; V_1, \ldots, V_m) \in \zeta$. Concluimos que ζ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X.

□

La notación 2.3.1, así como la definición 2.3.2 y el lema 2.3.1, se utilizan en cada uno de los dos teoremas de los resultados principales. Adicionalmente, cada uno de dichos teoremas utiliza definiciones y resultados particulares. Para el caso del resultado correspondiente al principio de selección *almost Menger*, se utilizan los siguientes resultados y definiciones.

Definición 2.3.3. *Una familia $\zeta \subseteq \zeta_\Delta$ es llamada una casi $\pi_\Delta(\Lambda)$-red (en inglés almost $\pi_\Delta(\Lambda)$-network) de X, si para cada $U \in \Lambda^c$, existe $(B; V_1, \ldots, V_n) \in \zeta$ tal que para cada $K \in \Delta \cup \{\emptyset\}$ y $U_1, \ldots, U_m$ conjuntos abiertos en X, con $(X \setminus U) \cap K = \emptyset$ y $(X \setminus U) \cap U_i \neq \emptyset$, para $1 \leq i \leq m$, existen $W \in \Lambda^c$ y $F \in [X]^{<\omega}$ que satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) $F \cap W = \emptyset$,

(b) $B \cup K \subseteq W$,

(c) $F \cap V_i \neq \emptyset$, *para cada* $1 \leq i \leq n$ *y*

(d) $F \cap U_j \neq \emptyset$, *para todo* $1 \leq j \leq m$.

A la familia de todas las casi-$\pi_\Delta(\Lambda)$-redes la denotaremos por $a\Pi_\Delta(\Lambda)$.

En los teoremas, se caracteriza también a los principios *almost Menger* y *weakly Menger* en el espacio base mediante Λ^c. Para ello, introducimos las siguientes definiciones.

Definición 2.3.4. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $\Lambda \subseteq CL(X)$ cerrado bajo uniones finitas y que contiene a los conjuntos singulares. Definimos para cualquier $\mathcal{A} \subseteq \Lambda^c$:*

$$\mathcal{A}^{cl} = (cl_\Lambda(\mathcal{A}^c))^c.$$

Definición 2.3.5. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Sean $\Delta, \Lambda \subseteq CL(X)$ cerrados bajo uniones finitas y que contienen a los conjuntos singulares. Definimos:*

$$\mathbb{D}''_\Delta(\Lambda) = \left\{ \mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(\tau) : \Lambda^c = \bigcup \left\{ \mathcal{A}^{cl} : \mathcal{A} \in \mathscr{A} \right\} \right\}.$$

Definición 2.3.6. $\boldsymbol{S'_{fin}}(\Pi_\Delta(\Lambda), \mathbb{D}''_\Delta(\Lambda))$ *denota el principio de selección: para cada sucesión $(\mathcal{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\Pi_\Delta(\Lambda)$, existe una sucesión $(\mathcal{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}_n \in [\mathcal{J}_n]^{<\omega}$, y $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un elemento de $\mathbb{D}''_\Delta(\Lambda)$, donde, si*

$$\mathcal{I}_n = \{(B_{n,s}; V_{n,s}^1, \ldots, V_{n,s}^i, \ldots, V_{n,s}^{k(n,s)}) : 1 \leq s \leq S(n)\}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n = &\{A \in \Lambda^c : \exists s \in \{1, \ldots, S(n)\}(\forall i \in \{1, \ldots, k(n,s)\} \\ &(V^i_{n,s} \backslash A \neq \emptyset \wedge B_{n,s} \subseteq A))\}.\end{aligned}$$

Definición 2.3.7. *Una familia $\zeta \subseteq \zeta_\Delta$ es llamada una débilmente $\pi_\Delta(\Lambda)$-red (en inglés weakly $\pi_\Delta(\Lambda)$-network) de X, si para cada $U \in \Lambda^c$ y cada $K \in \Delta \cup \{\emptyset\}$ y $U_1, \ldots, U_m$ conjuntos abiertos en X, con $(X \setminus U) \cap K = \emptyset$ y $(X \setminus U) \cap U_i \neq \emptyset$, para $1 \leq i \leq m$, existe $(B; V_1, \ldots, V_n) \in \zeta$, $W \in \Lambda^c$ y $F \in [X]^{<\omega}$ que satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) $F \cap W = \emptyset$,

(b) $B \cup K \subseteq W$,

(c) $F \cap V_i \neq \emptyset$, *para cada* $1 \leq i \leq n$ *y*

(d) $F \cap U_j \neq \emptyset$, *para todo* $1 \leq j \leq m$.

A la familia de todas las débilmente-$\pi_\Delta(\Lambda)$-redes la denotaremos por $w\Pi_\Delta(\Lambda)$.

En el apéndice A se encuentra una forma simbólica de enunciar las definiciones de *casi* $\pi_\Delta(\Lambda)$*-red* y *débilmente* $\pi_\Delta(\Lambda)$*-red*.

Definición 2.3.8. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $\Lambda \subseteq CL(X)$ cerrado bajo uniones finitas y que contiene a los conjuntos singulares. Definimos*

$$\mathbb{D}'_\Delta(\Lambda) = \left\{ \mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(\tau) : \Lambda^c = \left\{ \bigcup \mathcal{A} : \mathcal{A} \in \mathscr{A} \right\}^{cl} \right\}.$$

Definición 2.3.9. $\boldsymbol{S}'_{fin}(\Pi_\Delta(\Lambda), \mathbb{D}'_\Delta(\Lambda))$ *denota el principio de selección: para cada sucesión $(\mathcal{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\Pi_\Delta(\Lambda)$, existe una sucesión $(\mathcal{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}_n \in [\mathcal{J}_n]^{<\omega}$, y $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un elemento de $\mathbb{D}'_\Delta(\Lambda)$, donde si*

$$\mathcal{I}_n = \{(B^n_s; V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m,s}, \ldots, V^n_{l(n,s),s}) : 1 \leq s \leq S(n)\}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n = &\{A \in \Lambda^c : \exists s \in \{1, \ldots, S(n)\}(\forall i \in \{1, \ldots, k(n,s)\} \\ &(V^i_{n,s} \backslash A \neq \emptyset \wedge B_{n,s} \subseteq A))\}.\end{aligned}$$

Capítulo 3

Resultados principales

En este capítulo se exponen y desarrollan los resultados principales de este trabajo, los cuales están conformados por dos teoremas y cinco lemas. Cada uno de los lemas encierra un paso clave en las demostraciones de los dos teoremas. El primer teorema caracteriza el principio de selección casi Menger y el segundo teorema caracteriza el principio de selección débilmente Menger; en ambos casos, las caracterizaciones se dan en hiperespacios topológicos (del espacio topológico base) con la topología *hit-and-miss*.

Ambos teoremas constan de tres proposiciones equivalentes. La equivalencias de las primeras dos proposiciones para ambos teoremas se enuncian sin demostración en [7]. En este trabajo, además, se propone para cada teorema una proposición equivalente a las primeras dos, para lo cual se definieron los principios de selección 2.3.6 y 2.3.9.

3.1. Lemas

Los siguientes lemas tienen el propósito de presentar los resultados principales de este trabajo de una manera más simple y concisa. Cada lema contiene un punto clave de la demostración de los teoremas, por lo que los propios lemas forman parte de los resultados principales de este trabajo.

Lema 3.1.1. *Sea $(\mathcal{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[\zeta_\Delta]^{<\omega}$. Denotemos, para todo $n \in \mathbb{N}$:*

$$\mathcal{I}_n = \left\{ \left(B_{n,s}; V_{n,s}^1, \ldots, V_{n,s}^i, \ldots, V_{n,s}^{k(n,s)} \right) : 1 \leq s \leq S(n) \right\}$$

donde:

- *$S(n)$ es la cantidad de arreglos de $\mathcal{I}_n$;*
- *$k(n,s)$ es la cantidad de abiertos del s-ésimo arreglo de $\mathcal{I}_n$;*
- *$V_{n,s}^i$ es el i-ésimo abierto del s-ésimo arreglo de $\mathcal{I}_n$; y*
- *$B_{n,s}$ es el elemento de $\Delta \cup \{\emptyset\}$ del s-ésimo arreglo de $\mathcal{I}_n$.*

Denotemos, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n =&\{A \in \Lambda^c : \exists s \in \{1, \ldots, S(n)\}(\forall i \in \{1, \ldots, k(n,s)\}\\ &(V_{n,s}^i \backslash A \neq \emptyset \wedge B_{n,s} \subseteq A))\}.\end{aligned}$$

Entonces se cumplen las siguientes igualdades:

$$\mathcal{A}_n^c = \bigcup\{(V_{n,s}^1, \ldots, V_{n,s}^i, \ldots, V_{n,s}^{k(n,s)})_{B_{n,s}} : 1 \leq s \leq S(n)\}, \text{ y}$$

$$cl_\Lambda(\mathcal{A}_n^c) = \bigcup_{s=1}^{S(n)} cl_\Lambda\left(\left(V_{n,s}^1, \ldots, V_{n,s}^i, \ldots, V_{n,s}^{k(n,s)}\right)_{B_{n,s}}\right). \tag{3.1}$$

Demostración. Note que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n =&\{A \in \Lambda^c : \exists s \in \{1, \ldots, S(n)\}(\forall i \in \{1, \ldots, k(n,s)\}\\ &((X \setminus A) \cap V_{n,s}^i \neq \emptyset \wedge (X \setminus A) \subseteq (X \setminus B_{n,s})))\}.\end{aligned}$$

y que, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n^c =&\{(X \setminus A) \in \Lambda : \exists s \in \{1, \ldots, S(n)\}(\forall i \in \{1, \ldots, k(n,s)\}\\ &((X \setminus A) \cap V_{n,s}^i \neq \emptyset \wedge (X \setminus A) \subseteq (X \setminus B_{n,s})))\}.\end{aligned}$$

de modo que

$$\mathcal{A}_n^c = \bigcup\{(V_{n,s}^1, \ldots, V_{n,s}^i, \ldots, V_{n,s}^{k(n,s)})_{B_{n,s}} : 1 \leq s \leq S(n)\}.$$

y con ello, como la unión es finita, tenemos

$$\begin{aligned}cl_\Lambda(\mathcal{A}_n^c) &= cl_\Lambda\left(\bigcup\{(V_{1,s}^n, \ldots, V_{m,s}^n, \ldots, V_{l(n,s),s}^n)_{B_s^n} : 1 \leq s \leq S(n)\}\right)\\ &= \bigcup_{s=1}^{S(n)} cl_\Lambda\left(\left(V_{1,s}^n, \ldots, V_{m,s}^n, \ldots, V_{l(n,s),s}^n\right)_{B_s^n}\right)\end{aligned} \tag{3.2}$$

□

Lema 3.1.2. *Sea $U \in \Lambda^c$. Sea $D = X \setminus U$. Sean $B \in \Delta_0$ y $V_1, \ldots, V_m \in \tau$ tales que $(X \setminus B) \cap V_i \neq \emptyset$ para $1 \leq i \leq m$. Son equivalentes:*

(1) $(B; V_1, \ldots, V_m)$ cumple que para todos $U_1, \ldots, U_l \in \tau$ y $K \in \Delta_0$ que cumplan $D \cap K = \emptyset$ y $D \cap U_j \neq \emptyset$ para $1 \leq j \leq l$, existen $W \in \Lambda^c$ y $F \in [X]^{<\omega}$ que satisfacen las condiciones (a), (b), (c) y (d) de la definición 2.3.3.

(2) $D \in cl_\Lambda((V_1, \ldots, V_m)_B)$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $(U_1, \ldots, U_l)_K$ una vecindad abierta básica arbitraria de D. Se sigue que $D \cap K = \emptyset$ y $D \cap U_j \neq \emptyset$ para $1 \leq j \leq l$. Se sigue entonces que existen $W \in \Lambda^c$ y $F \in [X]^{<\omega}$ que satisfacen las condiciones de la definición de *almost*-$\pi_\Delta(\Lambda)$-*network* (definición 2.3.3):

(a) $F \cap W = \emptyset$;

(b) $B \cup K \subseteq W$;

(c) $F \cap V_i \neq \emptyset$ para $1 \leq i \leq m$;

(d) $F \cap U_j \neq \emptyset$ para $1 \leq j \leq l$.

Notemos que de (a) se sigue que $F \subseteq (X \backslash W)$, de esto junto con (c) se sigue que $(X \backslash W) \cap V_i \neq \emptyset$ para $1 \leq i \leq m$, y junto con (d) se sigue que $(X \backslash W) \cap U_j \neq \emptyset$ para $1 \leq j \leq l$. También notemos que de (b) se sigue que $(X \backslash W) \subseteq (X \backslash B)$ y que $(X \backslash W) \subseteq (X \backslash K)$. De lo anterior tenemos que

$$(X \backslash W) \in (U_1, \ldots, U_l)_K \cap (V_1 \ldots, V_m)_B,$$

esto es,

$$(U_1, \ldots, U_l)_K \cap (V_1 \ldots, V_m)_B \neq \emptyset,$$

o en otras palabras, dada una vecindad arbitraria de D, tenemos que esta intersecta a $(V_1 \ldots, V_m)_B$. Por lo tanto, de la definición de cerradura (definición 1.2.8) se sigue que $D \in cl_\Lambda\left((V_1 \ldots, V_m)_B\right)$ como se quería.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sean $U_1, \ldots, U_l \in \tau$ y $K \in \Delta_0$ tales que $D \cap K = \emptyset$ y $D \cap U_j \neq \emptyset$ para $1 \leq j \leq l$. Entonces $(U_1, \ldots, U_l)_K$ es una vecindad abierta básica de D. Por hipótesis, se sigue que

$$(U_1, \ldots, U_l)_K \cap (V_1 \ldots, V_m)_B \neq \emptyset.$$

Tomemos un elemento en la intersección y denotemos su complemento con W. Entonces $(X \setminus W) \cap V_i \neq \emptyset$ y $(X \setminus W) \cap U_j \neq \emptyset$ para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq l$. También $(X \setminus W) \subseteq (X \setminus B)$ y $(X \setminus W) \subseteq (X \setminus K)$. Así pues, para cada $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq l$ existen $x_i \in (X \setminus W) \cap V_i$ y $y_j \in (X \setminus W) \cap U_j$. Sea $F = \{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_l\}$. Notemos que:

(a) $F \cap W = \emptyset$, pues $F \subseteq (X \setminus W)$.

(b) $B \cup K \subseteq W$ pues $(X \setminus W) \subseteq (X \backslash B)$ y $(X \setminus W) \subseteq (X \backslash K)$.

(c) $F \cap V_i \neq \emptyset$ para $1 \leq i \leq m$.

(d) $F \cap U_j \neq \emptyset$ para $1 \leq j \leq l$.

como se quería. □

Lema 3.1.3. *Sea* $[\mathcal{I}_n]_{n \in \mathbb{N}}$ *una sucesión en* $[\zeta_\Delta]^{<\omega}$. *Denotemos:*

$$\mathcal{I}_n = \left\{ \left(B_{n,s}; V_{n,s}^1, \ldots, V_{n,s}^i, \ldots, V_{n,s}^{k(n,s)} \right) : 1 \leq s \leq S(n) \right\}$$

donde:

- *$S(n)$ es la cantidad de arreglos de $\mathcal{I}_n$;*
- *$k(n,s)$ es la cantidad de abiertos del s-ésimo arreglo de $\mathcal{I}_n$;*
- *$V_{n,s}^i$ es el i-ésimo abierto del s-ésimo arreglo de $\mathcal{I}_n$; y*
- *$B_{n,s}$ es el elemento de $\Delta \cup \{\emptyset\}$ del s-ésimo arreglo de $\mathcal{I}_n$.*

Denotemos, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n = &\{A \in \Lambda^c : \exists s \in \{1, \dots, S(n)\} (\forall i \in \{1, \dots, k(n,s)\} \\ &(V_{n,s}^i \backslash A \neq \emptyset \wedge B_{n,s} \subseteq A))\}.\end{aligned}$$

Entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_n \in a\Pi_\Delta(\Lambda)$ si y solo si $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}''$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_n \in a\Pi_\Delta(\Lambda)$. Por demostrar que $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}''$, es decir, debemos probar que $\Lambda^c = \bigcup\{\mathcal{A}_n^{cl} : n \in \mathbb{N}\}$, que es lo mismo que $\Lambda^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (cl_\Lambda(\mathcal{A}_n^c))^c$, o, equivalentemente, por el lema 1.2.2, que $\Lambda^c = \left(\bigcup cl_\Lambda(\mathcal{A}_n^c)\right)^c$, lo que a su vez es equivalente a demostrar que (gracias al lema 1.2.3): $\Lambda = \bigcup cl_\Lambda(\mathcal{A}_n^c)$. Así pues, sea $D \in \Lambda$. Sea $U = X\backslash D$. Entonces, por hipótesis, existen $N, S \in \mathbb{N}$ y

$$\left(B_{N,S}; V_{N,S}^1, \dots, V_{N,S}^i, \dots, V_{N,S}^{k(N,S)}\right) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_n$$

que satisfacen la definición 2.3.3.

Para completar la demostración, bastará verificar que

$$D \in cl_\Lambda\left(\left(V_{N,S}^1, \dots, V_{N,S}^i, \dots, V_{N,S}^{k(N,S)}\right)_{B_{N,S}}\right) \tag{3.3}$$

ya que, por el lema 3.1.1:

$$cl_\Lambda\left(\left(V_{N,S}^1, \dots, V_{N,S}^i, \dots, V_{N,S}^{k(N,S)}\right)_{B_{N,S}}\right) \subseteq cl_\Lambda(\mathcal{A}_N^c) \tag{3.4}$$

Pero esto se sigue directamente del lema 3.1.2. Por lo que concluimos que $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}''$ como se quería. La otra contención es trivial.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}''$. Por demostrar que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_n \in a\Pi_\Delta(\Lambda)$. Así pues, sea $U \in \Lambda^c$. Sea $D = X\backslash U$. Como $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}''$, se sigue, de manera similar que en la primera parte de este teorema, que

$$\Lambda = \bigcup cl_\Lambda(\mathcal{A}_n^c).$$

Por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $D \in cl_\Lambda(\mathcal{A}_N^c)$, esto a su vez implica, debido al lema 3.1.1, que existe $S \in \mathbb{N}$ tal que

$$D \in cl_\Lambda\left(\left(V_{N,S}^1, \dots, V_{N,S}^m, \dots, V_{N,S}^{l(N,S)}\right)_{B_{N,S}}\right).$$

Para completar la demostración, veamos que

$$\left(B_{N,S}; V_{N,S}^1, \ldots, V_{N,S}^i, \ldots, V_{N,S}^{k(N,S)}\right)$$

satisface la definición de $\pi_\Delta(\Lambda)-$red. Pero esto se sigue directamente del lema 3.1.2. Con ello concluimos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_n \in a\Pi_\Delta(\Lambda)$ como se quería.

□

Lema 3.1.4. *Sea $U \in \Lambda^c$. Sea $D = X \setminus U$. Sean $K \in \Delta_0$ y $U_1, \ldots, U_l$ abiertos en X tales que $D \cap K = \emptyset$ y $D \cap U_j \neq \emptyset$, para $1 \leq j \leq l$. Sean $B \in \Delta_0$ y $V_1, \ldots, V_m \in \tau$ tales que $(X \setminus B) \cap V_i \neq \emptyset$ para $1 \leq i \leq m$. Son equivalentes:*

1. *$(B; V_1, \ldots, V_m)$ cumple que existen $W \in \Lambda^c$ y $F \in [X]^{<\omega}$ que satisfacen las condiciones (a), (b), (c) y (d) de la definición 2.3.7.*
2. *$(V_1, \ldots, V_m)_B \cap (U_1, \ldots, U_l)_K \neq \emptyset$.*

Demostración. (1) ⇒ (2) Por hipótesis, existen $W \in \Lambda^c$ y $F \in [X]^{<\omega}$ tales que:

1. $F \cap W = \emptyset$;
2. $B \cup K \subseteq W$;
3. $F \cap V_i \neq \emptyset$ para $1 \leq i \leq m$;
4. $F \cap U_j \neq \emptyset$ para $1 \leq j \leq l$.

Notemos que de (1) se sigue que $F \subseteq (X \backslash W)$, de esto junto con (3) se sigue que $(X\backslash W) \cap V_i \neq \emptyset$ para $1 \leq i \leq m$, y junto con (4) se sigue que $(X\backslash W) \cap U_j \neq \emptyset$ para $1 \leq q \leq l$.

También notemos que de (2) se sigue que $(X\backslash W) \subseteq (X\backslash B_S^N)$ y que $(X\backslash W) \subseteq (X\backslash K)$.

De lo anterior tenemos que

$$(X\backslash W) \in (U_1, \ldots, U_r)_K \cap (V_1, \ldots, V_m)_B\,,$$

por lo tanto:

$$(U_1, \ldots, U_r)_K \cap (V_1, \ldots, V_m)_B \neq \emptyset$$

como se quería.

(2) ⇒ (1) Tomemos un elemento de $(U_1, \ldots, U_r)_K \cap (V_1, \ldots, V_m)_B$ y denotemos a su complemento con W. Se sigue que para cada $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq l$ existen $x_i \in (X \setminus W) \cap V_i$ y $y_j \in (X \setminus W) \cap U_j$. Sea $F = \{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_l\}$. Notemos que:

(a) $F \cap W = \emptyset$, pues $F \subseteq (X \setminus W)$.

(b) $B \cup K \subseteq W$ pues $(X \setminus W) \subseteq (X\backslash B)$ y $(X \setminus W) \subseteq (X\backslash K)$.

(c) $F \cap V_i \neq \emptyset$ para $1 \leq i \leq m$.

(d) $F \cap U_j \neq \emptyset$ para $1 \leq j \leq l$.

como se quería. $\square$

Lema 3.1.5. *Sea $[\mathcal{I}_n]_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[\zeta_\Delta]^{<\omega}$. Supongamos que*

$$\mathcal{I}_n = \left\{ \left(B_{n,s}; V_{n,s}^1, \ldots, V_{n,s}^i, \ldots, V_{n,s}^{k(n,s)} \right) : 1 \leq s \leq S(n) \right\}$$

donde:

- $S(n)$ *es la cantidad de arreglos de* $\mathcal{I}_n$*;*
- $k(n,s)$ *es la cantidad de abiertos del s-ésimo arreglo de* $\mathcal{I}_n$*;*
- $V_{n,s}^i$ *es el i-ésimo abierto del s-ésimo arreglo de* $\mathcal{I}_n$*; y*
- $B_{n,s}$ *es el elemento de* $\Delta \cup \{\emptyset\}$ *del s-ésimo arreglo de* $\mathcal{I}_n$*.*

Sea:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n = &\{A \in \Lambda^c : \exists s \in \{1, \ldots, S(n)\} (\forall i \in \{1, \ldots, k(n,s)\} \\ &(V_{n,s}^i \backslash A \neq \emptyset \wedge B_{n,s} \subseteq A))\}.\end{aligned}$$

Entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_n \in w\Pi_\Delta(\Lambda)$ *si y solo si* $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}'$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Por demostrar que $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}'_\Delta(\Lambda)$, es decir, debemos probar que $\Lambda^c = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n\right)^{cl}$. Notemos que, por la definición 2.3.4, esto es equivalente a probar: $\Lambda^c = \left(cl_\Lambda \left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n\right)^c\right)\right)^c$, que a su vez es equivalente, según los lemas 1.2.3 y 1.2.2, a: $\Lambda = cl_\Lambda \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n^c\right)$. Así pues, sea $D \in \Lambda$. Sea $U = X \setminus D$. Sea $(U_1, \ldots, U_l)_K$ una vecindad básica arbitraria de D. Se sigue que $D \cap K = \emptyset$ y $(X \backslash U) \cap U_j \neq \emptyset$ para $1 \leq j \leq l$. Entonces, por hipótesis, existe $\left(V_{N,S}^1, \ldots, V_{N,S}^i, \ldots, V_{N,S}^{k(N,S)}\right) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_n$ que satisface la definición de *weakly-$\pi_\Delta(\Lambda)$-network*. Por el lema 3.1.4, se sigue que

$$\left(V_{N,S}^1, \ldots, V_{N,S}^i, \ldots, V_{N,S}^{k(N,S)}\right) \cap (U_1, \ldots, U_l)_K \neq \emptyset,$$

y como por el lema 3.1.1 se tiene que

$$(V_{N,S}^1, \cdots, V_{N,S}^i, \cdots V_{N,S}^{k(N,S)}) \subseteq \mathcal{A}_N^c,$$

se concluye que

$$(U_1, \cdots, U_l)_K \cap \mathcal{A}_N^c \neq \emptyset$$

y con ello, que

$$(U_1, \cdots, U_l)_K \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n^c \neq \emptyset.$$

Esto es, dado un punto arbitrario en Λ y una vecindad básica arbitraria de dicho punto, tenemos que intersecta a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n^c$. Con ello concluimos que $\Lambda \subseteq cl_\Lambda \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n^c\right)$. La otra contención es inmediata. Por lo tanto, $\Lambda = cl_\Lambda \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n^c\right)$ y así $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}'$ como se quería.

(2) $\Rightarrow$ (1) Por demostrar que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_n \in w\Pi_\Delta(\Lambda)$. Sea $U \in \Lambda^c$ y denotemos $D = X \setminus U$. Tomemos $U_1, \ldots, U_l$ abiertos en X y $K \in \Delta_0$ tales que $D \cap K = \emptyset$ y $D \cap U_j \neq \emptyset$ para $1 \leq j \leq l$. Entonces $(U_1, \ldots, U_l)_K$ es una vecindad básica de D. Por hipótesis, se tiene que $\Lambda = cl_\Lambda \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n^c\right)$, esto es, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n^c$ es denso, por lo que intersecta a cualquier abierto, en particular: $(U_1, \ldots, U_l)_K \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n^c\right) \neq \emptyset$. Por el lema 3.1.1, se sigue que existen $N, S \in \mathbb{N}$ tales que

$$(U_1, \ldots, U_l)_K \cap \left(V_{N,S}^1, \ldots, V_{N,S}^i, \ldots, V_{N,S}^{k(N,S)}\right) \neq \emptyset.$$

Por el lema 3.1.4, se sigue que $\left(V_{N,S}^1, \ldots, V_{N,S}^i, \ldots, V_{N,S}^{k(N,S)}\right)$ satisface la definición de *weakly*-$\pi_\Delta(\Lambda)$-*network* (definición 2.3.7. Así, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_n \in w\Pi_\Delta(\Lambda)$ como se quería. □

3.2. Propiedad casi Menger

Recordemos que un espacio topológico es *casi Menger* (definición 2.2.6) si para cada sucesión de cubiertas abiertas del espacio, podemos extraer de cada cubierta un subconjunto finito de abiertos tales que la coleccion de las cerraduras de todos los abiertos tomados es una cubierta del espacio.

Con los lemas expuestos en la sección anterior, estamos listos para presentar el primer resultado de este trabajo:

Teorema 3.2.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico, y $\Delta, \Lambda \subseteq CL(X)$ tales que contienen a los conjuntos singulares y son cerrados bajo uniones finitas. Entonces son equivalentes:*

(1) (Λ, τ_Δ) *es casi Menger;*

(2) (X, τ) *satisface la propiedad* $\boldsymbol{S}_{fin}(\Pi_\Delta(\Lambda), a\Pi_\Delta(\Lambda))$*;*

(3) (X, τ) *satisface la propiedad* $\boldsymbol{S}'_{fin}(\Pi_\Delta(\Lambda), \mathbb{D}''_\Delta(\Lambda))$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2).

Sea $(\mathcal{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\Pi_\Delta(\Lambda)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea:

$$\mathscr{U}_n = \{(V_1, \ldots, V_m)_B : (B; V_1, \ldots, V_m) \in \mathcal{J}_n\}.$$

Por el lema 2.3.1, se sigue que $(\mathscr{U}_n : n \in \mathbb{N})$ es una sucesión de cubiertas abiertas del hiperespacio (Λ, τ_Δ). Como (Λ, τ_Δ) es *casi Menger*, existe una sucesión $(\mathscr{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{V}_n \in [\mathscr{U}_n]^{<\omega}$ y la familia $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{cl_\Lambda(\mathcal{V}) : \mathcal{V} \in$

$\mathscr{V}_n\}$ es una cubierta (no necesariamente abierta) de (Λ, τ_Δ). Llamemos $\mathscr{U}$ a esta familia. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos a $\mathscr{V}_n$ de la siguiente manera:

$$\mathscr{V}_n = \left\{ \left(V^1_{n,s}, \ldots, V^i_{n,s}, \ldots, V^{k(n,s)}_{n,s} \right)_{B_{n,s}} : 1 \leq s \leq S(n) \right\},$$

donde:

- $S(n)$ es la cantidad de básicos de $\mathscr{V}_n$;
- $k(n,s)$ es la cantidad de abiertos del s-ésimo básico de $\mathscr{V}_n$;
- $V^i_{n,s}$ es el i-ésimo abierto del s-ésimo básico de $\mathscr{V}_n$; y
- $B_{n,s}$ es el elemento de $\Delta \cup \{\emptyset\}$ del s-ésimo básico de $\mathscr{V}_n$.

Con esta notación, tenemos que la familia $\mathscr{U}$ puede escribirse de la siguiente manera:

$$\mathscr{U} = \left\{ cl_\Lambda \left(\left(V^1_{n,s}, \ldots, V^i_{n,s}, \ldots, V^{k(n,s)}_{n,s} \right)_{B_{n,s}} \right) : 1 \leq s \leq S(n), n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea:

$$\mathcal{I}_n = \left\{ \left(B_{n,s}; V^1_{n,s}, \ldots, V^i_{n,s}, \ldots, V^{k(n,s)}_{n,s} \right) : 1 \leq s \leq S(n) \right\}$$

Notemos que, por como está definido $\mathcal{I}_n$, se tiene que $\mathcal{I}_n \in [\mathcal{J}_n]^{<\omega}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\mathcal{J} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_n$. Notemos que $\mathcal{J}$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathcal{J} = \left\{ \left(B_{n,s}; V^1_{n,s}, \ldots, V^i_{n,s}, \ldots, V^{k(n,s)}_{n,s} \right) : 1 \leq s \leq S(n), n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Para completar la demostración, veamos que $\mathcal{J}$ es un elemento de $a\Pi_\Delta(\Lambda)$.

Para ello, sea $U \in \Lambda^c$. Sea $D = X \setminus U$. Como $\mathscr{U}$ es una cubierta de (Λ, τ_Δ), existen $N, S \in \mathbb{N}$ y $\left(B_{N,S}; V^1_{N,S}, \ldots, V^i_{N,S}, \ldots, V^{k(N,S)}_{N,S} \right) \in \mathcal{J}$ tal que $D \in cl_\Lambda \left(\left(V^1_{N,S}, \ldots, V^i_{N,S}, \ldots, V^{k(N,S)}_{N,S} \right)_{B_{N,S}} \right)$. Por el lema 3.1.2, se sigue que $\left(B_{N,S}; V^1_{N,S}, \ldots, V^i_{N,S}, \ldots, V^{k(N,S)}_{N,S} \right)$ cumple que para todos $U_1, \ldots, U_l \in \tau$ y $K \in \Delta_0$ que cumplan $D \cap K = \emptyset$ y $D \cap U_j \neq \emptyset$ para $1 \leq j \leq l$, existen $W \in \Lambda^c$ y $F \in [X]^{<\omega}$ que satisfacen las condiciones (a), (b), (c) y (d) de la definición 2.3.3. Por lo tanto, $\mathcal{J}$ es un elemento de $a\Pi_\Delta(\Lambda)$, es decir, es una $a\pi_\Delta(\Lambda)$-*network* como se quería.

(2) $\Rightarrow$ (1).

Sea $(\mathscr{U}_n : n \in \mathbb{N})$ una sucesión de cubiertas abiertas de (Λ, τ_Δ) y, sin pérdida de generalidad, suponga que está conformada por básicos (ver el lema 2.2.1). Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\mathcal{J}_n = \{(B; V_1, \ldots, V_m) : (V_1, \ldots, V_m)_B \in \mathscr{U}_n\}.$$

Entonces, por el lema 2.3.1, se sigue que $(\mathcal{J}_n : n \in \mathbb{N})$ es una sucesión en $\Pi_\Delta(\Lambda)$. Como (X, τ) satisface la propiedad $\mathbf{S}_{\text{fin}}(\Pi_\Delta(\Lambda), a\Pi_\Delta(\Lambda))$, tenemos que existe una sucesión $(\mathcal{I}_n : n \in \mathbb{N})$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}_n \in [\mathcal{J}_n]^{<\omega}$ y la familia $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_n$ pertenece a $a\Pi_\Delta(\Lambda)$. Llamemos $\mathcal{J}$ a esta familia. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos a $\mathcal{I}_n$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{I}_n = \left\{ \left(B_{n,s}; V_{n,s}^1, \ldots, V_{n,s}^i, \ldots, V_{n,s}^{k(n,s)} \right) : 1 \leq s \leq S(n) \right\},$$

donde:

- $S(n)$ es la cantidad de arreglos de $\mathcal{I}_n$;
- $k(n,s)$ es la cantidad de abiertos del s-ésimo arreglo de $\mathcal{I}_n$;
- $V_{n,s}^i$ es el i-ésimo abierto del s-ésimo arreglo de $\mathcal{I}_n$; y
- $B_{n,s}$ es el elemento de $\Delta \cup \{\emptyset\}$ del s-ésimo arreglo de $\mathcal{I}_n$.

De esta manera, $\mathcal{J}$ puede expresarse como:

$$\mathcal{J} = \left\{ \left(B_{n,s}; V_{n,s}^1, \ldots, V_{n,s}^i, \ldots, V_{n,s}^{k(n,s)} \right) : 1 \leq s \leq S(n), n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\mathscr{V}_n = \left\{ \left(V_{n,s}^1, \ldots, V_{n,s}^i, \ldots, V_{n,s}^{k(n,s)} \right)_{B_{n,s}} : 1 \leq s \leq S(n) \right\}.$$

Notemos que, por como está definido $\mathscr{V}_n$, se tiene que $\mathscr{V}_n \in [\mathscr{U}_n]^{<\omega}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\mathscr{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{cl_{\tau_\Delta}(\mathcal{V}) : \mathcal{V} \in \mathscr{V}_n\}$. Notemos que podemos expresar a $\mathscr{U}$ de la siguiente manera:

$$\mathscr{U} = \left\{ cl_\Lambda \left(\left(V_{n,s}^1, \ldots, V_{n,s}^i, \ldots, V_{n,s}^{k(n,s)} \right)_{B_{n,s}} \right) : 1 \leq s \leq S(n), n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Para completar la demostración, veamos que $\mathscr{U}$ es una cubierta de Λ. Así pues, tomemos $D \in \Lambda$ y sea $U = X \setminus D$. Entonces $U \in \Lambda^c$. Como $\mathcal{J}$ es una *casi-$\pi_\Delta(\Lambda)$red*, existen $N, S \in \mathbb{N}$ y $\left(B_{N,S}; V_{N,S}^1, \ldots, V_{N,S}^i, \ldots, V_{N,S}^{k(N,S)} \right) \in \mathcal{J}$ que satisface la definición 2.3.3. Entonces, por el lema 3.1.2, se sigue que $D \in cl_\Lambda \left(\left(V_{N,S}^1, \ldots, V_{N,S}^i, \ldots, V_{N,S}^{k(N,S)} \right)_{B_{N,S}} \right)$. De esto se concluye que (Λ, τ_Δ) es casi Menger como se quería.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $(\mathcal{J}_n : n \in \mathbb{N})$ una sucesión de elementos de $\Pi_\Delta(\Lambda)$. Por hipótesis, existe una sucesión $(\mathcal{I}_n : n \in \mathbb{N})$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}_n \in [\mathcal{J}_n]^{<\omega}$ y la familia $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_n$ pertenece a $a\Pi_\Delta(\Lambda)$. Llamemos $\mathcal{J}$ a esta familia. De esto se sigue que si para todo $n \in \mathbb{N}$ denotamos:

$$\mathcal{I}_n = \{(B_{n,s}; V_{n,s}^1, \ldots, V_{n,s}^i, \ldots, V_{n,s}^{k(n,s)}) : 1 \leq s \leq S(n)\},$$

entonces podemos expresar a $\mathcal{J}$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{J} = \left\{ \left(B_{n,s}; V^1_{n,s}, \ldots, V^i_{n,s}, \ldots, V^{k(n,s)}_{n,s} \right) : 1 \leq s \leq S(n), n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definamos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n =& \{A \in \Lambda^c : \exists s \in \{1, \ldots, S(n)\} (\forall i \in \{1, \ldots, k(n,s)\} \\ & (V^i_{n,s} \backslash A \neq \emptyset \wedge B_{n,s} \subseteq A))\}. \end{aligned}$$

Entonces, por el lema 3.1.3, se sigue que $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}''_\Delta(\Lambda)$. Por lo tanto, (X, τ) satisface $\mathbf{S}'_{fin}(\Pi_\Delta(\Lambda), \mathbb{D}''_\Delta(\Lambda))$ como se quería.

$(3) \Rightarrow (2)$

Sea $(\mathcal{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos en $\Pi_\Delta(\Lambda)$. Por hipótesis, existe una sucesión $(\mathcal{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}_n \in [\mathcal{J}_n]^{<\omega}$, y $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un elemento de $\mathbb{D}''_\Delta(\Lambda)$, donde, si denotamos

$$\mathcal{I}_n = \{(B^n_s; V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m,s}, \ldots, V^n_{l(n,s),s}) : 1 \leq s \leq S(n)\},$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n =& \{A \in \Lambda^c : \exists s \in \{1, \ldots, S(n)\} (\forall i \in \{1, \ldots, k(n,s)\} \\ & (V^i_{n,s} \backslash A \neq \emptyset \wedge B_{n,s} \subseteq A))\}. \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{J} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_n$. Entonces, por el lema 3.1.3, se sigue que $\mathcal{J} \in a\Pi_\Delta(\Lambda)$. Se concluye con esto que (X, τ) satisface la propiedad $\mathbf{S}_{\text{fin}}(\Pi_\Delta(\Lambda), a\Pi_\Delta(\Lambda))$ como se quería. □

En el apéndice B se encuentra un ejemplo que puede ayudar a visualizar los básicos seleccionados de cada cubierta abierta en un arreglo de matriz. Este ejemplo sirve para visualizar los básicos tomados en ambos principios de selección (casi Menger y débilmente Menger).

Del teorema anterior se tienen los siguientes corolarios:

Corolario 3.2.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si Λ es alguno de los hiperespacios $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$, o $\mathbb{CS}(X)$, entonces (Λ, τ_Δ) es casi Menger si y solo si X satisface $\boldsymbol{S}_{fin}(\Pi_\Delta(\Lambda), a\Pi_\Delta(\Lambda))$.*

Corolario 3.2.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si Λ es alguno de los hiperespacios $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$, o $\mathbb{CS}(X)$, entonces*

1. *(Λ, τ_F) es casi Menger si y solo si X satisface $\boldsymbol{S}_{fin}(\Pi_{\mathbb{K}(X)}(\Lambda), a\Pi_{\mathbb{K}(X)}(\Lambda))$.*
2. *(Λ, τ_V) es casi Menger si y solo si X satisface $\boldsymbol{S}_{fin}(\Pi_{CL(X)}(\Lambda), a\Pi_{CL(X)}(\Lambda))$.*

3.3. Propiedad débilmente Menger

Ahora es momento de abordar el principio de selección *débilmente Menger*. Para ello, recordemos que un espacio es débilmente Menger, si se cumple que para cualquier sucesión de cubiertas abiertas del espacio, podemos extraer de cada cubierta un subconjunto finito de abiertos tales que la unión de todos los abiertos tomados es un conjunto denso. A continuación, el segundo resultado de este trabajo:

Teorema 3.3.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico, entonces son equivalentes:*

1. (Λ, τ_Δ) *es débilmente Menger;*
2. (X, τ) *satisface la propiedad* $\boldsymbol{S}_{fin}(\Pi_\Delta(\Lambda), \omega\Pi_\Delta(\Lambda))$.
3. (X, τ) *satisface la propiedad* $\boldsymbol{S}'_{fin}(\Pi_\Delta(\Lambda), \mathbb{D}'_\Delta(\Lambda))$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2).

Sea $(\mathcal{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\Pi_\Delta(\Lambda)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\mathscr{U}_n = \{(V_1, \ldots, V_m)_B : (B; V_1, \ldots, V_m) \in \mathcal{J}_n\}.$$

Por el lema 2.3.1, se sigue que $(\mathscr{U}_n : n \in \mathbb{N})$ es una sucesión de cubiertas abiertas del hiperespacio (Λ, τ_Δ). Como (Λ, τ_Δ) es *débilmente Menger*, existe una sucesión $(\mathscr{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{V}_n \in [\mathscr{U}_n]^{<\omega}$ y $cl_\Lambda(\bigcup\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{V}_n) = \Lambda$. Denotemos, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathscr{V}_n = \left\{ \left(V^1_{n,s}, \ldots, V^i_{n,s}, \ldots, V^{k(n,s)}_{n,s}\right)_{B_{n,s}} : 1 \le s \le S(n) \right\}, \tag{3.5}$$

donde:

- $V^i_{n,s}$ es el i-ésimo abierto del s-ésimo básico de $\mathscr{V}_n$;
- $S(n)$ es la cantidad de básicos de $\mathscr{V}_n$;
- $k(n,s)$ es la cantidad de abiertos del s-ésimo básico de $\mathscr{V}_n$; y
- $B_{n,s}$ es el elemento de $\Delta \cup \{\emptyset\}$ del s-ésimo básico de $\mathscr{V}_n$.

Notemos que, con esta notación, tenemos que:

$$cl_\Lambda \left(\bigcup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \left(V^1_{n,s}, \ldots, V^i_{n,s}, \ldots, V^{k(n,s)}_{n,s}\right)_{B_{n,s}} : 1 \le s \le S(n) \right\} \right) = \Lambda. \tag{3.6}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea:

$$\mathcal{I}_n = \left\{ \left(B_{n,s}; V^1_{n,s}, \ldots, V^i_{n,s}, \ldots, V^{k(n,s)}_{n,s}\right) : 1 \le s \le S(n) \right\}. \tag{3.7}$$

Notemos que, por como está definido $\mathcal{I}_n$, se tiene para todo $n \in \mathbb{N}$ que $\mathcal{I}_n \in [\mathcal{J}_n]^{<\omega}$. Sea $\mathcal{J} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_n$. Notemos que podemos expresar a $\mathcal{J}$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{J} = \left\{ \left(B_{n,s}; V_{n,s}^1, \ldots, V_{n,s}^i, \ldots, V_{n,s}^{k(n,s)} \right) : 1 \leq s \leq S(n), n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{3.8}$$

Para completar la demostración, veamos que $\mathcal{J} \in a\Pi_\Delta(\Lambda)$: Sea $U \in \Lambda^c$. Sea $D = X \setminus U$. Sean $K \in \Delta_0$ y $U_1, \ldots, U_l$ abiertos en X tales que $D \cap K = \emptyset$ y $D \cap U_j \neq \emptyset$, para $1 \leq j \leq l$. Entonces $D \in (U_1, \ldots, U_l)_K$. Así, como $\bigcup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{V}_n$ es denso, tenemos que intersecta a cualquier abierto, en particular, intersecta a $(U_1, \ldots, U_l)_K$. Por lo tanto, existe $\left(B_{N,S}; V_{N,S}^1, \ldots, V_{N,S}^i, \ldots, V_{N,S}^{k(N,S)} \right) \in \mathcal{J}$ que intersecta a $(U_1, \ldots, U_l)$. Por el lema 3.1.4, se sigue que existen $W \in \Lambda^c$ y $F \in [X]^{<\omega}$ tales que se satisfacen las condiciones (a), (b), (c) y (d) de la definición 2.3.7. Por lo tanto, $\mathcal{J}$ es un elemento de $w\Pi_\Delta(\Lambda)$, y con ello, (X, τ) satisface la propiedad $\mathbf{S}_{fin}(\Pi_\Delta(\Lambda), \omega\Pi_\Delta(\Lambda))$ como se quería.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $(\mathscr{U}_n : n \in \mathbb{N})$ una sucesión de cubiertas abiertas de (Λ, τ_Δ) y, sin pérdida de generalidad, suponga que está conformada por básicos (ver el lema 2.2.2). Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{J}_n = \{(B; V_1, \ldots, V_m) : (V_1, \ldots, V_m)_B \in \mathscr{U}_n\}$. Entonces, por el lema 2.3.1, se sigue que $(\mathcal{J}_n : n \in \mathbb{N})$ es una sucesión en $\Pi_\Delta(\Lambda)$. Como (X, τ) satisface la propiedad $\mathbf{S}_{\text{fin}}(\Pi_\Delta(\Lambda), w\Pi_\Delta(\Lambda))$, tenemos que existe una sucesión $(\mathcal{I}_n : n \in \mathbb{N})$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}_n \in [\mathcal{J}_n]^{<\omega}$ y la familia $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_n$ es un elemento de $w\Pi_\Delta(\Lambda)$. Llamemos $\mathcal{J}$ a dicha familia. Denotemos, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{I}_n = \left\{ \left(B_{n,s}; V_{n,s}^1, \ldots, V_{n,s}^i, \ldots, V_{n,s}^{k(n,s)} \right) : 1 \leq s \leq S(n) \right\},$$

donde:

- $V_{n,s}^i$ es el i-ésimo abierto del s-ésimo arreglo de $\mathcal{I}_n$;
- $S(n)$ es la cantidad de arreglos de $\mathcal{I}_n$;
- $k(n, s)$ es la cantidad de abiertos del s-ésimo arreglo de $\mathcal{I}_n$;
- B_s^n es el elemento de $\Delta \cup \{\emptyset\}$ del s-ésimo arreglo de $\mathcal{I}_n$.

Notemos que, con esta notación, podemos expresar a $\mathcal{J}$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{J} = \left\{ \left(B_{n,s}; V_{n,s}^1, \ldots, V_{n,s}^i, \ldots, V_{n,s}^{k(n,s)} \right) : 1 \leq s \leq S(n), n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\mathscr{V}_n = \left\{ \left(V_{n,s}^1, \ldots, V_{n,s}^i, \ldots, V_{n,s}^{k(n,s)} \right)_{B_{n,s}} : 1 \leq s \leq S(n) \right\}.$$

Notemos que, por como está definido $\mathscr{V}_n$, se tiene que $\mathscr{V}_n \in [\mathscr{U}_n]^{<\omega}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para completar la demostración, veamos que $\Lambda = cl_\Lambda \left(\bigcup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{V}_n \right)$. Así pues, tomemos $D \in \Lambda$ y $(U_1, \ldots, U_l)_K$ una vecindad abierta básica arbitraria de D.

Se sigue que $D \cap K = \emptyset$ y $D \cap U_j \neq \emptyset$ para $1 \leq j \leq l$. Sea $U = X \backslash D$. Entonces $U \in \Lambda^c$. Como $\mathcal{J}$ es una *débilmente-*$\pi_\Delta(\Lambda)$*-red*, tenemos que existen $\left(B_{N,S}; V_{N,S}^1, \ldots, V_{N,S}^i, \ldots, V_{N,S}^{k(N,S)}\right) \in \mathcal{J}$, $W \in \Lambda^c$ y $F \in [X]^{<\omega}$ tales que se satisfacen las propiedades (a), (b), (c) y (d) de la definición 2.3.7. Por el lema 3.1.4, se sigue que $(U_1, \ldots, U_l)_K$ intersecta a $\left(V_{n,s}^1, \ldots, V_{n,s}^i, \ldots, V_{n,s}^{k(n,s)}\right)_{B_{n,s}}$, y por lo tanto, también a $\bigcup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{V}_n$.Esto es, para el punto D elegido arbitrariamente en Λ, cualquiera de sus vecindades básicas intersecta a $\bigcup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{V}_n$, por lo que este conjunto es denso, y por lo tanto $\Lambda = cl_\Lambda \left(\bigcup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{V}_n\right)$. Esto quiere decir que (Λ, τ_Δ) es débilmente Menger como se quería.

$(2) \Rightarrow (3)$

Sea $(\mathcal{J}_n : n \in \mathbb{N})$ una sucesión de elementos de $\Pi_\Delta(\Lambda)$. Por hipótesis, existe una sucesión $(\mathcal{I}_n : n \in \mathbb{N})$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}_n \in [\mathcal{J}_n]^{<\omega}$ y $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_n \in w\Pi_\Delta(\Lambda)$. Es decir, si denotamos:

$$\mathcal{I}_n = \{(B_{n,s}; V_{n,s}^1, \ldots, V_{n,s}^i, \ldots, V_{n,s}^{k(n,s)}) : 1 \leq s \leq S(n)\},$$

entonces

$$\mathcal{J} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \left(B_{n,s}; V_{n,s}^1, \ldots, V_{n,s}^i, \ldots, V_{n,s}^{k(n,s)}\right) : 1 \leq s \leq S(n) \right\}$$

es una *débilmente-*$\pi_\Delta(\Lambda)$*red*. Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n = &\{A \in \Lambda^c : \exists s \in \{1, \ldots, S(n)\} (\forall i \in \{1, \ldots, k(n,s)\} \\ &(V_{n,s}^i \backslash A \neq \emptyset \wedge B_{n,s} \subseteq A))\}. \end{aligned}$$

Por el lema 3.1.5, se concluye que $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{D}'$, como se quería.

$(3) \Rightarrow (2)$

Sea $(\mathcal{J}_n : n \in \mathbb{N})$ una sucesión en $\Pi_\Delta(\Lambda)$. Por hipótesis, existe una sucesión $(\mathcal{I}_n : n \in \mathbb{N})$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\mathcal{I}_n \in [\mathcal{J}_n]^{<\omega}$ y $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un elemento de $\mathbb{D}'_\Delta(\Lambda)$, donde, si denotamos

$$\mathcal{I}_n = \{(B_{n,s}; V_{n,s}^1, \ldots, V_{n,s}^i, \ldots, V_{n,s}^{k(n,s)}) : 1 \leq s \leq S(n)\},$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n = &\{A \in \Lambda^c : \exists s \in \{1, \ldots, S(n)\} (\forall i \in \{1, \ldots, k(n,s)\} \\ &(V_{n,s}^i \backslash A \neq \emptyset \wedge B_{n,s} \subseteq A))\}. \end{aligned}$$

Entonces, por el lema 3.1.5, se sigue que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_n \in w\Pi_\Delta(\Lambda)$, y con ello que (X, τ) satisface la propiedad $\mathbf{S}_{fin}(\Pi_\Delta(\Lambda), \omega\Pi_\Delta(\Lambda))$ como se quería. □

Del teorema anterior se tienen los siguientes corolarios:

Corolario 3.3.1. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Si* Λ *es alguno de los hiperespacios* $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$, *o* $\mathbb{CS}(X)$, *entonces* (Λ, τ_Δ) *es débilmente Menger si y solo si* X *satisface* $\boldsymbol{S}_{fin}(\Pi_\Delta(\Lambda), w\Pi_\Delta(\Lambda))$.

Corolario 3.3.2. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Si* Λ *es alguno de los hiperespacios* $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$, *o* $\mathbb{CS}(X)$, *entonces*

1. (Λ, τ_F) *es débilmente Menger si y solo si* X *satisface*

$$\boldsymbol{S}_{fin}(\Pi_{\mathbb{K}(X)}(\Lambda), w\Pi_{\mathbb{K}(X)}(\Lambda)).$$

2. (Λ, τ_V) *es débilmente Menger si y solo si* X *satisface*

$$\boldsymbol{S}_{fin}(\Pi_{CL(X)}(\Lambda), w\Pi_{CL(X)}(\Lambda)).$$

Conclusiones

Actualmente, la teoría de hiperespacios es un subcampo activo de la topología general y se posiciona como una herramienta relevante para analizar espacios topológicos. Además de tener valor por sí misma, su importancia también se encuentra en su capacidad de obtener información de un hiperespacio topológico a través de su espacio base (y viceversa), y en la posibilidad de usarla conjuntamente con otros subcampos de las Matemáticas (como los principios de selección) para lograr un estudio y comprensión más profundas de espacios topológicos complicados que surgen en la práctica.

Por otro lado, los principios de selección, que generalizan nociones de varias ramas de las matemáticas como teoría de la dimensión, teoría de la medida, propiedades de convergencia y espacios de funciones, tienen la misma vigencia que la teoría de hiperespacios; ambas propician el desarrollo de herramientas que pueden ser usadas para resolver un amplio rango de problemas, esto puede comprobarse pues son listadas en diversas publicaciones en donde se exponen avances recientes y aplicaciones de ambos campos.

Durante la realización de este trabajo, se hizo un repaso de los conceptos y definiciones de teoría de conjuntos y de los fundamentos teóricos en topología sobre los que descansan estos dos subcampos; además, se realizó una revisión de literatura para comprender y exponer los preliminares teóricos necesarios para poder adentrarse en la teoría de hiperespacios y en los principios de selección, y en particular, en las versiones débiles y los hiperespacios a los que se refieren los resultados principales.

Los resultados principales aportaron a la teoría de hiperespacios y a los principios de selección, estudiando dos versiones débiles del principio de selección Menger: la versión *casi Menger* y la versión *débilmente Menger*. Se enunció y se demostró a detalle, para cada una, un teorema que las caracteriza en hiperespacios con la topología *hit-and-miss*. Cada uno de los teoremas consiste de tres proposiciones equivalentes. Para cada uno, la equivalencia de las primeras dos proposiciones se enunció en [7] sin demostración; además, en este trabajo se propuso, para cada teorema, una proposición adicional (la tercera proposición) equivalente a las primeras dos. Estas terceras proposiciones caracterizan los principios de selección en el espacio base mediante Λ^c. En suma, este trabajo expande la teoría disponible referente a estas dos ramas de las matemáticas, y podrá ser usada para estudiar más fácilmente algunos espacios topológicos que surgen en la práctica.

Apéndice A

Definición simbólica de redes

A continuación se presenta una forma de definir simbólicamente los conceptos de *almost-*$\pi_\Delta(\Lambda)$*-network* y *weakly-*$\pi_\Delta(\Lambda)$*-network*. Para este propósito, primero definiremos a los conjuntos auxiliares G_1 y G_2:

Definición A.0.1. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Sean $\Lambda,\Delta \subseteq CL(X)$ tales que son cerrados bajo uniones finitas y contienen a los conjuntos singulares.*

$$\begin{aligned} G_1(U) = \{(K;U_1,\ldots,U_l) : K \in \Delta_0, U_1,\ldots,U_l \in \tau,\\ (X\setminus U)\cap K = \emptyset, (X\setminus U)\cap U_i \neq \emptyset, 1 \le i \le l, l \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2\left(U,(B;V_1,\ldots,V_m),(K;U_1,\ldots,U_l)\right) = \{(W,F) : {} & W \in \Lambda^c, F \in [X]^{<\omega},\\ & F\cap W = \emptyset, B\cup K \subseteq W,\\ & F\cap V_i \neq \emptyset, F\cap U_j \neq \emptyset,\\ & 1 \le i \le m, 1 \le j \le l,\\ & m,l \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Decimos que $\zeta \subseteq \zeta_\Delta$ es una *almost-*$\pi_\Delta(\Lambda)$*-network* si:

$$\forall U \in \Lambda^c(\exists\Box \in \zeta(\forall\Diamond \in G_1(U)(G_2\left(U,\Box,\Diamond\right) \neq \emptyset))),$$

donde usamos las abreviaciones $\Box = (B;V_1,\ldots,V_m)$ y $\Diamond = (U_1,\ldots,U_l)$. Decimos que $\zeta \subseteq \zeta_\Delta$ es una *weakly-*$\pi_\Delta(\Lambda)$*-network* si:

$$\forall U \in \Lambda^c(\forall\Diamond \in G_1(U)(\exists\Box \in \zeta(G_2\left(U,\Box,\Diamond\right) \neq \emptyset))),$$

donde usamos las mismas abreviaciones que en la definición anterior.

Apéndice B

Ejemplo de básicos tomados en los principios de selección

Con fines de ilustración, podemos pensar en los básicos seleccionados en el principio de selección Menger (y en sus versiones débiles) como una tabla con infinitos renglones, en la que el n-ésimo renglón se encuentran los arreglos tomados de la cubierta $\mathscr{U}_n$. A modo de ejemplo, se ilustra un caso particular con $S(1) = 4$, $S(2) = 1$, $S(3) = 3$, $S(4) = 2$

$$\begin{array}{llll}
(V_{1,1}^1, V_{1,1}^2)_{B_{1,1}}, & (V_{1,2}^1, V_{1,2}^2, V_{1,2}^3)_{B_{1,2}}, & (V_{1,3}^1)_{B_{1,3}}, & (V_{1,4}^1)_{B_{1,4}} \\
(V_{2,1}^1, V_{2,1}^2, V_{2,1}^3, V_{2,1}^4)_{B_{2,1}} & & & \\
(V_{3,1}^1)_{B_{3,1}}, & (V_{3,2}^1, V_{3,2}^2)_{B_{3,2}}, & (V_{3,3}^1, V_{3,3}^2)_{B_{3,3}} & \\
(V_{4,1}^1, V_{4,1}^2, V_{4,1}^3)_{B_{4,1}}, & (V_{4,2}^1)_{B_{4,2}} & & \\
\vdots & & &
\end{array}$$

Es importante notar que, a diferencia del principio de selección Rothberger (y sus versiones débiles) [7], en el que de cada cubierta siempre se toma un solo elemento, en el principio de selección Menger (y sus versiones débiles), no solo de cada cubierta se toma una cantidad finita, sino que la cantidad tomada de cada cubierta puede variar, como en el ejemplo apenas ilustrado.

Para ilustrar la selección de arreglos en las propiedades $\mathbf{S}_{\text{fin}}(\Pi_\Delta(\Lambda), a\Pi_\Delta(\Lambda))$ y $\mathbf{S}_{\text{fin}}(\Pi_\Delta(\Lambda), a\Pi_\Delta(\Lambda))$, podemos hacer algo similar:

$$\begin{array}{llll}
(B_{1,1}; V_{1,1}^1, V_{1,1}^2), & (B_{1,2}; V_{1,2}^1, V_{1,2}^2, V_{1,2}^3), & (B_{1,3}; V_{1,3}^1), & (B_{1,4}; V_{1,4}^1) \\
(B_{2,1}; V_{2,1}^1, V_{2,1}^2, V_{2,1}^3, V_{2,1}^4) & & & \\
(B_{3,1}; V_{3,1}^1), & (B_{3,2}; V_{3,2}^1, V_{3,2}^2), & (B_{3,3}; V_{3,3}^1, V_{3,3}^2) & \\
(B_{4,1}; V_{4,1}^1, V_{4,1}^2, V_{4,1}^3), & (B_{4,2}; V_{4,2}^1) & & \\
\vdots & & &
\end{array}$$

Bibliografía

[1] F. Barragán, A. Romero, S. Sánchez-Perales, V. M. Grijalva, Breve Introducción a la Métrica de Hausdorff, en J .J. Angoa, R. Escobedo, M. Ibarra, Topología y sus Aplicaciones 3, 1ra ed, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México, 2014.

[2] G. Beer, On the Fell topology. Set-Valued Anal 1, 69–80 (1993). https://doi.org/10.1007/BF01039292

[3] K. Borsuk, S. Ulam, On symmetric products of topological space, Bull. Amer. Math. Soc., 37 (1931), 875-882.

[4] J.J. Charatonik, Recent research in hyperspace theory, Extracta Mathematicae, 18(2)(2003), 235-262.

[5] S. Clontz, Applications of limited information strategies in Menger's game, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 58.2 (2017): 225-239.

[6] F.H. Croom, Principles of Topology, Dover Publications Inc., Estados Unidos, 2016.

[7] R. Cruz-Castillo, A. Ramírez-Páramo, J.F. Tenorio, Characterizations of weaker forms of the Rothberger and Menger properties in hyperspaces, Filomat, 37(15)(2023), 5053-5063, 10.2298/FIL2315053C.

[8] G. Di Maio, Lj.D.R. Kočinac, E. Meccariello, Selection principles and hyperspace topologies, Topology and its Applications, 153(45813)(2005), 912-923, 10.1016/j.topol.2005.01.020.

[9] Fell, J.: A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non-Hausdorff space, Proc. Amen. Math. Soc. 13 (1962), 472–476.

[10] K.P. Hart, J. van Mill, P. Simon, Recent Progress in General Topology III, 1ra ed, Atlantis Press, Paris, 2014, 978-94-6239-023-2.

[11] F. Hausdorff, Grundzuge der Mengenlehre, Leipzig, 1914.

[12] F. Hernández, Teoría de conjuntos. Una introducción, 2da ed, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2019.

[13] F. Hernández, Curso de Topología: un enfoque conjuntista, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2021.

[14] W. Hurewicz, Über Folgen stetiger Funktionen, Fundamenta Mathematicae, 9(1)(1927), 193-210, 10.4064/fm-9-1-193-210.

[15] W. Hurewicz, Über eine Verallgemeinerung des Borelschen Theorems, Mathematische Zeitschrift, 24(1)(1926), 401-421, 10.1007/BF01216792.

[16] M. Husek, J. van Mill, Recent Progress in General Topology II, 1ra ed, North Holland, 2002, 9780444552259.

[17] M. Husek, J. van Mill, Recent Progress in General Topology, 1ra ed, North Holland, 1992, 9780444896742.

[18] A. Illanes, S. B. Nadler, Jr. Hyperspaces: fundamentals and recent advances, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.

[19] W. Just, A.W. Miller, M. Scheepers, P.J. Szeptycki, The combinatorics of open covers II, Topology and its Applications, 73(3)(1996), 241-266, 10.1016/S0166-8641(96)00075-2.

[20] S. Kalajdzievski, An Illustrated Introduction to Topology and Homotopy, reprint, CRC Press, Winnipeg, Canada, 2015.

[21] J.L. Kelley, Hyperspaces of a Continuum, Transactions of the American Mathematical Society, 52(1)(1942), 22-36, 10.1090/S0002-9947-1942-0006505-8.

[22] Lj. D. R. Kočinac, Star-Menger and related spaces II, Filomat 13 (1999), 129–140

[23] Lj.D.R. Kočinac, Selected results on selection principles, in Proceedings of the 3rd Seminar on Geometry and Topology (Sh. Rezapour, ed.), July 15-17, Tabriz, Iran, (2004) 71–104.

[24] Z. Li, Selection principles of the Fell topology and the Vietoris topology, Topology and its Applications, 212(1)(2016), 90-104, 10.1016/j.topol.2016.09.008.

[25] S. Macías, Topics on Continua, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2005.

[26] K. Menger, Einige Überdeckungssätze der Punktmengenlehre, Sitzungsberichte Abt. 2a, Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik, 133(1)(1924), 421-444.

[27] E. Michael, Topologies on spaces of subsets, Transactions of the American Mathematical Society, 71(1)(1951), 152-182, 10.1090/S0002-9947-1951-0042109-4.

[28] S. B. Nadler, Jr. Hyperspaces of sets, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, New York, Basel, 1978 (reeditado por: Aportaciones Matemáticas, Serie Textos No. 33, Sociedad Matemática Mexicana, 2006).

[29] S. B. Nadler, Continuum Theory: An Introduction, 1ra ed, Taylor & Francis, Estados Unidos, 1992.

[30] B. A. Pansera, Weaker forms of the Menger property, Quaestiones Mathematicae, 35(2)(2012), 161-169.

[31] H.Poppe, Eine Bemerkung über Trennungsaxiome in Räumen von abgeschlossenen Teilmengen topologisher R äume, Arch. Math. 16 (1965), 197-199.

[32] H.Poppe, Einige Bemerkungen über den Raum der abgeschlossenen Mengen, Fund. Math. 59 (1966), 159-169. MR 33:6573

[33] F. Rothberger, Eine Verschärfung der Eigenschaft C, Fundamenta Mathematicae, 30(1)(1938), 50-55, 10.4064/fm-30-1-50-55.

[34] M. Scheepers, Combinatorics of open covers I: Ramsey theory, Topology and its Applications, 69(1)(1996), 31-62, 10.1016/0166-8641(95)00067-4.

[35] Y.K. Song, Some remarks on almost Menger spaces and weakly Menger spaces, Publications de L'Institut Mathématique, Nouvelle série, 98(112) (2015), 193–198.

[36] M. Taman-Sundström. A pedagogical history of compactness. American Mathematical Monthly, 122 (2015) 619-635.

[37] B. Tsaban, Selection principles and proofs from the Book, Canadian Mathematical Bulletin, 67(2)(2023), 478-492, 10.4153/s0008439523000905.

[38] B. Tsaban, Some new directions in infinite-combinatorial topology, en: J. Bagaria, S. Todorčvić (eds.), Set Theory, Trends in Matheatics, Birkhäuser, (2006) 225-255.

[39] L. Vietoris, Bereiche zweiter Ordnung, Monatshefte für Mathematik und Physik, 32(1)(1922), 258-280, 10.1007/BF01696886.

[40] L. Zdomsky. A semifilter approach to selection principles, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 46 (2005), No. 3, 525–539.