UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERIAS

ÁREA ACADEMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

TESIS

Identificación de errores que cometen estudiantes de nivel medio superior al operar con funciones racionales

Para obtener el grado de

Maestra en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica

PRESENTA

Nadia Iveth Rosas Pérez

Director

Dr. Jesús Israel Monroy Muñoz

Codirector

Dr. Fernando Barrera Mora

Comité tutorial

Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez
Dr. Cutberto Rodríguez Álvarez
Dr. Jesús Israel Monroy Muñoz
Dr. Fernando Barrera Mora

Mineral de la Reforma Hgo., México., diciembre2025

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
School of Engineering and Basic Sciences
Área Académica de Matemáticas y Física
Department of Physics and Mathematics

Mineral de la Reforma, Hgo., a 8 de octubre de 2025

Número de control: ICBI-AAMyF/3064/2025
Asunto: Autorización de impresión de tesis.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

El Comité Tutorial de la tesis titulada **"Identificación de errores que cometen estudiantes de nivel medio superior al operar con funciones racionales"**, realizada por la sustentante **Nadia Iveth Rosas Pérez,** con número de cuenta 477759, perteneciente a la **Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica**, una vez que ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el Artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente:

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

El Comité Tutorial

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Dr. Jesús Israel Monroy Muñoz
Director

Dr. José Félix Fernando Barrera Mora
Codirector

Dr. Cutberto Rodríguez Álvarez
Miembro del comité

Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez
Miembro del comité

JIMM/EPC

Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P. 42184
Teléfono: 52 (771) 71 720 00 Ext. 40155 y 40156
aamyf_icbi@uaeh.edu.mx, ravila@uaeh.edu.mx

"Amor, Orden y Progreso"
QS WORLD UNIVERSITY RANKINGS 2025
THE Times Higher Education
uaeh.edu.mx

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, a Dios,

por permitirme vivir hasta el día de hoy

y hacerme partícipe de su infinito amor.

A mi hija,

Aunque tu decisión llenó mi corazón de tristeza,

ese momento me llevó a mirar dentro de mí

y a encontrar nuevas fuerzas.

Sentí que parte de mi mundo se acababa,

que parte de mi corazón se rompía,

fue entonces cuando comprendí que debía hacer algo por mí.

Así nació la idea de retomar una meta que había quedado atrás.

En medio del dolor, encontré un camino.

Gracias hija, porque sin saberlo, me diste el valor para comenzar de nuevo.

A mi hijo.

Por enseñarme nuevamente a ser valiente en situaciones adversas,

porque a pesar de ellas, nunca perdiste tus ganas de vivir,

tu alegría y tu paz,

los padres debemos enseñar a los hijos cosas de la vida,

pero en esta ocasión, tú fuiste quien me enseño.

A mis directores de tesis y profesores.

Sin su valiosa guía y conocimientos compartidos, no habría alcanzado esta meta.

Agradezco profundamente su paciencia, sus consejos y todo el apoyo brindado.

Al CONAHCYT.

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (Conahcyt) por el apoyo económico otorgado, para la realización de esta maestría, a través de la beca de posgrado con número de becario 1228366.

RESUMEN

Este trabajo analiza los errores más comunes que cometen estudiantes de nivel medio superior al operar con funciones racionales, partiendo de una perspectiva centrada en el sentido numérico, definido como la capacidad flexible para comprender y operar números de manera significativa. La investigación parte de la idea de que, comprender y manejar los números de manera flexible y con significado es fundamental para el éxito en el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, se encontró que muchos estudiantes carecen de esta habilidad, lo que impacta negativamente en su desempeño al realizar operaciones, interpretar resultados y reconocer estructuras algebraicas.

La investigación emplea una metodología cualitativa aplicada a un grupo de diez estudiantes de bachillerato, y se basa principalmente en la categorización de errores propuesta por Reys, considerando aspectos como la comprensión del tamaño de los números, el uso de representaciones equivalentes, la interpretación de operaciones y el respeto por la jerarquía operativa. El análisis de dos tareas diseñadas para este estudio —una con enfoque aritmético y otra algebraico— reveló que la mayoría de los participantes cometió errores al aplicar procedimientos rutinarios o algoritmos, seguir el orden de operaciones, reconocer fracciones equivalentes y entender el significado de las expresiones algebraicas.

Finalmente, se plantea que una adecuada identificación y categorización de errores, basada en el sentido numérico, no solo permite entender las fallas de aprendizaje sino también diseñar estrategias didácticas más efectivas para mejorar la comprensión de las funciones racionales.

ABSTRACT

This paper analyzes the most common errors made by high school students when operating with rational functions, from a perspective centered on number sense, defined as the flexible ability to understand and operate numbers meaningfully. The research starts from the idea that understanding and manipulating numbers flexibly and meaningfully is fundamental for success in learning mathematics. However, it was found that many students lack this skill, which negatively impacts their performance when performing operations, interpreting results, and recognizing algebraic structures.

The research employs a qualitative methodology applied to a group of ten high school students and is mainly based on Reys' proposed error categorization, considering aspects such as understanding number magnitude, using equivalent representations, interpreting operations, and respecting the order of operations. The analysis of two tasks designed for this study—one with an arithmetic focus and the other algebraic—revealed that most participants made errors when applying routine procedures or algorithms, following the order of operations, recognizing equivalent fractions, and understanding the meaning of algebraic expressions.

Finally, it is suggested that an adequate identification and categorization of errors, based on number sense, not only allows for understanding learning failures but also for designing more effective didactic strategies to improve the comprehension of rational functions.

Contenido **Página**

CAPÍTULO 1
REVISIÓN DE LA LITERATURA Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presentan los antecedentes, el planteamiento y la justificación del problema de investigación. Para tal efecto, procedemos a realizar una revisión de la literatura con la finalidad de identificar el tipo de problemas que se han estudiado y documentado en torno a los errores que cometen los estudiantes de nivel medio superior al realizar operaciones con funciones racionales.

1.1. Antecedentes

Antes de iniciar la presentación de lo que en este trabajo se discutirá, es pertinente mencionar algunas aclaraciones sobre los términos que aquí y en otras fuentes se utilizan. Primeramente, en este trabajo seguimos los términos que se utilizan en Teoría de Números, así como en libros de texto, Zazkis y Campbell (2012).

Se acepta ampliamente que los números racionales se definen como cociente de números enteros y en analogía aritmética con esto, se definen las funciones racionales, que son cociente de polinomios en una variable. Por otro lado, algunos autores como Caballero y Juárez (2016) y Vega-Castro et al. (2011), usan el término "fracción algebraica" sin declarar explícitamente que entienden por tal término, Sin embargo, del contexto en que lleva a cabo la discusión, en realidad están hablando de funciones racionales.

Dado que en matemáticas es de importancia precisar los términos bajo discusión, consideramos pertinente consultar fuentes como Stichtenoth (1993) o Villa-Salvador (2006) para referirse al término "fracción algebraica", pues allí tales autores establecen de manera precisa lo que es una función algebraica y de esto se tiene que una fracción algebraica es un cociente de funciones algebraicas. Por otro lado, en libros de texto como en Stewart (2016, Secciones 1.3 y 1.4), se refiere a expresiones algebraicas, que son expresiones en las que se involucran las operaciones de suma y producto con números reales, extendiendo estos elementos a variables en los números reales. El énfasis en este trabajo será sobre funciones racionales, que como se dijo en líneas anteriores, es el análogo de los números racionales cuando se estudian propiedades aritméticas de los números enteros y de los polinomios en una variable. Debemos comentar que los números racionales son parte de las funciones racionales, dado que un cociente de números enteros es una función racional con numerador y denominador, polinomios constantes. Si bien, en los trabajos consultados en la revisión de la literatura se refieren a fracciones algebraicas, eso será entendido en los términos descritos anteriormente.

Numerosos estudios han evidenciado que estudiantes de nivel medio superior enfrentan diversas dificultades al operar con fracciones algebraicas, (Kieran, 1989; Caballero y Juárez 2016; (Booth, 1982 y MacGregor, 1996 y Schifter, 1999); citados en Vega-Castro et al. 2011). Caballero y Juárez (2016), han documentado que estos estudiantes suelen presentar dificultades al usar las propiedades de la suma y el producto de fracciones algebraicas, además, Hibi y Assadi 2022, agregan que, los estudiantes aplican las leyes de signos sin comprender su fundamento, simplemente trasladando una regla aprendida sin distinguir entre operaciones aditivas y multiplicativas.

La carencia de una conexión entre el álgebra y la aritmética también ha sido considerada en estudios sobre dificultades al trabajar con fracciones, Socas (2011) y González (2011), se centran en el conflicto experimentado por los estudiantes durante las operaciones con fracciones aritméticas, concluyendo que la falta de claridad en dichas operaciones se traduce erróneamente en el ámbito algebraico.

A estas investigaciones se suman diversos estudios que muestran que los alumnos poseen una pobre comprensión de las relaciones y estructuras matemáticas (Booth, 1982; MacGregor, 1996 y Schifter, 1999) citados en Vega-Castro et al. (2011), Kieran, 1989; donde muestran una falta de relación entre los conocimientos aritméticos y algebraicos de los estudiantes como una de las razones por las que se producen errores en diferentes operaciones con fracciones.

La identificación de errores de tipo aritmético, como las reportadas por Valencia (2013), Lee et al. (2020), Makhubele, (2021), Moyo y Machaba (2021); que son: el no recordar las distintas interpretaciones del concepto de fracción (parte de un todo, fracción como cociente, razón y comparación y, fracción como operador doble), tipos de fracciones como fracciones equivalentes (amplificación y simplificación), irreducibles, decimales, propias, impropias, y número mixto, entre otros, lleva a reflexionar sobre el aprendizaje del sentido numérico.

El sentido numérico es fundamental en la resolución de problemas en los niveles básicos. Según Berch (2005) y el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989), abarca desde el cálculo mental hasta la estimación y el razonamiento cuantitativo, es de gran importancia para resolver problemas matemáticos que involucran cálculos numéricos; es un elemento de gran importancia para llevar a cabo diversas representaciones en los procesos numéricos. Aporta elementos para desarrollar y ampliar el entendimiento estructurado de los números y sus operaciones.

En esta línea de ideas, (Hieber y Carpenter, 1992) argumentan que la falta de entendimiento estructurado entre los números y sus operaciones puede contribuir negativamente al desarrollo de la identificación y generalización de patrones, elementos de gran importancia en el pensamiento algebraico, que incide en la comprensión de las fracciones algebraicas.

1.2. Revisión de la literatura

En esta sección se hace una exploración de algunos resultados de investigaciones que han aportado elementos para entender la problemática en el estudio de las fracciones. Se considera importante documentar el tipo de errores que cometen los estudiantes de distintos niveles educativos al operar con fracciones. Se llevará a cabo una revisión de la literatura existente en relación con la categorización de errores en el aprendizaje de fracciones algebraicas.

El primer estudio que se presenta es el de Caballero y Juárez (2016), quienes llevaron a cabo un análisis de errores detectados en cuanto a la adición de fracciones algebraicas. Para tal efecto, aplicaron 273 pruebas a estudiantes de diferentes licenciaturas, procediendo a realizar un análisis cuantitativo y cualitativo de las respuestas que aportaron los estudiantes. Del estudio se concluyó que los estudiantes de nivel superior reflejan un conocimiento débil de cálculos que involucra la representación de números con signo.

En total, los autores señalan que se detectaron 26 tipos de errores, entre ellos está la diferente interpretación de las variables, errores en las manipulaciones algebraicas tales como aplicar parcialmente una fórmula, omitir signos, desarrollar expresiones algebraicas, errores por una incorrecta interpretación de productos notables, entre otros, sugiriendo que se debe brindar a las instituciones educativas de nivel medio superior la información necesaria para abordar las deficiencias que surgen en el aprendizaje de las fracciones algebraicas. Entre otras cosas, el estudio busca documentar el tipo de errores que cometen los estudiantes y a partir de esto desarrollar propuestas de aprendizaje para abatir la problemática identificada.

Por otra parte, Hibi y Assadi 2022, realizaron una investigación con el propósito de documentar los errores más frecuentes que cometen los estudiantes de noveno grado al simplificar expresiones algebraicas, así como el pensamiento que los acompaña. Con una perspectiva teórica centrada en las dificultades del aprendizaje y la comprensión de los conceptos algebraicos. Se trabajó con una metodología mixta, en la cual, primero se aplicó una prueba escrita a 100 estudiantes y, posteriormente, se realizó una entrevista a 5 de ellos para profundizar en sus procesos mentales. A partir del análisis se concluye que muchos estudiantes realizan las operaciones de forma mecánica sin entender la relación entre los diferentes elementos algebraicos lo que es un indicador de la necesidad de reforzar la enseñanza de conceptos.

Vega-Castro et al. (2011), realizaron un estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas, el diseño de la prueba estuvo guiado por los descriptores de sentido estructural que señalan Hoch y Dreyfus (2006), se analizó a 33 estudiantes entre 16 y 18 años de edad de 1º de Bachillerato, se elaboró una prueba escrita compuesta por cuatro tareas, cada una presentaba una fracción algebraica que los alumnos tenían que "modificar para obtener una expresión equivalente más sencilla". Además, debían explicar lo que habían hecho, obteniendo como resultado una mayor presencia de errores de manipulación cuando las expresiones incluyen términos compuestos y una mayor presencia de estrategias no exitosas, en las fracciones en las que entra en juego la propiedad distributiva/factor común o que involucran dos igualdades notables.

Hoch y Dreyfus (2006), presentan una definición refinada de sentido estructural y algunos de los resultados de un cuestionario entregado a 165 estudiantes que pertenecían a siete clases de 10º curso de matemáticas avanzadas, con el objetivo de medir el sentido de su estructura.
Destacando las siguientes observaciones:

a) Escaso uso del sentido estructural para resolver ecuaciones que involucran fracciones, diseñadas para facilitar su resolución a partir de la apreciación de estructuras dentro de la ecuación o de uno de sus miembros, y de relaciones entre ellas:

$$\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1} - x = 5 + (\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1})$$

b) Su uso se presentó más en alumnos con un curso previo en donde se trabajó la resolución de ecuaciones lineales, situación que sugiere que la enseñanza tiene efecto en el desarrollo del mismo.

c) Presencia de la variable en ambos miembros de la igualdad, así como la presencia de paréntesis como elementos facilitadores de la percepción de estructuras por parte de los estudiantes.

d) Bajo sentido estructural en tareas de factorización de expresiones algebraicas utilizando la igualdad:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

A pesar de ser una expresión conocida, los autores detectaron una falta de capacidad en su aplicación cuando los términos implicados son compuestos.

e) Finalmente, se detectó una correlación entre el sentido estructural y la habilidad para la manipulación de expresiones algebraicas, en especial en niveles bajos de ambos, observando que los estudiantes que emplean el sentido estructural cometen menos errores en la manipulación de variables.

Los resultados obtenidos demuestran que la mayoría de los estudiantes destacados en matemáticas no emplean un alto nivel de comprensión estructural al resolver ejercicios que requieren técnicas algebraicas.

Otro aspecto importante es el razonamiento de los estudiantes al trabajar con fracciones aritméticas, ya que puede proporcionar evidencia del pensamiento algebraico y su transición. Hackenberg y Lee (2011), realizaron un estudio centrado en el razonamiento distributivo con fracciones e incógnitas, con el objetivo de analizar la relación entre el razonamiento cuantitativo y el algebraico. Para ello llevaron a cabo entrevistas con 18 estudiantes de secundaria seleccionados por mostrar distintos niveles de comprensión en conceptos multiplicativos, la recolección de datos se llevó a cabo mediante dos entrevistas semiestructuradas y completando una evaluación escrita de fracciones. Concluyendo que la competencia y el pensamiento fraccionario proporcionan evidencia del pensamiento algebraico no simbólico y su transición progresiva hacia la generalización.

La relación entre la aritmética y el álgebra es abordada por otros autores como González (2011), quien emprende un proyecto para estudiar la transición entre la representación de números usando dígitos, con la que utiliza signos en su representación. Se realiza un diagnóstico preliminar con 29 estudiantes de noveno grado, con una edad promedio de 14 años, su principal objetivo es identificar los errores que manifiestan al realizar operaciones con fracciones algebraicas y sus operaciones, esta investigación se soporta en autores como Brousseau, Davis y Werner (1986) (citados por Rico, 1998), y la percepción del error como un indicador que permite visualizar cómo los estudiantes construyen los significados, por lo cual es indispensable establecer una categorización de errores direccionada hacia fracciones algebraicas.

En estos estudios, se han identificado los errores que cometen los estudiantes al operar con fracciones algebraicas. Un factor común que se destaca es la falta de sentido numérico. En este contexto, se examinan investigaciones como la realizada por Baidoo et al. (2020), donde se abordan las dificultades que enfrentan los estudiantes al simplificar fracciones algebraicas. Para llevar a cabo esta investigación, se empleó un enfoque cualitativo, se recopilaron y analizaron los resultados de una prueba aplicada a 31 estudiantes de décimo grado en una escuela de internado en Sudáfrica. La recolección de datos se realizó a través de una tarea escrita con preguntas de fracciones algebraicas y entrevistas, concluyendo que los errores a menudo provienen de la incapacidad de los estudiantes para describir ideas matemáticas con el lenguaje apropiado.

La indagación sobre la importancia de fomentar el sentido numérico en estudiantes de secundaria a través de tareas contextualizadas es abordado por Barrera y Reyes (2019), quienes identifican estrategias de cálculo mental para sumas y restas con un grupo de 24 estudiantes, de 7º a 9º grado, de una telesecundaria pública en un entorno rural de México. Guiados por los estudios de Reys et al. (1999) que definen al estudiante con sentido numérico como aquel capaz de comparar cantidades, estimar o aproximar resultados, proponer procedimientos alternativos para llevar a cabo operaciones aritméticas a los algoritmos escritos estándar, y evaluar la pertinencia de los resultados obtenidos. La metodología empleada incluyó la recopilación de datos a través de grabaciones de vídeo de las sesiones, transcripciones y notas de campo tomadas por uno de los investigadores.

Concluyendo que:

- Las tareas contextualizadas cuidadosamente elegidas pueden ayudar a los estudiantes a establecer conexiones entre las matemáticas y sus aplicaciones, siendo un recurso para ayudar a los estudiantes a adquirir confianza y competencia en matemáticas
- Se observó que los estudiantes mostraron continuamente preferencia por el uso de algoritmos

En el estudio realizado por Brown y Quinn (2006), se abordan las dificultades de los estudiantes de álgebra al trabajar con fracciones, destacando la brecha entre los conocimientos aritméticos y algebraicos. Para llevar a cabo esta investigación, se basa en las ideas de Kieren (1980) sobre la complejidad del concepto de números racionales, que abarca cinco conceptos (parte-todo, razones, cocientes, medidas y operadores) los cuales deben diferenciarse y conectarse, y Lamon (1999), que enfatiza la importancia de la comprensión antes de la memorización. En el cual los participantes fueron 143 estudiantes de cinco clases de álgebra elemental, la mayoría de los cuales eran de noveno grado de una escuela secundaria de clase media alta. Los resultados revelaron una comprensión limitada de los conceptos y operaciones con fracciones.

Otro estudio es el de Hacker et al. (2019), abordan la preocupación por el bajo rendimiento de estudiantes al operar con fracciones y en escritura. Tales estudiantes pertenecen a una escuela primaria, categorizados como de bajo rendimiento en matemáticas. En respuesta, presentan **FACT+R2 C2,** una intervención basada en el modelo **SRSD** (Self-Regulated Strategy Development) que enseña conceptos de fracciones a través de estrategias metacognitivas y el uso del lenguaje, este acrónimo representa los siguientes pasos. **F** hacer un plan, **A** actuar según ese plan, **C** comparar el razonamiento matemático con un compañero, **T** atar todo en un argumento y el otro conjunto de pasos que utiliza este proceso argumentativo es **R2** repetir y razonar, **C2** contraargumentar y concluir. Estas estrategias están diseñadas para ayudar a los estudiantes a desarrollar habilidades cognitivas y metacognitivas relacionadas con las fracciones, utilizando el razonamiento matemático y la argumentación escrita. El Estudio 1, un ensayo controlado aleatorio, demostró que los estudiantes que recibieron **FACT+R2 C2** mostraron mejoras significativas en conocimiento de fracciones, razonamiento matemático y habilidades argumentativas en comparación con el grupo de control. El Estudio 2, un diseño de línea de base múltiple, respaldó estos hallazgos con variaciones entre los maestros participantes. Los resultados destacan la efectividad de **FACT+R2 C2** al integrar la autorregulación y la escritura argumentativa para mejorar no solo las habilidades matemáticas, sino también el pensamiento metacognitivo de los estudiantes con dificultades de aprendizaje. Esta intervención, aunque compleja, emerge como una herramienta valiosa para abordar las necesidades específicas de estos estudiantes.

El estudio de Zulfa et al. (2020), analiza los errores de estudiantes al operar con fracciones algebraicas utilizando las categorías AVAE, está categorías son:

1. **ARITH (Aritmética)**: Errores relacionados con las operaciones aritméticas, como la aplicación incorrecta de reglas o propiedades aritméticas al trabajar con fracciones algebraicas.

2. **VAR (Variables)**: Errores relacionados con el entendimiento y el manejo de las variables, tanto como cantidades que varían como desconocidas dentro de una expresión algebraica.
3. **AE (Expresiones algebraicas)**: Errores vinculados con la interpretación y manipulación de expresiones algebraicas, como dificultades para simplificar o combinar términos.
4. **EQS (Signo igual)**: Errores en el uso del signo igual ("="), que pueden incluir la falta de comprensión de su función en las ecuaciones, o la manipulación incorrecta de la igualdad durante el proceso de simplificación de fracciones algebraicas.

Este estudio se enfoca en 30 estudiantes de una escuela secundaria en Bandung, Indonesia, encontrando que muchos errores se deben a la falta de comprensión en álgebra y aritmética, el objetivo central de la investigación es abordar las deficiencias conceptuales y aritméticas que llevan a estos errores, proporcionando una comprensión más profunda de los desafíos que enfrentan los estudiantes en esta área específica. Se recolectaron datos mediante pruebas de simplificación de fracciones algebraicas y entrevistas, en las cuales se revela que los estudiantes no han asimilado adecuadamente las expresiones algebraicas. Los resultados destacan la necesidad crítica de mejorar la comprensión aritmética para abordar eficazmente los problemas de fracciones algebraicas y mejorar el rendimiento general en esta asignatura.

En el estudio de Tastepe y Yanik (2023), se examinan los errores que cometen los estudiantes al redactar problemas verbales con ecuaciones que contienen expresiones fraccionarias algebraicas. El estudio se realizó con 240 estudiantes de noveno grado de una pequeña zona urbana de Turquía. El enfoque teórico está basado en lo propuesto por Alibali et al., Chae, entre otros autores, los cuales destacan la importancia de la comprensión conceptual y procedimental con énfasis en el conocimiento simbólico en el aprendizaje del álgebra. Se empleó la metodología cualitativa de casos múltiples holísticos, recolectando los datos por medio de grabaciones "think-aloud" y entrevistas semi-estructuradas. Concluyendo que los estudiantes cometen errores significativos al formular problemas con expresiones fraccionarias algebraicas, siendo el significado de fracción cociente el más conflictivo.

Reys et al. (1999), presenta un análisis centrado en el sentido numérico, definido como la capacidad de comprender los números y las operaciones, así como la habilidad para utilizar esta comprensión de manera flexible en la resolución de problemas matemáticos. La metodología del estudio incluyó la administración de pruebas de sentido numérico a estudiantes de 8 años en Taiwán, realizadas al inicio y a mitad del año escolar. Las pruebas se diseñaron con un esquema de tiempo para que los estudiantes no dedicaran más de 30-45 segundos a cada ítem, y se alentó a proporcionar explicaciones escritas de sus respuestas. Una conclusión significativa del estudio fue que, aunque los planes de estudio de matemáticas se centran en algoritmos y procedimientos computacionales, el desarrollo del sentido numérico entre los estudiantes no avanza al mismo ritmo, destacando la importancia de integrar estrategias que fomenten una comprensión más profunda y flexible de los números en la educación matemática. Los autores señalan que el sentido numérico implica el desarrollo de múltiples relaciones entre conceptos matemáticos, hechos y habilidades, y, por lo tanto, proporciona múltiples formas de acceder a ellos cuando se necesitan.

Mcintosh et al. (1992), realizan una investigación de la diferencia en el entendimiento y aplicación de conceptos numéricos entre un niño y una empleada de tienda, destacando perspectivas teóricas y metodológicas diversas. El niño, observado en clase, emplea un método mental eficiente para resolver problemas matemáticos, aunque no sigue el algoritmo formal escrito enseñado por su maestra. Por otro lado, la empleada de la tienda, aunque ejecuta con precisión algoritmos aritméticos estándar para el cálculo de precios, demuestra una falta de comprensión de las relaciones aritméticas fundamentales. Los resultados de la investigación indican que el niño exhibe lo que se conoce como "sentido numérico", una comprensión general de números y operaciones que le permite desarrollar estrategias eficaces de cálculo. En contraste, la empleada muestra habilidades limitadas fuera de los algoritmos formales aprendidos. Este contraste refleja debates más amplios sobre la enseñanza de las matemáticas, incluyendo la evolución de la educación matemática desde el simple aprendizaje de algoritmos hacia un enfoque más profundo en el sentido y la flexibilidad en el manejo de los números.

La tabla no. 1, representa un concentrado de trabajos que se han estudiado previamente, desglosando los elementos más importantes de cada uno: objetivo (tema, grado o nivel escolar de la muestra); el marco teórico conceptual, la metodología empleada y sus hallazgos principales.

Tabla 1. Concentrado de revisión de la literatura referente al proceso enseñanza aprendizaje de fracciones algebraicas

Autores	Objetivo	Marco Teórico/Conceptual	Metodología	Hallazgos Principales
McIntosh et al. (1992)	Subrayar la importancia de enseñar a desarrollar el sentido numérico y no solo enfocarse en algoritmos. Ejemplo del niño y empleada de tienda.	Organización y clarificación del sentido numérico. Cómo son: Componentes clave del sentido numérico Interconexión de componentes Metacognición Desarrollo continuo.	Es descriptiva, reflexiva y crítica.	Destacan que el sentido numérico es un proceso complejo y multifacético que implica reflexionar sobre el contexto, elegir estrategias efectivas y revisar los resultados**.**
Rico (1998)	Comprender y analizar los errores en el aprendizaje de las matemáticas, con la intención de ofrecer una base teórica y práctica que permita a los docentes abordar estos errores de manera más efectiva.	Constructivismo y la teoría de los obstáculos epistemológicos, las cuales sugieren que los errores deben ser vistos como oportunidades de aprendizaje.	Teórico Documental. Basado en el estudio de los errores en el aprendizaje de las matemáticas, según los planteamientos de diversos autores, como Brousseau, Davis y Werner (1986).	Los errores cometidos por los estudiantes, se describen como "bugs" (fallos o errores sistemáticos), siguiendo procedimientos, aunque de manera incorrecta. Estos errores son el resultado de una comprensión mecánica del algoritmo.
Reys et al. (1999)	Explorar el concepto de "sentido numérico" en estudiantes de diferentes países, destacando su importancia en la educación matemática.	Comprensión holística del sentido numérico como un aspecto fundamental de la educación matemática.	Marco de referencia de sentido numérico, (Investigación bibliográfica) según McIntosh et al. (1992). Desarrollo de ítems. Análisis de resultados.	Pone en evidencia que el sentido numérico es un aspecto crucial del aprendizaje de las matemáticas que requiere más atención tanto en las aulas como en la formación docente**.**

Brown y Quinn (2006)	Analizar las dificultades de los estudiantes de algebra al trabajar con fracciones.	La complejidad del conocimiento de números racionales, basados en Kieren 1980 y la importancia de la comprensión conceptual sobre la memorización, Lamon 1999.	Aplicación de una prueba a lápiz y papel, para identificar el tipo de errores y su frecuencia.	Dependencia de algoritmos para resolver operaciones con fracciones, evidenciando así, la falta de comprensión conceptual.
Hoch y Dreyfus (2006)	Presentar una definición más precisa del "sentido estructural" y medirlo a través de un cuestionario.	Teorías del aprendizaje matemático (como el trabajo de Skemp sobre el entendimiento instrumental y relacional) y una perspectiva centrada en la importancia de un sentido estructural.	Aplicación de un cuestionario a estudiantes de matemáticas de nivel avanzado para evaluar sus habilidades manipulativas y su sentido estructural.	Importancia del sentido estructural en la comprensión profunda de las matemáticas y sugiere que mejorar esta habilidad podría reducir errores y fortalecer las habilidades manipulativas.
Hackenberg y Lee (2011)	Investiga como el razonamiento cualitativo en fracciones está relacionado con el razonamiento algebraico en la resolución de ecuaciones.	Teoría de razonamiento cuantitativo y esquemas de operaciones mentales.	Estudio cualitativo con entrevistas semiestructuradas.	El desarrollo de operaciones distributivas está relacionado con el nivel de concepto multiplicativo del estudiante.
González (2011)	Corregir los errores y fortalecer el aprendizaje de las fracciones algebraicas y sus operaciones.	Idoneidad didáctica que exponen Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006). Con un enfoque ontológico y semiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática.	Investigación acción por medio de diagnóstico preliminar, diseño y desarrollo del proyecto y análisis y evaluación de resultados.	El desarrollo cognitivo de los estudiantes mostró grandes falencias, posiblemente debido a una cobertura incompleta de la temática de fracciones algebraicas y un tiempo insuficiente para trabajar adecuadamente el tema.
Vega-Castro et al. (2011)	Profundizar en cómo los estudiantes de educación secundaria entienden y aplican las igualdades notables y cómo sus estrategias algebraicas	Concepto de sentido estructural y las igualdades notables.	Estudio exploratorio, centrado en el análisis de las estrategias utilizadas.	Identificación de tres modelos de actuación en la simplificación de fracciones algebraicas.

	reflejan diferentes niveles de sentido estructural.			
Caballero y Juárez (2016)	Identificar los errores que cometen los estudiantes cuando se enfrentan a la adición de fracciones algebraicas.	Categorización de errores divididos en 3 ejes propuestos por Ruano, Socas y Palarea (2008).	Enfoque mixto (cuantitativo y cualitativo), que permitió contar con estadísticas sobre los errores cometidos y una comprensión más profunda de los procesos cognitivos y las estrategias de resolución.	Deficiencia en el conocimiento básico de álgebra. Aplicación incorrecta de estrategias. Falta de conciencia sobre los conceptos utilizados.
Barrera y Reyes (2019)	Identificar las manifestaciones del sentido numérico en tareas contextualizadas "La tiendita".	Tres dimensiones: ontológica, epistemológica y didáctica.	Cuantitativa. Práctica de matemáticas de manera contextualizada y creativa.	El uso de representaciones concretas, como el dinero de fantasía, y cálculo mental favorece una comprensión más flexible de las matemáticas, destacando la importancia de contextualizar las tareas para desarrollar habilidades más allá de los algoritmos tradicionales.
Hacker et al. (2019)	Mejorar las habilidades matemáticas de los estudiantes en el área de fracciones, y sus habilidades de autorregulación y metacognición.	Modelo Desarrollo de Estrategias Autorreguladas (SRSD) desarrollado por Harris y Graham (2009). Metacognición.	Modelo de Intervención: SRSD. Teoría social cognitiva de la autorregulación.	El FACT+R2C2 tiene el potencial de mejorar tanto el conocimiento de fracciones como las habilidades de escritura argumentativa en estudiantes con dificultades de aprendizaje en matemáticas.
Baidoo et al. (2020)	Identificar y categorizar los diferentes tipos de errores que cometen los estudiantes al simplificar fracciones algebraicas.	Basado en la premisa de la investigación y las teorías existentes sobre errores en matemáticas.	Cuantitativa. Con el uso de la categoría MPCA que desglosa los errores en: Lenguaje matemático, procedimentales, conceptuales y de aplicación.	Los errores predominantes fueron conceptuales, debido a la falta de comprensión y la incapacidad de los estudiantes para describir las

				ideas matemáticas con un lenguaje apropiado.
Zulfa et al. (2020)	Analizar los errores cometidos por los estudiantes al resolver fracciones algebraicas.	Categorías AVAE para analizar errores. El constructivismo, basado en las ideas de Piaget y Vygotsky.	Enfoque cualitativo con el uso de las categorías AVAE, permitió identificar y analizar de manera detallada los errores de los estudiantes al resolver fracciones algebraicas. A través de la combinación de pruebas escritas y entrevistas.	Los estudiantes cometieron la mayoría de los errores en las categorías de Aritmética (ARITH) y Expresión Algebraica (AE)**.** Los errores estuvieron relacionados principalmente con la falta de comprensión de los conceptos básicos.
Hibi y Assadi (2022)	Identificar los errores comunes que cometen los estudiantes en expresiones algebraicas además de analizar los patrones de repetición, e identificar las estrategias de pensamiento asociadas con estos.	Se basa en estudios sobre errores conceptuales, simbólicos y procedimentales en matemáticas, especialmente en álgebra, apoyada en la teoría del error como producto de estrategias cognitivas incorrectas o mal generalizadas.	El estudio combina un enfoque cuantitativo identificando errores comunes mediante análisis estadístico y cualitativo explorando las estrategias de pensamiento mediante entrevistas centradas en la explicación de los procedimientos.	Identificación de errores más comunes, errores más frecuentes y estrategias de pensamiento erróneas.
Tastepe y Yanik (2023)	Identificar los errores que cometen los estudiantes al plantear problemas con ecuaciones que contienen fracciones algebraicas.	Comprensión conceptual y procedimental en matemáticas, con énfasis en el conocimiento simbólico, basada en Alibali et al., Chae, entre otros.	Diseño cualitativo de casos múltiples holísticos, grabaciones "think-aloud", y entrevistas semiestructuradas.	El error más común fue Cambiar la ecuación, seguido por confundir numerador y denominador especialmente en ecuaciones con numerador numérico sobre denominador algebraico.

Conclusión.

En la revisión de la literatura, se documenta que la categorización de los errores resalta serios problemas que enfrentan los estudiantes al operar expresiones algebraicas. Los estudios muestran que los estudiantes frecuentemente cometen errores al aplicar la ley de los signos, usándola de manera incorrecta en operaciones aditivas y multiplicativas. Además, se sugiere que se realice una correlación entre la comprensión estructural de las expresiones algebraicas y la habilidad para manipularlas correctamente. Es crucial que los estudiantes comprendan las expresiones algebraicas no solo como elementos aislados, sino también en relación con otras expresiones, como, por ejemplo, reconociendo las relaciones de igualdad entre ellas. Este enfoque podría mejorar significativamente su capacidad para manejar y entender conceptos algebraicos de manera más efectiva.

En relación con el sentido numérico, se subraya la importancia de desarrollar estas habilidades desde edades tempranas. Un desarrollo adecuado del sentido numérico no solo facilita la comprensión de conceptos matemáticos fundamentales, sino que también sienta las bases para un entendimiento más avanzado de las funciones racionales. Al fortalecer el sentido numérico desde una edad temprana, los estudiantes pueden adquirir una intuición más sólida sobre las relaciones entre números y operaciones, lo que resulta en una mayor capacidad para abordar y resolver problemas complejos en matemáticas. Este enfoque temprano ayuda a construir una base sólida que apoya el aprendizaje de conceptos más avanzados y mejora la competencia matemática en general.

Un aspecto importante identificado en la revisión de literatura es que utilizan el término fracción algebraica, mientras que, en este trabajo, el énfasis será a partir de una función racional. Para determinar este concepto es fundamental recordar la definición de polinomio en una variable, la cual se establece como una expresión de la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} n x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \;\; n \in Z^+$, en donde, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son constantes. Si $a_n \neq 0$ se declara el grado de $P(x)$ como n.

Ejemplos de polinomios:

$$x + 1$$

$$2x^4 + x^2$$

$$x^5 + 2x - 5$$

A partir de esto, una función racional se define como el cociente de dos polinomios. Es decir, si $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios y $Q(x) \neq 0$, entonces $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional.

Para propósitos de este trabajo se utiliza el concepto de función racional para referirse a la función que se puede expresar como el cociente de dos polinomios.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Por ejemplo: $f(x) = \frac{3 + x^2}{x}$

$$f(x) = \frac{3 + x^2}{6}$$

Para concluir, se entiende que las funciones racionales son el análogo de los números racionales, los números racionales son cociente de números enteros, mientras que las funciones racionales son cociente de polinomios. Cuando se hace una discusión de las propiedades aritméticas de los números racionales, su análogo se tiene con las funciones racionales. En resumen, todas las funciones racionales son fracciones algebraicas, pero no todas las fracciones algebraicas son funciones racionales. Las funciones racionales se refieren específicamente a funciones que son el cociente de dos polinomios.

1.3. Planteamiento del problema

De acuerdo con la revisión de la literatura, se han identificado distintos tipos de errores por parte de los estudiantes al operar con fracciones algebraicas Caballero y Juárez (2016), Hibi y Assadi (2022), Hoch y Dreyfus (2006), Zulfa et al. (2020), sin embargo, las clasificaciones existentes hasta ahora han sido mayormente de tipo procedimentales, el estudio actual, busca Identificar errores que se cometen al pasar por alto elementos del sentido numérico, particularmente utilizando la clasificación propuesta por Reys (Reys 1994; 1999).

Este enfoque permitirá una comprensión más profunda del problema al identificar los conocimientos previos que los estudiantes necesitan para abordar el tema de las fracciones algebraicas. No solo se pretende categorizar los errores usando el referente del sentido numérico, sino también destacar la importancia de este en el entendimiento de las operaciones con funciones racionales. En el contexto del nivel medio superior, es importante abordar de manera efectiva los errores que se cometen al operar con elementos fundamentales relacionados con las fracciones algebraicas.

En resumen, el estudio busca no solo identificar los errores de manera más detallada y fundamentada, sino también proporcionar entendimiento sobre los fundamentos numéricos que subyacen a estos errores.

Por esta razón la pregunta de investigación que se plantea es: ¿Cuáles son los errores más comunes que cometen estudiantes de nivel medio superior al operar con funciones racionales y cómo pueden estos errores ser categorizados utilizando elementos del sentido numérico propuestos por Reys?

Por lo cual el objetivo general es evaluar de manera sistemática los patrones de errores más frecuentes en la comprensión y manipulación de funciones racionales por parte de estudiantes de nivel medio superior, utilizando una categorización fundamentada en el sentido numérico propuesto por Reys (1999).

Teniendo como objetivos específicos.

1. Identificar los errores más comunes cometidos por estudiantes de nivel medio superior al abordar operaciones con funciones racionales.
2. Analizar y clasificar los errores que suelen cometer estudiantes de nivel medio superior al trabajar con funciones racionales basado en el sentido numérico propuesto por Reys.

1.4. Justificación

Esta investigación se fundamenta en la necesidad de identificar los errores conceptuales que exhiben los estudiantes de nivel medio superior al operar con funciones racionales. Aunque existen clasificaciones de estos errores en la literatura, es de importancia profundizar en el análisis mediante un enfoque más riguroso y sistemático, integrando elementos del sentido numérico propuestos por Reys, (1999).

El estudio busca ampliar la comprensión de los errores cometidos por los estudiantes al trabajar con funciones racionales. Además, al centrarse en la categorización de errores, podría ayudar a identificar posibles errores conceptuales, dificultades de razonamiento o desafíos de comunicación que estudiantes enfrentan al tratar con funciones racionales, además se puede identificar que el sentido numérico es de suma importancia para el proceso de aprendizaje matemático y en la vida cotidiana por varias razones, entre ellas: comprensión profunda de los números, resolución de problemas, aplicaciones en la vida diaria, conexión entre conceptos matemáticos y evaluación de resultados además de facilitar el aprendizaje continuo.

De manera que la categorización de errores como medio para resolver estas dificultades en la enseñanza de funciones racionales en estudiantes de nivel medio superior emerge como un componente crítico en el ámbito educativo actual, en este contexto, resulta imprescindible comprender y abordar las dificultades específicas que estudiantes enfrentan al aprender este contenido matemático fundamental.

1.5 Hipótesis

Se afirma que los errores más comunes que cometen los estudiantes de nivel medio superior al operar con funciones racionales están relacionados con deficiencias en el sentido numérico y una comprensión débil de los fundamentos aritméticos necesarios para operar con números racionales y expresiones algebraicas.

CAPÍTULO 2
MARCO DE INVESTIGACIÓN

2.1. Introducción

Un marco de investigación es una colección de ideas y principios que tienen por finalidad orientar, dar orden y coherencia a los datos obtenidos durante los procesos de investigación. De acuerdo con Lester (2005), un marco de investigación es una estructura de ideas (abstracciones y relaciones estructuradas) que sirven como base para entender y fundamentar los fenómenos que están siendo estudiados. Lester compara un marco de investigación con un andamio que se utiliza para construir o reparar un edificio. Las ideas e interrelaciones que le dan estructura a un marco conceptual tienen como finalidad aportar elementos que permitan dar sustento a un trabajo de investigación. Por otro lado, Eisenhart (1991), argumenta que todo investigador toma la decisión sobre el tipo de abstracciones y principios que son útiles para sustentar un estudio y, esto lo combina con los métodos que utilizará para recolectar e interpretar los datos a estudiar.

Todo marco de investigación debe aportar una estructura para diseñar estudios de investigación; ayudar a dar sentido e interpretar los datos que se recolectan. De acuerdo con Eisenhart (1991), hay diferentes tipos de marcos de investigación: teórico, práctico y conceptual. Este trabajo será sustentado en un marco conceptual, razón por la que exponemos sus características básicas. Un marco conceptual es un conjunto de abstracciones, es decir, conceptos estructurados que son apropiados y útiles para comprender el problema que se busca investigar. Un marco conceptual puede estructurarse con diferentes conceptos de varias teorías. La justificación significa que como parte del marco se deberá explicar por qué los conceptos que integran el marco, así como las relaciones entre ellos, son relevantes para comprender el problema de investigación. Eisenhart (1991), afirma que los marcos conceptuales son mejores que los marcos teóricos o prácticos para la investigación aplicada a áreas como la educación.

A continuación, se exploran los principales conceptos y enfoques que subyacen a la categorización de errores en este contexto educativo, proporcionando una base sólida para comprender la importancia de este estudio; cabe señalar que no solo se enfatiza en la identificación y corrección de equívocos, sino que también busca comprender las raíces de estos errores y las estrategias cognitivas involucradas en su comisión. Para ello, se apoya en conceptos sustentados que abordan el aprendizaje matemático y la naturaleza de los errores.

2.2. Referentes ontológicos, epistemológicos y didácticos

Las matemáticas no solo son una disciplina académica por sí misma, sino que también sirven como una herramienta esencial en la resolución de problemas en la vida cotidiana y en numerosas profesiones. Para comprender cómo los estudiantes aprenden matemáticas, es necesario explorar las teorías cognitivas que han surgido en el campo de la psicología educativa. Estás toman como referente la forma en que los estudiantes adquieren conocimientos matemáticos, procesan la información y resuelven problemas, es por ello que a continuación se abordan las principales teorías cognitivas que abordan el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

2.2.1. Referentes ontológicos

La Didáctica de las Matemáticas, como campo de investigación y estudio, desempeña un papel fundamental en el análisis y mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Su enfoque está centrado en comprender los factores que influyen en la construcción de conocimientos matemáticos y en el desarrollo de estrategias y programas educativos para optimizar estos procesos. Como destacó el programa de Steiner para la Teoría de la Educación Matemática, es esencial considerar la educación matemática en su totalidad, como un sistema interactivo que abarca investigación, desarrollo y práctica (Steiner, 1985).

La Didáctica de las Matemáticas se encuentra en una encrucijada de disciplinas, ya que no puede ignorar las contribuciones de campos como la psicología, pedagogía, filosofía y sociología, es a través de esta interdisciplinariedad que se aborda una comprensión profunda de la educación matemática y se busca mejorar su eficacia. Un análisis ontológico y epistemológico es esencial, ya que ayuda a definir y comprender la naturaleza de los objetos matemáticos, su desarrollo cultural y personal, y su aplicación en contextos escolares. Esto se convierte en una cuestión crítica, ya que la Didáctica de las Matemáticas tiene como uno de sus principales objetivos facilitar la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos que deben ser presentados de una forma clara, precisa y comprensible.

La naturaleza ontológica y epistemológica de las matemáticas es un tema central en este campo, preguntas fundamentales sobre si las matemáticas se descubren o inventan, y si las definiciones formales agotan el significado de los conceptos, son cruciales. Además, se deben considerar las interacciones entre los objetos matemáticos, su contexto y sus diversas representaciones simbólicas. En última instancia, estas cuestiones filosóficas influyen en la forma en que se enseñan y se aprenden las matemáticas.

El debate sobre la naturaleza de los objetos matemáticos ha sido un tema fundamental en la filosofía de las matemáticas a lo largo de la historia. Dos posiciones principales en este debate son el platonismo o el realismo matemático y el estructuralismo, que abordan la existencia y la naturaleza de los objetos matemáticos de manera diferente (Rosal, 2021). El platonismo o el realismo matemático sostiene que los objetos matemáticos tienen una existencia independiente y existen en un plano abstracto, independientemente de la mente humana. Según esta perspectiva, las matemáticas descubren estos objetos y sus propiedades internas. En otras palabras, los matemáticos no inventan las matemáticas, sino que las descubren como entidades reales.

Por otro lado, Rodin (2012) señala que el estructuralismo argumenta que la existencia de objetos matemáticos no es necesaria y que lo que importa son las relaciones y estructuras entre estos objetos. Los estructuralistas ven las matemáticas como un estudio de las relaciones abstractas y las estructuras matemáticas, sin necesidad de comprometerse con la existencia real de los objetos matemáticos. Desde esta perspectiva, las matemáticas son un lenguaje o un conjunto de relaciones abstractas que se utilizan para describir el mundo, pero no se requiere que los objetos matemáticos tengan una existencia independiente.

El desarrollo de la filosofía de las matemáticas ha sido influido por pensadores como René Descartes, quien introdujo nuevas perspectivas sobre la intuición espacial y la geometría. Estos avances teóricos contribuyeron a la evolución del conocimiento matemático durante la edad moderna, sentando las bases para futuros desarrollos en esta área. La filosofía de las matemáticas se ha centrado en enriquecer nuestra comprensión de esta ciencia desde adentro, analizando conceptos y nociones matemáticas en lugar de simplemente formalizar sus aplicaciones en el mundo real. Se trata de un campo que busca profundizar en la fundamentación y cuestionamiento de las ideas matemáticas.

Beziau señala que el término "filosofía de las matemáticas" fue acuñado por el filósofo y matemático británico Bertrand Russell, quien deseaba explorar la conexión entre la matemática y las cuestiones filosóficas. Su objetivo era obtener una comprensión más profunda de la naturaleza de las matemáticas y su relación con el mundo real (Beziau, 2000).

De manera que el debate sobre la ontología de los objetos matemáticos, junto con la evolución histórica de la filosofía de las matemáticas, ha enriquecido nuestra comprensión de esta disciplina y ha planteado preguntas fundamentales sobre la naturaleza y el papel de las matemáticas en el conocimiento humano.

En este trabajo se toma la perspectiva que la matemática es la Ciencia de los Patrones Formales (Steen, 1988; Thurston, 1994), por lo que se concibe a la matemática como una disciplina en la que el pensamiento matemático (identificación, representación y transformación de la información; identificación de relaciones entre datos e incógnitas, hipótesis y conclusiones, identificación de patrones, formulación de conjeturas; justificación y comunicación de resultados) juega un rol crucial, tanto en su aprendizaje como en su desarrollo. Poniendo en práctica el pensamiento matemático se puede afirmar que la matemática es una disciplina experimental.

2.2.2. Referentes epistemológicos

El término epistemología proviene de la unión de dos palabras griegas: ἐπιστήμη (epistéme) que significa conocimiento justificado como verdad y λόγος (lógos) que significa estudio. Por lo cual se define como: rama de la filosofía que estudia el conocimiento, su naturaleza, su alcance, sus fundamentos y métodos. Por lo tanto, se encarga de analizar, examinar y criticar el proceso que nos lleva a la creación del conocimiento científico, estableciendo qué es válido y que no. Es por ello que se abordan las principales teorías que enmarcan este proceso.

La teoría constructivista de Piaget y Vygotsky ofrece una visión integral del desarrollo y aprendizaje, destacando la interacción entre el individuo y su entorno. Según Mesonero Valhondo (2019), Piaget presenta el desarrollo como una construcción progresiva basada en la adaptación y el equilibrio entre asimilación y acomodación. Este enfoque señala que el aprendizaje ocurre cuando hay un conflicto cognitivo entre estos dos procesos, esencial para la evolución del conocimiento (Sierra Fernández, 2004). Piaget también destaca la importancia del lenguaje y los símbolos en el desarrollo cognitivo, donde el razonamiento se basa en la resolución de símbolos significativos (Richmont, 2017). En conjunto, la teoría constructivista subraya la necesidad de reflexión sobre el conocimiento y su aplicación en el entorno del educando.

Vygotsky, por su parte, amplía esta perspectiva al enfatizar la interiorización del conocimiento a través de la interacción social. En el constructivismo, el aprendizaje con entendimiento (Hiebert y Carpenter, 1992) ocurre cuando las experiencias se alinean con la representación interna del mundo del estudiante (Piaget, 1967). Deci y Ryan (2000) destacan que el constructivismo fomenta la innovación y el pensamiento crítico en ambientes de aprendizaje. Según Vygotsky (1978), el conocimiento se internaliza y transforma en un entorno familiar, resaltando la importancia del contexto social y cultural en el desarrollo cognitivo. El aprendizaje significativo, descrito por Ausubel (1978), se basa en conectar nuevos conocimientos con experiencias previas relevantes (pág. 9). La interacción social y cultural juega un rol crucial en este proceso, destacando la importancia de crear un ambiente educativo que fomente el aprendizaje colaborativo y reflexivo (Vigotsky, 1987, pág. 41). La metodología constructivista, respaldada por teorías de Piaget y Vygotsky, enfatiza la necesidad de adaptarse a las realidades del estudiante para promover un aprendizaje significativo y relevante.

2.2.3. Referentes Didácticos

Los referentes didácticos son elementos o recursos utilizados en el proceso de enseñanza y aprendizaje para facilitar la comprensión y adquisición de conocimientos, tienen como objetivo brindar apoyo en el proceso educativo, pueden incluir una amplia variedad de materiales, estrategias y enfoques pedagógicos que se utilizan en el contexto educativo. Algunos ejemplos comunes de referentes didácticos son:

- Teorías del aprendizaje
- Principios del sentido numérico o del pensamiento algebraico
- Modelos pedagógicos
- Resultados de investigaciones previas
- Lineamientos curriculares oficiales

Los referentes didácticos son esenciales en la enseñanza y el aprendizaje, ya que enriquecen la experiencia educativa y pueden adaptarse a diferentes estilos de aprendizaje y necesidades individuales. Los docentes utilizan una combinación de estos referentes para diseñar lecciones efectivas y promover la comprensión profunda de los contenidos.

En el campo de las Matemáticas, Murcia y Perdomo (2015) señalan que, los estudiantes aprenden y movilizan los niveles de complejidad de la Competencia Matemática desde lo que se desarrolle en las clases. De ahí la importancia de la tarea y de cómo ésta es implementada y solucionada en el aula, dado que son las tareas las que determinan la actividad matemática de aprendizaje de los estudiantes.

2.3 Aspectos del Sentido Numérico

Desde una perspectiva estructural, se argumenta que el sentido numérico se describe como una red conceptual estructurada de forma única en cada individuo. Esta red permite relacionar números y propiedades de las operaciones de manera interconectada y flexible para resolver problemas. Castro et al. (2004), resaltan esta idea de una red conceptual como la base del sentido numérico, donde la capacidad de vincular conceptos como agrupamiento, valor posicional y comprensión de magnitudes absolutas y relativas de los números desencadena habilidades como la evaluación de la racionalidad de resultados numéricos, la generación de algoritmos no convencionales y la relación intrínseca entre los números y las propiedades de las operaciones (Castro et al., 2004).

El sentido numérico es una facultad esencial que se desarrolla en los individuos desde una edad temprana, a medida que se sumergen en el mundo de las matemáticas, esta habilidad, intrínseca al ser humano, se desarrolla con la experiencia de experimentar y operar con números en diversos contextos y situaciones cotidianas; sobre esto, Singh (2009) argumenta que el proceso comienza con el reconocimiento de los números su representación para reconocer las operaciones y el significado de su uso en la vida cotidiana. Esta habilidad puede formarse bien si la experiencia de aprendizaje adquirida tiene significado. La capacidad de identificar y conectar las representaciones simbólicas de los números es el primer paso hacia la construcción del sentido numérico, a medida que avanza en su aprendizaje, el individuo se sumerge en la comprensión de las operaciones aritméticas básicas y su aplicación en situaciones concretas.

Reys et al. (1999) señalan que el sentido numérico se refiere a la comprensión general de los números y las operaciones, junto con la habilidad y la inclinación para utilizar esta comprensión de manera flexible al formular juicios matemáticos y desarrollar estrategias útiles y eficientes en los procesos que involucran aspectos numéricos. Esto se manifiesta en una visión de los números como entidades útiles al operar y obtener resultados matemáticos.

Kaminski (2002), señala que los estudiantes que han desarrollado habilidades con el sentido numérico pueden encontrar formas flexibles y apropiadas para resolver un problema numérico, además, los estudiantes que tienen la habilidad en el sentido numérico también pueden ser identificados por su nivel de comodidad al tratar con los números. Barrera y Reyes (Barrera y Reyes (2019), siguiendo el esquema planteado por Reys (1999), identifican componentes o aspectos que caracterizan el sentido numérico:

Componentes	**Descripción**
1. Comprensión del significado y tamaño de los números.	Capacidad para identificar y representar cantidades conocidas para compararlas con otras.
2. Comprensión y uso de representaciones equivalentes de los números.	Identificación de la equivalencia de números en diferentes registros de representación (representación de números en una recta numérica, como el número de elementos en una colección de objetos, como números en diferentes bases).

3. Comprensión del significado y efecto de las operaciones.	Reconocer diversos tipos de cambios de números al aplicar operaciones.
4. Comprensión y uso de expresiones equivalentes.	Representar números de diferentes maneras utilizando operaciones aritméticas, como suma y producto, o identificar números racionales con su representación decimal.
5. Estrategias flexibles de cálculo y conteo mental y escrito, incluyendo el uso flexible de dispositivos electrónicos.	Descomponer números de diferentes maneras para hacer cálculos más eficientes.
6. Referencias de medición.	Identificar puntos de referencia útiles para realizar operaciones aritméticas y estimaciones numéricas.

Fuente: Barrera y Reyes (2019).

2.4. Aprendizaje con entendimiento

En torno al aprendizaje con entendimiento, Hiebert et al. (1997) argumentan que: El entendimiento es crucial porque las cosas que se aprenden con entendimiento pueden ser usadas de forma flexible, adaptarlas a nuevas situaciones, y usarlas para aprender nuevas cosas. Las cosas aprendidas con entendimiento son las más útiles en un mundo cambiante e impredecible. Puede haber debate acerca de qué contenidos matemáticos son más importantes para enseñar, pero hay un consenso creciente de que lo que los estudiantes aprendan debe ser con entendimiento. (Barrera et al. 2021)

Es importante reconocer que el entendimiento se desarrolla de manera gradual, desde la memorización de fórmulas hasta la capacidad de establecer conexiones profundas entre conceptos. Para lograr esto, un salón de clase debe contar con características específicas que fomenten el aprendizaje, incluyendo la naturaleza de las tareas, el rol del profesor, la cultura social, las herramientas disponibles y la accesibilidad de las matemáticas. (Barrera et al. 2021)

Estas características que promueve el aprendizaje con entendimiento se describen con mayor profundidad:

1. Naturaleza de las Tareas de Aprendizaje: Las tareas deben ser desafiantes y atractivas, involucrando a los estudiantes en problemas reales que fomenten la reflexión y la comunicación de ideas.
2. Rol del Profesor: El profesor debe facilitar el aprendizaje, seleccionando y diseñando tareas apropiadas, evitando ser la única fuente de información y permitiendo que los estudiantes asuman responsabilidad en su aprendizaje.
3. Cultura Social del Salón de Clase: Debe promover un ambiente colaborativo donde se valoren las ideas de todos los estudiantes, fomentando el diálogo y el apoyo mutuo.
4. Clase de Herramientas Matemáticas Disponibles: Las herramientas no solo incluyen objetos físicos, sino también el uso del lenguaje y signos que los estudiantes pueden manipular para resolver problemas.
5. Accesibilidad de las Matemáticas: Es esencial que las matemáticas sean accesibles para todos los estudiantes, de modo que cada uno pueda involucrarse y participar en el aprendizaje matemático.

Estas características se entrelazan para crear un entorno de aprendizaje que favorezca la comprensión y el uso flexible de conceptos matemáticos. Por tanto, la educación matemática debe centrarse en el entendimiento profundo y flexible de los conceptos, más allá de la memorización. Para lograrlo, es fundamental crear un entorno de aprendizaje que incluya tareas desafiantes, un rol facilitador del profesor, una cultura colaborativa, herramientas adecuadas y accesibilidad para todos los estudiantes. Estas características interconectadas fomentan la capacidad de los alumnos para aplicar sus conocimientos de manera adaptativa, preparándolos para un mundo cambiante e impredecible.

2.5 Pensamiento algebraico

El pensamiento algebraico, es una capacidad cognitiva esencial para la comprensión de matemáticas más avanzadas, Levin y Walkoe (2022), y se define como una forma de resolver problemas matemáticos que enfatiza la comprensión de conceptos generales y la construcción de conexiones profundas. Sibgatullin et al. (2022).

Conforme a las etapas del desarrollo de Piaget, entre los 7 y 15 años, los estudiantes suelen encontrarse en la etapa operativa formal, lo que les permite razonar abstractamente y aplicar este tipo de pensamiento (Inhelder, 1958).

En este marco, las habilidades no se presentan como una lista, sino que se infieren a través de los modos del pensamiento algebraico, los que describen lo que se espera que los estudiantes desarrollen para alcanzar un razonamiento algebraico más avanzado, esto es, una progresión de lo concreto a lo abstracto y sugieren las capacidades que un estudiante debe adquirir, para desarrollarlo, es vital integrar cuatro habilidades:

- Generalización, que implica identificar patrones o relaciones recurrentes y expresarlos de manera amplia para que puedan ser aplicables a diversos contextos. Esta capacidad constituye la base del razonamiento algebraico y se fortalece conforme el estudiante profundiza en su pensamiento.
- Simbolización, incluye el uso de símbolos y notaciones matemáticas para representar dichas regularidades. Este proceso consiste en manipular ideas mediante reglas sintácticas.
- Actividades no rutinarias y representaciones múltiples, como gráficos, esquemas, juegos y dinámicas diversas. Estas estrategias enriquecen el pensamiento algebraico al estimular distintas formas de razonamiento.
- Uso de la etapa formal-operacional (razonamiento abstracto), la capacidad de elaborar y aplicar generalizaciones de manera abstracta y simbólica, aprovechando la base cognitiva para pensar algebraicamente.

Por lo tanto, el pensamiento algebraico representa una capacidad cognitiva clave en el desarrollo matemático de los estudiantes, pues permite interpretar, generalizar y representar relaciones abstractas de forma significativa. Al fomentar el pensamiento algebraico desde edades tempranas no solo se prepara a los estudiantes para enfrentar contenidos matemáticos más avanzados, sino que también se fortalece su capacidad para resolver problemas de manera flexible y creativa.

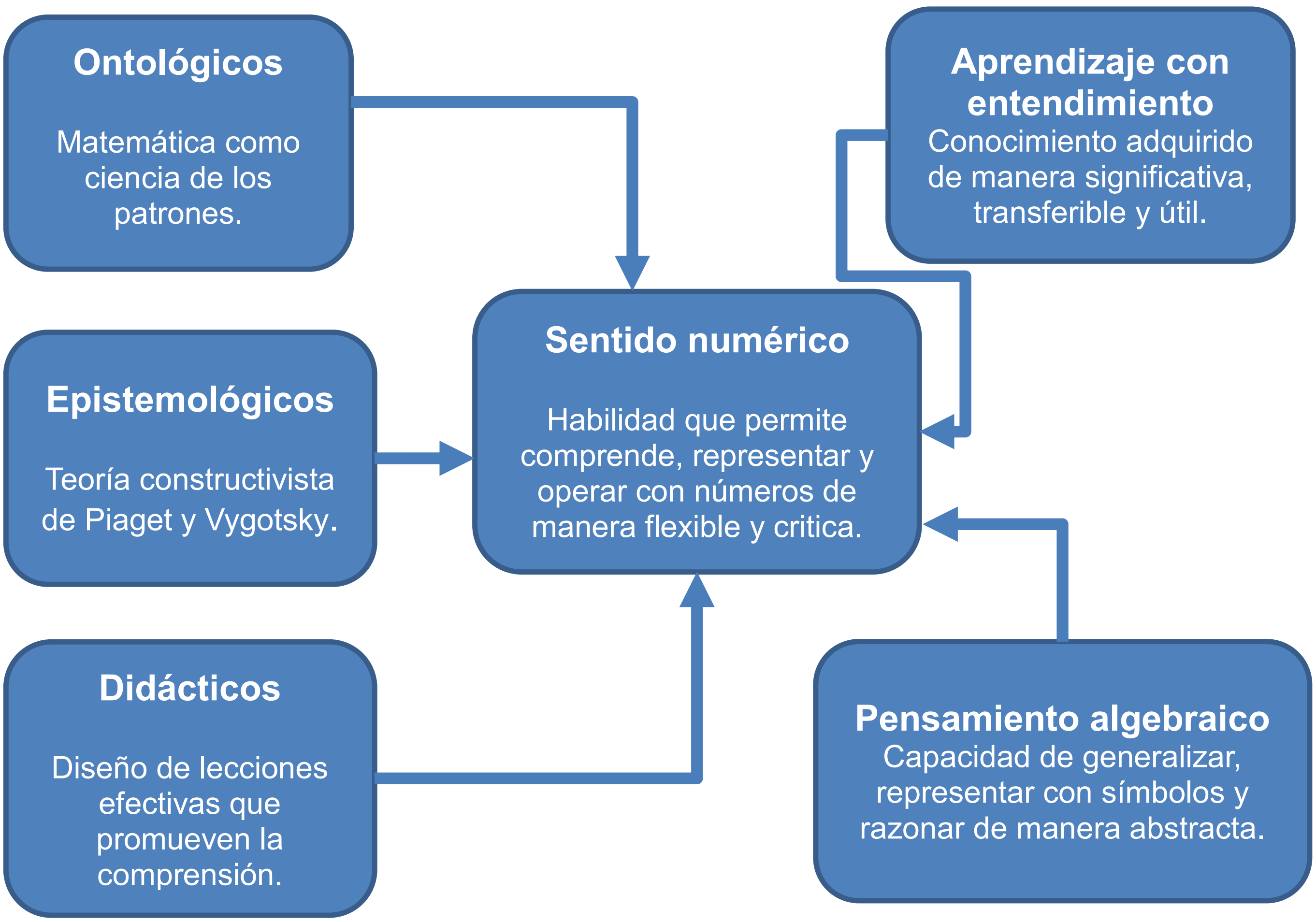


Figura 2. Síntesis de los elementos del marco conceptual.

3. METODOLOGÍA

3.1 Introducción

La presente investigación identifica y categoriza, desde la perspectiva de Reys (1999), los errores que cometen estudiantes de nivel medio superior al operar con funciones racionales. Para ello se considera una metodología cualitativa, con el objetivo de tener una comprensión detallada de los errores. Además, se describe a los participantes y se presentan las técnicas e instrumentos de recolección de datos como herramientas esenciales para capturar la diversidad de información sobre los errores en el aprendizaje. La importancia de este capítulo radica en su capacidad para proporcionar solidez a la investigación, otorgando rigor a los hallazgos y conclusiones.

3.2. Diseño de la investigación

Se identificaron relaciones entre los elementos del sentido numérico de Reys (1999), con los tipos de errores más frecuentes que cometen los estudiantes de acuerdo con la clasificación de Caballero y Juárez (2016). Posteriormente, se generaron descripciones que apoyaron a la clasificación de los errores cometidos por los estudiantes en un marco de fracciones aritméticas y funciones racionales.

La tabla uno contiene, en una columna las seis categorías para la comprensión general de los números, las operaciones y la capacidad para utilizar esta comprensión (Reys, 1999), las cuales se relacionan con diez tipos de errores (Caballero y Juárez, 2016) contenidos en la segunda columna. A partir de dicha relación se describe, en una tercera columna, el tipo de error que pudieran presentar los estudiantes en un contexto de funciones racionales con el objetivo de identificar y posteriormente categorizar los errores para su análisis. Por ejemplo, la comprensión del significado y tamaño de los números, que refiere a la identificación y representación de cantidades conocidas para compararlas con otras (Reys, 1999), es una habilidad fundamental para comprender de manera adecuada cómo se relacionan una figura y su fracción, y cómo esta relación puede expresarse de manera inversa.

Sentido numérico de Reys (1999)	**Tipo de error Caballero y Juárez (2016)**	**Descripción del tipo de error**
1.- Comprensión del significado y tamaño de los números.	Interpretación.	Se malinterpreta una figura dividida en partes como una fracción.
2.- Comprensión y uso de representaciones equivalentes de los números.	En conceptos matemáticos.	No se determinan de manera correcta las fracciones equivalentes.
	Identificación de términos semejantes. Se utiliza para explicar los resultados de la parte algebraica.	No aplicar de manera precisa la definición de términos semejantes.
3.- Comprensión del significado y efecto de las operaciones.	Algorítmico.	No se analizó el algoritmo, este se desconoce o se confunde con otra operación.
	En la operación aritmética.	En el resultado de la operación.
	Orden de operaciones.	No se respetó el orden en que deben realizarse las operaciones.

	Error de operación.	Se realizó una operación diferente a la indicada.
	Parcialidad en la resolución del ejercicio.	Solo se realizó una parte de las operaciones solicitadas, dejando incompleto el proceso requerido.
4.- Comprensión y uso de expresiones equivalentes.	En conceptos matemáticos.	No se identifican de manera correcta las fracciones equivalentes.
	Identificación de términos semejantes. Se utiliza para explicar los resultados de la parte algebraica.	No aplicar de manera precisa la definición de términos semejantes.
5. Estrategias flexibles de cálculo y conteo mental y escrito, incluyendo el uso flexible de dispositivos electrónicos.	5.- NO SE APRECIA EN LOS EJERCICIOS.	
6.- Puntos de referencia de medida.	Interpretación.	Se malinterpreta una figura dividida en partes como una fracción.

Tabla 1 y 2

La tabla 2 se elaboró de manera similar a la anterior, pero en esta ocasión se trabajaron ejercicios de funciones racionales utilizando un lenguaje algebraico. Además, se incorporó un nuevo tipo de error relacionado con la identificación de términos semejantes. Este error fue incluido porque es crucial para que los estudiantes puedan trabajar de manera adecuada con funciones racionales y evitar confusiones al manipular expresiones algebraicas.

Debido a esta situación, se tomó la decisión de elaborar únicamente una tabla, en la cual se incluyó el tipo de error que no había sido considerado en la primera parte de la tarea. El propósito de esta acción fue evitar la duplicación de información y garantizar que todos los elementos necesarios estuvieran correctamente documentados, asegurando así una mayor precisión en los resultados obtenidos. Además, se agregó una nota aclaratoria en la sección del error agregado, especificando que este error solo debía ser tenido en cuenta en la segunda parte de la tarea. De esta manera, se buscó mejorar la organización de la información y garantizar que cada elemento estuviera correctamente contextualizado según su relevancia en la tarea, facilitando así la comprensión y evitando confusión.

3.3 Tareas

Se diseñaron dos instrumentos con el objetivo de identificar los errores más comunes que cometen estudiantes al operar con funciones racionales, para la elaboración de dichas tareas se retomaron los aportes de Barrera y Reyes (Barrera y Reyes 2019) quienes delimitan el análisis del sentido numérico en tres dimensiones que orientan la selección y diseño de tareas.

La aplicación de los instrumentos se dividió en dos etapas, proporcionando dos horas a los estudiantes que formaron parte del grupo seleccionado para completar cada etapa de la actividad. Se llevaron a cabo dos sesiones de trabajo, entre el 9 y el 23 de marzo de 2024, con una duración de dos horas cada una. Estas sesiones se desarrollaron en un aula del plantel del bachillerato en el que se encuentran inscritos los estudiantes, la primera parte de la tarea se realizó en sábado en un horario de 9 a 11 am y la segunda parte de la implementación de la tarea se realizó dentro del horario en el que habitualmente asisten a sus cursos. El docente que implementó las tareas, imparte el cursor de la medición y la matemática de los triángulos, durante el segundo semestre. Para generar mayor interés en el desarrollo de las tareas se les otorgó un punto extra en el examen de segundo parcial a cada uno de los participantes.

Las tareas fueron diseñadas para identificar los errores que cometen los estudiantes en la resolución de este tipo de ejercicios matemáticos que involucran operaciones con fracciones y funciones racionales, para posteriormente categorizar los errores en la comprensión y manipulación de dichas funciones.

En la primera tarea se buscó conocer los errores de tipo aritmético y en la segunda los errores de tipo algebraico.

La primera actividad consistió en tres ejercicios, cada uno con un número diferente de reactivos.

- En el primer ejercicio, los estudiantes trabajaron con seis figuras divididas en partes, que podían ser iguales o no. Se les pidió identificar qué figuras representaban una fracción específica, además de explicar el razonamiento detrás de sus respuestas.
- El segundo ejercicio incluyó dos operaciones aritméticas: una suma y un producto. Ambas operaciones eran iguales, pero se diferenciaban por el signo de la operación. Estas operaciones involucran fracciones con diferentes denominadores, y los estudiantes debían explicar detalladamente el procedimiento que siguieron para resolverlas.
- En el tercer ejercicio, los estudiantes resolvieron cuatro operaciones con fracciones, aplicando la jerarquía de operaciones. Las operaciones incluían tres fracciones con denominadores diferentes, y se les pidió a los estudiantes que explicaran el procedimiento que utilizaron para llegar a la solución.

La segunda actividad estuvo también compuesta por tres ejercicios.

- En el primer ejercicio, se pidió a los estudiantes calcular la expresión algebraica que representa el área de dos figuras: un triángulo y un rectángulo. Además, debían explicar su proceso de resolución, detallando los cálculos realizados para llegar a la respuesta.
- En el segundo ejercicio, los estudiantes tuvieron que calcular la expresión algebraica que representa el producto del área de dos figuras: un triángulo y un cuadrado. Al igual que en el primer ejercicio, se les solicitó que explicaran el procedimiento paso a paso, realizando los cálculos correspondientes para obtener el resultado.
- El tercer ejercicio consistió en una suma de funciones racionales. Es importante destacar que las funciones seleccionadas eran bastante sencillas,

ya que el objetivo de este ejercicio no era evaluar la habilidad para resolver operaciones complejas, sino identificar los errores cometidos durante el proceso de resolución.

Se proporcionaron instrucciones claras sobre cómo realizar las tareas y, haciendo hincapié en el trabajo individual y la importancia de mostrar el proceso de resolución de cada ejercicio.

3.4 Participantes

Las tareas de instrucción se implementaron en un bachillerato público, ubicado en la zona metropolitana de la ciudad de Mineral de la Reforma, Hidalgo. Los participantes se eligieron de un grupo del que la investigadora era profesora. Las tareas se aplicaron a 10 estudiantes de la asignatura "La medición y la matemática de los triángulos", elegidos de la siguiente manera; 3 estudiantes con un excelente rendimiento dentro de la materia, 4 estudiantes con un rendimiento bueno dentro de la materia y finalmente 3 estudiantes con un desempeño deficiente dentro de la materia, de un total de 38 estudiantes. Al momento del estudio se encontraban cursando el segundo semestre de bachillerato y todos habían cursado previamente la materia de desarrollo del pensamiento lógico algebraico, en esta asignatura, uno de los tópicos a definir es la simplificación de fracciones algebraicas, por tal motivo ya se tienen los conocimientos necesarios. Durante la implementación de las tareas se realizó en forma individual, con la finalidad de que cada uno tuviera la oportunidad de realizar las operaciones necesarias y explicar los procedimientos realizados.

3.5 Análisis de la información

Una vez que se completaron las tareas, se procedió al análisis de la información obtenida. Los datos recopilados fueron revisados con el objetivo de obtener una comprensión profunda y detallada de los errores cometidos por los estudiantes de nivel medio superior al resolver tareas relacionadas con fracciones y funciones racionales.

Se adoptó un enfoque cualitativo, utilizando como marco de referencia el modelo del sentido numérico propuesto por Reys (Reys 1999), el cual fue vinculado con la clasificación de errores planteado por Caballero y Juárez (Caballero y Juárez 2016).

El análisis se centró en los errores cometidos por los estudiantes en cada reactivo de las tareas propuestas, tanto en operaciones aritméticas como en funciones racionales, considerando el procedimiento, justificación y resultado proporcionado por cada estudiante. Este análisis no solo buscó identificar las dificultades recurrentes en la comprensión y resolución de las tareas, sino también ofrecer una visión clara de los obstáculos que enfrentan los estudiantes en este tema específico.

Posteriormente se cuantificó cuantos estudiantes cometieron cada tipo de error, lo cual permitió obtener un panorama general sobre los errores más frecuentes, analizando patrones y regularidades, así como sus posibles causas relacionadas con una débil comprensión del sentido numérico.

CAPÍTULO 4
RESULTADOS

4.1. Introducción

En el presente capítulo se reportan los resultados obtenidos a partir de la implementación del instrumento de recolección de datos. El objetivo principal es identificar los errores cometidos por los participantes. En este estudio se busca documentar el tipo de errores que cometen los estudiantes al operar con fracciones y funciones racionales.

4.2. Resultados

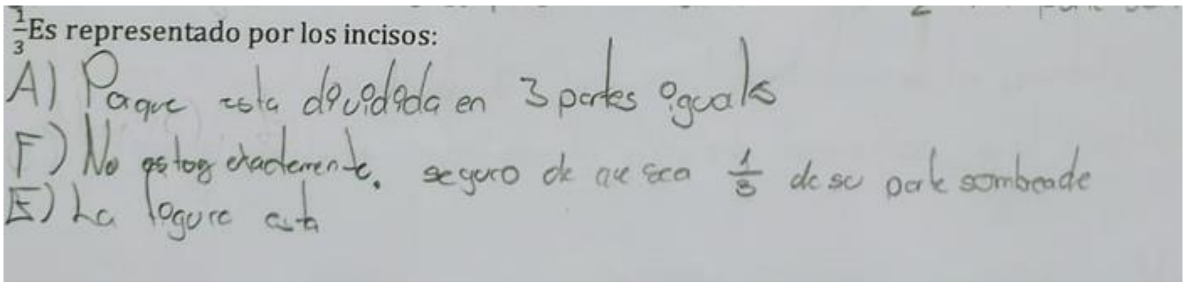
Recordemos que el marco teórico tiene como elemento central los principios de sentido numérico establecidos por Reys (Reys, 1999), los cuales permiten analizar como los estudiantes utilizan y comprenden los números en diversos contextos, complementariamente se retoman los aportes de Barrera y Reyes (Barrera y Reyes 2019) quienes delimitan el análisis del sentido numérico en tres dimensiones: ontológica, epistemológica y didáctica, las cuales orientan en la selección y diseño de tareas contextualizadas que promueven el cálculo mental y escrito así como la interpretación significativa de las operaciones numéricas, a partir de estas clasificaciones es como se han analizado los errores presentados en las dos tareas que se implementaron. Cabe señalar que la primera de ellas está centrada en aritmética, mientras que la segunda aborda funciones racionales.

4.2.1. Errores cometidos por la falta de sentido numérico según la clasificación de Reys

En este apartado se analizará la primera parte de la tarea.

a. Comprensión del significado y tamaño de los números.

Esta primera clasificación de acuerdo con Reys es la capacidad para identificar y representar cantidades conocidas, para compararlas con otras. En 1 de los 10 participantes presentó este error. Una evidencia se muestra en el participante número 5.

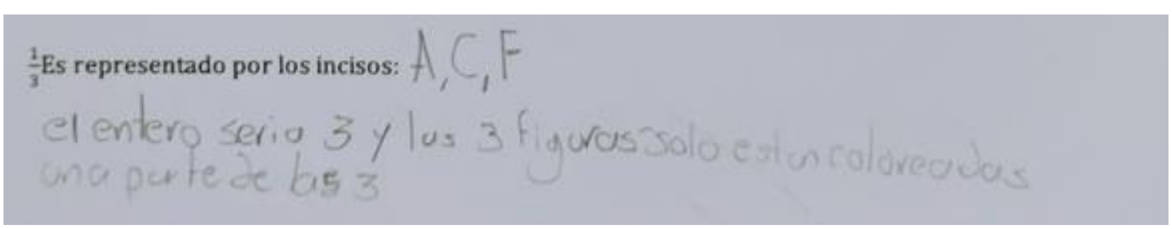


En la imagen se observa que no se le da sentido a la representación de fracción debido que una figura dividida en partes desiguales sea fracción, pero aun así la toma como respuestas correctas.

b. Comprensión y uso de representaciones equivalentes de los números.

Esta segunda clasificación implica errores en la identificación de la equivalencia de número en diferentes registros de representación; 2 de los 10 participantes ha presentado esta carencia, es de suma importancia señalar que el error cometido en esta clasificación está estrechamente relacionado con la clasificación número 6 de Reys.

Una evidencia se muestra en el participante número 6.



En la imagen se observa que no se identifican fracciones equivalentes debido a que una figura dividida en 6 partes iguales con dos de ellas coloreadas no la considera como la fracción solicitada.

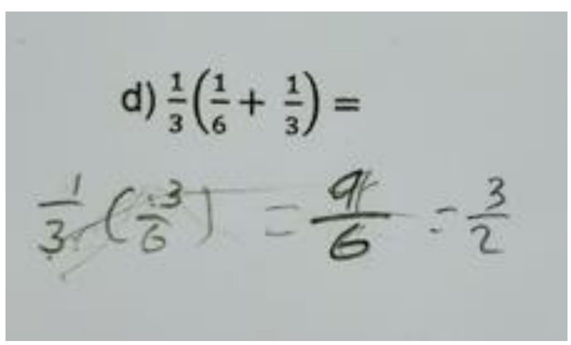
c. Comprensión del significado y efecto de las operaciones.

Esta tercera clasificación ha destacado notablemente, ya que es la que más se ha hecho presente en la primera parte de la tarea, esto se debe a que la mayoría de los participantes han mostrado errores en los que no se reconocen diversos tipos de cambios en los números al aplicar operaciones.

Dentro de esta clasificación podemos encontrar diferentes tipos de errores, los cuales se muestran a continuación.

7 de los 10 participantes presentaron errores al aplicar los algoritmos ya sea en la multiplicación o suma de fracciones.

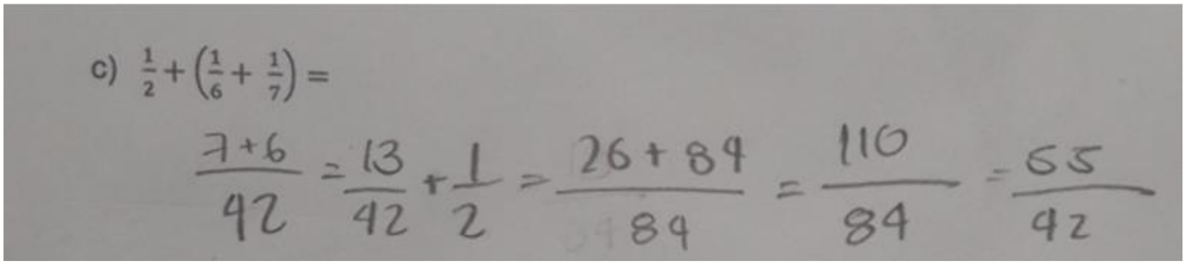
Evidencia participante número 3.



En la imagen se observa que las operaciones indicadas eran una suma y posteriormente una multiplicación, la primera se realizó correctamente, pero en la segunda, no se aplicó el algoritmo de la multiplicación, en su lugar, se realizó una multiplicación cruzada.

Bajo esta misma clasificación, 2 de los 10 participantes presentaron errores en el resultado de la multiplicación.

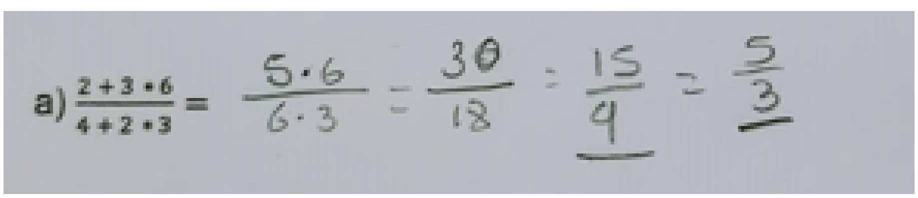
Evidencia participante 4.



En la imagen se observa que al realizar la multiplicación de 1 por 42 el resultado obtenido fue incorrecto.

Otro de los errores que se presentan bajo la tercera clasificación de Reys, es en el orden de precedencia (sentido a las operaciones), este error se presentó en 6 de los 10 participantes del estudio.

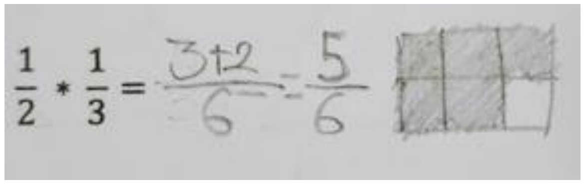
Evidencia participante 3.



En la imagen se observa que no se respetó el orden de operaciones; simplemente se realizaron en el orden de aparición.

5 de los 10 participantes presentaron errores en los que realizaron una operación diferente a la indicada.

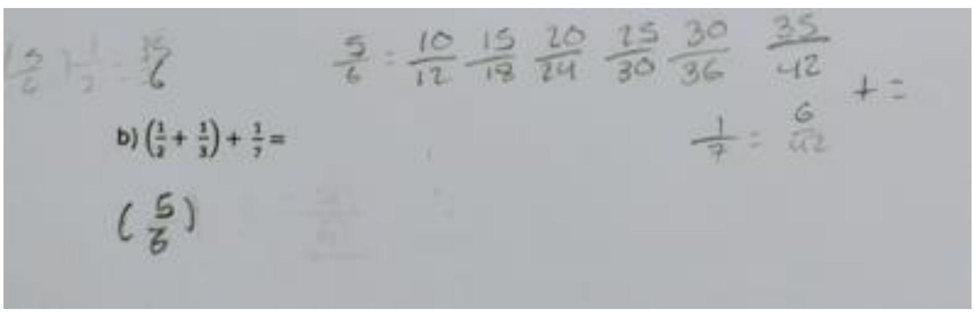
Evidencia participante 6.



En la imagen se observa que en lugar de aplicar el algoritmo de la multiplicación que es la operación indicada, se realizó una suma de fracciones, el resultado de esta operación errónea, lo representó de manera correcta gráficamente.

Finalmente, 1 de los 10 participantes en el estudio presentó fallas debido a la parcialidad en la resolución del ejercicio.

Evidencia participante 3.

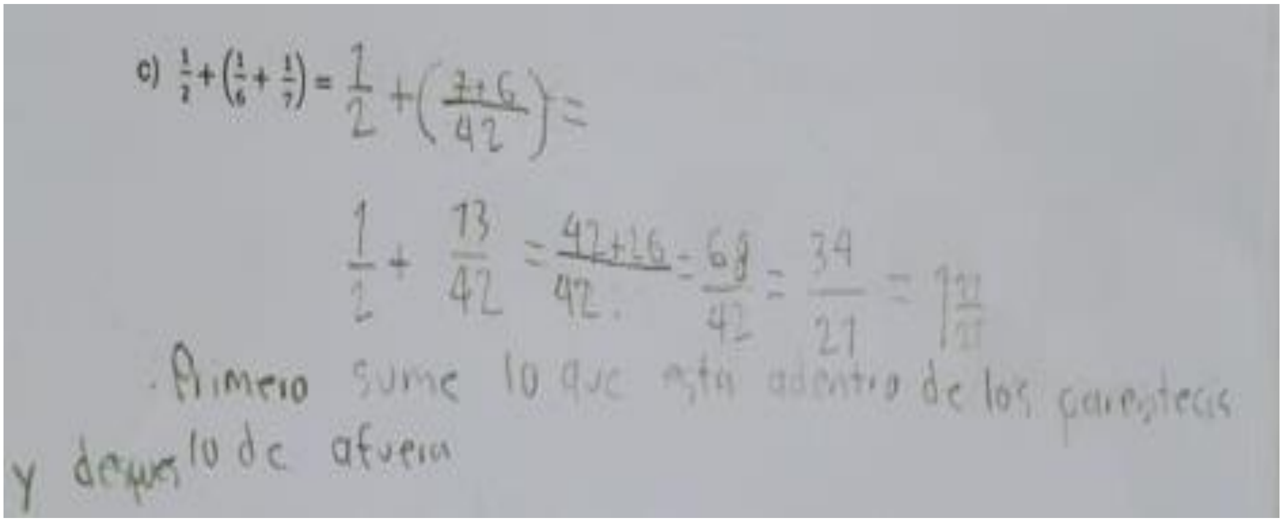


En la imagen se puede observar que únicamente se llevó a cabo una de las dos operaciones que se indicaron, solo se realizó la primera suma, esta situación no fue debida a falta de tiempo, pues el ejercicio está a la mitad de la tarea y esta fue completada en su totalidad.

d. Comprensión y uso de expresiones equivalentes.

Uno de los 10 participantes presenta errores bajo esta clasificación de Reys; la cual señala que se deben representar los números de diferentes maneras utilizando operaciones aritméticas, como suma y producto, o identificar números racionales con su representación decimal.

Evidencia participante 1.



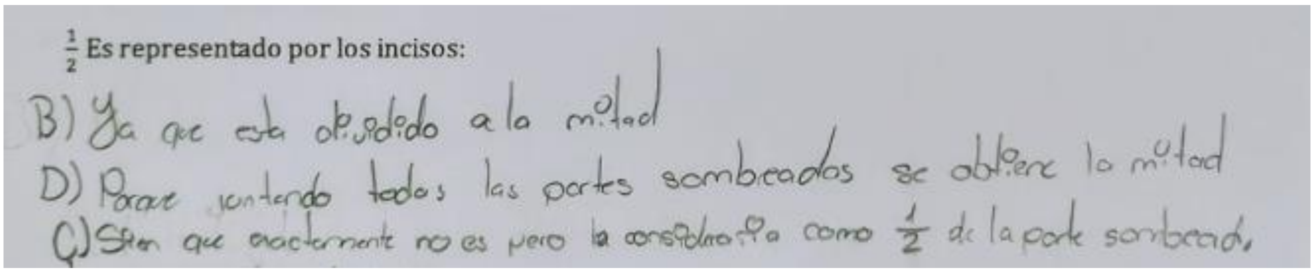
En la imagen se observa que, al obtener el resultado de las operaciones, este se simplifica de forma correcta, pero al pasar de una fracción propia a una fracción mixta se realiza la operación de una manera incorrecta.

e. Estrategias flexibles de cálculo y conteo para cálculos mentales, cálculos escritos y uso de calculadora.

En la primera parte de la tarea, no se incluyeron ejercicios que ayudarán a identificar la falta de sentido numérico en este campo específico. Para detectar esta carencia, es necesario proponer ejercicios que involucren la descomposición de números en diversas formas, facilitando así cálculos más eficientes.

f. Puntos de referencia de medida.

1 de los 10 participantes presentó errores que caen en esta clasificación, en la cual se debe identificar puntos de referencia útiles para realizar operaciones aritméticas y estimaciones numéricas.
Evidencia participante 5.



En la imagen se observa que se identificó una figura en la que no se respeta la definición de fracción y la parte coloreada se considera como la mitad de esta, “sabiendo que exactamente no es, pero considerándola como correcta”.

Es importante mencionar que, en la primera parte de la tarea, un participante no cometió errores, según lo descrito por Reys cumple con los 6 parámetros de desarrollo del sentido numérico.

La siguiente tabla expresa de manera más concreta qué tipo de errores se clasificaron en cada rubro según las definiciones del sentido numérico de Reys. En la primera columna se puede observar la clasificación que Reys realiza de cada aspecto del sentido numérico, la segunda columna, clasifica los errores que cometen los participantes relacionados con el sentido numérico según Reys, se debe señalar, que la clasificación de los errores, se hizo basada en la clasificación de Caballero y Juárez, Caballero y Juárez (2016), en la última columna, se establece que numero de participante es el que comete dicho error.

Sentido numérico según la clasificación de Reys	Errores cometidos por los participantes	Participante
1.- Comprensión del significado y tamaño de los números.	Interpretación de la definición de fracción.	5
2.- Comprensión y uso de representaciones equivalentes de los números.	Determinación de fracciones equivalentes.	6 y 9
3.- Comprensión del significado y efecto de las operaciones.	Algorítmico, en las operaciones aritméticas, en el orden de operaciones, en la operación y parcialidad en la resolución de ejercicios.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 y 10
4.- Comprensión y uso de expresiones equivalentes.	Simplificación de resultados.	1
5.- Estrategias flexibles de cálculo y conteo para cálculos mentales, cálculos escritos y uso de calculadora.	No aplica.	

6.- Puntos de referencia de medida.	Identificación de fracciones equivalentes.	5

Ahora procederemos a analizar la segunda parte de la tarea, centrada en funciones racionales. En esta, los resultados muestran que, aunque algunos participantes presentan un buen nivel de comprensión de ciertos aspectos del sentido numérico, otros aún enfrentan dificultades en áreas clave como el manejo de fracciones, la aplicación de propiedades algebraicas y la resolución de operaciones.

Como se mencionó, en las actividades realizados no se incluye ningún ejercicio que permitiera identificar que los estudiantes hayan utilizado alguna estrategia que permitiera determinar si poseen la habilidad 5.-Estrategias flexibles de cálculo y cálculo mental y escrito, incluyendo el uso flexible de dispositivos electrónicos, que corresponde a la habilidad número 5 del desarrollo del sentido numérico según Reys.

En las clasificaciones del sentido numérico en las que los estudiantes no presentaron errores son las siguientes:

1.- Comprensión del significado y tamaño de los números

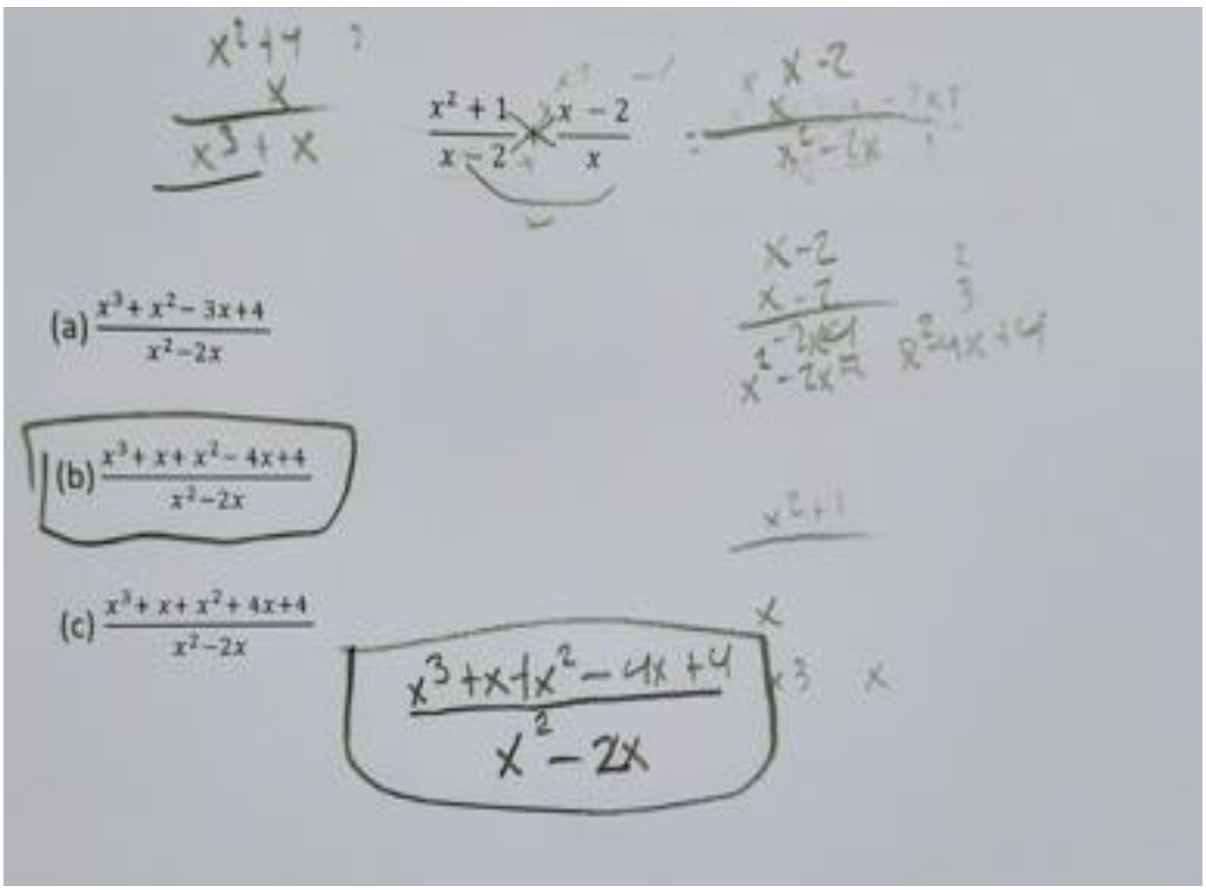
6.- Referencias de medición.

La comprensión del significado y tamaño de los números se refiere a la habilidad de los estudiantes para identificar y representar cantidades conocidas, y compararlas correctamente con otras. Esta capacidad permite entender cómo se relacionan los números entre sí y cómo se pueden utilizar en operaciones matemáticas. Las referencias de medición, por su parte, se enfocan en la capacidad de los estudiantes para identificar puntos de referencia útiles, como las unidades de medida, que facilitan la realización de operaciones aritméticas y estimaciones numéricas de forma precisa.

2.- Comprensión y uso de representaciones equivalentes de los números.

3 de los 10 participantes presentan errores bajo esta clasificación de Reys.

Evidencia participante 3.



En la imagen se puede observar que en el resultado obtenido de las operaciones obtiene términos semejantes, de los cuales ignora su existencia y reporta el resultado sin reducirlos.

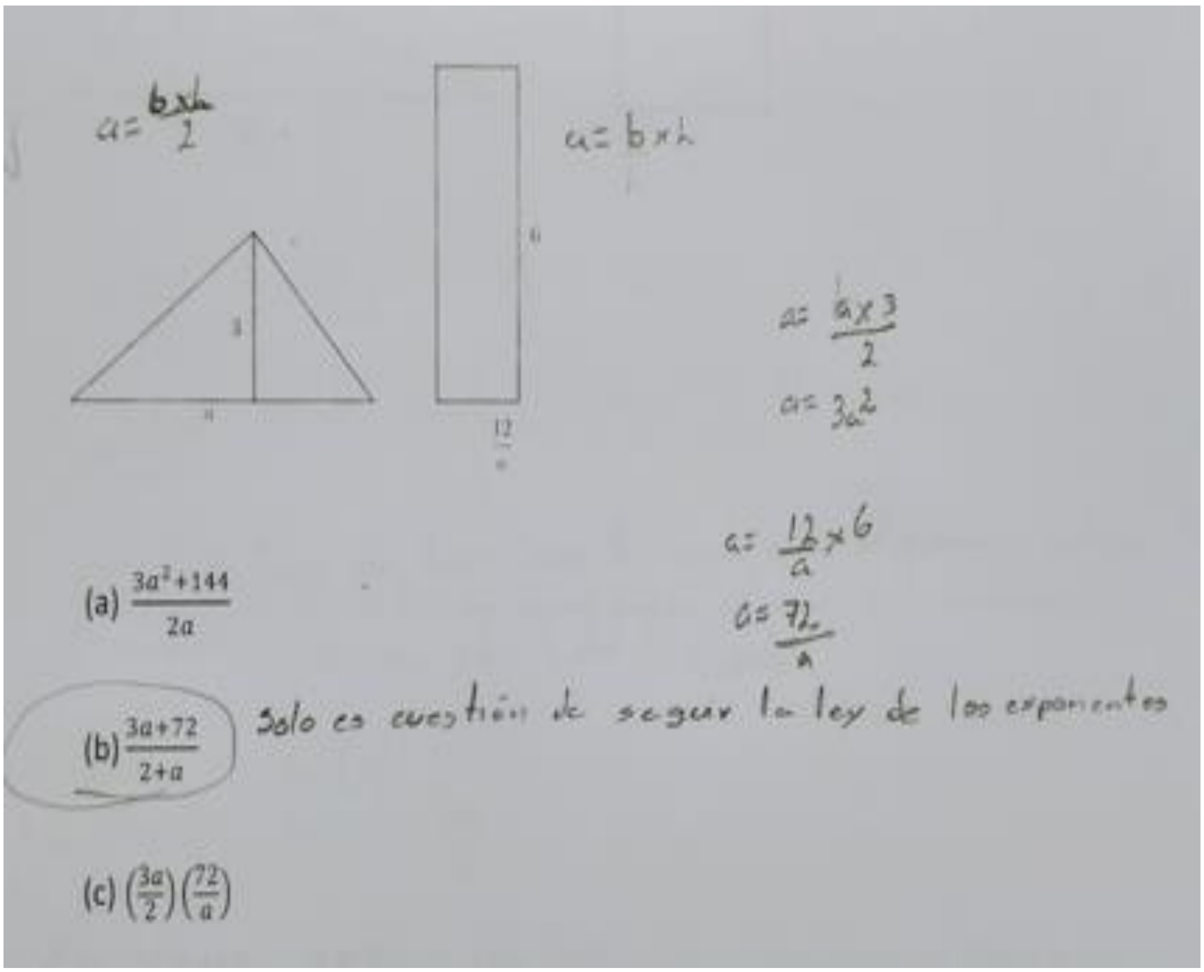
3.- Comprensión del significado y efecto de las operaciones.

Nuevamente esta clasificación de Reys, es en la que recae la mayoría de los errores cometidos por los participantes.

No desarrollan la suma de fracciones indicada.

5 de los 10 participantes cometen este error.

Evidencia participante 8.

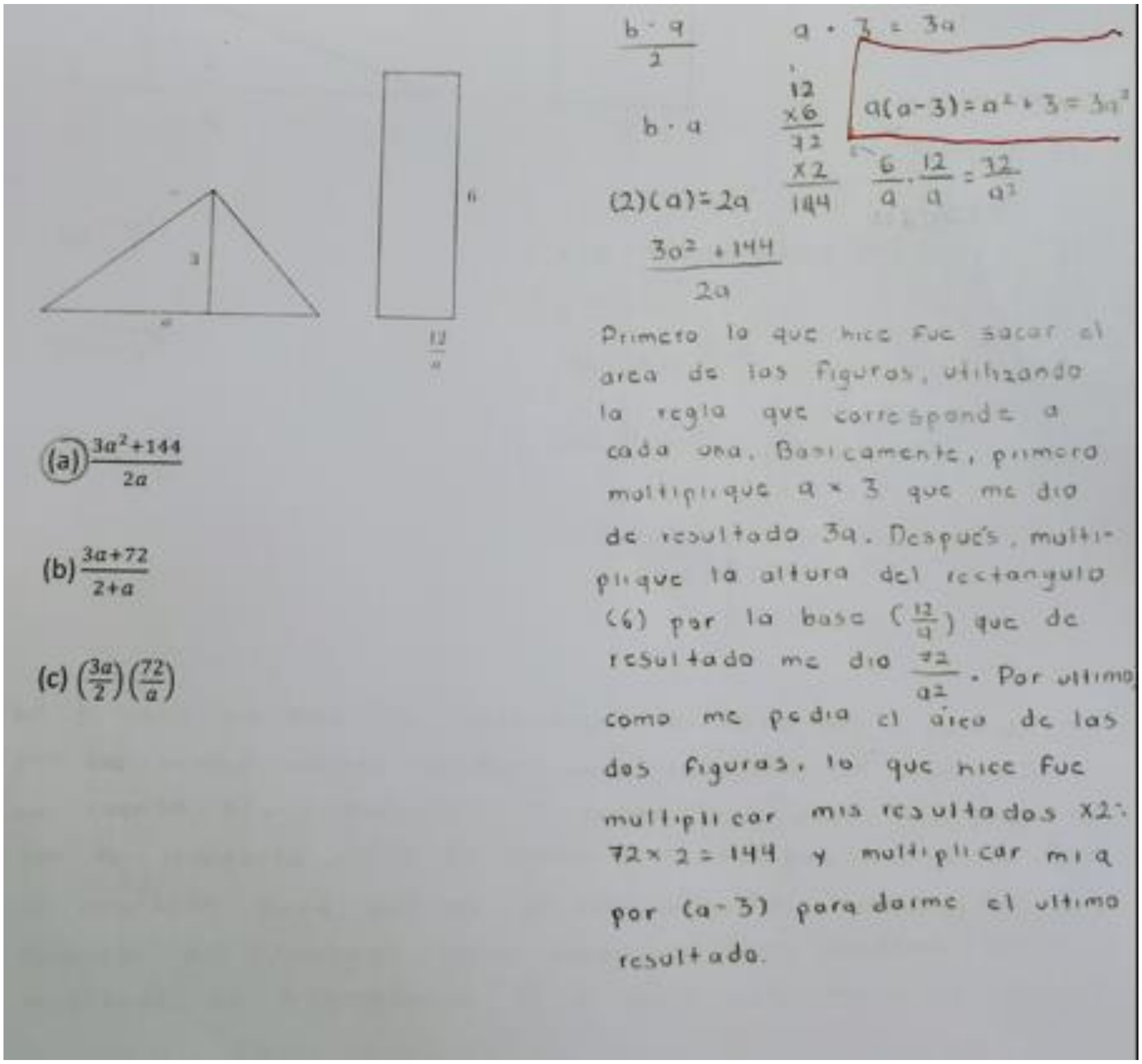


En la imagen se observa que no se desarrolló correctamente la suma de fracciones indicada, lo que impide obtener una respuesta correcta. Solo se identificaron ambas áreas como la suma, sin realizar el procedimiento adecuado.

No usan la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

2 de los 10 participantes presenta este error.

Evidencia participante 10.

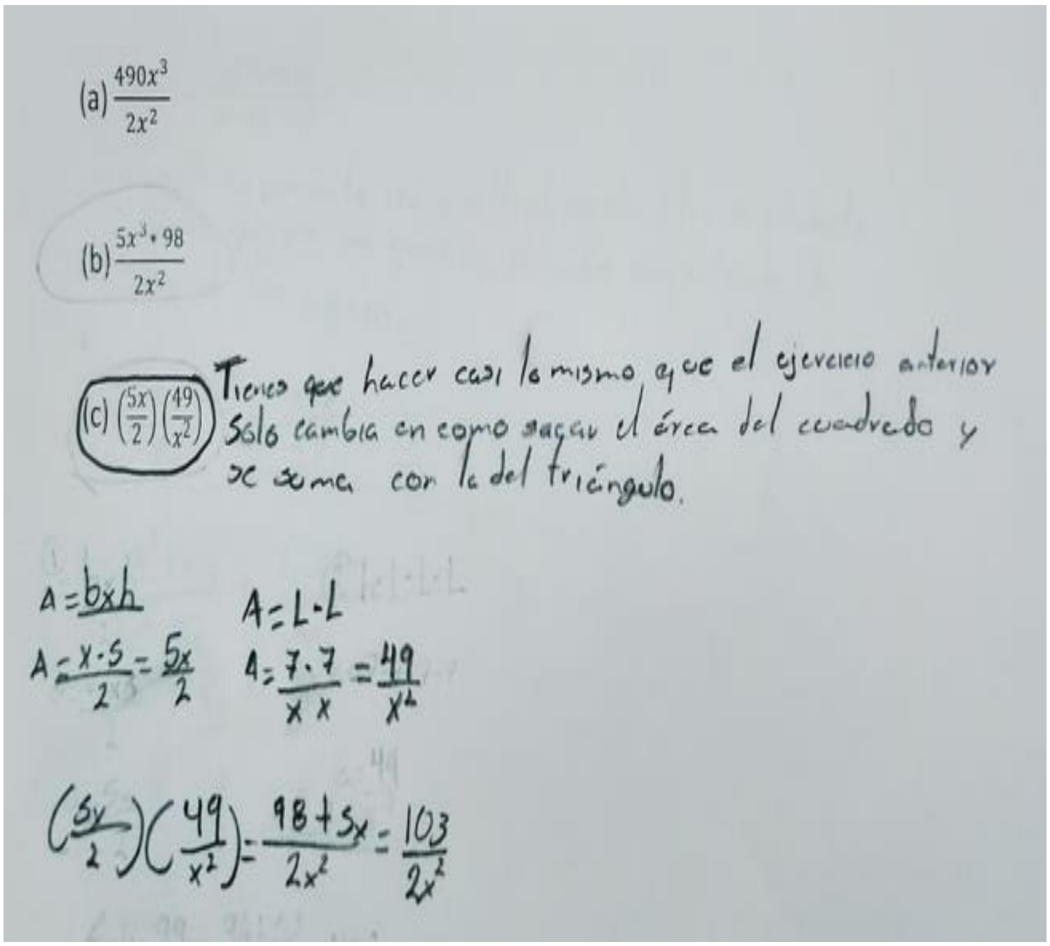


En la imagen se puede observar que no realizó correctamente la multiplicación del monomio por el polinomio, al multiplicar a por a se obtuvo el resultado correcto, pero al multiplicar a por 3 se obtuvo 3 como resultado, desapareciendo la a y realizando un cambio de signo.

No aplica el algoritmo de la multiplicación.

Uno de los 10 participantes comete este tipo de error.

Evidencia participante 8.

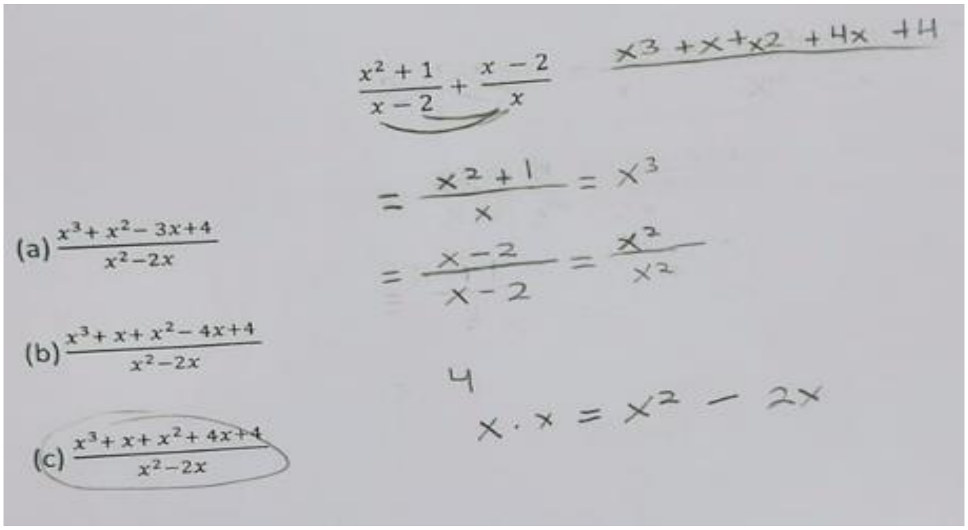


En la imagen se puede observar que al momento de desarrollar la multiplicación indicada se realizó el algoritmo de una suma de fracciones, desapareciendo la literal x.

No le da sentido a las operaciones que realiza.

1 de los 10 participantes cometen este tipo de error.

Evidencia participante 10.

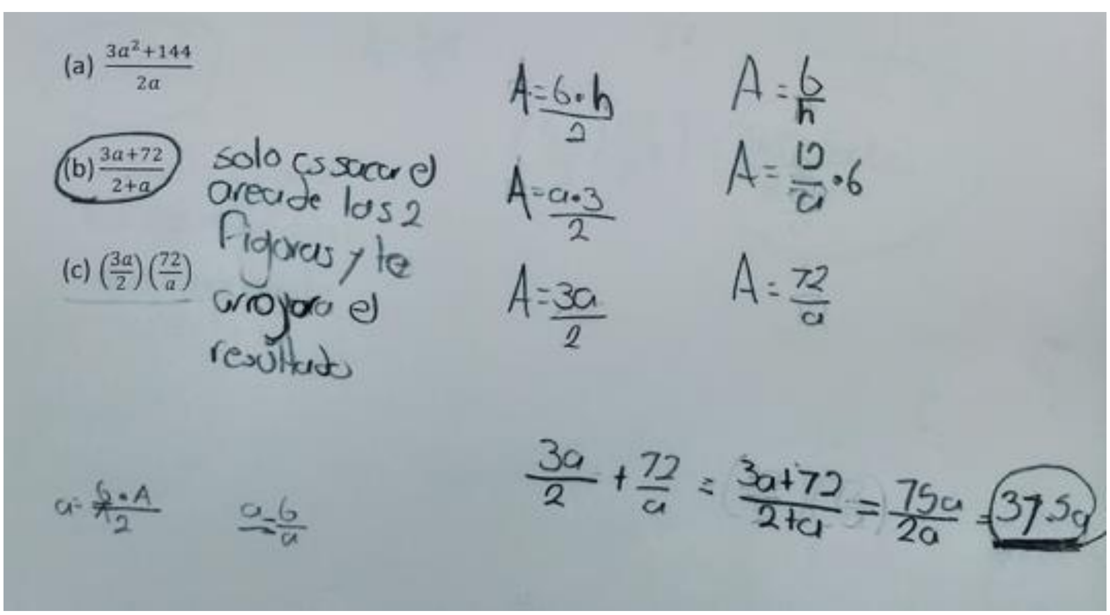


En la imagen se observa que no se les da sentido a las operaciones que realiza, ya que en la resta entre x y 2 el resultado que se obtiene es x elevada al cuadrado y al dividir x elevada al cuadrado más uno entre x el resultado obtenido es x elevado al cubo.

4.- Comprensión y uso de expresiones equivalentes.

3 de los 10 participantes cometen este tipo de error.

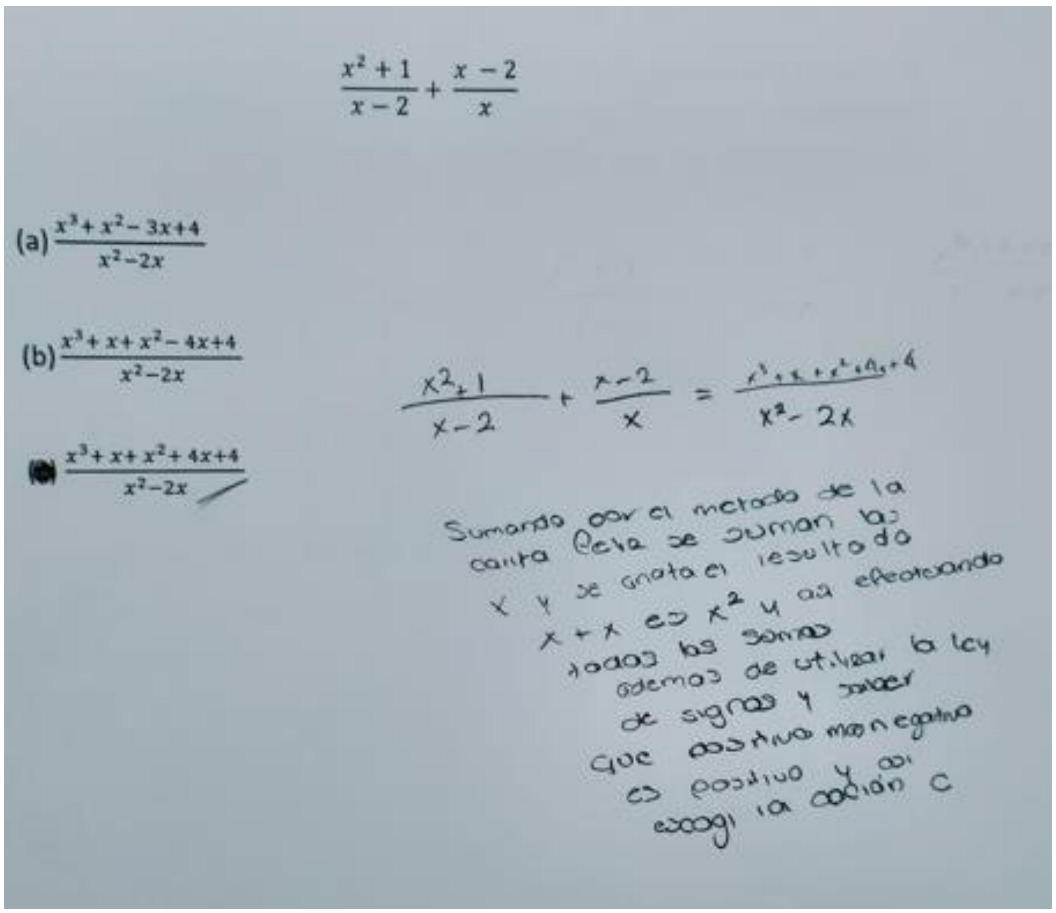
Evidencia participante 6.



En la imagen se puede observar que se realizó una suma de términos que no son semejantes aunado a una división de estos términos, en donde no se toman en cuenta las definiciones necesarias para realizar esta operación.

En esta segunda parte de la tarea, hubo 3 participantes de los cuales no se puede determinar el tipo de error cometido ya que no proporcionaron información de los cálculos realizados que pueda ayudar a identificarlos.

Evidencia participante 9.



Es importante mencionar que, en la segunda parte de la tarea, dos participantes no cometieron ningún tipo de error, cumpliendo así con los 6 parámetros del desarrollo del sentido numérico establecidos por Reys, lo que sugiere que su sentido numérico está desarrollado.

La tabla siguiente presenta de manera detallada la clasificación de errores conforme a las definiciones del sentido numérico según Reys. En la primera columna se categoriza cada aspecto del sentido numérico según Reys. La segunda columna clasifica los errores cometidos por los participantes en relación con el sentido numérico, tomando como base la clasificación de Caballero y Juárez (2016). La última columna especifica qué participante cometió cada error.

Sentido numérico según la clasificación de Reys	Errores cometidos por los participantes.	Participante
1.- Comprensión del significado y tamaño de los números.	No hubo error.	0
2.- Comprensión y uso de representaciones equivalentes de los números.	No se simplifican términos semejantes.	3, 4 y 5
3.- Comprensión del significado y efecto de las operaciones.	No se desarrolla la suma de fracciones No se multiplico el monomio por el polinomio No se aplica el algoritmo de la multiplicación No se les da sentido a las operaciones realizadas.	2, 6, 8, 9 y 10

4.- Comprensión y uso de expresiones equivalentes.	Se suman términos que no son semejantes.	6, 8 y 10
5.- Estrategias flexibles de cálculo y conteo para cálculos mentales, cálculos escritos y uso de calculadora.	No hubo error.	0
6.- Puntos de referencia de medida.	No hubo error.	0

4.3. Categorización de la información

Para presentar la información obtenida durante la aplicación de las tareas, los errores cometidos por los estudiantes se clasificaron en 10 tipos.

1. Errores algorítmicos.

En esta clasificación se incluyen los errores donde no se sigue el algoritmo correcto para la suma o la multiplicación, ya sea de fracciones aritméticas o funciones racionales.

2. Errores en la operación aritmética

En este contexto se agrupan las operaciones realizadas de las cuales se obtuvo un resultado incorrecto.

3. Error en el orden de las operaciones (no se les da sentido a las operaciones realizadas).

En este apartado se abordan los errores derivados de la falta de sentido a las operaciones.

4. Error de operación

En este apartado se clasifican los errores cometidos por realizar una operación diferente a la indicada.

5. Error de omisión de signo

Este tipo de error no entra dentro de la clasificación de Reys, pero 4 de los 10 participantes lo cometieron, es este error es por no escribir el signo de la operación que se realiza.

6. Error en la parcialidad en la resolución del ejercicio

En este apartado se clasifican los errores cometidos por realizar solo una de las operaciones indicadas en el ejercicio, dejando incompleto el proceso requerido.

7. Error de sintaxis

Este tipo de error no entra dentro de la clasificación de Reys, pero 4 de los 10 participantes lo cometieron, es el error que se comete por escribir el signo de igual de manera incorrecta, señalando que dos cosas diferentes son iguales.

8. Error de interpretación

Este error se comete en figuras divididas en fracciones, en las que no se respeta la definición de fracción, pues solo se divide la figura, pero no en partes iguales.

9. Error en conceptos matemáticos

Este error se produce cuando no se da sentido a las fracciones equivalentes, reconociendo que dos fracciones equivalentes pueden representar la misma cantidad.

10. Error en la identificación y simplificación de términos semejantes

Este error se comete al no reconocer que dos términos algebraicos tienen la misma parte literal y exponente, además de no operar con estos.

Para llevar a cabo esta clasificación, se han considerado las categorizaciones de errores establecidas por Caballero y Juárez. Estas categorizaciones se han contrastado con las definiciones de sentido numérico detalladas por Reys. Al integrar ambos enfoques, se ha creado un marco robusto que permite identificar y analizar con mayor precisión las distintas tipologías de errores.

4.4. Identificación de patrones, regularidades, tendencias o discordancias

Los patrones de errores que se identificaron fueron los siguientes:

- En la clasificación número 3 de Reys que es "Comprensión del significado y efecto de las operaciones" los participantes demostraron diferentes tipos de errores al realizar cálculos numéricos, estos errores fueron consistentes al operar con funciones racionales.
- Al tener errores en los algoritmos de la suma o multiplicación de fracciones aritméticas, en las funciones racionales no se desarrolla la suma ni la multiplicación.
- Al no darle sentido a las operaciones que realiza no respeta el orden coherente de estas y tampoco las realiza en su totalidad.

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

5.1. Introducción

En este capítulo se discuten los resultados presentados anteriormente, se ofrecen conclusiones de la investigación en relación con los objetivos del trabajo para abordar la pregunta de investigación. Asimismo, se comparan los resultados obtenidos en este estudio con los trabajos revisados, y se reflexiona sobre los alcances del trabajo. El análisis se enfocó en determinar la influencia del sentido numérico en el aprendizaje de las funciones racionales, resumiendo algunos aspectos en un marco conceptual para establecer una relación entre el sentido numérico y las funciones racionales.

5.2. Conclusiones

En este estudio, se observan diversos tipos de errores, los cuales fueron analizados a través de las categorías propuestas por Reys (1999). La categorización de estos errores aporta elementos para que dichos errores puedan ser considerados al diseñar tareas de aprendizaje.

Las conclusiones obtenidas en la investigación pueden resumirse de la siguiente manera:

1. **Falta de comprensión del significado y tamaño de los números**: Se observó que un participante interpretó incorrectamente la definición de fracción, indicando una falta de comprensión básica de representaciones numéricas.
2. **Problemas con representaciones equivalentes de los números**: Varios participantes tuvieron dificultades para determinar fracciones equivalentes, lo cual es esencial para la manipulación efectiva de números en diferentes formas.
3. **Errores en el significado y efecto de las operaciones**: Esta categoría destacó como la más problemática, con errores que incluyen aplicar

incorrectamente algoritmos, no seguir el orden de operaciones adecuado, realizar operaciones incorrectas y no completar las operaciones requeridas.

4. **Dificultades con expresiones equivalentes**: Un participante cometió errores al intentar simplificar resultados de operaciones aritméticas de manera incorrecta, mostrando problemas en la representación y manipulación de números de diferentes maneras.
5. **Ausencia de estrategias flexibles de cálculo**: No se identificaron errores específicos bajo esta clasificación en la primera parte del estudio, lo cual sugiere que los participantes pueden haber sido competentes en la aplicación de métodos de cálculo adecuados para las tareas específicas.
6. **Desafíos en identificar puntos de referencia de medida**: Se observó que un participante tuvo dificultades para identificar puntos de referencia útiles para realizar operaciones aritméticas y estimaciones numéricas.

En resumen, los resultados indican que los estudiantes presentan una variedad de dificultades en el desarrollo del sentido numérico, particularmente en áreas críticas como comprensión de números, manipulación de representaciones equivalentes, aplicación correcta de algoritmos y orden de operaciones. Estos hallazgos destacan la necesidad de integrar estrategias pedagógicas que fortalezcan el sentido numérico desde etapas tempranas para mejorar la precisión en la resolución de problemas complejos.

En la segunda parte del estudio, que está centrado específicamente en el trabajo con funciones racionales, se obtuvieron las siguientes conclusiones:

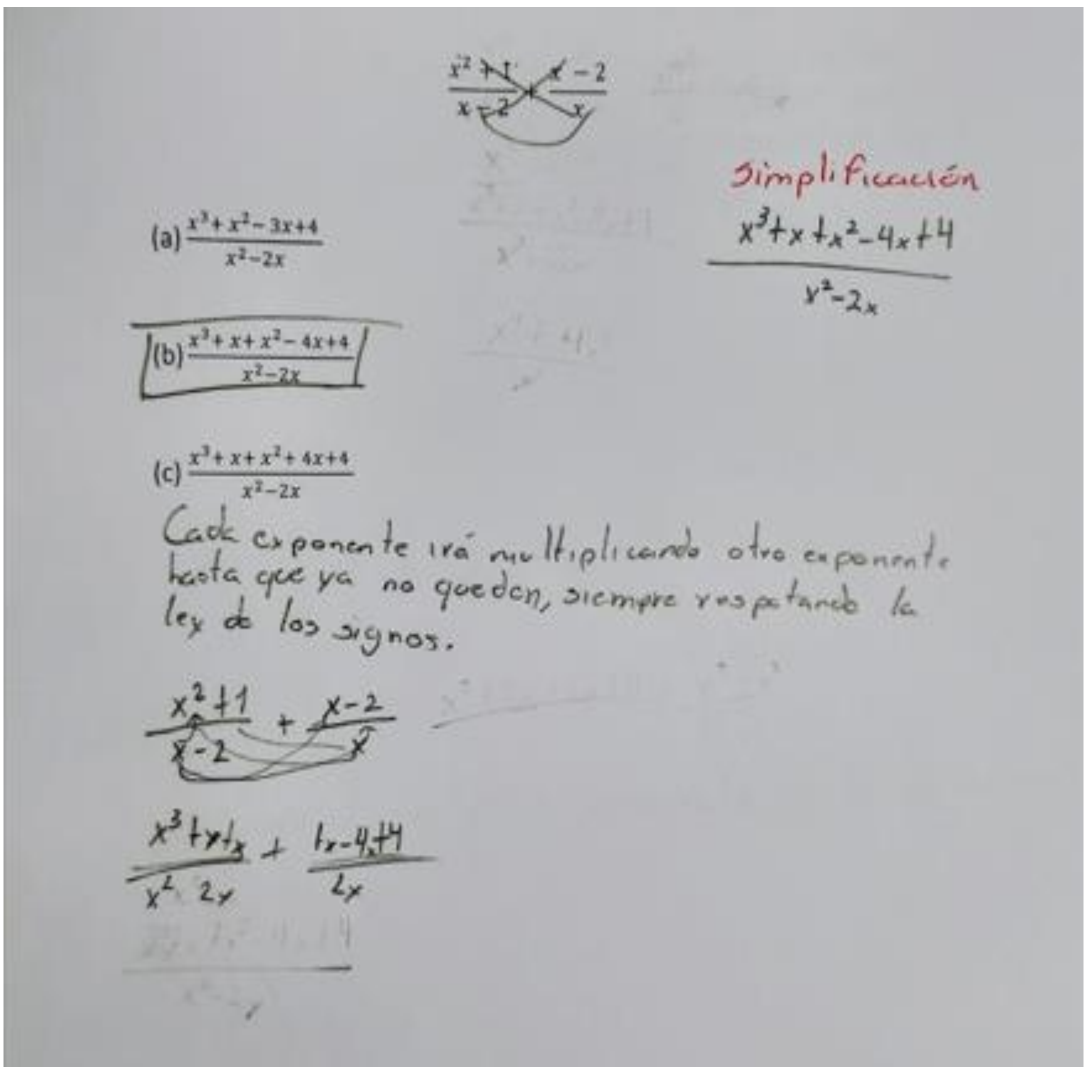
1. **Comprensión del significado y tamaño de los números, estrategias flexibles de cálculo y conteo (se debe recordar que no se incluyeron ejercicios para observar esta habilidad), y puntos de referencia de medida**: En estas áreas no se observaron errores entre los participantes, lo que sugiere un buen entendimiento y habilidades adecuadas en la interpretación y manipulación numérica básica.

2. **Comprensión y uso de representaciones equivalentes de los números**: Tres de los diez participantes cometieron errores al no simplificar términos semejantes adecuadamente. Este hallazgo señala dificultades en reconocer y aplicar equivalencias numéricas en contextos específicos.
3. **Comprensión del significado y efecto de las operaciones**: Esta categoría nuevamente mostró ser problemática, con varios tipos de errores identificados:
    - Cinco participantes no desarrollaron correctamente la suma de fracciones indicada.
    - Dos participantes no utilizaron la propiedad distributiva del producto respecto a la suma.
    - Un participante no aplicó el algoritmo correcto para la multiplicación.
    - Un participante no atribuyó un significado coherente a las operaciones realizadas.
4. **Comprensión y uso de expresiones equivalentes**: Tres de los diez participantes cometieron errores al sumar términos que no son semejantes y al realizar divisiones sin seguir las definiciones matemáticas adecuadas.
5. **Estrategias flexibles de cálculo y conteo**: No se identificaron errores específicos bajo esta clasificación en la segunda parte del estudio, ya que no se contó con ejercicios que permitieran observar esta habilidad.
6. **Puntos de referencia de medida**: Todos los participantes demostraron comprensión adecuada al identificar puntos de referencia útiles para realizar operaciones y estimaciones numéricas, no se observaron errores en esta área.

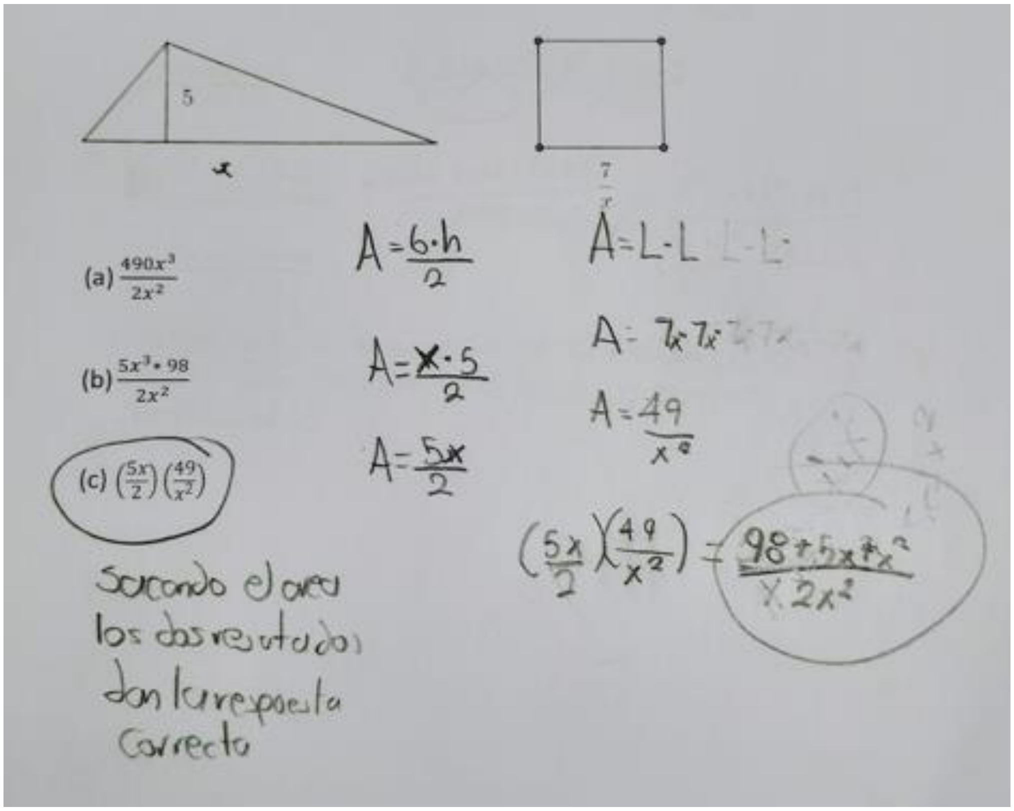
En resumen, los resultados indican que los estudiantes enfrentan dificultades principalmente en áreas relacionadas con la manipulación y comprensión de operaciones más complejas que involucran funciones racionales. La presencia de errores en la simplificación de términos semejantes y la aplicación incorrecta de algoritmos resalta la necesidad de mejorar la enseñanza en estas áreas, utilizando estrategias que fortalezcan las habilidades clave en el desarrollo del sentido numérico.

En cuanto a la pregunta de investigación, la cual busca identificar los errores más comunes cometidos por los estudiantes de nivel medio superior al operar con funciones racionales y como estos pueden ser categorizados utilizando los elementos del sentido numérico propuestos por Reys, se concluye que la categoría de “La comprensión y el significado de las operaciones” es la que más problemas causa, ya que los estudiantes presentaron dificultades al aplicar correctamente los algoritmos e identificar las propiedades fundamentales, tales como:

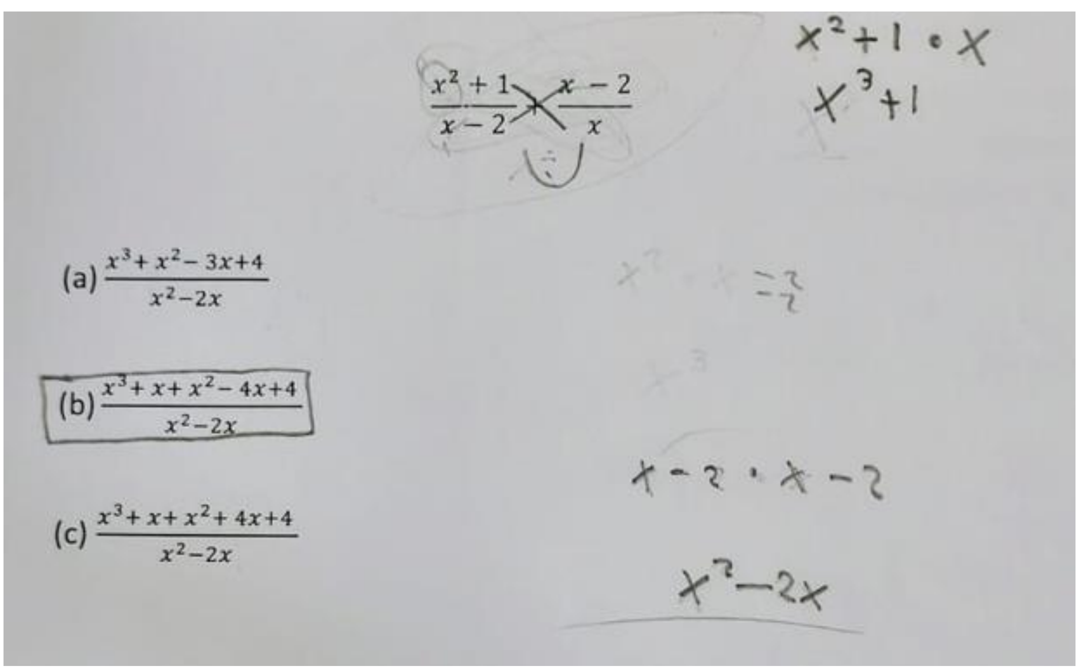
- No realizar la operación indicada



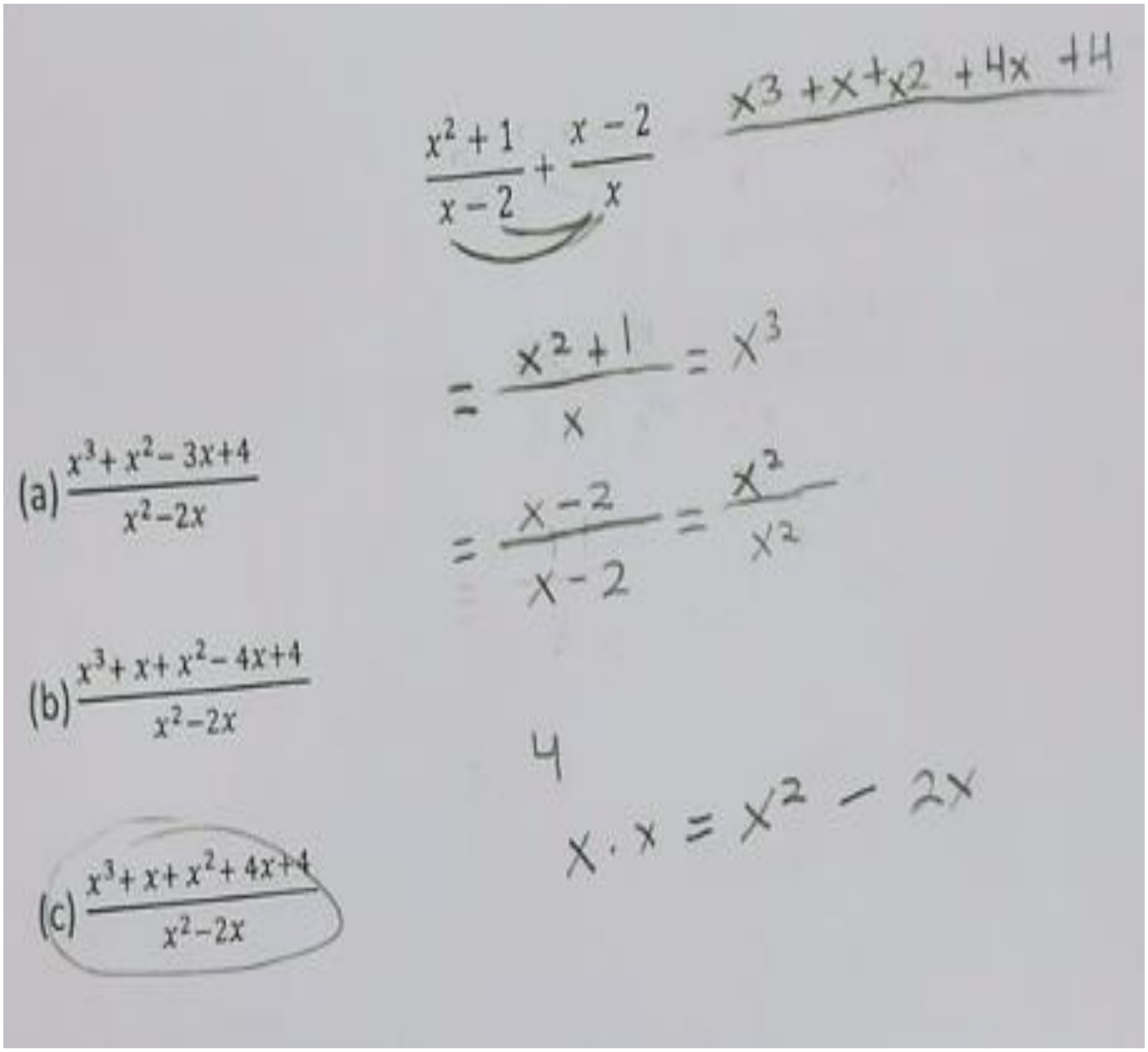
- La aplicación inadecuada de los algoritmos para realizar las operaciones



- La omisión y el uso incorrecto de la propiedad distributiva



- La falta de significado en las operaciones realizadas



De igual manera en la categoría de “La comprensión y el uso de expresiones equivalentes de los números” los estudiantes mostraron dificultades en la manipulación de expresiones algebraicas, tales como:

- No efectuar la simplificación de los términos semejantes

$$\frac{x^2+1}{x-2}+\frac{x-2}{x}$$

(a) $\frac{x^3+x^2-3x+4}{x^2-2x}$

$$\frac{x^3+x+x^2-3x-x+4}{x^2-2x}$$

(b) $\frac{x^3+x+x^2-4x+4}{x^2-2x}$

$$\frac{x^3+x+x^2-4x+4}{x^2-2x}$$

(c) $\frac{x^3+x+x^2+4x+4}{x^2-2x}$

multiplicamos con el método de la carita feliz, de esta forma obtenemos

$$\frac{x^3+x+x^2-3x+x+4}{x^2-2x}$$

ya que multiplicamos los valores

$(x^2+1)(x)$,

$(x-2)(x-2)$

obteniendo

$x^3+x+x^2-3x-x+4$

y para la parte de abajo

$(x-2)(x)$

teniendo

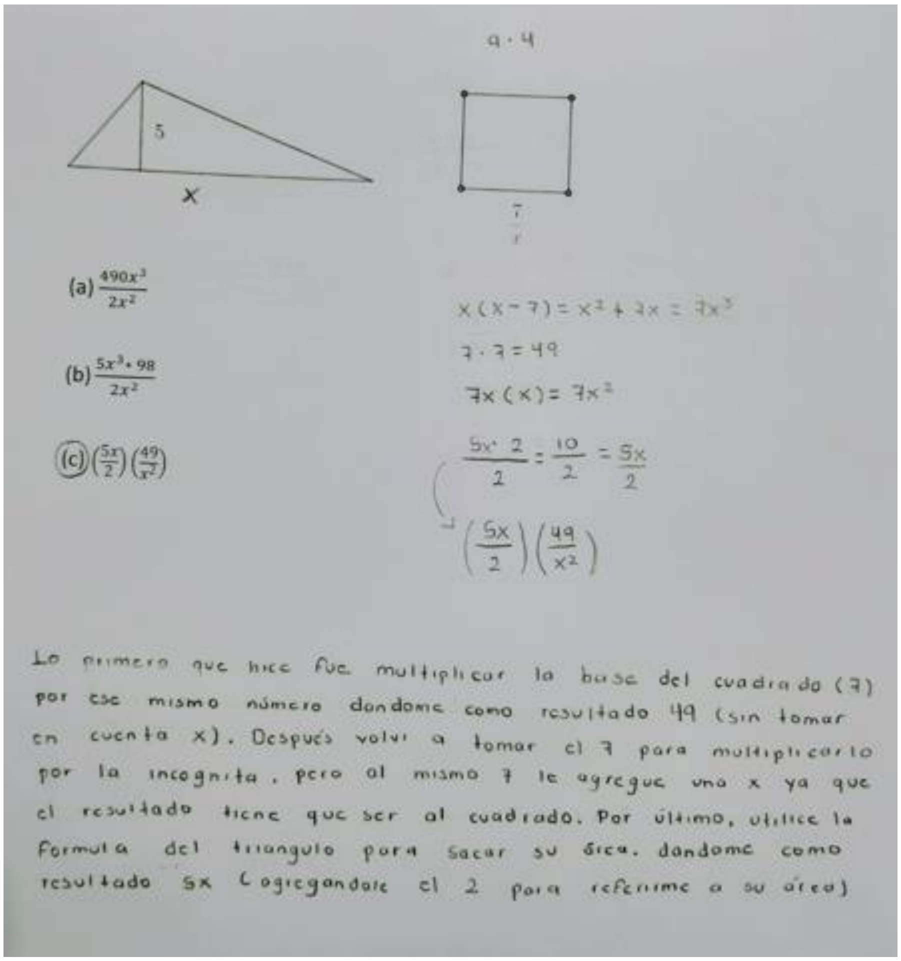
$$\frac{x^3+x+x^2-3x-\cancel{x}+4}{x^2-2x}$$

Simplificando, nos quedamos con el resultado de

$$\frac{x^3+x+x^2-4x+4}{x^2-2x}$$

Finalmente, en la categoría de “Comprensión y uso de expresiones equivalentes” se evidencio que los estudiantes presentaban dificultades en la identificación de términos semejantes, tales como:

- Efectuar operaciones de suma con términos que no son semejantes



Por lo tanto, los principales errores se relacionan con tres categorías del sentido numérico:

- Comprensión del significado y efecto de las operaciones
- Comprensión y uso de representaciones equivalentes de los números
- Comprensión y uso de expresiones equivalentes

5.3. Discusión de los resultados

Los resultados obtenidos en este estudio proporcionan una visión clara de las dificultades que enfrentan los estudiantes en la comprensión y manipulación de funciones racionales. Al comparar estos hallazgos con la literatura existente, se observa una tendencia similar en investigaciones previas, aunque en ellas no se habla de la necesidad y la importancia de desarrollar el sentido numérico el cual se destaca como base para el aprendizaje de conceptos matemáticos más complejos, Steen (1988).

La hipótesis de este trabajo sostiene que los errores más comunes cometidos por los estudiantes de nivel medio superior al operar con funciones racionales están directamente relacionados con deficiencias en el sentido numérico y con una comprensión insuficiente de los fundamentos aritméticos necesarios para trabajar con números racionales y expresiones algebraicas. Este tipo de deficiencias incide negativamente en el entendimiento de conceptos necesarios para avanzar en el aprendizaje matemáticos.

En la revisión de la literatura se consultaron diferentes trabajos, cuyos resultados serán contrastados con los obtenidos en este estudio, para tal efecto se procedió a agruparlos por analogía en sus resultados dando lugar a cuatro rubros, uno de estos rubros es: los estudios que reportan errores cometidos al operar con fracciones algebraicas. En este caen los trabajos de: Brown y Quinn (2006), González (2011), Caballero y Juárez (2016), Zulfa et al. (2020), Baidoo et al. (2020), Hibi y Assadi (2022) y Tastepe y Yanik (2023), los resultados reportados en este rubro coinciden en gran medida con los que obtenemos en este estudio, por ejemplo: Caballero y Juárez (2016), encontraron errores al reducir términos semejantes, (pág. 57 evidencia participante 3), errores al realizar la adición donde la multiplicación está indicada, (pág. 60 evidencia participante 8), error al combinar términos diferentes (pág. 62 evidencia participante 6), entre otros, sin embargo a diferencia de estas investigaciones que enlistan los errores, esta investigación propone una categorización dentro de las 6 dimensiones del sentido numérico propuesto por

Reys (1999), esto, no solo permite describir los errores, sino también comprenderlos a partir del sentido numérico entendido como la capacidad de comprender los números y las operaciones, así como la habilidad para utilizar esta comprensión de manera flexible en la resolución de problemas matemáticos, lo cual otorga un marco más amplio y fundamentado para su análisis Reys (1999).

En el segundo rubro se encuentran las investigaciones acerca del sentido estructural, a este grupo corresponden los aportes de Hoch y Dreyfus (2006) y Vega-Castro et al. (2011), los hallazgos reportados en este rubro guardan una notable semejanza con los obtenidos en este estudio, por ejemplo: Hoch y Dreyfus (2006), encontraron un uso limitado del sentido estructural al momento de resolver ecuaciones con fracciones, aun cuando estas han sido planteadas para que su solución se simplifique mediante la identificación de las estructuras presentes en la ecuación o en alguno de sus términos, así como de las relaciones que existen entre ellas. (pág. 57 evidencia participante 3), Vega-Castro et al. (2011), observan un predominio de estrategias fallidas al trabajar con fracciones en las que interviene la propiedad distributiva, (pág. 59 evidencia participante 10), sin embargo, mientras que dichas investigaciones refieren una debilidad en el sentido estructural, el presente estudio lo explica como limitación en dimensiones específicas del sentido numérico.

El tercer rubro corresponde a las investigaciones del sentido numérico y su importancia, en esta clasificación se incluyen los aportes de: McIntosh et al. (1992), Reys et al. (1999) y Barrera y Reyes (2019), en estos estudios se coincide totalmente con los resultados encontrados en el presente trabajo, además de que se plantea el concepto de sentido numérico, con seis dimensiones: significado y tamaño de números, representaciones equivalentes, efecto de operaciones, expresiones equivalentes, estrategias flexibles y puntos de referencia. McIntosh et al. (1992) muestra la diferencia entre dominio algorítmico y estrategias flexibles, lo cual fue confirmado en el presente trabajo, (pág. 50 evidencia participante 3).

El cuarto y último rubro es: otros enfoques, en esta clasificación se incluyen los aportes de: Rico (1998), Hackenberg y Lee (2011) y Hacker et al. (2019). Estos estudios coinciden en cuanto a la visión que manejan, por ejemplo, la investigación de Rico (1998), plantea que los errores deben verse como oportunidades de aprendizaje, el estudio realizado coincide en que los errores son indicadores de como los alumnos piensan y que debe mejorarse. Hackenberg y Lee (2011), investigan como el razonamiento cualitativo en fracciones está relacionado con el razonamiento algebraico en la resolución de ecuaciones, el estudio contiene hallazgos similares, pues confirman la transferencia de errores aritméticos al álgebra, finalmente el estudio de Hacker et al. (2019) trata sobre dificultades de aprendizaje en temas relacionados con fracciones y funciones racionales, ambos estudios utilizan un análisis detallado de las respuestas de los estudiantes y destacan la importancia de una comprensión profunda y flexible de los conceptos matemáticos.

La investigación realizada ha permitido identificar una serie de errores comunes que los estudiantes de nivel medio superior cometen al operar con funciones racionales, y estos errores se pueden agrupar bajo los principios del sentido numérico propuestos por Reys. Los resultados obtenidos a partir de las tareas implementadas demuestran que los estudiantes enfrentan dificultades significativas al aplicar conceptos fundamentales de la aritmética y el álgebra al operar con fracciones y funciones racionales.

En resumen, nos parece de importancia resaltar que los errores comunes observados en los estudiantes, se pueden categorizar eficazmente utilizando los elementos del sentido numérico de Reys.

La categorización de errores no solo proporciona una herramienta diagnóstica útil, sino que también permite un enfoque más dirigido en la intervención educativa. Al entender las raíces de los errores, se pueden diseñar planes de acción más efectivos.

5.4. Alcances, limitaciones y propuestas a futuro

Este estudio proporciona elementos para futuras investigaciones sobre la relación entre el sentido numérico y el aprendizaje de funciones racionales, destacando áreas clave que requieren atención.

Es fundamental reconocer que este estudio presenta varias limitaciones que podrían afectar la generalización de los resultados a una población más amplia. Es necesario realizar investigaciones más amplias y a largo plazo que no sólo aborden la diversidad de los estudiantes, sino que también evalúen cómo las estrategias educativas pueden influir en el desarrollo del sentido numérico y la comprensión de funciones racionales a lo largo del tiempo. Este enfoque permitirá una comprensión más profunda de cómo mejorar la enseñanza y el aprendizaje en matemáticas.

Se sugiere llevar a cabo estudios más amplios que no solo incluyen una variedad de contextos educativos, como escuelas urbanas y rurales, sino también diferentes niveles socioeconómicos y culturales. Esta diversidad permitirá obtener una visión más completa de cómo se manifiestan las dificultades en el aprendizaje de funciones racionales en diferentes grupos de estudiantes.

5.5. Reflexiones finales

Este estudio ha mostrado que la comprensión y el manejo de las funciones racionales están ligados al desarrollo del sentido numérico. A lo largo de la investigación se observa que los errores que los estudiantes cometen al operar con funciones racionales, responden a patrones de pensamiento que se explican desde las categorías del sentido numérico propuesto por Reys.

En este sentido el estudio permitió constatar que los errores más recurrentes se concentran en la **comprensión del significado y efecto de las operaciones**, la **comprensión y uso de expresiones equivalentes de los números,** y **comprensión y uso de expresiones equivalentes**, lo cual refuerza la idea de que la generalización y representación de números requiere el uso de signos para representar y operar con números.

Reflexionar sobre los hallazgos obtenidos permite observar la importancia de catalogar los errores no como simples fallas, sino como ventanas que permiten comprender los procesos cognitivos de los estudiantes. Al analizar la manera en que los participantes resolvieron las tareas, se observa que muchos de ellos poseen nociones parciales o incompletas sobre las propiedades de las operaciones, lo que los lleva a aplicar de manera incorrecta los algoritmos aprendidos o a no dar coherencia a los resultados que obtienen. En la misma línea, los ejercicios para simplificar términos semejantes o reconocer expresiones equivalentes evidencian que la comprensión estructural sigue siendo un desafío.

Asimismo, la investigación permitió constatar que existen áreas en las que los estudiantes muestran fortalezas, como el reconocimiento del tamaño de los números, la identificación de puntos de referencia de medida y ciertas habilidades de cálculo básico.

En el plano personal y profesional, la realización de este trabajo de tesis deja como aprendizaje que investigar la práctica educativa implica ir más allá de constatar errores: supone analizarlos, comprenderlos y extraer de ellos insumos valiosos para transformar los procesos de aprendizaje. La integración de los aportes de Reys (1999) con las clasificaciones de Caballero y Juárez (2016) enriqueció el análisis y ofreció un marco para identificar patrones de error que, de otra forma, podrían haber quedado dispersos o sin una interpretación clara.

En conclusión, esta experiencia reafirma la idea de que el desarrollo del sentido numérico debe ser una prioridad en la enseñanza de las matemáticas, no solo en los primeros niveles escolares, sino también en la educación media superior, donde los estudiantes se enfrentan a contenidos más complejos. Solo al fortalecer estas bases será posible que los estudiantes comprendan de manera profunda el significado de las funciones racionales, superen sus errores recurrentes y logren aplicar sus conocimientos matemáticos en los procesos de resolución de problemas.

REFERENCIAS

Ausubel, D. (1978). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.

Baidoo, J., Adane, M., & Luneta, K. (2020). Solving algebraic fractions in high schools: An error analysis. Journal of Educational Studies, 19(2), 96-118.

Barrera, F., Reyes, A., Campos, M., & Rodríguez, C. (2021). Resolución de problemas en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. 9 (Especial) 10,17. DOI: https://doi.org/10.29057/icbi.v9iEspecial.7051

Barrera-Mora, F., & Reyes-Rodriguez, A. (2019). Fostering middle school students' number sense through contextualized tasks. International Electronic Journal of Elementary Education, 12(1), 75-86. DOI: https://doi.org/10.26822/iejee.2019155339

Berch, D. B. (2005). Making Sense of Number Sense: Implications for Children With Mathematical Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 333–339. DOI: https://doi.org/10.1177/00222194050380040901

Beziau, J. (2000). Logical Autobiography 50. *University of Brasil*. Rio de Janeiro.

Brown, G., & Quinn, R. J. (2006). Algebra students' difficulty with fractions: An error analysis. *Australian Mathematics Teacher, The*, 62(4), 28-40.

Caballero y Juárez, (2016). Análisis y clasificación de errores en la adición de fracciones algebraicas con estudiantes que ingresan a la universidad. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas.* 91 33-56.

Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (2004). "Aprendiendo a multiplicar y dividir". *En Bermejo, V. Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor.* Madrid: CCS

Deci, E. L., & Ryan, R. M. (2000). The "What" and "Why" of Goal Pursuits: Human Needs and the Self-Determination of Behavior*. Psicológico. Psychologial Inquiry.* DOI: https://doi.org/10.1207/S15327965PLI1104_01

Eisenhart, M. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991: Ideas from a cultural anthropologist; implications for mathematics education rese.

González, A. (2011). Comunicación breve, construcción del significado de las fracciones algebraicas y sus operaciones a partir de las fracciones aritméticas. *Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.*

Hackenberg, A., & Lee, M. Y. (2011). Students' Distributive Reasoning with Fractions and Unknowns. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Hacker, D. J., Kiuhara, S. A., & Levin, J. R. (2019). A metacognitive intervention for teaching fractions to students with or at-risk for learning disabilities in mathematics. ZDM, 51, 601-612. DOI:https//doi.org/ 10.1007/s11858-019-01040-0

Hibi, W., & Assadi, N. (2022). Mistakesin Simplifying Algebraic Expressions, TheirRepetition Patterns and Thinking Strategies Associated with These Mistakes in Nine Graders. International Journal, 7(1).

Hiebert, J., y Carpenter, T. (1992). Learning and teacher with and understanding. In D.A.GROUGWS (ED), Handbook of research on matematics teaching and learning (pp.65-97). New York: Macmillan.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp. 305-312). Prague, Czech Republic: Faculty of Education, Charles University in Prague.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). The growth of logical thinking from childhood to adolescence: An essay on the construction of formal operational structures. Basic Books.

Kaminski, E. (2002). Promoting mathematical understanding: Number sense in action. Mathematics Education Research Journal, 14(2), 133-149. DOI: https//doi.org/10.1088/1742-6596/1097/1/012141

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. *In S. Wanger & C. Kieran (Eds.), Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra.* 4 33–59.

Lee, H. et al. (2020) Underprepared College Students' Understanding of and Misconceptions with Fractions. *International electronic journal of mathematics education.* 15-3. DOI:https://doi.org/10.29333/iejme/7835

Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. Zdm, 37, 457-467. DOI:https://doi.org/10.1007/BF02655854

Levin, M., & Walkoe, J. (2022). Seeds of algebraic thinking: a Knowledge in Pieces perspective on the development of algebraic thinking. *ZDM–Mathematics Education,* 54(6), 1303-1314. DOI:https://doi.org/10.1007/s11858-022-01374-2

Llinares, S. (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En E. Castro. (Ed.), Didáctica de la Matemática.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Makhubele, (2021), The Analysis of Grade 8 Fractions Errors Displayed by Learners Due. *International Electronic Journal of Mathematics Education.* 16 3. DOI:https://doi.org/10.29333/iejme/11004

McIntosh, A., Reys, B.J. y Reys, R.E.(1992). A proposed framework for examining basic number sense. For the learning of mathematics. EEUU.

Mesonero Valhongo, A. (2019). Psicología del Desarrollo y de la educación en la edad escolar. *México: Ediciones Textos Universitarios*, 3ra Edición.

Moyo M., y Machaba, F.M. (2021). Grade 9 learners' understanding of fraction concepts. *Pythagoras - Journal of the Association for Mathematics Education of South Africa.* DOI: https://doi.org/10.4102/pythagoras.v42i1.602

Murcia Artunduaga, W. P., & Perdomo Navarro, C. (2015). *Tareas matemáticas, ambientes de aprendizaje: movilización niveles de complejidad, competencia matemática comunicar.* Colombia: Amazona. DOI:https://doi.org/10.13140/RG.2.2.20692.14723

Piaget, J. (1967). *Biology and Knowledge: An Essay on the Relations Between Organic Regulations and Cognitive Processes.* México: Morata.

Piaget, J. (1971). *La formación del símbolo en el niño.* México: Fondo de Cultura Económica.

Reys, B. J. (1994). Promoting number sense in the middle grades*. Mathematics Teaching in the Middle School, 1(2), 114-120.*
DOI: https://doi.org/10.5951/MTMS.1.2.0114

Reys, R., Reyz, B., Johanson, B., Emanuelsson, G., McIntosh, A., & Ching Yang, D. (1999). *Assessing Number Sense of Students in Australia, Sweden, Taiwan, and the US.* EEUU: School Science and Mathematics. DOI:https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1999.tb17449.x

Richmont, P. (2017). Introducción a Piaget. México: *Editorial Fundamentos*.

Rico, L. (1998). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.* Bogotá: Uniandes.

Rodin, A. (2012). Axiomatic Method and Category Theory. *Synthese Library,* 364.

Rosal, A. A. S. (2021). La filosofía de la matemática y sus objetos matemáticos. *Red de Investigación Educativa*, *13*(1), 43-55.

Sibgatullin, I. R., Korzhuev, A. V., Khairullina, E. R., Sadykova, A. R., Baturina, R. V., & Chauzova, V. (2022). A Systematic Review on Algebraic Thinking in Education. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18(1). DOI: https://doi.org/10.29333/ejmste/11486

Sierra Fernández, L. (2004). Estudio de la Influencia de un Entorno de Simulación por el Ordenador en el Aprendizaje por Investigación de la física en el bachillerato. Madrid, España: *Ministerio de Educación y Ciencia.*

Singh, P. (2009). An Assessment of Number Sense among Secondary School Students. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning.* 1-27

Socas, (2011). La enseñanza del álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas.* 77 5-34.

Steen, L. A. (1988). The science of patterns. *Science*, *240*(4852), 611-616. DOI:https://doi.org/10.1126/science.240.4852.611

Steiner, H.G. (1985); Balacheff, N. y otros. (Eds.) Theory of mathematics education (TME). ICME 5. *Occasional paper 54. Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.*11-17.

Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S. (2016). Precalculus-Mathematics for calculus, Seventh Edition. Cengage Learning.

Stichtenoth, H. (1993). *Algebraic function fields and codes*. Springer-Verlag.

Tastepe, M., & Yanik, H. B. (2023). Mistakes Made by Students While Posing Problems for Equations Containing Algebraic Fractional Expressions: Mistakes students make while posing problems. Journal of Qualitative Research in Education, (33). DOI: https://doi.org/10.14689/enad.33.1592

Thurston, W. P. (1994). On Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2), 161–177. DOI:https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1994-00502-6

Valencia, I. (2013). Enseñanza y aprendizaje de las fracciones en un contexto real basado en la resolución de problemas. *VII CIBEM Venezuela: UPEL IPC.* 3136-3147.

Vega-Castro, D., Molina, M., & Martínez, E. C. (2011). Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones *algebraicas. In Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 575-586).

Villa-Salvador, G. D. (2006). *Topics in the theory of algebraic function fields*. Birkhäuser.

Vygotsky, L. (1978). *Pensamiento y lenguaje.* Madrid, España: Paidós.

Vygotsky, L. (1987). *Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores.* La Habana, Cuba: Editorial Científico Técnica.

Vygotsky, L. (1995). *La prehistoria del desarrollo del lenguaje escrito.* Madrid: Aprendizaje Visor.

Zazkis, R., & Campbell, S. R. (2012). Number theory in mathematics education research: Perspectives and prospects. Number Theory in Mathematics Education, 1-17.

Zulfa et al. (2020). Student's Mistake in Algebraic Fraction: An Analysis Using AVAE Categories. *Journal of Physics: Conference Series.* DOI:https://doi.org/ 10.1088/1742-6596/1521/3/032029

Apéndice A

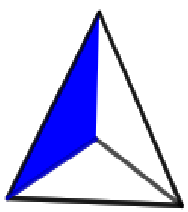
Diseño de la actividad o tarea a implementar

Primera parte

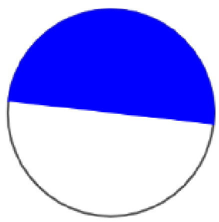
Suma y producto de números racionales

1.- Cada una de las siguientes figuras representa una unidad. La parte sombreada en cada una representa una fracción.

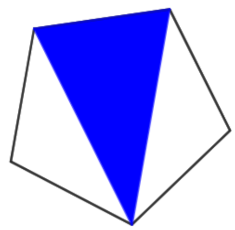
Indica cuáles representan $\frac{1}{2}$ y cuáles representan $\frac{1}{3}$ Explica tus respuestas.



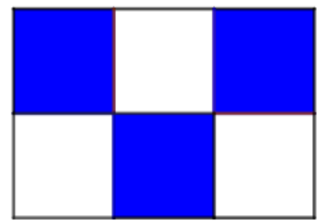
A)



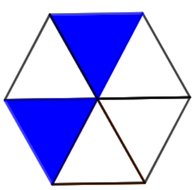
B)



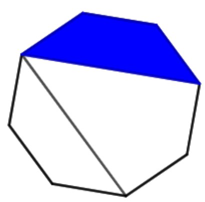
C)



D)



E)



F)

$\frac{1}{2}$

Es representado por los incisos:

$\frac{1}{3}$

Es representado por los incisos:

2.- Efectúa las operaciones indicadas y representa el resultado con una figura.

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$

b) $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} =$

3.- Realiza las siguientes operaciones, describe el procedimiento empleado y simplifica tu respuesta.

a) $\frac{2 + 3 * 6}{4 + 2 * 3} =$

b) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{7} =$

c) $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) =$

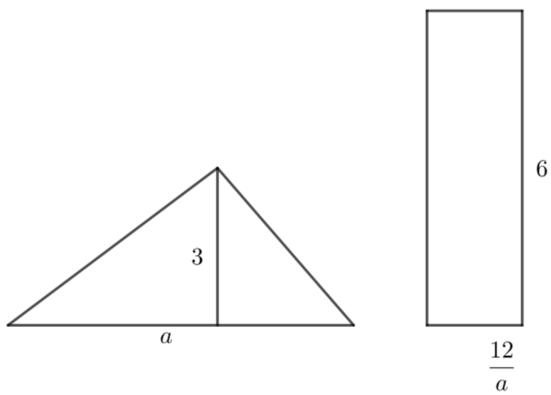
d) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) =$

Apéndice B

Segunda parte

Suma y producto de funciones racionales

1.- En el triángulo, el valor de la altura es 3 y la correspondiente base mide a; el rectángulo tiene dimensiones 6 y $\frac{12}{a}$. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el área de las dos figuras? Explica, haciendo los cálculos que se requieren.

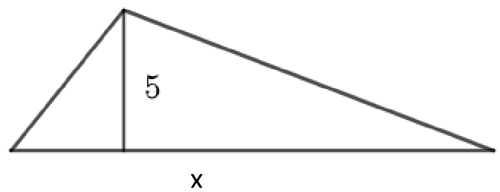


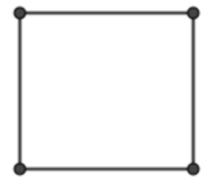
(a) $\frac{3a^2+144}{2a}$

(b) $\frac{3a+72}{2+a}$

(c) $\left(\frac{3a}{2}\right)\left(\frac{72}{a}\right)$

2.- En el triángulo, el valor de la altura es 5 y la correspondiente base mide x; el cuadrado tiene por medida del lado $\frac{7}{x}$. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el producto del área de las dos figuras? Explica, haciendo los cálculos que se requieren.





(a) $\frac{490x^3}{2x^2}$

(b) $\frac{5x^3 * 98}{2x^2}$

(c) $\left(\frac{5x}{2}\right)\left(\frac{49}{x^2}\right)$

3.- Efectúa la suma de las fracciones y de las siguientes opciones elige la que represente la suma indicada. Explica tu elección efectuando las operaciones.

$$\frac{x^2+1}{x-2} + \frac{x-2}{x}$$

(a) $\frac{x^3+x^2-3x+4}{x^2-2x}$

(b) $\frac{x^3+x+x^2-4x+4}{x^2-2x}$

(c) $\frac{x^3+x+x^2+4x+4}{x^2-2x}$