



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

DOCTORADO EN CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

**CONTROL ROBUSTO Y DE ESTRUCTURA VARIABLE BASADO EN LMI'S
PARA EL SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA DE UN VEHÍCULO AÉREO
HÍBRIDO NO TRIPULADO**

T E S I S

Que para obtener el grado de
Doctor en Ciencias en Automatización y Control

PRESENTA

M. en C. Jovani Ortega Ventura

Director:

Dr. Jesús Patricio Ordaz Oliver

Codirector:

Dr. Eduardo Steed Espinoza Quesada

Pachuca de Soto, Hgo., México 27 de noviembre de 2025



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

School of Engineering and Basic Sciences

Área Académica de Computación y Electrónica

Department of Electronics and Computer Science

Mineral de la Reforma Hidalgo, a 25 de noviembre de 2025

Número de control: ICBI-AACyE/2412/2025

Asunto: Autorización de impresión de tesis

**MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH**

El Comité Tutorial del nombre del producto que indique el documento curricular del programa educativo de posgrado titulado **“CONTROL ROBUSTO Y DE ESTRUCTURA VARIABLE BASADO EN LMI'S PARA EL SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA DE UN VEHÍCULO AÉREO HÍBRIDO NO TRIPULADO”**, realizado por el sustentante **Jovani Ortega Ventura** con número de cuenta 201028, perteneciente al programa del Doctorado en Ciencias en Automatización y Control, una vez que se ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente.

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir con los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

Atentamente
“Amor, Orden y Progreso”

Dr. Jesús Patricio Ordaz Oliver
Director de Tesis

Dr. Eduardo Steed Espinoza Quesada
Codirector de Tesis

Comité Tutorial

Dr. Hugo Romero Trejo

Presidente

Dra. Liliam Rodríguez Guerrero

Secretario

Dr. Jesús Patricio Ordaz Oliver

Vocal 1

Dr. Juan Eduardo Velázquez Velázquez

Vocal 2

Dr. Eduardo Cornejo Velázquez

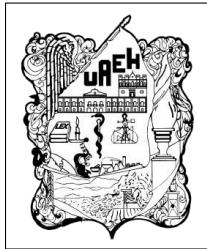
Vocal 3

Dr. Eduardo Steed Espinoza Quesada

Suplente

“Amor, Orden y Progreso”

Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P. 42184
Teléfono: 52 (771) 71 720 00 Ext. 40052, 40053
aacye_icbi@uaeh.edu.mx, jesus_ordaz@uaeh.edu.mx



M. en C. Jovani Ortega Ventura

**Control robusto y de
estructura variable basado
en LMI's para el
seguimiento de trayectoria
de un Vehículo Aéreo
Híbrido no Tripulado**

Agradecimientos

A mi familia

Raúl y Luz, por su amor y apoyo a lo largo de mi vida. A Getsemani y Estefani, gracias hermanas por el cariño y el aliento. Para Alma, gracias por tu amor y comprensión, por alentarme para continuar.

A mis Directores de Tesis

Gracias Dr. Jesus Patricio y Dr. Eduardo Steed, por sus enseñanzas y acompañamiento. Por alentarme a terminar el trabajo a pesar de las adversidades.

A mis Amigos

Gracias por su amistad y su apoyo para conmigo.

A la SECIHTI, antes CONAHCyT

por la beca parcial de Doctorado otorgada durante el periodo Febrero 2022 - Enero 2024.

A la UAEH

por las oportunidades y la formación académica brindada desde mi etapa en el bachillerato.

A todas las personas

que de alguna u otra manera contribuyeron para la realización de este trabajo, muchas gracias.

Acrónimos

- **UAV**: Unmanned Aerial Vehicle (Vehículo Aéreo No Tripulado).
- **VTOL**: Vertical Take-Off and Landing (Despegue y Aterrizaje Vertical).
- **ISMC**: Integral Sliding Mode Control (Control por Modos Deslizantes Integrales).
- **DSMC**: Dynamic Sliding Mode Control (Control por Modos Deslizantes Dinámicos).
- **PD**: Proportional Derivative (Proporcional derivativo).
- **PID**: Proportional Integral Derivative (Proporcional Integral derivativo).
- **UBB**: Uniformly Ultimately Bounded Stability (Estabilidad Uniformemente Ultimamente Acotada).
- **LMI**: Linear Matrix Inequality (Desigualdad lineal matricial).

Notación

- $f(\cdot)$: fuerzas que actúan sobre la aeronave.
- $\Gamma = (x, y, z)$: vector de posición del centro del masa del UAV.
- (x_i, y_i, z_i) : Ejes en el marco inercial.
- (x_b, y_b, z_b) : Ejes en el marco del cuerpo.
- x : posición sobre el eje x.
- y : posición sobre el eje y.
- z : posición sobre el eje z.
- ϕ : ángulo de roll.
- θ : ángulo de pitch.
- ψ : ángulo de yaw.
- t : tiempo.
- \bar{q} : Vector de coordenadas generalizadas.
- $\eta = (\phi, \theta, \psi)$: vector de orientación del UAV
- $R(\phi, \theta, \psi)$: matriz de rotación del UAV con respecto al sistema inercial.
- $\mathbf{R}(x, \phi)$: matriz de rotación sobre el eje x
- $\mathbf{R}(y, \theta)$: matriz de rotación sobre el eje y
- $\mathbf{R}(z, \psi)$: matriz de rotación sobre el eje z
- p : velocidad angular de roll.
- q : velocidad angular de pitch.
- r : velocidad angular de yaw.
- Ω : vector de velocidades angulares.

- $\dot{\Omega}$: vector de aceleraciones angulares.
- ω_n : matriz de transformación.
- I : tensor de inercia.
- I_x, I_y, I_z : momentos de inercia respecto a los ejes x, y y z respectivamente.
- α : aceleración angular.
- m : masa del UAV.
- r : distancia al eje de rotación.
- ω : velocidad angular.
- \vec{r} : vector de posición desde el punto de rotación hasta la posición de la partícula.
- \vec{v} : velocidad lineal de la partícula.
- $l_{(.)}$: distancias respecto a los ejes y centro de gravedad de la aeronave.
- d_1, d_2, d_3 : alturas en la configuración del UAV.
- F : fuerza total que actúa sobre el centro de masa.
- F_g : aceleración gravitacional.
- F_t : Fuerza de arrastre.
- F_p : Fuerza de propulsión.
- \mathbf{V} : $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^\top$, es la velocidad translacional con respecto al marco inercial.
- k_{ft} : constante de arrastre.
- k_{fa} : constante de fuerza aerodinámica.
- ω : velocidad angular.
- k_t : constante de empuje.
- u_z : empuje principal.

- τ : vector momentos.
- τ_ϕ : momento de roll.
- τ_θ : momento de pitch.
- τ_ψ : momento de yaw.
- τ_a : momento de resistencia aerodinámica.
- τ_g : momento asociado al efecto giroscópico.
- $\tau(\cdot)$: torques generados por cada uno de los actuadores de la aeronave.
- I_r : Momento de inercia de la propela.
- $\xi(\cdot)$: Perturbaciones externas referente a x, y, z, ϕ, θ y ψ respectivamente.
- $\delta(\cdot)$: Cota de las perturbaciones externas o incertidumbres.
- \bar{u}_z : Entrada de control.
- $(\cdot)_{ref}$: referencia relacionada con una variable de traslación u orientación.
- $k(\cdot)$: Ganancia de control.
- e_x : función de error respecto a x.
- e_y : función de error respecto a y.
- e_z : función de error respecto a z.
- e_ϕ : función de error respecto a roll.
- e_θ : función de error respecto a pitch.
- e_ψ : función de error respecto a yaw.
- $V(\cdot)$: Función de energía.
- $\mathbf{A}(\cdot)$: matriz $n \times m$, donde $n = m$.
- $\mathbf{B}(\cdot)$: matriz $n \times m$, donde $n \neq m$.

- $\mathbf{u}_{(.)}$: entrada de control referente un subsistema.
- $\mathbf{P}_{(.)}$: matriz definida positiva.
- ρ : parámetro de ajuste escalar en la estrategia ISMC.
- $\mathbf{U}_{(.)}$: entrada de control principal en la estrategia ISMC.
- $\mathbf{S}_{(.)}$: superficie de deslizamiento.
- $\tilde{\mathbf{u}}_{(.)}$: entrada de control referente los modos deslizantes.

Resumen

El proyecto de tesis trata el desarrollo de estrategias de control para un vehículo aéreo no tripulado híbrido con capacidades de despegue y aterrizaje vertical, capaz de operar en dos modos de vuelo: multirrotor y avión. Los controladores propuestos están basados en la teoría de control por modos deslizantes (SMC), incluyendo un control robusto por modos deslizantes integrales (ISMC) y un control por modos deslizantes dinámicos (DSMC). También se describe un control robusto con estructura PD. Estas estrategias buscan mitigar la influencia de incertidumbres aleatorias y perturbaciones externas producidas por el viento durante el vuelo. Para la sintonización de ganancias, se propone un algoritmo basado en desigualdades lineales matriciales (LMIs), aplicable a las estrategias de control desarrolladas. Dicho algoritmo permite obtener ganancias que garantizan estabilidad uniformemente únicamente acotada (UBB) del sistema. Asimismo, para el diseño de las técnicas de control, se derivó el modelo matemático del vehículo y se definió un perfil de vuelo adecuado para las pruebas numéricas.

La validación de la efectividad de los controladores se realizó mediante software de programación y análisis numérico, donde se evaluó el desempeño del sistema en función de las señales de error y de la entrada de control. Además, se efectuaron estudios comparativos entre los controladores con el fin de establecer una comparación clara en términos de índices de error. Cabe mencionar que los análisis basados en criterios de error permiten identificar variaciones en el comportamiento del sistema, como diferencias entre respuestas subamortiguadas y sobreamortiguadas, así como caracterizar su respuesta transitoria.

Abstract

The thesis project addresses the development of control strategies for a hybrid unmanned aerial vehicle (UAV) with vertical takeoff and landing capabilities, capable of operating in two flight modes: multirotor and fixed-wing. The proposed controllers are based on sliding mode control (SMC) theory, including a robust integral sliding mode controller (ISMC) and a dynamic sliding mode controller (DSMC). A robust PD-structured controller is also described. These strategies aim to mitigate the influence of random uncertainties and external disturbances generated by wind during flight. For gain tuning, an algorithm based on linear matrix inequalities (LMIs) is proposed, applicable to the developed control strategies. This algorithm enables the computation of gains that guarantee uniformly ultimately bounded (UUB) stability of the system. Additionally, for the design of the control techniques, the mathematical model of the vehicle was derived and a suitable flight profile was defined for numerical testing.

The validation of controller performance was carried out using programming and numerical analysis software, where the systems behavior was evaluated in terms of the error signals and the control inputs. Furthermore, comparative studies among the controllers were conducted to establish a clear comparison based on error indices. It is worth noting that analyses based on error criteria allow the identification of variations in system behavior, such as differences between underdamped and overdamped responses, as well as the characterization of transient response.

Índice general

Agradecimientos	III
Acrónimos	IV
Notación	V
Abstract	X
Resumen	IX
Índice general	XI
Índice de figuras	XIII
Índice de tablas	1
1. Introducción	3
1.1. Antecedentes	4
1.2. Planteamiento del problema	7
1.3. Justificación	8
1.4. Hipótesis	9
1.5. Objetivo general	9
1.5.1. Objetivos específicos	9
1.6. Estado del arte	10
1.7. Metodología	12
1.8. Productos de investigación.	14
1.9. Alcances y/o limitaciones.	14
1.10. Organización de la tesis	15
2. Modelo matemático del vehículo aéreo no tripulado híbrido	16
2.1. Modelo para el modo multirrotor	16
2.1.1. Análisis de la orientación y posición del UAV (cinemática)	17
2.1.2. Modelo dinámico	24
2.2. Conclusiones	33

3. Algoritmos de control	35
3.1. Estrategias de control para modo multirrotor	35
3.1.1. Preliminares	35
3.1.2. Control PD robusto	41
3.1.3. Control Robusto basado en DSMC	47
3.1.4. Control por modos deslizantes integrales (ISMC)	55
3.2. Conclusiones	58
4. Resultados numéricos	59
4.1. Perfil de misión	60
4.2. Simulaciones numéricas	61
4.3. Análisis comparativo entre controladores	68
4.4. Conclusiones	69
5. Conclusiones y trabajo futuro	71
5.1. Conclusiones generales	71
5.2. Trabajos futuros	72
Bibliografía	73
A. Artículo publicado en la revista IEEE Access, 2023	79

Índice de figuras

1.1.	Diseño del vehículo aéreo para aplicaciones de monitoreo.	4
1.2.	UAV tipo Tilt wing GL-10 Greased Lightning desarrollado por la NASA [1].	6
1.3.	Diseño de un UAV VTOL híbrido con un motor de propulsión para modo avión [2].	6
1.4.	Diagrama de la metodología del trabajo de tesis.	13
2.1.	Vehículo Aéreo no Tripulado Híbrido.	16
2.2.	Diseño del vehículo multirrotor tomando como referencia la aeronave híbrida.	17
2.3.	Definición de las fuerzas y sentidos de giro para el modo multirrotor.	18
2.4.	Aeronave de seis rotores en el plano $X_b - Y_b$	23
2.5.	Fuerzas de empuje generadas por los motores del UAV.	26
2.6.	Generación del movimiento en roll.	28
2.7.	Vista en 2D para la descripción de distancias.	29
2.8.	Generación del movimiento en pitch	30
2.9.	Generación del movimiento en yaw	30
4.1.	Posición y velocidad de la dinámica en x con los controles PD, ISMC y RC.	62
4.2.	Posición y velocidad de y en relación a los controles PD, ISMC y RC.	63
4.3.	Respuesta de posición y velocidad de z	64
4.4.	Gráfico 3-D de la trayectoria de la aeronave con los controles PD, ISMC y RC.	64
4.5.	Posición y velocidad angular respecto a la guiñada ψ para cada estrategia de control.	65
4.6.	Respuesta de posición y velocidad angular en relación al cabeceo θ	66
4.7.	Posición y velocidad angular en relación al alabeo ϕ	66
4.8.	Entradas de control τ_ϕ y τ_θ durante la misión de vuelo.	67
4.9.	Señales de control \mathbf{u}_k y τ_ψ para los controles PD, ISMC y RC.	67

Índice de tablas

4.1.	Parámetros del sistema para simulación.	59
4.2.	Características de la trayectoria diseñada.	60
4.3.	Ganancias del control no lineal robusto para la posición y orientación del UAV.	62
4.4.	Comparativa de los índices de error en el seguimiento de trayectoria del UAV.	69

Capítulo 1

Introducción

Actualmente, los vehículos aéreos no tripulados son equipos que se utilizan en distintos ámbitos y son capaces de solucionar problemas complejos. Algunos ejemplos implican el uso de drones en agricultura, seguridad, vigilancia, fotografía, medio ambiente, industria, logística, recreación, construcción y/o infraestructura. Sin embargo, uno de los principales problemas en las misiones de vuelo es la presencia de perturbaciones asociadas a las condiciones del entorno. Las ráfagas de viento son un ejemplo de ello y pueden causar varios problemas en el funcionamiento de un UAV como: la pérdida de estabilidad, dificultad en el control, mayor consumo de batería, riesgo de colisión, desviación en el seguimiento de una ruta o dificultad en el despegue y aterrizaje. Por lo tanto, el diseño y/o estudio de estrategias de control y navegación que le permitan a un vehículo aéreo el poder realizar misiones de forma autónoma es actualmente uno de los principales retos para integrar a los vehículos aéreos no tripulados en el espacio aéreo civil de forma segura. Asimismo, diversos proyectos de investigación y trabajo tecnológico se han centrado en el diseño e implementación de estrategias basadas en diversas técnicas y metodologías que buscan completar una misión de vuelo incluso ante condiciones de clima no ideales.

En este trabajo se desarrollaron estrategias de control robustas con el objetivo de atenuar los efectos de perturbaciones asociadas a las ráfagas de viento. Particularmente, se presentan tres estrategias basadas en control por modos deslizantes (control no lineal robusto, modos deslizantes integrales y modos deslizantes dinámicos) para completar misiones de vuelo en posibles zonas de riesgo, a pesar de las afectaciones o condiciones adversas del entorno.

El sistema con el que se trabajó corresponde al modelo del vehículo aéreo no tripulado híbrido mostrado en la Figura 1.1, el cual tiene la capacidad para realizar despegue y

aterrizaje de forma vertical, así como poder realizar vuelo en modo avión. Dichas capacidades lo dotan con la versatilidad para poder realizar misiones sin la necesidad de requerir una pista de despegue. De igual forma, el vehículo es capaz de volar a altitudes de hasta 5,500 metros sobre el nivel del mar, y cuenta con un rango de operación de 15 km.

Por otro lado, se desarrolló un algoritmo para la sintonización de ganancias basado en LMI's que buscar mejorar el desempeño de los controladores. Asimismo, se plantea realizar un análisis comparativo enfocado en criterios sobre las señales de error para generar conclusiones respecto a los resultados obtenidos.



Figura 1.1: Diseño del vehículo aéreo para aplicaciones de monitoreo.

1.1. Antecedentes

Los vehículos aéreos no tripulados son sistemas no lineales subactuados los cuales han evolucionado constantemente y han cambiado en forma, tamaño y aplicaciones [3]. Gracias a su capacidad para realizar vuelos estacionarios y seguimiento de trayectorias, es posible usar esta clase de equipos para aplicaciones comerciales, industriales, militares y civiles. Asimismo, los UAV's han experimentado un rápido crecimiento y el mercado global ofrece una gran variedad de diseños [4, 5].

De acuerdo a su configuración estructural los UAVs se clasifican en vehículos de ala fija y multirrotor [6, 7, 8]. Una característica de los últimos, es que no requieren de una pista para despegar o aterrizar, ya que pueden hacerlo prácticamente desde cualquier punto (vuelo vertical). Además, cuentan con la capacidad de efectuar misiones en las que se requiera un vuelo estacionario. Por otro lado, los de ala fija presentan ventajas en cuanto

a la autonomía en comparación con los de multirrotor, debido a que pueden planear [9, 10].

Sin embargo, una gran parte del desarrollo e investigación de los UAVs se centra en los aviones de despegue y aterrizaje vertical (VTOL, por sus siglas en inglés) los cuales, combinan las ventajas de los aviones de ala fija (vuelo a alta velocidad, alta relación sustentación/resistencia, vuelo eficiente en términos de consumo de combustible) y de multirrotor (despegue y aterrizaje vertical, vuelo estacionario). Existe una amplia variedad de tipos de configuraciones para los VTOL, sin embargo, tomando en cuenta sus características principales, se pueden considerar dos categorías:

1. El sistema de propulsión es el mismo para el vuelo multirrotor y el modo avión.
Dentro de este grupo, se pueden considerar diferentes configuraciones:
 - Tilt rotor: aeronaves en donde los rotores pueden inclinarse. Una vez que alcanzan la altura deseada, giran 90° alineándose de forma horizontal y así, pasar a modo avión.
 - Tilt Blade Tip-Path-Plane: El helicóptero es el ejemplo principal en esta categoría.
 - Tilt Body: Son los vehículos formados por un conjunto de rotores en los cuales se inclina todo el avión en función de las fuerzas aerodinámicas.
 - Tilt wings: Son aeronaves conformadas por alas inclinadas que en consecuencia permiten el aumento de flujo de aire.
 - Tail Sitters: Aeronaves que cuentan con un sistema de propulsión trasero y que despegan de forma similar a un cohete. En la Figura 1.2 se muestra una aeronave de este tipo. Una vez en el aire, rotan para alinear de forma horizontal [11].



Figura 1.2: UAV tipo Tilt wing GL-10 Greased Lightening desarrollado por la NASA [1].

2. El sistema de propulsión es distinto para el vuelo multirrotor y el modo avión. A estas aeronaves se les conoce como VTOL híbridos. Por lo tanto, el vehículo cuenta con dos sistemas independientes como el de la Figura 1.3. De forma concreta, el UAV despega verticalmente mediante el empuje generado por los motores que lo conforman, mientras que, los motores de propulsión horizontal permanecen apagados. Después de alcanzar la altitud deseada, el UAV comienza a encender los motores de propulsión horizontal. Una vez que se alcanza un velocidad media o uniforme, los motores para vuelo multirrotor se apagan y la aeronave al modo de vuelo avión causando que se comporte de forma similar a un UAV de ala fija.

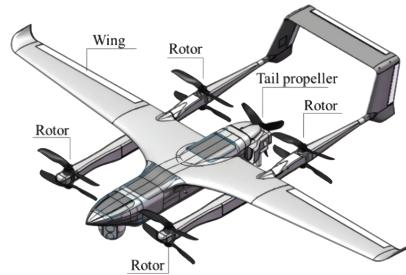


Figura 1.3: Diseño de un UAV VTOL híbrido con un motor de propulsión para modo avión [2].

Los UAVs proporcionan una plataforma eficaz para transportar sensores y cámaras necesarios para misiones de recopilación de información, vigilancia y reconocimiento [12]. Su tamaño pequeño y alta maniobrabilidad son de sus mayores virtudes. Un beneficio

adicional es su bajo costo de fabricación, mantenimiento y almacenamiento [13]. Estas características les permite desempeñarse en entornos peligrosos, inaccesibles, complejos o costosos y realizar procedimientos de medición continuos durante períodos de tiempo aceptables [14, 15, 16].

Adicional a lo mencionado anteriormente, una de las ventajas principales de los vehículos aéreos no tripulados, radica en que pueden cubrir una mayor área y en menor tiempo. Comúnmente, este tipo de aeronaves son impulsadas por rotores y estabilizadas mediante un controlador lineal [17]. Sin embargo, uno de los problemas en cuanto a estos sistemas, es la autonomía del mismo [9, 18]. Un factor determinante en dicha autonomía es la tecnología de propulsión. De acuerdo al tipo de conversión de la energía los UAVs se clasifican en los que utilizan motores eléctricos (trifásicos) y los que funcionan con base a motores de combustión interna. Ambos producen que el vehículo se vea limitado tanto por el tiempo de duración de las baterías empleadas para los motores y por la cantidad de combustible que pueden cargar.

Por ello es que muchos investigadores se enfocan en estudiar nuevas estrategias para garantizar un ahorro en cuanto a la energía del sistema y diseñar nuevos algoritmos que beneficien la autonomía [19]. Trabajos de investigación donde se proponen estrategias de control óptimo [20, 21], control subóptimo de horizonte finito [22, 23], modos deslizantes [24, 25, 26, 27], control robusto [28, 29], controladores basados en regulador cuadrático lineal y algoritmos adaptables aplicados a UAVs son presentados en [30, 31, 32, 33, 34, 35], con el objetivo de minimizar el consumo de energía y prolongar la autonomía de los vehículos aéreos. Otros factores a considerar respecto a los vehículos aéreos es la potencia del motor, la corta duración de vuelo, dificultades para mantener la altitud de vuelo, estabilidad de la aeronave y la maniobrabilidad ante vientos y turbulencias [36]. En la sección de estado del arte se trata el tema de las estrategias de control aplicadas a UAV's con mayor detalle. Esto derivado de las aportaciones principales y tema central de este proyecto, las cuales implican el desarrollo de controladores robustos.

1.2. Planteamiento del problema

Existen distintas opciones de estrategias de control que pueden aplicarse a un UAV. Sin embargo, una gran mayoría de los algoritmos de control implementados actualmente en UAVs, se basan en modelos que limitan su capacidad frente a cambios abruptos en

el entorno. Esta limitación se vuelve particularmente crítica en aplicaciones donde el UAV debe operar de manera autónoma en entornos no estructurados o de difícil acceso. En dichos escenarios, la presencia de perturbaciones externas no es solo probable, sino inevitable, lo que hace imprescindible el desarrollo de estrategias de control robustas y resilientes.

Específicamente, cuando una aeronave realiza una misión de vuelo, es posible que se encuentre a condiciones adversas del entorno, como las ráfagas de viento, que pueden afectar el desempeño del UAV si se implementan controladores convencionales. Por lo tanto, estos sistemas continúan enfrentando desafíos críticos relacionados con su estabilidad y rendimiento en condiciones reales de operación. En este contexto, se requieren de algoritmos de control que cuenten con características de robustez que le permitan al UAV desempeñarse de forma aceptable para cumplir con la misión de vuelo y reducir los efectos causados por perturbaciones y/o dinámicas no modeladas. Asimismo, es necesario incorporar métodos de sintonización de ganancias, como los basados en LMIs, que permitan ajustar los controladores de manera sistemática y garantizar el cumplimiento de la misión aun en presencia de perturbaciones externas.

1.3. Justificación

En los últimos años, el uso de UAVs en diferentes aplicaciones ha crecido notablemente. No obstante, estas aeronaves siguen enfrentando desafíos en términos de estabilidad y rendimiento cuando operan en entornos reales, específicamente ante la presencia de perturbaciones externas como ráfagas de viento, las cuales no pueden predecirse con suficiente precisión y pueden variar con el paso del tiempo en la ejecución de una misión.

Estas perturbaciones afectan directamente la dinámica del vehículo, por lo que los controladores podrían dejar de funcionar adecuadamente y con ello alterar el comportamiento del UAV. Asimismo, no sería posible el seguimiento de ruta y/o trayectoria. En casos más extremos, puede verse comprometida la misión o causar algún accidente o daño. Por otro lado, a pesar de los avances en técnicas de control clásico y moderno aplicadas a UAVs, muchas de estas estrategias asumen condiciones ideales de operación, lo que limita su eficacia en escenarios reales. En consecuencia, se ha identificado como una necesidad el desarrollo y la evaluación de sistemas de control con algoritmos robustos capaces de mantener la estabilidad, el seguimiento de ruta o trayectorias y el desempeño general del UAV ante perturbaciones externas significativas.

Por ello, en este proyecto se busca abordar dichas limitaciones proponiendo algoritmos de control robustos basados en la teoría de control por modos deslizantes y técnicas de sintonización que implican el uso de LMI's que permitan mitigar los efectos de perturbaciones y contribuyan a completar la misión de vuelo de manera efectiva.

1.4. Hipótesis

Si se diseñan controladores robustos basados en modos deslizantes y se aplican técnicas de sintonización mediante LMIs, entonces es posible mejorar el desempeño de un UAV en términos de estabilidad y seguimiento de trayectoria ante perturbaciones externas, lo cual será validado mediante simulaciones numéricas y estudios comparativos.

1.5. Objetivo general

Desarrollar e implementar estrategias de control robustas basadas en modos deslizantes, integradas con técnicas de sintonización mediante LMIs, con el fin de mejorar el desempeño de un vehículo aéreo no tripulado con capacidad de despegue y aterrizaje vertical (VTOL) ante perturbaciones externas, como ráfagas de viento, y validar su eficacia mediante simulaciones.

1.5.1. Objetivos específicos

- Obtener el modelo matemático del UAV híbrido mediante la formulación de Newton-Euler (para el modo multirrotor) con el fin de analizar su comportamiento dinámico en lazo cerrado mediante la realización de simulaciones aplicando técnicas de control clásico.
- Desarrollar estrategias de control robustas mediante el análisis dinámico del UAV bajo un enfoque por subsistemas y herramientas de control no lineal para reducir los efectos de incertidumbres y perturbaciones externas.
- Definir un algoritmo basado en la solución de LMI's para la obtención y sintonización de ganancias de control para realizar pruebas de misiones de vuelo a nivel de simulación.

- Realizar pruebas a nivel simulación usando técnicas y software que consideren tanto el modelo del vehículo como condiciones ambientales para la validación de las estrategias propuestas: Controlador PD robusto, modos deslizantes integrales y modos deslizantes dinámicos.
- Diseñar una trayectoria de referencia para el UAV mediante el uso de ecuaciones paramétricas, con el propósito de que el vehículo aéreo realice un seguimiento suave y continuo (evitando cambios bruscos de dirección o velocidad), lo cual es importante para la estabilidad del vuelo.
- Efectuar un estudio comparativo entre los controladores diseñados con criterios de desempeño basados en las señales de error y aquellos fundamentados en criterios energéticos, con el fin de establecer conclusiones que permitan determinar cuál de ellos presenta el mejor desempeño. Estos resultados permitirán reportar resultados a través de un artículo científico.

1.6. Estado del arte

Las ráfagas de viento constituyen la perturbación atmosférica más frecuente durante el vuelo de aeronaves en exteriores [37, 38]. Las ráfagas de viento afectan significativamente el comportamiento del vehículo durante el vuelo, lo que hace necesario desarrollar técnicas de control robustas para mitigar sus efectos [39]. Por esta razón, y considerando la amplia variedad de aplicaciones de los UAV, se han estudiado y diseñado diferentes estrategias de control que buscan proporcionar robustez ante este tipo de fenómenos.

Las estrategias de control por modos deslizantes han sido ampliamente utilizadas en UAVs, ya que una de sus principales ventajas es la posibilidad de modificar o ajustar el comportamiento del sistema mediante la selección de las conocidas funciones de conmutación (como la función signo), lo cual permite que la respuesta en lazo cerrado sea robusta frente a ciertas incertidumbres, dinámicas no lineales y perturbaciones externas [40]. Sin embargo, una de las principales desventajas de estos controladores es el fenómeno conocido como chattering, que ocurre debido al uso de la función signo en la ley de control diseñada para hacer que el sistema converja hacia la superficie deslizante y seguir un comportamiento deseado [41].

En [42] se describe el uso de un control por modos deslizantes terminales con la implementación de una red neuronal para la sintonización de los parámetros de control.

Los autores en [43] diseñaron un control por modos deslizantes adaptable que modifica el valor de las ganancias de control de acuerdo con las incertidumbres de los parámetros. Asimismo, en [44] se presenta un control por modos deslizantes aplicado a un UAV donde se propone una superficie de deslizamiento parabólica para converger más rápidamente que con un método convencional. Para el seguimiento robusto de trayectorias, en [45] se presenta una combinación de una estrategia de control por modos deslizantes continuos con controladores PID donde se obtuvieron resultados experimentales que muestran el desempeño de un UAV con la propuesta de control.

Por otro lado, para mitigar los efectos de las perturbaciones externas y lidiar con el fenómeno del chattering, investigadores han propuesto diversas soluciones. Entre ellas están el control por modos deslizantes integrales (ISMC) y el control por modos deslizantes dinámicos (DSMC) [46, 47, 48]. Estos algoritmos de control incorporan propuestas de diferentes superficies de deslizamiento, tales como las de estructura similar a un control PID [49] o las que implican soluciones de ecuaciones diferenciales basadas en la dinámica del sistema [50], con el fin de mejorar la robustez del sistema frente a perturbaciones externas. Ahora bien, aunque los ISMC han demostrado un mejor desempeño en cuanto a la mitigación de perturbaciones comparados con los DSMC, la señal de control produce un chattering de mayor frecuencia, que se traduce en un consumo mayor de energía. Por otro lado, debido a que los DSMC son dinámicos, es decir, se involucra un proceso de integración, se obtiene una señal de control con el chattering reducido.

En [49, 51] se tiene el caso del desarrollo de estrategias DSMC, sin embargo, no es claro el método para calcular las ganancias del control. Asimismo, en [52] se propone una superficie de deslizamiento tipo PID y las ganancias del controlador son elegidas de forma heurística. De manera similar, en [53, 54] se presentan estrategias ISMC donde las ganancias se obtienen mediante el criterio de Hurwitz o son elegidas por el autor.

Con base en lo anterior, en este trabajo se presenta el desarrollo de estrategias de control DSMC e ISMC aplicadas a un UAV para el despegue vertical y posterior seguimiento de ruta, donde se busca que estos algoritmos permitan mitigar o reducir los efectos de las perturbaciones externas como las ráfagas de viento. Para ello, también se hacen uso del modelo de Dryden, como una forma de definir el comportamiento del viento e inducirlo en las pruebas numéricas con los controladores (para el modo multirrotor).

Esto contrasta con trabajos en los que no se describe como se generan las perturbaciones o las presentan como una función matemática variante en el tiempo como en [38, 55]. Asimismo, se describe un algoritmo para calcular las ganancias de control bajo el enfoque

de LMI's. De esta manera, se cuenta con un algoritmo que se ejecuta fuera de línea y que simplifica la implementación de controles por modos deslizantes en sistemas de este tipo. Además, dado que esta herramienta es aplicable en las estrategias presentadas en este trabajo, es viable realizar pruebas comparativas para definir el controlador mas eficaz en función de la respuesta dinámica del sistema.

1.7. Metodología

La estrategia para el desarrollo del trabajo de tesis es organizada de la siguiente manera:

- En primer lugra, se plantea el estudio de trabajos y/o investigaciones sobre estrategias de control aplicadas a vehículos aéreos no tripulados en aplicaciones de misiones de monitoreo para generar un contexto respecto a las investigaciones relacionadas con el tema de tesis, así como para identificar aspectos importantes y requerimientos específicos de este tipo de misiones.
- Después, se plantea obtener el modelo matemático del vehículo híbrido en modo multirrotor bajo la formulación de Newton-Euler. Se tomarán aspectos como los efectos aerodinámicos y perturbaciones.
- Como siguiente paso, se desarrollarán estrategias de control basadas en modos deslizantes integrales y dinámicos con características de robustez ante posibles perturbaciones externas utilizando el modelo dinámico del UAV en modo multirrotor.
- Asimismo, se generarán resultados mediante pruebas de simulación en el software de Matlab que permitan validar las estrategias y reportar resultados en un artículo.
- Una vez que las estrategias desarrolladas han sido probadas, se plantea realizar un análisis comparativo entre los controladores desarrollados para definir, con base en los índices de errores, cuál de ellos presenta el mejor desempeño.
- Finalmente, con los resultados obtenidos se generarán las conclusiones particulares y generales respecto al trabajo de investigación realizado, lo cual permitirá orientar la toma de decisiones sobre trabajos futuros. En la Figura 1.4 se muestra un diagrama de la metodología establecida para este proyecto de investigación.

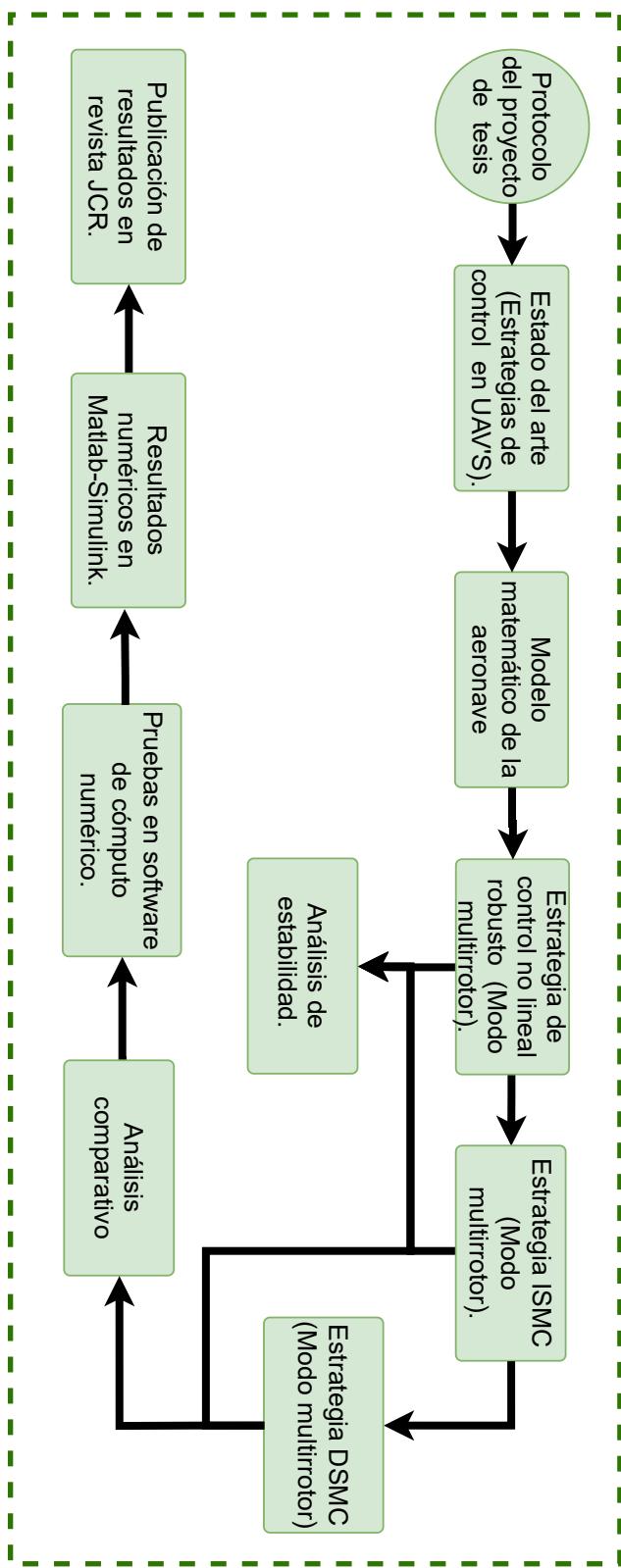


Figura 1.4: Diagrama de la metodología del trabajo de tesis.

1.8. Productos de investigación.

Derivado del presente trabajo de tesis se desarrollaron los siguientes artículos que se incluyen en los Anexos:

- Jovani Ortega Ventura, Daniel Benítez Morales, Jesús P. Ordaz Oliver and Eduardo. S. Espinoza Quesada, Dynamic Sliding Mode Control With PID Surface for Trajectory Tracking of a Multirotor Aircraft, IEEE Access, Vol. 11, pp. 99878 - 99888, 2023. 10.1109/ACCESS.2023.3314382
- Jovani Ortega Ventura, Daniel Benítez Morales, Eduardo. S. Espinoza Quesada, Jesús P. Ordaz Oliver y L. R. García Carrillo, Control robusto por modos deslizantes dinámicos e integrales para un vehículo aéreo no tripulado, XXIV Congreso Mexicano de Róbotica, COMRob. 2022.
- Daniel Benítez Morales, Jovani Ortega Ventura, Jesús P. Ordaz Oliver and Eduardo. S. Espinoza Quesada, On the gain synthesis of dynamic and integral sliding mode controllers for quad rotorcraft trajectory tracking. Aceptado para publicación en: International Journal of Applied Mathematics and Computer Science. 2025.

1.9. Alcances y/o limitaciones.

- El proyecto esta acotado a obtener resultado bajo pruebas de simulación numérica (para el modo multirrotor). Sin embargo, como trabajo futuro se contempla emplear la técnica de Model In the Loop para ambos modos de vuelo.
- Los modelos matemáticos presentados en este documento implican ciertas consideraciones y están enfocados en los algoritmos para el control.
- Existe una fase de transición entre los modos de vuelo multirrotor y avión. Sin embargo, el trabajo no contempla el desarrollo de una prueba de estabilidad para la transición.
- El algoritmo de obtención de ganancias se ejecuta fuera de línea. Es indispensable establecer previamente los parámetros de ajuste.

1.10. Organización de la tesis

El documento de tesis esta organizado de la siguiente manera:

Capítulo 2. Modelado del Sistema. Se presenta la descripción general del vehículo aéreo no tripulado híbrido tipo VTOL, así como el desarrollo del modelo matemático. Se analizan las dinámicas asociadas al modo de vuelo multirrotor mediante la formulación de NewtonEuler, lo cual sirve de base para el diseño y evaluación de las estrategias de control.

Capítulo 3. Estrategias de Control. Se desarrollan las estrategias de control propuestas, basadas en la teoría de modos deslizantes. Se describen los controladores ISMC, DSMC y el control robusto con estructura PD. Asimismo, se presenta el algoritmo de sintonización de ganancias mediante desigualdades lineales matriciales (LMIs) y se incluyen los análisis de estabilidad correspondientes.

Capítulo 4. Resultados numéricos Se presentan los resultados obtenidos mediante simulaciones numéricas para los diferentes controladores propuestos. Asimismo, se efectúa un análisis comparativo basado en los índices de error así como la energía con el propósito de identificar la estrategia con mejor rendimiento.

Capítulo 5. Conclusiones y trabajo futuro. Se resumen los aportes principales de la investigación, destacando las ventajas y limitaciones de las estrategias desarrolladas. Asimismo, se proponen líneas de trabajo futuro que permitan continuar con la mejora del sistema y su eventual implementación en pruebas experimentales.

Capítulo 2

Modelo matemático del vehículo aéreo no tripulado híbrido

Este capítulo tiene como objetivo describir el modelo matemático del UAV híbrido en cuanto a su modo de vuelo multirrotor. Se describen sus marcos de referencia, transformaciones y el formalismo utilizado para la obtención del modelo. La Figura 2.1 presenta un bosquejo de la aeronave que se trabaja en este proyecto de investigación.

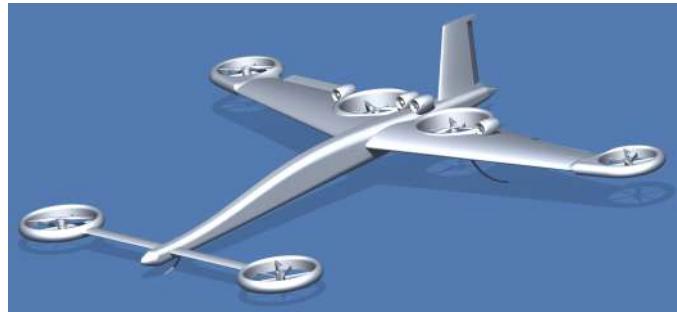


Figura 2.1: Vehículo Aéreo no Tripulado Híbrido.

2.1. Modelo para el modo multirrotor

Del diseño del vehículo aéreo no tripulado híbrido mostrado en la Figura 2.1, el vuelo vertical se genera debido al empuje producido por los seis motores (la suma de las fuerzas $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$) embebidos en el ala y en el canard (configuración de aeronave de ala fija). Es por ello que el modelo para el modo multirrotor se puede desarrollar a partir de un diseño enfocado a este modo de vuelo sin perder las características principales inmersas

en la aeronave híbrida. En la Figura 2.2 se muestra el diseño propuesto que a lo largo del capítulo se toma en consideración para obtener el modelo matemático del UAV. Por otro lado, para describir el movimiento de la aeronave, es necesario definir dos marcos de referencia: el marco de referencia inercial respecto a tierra (x_i, y_i, z_i) y el marco de referencia fijo al vehículo (x_b, y_b, z_b).

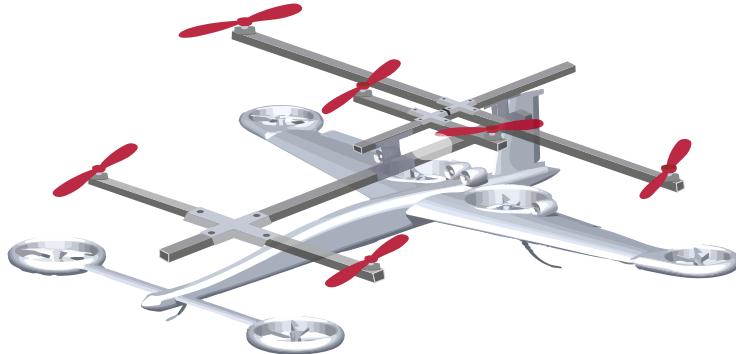


Figura 2.2: Diseño del vehículo multirrotor tomando como referencia la aeronave híbrida.

En esta sección se describe el modelo matemático a partir de un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del sistema en relación a que la geometría inusual del mismo. Se presentan los métodos utilizados para la construcción del modelo definiendo la posición y orientación del UAV respecto a los marcos de referencia elegidos. La orientación angular del vehículo se describe a través de los llamados ángulos de Euler (Roll, Pitch y Yaw) que dirigen el vuelo del vehículo [56]. Estos ángulos representan un conjunto ordenado de ecuaciones secuenciales entre el marco de referencia inercial respecto a tierra y el marco de referencia fijo al vehículo y que son los que describen el movimiento del UAV. Por lo tanto, los ángulos Roll (ϕ), Pitch (θ) y Yaw (ψ), definen la posición angular del marco de referencia del cuerpo con respecto al marco inercial.

2.1.1. Análisis de la orientación y posición del UAV (cinemática)

Las coordenadas generalizadas para un vehículo aéreo son:

$$\bar{q} = (\Gamma, \eta),$$

donde $\Gamma = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estado traslacional referente al centro de gravedad del UAV híbrido y que denota la posición del marco de referencia del vehículo en relación

al marco de referencia inercial. Mientras que $\eta = (\phi, \theta, \psi) \in \mathbb{R}^3$ es el vector que representa la orientación al rededor de los ejes x , y y z , respectivamente. Una representación gráfica de los marcos de referencia de la aeronave se puede observar en la Figura 2.3.

La orientación completa del vehículo puede ser descrita definiendo la transformación del marco de referencia del vehículo al marco de referencia inercial mediante la matriz de rotación $\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)$ generada a partir de la combinación de tres rotaciones elementales a lo largo de los ejes x , y y z . Para simplificar las notaciones, se denota a la función seno por s_* y a la función coseno por c_* .

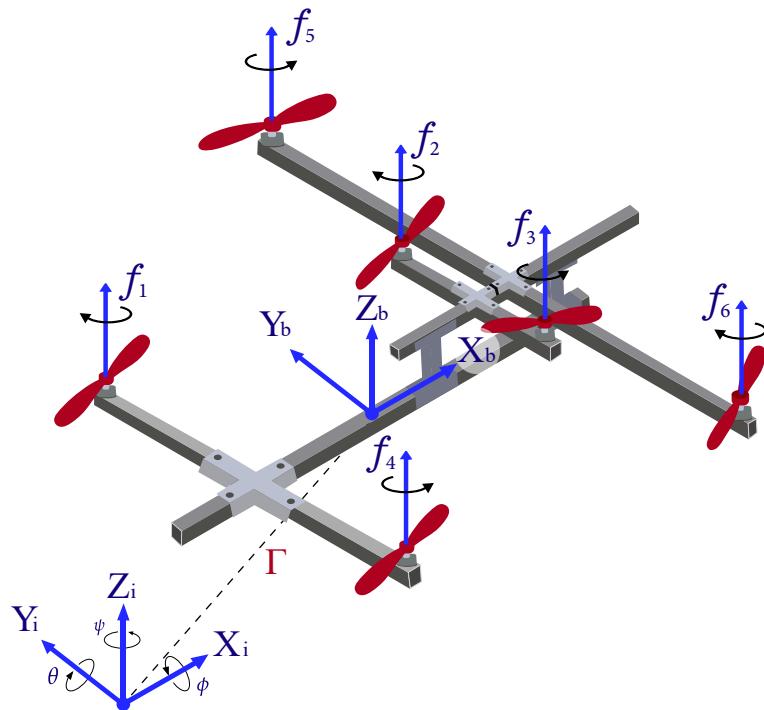


Figura 2.3: Definición de las fuerzas y sentidos de giro para el modo multirrotor.

Rotación del movimiento Roll (ϕ):

$$\mathbf{R}(x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & s\phi \\ 0 & -s\phi & c\phi \end{bmatrix},$$

Mientras que las matrices para el movimiento en Pitch (θ) y Yaw (ψ) son:

$$\mathbf{R}(y, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}(z, \psi) = \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

La matriz de rotación se obtiene a partir de la regla de composición:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) &= \mathbf{R}(x, \phi)\mathbf{R}(y, \theta)\mathbf{R}(z, \psi), \\ \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

La matriz $\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)$ es una matriz ortogonal ($\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$) y se conoce como matriz de coseno directo. Ahora, bien, la matriz de rotación para transformar del marco referencial de la aeronave al marco inercial esta dada como:

$$\begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Continuando con la transformación hacia el marco de referencia inercial es necesario obtener la matriz de transformación para las velocidades angulares. Para ello se sigue la secuencia de rotación $z - y - x$, es decir, se genera la primera rotación sobre $\dot{\psi}$ por medio de dos movimientos rotacionales descritos por $\mathbf{R}(x)$ y $\mathbf{R}(y)$, luego tiene lugar una rotación sobre $\dot{\theta}$ a partir de $\mathbf{R}(x)$ para alinearse con el marco de referencia del cuerpo, y finalmente la rotación sobre $\dot{\phi}$. La relación entre los ángulos de Euler y las velocidades angulares es:

$$\begin{aligned} \Omega &= \omega_n \dot{\eta}, \\ \dot{\eta} &= \omega_n^{-1} \Omega, \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde la velocidad angular Ω es definida por el vector

$$\begin{aligned} \Omega &= \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & c\theta s\phi \\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde la matriz de transformación para las velocidades angulares del marco inercial al marco de referencia del vehículo es:

$$\omega_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & c\theta s\phi \\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

La matriz de transformación para las velocidades angulares del marco de referencia del vehículo al marco inercial es:

$$\omega_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & s\phi \tan\theta & c\phi \tan\theta \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & \sec\theta s\phi & c\phi \sec\theta \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, dado que el cuerpo posee diferentes ejes de rotación, se pueden tener diferentes momentos de inercia en torno a tales ejes. El tensor de inercia contiene todos esos momentos de inercia y se define como:

$$I = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

De la segunda ley de Newton para movimiento rotacional tenemos que:

$$\tau = I\alpha \quad (2.7)$$

donde τ es el torque aplicado, I es el momento de inercia y α es la aceleración angular. La ecuación (2.7) puede ser representada en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix}$$

donde $\{\tau_x, \tau_y, \tau_z\}$ son los torques aplicados en los ejes $\{x, y, z\}$, respectivamente, la aceleración angular está dada como $\alpha = d\omega$, y ω es la velocidad angular.

Momento de inercia

El momento de inercia I está dado como:

$$I = mr^2 \quad (2.8)$$

donde

m : Masa

r : Distancia al eje de rotación

Momento Angular

El momento angular esta dado como

$$L = I\omega \quad (2.9)$$

Dado que el momento de inercia está dado como $I = mr^2$ y la velocidad angular como $\omega = v/r$, podemos expresar el momento angular en forma vectorial como:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \quad (2.10)$$

donde

\vec{r} : vector de posición desde el punto de rotación hasta la posición de la partícula

\vec{v} : velocidad lineal de la partícula

dado que la velocidad de la partícula $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, entonces $\vec{L} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Utilizando la propiedad de triple producto vectorial $(a \times (b \times c)) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$, resulta:

$$\vec{L} = m[r^2\vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r}] \quad (2.11)$$

o equivalentemente:

$$\vec{L} = m \left[r^2 \begin{bmatrix} \vec{\omega}_x \\ \vec{\omega}_y \\ \vec{\omega}_z \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{\omega}_x \\ \vec{\omega}_y \\ \vec{\omega}_z \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right] \quad (2.12)$$

De aquí que el momento angular en cada una de las direcciones $\{x, y, z\}$ está dado por:

$$\begin{aligned} L_x &= m[r^2\omega_x - (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)x] \\ L_y &= m[r^2\omega_y - (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)y] \\ L_z &= m[r^2\omega_z - (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)z] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Lo que agrupando términos resulta:

$$\begin{aligned} L_x &= m[(r^2 - x^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z] \\ L_y &= m[(r^2 - y^2)\omega_y - xy\omega_x - yz\omega_z] \\ L_z &= m[(r^2 - z^2)\omega_z - xz\omega_x - yz\omega_y] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Finalmente, representando en forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} r^2 - x^2 & -xy & -xz \\ -xy & r^2 - y^2 & -yz \\ -xz & -yz & r^2 - z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Por otro lado, dado que $L = I\omega$, es decir:

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

entonces los términos de la diagonal principal están dados por

$$\begin{aligned} I_{xx} &= m(r^2 - x^2) = m(x^2 + y^2 + z^2 - x^2) = m(y^2 + z^2) \\ I_{yy} &= m(r^2 - y^2) = m(x^2 + y^2 + z^2 - y^2) = m(x^2 + z^2) \\ I_{zz} &= m(r^2 - z^2) = m(x^2 + y^2 + z^2 - z^2) = m(x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (2.16)$$

De igual forma, los términos fuera de la diagonal están dados por:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = -mxy \\ I_{xz} &= I_{zx} = -mxz \\ I_{yz} &= I_{zy} = -myz \end{aligned} \quad (2.17)$$

Finalmente, el tensor de inercia resulta como:

$$I = m \begin{bmatrix} (y^2 + z^2) & -xy & -xz \\ -xy & (x^2 + z^2) & -yz \\ -xz & -yz & (x^2 + z^2) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Por otro lado, para exemplificar la obtención del tensor de inercia considere la aeronave mostrada en la Figura 2.4, donde se presenta la aeronave bajo una perspectiva en dos dimensiones de la geometría y distancias consideradas.

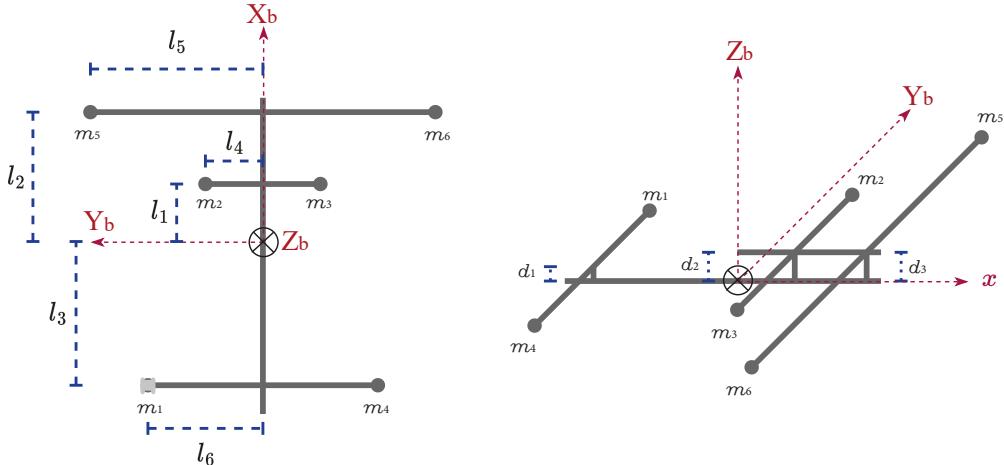


Figura 2.4: Aeronave de seis rotores en el plano $X_b - Y_b$.

Sustituyendo valores de acuerdo a la ecuación (2.18) se tiene:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= m_1[l_6^2 + d_1^2] + m_2[l_4^2 + d_2^2] + m_3[(-l_4)^2 + d_2^2] + \\ &\quad m_4[(-l_6)^2 + d_1^2] + m_5[l_5^2 + d_3^2] + m_6[(-l_5)^2 + d_3^2] \\ I_{yy} &= m_1[(-l_3)^2 + d_1^2] + m_2[l_1^2 + d_2^2] + m_3[l_1^2 + d_2^2] + \\ &\quad m_4[(-l_3)^2 + d_1^2] + m_5[l_2^2 + d_3^2] + m_6[(l_2^2 + d_3^2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= m_1[(-l_3)^2 + l_6^2] + m_2[l_1^2 + l_4^2] + m_3[l_1^2 + (-l_4)^2] + \\
&\quad m_4[(-l_3)^2 + (-l_6)^2] + m_5[l_2^2 + l_5^2] + m_6[(l_2^2 + (-l_5)^2] \\
I_{xy} = I_{yx} &= -m_1(-l_3)(l_6) - m_2l_1l_4 - m_3(l_1)(-l_4) - \\
&\quad m_4(-l_3)(-l_6) - m_5l_2l_5 - m_6(l_2)(-l_5) \\
&= m_1l_3l_6 - m_2l_1l_4 + m_3l_1l_4 - m_4l_3l_6 - m_5l_2l_5 + m_6l_2l_5 \\
I_{xz} = I_{zx} &= -m_1(-l_3)(d_1) - m_2l_1d_2 - m_3l_1d_2 - \\
&\quad m_4(-l_3)(d_1) - m_5l_2d_3 - m_6l_2d_3 \\
&= m_1l_3d_1 - m_2l_1d_2 - m_3l_1d_2 + m_4l_3d_1 - m_5l_2d_3 - m_6l_2d_3 \\
I_{yz} = I_{zy} &= -m_1l_6d_1 - m_2l_4d_2 - m_3(-l_4)d_2 - \\
&\quad m_4(-l_6)(d_1) - m_5l_5d_3 - m_6(-l_5)(d_3) \\
&= -m_1l_6d_1 - m_2l_4d_2 + m_3l_4d_2 + m_4l_6d_1 - m_5l_5d_3 + m_6l_5d_3.
\end{aligned}$$

Sin embargo, tomando en consideración que $d_2 = d_3$, $m_1 = m_2$, $m_3 = m_4$, $m_5 = m_6$ la matriz de inercia resulta como:

$$I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & I_{xz} \\ 0 & I_y & 0 \\ I_{zx} & 0 & I_z \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

2.1.2. Modelo dinámico

Formulación Newton-Euler

Para describir las dinámicas del UAV, se considera la formulación Newton-Euler cuyas ecuaciones describen los movimientos lineales y angulares. Las ecuaciones relacionan el centro de gravedad con la suma de fuerzas y torques que actúan en el vehículo. De acuerdo a las ecuaciones de Newton-Euler, la suma de la aceleración angular sobre el marco inercial, la fuerza centrípeta y la fuerza giroscópica es igual al par externo del vehículo.

Ecuación para los movimientos de translación

Con referencia al marco de coordenadas cuyo origen coincide con el centro de masa del vehículo, las ecuaciones de Newton-Euler se pueden representar como:

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma} &= \mathbf{V}, \\ m\dot{\mathbf{V}} &= \mathbf{R}\mathbf{F}, \\ \mathbf{F} &= \mathbf{R}^T \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_p,\end{aligned}\tag{2.20}$$

donde:

\mathbf{F} = fuerza total que actúa sobre el centro de masa.

m = masa de la aeronave.

\mathbf{F}_g = fuerza de gravedad.

\mathbf{F}_t = Fuerza de arrastre.

\mathbf{F}_p = Fuerza de propulsión.

$\mathbf{V}= (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^\top$, es la velocidad translacional con respecto al marco inercial.

La fuerza debido al peso del vehículo esta descrita por:

$$\mathbf{F}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}.\tag{2.21}$$

La fuerza de arrastre esta relacionada con el vector de velocidades referente a x , y y z :

$$\mathbf{F}_t = -k_{ft} \dot{\Gamma},\tag{2.22}$$

donde $k_{ft} = [k_{ftx} \ k_{fty} \ k_{ftz}]^\top$ representa las constantes de arrastre aerodinámico.

Por otro lado, el empuje en el UAV se genera debido de la rotación de las hélices en un medio (aire) que le permiten elevarse por una fuerza aerodinámica perpendicular al plano de giro. Por lo tanto, el empuje principal (en dirección de z) se obtiene sumando las fuerzas de empuje generadas por cada uno de los motores del UAV híbrido. La Figura 2.5 hace referencia a una representación gráfica de las fuerzas de empuje y la dirección de giro de las hélices de la aeronave. La fuerza de empuje se puede representar de la siguiente manera:

$$\mathbf{F}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_z \end{bmatrix},\tag{2.23}$$

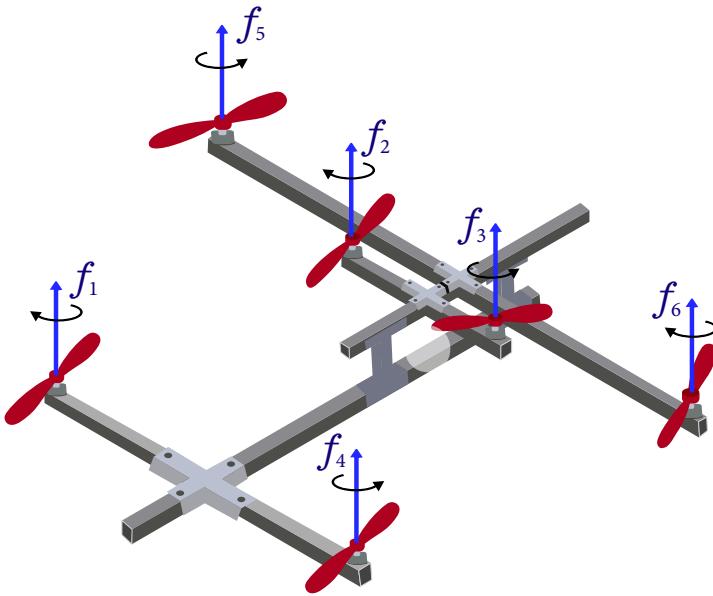


Figura 2.5: Fuerzas de empuje generadas por los motores del UAV.

donde ($u_z = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = \sum_{i=1}^6 f_i$). Asimismo, la fuerza generada por cada motor está relacionada directamente con la velocidad angular (ω) mediante la siguiente expresión:

$$f = k_t \omega^2, \quad (2.24)$$

donde k_t es la constante de empuje.

Entonces, la dinámica de traslación para el UAV puede describirse como:

$$m\dot{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \mathbf{R} \begin{bmatrix} -k_{ftx} \dot{x} \\ -k_{fty} \dot{y} \\ -k_{ftz} \dot{z} \end{bmatrix} + \mathbf{R}u,$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{m} \right) \mathbf{R} \begin{bmatrix} -k_{ftx} \dot{x} \\ -k_{fty} \dot{y} \\ -k_{ftz} \dot{z} \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{m} \right) \mathbf{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_z \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{m} \right) \begin{bmatrix} c\theta \ c\psi & s\phi \ s\theta \ c\psi - c\phi \ s\psi & c\phi \ s\theta \ c\psi + s\phi \ s\psi \\ c\theta \ s\psi & c\phi \ s\theta \ c\psi + s\phi \ s\psi & c\phi \ s\theta \ s\psi - s\phi \ c\psi \\ -s\theta & s\phi \ c\theta & c\phi \ c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_{ftx} \dot{x} \\ -k_{fty} \dot{y} \\ -k_{ftz} \dot{z} \end{bmatrix} \quad (2.25) \\
&\quad + \left(\frac{1}{m} \right) \begin{bmatrix} (c\phi \ s\theta \ c\psi + s\phi \ s\psi) u_z \\ (c\phi \ s\theta \ s\psi - s\phi \ c\psi) u_z \\ (c\phi \ c\theta) u_z \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalmente, efectuando operaciones respecto a la transformación del marco de referencia cuerpo al marco inercial se tiene:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{1}{m} [-k_{ftx} \dot{x} \ c\theta \ c\psi - k_{fty} \dot{y} \ (s\phi \ s\theta \ c\psi - c\phi \ s\psi) - k_{ftz} \dot{z} \ (c\phi \ s\theta \ c\psi + s\phi \ s\psi)] \\
&\quad + \frac{1}{m} [(c\phi \ s\theta \ c\psi + s\phi \ s\psi) u_z], \\
\ddot{y} &= \frac{1}{m} [-k_{ftx} \dot{x} \ c\theta \ s\psi - k_{fty} \dot{y} \ (c\phi \ s\theta \ c\psi + s\phi \ s\psi) - k_{ftz} \dot{z} \ (c\phi \ s\theta \ s\psi - s\phi \ c\psi)] \quad (2.26) \\
&\quad + \frac{1}{m} [(c\phi \ s\theta \ s\psi - s\phi \ c\psi) u_z], \\
\ddot{z} &= \frac{1}{m} [-k_{ftx} \dot{x} \ s\theta - k_{fty} \dot{y} \ s\phi \ c\theta - k_{ftz} \dot{z} \ c\phi \ c\theta + (c\phi \ c\theta) u_z] - g.
\end{aligned}$$

Ecuación para los movimientos de rotación

El movimiento de rotación a diferencia del de translación se realiza mediante las fuerzas tangenciales de los seis rotores. Estas fuerzas pueden sumarse o restarse en función del signo o sentido de giro de las fuerzas tangenciales. La ecuación para describir la dinámica de rotación es

$$I\dot{\Omega} = -\Omega \times I\Omega + \tau - \tau_a - \tau_g, \quad (2.27)$$

donde:

Ω = velocidad angular.

$\dot{\Omega}$ = aceleración angular.

τ = torque o momento debido a los actuadores.

τ_a = torque o momento de resistencia aerodinámica.

τ_g = torque o momento asociado al efecto giroscópico.

El torque o momento debido al movimiento rotacional del UAV, puede ser descrito como un vector que contiene los torques que generan el movimiento en Roll (ϕ), Pitch(θ) y Yaw (ψ) como $\tau = [\tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi]^\top$, cuyas componentes se relacionan con los ángulos de orientación. Asimismo, cada rotor de la aeronave produce un torque ($\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5$ y τ_6) que es directamente proporcional a la fuerza de empuje. Usando los seis rotores y mediante una combinación adecuada de velocidades angulares es producida la rotación del vehículo. Esto quiere decir que, los torques para los movimientos referentes a los ángulos de Euler se obtienen usando una combinación de los torques generados por los rotores.

Por ejemplo, el movimiento en roll es empleado para generar una rotación del UAV al rededor del eje (x_b). Esta acción se logra aumentando o reduciendo el empuje producido por tres de las propelas del lado derecho o izquierdo según sea el caso. En otras palabras, el torque τ_ϕ requerido se obtiene mediante la siguiente combinación de torques:

$$\tau_\phi = \tau_1 + \tau_2 + \tau_5 - (\tau_3 + \tau_4 + \tau_6), \quad (2.28)$$

Si $\tau_1 + \tau_2 + \tau_5 > \tau_3 + \tau_4 + \tau_6$ se produce una rotación en sentido positivo, en caso contrario ($\tau_3 + \tau_4 + \tau_6 > \tau_1 + \tau_2 + \tau_5$) el sentido de rotación es negativo. La representación gráfica de la generación de este movimiento, se presenta en la, Figura 2.6

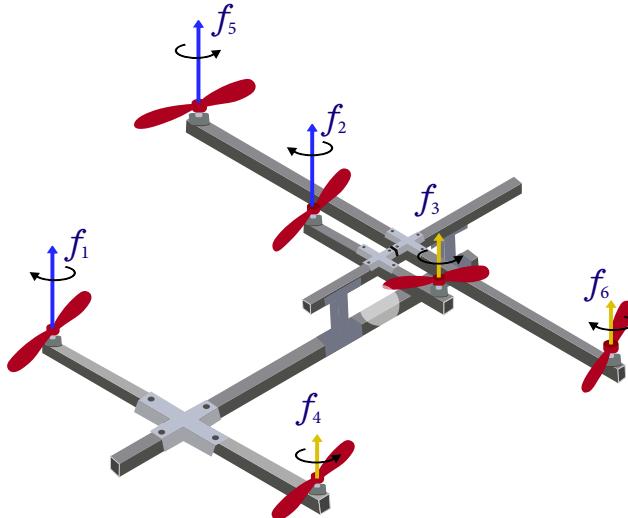


Figura 2.6: Generación del movimiento en roll.

El movimiento en pitch (Figura 2.8) es empleado para generar una rotación del multirrotor al rededor del eje (Y_b). Esta acción se logra aumentando o reduciendo el empuje producido por las propelas frontales mientras que se aumenta o reduce el empuje de las propelas traseras de acuerdo el movimiento deseado. Es decir, el τ_θ requerido para este movimiento se obtiene mediante mediante:

$$\tau_\theta = \tau_2 + \tau_3 + \tau_5 + \tau_6 - (\tau_1 + \tau_4). \quad (2.29)$$

Por otro lado, considerando que momento es igual a fuerza f por distancia d , i.e. $\tau = f \times d$, entonces [57, 58].

$$\begin{aligned} \tau_\phi &= f_1 l_6 + f_2 l_4 + f_5 l_5 - f_3 l_4 + f_4 l_6 + f_6 l_5, \\ \tau_\theta &= f_1 l_6 + f_2 l_4 + f_5 l_5 - f_3 l_4 + f_4 l_6 + f_6 l_5. \end{aligned} \quad (2.30)$$

En la Figura 2.7 se muestra una vista superior de la aeronave, así como la descripción de ciertas longitudes basadas en la ubicación de los rotores del vehículo.

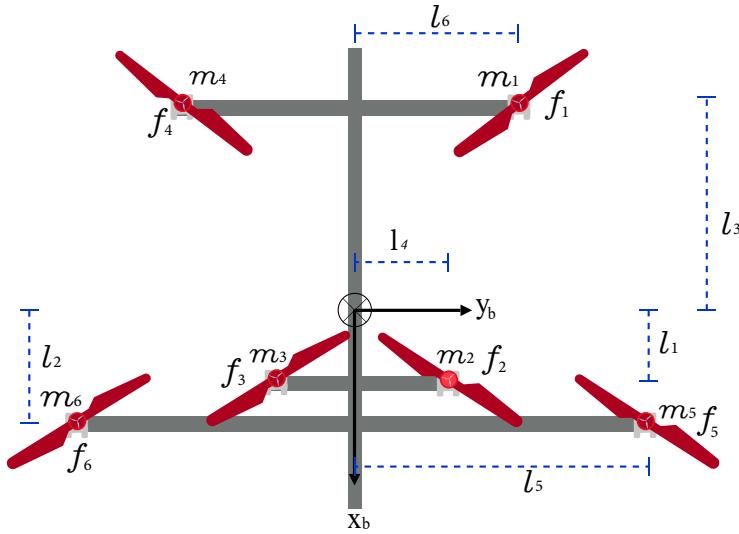


Figura 2.7: Vista en 2D para la descripción de distancias.

La rotación en yaw (Figura 2.9) se genera a partir del aumento o reducción de la velocidad de los tres rotores que giran en sentido horario y el aumento o reducción de la velocidad de los otros tres rotores que giran en sentido antihorario. Sin embargo, se debe considerar un efecto giroscópico definido a partir del momento de inercia y la aceleración angular de cada motor. Por ello, τ_ψ es definida como:

$$\tau_\psi = \sum_{i=1}^6 \tau M_i, \quad (2.31)$$

donde $\tau M_i = I_{M_i} \dot{\omega}_{r_i}$. I_{M_i} es el momento de inercia y $\dot{\omega}_{r_i}$ es la aceleración angular producida por cada motor. Por lo tanto, los torques de los ángulos de orientación se obtienen como:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 l_6 + f_2 l_4 + f_5 l_5 - f_3 l_4 + f_4 l_6 + f_6 l_5 \\ f_1 l_6 + f_2 l_4 + f_5 l_5 - f_3 l_4 + f_4 l_6 + f_6 l_5 \\ \sum_{i=1}^6 \tau M_i \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

El vector $\boldsymbol{\tau}$ es el que habitualmente contiene los torques de control.

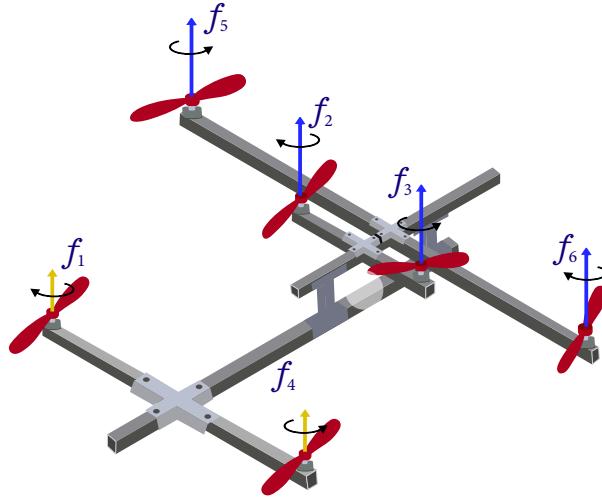


Figura 2.8: Generación del movimiento en pitch

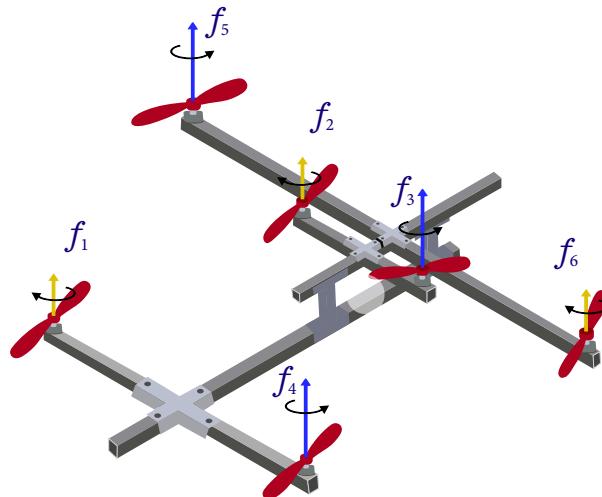


Figura 2.9: Generación del movimiento en yaw

Por otro lado, el torque o momento de resistencia aerodinámica se describe a partir de las velocidades angulares

$$\begin{aligned}\tau_a &= \begin{bmatrix} \tau_{ax} \\ \tau_{ay} \\ \tau_{az} \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} k_{fax} p^2 \\ k_{fay} q^2 \\ k_{faz} r^2 \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{2.33}$$

donde k_{fa} es la constante de fuerza aerodinámica para x , y y z respectivamente.

En cuanto al movimiento de rotación producido por el rotor y la hélice, se genera un efecto giroscópico que actúa sobre la aeronave en el marco de coordenadas del cuerpo. El efecto giroscópico depende del momento de inercia de la propela (I_r), la velocidad angular de los rotores (ω_r) y la altitud del vehículo, que se puede expresar por

$$\tau_g = \sum_{i=1}^6 I_{ri} (\Omega \times \omega_{ri}),\tag{2.34}$$

$$\tau_g = I_r \left[\Omega \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_r \end{bmatrix} \right] = I_r \left[\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_r \end{bmatrix} \right] = I_r \begin{bmatrix} q \omega_r \\ -p \omega_r \\ 0 \end{bmatrix},\tag{2.35}$$

donde $\omega_r = -\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4 - \omega_5 + \omega_6$.

Sustituyendo (2.35), (2.33) y (2.19) en (2.27)

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ I_{zx} & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ I_{zx} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{fax} p^2 \\ k_{fay} q^2 \\ k_{faz} r^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_r q \omega_r \\ -I_r p \omega_r \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ I_{zx} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} q(rI_{yy} - pI_{zx} - rI_{zz}) \\ p(pI_{zx} + rI_{zz} - rI_{xx}) - rrI_{xz} \\ q(rI_{xx} + rI_{xz} - pI_{yy}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{fax} p^2 \\ k_{fay} q^2 \\ k_{faz} r^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_r q \omega_r \\ -I_r p \omega_r \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.\end{aligned}\tag{2.36}$$

Cuando el vehículo o UAV se encuentra en una misión de vuelo y no produce inclinaciones considerables, las direcciones de los ejes cuerpo y las direcciones de rotación están casi alineadas con los ejes de referencia. Es decir, la componente p produce prácticamente solo cambios en ϕ , q en θ y r en ψ . Por eso las derivadas de los ángulos se aproximan a las velocidades angulares cuerpo. Mediante un proceso de linealización respecto al punto de operación (ángulos pequeños) es posible obtener la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Considerando la ecuación (2.37) se puede derivar una expresión para la aceleración angular como:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ I_{zx} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{\theta} (\dot{\psi} I_{yy} - \dot{\phi} I_{zx} - \dot{\psi} I_{zz}) \\ \dot{\phi} (\dot{\phi} I_{zx} + \dot{\psi} I_{zz} - \dot{\psi} I_{xx}) - \dot{\psi} \dot{\phi} I_{xz} \\ \dot{\theta} (\dot{\psi} I_{xx} + \dot{\psi} I_{xz} - \dot{\phi} I_{yy}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{fax} \dot{\phi}^2 \\ k_{fay} \dot{\theta}^2 \\ k_{faz} \dot{\psi}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_r \theta \omega_r \\ -I_r \phi \omega_r \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (2.38)$$

Efectuando las operaciones, las ecuaciones que describen la dinámica rotacional son

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{I_{zz}}{a_1} [\dot{\theta} (\dot{\psi} I_{yy} - \dot{\phi} I_{zx} - \dot{\psi} I_{zz}) - \xi_1 + \tau_\phi] - \frac{I_{xz}}{a_1} [\dot{\theta} (\dot{\psi} I_{xx} + \dot{\psi} I_{xz} - \dot{\phi} I_{yy}) - \xi_3 + \tau_\psi], \\ \ddot{\theta} &= \frac{1}{I_{yy}} [\dot{\phi} (\dot{\phi} I_{zx} + \dot{\psi} I_{zz} - \dot{\psi} I_{xx}) - \dot{\psi} \dot{\phi} I_{xz} - \xi_2 + \tau_\theta], \\ \ddot{\psi} &= \frac{I_{xx}}{a_1} [\dot{\theta} (\dot{\psi} I_{xx} + \dot{\psi} I_{xz} - \dot{\phi} I_{yy}) - \xi_3 + \tau_\psi] - \frac{I_{zx}}{a_1} [\dot{\theta} (\dot{\psi} I_{yy} - \dot{\phi} I_{zx} - \dot{\psi} I_{zz}) - \xi_1 + \tau_\phi], \end{aligned} \quad (2.39)$$

con $a_1 = (I_{xx}I_{zz} - I_{xz}I_{zx})$, $\xi_1 = k_{fax}\dot{\phi}^2 + I_r \dot{\theta} \omega_r$, $\xi_2 = k_{fay}\dot{\theta}^2 - I_r \dot{\phi} \omega_r$ y $\xi_3 = k_{faz}\dot{\psi}^2$.

Por lo tanto, las ecuaciones dinámicas de la aeronave son la siguientes:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= \frac{1}{m} [(c\phi \ s\theta \ c\psi + s\phi \ s\psi) u_z] + \xi_x, \\
 \ddot{y} &= \frac{1}{m} [(c\phi \ s\theta \ s\psi - s\phi \ c\psi) u_z] + \xi_y, \\
 \ddot{z} &= \frac{1}{m} [(c\phi \ c\theta) u_z] - g + \xi_z, \\
 \ddot{\phi} &= \frac{I_{zz}}{a_1} [a_2 + \tau_\phi] - \frac{I_{xz}}{a_1} [a_3 + \tau_\psi] + \xi_\phi, \\
 \ddot{\theta} &= \frac{1}{I_{yy}} [a_4 - \dot{\psi}\dot{\psi} I_{xz} + \tau_\theta] + \xi_\theta, \\
 \ddot{\psi} &= \frac{I_{xx}}{a_1} [a_3 + \tau_\psi] - \frac{I_{zx}}{a_1} [a_2 + \tau_\phi] + \xi_\psi.
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
 \text{con } \xi_x &= \zeta_x - \frac{1}{m} [k_{ftx} \dot{x} \ c\theta \ c\psi + k_{fty} \dot{y} \ (s\phi \ s\theta \ c\psi - c\phi \ s\psi) + k_{ftz} \dot{z} \ (c\phi \ s\theta \ c\psi + s\phi \ s\psi)], \\
 \xi_y &= \zeta_y - \frac{1}{m} [k_{ftx} \dot{x} \ c\theta \ s\psi + k_{fty} \dot{y} \ (c\phi \ s\theta \ c\psi + s\phi \ s\psi) + k_{ftz} \dot{z} \ (c\phi \ s\theta \ s\psi - s\phi \ c\psi)], \\
 \xi_z &= \zeta_z - \frac{1}{m} [-k_{ftx} \dot{x} \ s\theta - k_{fty} \dot{y} \ s\phi \ c\theta - k_{ftz} \dot{z} \ c\phi \ c\theta], \quad \xi_\phi = \zeta_\phi - \frac{I_{zz}\xi_1}{a_1} + \frac{I_{xz}\xi_3}{a_1}, \quad \xi_\theta = \zeta_\theta - \frac{\xi_2}{I_{yy}} \\
 &\text{y } \xi_\psi = \zeta_\psi - \frac{I_{xx}\xi_3}{a_1} + \frac{I_{zx}\xi_1}{a_1}, \quad a_1 = (I_{xx}I_{zz} - I_{xz}I_{zx}), \quad a_2 = \dot{\theta}(t) (\dot{\psi}(t)I_{yy} - \dot{\phi}(t)I_{zx} - \dot{\psi}(t)I_{zz}), \\
 a_3 &= \dot{\theta}(t) (\dot{\psi}(t)I_{xz} + \dot{\phi}(t)I_{xx} - \dot{\phi}(t)I_{yy}), \quad a_4 = \dot{\phi}(t) (\dot{\phi}(t)I_{zx} + \dot{\psi}(t)I_{zz} - \dot{\psi}(t)I_{xx}).
 \end{aligned}$$

Los términos ζ_x , ζ_y , ζ_z , ζ_ϕ , ζ_θ y ζ_ψ , son términos relacionados con las perturbaciones, incertidumbres o dinámicas no modeladas de los movimientos de translación y orientación.

2.2. Conclusiones

En este Capítulo se describe la dinámica del vehículo aéreo bajo la formulación de Newton-Euler considerando los momentos de inercia y efectos aerodinámicos. Las dinámicas basadas en la translación y orientación del vehículo toman en consideración perturbaciones desconocidas pero acotadas. El problema se enfoca en proponer estrategias de control para ejecutar una misión de seguimiento de trayectoria en donde es posible enfrentar condiciones adversas. También, en esta sección se hacen ciertas consideraciones que

permiten reducir algunos términos de las ecuaciones finales. En los siguientes Capítulos se utiliza el modelo para el diseño y validación de los controladores.

Capítulo 3

Algoritmos de control

3.1. Estrategias de control para modo multirrotor

En esta sección se describen tres estrategias de control aplicadas al modelo de la aeronave en modo multirrotor. Inicialmente se presentan algunas consideraciones realizadas para fines de controlar el sistema. Después, se describe una estrategia tipo PD robusto, en donde se muestra un algoritmo para la sintonización de las ganancias de control. Además, se contempla un control virtual sobre las posiciones en x y y que, se explica a continuación. Posteriormente se describe una estrategia de control basada en modos deslizantes integrales, que consiste en proponer una superficie de deslizamiento y obtener la ley de control a partir del formalismo de Lyapunov. Esto con el objetivo de generar un controlador robusto con características de rechazo ante perturbaciones externas. Finalmente se describe una estrategia de control robusto basado en la teoría del control por modos deslizantes dinámicos. Se propone una superficie de deslizamiento con una estructura tipo PID, y se obtiene la forma de la acción de control.

3.1.1. Preliminares

Para propósitos de control y realizar simplificaciones en el modelo dinámico del sistema, se realizar ciertas consideraciones que se describen en los siguientes puntos:

- El centro de masa del vehículo coincide con el origen del marco de referencia en el cuerpo.

- A bajas velocidades, los efectos aerodinámicos no son considerados.
- La aeronave no realiza maniobras agresivas, es decir $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.
- Las velocidades angulares referentes al marco inercial y al marco del cuerpo son las mismas a velocidades bajas.
- Sobre las dinámicas de orientación en (2.40) solo actúan τ_ϕ , τ_θ y τ_ψ respectivamente.
- El término de perturbaciones o dinámicas inciertas del sistema, así como sus variaciones, satisface la siguiente condición:

$$\|\xi(t)\| \leq \delta_1, \quad \|\dot{\xi}(t)\| \leq \delta_2, \quad 0 < \delta_1 < \infty, \quad 0 < \delta_2 < \infty, \quad (3.1)$$

- Al no considerar los términos de coriolis en la dinámica de la aeronave descrita en (2.40) se tiene:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{I_{zz}}{a_1} \tau_\phi \\ \frac{1}{I_{yy}} \tau_\theta \\ \frac{I_{xx}}{a_1} \tau_\psi \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Entonces, la dinámica de translación y orientación de la aeronave, bajo las consideraciones mencionadas anteriormente es:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{1}{m} [(\cos \phi \ \sin \theta \ \cos \psi + \sin \phi \ \sin \psi) u_z] + \xi_x, \\ \ddot{y} &= \frac{1}{m} [(\cos \phi \ \sin \theta \ \sin \psi - \sin \phi \ \cos \psi) u_z] + \xi_y, \\ \ddot{z} &= \frac{1}{m} [(\cos \phi \ \cos \theta) u_z] - g + \xi_z, \\ \ddot{\phi} &= \frac{I_{zz}}{a_1} \tau_\phi + \xi_\phi, \\ \ddot{\theta} &= \frac{1}{I_{yy}} \tau_\theta + \xi_\theta, \\ \ddot{\psi} &= \frac{I_{xx}}{a_1} \tau_\psi + \xi_\psi, \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde ξ_x , ξ_y , ξ_z , ξ_ψ , ξ_θ , y ξ_ϕ son las perturbaciones y/o dinámicas no modeladas sobre la posición y ángulos referidos. De dichas perturbaciones no se sabe su forma específica,

sin embargo se tiene el supuesto de que están acotadas. Es decir que, de forma general $\|\xi\|^2 \leq \delta$, $0 < \delta$.

Para facilitar el diseño de controladores en este tipo de aeronaves, se suele emplear una metodología enfocada en analizar la dinámica del sistema mediante la separación en subsistemas que pueden ser controlados de forma independiente. Estos subsistemas se definen agrupando las ecuaciones dinámicas de la siguiente manera:

Subsistema de altitud: El primer subsistema contempla la altura de la aeronave (z):

$$\begin{cases} \ddot{z} = \frac{1}{m}[(\cos \phi \cos \psi)u_z] - g + \xi_z, \end{cases} \quad (3.4)$$

Subsistema direccional: Se trata del ángulo de guiñada (ψ) del sistema:

$$\begin{cases} \ddot{\psi} = \frac{I_{xx}}{a_1}\tau_\psi + \xi_\psi, \end{cases} \quad (3.5)$$

Subsistema longitudinal: Este subsistema integra las dinámicas de traslación respecto a x y el cabeceo (θ) del UAV:

$$\begin{cases} \ddot{y} = \frac{1}{m}[(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi)u_z] + \xi_y, \\ \ddot{\phi} = \frac{1}{I_{yy}}\tau_\theta + \xi_\theta, \end{cases} \quad (3.6)$$

Subsistema lateral: El cuarto subsistema describe las dinámicas de traslación respecto a y y el ángulo de alabeo (ϕ) del vehículo:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m}[(\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi)u_z] + \xi_x, \\ \dot{\theta} = \frac{I_{zz}}{a_1}\tau_\phi + \xi_\phi, \end{cases} \quad (3.7)$$

Los subsistemas se definen de esta manera considerando que el UAV es un sistema subacuado y por lo tanto existe acoplamiento entre las dinámicas de traslación y rotación. De (3.6) podemos ver que una variación del ángulo θ produce un cambio en la posición x ; lo mismo sucede en (3.7) con ϕ y y . En cuanto a (3.4) y (3.5), las dinámicas están desacopladas ya que ψ es independiente de z . Por otro lado, se considera la siguiente entrada de control por realimentación linealizante:

$$u_z = \frac{m}{\cos \phi \cos \theta}(g + \bar{u}_z). \quad (3.8)$$

Entonces, al substituir (3.8) en las dinámicas de translación de los subsistemas (3.4), (3.6) y (3.7) se tiene:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \left(\tan \theta \cos \psi + \tan \phi \frac{\sin \psi}{\cos \theta} \right) (g + \bar{u}_z) + \xi_x, \\ \ddot{y} &= \left(\tan \theta \sin \psi - \tan \phi \frac{\cos \psi}{\cos \theta} \right) (g + \bar{u}_z) + \xi_y, \\ \ddot{z} &= \bar{u}_z + \xi_z.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Para el control de las translaciones x y y , se implementaron controladores virtuales, los cuales se describen a continuación. Respecto al subsistema longitudinal (3.6) se tiene la dinámica del error $\ddot{e}_x = -k_1 e_x - k_2 \dot{e}_x$, donde k_1, k_2 son ganancias de control positivas, entonces la función de error (e_x) para este movimiento de translación esta determinado como

$$\begin{aligned}e_x &= x - x_{\text{ref}}, \\ \dot{e}_x &= \dot{x} - \dot{x}_{\text{ref}}, \\ \ddot{e}_x &= \ddot{x} - \ddot{x}_{\text{ref}}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

sustituyendo en la dinámica de \ddot{x} y despejando se tiene

$$\tan \theta = \left(\frac{-k_1 e_x - k_2 \dot{e}_x + \ddot{x}_{\text{ref}}}{g + \bar{u}_z} - \tan \phi \frac{\sin \psi}{\cos \theta} \right) \frac{1}{\cos \psi}, \quad (3.11)$$

note que, x puede ser controlada indirectamente mediante la manipulación de θ . Generando un control virtual sobre "x", a través del término $\tan \theta$. Por lo tanto

$$\theta = \arctan \left\{ \left(\frac{-k_1 e_x - k_2 \dot{e}_x + \ddot{x}_{\text{ref}}}{g + \bar{u}_z} - \tan \phi \frac{\sin \psi}{\cos \phi} \right) \frac{1}{\cos \psi} \right\}. \quad (3.12)$$

Por lo que, si θ se satisface, la dinámica en x se controla. Entonces se propone que el error en θ sea $e_\theta = \theta - \theta_{\text{ref}}$. Entonces θ_{ref} debe tener la misma estructura que θ , esto es:

$$\theta_{\text{ref}} = \arctan \left\{ \left(\frac{-k_1 e_x - k_2 \dot{e}_x + \ddot{x}_{\text{ref}}}{g + \bar{u}_z} - \tan \phi \frac{\sin \psi}{\cos \theta} \right) \frac{1}{\cos \psi} \right\}, \quad (3.13)$$

y el objetivo es que el

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_\theta = \lim_{t \rightarrow \infty} (\theta - \theta_{\text{ref}}) = 0. \quad (3.14)$$

Para el subsistema lateral (3.6) se consideran las funciones de error

$$\begin{aligned} e_y &= y - y_d, \\ \dot{e}_y &= \dot{y} - \dot{y}_{\text{ref}}, \\ \ddot{e}_y &= \ddot{y} - \ddot{y}_{\text{ref}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

La dinámica deseada es $\ddot{e}_y = -k_3 e_y - k_4 \dot{e}_y$, con k_3, k_4 como ganancias de control positivas. Entonces despejando y sustituyendo en la dinámica de \ddot{y} se tiene

$$\tan \phi = \left(\frac{k_3 e_y + k_4 \dot{e}_y - \ddot{y}_{\text{ref}}}{g + \bar{u}_z} + \tan \theta \sin \psi \right) \frac{\cos \theta}{\cos \psi}, \quad (3.16)$$

De manera similar al subsistema anterior, se puede notar que y puede ser controlada indirectamente mediante la manipulación de ϕ , generando así, un control virtual sobre y mediante el término $\tan \phi$ de modo que

$$\phi = \arctan \left\{ \left(\frac{k_3 e_y + k_4 \dot{e}_y - \ddot{y}_{\text{ref}}}{g + \bar{u}_z} + \tan \theta \sin \psi \right) \frac{\cos \theta}{\cos \psi} \right\}. \quad (3.17)$$

Por lo que, si ϕ se satisface, la dinámica en y se controla. Entonces se propone que el error en ϕ sea $e_\phi = \phi - \phi_{\text{ref}}$. Note que ϕ_{ref} debe tener la misma estructura que ϕ , esto es:

$$\phi_{\text{ref}} = \arctan \left\{ \left(\frac{k_3 e_y + k_4 \dot{e}_y - \ddot{y}_{\text{ref}}}{g + \bar{u}_z} + \tan \theta \sin \psi \right) \frac{\cos \theta}{\cos \psi} \right\}. \quad (3.18)$$

y el objetivo es que el

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_\phi = \lim_{t \rightarrow \infty} (\phi - \phi_{\text{ref}}) = 0. \quad (3.19)$$

Nota. Es importante mencionar que, el pre-control u_z , así como los controles virtuales relacionados con la traslación x - y , son utilizados en cada de las estrategias de control (con la misma estructura y mismos parámetros) que se describen en la siguientes secciones.

En resumen, tomando en cuenta lo desarrollado previamente, las ecuaciones de cada

subsistemas son:

$$\begin{aligned}
 \ddot{z} &= \bar{u}_z + \xi_z, \\
 \ddot{\psi} &= \gamma_\psi \tau_\psi + \xi_\psi, \\
 \ddot{x} &= \left(\tan \theta \cos \psi + \tan \phi \frac{\sin \psi}{\cos \theta} \right) (g + \bar{u}_z) + \xi_x, \\
 \ddot{\theta} &= \gamma_\theta \tau_\theta + \xi_\theta, \\
 \ddot{y} &= \left(\tan \theta \sin \psi - \tan \phi \frac{\cos \psi}{\cos \theta} \right) (g + \bar{u}_z) + \xi_y, \\
 \ddot{\phi} &= \gamma_\phi \tau_\phi + \xi_\phi.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

con $\gamma_\psi = \frac{I_{xx}}{a_1}$, $\gamma_\theta = \frac{1}{I_{yy}}$, $\gamma_\phi = \frac{I_{zz}}{a_1}$. Sin embargo, realmente las estrategias se basan en el control de las dinámicas z , ψ , θ y ϕ dado que, para x y y se ha descrito previamente el método utilizado.

Por otro lado, el conjunto de ecuaciones de cada subsistema en (3.20) puede representarse como un sistema cuasi lineal bajo una representación en espacio estado como:

$$\dot{x}_z = \mathbf{A}x_z + \mathbf{B}_z \mathbf{u}_z + \zeta_z, \tag{3.21}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad x_z = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix},$$

$$\dot{x}_\psi = \mathbf{A}x_\psi + \mathbf{B}_\psi \mathbf{u}_\psi + \zeta_\psi, \tag{3.22}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad x_\psi = \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix},$$

$$\dot{x}_\theta = \mathbf{A}x_\theta + \mathbf{B}_\theta \mathbf{u}_\theta + \zeta_\theta, \tag{3.23}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad x_\theta = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix},$$

$$\dot{x}_\phi = \mathbf{A}x_\phi + \mathbf{B}_\phi \mathbf{u}_\phi + \zeta_\phi, \tag{3.24}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad x_\phi = \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix},$$

O de manera general se tiene:

$$\dot{x}_i = \mathbf{A}x_i + \mathbf{B}_i\mathbf{u}_i + \zeta_i, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ q_i \end{bmatrix}, \quad i = z, \phi, \theta, \psi.$$

para $i = z$ el término q_i toma el valor $q_i = 1$ y para $i = \phi, \theta, \psi$, $q_i = \gamma_i$.

La matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la matriz de estado o transición, $B_i \in \mathbb{R}^2$ es el vector asociado a la entrada de control y el vector ζ_i contiene las perturbaciones externas y/o incertidumbres dinámicas. El problema consiste en proponer una entrada u_i que permita al vehículo seguir una trayectoria y, al mismo tiempo, rechazar perturbaciones. A continuación se desarrollan tres estrategias de control utilizando el concepto de estabilidad uniformemente acotada (UUB).

3.1.2. Control PD robusto

El diseño de esta estrategia de control tiene como primer objetivo desarrollar una regulación de la altura (z), para posteriormente estabilizar el resto de los subsistemas. La estructura de los controles en esta estrategia es la de un control proporcional derivativo (PD), en función de un error calculado como la diferencia entre la posición o ángulo medido menos la posición o ángulo deseado.

Entonces se establece una estrategia para la estabilización en z mediante la función de error:

$$\begin{aligned} e_z &= z - z_{\text{ref}}, \\ \dot{e}_z &= \dot{z} - \dot{z}_{\text{ref}}, \\ \ddot{e}_z &= \ddot{z} - \ddot{z}_{\text{ref}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

La dinámica del error está definida como: $\ddot{e}_z = -k_5 e_z - k_6 \dot{e}_z$, donde k_5, k_6 son ganancias de control positivas. Entonces se define la siguiente entrada de control:

$$\bar{u}_z = -k_5 e_z - k_6 \dot{e}_z + \ddot{z}_{\text{ref}}. \quad (3.27)$$

En cuanto al ángulo ψ (ángulo de rotación no relacionado directamente con x, y, z), se propone la función de error

$$\begin{aligned} e_\psi &= \psi - \psi_{\text{ref}}, \\ \dot{e}_\psi &= \dot{\psi} - \dot{\psi}_{\text{ref}}, \\ \ddot{e}_\psi &= \ddot{\psi} - \ddot{\psi}_{\text{ref}}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde la dinámica del error es $\ddot{e}_\psi = -k_{11}e_\psi - k_{12}\dot{e}_\psi$, y k_{11}, k_{12} son ganancias de control positivas. Entonces se propone:

$$\tau_\psi = (-k_{11}e_\psi - k_{12}\dot{e}_\psi + \ddot{\psi}_{\text{ref}}) \frac{1}{\gamma_\psi}, \quad (3.29)$$

con $a_1 = (I_{xx}I_{zz} - I_{xz}I_{zx})$. Respecto al ángulo de cabeceo θ se tienen las funciones error:

$$\begin{aligned} e_\theta &= \theta - \theta_{\text{ref}}, \\ \dot{e}_\theta &= \dot{\theta} - \dot{\theta}_{\text{ref}}, \\ \ddot{e}_\theta &= \ddot{\theta} - \ddot{\theta}_{\text{ref}}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde se tiene la dinámica $\ddot{e}_\theta = -k_9e_\theta - k_{10}\dot{e}_\theta$, k_9, k_{10} son ganancias de control positivas. Por lo tanto la consigna de control es:

$$\tau_\theta = (-k_9e_\theta - k_{10}\dot{e}_\theta + \ddot{\theta}_d) \frac{1}{\gamma_\theta} \quad (3.31)$$

Por último, en cuanto al ángulo de alabeo se establecen las funciones de error

$$\begin{aligned} e_\phi &= \phi - \phi_{\text{ref}}, \\ \dot{e}_\phi &= \dot{\phi} - \dot{\phi}_{\text{ref}}, \\ \ddot{e}_\phi &= \ddot{\phi} - \ddot{\phi}_{\text{ref}}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

se busca la dinámica $\ddot{e}_\phi = -k_7e_\phi - k_8\dot{e}_\phi$, donde k_7, k_8 son ganancias de control positivas. Por lo que la acción de control se propone como:

$$\tau_\phi = (-k_7e_\phi - k_8\dot{e}_\phi + \ddot{\phi}_{\text{ref}}) \frac{1}{\gamma_\phi}. \quad (3.33)$$

Análisis de robustez del control PD.

Para esta estrategia se propone un algoritmo para obtener ganancias que generen robustez a la entrada de control. Primero, se considera que $|\psi| < \frac{\pi}{2}$. Además, se busca que $\psi = 0$. Por lo tanto $\psi_{\text{ref}} = 0$, $\dot{\psi}_{\text{ref}} = 0$ y $\ddot{\psi}_{\text{ref}} = 0$. De (3.28) se tienen las funciones de error:

$$\begin{aligned} e_\psi &= \psi, \\ \dot{e}_\psi &= \dot{\psi}, \\ \ddot{e}_\psi &= \ddot{\psi}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

y en consecuencia

$$\ddot{e}_\psi = \frac{1}{\gamma_\psi} \tau_\psi + \xi_\psi.$$

La dinámica con relación a ψ se puede describir como en (3.22):

$$\dot{x}_\psi = \mathbf{A}x_\psi + \mathbf{B}_\psi \mathbf{u}_\psi + \zeta_\psi, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_\psi = \tau_\psi, \quad x_\psi = \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad \zeta_\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_\psi \end{bmatrix},$$

Para el diseño de un control estabilizante se considera el estado extendido $x_\psi^\top = [\psi \ \dot{\psi}]$, y se propone una función de energía $V_\psi(x_\psi) = x_\psi^\top \mathbf{P}_\psi x_\psi$, donde la matriz $\mathbf{P}_\psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es definida positiva ($0 < \mathbf{P}_\psi$, $\mathbf{P}_\psi = \mathbf{P}_\psi^\top$). La derivada temporal de la función de energía a lo largo de las trayectorias viene dada como

$$\begin{aligned} \dot{V}_\psi(x_\psi) &= [\psi \ \dot{\psi}] \mathbf{P}_\psi \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + [\dot{\psi} \ \ddot{\psi}] \mathbf{P}_\psi \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ \dot{V}_\psi(x_\psi) &= [\psi \ \dot{\psi}] \mathbf{P}_\psi \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_\psi \end{bmatrix} \mathbf{u}_\psi + \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_\psi \end{bmatrix} \right\} + \\ &\quad \left\{ [\psi \ \dot{\psi}] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{u}_\psi [0 \ \gamma_\psi] + [0 \ \xi_\psi] \right\} \mathbf{P}_\psi \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Note que si

$$\mathbf{u}_\psi = k_\psi \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad k_\psi = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Entonces

$$\dot{V}_\psi(x_\psi) = x_\psi^\top \mathbf{P}_\psi \{ \mathbf{A}x_\psi + \mathbf{B}_\psi k_\psi x_\psi + \xi_\psi \} + \{ x_\psi^\top \mathbf{A}^\top + x_\psi^\top k_\psi^\top \mathbf{B}_\psi^\top + \xi_\psi^\top \} \mathbf{P}_\psi x_\psi,$$

que es equivalente a

$$\dot{V}_\psi(x_\psi) = \begin{bmatrix} x_\psi^\top \\ \xi_\psi^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_\psi \mathbf{A} + \mathbf{P}_\psi \mathbf{B}_\psi k_\psi + \mathbf{A}^\top \mathbf{P}_\psi + k_\psi^\top \mathbf{B}_\psi^\top \mathbf{P}_\psi & \mathbf{P}_\psi \\ \mathbf{P}_\psi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\psi \\ \xi_\psi \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Sumando y restando los términos $\alpha_\psi V_\psi(x_\psi)$, $\varepsilon_\psi \|\xi_\psi\|^2$, para los escalares positivos α_ψ , ε_ψ , se obtiene la siguiente relación:

$$\dot{V}_\psi(x_\psi) = \begin{bmatrix} x_\psi \\ \xi_\psi \end{bmatrix}^\top \mathbf{W}_\psi \begin{bmatrix} x_\psi \\ \xi_\psi \end{bmatrix} - \alpha_\psi V_\psi(\xi_\psi) + \varepsilon_\psi \|\xi_\psi\|^2, \quad (3.38)$$

con

$$\mathbf{W}_\psi = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_\psi \mathbf{A} + \mathbf{P}_\psi \mathbf{B}_\psi k_\psi + \mathbf{A}^\top \mathbf{P}_\psi + k_\psi^\top \mathbf{B}_\psi^\top \mathbf{P}_\psi + \alpha_\psi \mathbf{P}_\psi & \mathbf{P}_\psi \\ \mathbf{P}_\psi & -\varepsilon_\psi I \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, suponiendo que $\|\xi_\psi\|^2 \leq \delta_\psi$

$$\dot{V}_\psi(x_\psi) \leq \begin{bmatrix} x_\psi \\ \xi_\psi \end{bmatrix}^\top \mathbf{W}_\psi \begin{bmatrix} x_\psi \\ \xi_\psi \end{bmatrix} - \alpha_\psi V_\psi(x_\psi) + \varepsilon_\psi \delta_\psi. \quad (3.39)$$

Si $\mathbf{W}_\psi = \mathbf{W}_\psi^\top < 0$

$$\dot{V}_\psi(x_\psi) \leq -\alpha_\psi V_\psi(x_\psi) + \varepsilon_\psi \delta_\psi. \quad (3.40)$$

Aplicando el lema de comparaciones

$$\frac{dV_\psi}{dt} = -\alpha_\psi \left(V_\psi - \frac{\varepsilon_\psi \delta_\psi}{\alpha_\psi} \right), \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \int_t^{t_0} \frac{\frac{dV_\psi}{d\tau}}{V_\psi - \frac{\varepsilon_\psi \delta_\psi}{\alpha_\psi}} d\tau &= -\alpha_\psi \int_t^{t_0} d\tau, \\ \ln \left| V_\psi(t) - \frac{\varepsilon_\psi \delta_\psi}{\alpha_\psi} \right| - \ln \left| V_\psi(t_0) - \frac{\varepsilon_\psi \delta_\psi}{\alpha_\psi} \right| &= \alpha_\psi(t - t_0), \\ \ln \left| \frac{V_\psi(t) - \frac{\varepsilon_\psi \delta_\psi}{\alpha_\psi}}{V_\psi(t_0) - \frac{\varepsilon_\psi \delta_\psi}{\alpha_\psi}} \right| &= \alpha_\psi(t - t_0), \end{aligned}$$

por lo tanto, la solución viene dada como

$$V_\psi(t) = \left(V_\psi(t_0) - \frac{\varepsilon_\psi \delta_\psi}{\alpha_\psi} \right) \exp \{-\alpha_\psi(t - t_0)\} + \frac{\varepsilon_\psi \delta_\psi}{\alpha_\psi}. \quad (3.42)$$

Note que $V_\psi(t) = x_\psi^\top \mathbf{P}_\psi x_\psi$. Por medio del teorema de Rayleigh-Ritz

$$\lambda_{min}(\mathbf{P}_\psi) \|x_\psi\|^2 \leq x_\psi^\top \mathbf{P}_\psi x_\psi \leq \lambda_\psi(\mathbf{P}_\psi) \|x_\psi\|^2,$$

tomando la primera desigualdad y sustituyendo en relación a (3.42) se tiene

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(\mathbf{P}_\psi)\|x_\psi\|^2 &\leq \left(V_\psi(t_0) - \frac{\varepsilon_\psi \delta_\psi}{\alpha_\psi}\right) \exp\{-\alpha_\psi(t-t_0)\} + \frac{\varepsilon_\psi \delta_\psi}{\alpha_\psi}, \\ \|x_\psi\|^2 &\leq \frac{1}{\lambda_{\min}(\mathbf{P}_\psi)} \left\{ \left(V_\psi(t_0) - \frac{\varepsilon_\psi \delta_\psi}{\alpha_\psi}\right) \exp\{-\alpha_\psi(t-t_0)\} + \frac{\varepsilon_\psi \delta_\psi}{\alpha_\psi} \right\}.\end{aligned}$$

Definición 1 (*Estabilidad uniformemente últimamente acotada, UBB [59]*): *Sea el sistema:*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad (3.43)$$

la solución de (3.43) es uniformemente últimamente acotada (UUB, por sus siglas en inglés) con límite o cota final b , si existe una constante positiva $a > 0$ independiente de $t_0 \geq 0$, tal que para un $\delta \in (0, a)$ existe un $T = T(\delta, b) > 0$ tal que:

$$\|x(t_0)\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T.$$

Para un ε_ψ suficientemente pequeño

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_\psi\|^2 \leq \frac{\varepsilon_\psi \delta_\psi}{\lambda_{\min}(\mathbf{P}_\psi) \alpha_\psi}.$$

Por lo tanto, para x_ψ que describe las trayectorias de ψ , se garantiza estabilidad uniformemente últimamente acotada. Esto debido que existe una $V_\psi(x_\psi) > 0$ tal que $\dot{V}_\psi(x_\psi) < \delta_\psi$ y en donde después de un tiempo finito, x_ψ permanece sobre una región cuya cota final es

$$\beta_\psi = \frac{\varepsilon_\psi \delta_\psi}{\lambda_{\min}(\mathbf{P}_\psi) \alpha_\psi}.$$

Note que para el diseño de control, α_ψ determina la velocidad de convergencia, mientras que ε_ψ define el tamaño de la región de atracción. Entonces, lo anterior garantiza que $\psi \in (-\beta_\psi, \beta_\psi)$ y para un β_ψ muy pequeño $\cos \psi = 1$ mientras que $\sin \psi = 0$. Además, para los subsistemas longitudinal y lateral se tiene

$$\begin{cases} \dot{x} = \tan \theta (g + \bar{u}_z), \\ \theta_{\text{ref}} = \arctan \left(\frac{-k_1 e_x - k_2 \dot{e}_x + \ddot{x}_{\text{ref}}}{g + \bar{u}_z} \right). \end{cases} \quad (3.44)$$

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{\tan \phi}{\cos \theta} (g + \bar{u}_z), \\ \phi_{\text{ref}} = \arctan \left\{ \left(\frac{k_3 e_y + k_4 \dot{e}_y - \ddot{y}_{\text{ref}}}{g + \bar{u}_z} \right) \cos \theta \right\}. \end{cases} \quad (3.45)$$

Se puede deducir que, el tiempo de convergencia viene expresado como

$$T_r = \frac{1}{\alpha_\psi} \ln \frac{V_\psi(t_0) - \beta_\psi}{\gamma \lambda_{\min}(\mathbf{P}_\psi)}. \quad (3.46)$$

En (3.39) se considera $\mathbf{W}_\psi < 0$. Esto implica un problema de desigualdad matricial, en donde se deben obtener los valores de k_ψ y \mathbf{P}_ψ para garantizar que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_\psi \mathbf{A} + \mathbf{P}_\psi \mathbf{B}_\psi k_\psi + \mathbf{A}^\top \mathbf{P}_\psi + k_\psi^\top \mathbf{B}_\psi^\top \mathbf{P}_\psi + \alpha_\psi \mathbf{P}_\psi & \mathbf{P}_\psi \\ \mathbf{P}_\psi & -\varepsilon_\psi I \end{bmatrix} < 0,$$

es definida negativa. Se puede deducir que específicamente se trata de una BMI. Dar solución a este tipo de expresiones no resulta una tarea sencilla. Por tal motivo, se propone una transformación $T \mathbf{W}_\psi T^\top < 0$. Para el caso de estudio

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_\psi^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{P}_\psi^{-1} + \mathbf{B}_\psi k_\psi \mathbf{P}_\psi^{-1} + \mathbf{P}_\psi^{-1} \mathbf{A}^\top + \mathbf{P}_\psi^{-1} k_\psi^\top \mathbf{B}_\psi^\top + \mathbf{P}_\psi^{-1} \alpha_\psi & I \\ I & -\varepsilon_\psi I \end{bmatrix} < 0.$$

Ahora, se proponen los siguientes cambios de variable:

$$\mathcal{X}_\psi = \mathbf{P}_\psi^{-1}, \quad \mathcal{Y}_\psi = k_\psi \mathbf{P}_\psi^{-1}$$

entonces

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathcal{X}_\psi + \mathbf{B}_\psi \mathcal{Y}_\psi + \mathcal{X}_\psi \mathbf{A}^\top + \mathcal{Y}_\psi^\top \mathbf{B}_\psi^\top + \alpha_\psi \mathcal{X}_\psi & I \\ I & -\varepsilon_\psi I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.47)$$

se puede observar que (3.47) ahora es una LMI, y es posible darle solución por medio del uso de métodos numéricos específicos para solución de LMI's. En el caso de estudio, se obtiene la solución de la LMI en (3.47) para obtener las ganancias de control k_ψ . La solución se genera si y solo si existe una matriz definida positiva \mathcal{X}_ψ y una matriz \mathcal{Y}_ψ que satisface la LMI, donde:

$$\mathbf{P}_\psi = \mathcal{X}_\psi^{-1}, \quad k_\psi = \mathcal{Y}_\psi \mathbf{P}_\psi.$$

Ahora bien, el algoritmo para la obtención de las ganancias de control con características robustas se replica para z , θ y ϕ mediante las representaciones dadas en (3.21), (3.23) y (3.24) respectivamente.

3.1.3. Control Robusto basado en DSMC

Este control se basa en la teoría del control por modos deslizante dinámicos. Para tales efectos, se propone una superficie de deslizamiento con la incorporación proporcional, integral y derivada de la variable de deslizamiento (superficie de deslizamiento tipo PID). Además, dado que la superficie deslizante es un sistema de segundo orden de la variable de deslizamiento, se obtiene una señal de control para las dinámicas de la aeronave del proyecto en cuestión. Asimismo, se busca generar una entrada de control que pueda mitigar dinámicas no modeladas y/o perturbaciones.

De manera general, se considera un sistema no lineal afín al control con perturbaciones:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= \mathbf{A}\bar{x} + \mathbf{B}u + \xi, \\ \bar{x}(0) &= \bar{x}_0, \quad \xi = f(\bar{x}) + g(\bar{x})u - \mathbf{A}\bar{x} + \mathbf{B}u + \Delta,\end{aligned}\tag{3.48}$$

donde $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ en el tiempo $t \in \mathbb{R}$. La entrada de control viene dada como $u \in \mathbb{R}^m$, y \mathbf{A} , \mathbf{B} son matrices constantes conocidas con las dimensiones apropiadas. Además, se asume que el par (\mathbf{A}, \mathbf{B}) es controlable, el vector de funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ definen en mapeo de las dinámicas del sistema (3.48). $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, y Δ representa las perturbaciones externas en \mathbb{R}^n . Las incertidumbres del sistema y las perturbaciones externas se denotan como ξ . Para representar el sistema nominal en una dinámica de control acoplado se introduce una transformación $z = \mathbf{T}\bar{x}$, donde $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ viene dada como:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{N}_{\mathbf{B}} \quad \mathbf{B}]^T, \tag{3.49}$$

Entonces a partir de la transformación, el sistema (3.48) tiene la siguiente representación:

$$\dot{z} = \mathcal{A}z + \mathcal{B}u + \bar{\xi}, \quad z(0) = \mathbf{T}x_0, \tag{3.50}$$

donde $\mathcal{A} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$, $\mathcal{B} = \mathbf{T}\mathbf{B}$ y $\bar{\xi} = \mathbf{T}\xi$. Se tiene el supuesto que, el sistema (3.50) contiene perturbaciones e incertidumbres que no se desvanecen, y sus efectos adversos no pueden mitigarse con una acción de control clásica. Entonces, para reducir tales efecto,

se propone una superficie de deslizamiento tipo PID $\Phi(t) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ como:

$$\Phi(t) = \mathbf{K}_1\varphi(t) + \mathbf{K}_2 \int_{t_0}^t \varphi(\tau)d\tau + \mathbf{K}_3\dot{\varphi}(t), \quad (3.51)$$

donde $\varphi(t) \in \mathbb{R}^m$ es la variable de deslizamiento definida como $\varphi(t) = z_2 + \mathbf{R}z_1$, los términos \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 , \mathbf{K}_3 y $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ son ganancias de control. Entonces el problema se divide en dos etapas. La primera consiste en obtener una señal de control admisible u tal que la variable σ pueda converger al conjunto $\Upsilon = \{z \in \mathbb{R}^n : \|\varphi(t)\| \leq \delta, \forall t \geq T_2\}$, $0 < \delta$. La segunda es obtener los valores de las ganancias (\mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 , \mathbf{K}_3 , \mathbf{R}) tales que, reduzcan los efectos de las incertidumbres o perturbaciones. El problema se estudia a través de concepto de estabilidad UBB. Note que, el sistema (3.50) puede representarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \mathcal{A}_{11}z_1 + \mathcal{A}_{12}z_2 + \bar{\xi}_1, & z_1(0) &= z_1^0, \\ \dot{z}_2 &= \mathcal{A}_{21}z_1 + \mathcal{A}_{22}z_2 + \bar{\xi}_2 + \mathcal{B}_2u, & z_2(0) &= z_2^0, \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde $\mathcal{A}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, $\mathcal{A}_{12} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$, $\mathcal{A}_{21} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $\mathcal{A}_{22} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, y $\mathcal{B}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$. También, se considera la siguiente entrada de control:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = & -\mathcal{B}_2^{-1}\mathbf{K}_3^{-1} \{ (\mathbf{K}_3\{\mathbf{Q}_1\mathcal{A}_{11} + \mathbf{Q}_2\mathcal{A}_{21}\} + \mathbf{K}_1\mathbf{Q}_1)z_1(t) \\ & + (\mathbf{K}_3\{\mathbf{Q}_1\mathcal{A}_{12} + \mathbf{Q}_2\mathcal{A}_{22}\} + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_1\mathbf{Q}_2)z_2(t) \\ & + (\mathbf{K}_3\mathbf{Q}_2\mathcal{B}_2 + \mathbf{K}_1\mathcal{B}_2)u(t) + \boldsymbol{\rho}\text{sign}(\Phi(t))\}, \\ \text{sign}(\Phi(t)) = & \begin{bmatrix} \text{sign}(\Phi_1(t)) \\ \vdots \\ \text{sign}(\Phi_m(t)) \end{bmatrix}, \quad u(0) = 0, \end{aligned} \quad (3.53)$$

con $\mathbf{Q}_1 = (\mathcal{A}_{21} + \mathbf{R}\mathcal{A}_{11})$, $\mathbf{Q}_2 = (\mathcal{A}_{22} + \mathbf{R}\mathcal{A}_{12})$. Además, $\boldsymbol{\rho} = \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_m)$ es una matriz definida positiva de dimensiones $m \times m$. La acción de control corresponde a un clase de control por modos deslizantes dinámicos (en las siguientes secciones este control se denomina como controlador robusto RC) la cual, al ser integrada, permite atenuar el fenómeno de chattering. Asimismo, se propone que, después de un tiempo finito $t_r = \frac{\sqrt{2}}{\alpha_1}V^{\frac{1}{2}}(\Phi(t_0)) + t_0$, y mediante la función de almacenamiento $V_1(\Phi(t)) = \sum_{i=1}^m \Phi_i^2(t)$, se propicia una convergencia a $\Phi(t) = \bar{\Phi}_m$ que constituye la superficie de deslizamiento descrita en (3.51). Por ello, es necesario llevar a cabo una prueba de convergencia.

De la función de almacenamiento $V_1(\Phi(t))$, su derivada temporal se expresa como:

$$\dot{V}_1(\Phi(t)) = \Phi^\top(t) (\mathbf{K}_1 \dot{\varphi}(t) + \mathbf{K}_2 \varphi(t) + \mathbf{K}_3 \ddot{\varphi}(t)). \quad (3.54)$$

Dado que la primera y segunda derivada temporal de la variable adjunta $\varphi(t) \in \mathbb{R}^m$, a lo largo de las trayectorias del sistema (3.52), están dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \mathbf{Q}_1 z_1(t) + \mathbf{Q}_2 z_2(t) + [\mathbf{R}, \mathbf{I}_m] \bar{\xi}(z, t) + \mathcal{B}_2 u(t), \\ \ddot{\varphi}(t) &= \{\mathbf{Q}_1 \mathcal{A}_{11} + \mathbf{Q}_2 \mathcal{A}_{21}\} z_1(t) \\ &\quad + \{\mathbf{Q}_1 \mathcal{A}_{12} + \mathbf{Q}_2 \mathcal{A}_{22}\} z_2(t) + [\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2] \bar{\xi}(z, t) \\ &\quad + \mathbf{Q}_2 \mathcal{B}_2 u(t) + [\mathbf{R}, \mathbf{I}_m] \dot{\bar{\xi}}(z, t) + \mathcal{B}_2 \dot{u}(t). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Aquí, \mathbf{I}_m denota la matriz identidad de dimensión $m \times m$. Entonces, la derivada temporal de la función de almacenamiento, a lo largo de las trayectorias del sistema (3.52) bajo la acción de control (3.53), resulta:

$$\dot{V}_1(\Phi(t)) = -\Phi^\top(t) \boldsymbol{\rho} \text{Sign}(\Phi(t)) + \Phi^\top(t) \chi(z, t), \quad (3.56)$$

donde $\chi(z, t) = \mathbf{M}_4 \bar{\xi}(z, t) + \dot{\mathbf{M}}_5 \dot{\bar{\xi}}(z, t)$, $\mathbf{M}_4 = \mathbf{K}_3 [\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2] + \mathbf{K}_1 [\mathbf{R}, \mathbf{I}_m]$ y $\mathbf{M}_5 = \mathbf{K}_3 [\mathbf{R}, \mathbf{I}_m]$.

De la consideración (3.1) se define

$$\|\bar{\xi}(z, t)\| \leq \delta_3, \quad \left\| \dot{\bar{\xi}}(z, t) \right\| \leq \delta_4, \quad (3.57)$$

donde $\delta_3 = |\lambda_{\max}(T)| \delta_1$, $\delta_4 = |\lambda_{\max}(T)| \delta_2$, entonces:

$$\dot{V}_1(\Phi(t)) \leq -\max\{\rho_i\} \sum_{i=1}^n |\Phi_i(t)| + \|\Phi(t) \chi(z, t)\|. \quad (3.58)$$

Definiendo ρ_i como $\rho_i = \alpha_1 + \delta_1$ se puede deducir que para $0 < \alpha_1 \in \mathbb{R}$, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\Phi(t)) &\leq -\alpha_1 \sum_{i=1}^n |\Phi_i(t)| = -\alpha_1 |\Phi(t)| \\ &\leq -\alpha_1 \sqrt{2} V_1^{\frac{1}{2}}(\Phi(t)). \end{aligned} \quad (3.59)$$

La solución de la ecuación diferencial es:

$$\dot{V}_1(\Phi(t)) = -\alpha_1 \sqrt{2} V_1^{\frac{1}{2}}(\Phi(t)), \quad (3.60)$$

sobre el intervalo de tiempo $\tau \in [t_0, t)$ se tiene:

$$\int_{t_0}^t V_1^{-\frac{1}{2}}(\Phi(\tau)) dV_1(\Phi(\tau)) = -\alpha_1 \sqrt{2} \int_{t_0}^t d\tau, \quad (3.61)$$

lo cual conduce finalmente a:

$$V_1^{\frac{1}{2}}(\Phi(t)) = V_1^{\frac{1}{2}}(\Phi(t_0)) - \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}(t - t_0). \quad (3.62)$$

Por medio del principio de comparaciones ([60, 61]), la solución a la desigualdad diferencial viene dada como:

$$V_1^{\frac{1}{2}}(\Phi(t)) \leq V_1^{\frac{1}{2}}(\Phi(t_0)) - \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}(t - t_0). \quad (3.63)$$

Note que la función de almacenamiento (donde su derivada temporal se describe en (3.54)) es una función definida positiva. Esto quiere decir que eventualmente el tiempo t_r se obtiene al satisfacer:

$$0 = V_1^{\frac{1}{2}}(\Phi(t_0)) - \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}(t - t_0) \quad (3.64)$$

lo que implica que la función de almacenamiento alcanza el origen en un tiempo menor o igual a t_r y permanece allí para todo $t \geq t_r$. Por consiguiente, la variable de deslizamiento converge al origen en el mismo intervalo de tiempo.

También, se puede deducir que después de t_r , la variable de deslizamiento $\Phi(t) = \bar{\Phi}_m$ se satisface y es evidente que:

$$\bar{\Phi}_m = \mathbf{K}_1 \varphi(t) + \mathbf{K}_2 \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau + \mathbf{K}_3 \dot{\varphi}(t), \quad (3.65)$$

o equivalentemente:

$$\bar{\Phi}_m = \mathbf{K}_1 \dot{\varphi}(t) + \mathbf{K}_2 \varphi(t) + \mathbf{K}_3 \ddot{\varphi}(t) \quad (3.66)$$

Esto significa que:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= -\mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{K}_1 \dot{\varphi}(t) - \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{K}_3 \ddot{\varphi}(t) \\ \varphi(t) &= -\mathbf{K}_2^{-1} \left\{ \mathbf{K}_1 \left([\mathbf{R}, \mathbf{I}_m] \bar{\xi} \right) - \mathbf{K}_3 [\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2] \bar{\xi}(z, t) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{K}_3 [\mathbf{R}, \mathbf{I}_m] \dot{\bar{\xi}}(z, t) - \boldsymbol{\rho} \operatorname{sign}(\Phi(t)) \right\}. \end{aligned}$$

En este sentido, para una matriz de ganancia acotada $\lambda_{\max}(\mathbf{R}\mathbf{R}^\top) \leq \delta_5 < \infty$ se cumple:

$$\begin{aligned}\|\varphi(t)\| &\leq \delta_6, \quad \delta_6 = \lambda_{\max}(\mathbf{K}_2^{-1}) \{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_1) M_1 \delta_3 + M_2\}, \\ M_1 &= \sqrt{\lambda_{\max}([\mathbf{R} \quad \mathbf{I}_m]^\top [\mathbf{R} \quad \mathbf{I}_m])}, \\ M_2 &= (M_1 \delta_3 + M_3 \delta_4) \lambda_{\max}(\mathbf{K}_3) + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\rho}), \\ M_3 &= \sqrt{\lambda_{\max}([\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2]^\top [\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2])}.\end{aligned}\tag{3.67}$$

De la variable adjunta $\varphi(t) = z_2(t) + \mathbf{R}z_1(t)$ y el desarrollo previo, se puede demostrar que $z_2(t) = \varphi(t) - \mathbf{R}z_1(t)$ se satisface. Entonces, de (3.52) se cumple la siguiente afirmación:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= (\mathcal{A}_{11} - \mathcal{A}_{12}\mathbf{R})z_1(t) + \zeta(t), \\ \zeta(t) &= \mathcal{A}_{12}\varphi(t) + \bar{\xi}_1(z, t), \quad z_1(0) = z_1^0.\end{aligned}\tag{3.68}$$

donde $\|\zeta(t)\| \leq \delta_6 \sqrt{\lambda_{\max}(\mathcal{A}_{12}^\top \mathcal{A}_{12})} + \delta_3$.

Para garantizar estabilidad UBB se realiza un análisis similar al de la estrategia descrita anteriormente (PD robuzto). Se propone una función de almacenamiento $V_2(z_1(t)) = z_1^\top(t)\mathbf{P}z_1(t)$, con la matriz definida positiva $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$. La derivada temporal de la función de energía a lo largo de las trayectorias viene dada como

$$\dot{V}_2(z_1) = z_1 \mathbf{P} \{(\mathcal{A}_{11} - \mathcal{A}_{12}\mathbf{R})z_1 + \zeta(t)\} + \{(\mathcal{A}_{11} - \mathcal{A}_{12}\mathbf{R})z_1 + \zeta(t)\} \mathbf{P} z_1,$$

que es equivalente a

$$\dot{V}_2(z_1) = \begin{bmatrix} z_1 \\ \zeta(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{P}(\mathcal{A}_{11} - \mathcal{A}_{12}\mathbf{R}) + (\mathcal{A}_{11} - \mathcal{A}_{12}\mathbf{R})\mathbf{P} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \zeta(t) \end{bmatrix}\tag{3.69}$$

Sumando y restando los términos $\alpha_{z_1} V_2(z_1)$, $\varepsilon_{z_1} \|\zeta(t)\|^2$, para los escalares positivos α_{z_1} , ε_{z_1} , se obtiene la siguiente relación:

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(z_1) &= \begin{bmatrix} z_1 \\ \zeta(t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{P}(\mathcal{A}_{11} - \mathcal{A}_{12}\mathbf{R}) + (\mathcal{A}_{11} - \mathcal{A}_{12}\mathbf{R})\mathbf{P} + \alpha_{z_1} \mathbf{P} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & -\varepsilon_{z_1} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \zeta(t) \end{bmatrix} \\ &- \alpha_{z_1} V_2(z_1) + \varepsilon_{z_1} \|\zeta(t)\|^2,\end{aligned}\tag{3.70}$$

Esta ecuación también puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\dot{V}_2(z_1) = \begin{bmatrix} z_1 \\ \zeta(t) \end{bmatrix}^\top \mathbf{W}_{z_1} \begin{bmatrix} z_1 \\ \zeta(t) \end{bmatrix} - \alpha_{z_1} V_2(z_1) + \varepsilon_{z_1} \|\zeta(t)\|^2, \quad (3.71)$$

con

$$\mathbf{W}_{z_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(\mathcal{A}_{11} - \mathcal{A}_{12}\mathbf{R}) + (\mathcal{A}_{11} - \mathcal{A}_{12}\mathbf{R})\mathbf{P} + \alpha_{z_1}\mathbf{P} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & -\varepsilon_{z_1}I \end{bmatrix}.$$

Ahora bien, suponiendo que $\|\zeta(t)\|^2 \leq \delta_{z_1}$

$$\dot{V}_2(z_1) \leq \begin{bmatrix} z_1 \\ \zeta(t) \end{bmatrix}^\top \mathbf{W}_{z_1} \begin{bmatrix} z_1 \\ \zeta(t) \end{bmatrix} - \alpha_{z_1} V_2(z_1) + \varepsilon_{z_1} \delta_{z_1}, \quad (3.72)$$

Si $\mathbf{W}_{z_1} = \mathbf{W}_{z_1}^\top < 0$

$$\dot{V}_2(z_1) \leq -\alpha_{z_1} V_2(z_1) + \varepsilon_{z_1} \delta_{z_1}. \quad (3.73)$$

Aplicando el lema de comparaciones

$$\frac{dV_2}{dt} = -\alpha_{z_1} \left(V_2 - \frac{\varepsilon_{z_1} \delta_{z_1}}{\alpha_{z_1}} \right), \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \int_t^{t_0} \frac{\frac{dV_2}{d\tau}}{V_2 - \frac{\varepsilon_{z_1} \delta_{z_1}}{\alpha_{z_1}}} d\tau &= -\alpha_{z_1} \int_t^{t_0} d\tau, \\ \ln \left| V_2(t) - \frac{\varepsilon_{z_1} \delta_{z_1}}{\alpha_{z_1}} \right| - \ln \left| V_2(t_0) - \frac{\varepsilon_{z_1} \delta_{z_1}}{\alpha_{z_1}} \right| &= \alpha_{z_1}(t - t_0), \\ \ln \left| \frac{V_2(t) - \frac{\varepsilon_{z_1} \delta_{z_1}}{\alpha_{z_1}}}{V_2(t_0) - \frac{\varepsilon_{z_1} \delta_{z_1}}{\alpha_{z_1}}} \right| &= \alpha_{z_1}(t - t_0), \end{aligned}$$

por lo tanto, la solución viene dada como

$$V_2(t) = \left(V_2(t_0) - \frac{\varepsilon_{z_1} \delta_{z_1}}{\alpha_{z_1}} \right) \exp \{-\alpha_{z_1}(t - t_0)\} + \frac{\varepsilon_{z_1} \delta_{z_1}}{\alpha_{z_1}}. \quad (3.75)$$

Note que $V_2(t) = z_1^\top \mathbf{P} z_1$. Por medio de Rayleigh-Ritz

$$\lambda_{min}(\mathbf{P}) \|z_1\|^2 \leq z_1^\top \mathbf{P} z_1 \leq \lambda_{z_1}(\mathbf{P}) \|z_1\|^2,$$

tomando la primera desigualdad y sustituyendo en relación a (3.75) se tiene

$$\lambda_{min}(\mathbf{P})\|z_1\|^2 \leq \left(V_2(t_0) - \frac{\varepsilon z_1 \delta z_1}{\alpha z_1} \right) \exp \{-\alpha z_1(t - t_0)\} + \frac{\varepsilon z_1 \delta z_1}{\alpha z_1},$$

$$\|z_1\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{min}(\mathbf{P})} \left\{ \left(V_2(t_0) - \frac{\varepsilon z_1 \delta z_1}{\alpha z_1} \right) \exp \{-\alpha z_1(t - t_0)\} + \frac{\varepsilon z_1 \delta z_1}{\alpha z_1} \right\}.$$

Esto significa que la solución la ecuación diferencial (3.73) en el intervalo de tiempo $\tau \in [0, t]$ viene dada por la cota superior de (3.75). Por lo tanto, la función de almacenamiento $V_2(z_1(t))$ representa un conjunto invariante atractivo que permite concluir la estabilidad UBB. Ahora bien, para las dinámicas z, ψ, θ y ϕ de la aeronave de seis rotores se plantea una representación dada como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_z &= \mathbf{A}x_z + B_z \mathbf{u}_z + \zeta_z, \\ \dot{x}_\psi &= \mathbf{A}x_\psi + B_\psi \mathbf{u}_\psi + \zeta_\psi, \\ \dot{x}_\theta &= \mathbf{A}x_\theta + B_\theta \mathbf{u}_\theta + \zeta_\theta, \\ \dot{x}_\phi &= \mathbf{A}x_\phi + B_\phi \mathbf{u}_\phi + \zeta_\phi. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Las descripciones en cuanto a los términos y dimensiones se pueden consultar en la sección anterior. Asimismo, mediante la transformación z se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{z}_z &= \mathcal{A}z_z + \mathcal{B}_z \mathbf{u}_z + \zeta_z, \\ \dot{z}_\psi &= \mathcal{A}z_\psi + \mathcal{B}_\psi \mathbf{u}_\psi + \zeta_\psi, \\ \dot{z}_\theta &= \mathcal{A}z_\theta + \mathcal{B}_\theta \mathbf{u}_\theta + \zeta_\theta, \\ \dot{z}_\phi &= \mathcal{A}z_\phi + \mathcal{B}_\phi \mathbf{u}_\phi + \zeta_\phi, \end{aligned} \tag{3.77}$$

y extendida se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{z1} &= \mathcal{A}_{11}z_{z1} + \mathcal{A}_{12}z_{z2} + \zeta_{z1}, \\
\dot{z}_{z2} &= \mathcal{A}_{21}z_{z1} + \mathcal{A}_{22}z_{z2} + \zeta_{z2} + \mathcal{B}_{z2}\mathbf{u}_z, \\
\\
\dot{z}_{\psi 1} &= \mathcal{A}_{11}z_{\psi 1} + \mathcal{A}_{12}z_{\psi 2} + \zeta_{\psi 1}, \\
\dot{z}_{\psi 2} &= \mathcal{A}_{21}z_{\psi 1} + \mathcal{A}_{22}z_{\psi 2} + \zeta_{\psi 2} + \mathcal{B}_{\psi 2}\mathbf{u}_{\psi}, \\
\\
\dot{z}_{\theta 1} &= \mathcal{A}_{11}z_{\theta 1} + \mathcal{A}_{12}z_{\theta 2} + \zeta_{\theta 1}, \\
\dot{z}_{\theta 2} &= \mathcal{A}_{21}z_{\theta 1} + \mathcal{A}_{22}z_{\theta 2} + \zeta_{\theta 2} + \mathcal{B}_{\theta 2}\mathbf{u}_{\theta}, \\
\\
\dot{z}_{\phi 1} &= \mathcal{A}_{11}z_{\phi 1} + \mathcal{A}_{12}z_{\phi 2} + \zeta_{\phi 1}, \\
\dot{z}_{\phi 2} &= \mathcal{A}_{21}z_{\phi 1} + \mathcal{A}_{22}z_{\phi 2} + \zeta_{\phi 2} + \mathcal{B}_{\phi 2}\mathbf{u}_{\phi}.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Por otro lado, las superficies de deslizamiento relacionadas a (3.51) para z , ψ , θ , ϕ son

$$\begin{aligned}
\Phi_z(t) &= \mathbf{K}_{1z}\varphi_z(t) + \mathbf{K}_{2z} \int_{t_0}^t \varphi_z(\tau) d\tau + \mathbf{K}_{3z}\dot{\varphi}_z(t), \\
\Phi_{\psi}(t) &= \mathbf{K}_{1\psi}\varphi_{\psi}(t) + \mathbf{K}_{2\psi} \int_{t_0}^t \varphi_{\psi}(\tau) d\tau + \mathbf{K}_{3\psi}\dot{\varphi}_{\psi}(t), \\
\Phi_{\theta}(t) &= \mathbf{K}_{1\theta}\varphi_{\theta}(t) + \mathbf{K}_{2\theta} \int_{t_0}^t \varphi_{\theta}(\tau) d\tau + \mathbf{K}_{3\theta}\dot{\varphi}_{\theta}(t), \\
\Phi_{\phi}(t) &= \mathbf{K}_{1\phi}\varphi_{\phi}(t) + \mathbf{K}_{2\phi} \int_{t_0}^t \varphi_{\phi}(\tau) d\tau + \mathbf{K}_{3\phi}\dot{\varphi}_{\phi}(t),
\end{aligned} \tag{3.79}$$

y las acciones de control asociadas a la dinámica de la aeronave son:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{u}}_z = & -\mathcal{B}_{z2}^{-1}\mathbf{K}_{3z}^{-1} \{ (\mathbf{K}_{3z}\{\mathbf{Q}_{z1}\mathcal{A}_{z11} + \mathbf{Q}_{z2}\mathcal{A}_{z21}\} + \mathbf{K}_{1z}\mathbf{Q}_{z1}) z_{z1}(t) \\
& + (\mathbf{K}_{3z}\{\mathbf{Q}_{z1}\mathcal{A}_{z12} + \mathbf{Q}_{z2}\mathcal{A}_{z22}\} + \mathbf{K}_{2z} + \mathbf{K}_{1z}\mathbf{Q}_{z2}) z_{z2}(t) \\
& + (\mathbf{K}_{3z}\mathbf{Q}_{z2}\mathcal{B}_{z2} + \mathbf{K}_{z1}\mathcal{B}_{z2}) \bar{u}_z + \boldsymbol{\rho}_i \text{ sign}(\Phi_z(t)) \}.
\end{aligned} \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{u}}_{\psi} = & -\mathcal{B}_{\psi 2}^{-1}\mathbf{K}_{3\psi}^{-1} \{ (\mathbf{K}_{3\psi}\{\mathbf{Q}_{\psi 1}\mathcal{A}_{\psi 11} + \mathbf{Q}_{\psi 2}\mathcal{A}_{\psi 21}\} + \mathbf{K}_{1\psi}\mathbf{Q}_{\psi 1}) z_{\psi 1}(t) \\
& + (\mathbf{K}_{3\psi}\{\mathbf{Q}_{\psi 1}\mathcal{A}_{\psi 12} + \mathbf{Q}_{\psi 2}\mathcal{A}_{\psi 22}\} + \mathbf{K}_{2\psi} + \mathbf{K}_{1\psi}\mathbf{Q}_{\psi 2}) z_{\psi 2}(t) \\
& + (\mathbf{K}_{3\psi}\mathbf{Q}_{\psi 2}\mathcal{B}_{\psi 2} + \mathbf{K}_{\psi 1}\mathcal{B}_{\psi 2}) \tau_{\psi} + \boldsymbol{\rho}_{\psi} \text{ sign}(\Phi_{\psi}(t)) \}.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_\theta = & -\mathcal{B}_{\theta 2}^{-1} \mathbf{K}_{3\theta}^{-1} \{ (\mathbf{K}_{3\theta} \{ \mathbf{Q}_{\theta 1} \mathcal{A}_{\theta 11} + \mathbf{Q}_{\theta 2} \mathcal{A}_{\theta 21} \} + \mathbf{K}_{1\theta} \mathbf{Q}_{\theta 1}) z_{\theta 1}(t) \\ & + (\mathbf{K}_{3\theta} \{ \mathbf{Q}_{\theta 1} \mathcal{A}_{\theta 12} + \mathbf{Q}_{\theta 2} \mathcal{A}_{\theta 22} \} + \mathbf{K}_{2\theta} + \mathbf{K}_{1\theta} \mathbf{Q}_{\theta 2}) z_{\theta 2}(t) \\ & + (\mathbf{K}_{3\theta} \mathbf{Q}_{\theta 2} \mathcal{B}_{\theta 2} + \mathbf{K}_{\theta 1} \mathcal{B}_{\theta 2}) \tau_\theta + \boldsymbol{\rho}_\theta \operatorname{sign}(\Phi_\theta(t)) \} .\end{aligned}\quad (3.82)$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_\phi = & -\mathcal{B}_{\phi 2}^{-1} \mathbf{K}_{3\phi}^{-1} \{ (\mathbf{K}_{3\phi} \{ \mathbf{Q}_{\phi 1} \mathcal{A}_{\phi 11} + \mathbf{Q}_{\phi 2} \mathcal{A}_{\phi 21} \} + \mathbf{K}_{1\phi} \mathbf{Q}_{\phi 1}) z_{\phi 1}(t) \\ & + (\mathbf{K}_{3\phi} \{ \mathbf{Q}_{\phi 1} \mathcal{A}_{\phi 12} + \mathbf{Q}_{\phi 2} \mathcal{A}_{\phi 22} \} + \mathbf{K}_{2\phi} + \mathbf{K}_{1\phi} \mathbf{Q}_{\phi 2}) z_{\phi 2}(t) \\ & + (\mathbf{K}_{3\phi} \mathbf{Q}_{\phi 2} \mathcal{B}_{\phi 2} + \mathbf{K}_{\phi 1} \mathcal{B}_{\phi 2}) \tau_\phi + \boldsymbol{\rho}_\phi \operatorname{sign}(\Phi_\phi(t)) \} .\end{aligned}\quad (3.83)$$

3.1.4. Control por modos deslizantes integrales (ISMIC)

En esta sección se describe una estrategia de control considerando el enfoque de control por modos deslizantes integrales (ISMIC). El objetivo es generar un controlador capaz de atenuar posibles perturbaciones como las ráfagas de viento presentes en la misión de vuelo de la aeronave. Asimismo, contar con un control adicional para realizar pruebas, compararlo con los diseños anteriores y generar conclusiones respecto a los resultados arrojados. Para el desarrollo de esta estrategia se considera el sistema en la forma regular como en (3.35) ($\dot{x}_\psi = \mathbf{A}x_\psi + \mathbf{B}_\psi \mathbf{u}_\psi + \zeta_\psi$), el cual puede ser reescrito de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \mathbf{A}_{1,1}\psi + \mathbf{A}_{1,2}\dot{\psi}, \\ \ddot{\psi} &= \mathbf{A}_{2,1}\psi + \mathbf{A}_{2,2}\dot{\psi} + \mathbf{B}_{\psi 2}\mathbf{U}_\psi + \xi_\psi,\end{aligned}\quad (3.84)$$

donde $\psi \in \mathbb{R}^{n-p}$, y $\dot{\psi} \in \mathbb{R}^p$. Además, $\mathbf{A}_{1,1} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$, $\mathbf{A}_{1,2} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$, $\mathbf{A}_{2,1} \in \mathbb{R}^{p \times (n-p)}$, $\mathbf{A}_{2,2} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $\mathbf{B}_{\psi 2} \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $\xi_\psi \in \mathbb{R}^{(n-p)}$.

El problema es reducir las perturbaciones, para ello se define la superficie de deslizamiento:

$$S_\psi = G_\psi \left\{ x_\psi - x_\psi(0) - \int_{t_0}^t \{ \mathbf{A}x_\psi + \mathbf{B}_\psi \mathbf{u}_\psi \} d\tau \right\}. \quad (3.85)$$

Para el caso de estudio, $\mathbf{U}_\psi = \mathbf{u}_\psi + \tilde{\mathbf{u}}_\psi$. Por lo tanto, el control esta formado por dos partes en donde \mathbf{u}_ψ es la entrada de control estabilizante (asociada a la estrategia de control PD desarrollada en la sección anterior) y $\tilde{\mathbf{u}}_\psi$ es la relacionada con los modos deslizantes integrales. Definiendo

$$S_\psi = G_\psi Y_\psi, \quad Y_\psi = \left\{ x_\psi - x_\psi(0) - \int_{t_0}^t \{ \mathbf{A}x_\psi + \mathbf{B}_\psi \mathbf{u}_\psi \} d\tau \right\}, \quad (3.86)$$

Si se busca la dinámica de la superficie de deslizamiento (la derivada temporal de S_ψ) entonces:

$$\begin{aligned}\dot{S}_\psi &= \frac{d}{dt}(G_\psi Y_\psi), \\ \dot{S}_\psi &= G_\psi \dot{Y}_\psi,\end{aligned}$$

donde

$$\dot{Y}_\psi = \dot{x}_\psi - \mathbf{A}x_\psi - \mathbf{B}_\psi \mathbf{u}_\psi.$$

sustituyendo \dot{x}_ψ se tiene que

$$\dot{S}_\psi = G_\psi (\mathbf{B}_\psi \tilde{u}_\psi + \zeta_\psi). \quad (3.87)$$

De (3.84) observe que tenemos dos dinámicas, en donde solo una depende del control. Además, note que $G_\psi \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $S_\psi \in \mathbb{R}^m$ con:

$$G_\psi = \begin{bmatrix} G_{\psi 1} \\ G_{\psi 2} \end{bmatrix}, \quad G_{\psi 1} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}, \quad G_{\psi 2} \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

entonces de (3.87) se puede deducir que

$$\dot{S}_\psi = G_{\psi 2} (\mathbf{B}_{\psi 2} \tilde{\mathbf{u}}_\psi + \zeta_\psi).$$

A pesar de que el término ξ_ψ no es conocido, se tiene el supuesto de que la perturbación esta acotada: $\|\zeta_\psi\|^2 \leq \delta_\psi$. Entonces, proponiendo una función de energía

$$V(S_\psi) = \frac{1}{2} S_\psi^\top S_\psi, \quad (3.88)$$

su dinámica directamente describe que

$$\dot{V}(S_\psi) = \frac{1}{2} S_\psi^\top \dot{S}_\psi + \frac{1}{2} \dot{S}_\psi^\top S_\psi = S_\psi^\top \dot{S}_\psi = S_\psi^\top G_\psi \dot{Y}_\psi = S_\psi^\top G_{\psi 2} (\mathbf{B}_{\psi 2} \tilde{\mathbf{u}}_\psi + \zeta_\psi). \quad (3.89)$$

Si se elige

$$\tilde{\mathbf{u}}_\psi = -\mathbf{B}_{\psi 2}^{-1} G_{\psi 2}^{-1} \rho_\psi \operatorname{sign}(S_\psi), \quad (3.90)$$

entonces

$$\dot{V}(S_\psi) = S_\psi^\top G_{\psi 2} \zeta_\psi - S_\psi^\top \rho_\psi \operatorname{sign}(S_\psi). \quad (3.91)$$

Aplicando un proceso de normalización considerando la cota de ζ_ψ se tiene

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(S_\psi) &\leq \|S_\psi^\top\| \|G_{\psi 2} \zeta_\psi\| - S_\psi^\top \rho_\psi \operatorname{sign}(S_\psi), \\
 &\leq \|S_\psi^\top\| \|G_{\psi 2}\| \delta_\psi - S_\psi^\top \rho_\psi \operatorname{sign}(S_\psi), \\
 &\leq \|S_\psi^\top\| \|G_{\psi 2}\| \delta_\psi - \operatorname{traza}(\rho_\psi) \|S_\psi\|, \\
 &\leq -\|S_\psi\| \{Traz(\rho_\psi) - \|G_{\psi 2}\| \delta_\psi\}, \\
 &\leq -\alpha_\psi \|S_\psi\|, \quad 0 < \alpha_\psi = Traz(\rho_\psi) - \|G_{\psi 2}\| \delta_\psi, \\
 \dot{V}(S_\psi) &\leq -\alpha_\psi \sqrt{S_\psi^\top S_\psi}, \\
 &\leq -\alpha_\psi \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} S_\psi^\top S_\psi \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 &\leq -\alpha_\psi \sqrt{2} V(S_\psi)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

Por el lema de comparaciones

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} V(S_\psi) &= -\alpha_\psi \sqrt{2} V(S_\psi)^{\frac{1}{2}}, \\
 \frac{\frac{d}{dt} V(S_\psi)}{V(S_\psi)^{\frac{1}{2}}} &= -\alpha_\psi \sqrt{2} dt, \\
 V(S_\psi)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} V(S_\psi) &= -\alpha_\psi \sqrt{2} dt,
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

integrando en $\tau \in [t_0, t]$

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^t V(S_\psi)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{d\tau} V(S_\psi) d\tau &= -\alpha_\psi \sqrt{2} \int_{t_0}^t d\tau, \\
 2 \left(\sqrt{V(S_\psi(t))} - \sqrt{V(S_\psi(0))} \right) &= -\alpha_\psi \sqrt{2} (t - t_0), \\
 V(S_\psi(t))^{\frac{1}{2}} &\leq -\frac{\alpha_\psi}{\sqrt{2}} (t - t_0) + V(S_\psi(0))^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

Finalmente se puede observar y comprobar la convergencia ya que, en un tiempo finito

$$T_r = \frac{\sqrt{2} V(S_\psi(0))^{\frac{1}{2}}}{\alpha_\psi}, \tag{3.94}$$

$$-\frac{\alpha_\psi}{\sqrt{2}} (t - t_0) + V(S_\psi(0))^{\frac{1}{2}} < 0. \tag{3.95}$$

La estrategia de control que se ha descrito para las dinámicas de ψ bajo el enfoque ISMC, se puede desarrollar de forma similar para las dinámicas de z , ϕ y θ . Esto es

$$\begin{aligned} \dot{x}_z = & \mathbf{A}x_z + \mathbf{B}_z\mathbf{u}_z + \zeta_z & \rightarrow & \dot{z} = \mathbf{A}_{1,1}z + \mathbf{A}_{1,2}\dot{z}, \\ & & & \ddot{z} = \mathbf{A}_{2,1}z + \mathbf{A}_{2,2}\dot{z} + \mathbf{B}_{z2}\mathbf{U}_z + \xi_z, \\ \dot{x}_\phi = & \mathbf{A}_2x_\phi + \mathbf{B}_\phi\mathbf{u}_\phi + \zeta_\phi & \rightarrow & \dot{\phi} = \mathbf{A}_{1,1}\phi + \mathbf{A}_{1,2}\dot{\phi}, \\ & & & \ddot{\phi} = \mathbf{A}_{2,1}\phi + \mathbf{A}_{2,2}\dot{\phi} + \mathbf{B}_{\phi2}\mathbf{U}_\phi + \xi_\phi, \\ \dot{x}_\theta = & \mathbf{A}_1x_\theta + \mathbf{B}_\theta\mathbf{u}_\theta + \zeta_\theta & \rightarrow & \dot{\theta} = \mathbf{A}_{1,1}\theta + \mathbf{A}_{1,2}\dot{\theta}, \\ & & & \ddot{\theta} = \mathbf{A}_{2,1}\theta + \mathbf{A}_{2,2}\dot{\theta} + \mathbf{B}_{\theta2}\mathbf{U}_\theta + \xi_\theta, \end{aligned} \tag{3.96}$$

3.2. Conclusiones

En esta sección del trabajo se presentó el desarrollo de tres algoritmos de control, dos de ellos basados en control por modos deslizantes. La propuesta para el control DSMC sugiere una acción integral para ser aplicado en pruebas, lo que se traduce en una posible acción de filtrado que buscaría atenuar el efecto de **Chattering** en la señal de control. Por otro lado, como resultado a destacar, se tiene el algoritmo para la obtención de ganancias, en donde se da sugiere que la solución sea con base a un problema de optimización convexa basado o referente con una LMI. Los parámetros de ajuste α y ϵ permiten calcular ganancias las veces que sea necesario. El algoritmo bien puede ser empleado para los algoritmos PD y DSMC, aunque una desventaja es que se ejecuta fuera de línea.

Cabe mencionar que el análisis de la dinámica por subsistemas y los controles virtuales, son empleados en todos los algoritmos de control descritos en el Capítulo. También, el desarrollo completo se realizó tomando como ejemplo el ángulo de orientación ψ , pero para los otros subsistemas, el desarrollo es similar.

Capítulo 4

Resultados numéricos

El objetivo de este Capítulo es presentar resultados referentes a pruebas de simulaciones numéricas de los algoritmos de control descritos anteriormente (control PD robusto, control por modos deslizante integrales y control robusto basado en modos deslizantes dinámicos). Las simulaciones se han realizado en el software de Matlab 2020a mediante el entorno de Simulink y el editor para código *m*. Las pruebas fueron ejecutadas bajo un método de solución Bogacki-Shampine, con un paso fijo $h_t = 0.001$ segundos. Asimismo, se construyó el modelo dinámico del vehículo aéreo no tripulado utilizando los bloques disponibles en Matlab Simulink. Los parámetros del UAV para las simulaciones se encuentran en la tabla 4.1. Las condiciones iniciales para las posiciones x , y se eligieron con un valor de 4m y 2m respectivamente, mientras que para z se estableció un valor de 0.02m. Por otro lado, para ϕ , θ y ψ se asignó un valor de 0.05, 0.03 y 0.05.

Descripción	Notación	Valor	Unidades
Masa del UAV	m	3.091	k_g
Constante de gravedad	g	9.81	$\frac{m}{s^2}$
Momento de inercia en x	I_{xx}	0.5059	$k_g m^2$
Momento de inercia en $x - y$	$I_{xy} \text{ o } I_{yx}$	0	$k_g m^2$
Momento de inercia en $x - z$	$I_{xz} \text{ o } I_{zx}$	0.0910	$k_g m^2$
Momento de inercia en y	I_{yy}	0.4119	$k_g m^2$
Momento de inercia en $x - y$	$I_{yz} \text{ o } I_{zy}$	0	$k_g m^2$
Momento de inercia en z	I_{zz}	0.7822	$k_g m^2$

Tabla 4.1: Parámetros del sistema para simulación.

4.1. Perfil de misión

Se estableció una misión de vuelo para el modo de vuelo multirrotor que consiste en un seguimiento de trayectoria considerando la dinámica de la aeronave en (3.3), bajo las aclaraciones realizadas en la sección previa. Para todas las pruebas de simulación, el lapso de tiempo de la misión se fijó en $t \in [0, 100]$ segundos. Para seguir una trayectoria dada en el espacio de traslación (x, y, z) y mantener la orientación del vehículo (ϕ, θ, ψ) alrededor del origen, se diseñó una trayectoria a seguir en el espacio tridimensional (x, y, z) bajo el enfoque de ecuaciones paramétricas. En esta perspectiva, las trayectorias paramétricas contemplan el uso de funciones trigonométricas para que el UAV recorra una distancia establecida modificando la amplitud de las mismas. Asimismo, una de las principales ventajas del diseño de trayectorias bajo este enfoque, es la generación de un cambio de velocidad suave, lo cual resulta favorable para el caso de estudio del UAV.

Para las trayectorias diseñadas, se definió una frecuencia natural $\omega_f = 5$ Hz, así como los siguientes parámetros $b_1 = 3.5$, $b_2 = 0.5$, $c_1 = 2$, donde b_1, b_2 son las amplitudes relacionadas con las posiciones respecto a x, y , y z . La Tabla 4.2 muestra los valores de referencia en función de las ecuaciones y el intervalo de tiempo.

Periodo de tiempo t (segundos)	x_{ref}	y_{ref}	z_{ref}
$[0, \omega\pi)$	$b_1 + b_2$	c_1	$\frac{b_1+b_2}{1+\exp^{-0.9(t-5)}}$
$[\omega\pi, 2\omega\pi)$	$b_1 + b_2$	$-c_1 \cos(t/w)$	$b_1 + 0.3$
$[2\omega\pi, 3\omega\pi)$	$b_2 + b_1 \cos(t/w)$	$-a_1$	$b_1 + 0.3$
$[3\omega\pi, 4\omega\pi)$	$-b_1 + b_2$	$c_1 \cos(t/w)$	$b_1 + 0.3$
$[4\omega\pi, 5\omega\pi)$	$b_2 - b_1 \cos(t/w)$	c_1	$b_1 + 0.3$
$[5\omega\pi, 100)$	$c_1 - c_1 \cos(t/w)$	$2b_2 - 2b_2 \cos(t/w)$	$c_1 - c_1 \cos(t/w)$

Tabla 4.2: Características de la trayectoria diseñada.

Los términos $x_{\text{ref}}, y_{\text{ref}}$ y z_{ref} son los valores de referencia para las posiciones en x, y y z respectivamente. Por otro lado, en las simulaciones se consideró que, las dinámicas del sistema se ven afectadas por perturbaciones y/o incertidumbres. Por lo tanto, para la simulación de tales efectos se introdujeron funciones (que dependen del tiempo) las cuales fueron definidas como $\xi(t) = [0 \ 0.1 \cos(0.1t) \ 0 \ 0.1 \cos(0.1t) \ 0 \ 0.1 \cos(3.3t) \ 0 \ 0.05 \cos(12.54*t) \ 0 \ 0.05 \cos(12.54t) \ 0 \ 0.1 \cos(0.1t)]^T$. Asimismo, sobre las entradas de control fueron inducidas perturbaciones a partir del uso

de un bloque generador de funciones aleatorias de amplitud 1.2 y frecuencia de 1.5 Hz en el entorno de Simulink.

4.2. Simulaciones numéricas

Para el caso de la estrategia de control PD robusto, la obtención de las ganancias que generan robustez, se obtienen a partir del problema de optimización de la LMI descrito en la sección anterior. Para ello, se utilizó la herramienta CVX solver sedumi (sistema de modelado basado en Matlab para la optimización convexa). De esta manera, mediante una sintaxis de expresión estándar de Matlab, se pueden especificar restricciones y objetivos. Para la estrategia de control, se generó un programa para garantizar en general, que la matriz $\mathbf{W} < 0$ a partir de la obtención de la matriz \mathbf{P} y la matriz de ganancias k ; tomando en cuenta los cambios de variable en (3.47). Se eligió un valor de ajuste $\alpha = 0.89$ y $\epsilon = 0.05$ en cada caso. Para el caso de las dinámicas del subsistema ψ

$$\mathbf{P}_\psi = \begin{bmatrix} 0.2691 & 0.0352 \\ 0.0352 & 0.0051 \end{bmatrix},$$

mientras que para las dinámicas en z , ϕ y θ se tiene

$$\mathbf{P}_z = \mathbf{P}_\phi = \mathbf{P}_\theta = \begin{bmatrix} 0.3034 & 0.1348 \\ 0.1348 & 0.1682 \end{bmatrix}.$$

Además, las ganancias que se generaron a partir de la de la herramienta CVX, se describen en la Tabla 4.3. En las Figuras 4.1 y 4.2 se muestran los resultados generados por la respuesta del sistema para la posición en x , y y z , respectivamente. Los valores de referencia (línea en color morado) corresponden a la trayectoria descrita anteriormente. Por otro lado, la línea en color azul representa la respuesta en relación a la estrategia de control PD, mientras que la línea en color naranja corresponde a la estrategia ISMC. La línea en color negro representa el control robusto.

Ganancias	Valor	Ganancias	Valor
k_1	2	k_7	2.6499
k_2	2.4	k_8	0.3854
k_3	2	k_9	2.6499
k_4	5	k_{10}	0.3854
k_5	11.0762	k_{11}	2.6499
k_6	7.9104	k_{12}	0.3854

Tabla 4.3: Ganancias del control no lineal robusto para la posición y orientación del UAV.

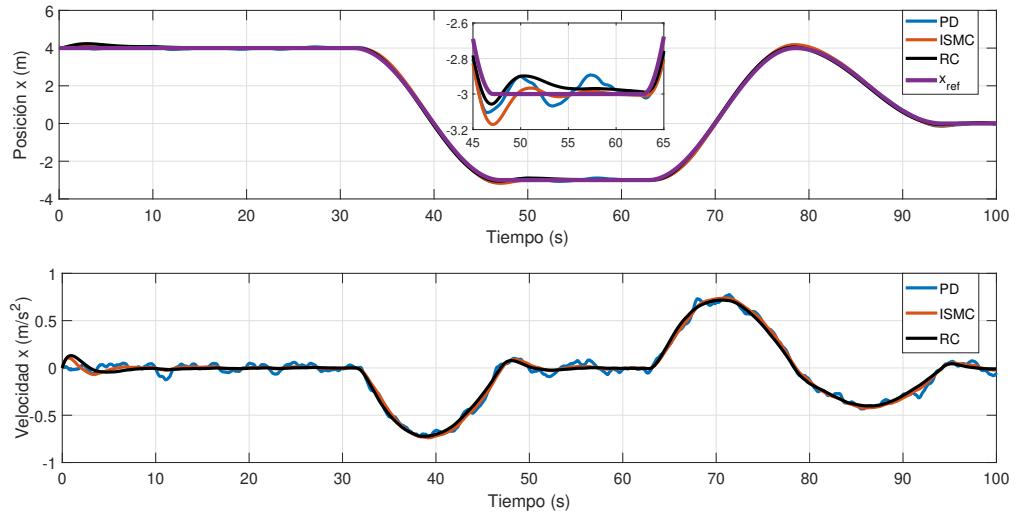


Figura 4.1: Posición y velocidad de la dinámica en x con los controles PD, ISMC y RC.

Se puede observar que la aeronave sigue la trayectoria y produce un desempeño aceptable, comenzando a seguir la referencia en un tiempo de 3.94 s para las tres estrategias de control. Además, no se detecta algún sobre impulso considerable, ni un error en estado estacionario que requiera un ajuste en cuanto a las ganancias.

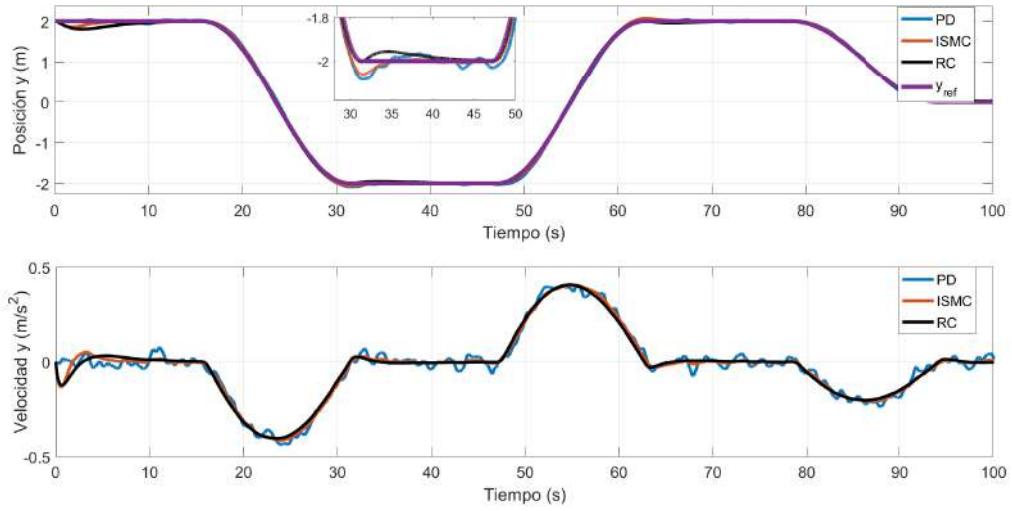


Figura 4.2: Posición y velocidad de y en relación a los controles PD, ISMC y RC.

También, se puede apreciar como, a partir del intervalo $t = \omega\pi$ (15.708 s), las posiciones x y y mantienen un seguimiento de trayectoria muy aceptable. De acuerdo a la Figura 4.3 se puede apreciar que, los cambios de referencia en relación a la posición z durante el despegue y el aterrizaje, son alcanzados en un tiempo relativamente corto.

Por otro lado, en cuanto a la estrategia de control por modos deslizantes integrales (ISMC), se tiene las entradas de control definidas de forma general como $\mathbf{U}_k = \mathbf{u}_k + \tilde{\mathbf{u}}_i$, con $i = \psi, z, \phi, \theta$, que corresponden a los subsistemas del modelo de la aeronave y de manera mas específica, a las dinámicas z , ϕ , θ y ψ . Para los resultados reportados, se estableció una \mathbf{u}_k igual a la acción de control de la estrategia de control anterior (PD robusto). Esto en relación a que \mathbf{u}_k es la entrada que busca estabilizar al sistema nominal. Por otro lado $\tilde{\mathbf{u}}_i = -\mathbf{B}_{i2}^{-1}G_{i2}^{-1}\rho_i \text{ sign}(S_i)$, se relaciona con los modos deslizantes para la mitigación de perturbaciones. Los valores usados para cada subsistema en los resultados numéricos reportados fueron $G_\psi = [0.11 \ 0.11]$, $G_z = [0.15 \ 0.15]$, $G_\phi = [0.11 \ 0.11]$, $G_\theta = [0.11 \ 0.11]$, $\rho_\psi = 100$, $\rho_z = 100$, $\rho_\phi = 100$, $\rho_\theta = 100$.

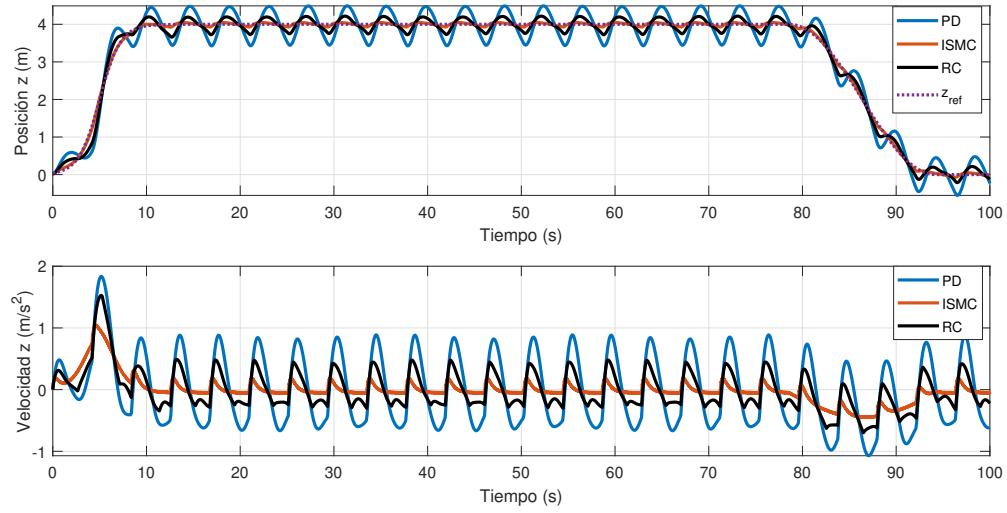


Figura 4.3: Respuesta de posición y velocidad de z .

La Figura 4.4 muestra la trayectoria realizada por la aeronave para cada una de las estrategias de control. Se trata de un gráfico en el espacio tridimensional en relación a x , y y z . El gráfico permite identificar que el control por modos deslizantes integrales presenta un mejor desempeño en cuanto a la mitigación de perturbación durante la misión de vuelo. Esto en comparación a las estrategias de control robusto y PD.

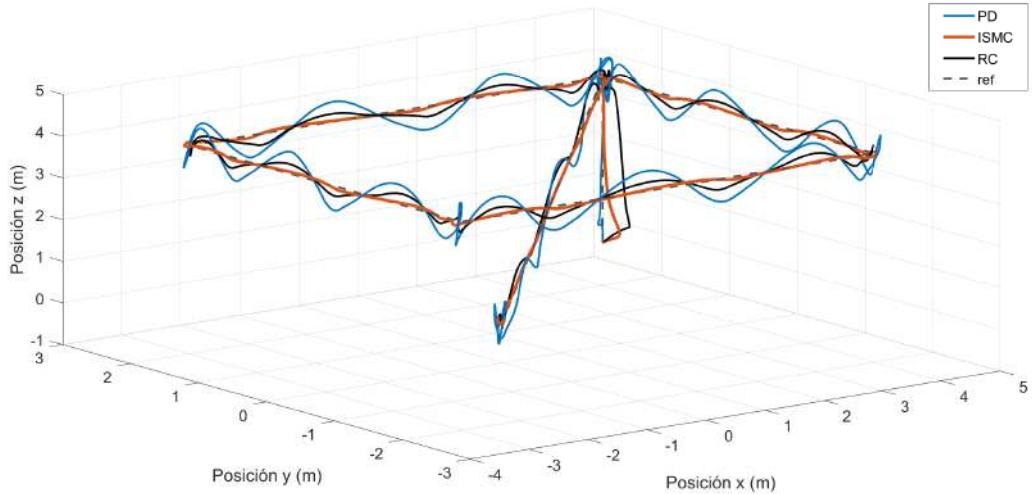


Figura 4.4: Gráfico 3-D de la trayectoria de la aeronave con los controles PD, ISMC y RC.

En cuanto al control robusto, la superficie de deslizamiento tipo PID para cada subsistema esta representada de manera general como:

$$\Phi_i(t) = \mathbf{K}_{1i}\varphi_i(t) + \mathbf{K}_{2i} \int_{t_0}^t \varphi_i(\tau) d\tau + \mathbf{K}_{3i}\dot{\varphi}_i(t), \quad (4.1)$$

con $\mathbf{K}_{1z} = 0.03118$, $\mathbf{K}_{2z} = 0.02348$, $\mathbf{K}_{3z} = 0.0188$, $\mathbf{K}_{1\phi} = 6.236$, $\mathbf{K}_{2\phi} = 2.348$, $\mathbf{K}_{3\phi} = 0.0376$, $\mathbf{K}_{1\theta} = 1.559$, $\mathbf{K}_{2\theta} = 0.2348$, $\mathbf{K}_{3\theta} = 0.0376$, $\mathbf{K}_{1\psi} = 0.3118$, $\mathbf{K}_{2\psi} = 0.2348$, $\mathbf{K}_{3\psi} = 0.188$. Asimismo, mediante el uso de la toolbox de Matlab Yalmip-CVX se tiene el siguiente conjunto de soluciones numéricas:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0.35, \quad \varepsilon = 2.9 \times 10^{-5}, \\ \mathbf{X}_h &= 1.3193 \times 10^4, \quad \mathbf{Y}_h = -2.2096 \times 10^4, \quad \mathbf{R} = -1.6749, \text{ para } h = \phi, \theta \text{ y } \psi. \quad (4.2) \\ \mathbf{X}_z &= 1.3193 \times 10^4, \quad \mathbf{Y}_z = -2.2096 \times 10^6, \quad \mathbf{R}_z = -167.4874, \text{ para } z. \end{aligned}$$

La acción de control robusta asociada a las dinámicas de la aeronave se describieron en (3.80), (3.81), (3.82) y (3.83). Entonces, para las simulaciones realizadas

$$\mathcal{A}_z = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_h = \begin{bmatrix} 0 & -0.01 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \times 10^4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{z2} = 1.6749, \quad \mathbf{Q}_{h2} = 1.6748, \quad \rho_z = 7.95455, \quad \rho_h = 0.0795.$$

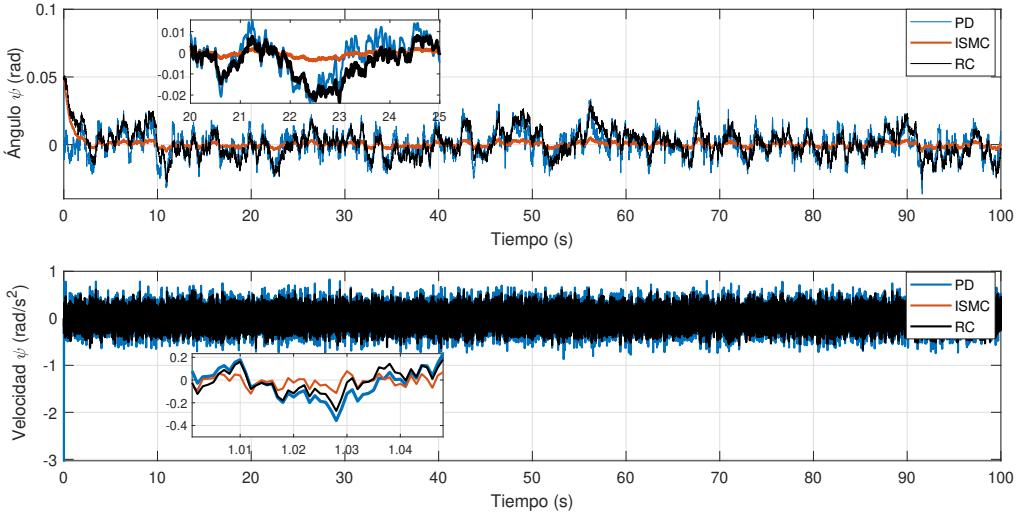


Figura 4.5: Posición y velocidad angular respecto a la guiñada ψ para cada estrategia de control.

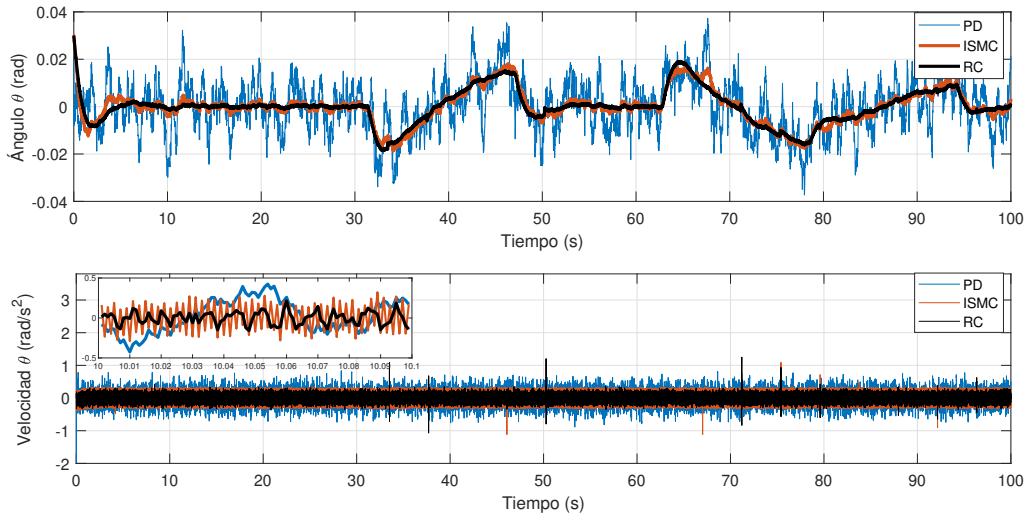


Figura 4.6: Respuesta de posición y velocidad angular en relación al cabeceo θ .

Las Figuras 4.5, 4.6 y 4.7 muestra el desempeño en cuanto a la orientación del vehículo. Se cada gráfico tiene dos subfiguras que describen la posición y velocidad angular para θ , ϕ y ψ , respectivamente. Se puede apreciar que en un tiempo de aproximadamente 5 s los ángulos permanecen estables a lo largo de la trayectoria a pesar de la presencia de perturbaciones.

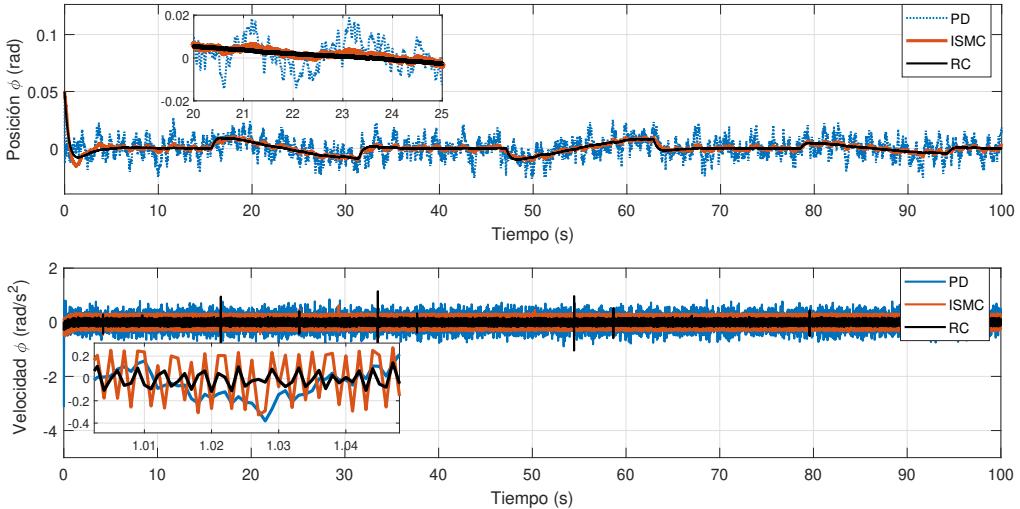


Figura 4.7: Posición y velocidad angular en relación al alabeo ϕ .

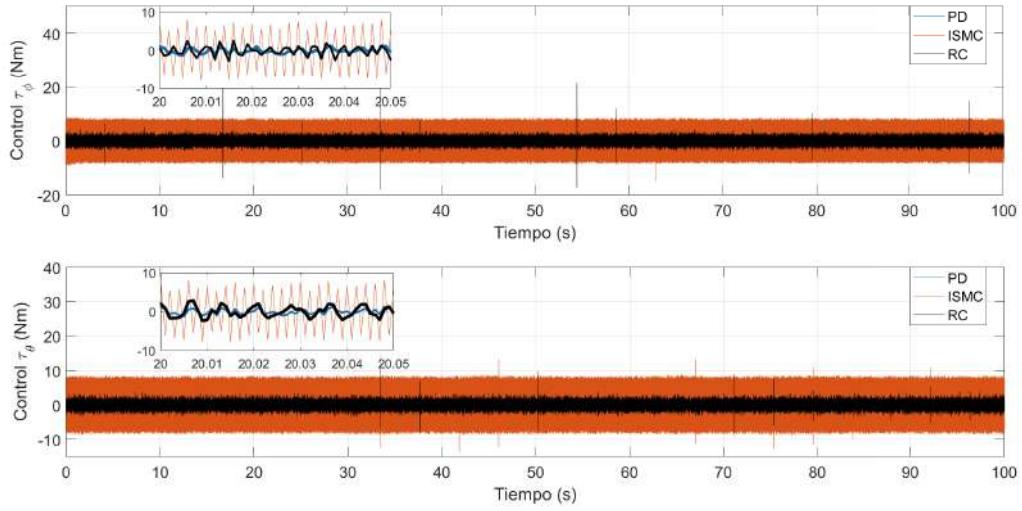


Figura 4.8: Entradas de control τ_ϕ y τ_θ durante la misión de vuelo.

Las Figuras 4.8 y 4.9 describen las señales de control para cada subsistema. Es evidente la presencia del característico efecto chattering (en la estrategia por modos deslizantes integrales). También, las figuras muestran que, para el caso del control robusto, el efecto chattering es menor comparado con el ISMC. Estó se debe a la forma del control propuesto.

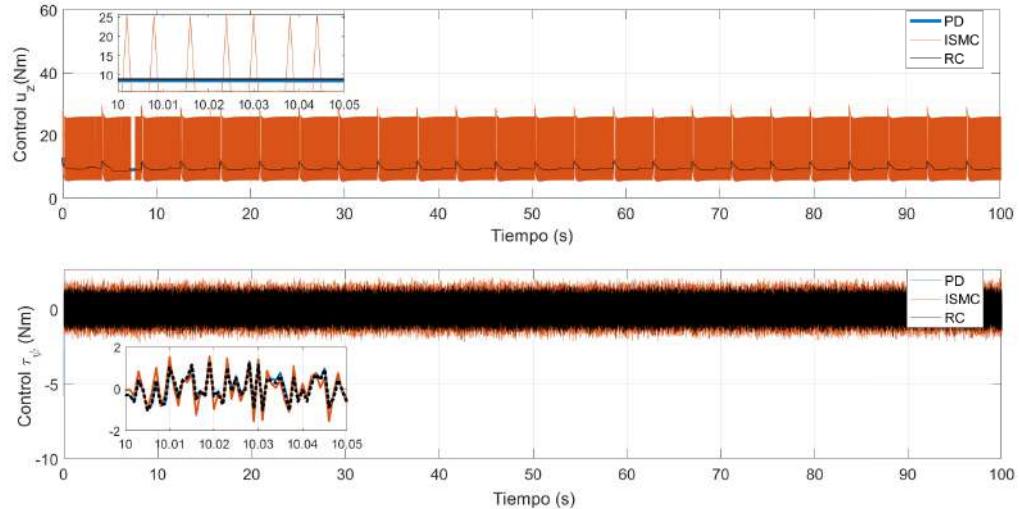


Figura 4.9: Señales de control u_k y τ_ψ para los controles PD, ISMC y RC.

4.3. Análisis comparativo entre controladores

Con el objetivo de cuantificar el desempeño de las estrategias de control y así generar un criterio comparativo claro, se hizo un análisis comparativo basado en la Integral del valor absoluto del error (IAE), la integral en el tiempo del valor absoluto del error (ITAE), la integral del error cuadrático (ISE) y la integral en el tiempo del error cuadrático (ITSE). En este sentido, se definieron los siguientes índices del error:

$$\begin{aligned} \text{IAE} &= \int_0^t \|\mathbf{e}(\tau)\| d\tau, \\ \text{ISE} &= \int_0^t \|\mathbf{e}(\tau)\|^2 d\tau, \\ \text{ITAE} &= \int_0^t \tau \|\mathbf{e}(\tau)\| d\tau, \\ \text{ITSE} &= \int_0^t \tau \|\mathbf{e}(\tau)\|^2 d\tau, \end{aligned}$$

donde $\|\mathbf{e}\| = (\mathbf{e}^\top \mathbf{e})^{\frac{1}{2}}$ and $\|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{e}^\top \mathbf{e}$. De acuerdo a esto, se puede inferir que, cuando la respuesta en lazo cerrado produce un valor de índice menor, significa que el error en estado estacionario, sobre amortiguamiento y/o máximo sobre impulso se minimizan [62]. El índice IAE proporciona información sobre la respuesta transitoria y permite analizar el rendimiento, mientras que el ITAE ofrece información similar, pero penaliza el rendimiento a lo largo del tiempo. Por otro lado, el índice ISE analiza la diferencia entre las respuestas subamortiguadas y sobreamortiguadas del vehículo. El ITSE proporciona la misma información que el ISE, pero penaliza el rendimiento del vehículo en función del tiempo transcurrido entre el inicio del vuelo y su posición real. En la Tabla 4.4 se muestran los resultados en términos de las dinámicas de translación de la aeronave. El control por modos deslizantes integrales presentó un mejor desempeño. De acuerdo al IAE el ISMC redujo el error un 82.64 % comparado con el PD robusto. Sin embargo, su consumo energético es considerable. El control robusto DSMC presentó una reducción del 53.74 % en comparación con el PD, que fue el controlador con mayor índice de error en este criterio. Asimismo, de acuerdo a los otros criterios sobre el error, el control robusto presentó mejor desempeño que el control PD. Por lo tanto, se vuelve una opción viable para mitigar perturbaciones con un consumo energético moderado. Por ejemplo, con respecto al ISE, el control robusto basado en DSMC presentó una reducción del 77.28 % en comparación con el PD robusto.

Por otro lado, respecto a las entradas de control mostradas en la Figura 4.9 se puede

Controller	IAE	ITAE	ISE	ITSE
PD	64.6069	3248.7833	43.1353	2170.9200
RC	29.8830	1442.2882	9.8079	450.7579
ISMC	11.2153	571.4193	1.5070	77.0232

Tabla 4.4: Comparativa de los índices de error en el seguimiento de trayectoria del UAV.

inferir que el control robusto arrojo resultados similares a los del PD en términos de consumo. Sin embargo, para el análisis de consumo energético se definió la siguiente ecuación de energía:

$$E_T = \int_0^t u(\tau)^\top u(\tau) d\tau. \quad (4.3)$$

Los resultados mostraron que la energía consumida durante la misión de vuelo por el control robusto DSMC fue $E_{T_{RC}} = 9041.6110 \text{ } N^2m^2\text{s}$, mientras que para el controlador PD robusto fue $E_{T_{PD}} = 8905.4839 \text{ } N^2m^2\text{s}$ y para el control ISMC se tuvo un consumo energético $E_{T_{ISMC}} = 28262.3408 \text{ } N^2m^2\text{s}$. Es claro que el ISMC tuvo un consumo superior al de los otros dos controladores y que, debido a su estructura, el PD presentó el mejor desempeño en cuanto a consumo energético. Asimismo, el control robusto redujo su consumo un 68.01 % con respecto al ISMC y tuvo una diferencia de solo el 0.48 % en comparación con el PD. Por lo tanto, se puede inferir que el control DSMC presentó un mejor resultado derivado de los índices del error y consumo energético.

4.4. Conclusiones

En este Capítulo se presentaron resultados de los algoritmos descritos previamente en un entorno de simulación numérica. Como resultado principal se tiene el seguimiento de trayectoria del UAV con los tres controladores y perturbaciones inducidas, todo esto en el entorno de Matlab Simulink. El algoritmo para obtención de ganancias de control generó los valores que permitieron realizar la misión de vuelo de manera satisfactoria. Las figuras relacionadas con las señales de control, muestran una reducción de chattering significativa en el control DSMC, a causa de la acción de filtrado propia en el diseño de este. Asimismo, el análisis comparativo arrojó que el controlador robusto redujo el índice del error en un 77.28 % comparado con el control PD, sin embargo, el control ISMC fue el que presentó los mejores resultados en cuanto al error. Por otro lado, debe mencionarse que el consumo energético del control ISMC fue considerable. Esto permite concluir que el

control robusto DSMC mostró un mejor desempeño tomando en consideración los índices de error y energía.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

5.1. Conclusiones generales

Las estrategias de control presentadas en este trabajo mostraron resultados satisfactorios en cuanto a su aplicación para el seguimiento de trayectoria de un UAV propenso a ser afectado por perturbaciones. Además, el algoritmo para calcular las ganancias de control basado en LMI's es una de las aportaciones principales, demostrando resultados aceptables al poderse aplicar a las tres estrategias de control planteadas. Solo debe aclararse que es un algoritmo que se ejecuta fuera de línea. Por otro lado, los resultados numéricos validan la posibilidad de aplicar estos algoritmos mediante otras técnicas que implican el uso de un simulador de vuelo o incluso la aplicación sobre hardware.

En el capítulo 2 se describió el modelo matemático de la aeronave híbrida en el modo multirrotor bajo la formulación de Newton-Euler. De acuerdo a la geometría y/o configuración del UAV, no fue posible hacer simplificaciones o consideraciones (como se suele realizar en trabajos sobre sistemas multirrotor simétricos) sobre la matriz de inercia. Asimismo, el modelo basado en subsistemas facilita el diseño e implementación de controladores como los descritos en el trabajo. Por otro lado, en el capítulo 3 se presentaron tres algoritmos de control robustos desarrollados para la dinámica de la aeronave. Se destacó el algoritmo para la obtención de las ganancias de control basado en LMI's y una de las ventajas, es que es aplicable a los tres controladores. También, se concluyó estabilidad UBB que garantiza convergencia en tiempo finito.

En el capítulo 4 se describen resultados por simulación numérica de los controladores

sobre el sistema de la aeronave para seguimiento de trayectoria. Se corroboró la acción de filtrado de la señal de control en el control DSMC, que se traduce en una reducción del efecto chattering. En el caso del control ISMC, sus índices basados en las señales de error fueron los mas bajos de acuerdo al análisis comparativo, sin embargo, su consumo energético fue considerablemente mayor. Además, dos de los algoritmos (PD y DSMC) fueron implementados en un simulador de vuelo, lo que permitió corroborar los resultados numéricos reportados en este trabajo.

5.2. Trabajos futuros

El proyecto de tesis abre la puerta a la realización de otras pruebas que implican el uso de técnicas como software in the loop o hardware in the loop. En cuanto a posible trabajo futuro, de manera específica puede señalarse lo siguiente:

- En este trabajo se presentaron resultados basados en simulaciones numéricas, en el futuro se plantea usar un simulador de vuelo para la validación de estas. El factor del viento debe ser tomado en cuenta para la realización de pruebas y análisis comparativos con los controladores.
- Se planea usar el modelo de la aeronave (modo avión) para el desarrollo de un algoritmo de seguimiento de ruta que permita la implementación de controladores robustos.
- Como trabajo futuro se pretende desarrollar un algoritmo para la estimación de perturbaciones que permita mejorar el desempeño del UAV en una misión de vuelo.
- En el futuro se pretende construir un UAV con un diseño y/o configuración similar a la del modo multirrotor para programar todos los controladores desarrollados en este trabajo y obtener resultados experimentales basados en una plataforma real.

Bibliografía

- [1] Hussein A. *Propulsion Airframe Interaction Effects*. PhD thesis, Faculty of Engineering and Physical Sciences, University of Surrey, May 2021.
- [2] Zong J., Zhu B., Hou Z., Yang X., and Zhai J. Evaluation and comparison of hybrid wing vtol uav with four different electric propulsion systems. *Aerospace 2021*, 8:256, 2017.
- [3] Jurrian Doornbos, Kwabena E. Bennin, Önder Babur, and João Valente. Hybrid truck-drone delivery systems: A systematic literature review. *IEEE Access*, 12:23220–23239, 2024.
- [4] Osim Kumar Pal, MD Sakib Hossain Shovon, M. F. Mridha, and Jungpil Shin. In-depth review of ai-enabled unmanned aerial vehicles: trends, vision, and challenges. *Discover Artificial Intelligence*, 4:97, 2024.
- [5] Aditya Vardhan Reddy Katkuri, Hakka Madan, Narendra Khatri, Antar Shaddad Hammed Abdul-Qawy, and K. Sridhar Patnaik. Autonomous uav navigation using deep learning-based computer vision frameworks: A systematic literature review. *Array*, 23:100361, 2024.
- [6] Ying-Chih Lai, Wen Ong Ting. Design and implementation of an optimal energy control system for fixed-wing unmanned aerial vehicles. *Applied Sciences*, 6:2–24, 2016.
- [7] Heracles M., Bartholomeus H., Van Apeldoorn D., Suomalainen J., and Kooistra L. Intercomparison of unmanned aerial vehicle and ground-based narrow band spectrometers applied to crop trait monitoring in organic potato production. *Sensors*, 17:2–36, 2017.

- [8] Romero H., Salazar S. Santos.O and Lozano R. Optimized discrete control law for quadrotor stabilization: Experimental results. *Journal of Intelligent and Robotic Systems.*, 2016.
- [9] Valavanis K. P. and Vachtsevanos G. J. *Handbook of Unmanned Aerial Vehicles*. SpringerReference, 2015.
- [10] Lozano R. *Unmanned Aerial Vehicles. Embedded Control*. Wiley-ISTE, 2010.
- [11] Udroiu R., Madalina B. Conceptual design of a vtol remotely piloted aircraft for emergency missions. *Scientific research and education in the air force-afases 2016.*, 2016.
- [12] Bharath Komatineni, Swetha Makam, and Sanwal Meena. A comprehensive review of the functionality and applications of unmanned aerial vehicles (uavs) in the realm of agriculture. *Journal of Electrical Systems and Information Technology*, 11:57, 12 2024.
- [13] Syed Agha Hassnain Mohsan, Nawaf Q. H. Othman, Li Yanlong, Mohammed Alsharif, and Muhammad Khan. Unmanned aerial vehicles (uavs): practical aspects, applications, open challenges, security issues, and future trends. *Intelligent Service Robotics*, 16:109–137, 01 2023.
- [14] R. Austin. *Unmanned Aircraft Systems: UAVs Design, Development and Deployment*, volume 54. John Wiley & Sons, 2011.
- [15] J.D. Anderson. *Aircraft Performance and Design*, volume 1. WCB/McGraw-Hill, 1999.
- [16] L.M. Nicolai and G. Carichner. *Fundamentals of Aircraft and Airship Design, American Institute of Aeronautics and Astronautics*, volume 1. AIAA (American Institute of Aeronautics and Astronautics), 2001.
- [17] Ajeet Kumar Bhatia, Ju Jiang, Ziyang Zhen, Nigar Ahmed, and Avinash Rohra. Projection modification based robust adaptive backstepping control for multipurpose quadcopter uav. *IEEE Access*, 7:154121–154130, 2019.
- [18] Ludington B., Johnson E., and Vachtsevanos G. Augmenting uav autonomy. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 13(3):63–71, 2006.

- [19] Ortega G., Mu noz F. , Quezada E. E., García L. R. and Ordaz P. Implementation of leader-follower linear consensus algorithm for coordination of multiple aircrafts. *In Research, Education and Development of Unmanned Aerial Systems (RED-UAS)*. IEEE, pages 25–32, 2015.
- [20] Long Y. and Cappelleri D. J. Complete dynamic modeling, control and optimization for an over-actuated mav. *2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*., pages 1380–1385, 2013.
- [21] Garcia O., Ordaz P., Ordaz P., Santos O., Lozano R. Attitude optimal backstepping controller based quaternion for a uav. *IEEE Access*, 7(ISSN: 2169-3536):40636 – 40648, 2016.
- [22] Santos.O, Romero H., and Salazar S. Finite horizon nonlinear optimal control for a quadrotor: experimental results. *Optimal Control Applications and Methods. Under review*, 2016.
- [23] Sánchez B., Ordaz P. and Santos.O. Swing-stabilization up for a rotatory-elastic pendulum via nonlinear sub-optimal control. *Asian Journal of Control*, 2018.
- [24] Derafa L., Benallegue A., Fridman L. Super twisting control algorithm for the attitude tracking of a four rotors uav. *Journal of the Franklin Institute 349*. ELSEVIER., pages 685–699, 2012.
- [25] Espinoza E. S., Garcia O., Ordaz P., Malo A., Lozano R. Modeling and sliding mode control of a micro helicopter-airplane system. *Journal of Intelligent & Robotic Systems. Springer Science+Business MediaDordrecht 2013*, 2013.
- [26] Miranda R. and Aguilar L. Variable-gain sliding mode control for quadrotor vehicles in trajectory tracking tasks. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018.
- [27] Derafa L., Benallegue A., Ouldali A. Super twisting control algorithm for the four rotors helicopter attitude tracking problem. *2010 11th International Workshop on Variable Structure Systems.*, pages 62 – 67, 2010.
- [28] Mokhtari M. R. and Cherki B. A new robust control for minirotocraft unmanned aerial vehicles. *ISA Transactions 56. The Journal of Automation*. ELSEVIER., pages 86–101, 2015.

- [29] Garcia O., Ordaz P., Ordaz P., Santos O., Lozano R. Backstepping and robust control for a quadrotor in outdoors environments: An experimental approach. *IEEE Access*, 7(ISSN: 2169-3536):40636 – 40648, 2019.
- [30] Yuri. Shtessel. *Sliding mode control and observation*. Vol.10 New York, NY USA: Birkhauser, 2014.
- [31] A. Poznyak. *Advanced Mathematical Tools for Control Engineers: Volume 1: Deterministic Systems*, volume 1. Elsevier, 2010.
- [32] Ordaz P., Espinoza E. S., Mu noz F., Carrillo L. G., Romero H., and Lozano R. Nonlinear control and trajectory tracking of an unmanned aircraft system based on a complete state space representation. *IFAC-PapersOnLine*, 51(13):561–566, 2018.
- [33] Ordaz P. and Poznyak A. Adaptive-robust stabilization of furuta’s pendulum via attractive ellipsoid method. *Journal of Dynamic Systems Measurement, and Control*, 138(2):021005, 2016.
- [34] Ordaz P. and Poznyak A. The furuta’s pendulum stabilizationwithout the use of mathematizal model: Attractive ellipsoid method with kl-adaptation. *In Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference*, pages 7285–7290, 2012.
- [35] Alatorre A., Espinoza E. S., Sanchez B., Ordaz P., Mu noz F. and García L. R. Parameter estimation and control of an unmanned aircraft-based transportation system for variable-mass payloads. *Asian J Control*, 23(5):2112–2128, 2021.
- [36] Zhang C., Kovacs J. M. The application of small unmanned aerial systems for precision agriculture: a review. *Precision agriculture*, 13(6):693–712, 2012.
- [37] Z. Wu, Y. Cao, and M. Ismail. Gust loads on aircraft. *The Aeronautical Journal*, 123(1266):12161274, 2019.
- [38] S. Ahmad, M. Abid, and S. Hussain. Adaptive sliding mode-based active disturbance rejection control for a quadcopter. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 44(16):3176–3190, 2022.
- [39] W. Xie, D. Cabecinhas, R. Cunha, and C. Silvestre. Adaptive backstepping control of a quadcopter with uncertain vehicle mass, moment of inertia, and disturbances. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 69(1):549–559, 2022.

- [40] . Eker. Sliding mode control with pid sliding surface and experimental application to an electromechanical plant. *ISA Transactions*, 45(1):109–118, 2006.
- [41] Qi Wang, Akio Namiki, Abner Asignacion, Ziran Li, and Satoshi Suzuki. Chattering reduction of sliding mode control for quadrotor uavs based on reinforcement learning. *Drones*, 7(7), 2023.
- [42] Raiesdana S. Control of quadrotor trajectory tracking with sliding mode control optimized by neural networks. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 234:095965182093271, 07 2020.
- [43] Eltayeb A. , Rahmat M. , Basri M. and ElFerik S. An improved design of an adaptive sliding mode controller for chattering attenuation and trajectory tracking of the quadcopter uav. *IEEE Access*, 8:205968–205979, 2020.
- [44] Rehman A., Mazhar N., Raza A. and Mumtaz F. Sliding mode control of quadrotor uav using parabolic sliding surface. *2021 International Conference on Innovative Computing (ICIC)*, pages 1–6, 2021.
- [45] Ríos H., Falcón R., González O.A. and Dzul A. Continuous sliding-mode control strategies for quadrotor robust tracking: Real-time application. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 66(2):1264–1272, 2019.
- [46] Samir Zeghlache, Hilal Rahali, Ali Djeriouï, Hemza Mekki, Loutfi Benyettou, and Mohamed Fouad Benkhoris. Adaptive integral sliding mode control with chattering elimination considering the actuator faults and external disturbances for trajectory tracking of 4y octocopter aircraft. *Processes*, 12(11), 2024.
- [47] Patricio Ordaz, Hugo Romero-Trejo, Carlos Cuvas, and Omar Sandre. Dynamic sliding mode control based on a fullorder observer: Underactuated electromechanical system regulation. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 34(1):29–43, 2024.
- [48] Mousavi Y., Zarei A., Mousavi A. and Biari M. Robust optimal higher-order-observer-based dynamic sliding mode control for vtol unmanned aerial vehicles. *Int. J. Autom. Comput.*, 18:802–813, 2021.

- [49] Ortega J., Benitez D., Ordaz P. and Epinoza E.S. Dynamic sliding mode control with pid surface for trajectory tracking of a multirotor aircraft. *IEEE Access.*, 11, 2020.
- [50] T. Roux, L. Fridman, and L. Hsu. *Sliding-Mode Control and Variable-Structure Systems*, volume 1. Springer Cham, 11 2023.
- [51] Alessandro Jacoud Peixoto, Wenderson G. Serrantola, and Fernando Lizarralde. Dynamic smooth sliding control applied to uav trajectory tracking. *IEEE Access*, 12:44306–44324, 2024.
- [52] M. Herrera, O. Camacho, H. Leiva, and C. Smith. An approach of dynamic sliding mode control for chemical processes. *Journal of Process Control*, 85:112–120, 2020.
- [53] Ullah S., Mehmood A. and Khan Q. Robust integral sliding mode control design for stability enhancement of under-actuated quadcopter. *Int. J. Control Autom. Syst.*, 18:1671–1678, 2020.
- [54] Yongwei Z. and Shunchao Z. Integral sliding mode-based event-triggered optimal fault tolerant tracking control of continuous-time nonlinear systems. *European Journal of Control*, 79:101021, 2024.
- [55] Mofid O. and Mobayen S. Adaptive sliding mode control for finite-time stability of quad-rotor uavs with parametric uncertainties. *ISA Transactions*, 72:1–14, 2018.
- [56] Espinoza E. S., Garcia O., Lugo I., and Ordaz P. Modeling and sliding mode control of a micro helicopter-airplane system. *Journal of Intelligent & Robotic Systems volume*, 73:469–486, 2014.
- [57] García L., Dzul A., Lozano R. *Quad Rotorcraft Control*, volume 1. Springer London, 2013.
- [58] Stevens B., Lewis F. , Johnson E. *AIRCRAFT CONTROL AND SIMULATION. Third Edition. Dynamics, Controls Design, & Autonomous Systems*, volume 1. Wiley), 2016.
- [59] Khalil H. K. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall Inc, 1996.
- [60] Wassim M Haddad and VijaySekhar Chellaboina. *Nonlinear dynamical systems and control: a Lyapunov-based approach*. Princeton University Press, 2011.

- [61] Hassan K Khalil and Jessy W Grizzle. *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [62] P. Ordaz, L. Rodríguez-Guerrero, M. Ordaz-Oliver, and B. Sánchez. Three link flexible arm robust regulation via proportional retarded control scheme. *Applied Mathematical Modelling*, 125:778–797, 2024.

Apéndice A

**Artículo publicado en la revista
IEEE Access, 2023**

Received 9 August 2023, accepted 31 August 2023, date of publication 11 September 2023, date of current version 19 September 2023.

Digital Object Identifier 10.1109/ACCESS.2023.3314382



APPLIED RESEARCH

Dynamic Sliding Mode Control With PID Surface for Trajectory Tracking of a Multirotor Aircraft

JOVANI ORTEGA VENTURA^{ID1}, DANIEL BENITEZ MORALES¹, JESUS P. ORDAZ OLIVER¹, AND EDUARDO S. ESPINOZA QUESADA^{ID2}, (Senior Member, IEEE)

¹CITIS, AACyE, ICBI, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Hidalgo 42184, México

²CONACYT-CINVESTAV, UMI-LAFMIA, México City 07360, Mexico

Corresponding author: Eduardo S. Espinoza Quesada (eduardo.espinoza@cinvestav.mx)

This work was supported in by the UAEH Doctorado en Ciencias en Automatización y Control, and in part by the Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT).

ABSTRACT This paper deals with the design of a robust controller to attenuate matched and unmatched uncertain dynamics as well as external disturbances effects by considering the actuator bandwidth to stabilize the mechanical dynamics of an Unmanned Aerial Vehicle. To this end, the performance of a sliding mode controller is improved with the combination of the attractive ellipsoid method. Likewise, it is guaranteed that the system trajectory arrives into a minimal size invariant set in finite time by using a workable control input. Finally, in order to evaluate the effectiveness of the proposed control approach, a comparative study with a robust Proportional Derivative controller, an integral sliding mode controller and a dynamic sliding mode controller with Proportional Integral Derivative sliding surface was conducted. In order to validate the effectiveness of the proposed controllers, the dynamics of a multirotor aircraft was used to conduct numerical simulations.

INDEX TERMS UAV, uniformly ultimately bounded stability, sliding mode control, PID surface.

I. INTRODUCTION

An Unmanned Aerial Vehicle (UAV) is an underactuated nonlinear system that has been used in commercial, industrial, military and civil applications [1], [2], [3]. This is due to its versatility for conducting hover flight and trajectory tracking [4], [5]. Commonly, this class of aircraft system is driven by rotors and stabilized via a linear controller for indoors and outdoors applications [6], [7], [8], [9]. Traditionally, the stabilization of a UAV is performed via Proportional Derivative (PD) controllers and tuned via linear quadratic regulator algorithms [10]. Also, new techniques are used to stabilize UAV like a model predictive controller that uses a linearized UAV model and an observer to measure the external disturbance which are going to be compensated and the predictive controller improves the performance of a quadcopter [11], another one, quaternion-based tracking controller to stabilize a UAV but it does not deal with external disturbance [12]. Robust control for stabilization of this underactuated system type has been also used in [13] to demonstrate the advantages of a dynamic sliding mode

control and attractive ellipsoid method to reduce perturbation effects. Recently, robust control of a UAV has attract the attention on advanced mobile robots field because they are sensitive to external disturbances in outdoor flights, actually, the reduction of unmatched disturbances effects is one of the main challenges of this kind of systems. In fact, disturbance and uncertainty rejection is a major objective in control system design. Indeed, for underactuated controlled systems this issue degrades the trajectory tracking performance such that in some cases it is not possible to conclude stability in the Lyapunov sense [3], [6]. Nowadays, different robust controllers are designed to reduce these effects, even under the most extreme situations. This is the case of the Sliding Mode Control (SMC), the robust control based on Attractive ellipsoid Method (AEM), and neural networks, see for example [1], [14], [15], and [16].

The control problem can be associated with UAV regulation problem in the presence of disturbances for trajectory tracking. The most interesting features of sliding mode control are insensitivity, reduction of the unmatched disturbances and uncertain dynamics, as well as finite-time convergence to the sliding surface [15], [17]. However, a drawback of the controllers based on the sliding mode

The associate editor coordinating the review of this manuscript and approving it for publication was Xiaojie Su^{ID}.

technique is the chattering effect on the actuator [18], [19]. This phenomenon represents a complex closed-loop control problem and in some situations, this one cannot be reliably realized in practice [17], [20]. In recent years, researchers have managed how to attenuate the chattering effect and preserve robust control properties by proposing controllers like dynamic sliding mode, adaptive sliding mode, high order sliding mode, some variations of fuzzy and neural network-based control, and other variable structure controls [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29].

Other effective approach for reducing external disturbances and uncertain dynamics effects in control systems is the robust control based on AEM-concept. This strategy uses a linear feedback control employing fixed gain. In fact, under a suitable gain tuning, this control approach provides robustness property to considerably reduce both uncertain dynamics as well as external disturbances effects [14], [30]. The aim of AEM is, by using linear or non linear feedback control, to enclose the trajectories of the disturbed system into a small size invariant region. Although this approach implies that system trajectories arrive into a small size multi-dimensional ellipsoid, this one is valid only in some region of attraction. Actually, in some cases, the obtained control gain results in the actuator wear. Recently, the controllers based on the sliding motion was further improved by introducing the properties of the AEM-concept [13], [24], [27].

The AEM presents an effect called high-gain effect [27] that is not desired because it can amplify the noise of the system with a high gain of the controller, and also, the energy consumption [31]. On the other hand, SMCs present chattering, which is an undesirable phenomenon and it is perceived as oscillations with finite frequency and amplitude. The chattering effects are related to low control accuracy and high wear of moving mechanical parts [18]. In order to reduce such chattering effects, in this paper we present a class of dynamic control consisting in the incorporation of the proportional, integral, and derivative of the adjoint sliding surface. Furthermore, since the sliding surface is a second-order system of the adjoint variable, a workable control signal is obtained. Getting as the major contribution Ultimate Uniform Bound Stability (UUB-Stability) for nonlinear systems without exact knowledge of the dynamic model equations and in the presence of external bounded disturbances. Finally, in order to demonstrate the effectiveness of the designed controller, a comparative study of the implementation of integral sliding mode control and proportional derivative control to the dynamics on a multirotor unmanned aircraft system is presented. The main contributions of this work are summarized as follows:

- By using the Newton-Euler approach a mathematical model of a home made non conventional hexarotor is derived.
- The control action to regulate orientation and guarantee the trajectory tracking of the multirotor system, which is a class of dynamic sliding mode control (DSMC) with

a Proportional Integral Derivative (PID) type sliding surface is developed.

- The stability analysis to guarantee the so called Ultimate Uniform Bound Stability of the closed-loop hexarotor system is presented.

On the other hand, a comparative study is conducted to analyze the UAV performance between the proposed control, a PD control and with an integral sliding mode control (ISMC). Likewise, a comparative study based of the error signals and the energy consumption of the designed robust controller with PID and ISMC is presented. The rest of the paper is organized as follows. The system description of the multirotor aircraft, the mathematical preliminaries and the problem formulation are introduced in Section II and Section III, respectively. The robust control design for a class of uncertain disturbed linear systems is presented in Section IV. The illustrative scenario of the multirotor system regulation inspired on a tracking trajectory task is presented in Section V. Finally, in Section VI concluding remarks are presented.

II. SYSTEM DESCRIPTION

The schematic structure of the multirotor system is illustrated in Figure 1 which is an aircraft that consists of six rotors. In order to describe the UAV motion, two reference frames are necessary: the earth inertial frame (X_I, Y_I, Z_I) and the body-fixed frame (X_B, Y_B, Z_B). The sum of the forces of each rotor ($f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$) generates the thrust force and is oriented parallel to the Z_B axis. Let $\bar{q} = (\Gamma, \eta)$ be the generalized coordinates of the system, where $\Gamma = (x(t), y(t), z(t))^\top$ represents the translation coordinates relative to the inertial frame and $\eta = (\phi(t), \theta(t), \psi(t))^\top$ is the vector of the Euler angles that represents the attitude of the vehicle. Now, the transformation from the body frame to the inertial frame is realized by using the rotation orthogonal matrix (\mathcal{R}). In addition, the angular velocities in the body frame can be expressed in terms of the Euler angle velocities by using the corresponding rotation matrix W_η . This procedure is described for example in [32], [33], and [34].

A. THE HEXAROTOR AIRCRAFT DYNAMICS

The equations of motion of the aircraft obtained by using the Newton-Euler formalism whose equations describe the translational and rotational movements are given as [35], [36], and [37]:

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma} &= V \\ m\dot{V} &= \mathcal{R}F \\ \dot{\mathcal{R}} &= \mathcal{R}\hat{\Omega} \\ I\dot{\hat{\Omega}} &= -\Omega \times I\Omega + \tau,\end{aligned}\quad (1)$$

where $F = [0 \ 0 \ u_z(t)]^\top + \mathcal{R}^\top [0 \ 0 \ -mg]^\top$ and $\tau = [\tau_\phi(t) \ \tau_\theta(t) \ \tau_\psi(t)]^\top$ are the total forces and moments acting on the UAV, respectively. $V = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))^\top \in \mathbb{R}^3$ is the translational speed with respect to the inertial frame and $\hat{\Omega}$

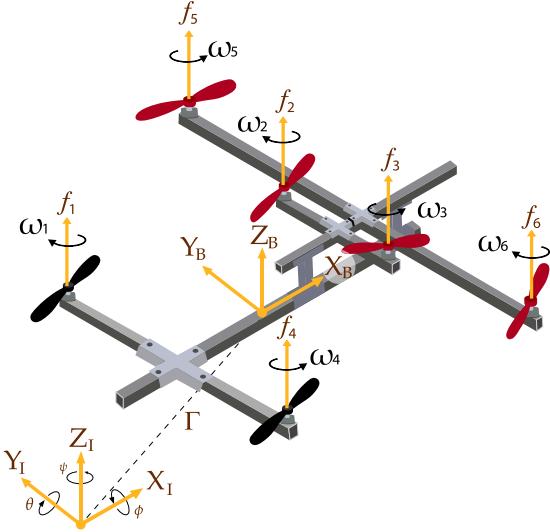


FIGURE 1. Configuration of the hexarotor UAV.

is a skew-symmetric matrix such that $\hat{\Omega} = \Omega \times a$. The Ω term is the vector of angular velocities in the body frame, m denotes the mass of the UAV and I contains the moments of inertia about the center of mass. Then, applying relation (1), the dynamic equations of the aircraft can be expressed as follows:

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= \frac{1}{m} [(c\phi(t)s\theta(t)c\psi(t) + s\phi(t)s\psi(t))u_z(t)] + \xi_x(t), \\ \ddot{y}(t) &= \frac{1}{m} [(c\phi(t)s\theta(t)s\psi(t) - s\phi(t)c\psi(t))u_z(t)] + \xi_y(t), \\ \ddot{z}(t) &= \frac{1}{m} [(c\phi(t)c\theta(t))u_z(t)] - g + \xi_z(t), \\ \ddot{\phi}(t) &= \frac{I_{zz}}{a_1} [a_2 + \tau_\phi(t)] - \frac{I_{xz}}{a_1} [a_3 + \tau_\psi(t)] + \xi_\phi(t), \\ \ddot{\theta}(t) &= \frac{1}{I_{yy}} [a_4 - \dot{\psi}(t)\dot{\psi}(t)I_{xz} + \tau_\theta(t)] + \xi_\theta(t), \\ \ddot{\psi}(t) &= \frac{I_{xx}}{a_1} [a_3 + \tau_\psi(t)] - \frac{I_{zx}}{a_1} [a_2 + \tau_\phi(t)] + \xi_\psi(t].\end{aligned}\quad (2)$$

where for shortness $\cos \rightarrow c$, $\sin \rightarrow s$, and

$$\begin{aligned}a_1 &= (I_{xx}I_{zz} - I_{xz}I_{zx}), \\ a_2 &= \dot{\theta}(t)(\dot{\psi}(t)I_{yy} - \dot{\phi}(t)I_{zx} - \dot{\psi}(t)I_{zz}), \\ a_3 &= \dot{\theta}(t)(\dot{\psi}(t)I_{xz} + \dot{\phi}(t)I_{xx} - \dot{\phi}(t)I_{yy}), \\ a_4 &= \dot{\phi}(t)(\dot{\phi}(t)I_{zx} + \dot{\psi}(t)I_{zz} - \dot{\psi}(t)I_{xx}).\end{aligned}\quad (3)$$

$\xi_x(t)$, $\xi_y(t)$, $\xi_z(t)$, $\xi_\phi(t)$, $\xi_\theta(t)$ and $\xi_\psi(t)$ denote the uncertainties, unmodeled dynamics and external disturbances. $\tau_\phi(t)$, $\tau_\theta(t)$ and $\tau_\psi(t)$ are the torques that generate the roll, pitch and yaw movements. The input u_z is associated with the forces generated by the six rotors. For this aircraft the following assumptions were considered:

- The center of mass of the vehicle coincides with the origin of the body frame.
- At low speeds, the aerodynamic effects can be neglected.

- Angular velocities respect to the body frame and inertial frame are the same for low speeds.
- The propellers are rigid with fixed pitch.
- The aircraft doesn't make aggressive maneuvers, then $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$ and $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

III. MATHEMATICAL PRELIMINARIES AND PROBLEM FORMULATION

Consider the uncertain nonlinear system affine in the control

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= \mathbf{A}\bar{x}(t) + \mathbf{B}u(t) + \xi(t), \\ \bar{x}(0) &= \bar{x}_0, \quad \xi(t) = f(\bar{x}) + g(\bar{x})u(t) - \mathbf{A}\bar{x}(t) - \mathbf{B}u(t) + \Delta(t)\end{aligned}\quad (4)$$

where $\bar{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ at time $t \in \mathbb{R}$. The $n \times n$ matrix \mathbf{A} is the state matrix associated with the linear system representation $\bar{x}(t)$. The control input is given by $u(t) \in \mathbb{R}^m$, and \mathbf{A} , \mathbf{B} are known real constant matrices with appropriate dimensions, furthermore, it is assumed that the pair (\mathbf{A}, \mathbf{B}) is controllable, the vector functions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ and $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ define the dynamics mapping of system (4). $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ is the matrix realizing the actuator-mapping, and $\Delta(t)$ are external disturbances in \mathbb{R}^n . System uncertainties and external disturbances are denoted as $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Assumption 1: The uncertain term of the considered system as well as its variations satisfies the following condition

$$\|\xi(t)\| \leq \delta_1, \quad \|\dot{\xi}(t)\| \leq \delta_2, \quad 0 < \delta_1 < \infty, \quad 0 < \delta_2 < \infty, \quad (5)$$

where $\|\cdot\|$ denotes the standard Euclidean norm.

To represent the nominal system in two subsystems (the one associated with the control signal and the one non associated) the transformation $z = \mathbf{T}\bar{x}$ is applied, where $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is given as:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{N}_\mathbf{B} \ \mathbf{B}]^\top, \quad (6)$$

with $\mathbf{N}_\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$ the null-space of the output matrix \mathbf{B}^\top . Thus, system (4) can be rewritten in the new system representation as:

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A}z(t) + \mathcal{B}u(t) + \tilde{\xi}(z, t), \quad z(0) = \mathbf{T}\bar{x}_0, \quad (7)$$

where $\mathcal{A} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{B} = \mathbf{T}\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ and $\tilde{\xi} = \mathbf{T}\xi(z, t) \in \mathbb{R}^n$. Here, it is assumed that system (7) contains matched and unmatched nonvanishing uncertainties, where their adverse effects may not be mitigated with any control action. To reduce this effects, consider a PID type sliding surface $\Phi(t) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ as:

$$\Phi(t) = \mathbf{K}_1\varphi(t) + \mathbf{K}_2 \int_{t_0}^t \varphi(\tau)d\tau + \mathbf{K}_3\dot{\varphi}(t) \quad (8)$$

where $\varphi \in \mathbb{R}^m$ is the adjoint sliding variable defined as $\varphi = z_2 + \mathbf{R}z_1$ where $z_1 \in \mathbb{R}^{(n-m)}$ and $z_2 \in \mathbb{R}^m$, the m by m diagonal matrices (\mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 , \mathbf{K}_3) and $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ are adjustment matrices. Here, the control problem statement is divided in two stages. The first one consist in obtaining an admissible control signal u such that the adjoint variable σ arrives to

the invariant set $\Upsilon = \{\bar{z}(t) \in \mathbb{R}^n : \|\varphi(t)\| \leq \delta, \forall t \geq T_2\}$, for small as possible $0 < \delta$. The second stage consist in obtaining the gain matrices $(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3, \mathbf{R})$ such that the effects of the non-vanishing uncertainties and disturbances are reduced. This problem is studied using the concept of UUB-Stability.

To achieve the problem statement goal, the following concepts are employed:

Definition 1 (Attractive ellipsoid [14]): The ellipsoid

$$\mathcal{E}\left(0, \bar{\mathbf{P}}^{-1}\right) = \{\bar{x}(t) \in \mathbb{R}^n : \bar{x}(t)^T \bar{\mathbf{P}} \bar{x}(t) \leq 1, \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}^T\}, \quad (9)$$

with center at the origin and the corresponding non-degenerated ellipsoidal matrix $\bar{\mathbf{P}}$, is attractive for some dynamic system if for any trajectory $\{\bar{x}(t)\}_{t \geq 0}$ the following property holds:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \bar{x}^T(t) \bar{\mathbf{P}} \bar{x}(t) \leq 1. \quad (10)$$

Definition 2 (UUB-Stability [38]): The nonlinear dynamical system $\dot{\bar{x}}(t) = f(t, \bar{x}(t))$, $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$, $t \geq t_0$ is Ultimately Uniformly Bounded with bound b if there exists some $a \in (0, c)$ such that:

$$\|\bar{x}(t_0)\| \leq a, \implies \|\bar{x}(t)\| \leq b, \forall t \geq t_0 + T$$

for positive $b, c \in \mathbb{R}$ and $T = T(a, b)$ independent of t_0 .

Proposition 1 (On the attractive set [14]): Let a real valued function $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, satisfying

$$\dot{V}(z(t)) \leq -\alpha V(z(t)) + \beta, \quad z(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (11)$$

for positive scalars α and β , then $V(z(t))$ is an attractive set, furthermore

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} V(z(t)) \leq \frac{\beta}{\alpha}, \text{ is fulfilled.} \quad (12)$$

Thus, the problem associated with the hexarotor system consists of finding sufficient conditions such that the proposed control guarantees UUB-stability of the closed-loop system. Also, the control law must regulate the orientation of the aircraft and guarantee robust trajectory tracking in the $x(t), y(t), z(t)$ space even with disturbances or uncertainties. On the other hand, after a finite time, the control law drives the system trajectories to a minimal size attractive ellipsoid in exponential form.

IV. ROBUST CONTROL DESIGN

Noticed that system (7) can be rewritten as:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= \mathcal{A}_{11}z_1(t) + \mathcal{A}_{12}z_2(t) + \bar{\xi}_1(z, t), \\ z_1(0) &= z_1^0, \\ \dot{z}_2(t) &= \mathcal{A}_{21}z_1(t) + \mathcal{A}_{22}z_2(t) + \bar{\xi}_2(z, t) + \mathcal{B}_2u(t), \\ z_2(0) &= z_2^0, \end{aligned} \quad (13)$$

where $\mathcal{A}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, $\mathcal{A}_{12} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times m}$, $\mathcal{A}_{21} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$, $\mathcal{A}_{22} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, and $\mathcal{B}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Based on the fact, that the pair $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ is controllable, it is evident to verify that the pair $(\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{12})$ is also controllable.

Proposition 2: If the dynamic of the control action associated to system (13) is given by

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= -\mathcal{B}_2^{-1} \mathbf{K}_3^{-1} \{(\mathbf{K}_3 \{\mathbf{Q}_1 \mathcal{A}_{11} + \mathbf{Q}_2 \mathcal{A}_{21}\} + \mathbf{K}_1 \mathbf{Q}_1) z_1(t) \\ &\quad + (\mathbf{K}_3 \{\mathbf{Q}_1 \mathcal{A}_{12} + \mathbf{Q}_2 \mathcal{A}_{22}\} + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_1 \mathbf{Q}_2) z_2(t) \\ &\quad + (\mathbf{K}_3 \mathbf{Q}_2 \mathcal{B}_2 + \mathbf{K}_1 \mathcal{B}_2) u(t) + \boldsymbol{\rho} \text{sign}(\Phi(t))\}, \\ \text{Sign}(\Phi(t)) &= \begin{bmatrix} \text{sign}(\Phi_1(t)) \\ \vdots \\ \text{sign}(\Phi_m(t)) \end{bmatrix}, \quad u(0) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

where $\mathbf{Q}_1 = (\mathcal{A}_{21} + \mathbf{R} \mathcal{A}_{11})$, $\mathbf{Q}_2 = (\mathcal{A}_{22} + \mathbf{R} \mathcal{A}_{12})$, and $\boldsymbol{\rho} = \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_m)$ is a m by m positive definite matrix, then after time $t_r = \frac{\sqrt{2}}{\alpha_1} V^{\frac{1}{2}}(\Phi(t_0)) + t_0$, under storage function $V_1(\Phi(t)) = \sum_{i=1}^m \Phi_i^2(t)$, the hyperplane $\Phi(t) = \bar{0}_m$ is the sliding manifold for the sliding variable surface (8).

Proof. The control action (14) is a class of dynamic sliding mode control and when control is integrated, the chattering effect is reduced. In the following sections this control is referred as robust controller (RC). Consider the storage function $V_1(\Phi(t))$. Its time variations is given by:

$$\dot{V}_1(\Phi(t)) = \Phi^T(t) (\mathbf{K}_1 \dot{\varphi}(t) + \mathbf{K}_2 \varphi(t) + \mathbf{K}_3 \ddot{\varphi}(t)). \quad (15)$$

Since the first and second time derivative of adjoint variable $\varphi(t) \in \mathbb{R}^m$ along the system trajectories (13) are given by

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \mathbf{Q}_1 z_1(t) + \mathbf{Q}_2 z_2(t) + [\mathbf{R}, \mathbf{I}_m] \bar{\xi}(z, t) + \mathcal{B}_2 u(t), \\ \ddot{\varphi}(t) &= \{\mathbf{Q}_1 \mathcal{A}_{11} + \mathbf{Q}_2 \mathcal{A}_{21}\} z_1(t) \\ &\quad + \{\mathbf{Q}_1 \mathcal{A}_{12} + \mathbf{Q}_2 \mathcal{A}_{22}\} z_2(t) + [\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2] \bar{\xi}(z, t) \\ &\quad + \mathbf{Q}_2 \mathcal{B}_2 u(t) + [\mathbf{R}, \mathbf{I}_m] \dot{\bar{\xi}}(z, t) + \mathcal{B}_2 \dot{u}(t). \end{aligned} \quad (16)$$

\mathbf{I}_m defines an identity $m \times m$ matrix. Now, the time derivative of the storage function along the trajectories (13) under control action (14) yields:

$$\dot{V}_1(\Phi(t)) = -\Phi^T(t) \boldsymbol{\rho} \text{Sign}(\Phi(t)) + \Phi^T(t) \chi(z, t) \quad (17)$$

where $\chi(z, t) = \mathbf{M}_4 \bar{\xi}(z, t) + \mathbf{M}_5 \dot{\bar{\xi}}(z, t)$, $\mathbf{M}_4 = \mathbf{K}_3 [\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2] + \mathbf{K}_1 [\mathbf{R}, \mathbf{I}_m]$, and $\mathbf{M}_5 = \mathbf{K}_3 [\mathbf{R}, \mathbf{I}_m]$.

From Assumption 1, we can see that

$$\|\bar{\xi}(z, t)\| \leq \delta_3, \quad \|\dot{\bar{\xi}}(z, t)\| \leq \delta_4, \quad (18)$$

where $\delta_3 = |\lambda_{\max}(T)| \delta_1$, $\delta_4 = |\lambda_{\max}(T)| \delta_2$,

$$\dot{V}_1(\Phi(t)) \leq -\max\{\rho_i\} \sum_{i=1}^n |\Phi_i(t)| + \|\Phi(t)\| \chi(z, t) \quad (19)$$

and defining ρ_i , such that $\rho_i = \alpha_1 + \delta_1$ is guaranteed for some $0 < \alpha_1 \in \mathbb{R}$, the next statement is obtained:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\Phi(t)) &\leq -\alpha_1 \sum_{i=1}^n |\Phi_i(t)| = -\alpha_1 \|\Phi(t)\| \\ &\leq -\alpha_1 \sqrt{2} V_1^{\frac{1}{2}}(\Phi(t)). \end{aligned} \quad (20)$$

In this sense, the solution of the differential equation:

$$\dot{V}_1(\Phi(t)) = -\alpha_1 \sqrt{2} V_1^{\frac{1}{2}}(\Phi(t)), \quad (21)$$

along the time interval $\tau \in [t_0, t]$ is as follows:

$$\int_{t_0}^t V_1^{-\frac{1}{2}}(\Phi(\tau)) dV_1(\Phi(\tau)) = -\alpha_1 \sqrt{2} \int_{t_0}^t d\tau, \quad (22)$$

and finally it yields:

$$V_1^{\frac{1}{2}}(\Phi(t)) = V_1^{\frac{1}{2}}(\Phi(t_0)) - \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}(t - t_0). \quad (23)$$

By using the comparison theorem, the solution of the previous differential inequality is given by:

$$V_1^{\frac{1}{2}}(\Phi(t)) \leq V_1^{\frac{1}{2}}(\Phi(t_0)) - \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}(t - t_0). \quad (24)$$

Note that the storage function (where it's time variation is depicted in (15)) is a positive definite function. This means that eventually as time t is increasing, the time t_r is obtained from the solution of next equation

$$0 = V_1^{\frac{1}{2}}(\Phi(t_0)) - \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}(t - t_0) \quad (25)$$

and the storage function arrives to the origin in time less or equal to t_r . Furthermore, it remains on it for all future time $t \geq t_r$. This means that the convergence of the sliding variable to the origin is guaranteed at the same time. \square

Noticed that, after time t_r , the sliding variable $\Phi(t) = \bar{0}_m$ is satisfied, in this way it is evident that

$$\bar{0}_m = \mathbf{K}_1 \varphi(t) + \mathbf{K}_2 \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau + \mathbf{K}_3 \dot{\varphi}(t), \quad (26)$$

or equivalently:

$$\bar{0}_m = \mathbf{K}_1 \dot{\varphi}(t) + \mathbf{K}_2 \varphi(t) + \mathbf{K}_3 \ddot{\varphi}(t) \quad (27)$$

This means that:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= -\mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{K}_1 \dot{\varphi}(t) - \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{K}_3 \ddot{\varphi}(t) \\ \varphi(t) &= -\mathbf{K}_2^{-1} \left\{ \mathbf{K}_1 ([\mathbf{R}, \mathbf{I}_m] \bar{\xi}) - \mathbf{K}_3 [\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2] \bar{\xi}(z, t) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{K}_3 [\mathbf{R}, \mathbf{I}_m] \dot{\bar{\xi}}(z, t) - \boldsymbol{\rho} \text{Sign}(\Phi(t)) \right\} \end{aligned}$$

In this sense, for a bounded gain matrix $\lambda_{\max}(\mathbf{R}\mathbf{R}^T) \leq \delta_5 < \infty$ the following statement is satisfied:

$$\begin{aligned} \|\varphi(t)\| &\leq \delta_6, \quad \delta_6 = \lambda_{\max}(\mathbf{K}_2^{-1}) \{ \lambda_{\max}(\mathbf{K}_1) M_1 \delta_3 + M_2 \}, \\ M_1 &= \sqrt{\lambda_{\max}([\mathbf{R} \mathbf{I}_m]^T [\mathbf{R} \mathbf{I}_m])}, \\ M_2 &= (M_1 \delta_3 + M_3 \delta_4) \lambda_{\max}(\mathbf{K}_3) + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\rho}), \\ M_3 &= \sqrt{\lambda_{\max}([\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2]^T [\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2])}. \end{aligned} \quad (28)$$

From the definition of the adjoint variable $\varphi(t) = z_2(t) + \mathbf{R} z_1(t)$ and Proposition 2, it can be shown that $z_2(t) = \varphi(t) -$

$\mathbf{R} z_1(t)$ is satisfied. In this sense, from (13) the following statement is fulfilled:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= (\mathcal{A}_{11} - \mathcal{A}_{12} \mathbf{R}) z_1(t) + \zeta(t), \\ \zeta(t) &= \mathcal{A}_{12} \varphi(t) + \bar{\xi}_1(z, t), \quad z_1(0) = z_1^0. \end{aligned} \quad (29)$$

where $\|\zeta(t)\| \leq \delta_6 \sqrt{\lambda_{\max}(\mathcal{A}_{12}^T \mathcal{A}_{12})} + \delta_3$. To guarantee the UUB-stability of the subsystem (29), the following proposition is provided.

Proposition 3: Under assumption of Proposition 2. Consider the storage function $V_2(z_1(t)) = z_1^T(t) \mathbf{P} z_1(t)$, with a positive definite matrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$. If there exists a set of solutions $(\alpha_2, \beta, \mathbf{P}, \mathbf{R})$, where $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ is an adjustment matrix, α_2 and ε are positive scalars, such that the following matrix inequality is fulfilled:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_5 + \alpha_2 \mathbf{P} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & -\varepsilon \mathbf{I}_r \end{bmatrix} < 0, \quad (30)$$

where \mathbf{I}_r defines the $(n-m) \times (n-m)$ identity matrix, and $\mathbf{A}_5 = \mathbf{P}(\mathcal{A}_{11} - \mathbf{R} \mathcal{A}_{12}) + (\mathcal{A}_{11}^T - \mathcal{A}_{12}^T \mathbf{R}^T) \mathbf{P}$, then the storage function $V_2(z_1(t))$ satisfies:

$$V_2(z_1(t)) \leq \frac{\beta}{\alpha_2} + \left\{ V_2(z_1(t_r)) - \frac{\beta}{\alpha_1} \right\} \exp(-\alpha_2(t - t_r)) \quad (31)$$

where $\beta = \varepsilon(\delta + \delta_3)$, the UUB-Stability is concluded with:

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{\frac{\beta}{\alpha_2} \lambda_{\max}(\mathbf{P}^{-1})}, \\ T_2 &= \frac{1}{\alpha_2} \ln \left\{ \frac{\alpha_2 V(z_1^0) - \beta}{\beta \gamma} \right\} + \frac{\sqrt{2}}{\text{trace}(\boldsymbol{\rho}_0)} V_1^{\frac{1}{2}}(z_1^0) + t_0, \end{aligned} \quad (32)$$

for small-enough constant $\zeta(t) \in \mathbb{R}^+$.

Proof. Calculating the time derivative of the storage function $V_2(z_1(t))$ along the trajectories (29) yields:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(z_1(t)) &= [z_1(t) \ \zeta(t)] \mathbf{W} [z_1(t) \ \zeta(t)]^T \\ &\quad - \alpha_2 V_2(z_1(t)) + \varepsilon \|\zeta(t)\|^2. \end{aligned} \quad (33)$$

From the properties given in (28), and under the assumption that $\mathbf{W} < 0$, the following inequality is fulfilled:

$$\dot{V}_2(z_1(t)) \leq -\alpha_2 V_2(z_1(t)) + \beta \quad (34)$$

thus, by the comparison principle, see for instance [38], [39], the solution of the differential equation

$$\dot{V}_2(z_1(t)) + \alpha_2 V_2(z_1(t)) = \beta \quad (35)$$

in the time interval $\tau \in [0, t]$ is given by the upper bound of (31). In fact, differential inequality (34) implies that Proposition 1 is satisfied, implying that (12) is fulfilled. This means that the storage function $V(z_1(t))$ is an attractive invariant set. Finally, it is clear that error function exponentially arrives into an invariant set $\Upsilon_1 = \{z_1(t) \in \mathbb{R}^n : \|z_1(t)\| \leq b, \forall t \geq T_2\}$. In other words, the error function arrives into an attractive ellipsoid with ellipsoid

matrix $\bar{\mathbf{P}} = \frac{\alpha}{\varepsilon} \mathbf{P}^{-1}$. From the previous inequality, it is clear that $\lim_{t \rightarrow \infty} V_2(z_1(t)) \leq \frac{\beta}{\alpha_2}$, and equation (32) is obtained. \square

Remark 1: Previous result (Proof of 3), say that the ultimate bound must be reduced by increasing the parameter α_2 and decreasing ε . However, note that its ultimate bound depends of δ_6 and this one can be considerably reduced or increased from the sliding manifold tuning. In order to reduce the parameter β , select the eigenvalues of matrix \mathbf{K}_2 as largest as possible, and the eigenvalues of the matrices \mathbf{K}_1 and \mathbf{K}_3 small enough. Note that for larger magnitudes of $\lambda_i(\mathbf{K}_2^{-1})$, ($i = 1, \dots, m$), the parameter β approaches to δ_3 .

Notice that in the frequency domain, the sliding surface (8) can be seen as a second order filter where the input is φ and the output is Φ with its corresponding transfer function defied as:

$$\varphi(s) = s \left(s^2 \mathbf{K}_3 + s \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 \right)^{-1} \Phi(s) \quad (36)$$

whose characteristic polynomial $P(s)$ is given as:

$$P(s) = \prod_{i=1}^m \left(s^2 \mathbf{K}_{3,i} + s \mathbf{K}_{1,i} + \mathbf{K}_{2,i} \right). \quad (37)$$

Here, the i -th characteristic polynomial is associated with the i -th actuator, which should be adjusted via bode filter design, a rlocus approach or a pole allocation procedure.

Remark 2: Proposition 3 indicates that for a large α_2 and small-enough β , system trajectories arrives into an attractive ellipsoid $\mathcal{E}(0, \bar{\mathbf{P}})$. In this way, the following optimization problem

$$\min_{\mathbf{P}^{-1}} \left(\frac{\beta}{\alpha_2} \lambda_{\max}(\mathbf{P}^{-1}) \right) \text{ s. t. } \begin{cases} 0 < \alpha_2, 0 < \varepsilon \\ 0 < \mathbf{P}, \mathbf{W} < 0 \end{cases}, \quad (38)$$

is associated to obtain the minimal size of this ellipsoid, where $\bar{\mathbf{P}} = \frac{\alpha_2}{\beta} \mathbf{P}$ is the associated ellipsoidal matrix. Thus, the maximal value of \mathbf{P} under maximal value of α_2 and ε in which \mathbf{W} is a negative definite matrix, means that the system trajectories are enclosed into a minimal size attractive-invariant set.

V. NUMERICAL RESULTS

A. AIRCRAFT DYNAMICS IN SUBSYSTEM REPRESENTATION

The hexarotor vehicle depicted in Figure 1 was used to illustrate the performance of the linear, nonlinear, robust and non conventional control approaches. For control purposes, certain considerations are made for the dynamics described in (2). It is assumed that the Euler angles $\phi(t)$, $\theta(t)$ and $\psi(t)$ can be considered as small values and the angular velocities on the inertial frame are equal to the velocities in the body frame. Similarly, the Coriolis terms are neglected in equation (2) and it is assumed that the attitude dynamics ($\dot{\phi}(t)$, $\ddot{\theta}(t)$ and $\ddot{\psi}(t)$) have their own control signal ($\tau_\phi(t)$, $\tau_\theta(t)$ and

$\tau_\psi(t)$), such that:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{\psi}(t) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{I_{zBzB}}{a_1} \tau_\phi(t) \\ \frac{I_{zBzB}}{a_1} \tau_\theta(t) \\ \frac{I_{zBzB}}{a_1} \tau_\psi(t) \end{bmatrix}. \quad (39)$$

We defined the state vector as $\bar{x}(t) = [\bar{x}_1(t) \bar{x}_2(t) \bar{x}_3(t) \bar{x}_4(t) \bar{x}_5(t) \bar{x}_6(t) \bar{x}_7(t) \bar{x}_8(t) \bar{x}_9(t) \bar{x}_{10}(t) \bar{x}_{11}(t) \bar{x}_{12}(t)]^\top$, where $\bar{x}(t)$ is the connected manifold in \mathbb{R}^{12} . After these considerations, the dynamical model can be represented in the form $\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}) + g(\bar{x})u(t) + \zeta(t, x)$, where $\zeta(t, x)$ is the unmodeled dynamics, as:

$$f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_x(t) \\ 0 \\ \xi_y(t) \\ 0 \\ -g + \xi_z(t) \\ 0 \\ \xi_\phi(t) \\ 0 \\ \xi_\theta(t) \\ 0 \\ \xi_\psi(t) \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} u_z(t) \\ \tau_\phi(t) \\ \tau_\theta(t) \\ \tau_\psi(t) \end{bmatrix},$$

$$\text{and } g(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} (c\bar{x}_7(t) s\bar{x}_9(t)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_{zz}}{a_1} \tau_\phi(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{yy}} \tau_\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_{zz}}{a_1} \tau_\psi(t) \end{bmatrix}. \quad (40)$$

where $a_6 = \frac{1}{m} (c\bar{x}_7(t) s\bar{x}_9(t) c\bar{x}_{11}(t) + s\bar{x}_7(t) s\bar{x}_{11}(t))$ and $a_7 = \frac{1}{m} (c\bar{x}_7(t) s\bar{x}_9(t) s\bar{x}_{11}(t) - s\bar{x}_7(t) c\bar{x}_{11}(t))$. $\bar{x}_1(t)$, $\bar{x}_2(t)$ and $\bar{x}_3(t)$ define the translational positions ($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$), $\bar{x}_4(t)$, $\bar{x}_5(t)$ and $\bar{x}_6(t)$ represents the rotational angles ($\phi(t)$, $\theta(t)$, $\psi(t)$) and $\bar{x}_7(t)$ to $\bar{x}_{12}(t)$ are their velocities, respectively. Now, consider the following feedback linearization control law:

$$u_z(t) = \frac{m}{\cos \bar{x}_7(t) \cos \bar{x}_9(t)} (g + \bar{u}_z(t)). \quad (41)$$

Then, substituting equation (41) in equation (40), the translational equations result as:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_2(t) &= \left(\tan \bar{x}_9(t) \cos \bar{x}_{11}(t) + \tan \bar{x}_7(t) \frac{\sin \bar{x}_{11}(t)}{\cos \bar{x}_9(t)} \right) \\ &\quad (g + \bar{u}_z(t)) + \xi_x(t), \\ \dot{\bar{x}}_4(t) &= \left(\tan \bar{x}_9(t) \sin \bar{x}_{11}(t) - \tan \bar{x}_7(t) \frac{\cos \bar{x}_{11}(t)}{\cos \bar{x}_9(t)} \right) \\ &\quad (g + \bar{u}_z(t)) + \xi_y(t), \\ \dot{x}_6(t) &= \bar{u}_z(t) + \xi_z(t).\end{aligned}\quad (42)$$

Considering (42) and system (40), we defined the following subsystems represented as system (4):

- **Altitude subsystem:** The first subsystem corresponds to the $z(t)$ position:

$$\dot{z}(t) = A_z z(t) + \mathbf{B}_z \bar{u}_z(t) + \xi_z(t). \quad (43)$$

- **Directional Subsystem :** The second subsystem is related to the yaw angle:

$$\dot{\psi}(t) = A_\psi \psi(t) + \mathbf{B}_\psi \tau_\psi(t) + \xi_\psi(t). \quad (44)$$

- **Longitudinal subsystem :** The third subsystem corresponds to the pitch angle and the x position:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_2(t) &= \left(\tan \bar{x}_9(t) \cos \bar{x}_{11}(t) + \tan \bar{x}_7(t) \frac{\sin \bar{x}_{11}(t)}{\cos \bar{x}_9(t)} \right) \\ &\quad (g + \bar{u}_z(t)) + \xi_x(t), \\ \dot{\theta}(t) &= A_\theta \theta(t) + \mathbf{B}_\theta \tau_\theta(t) + \xi_\theta(t).\end{aligned}\quad (45)$$

- **Lateral subsystem:** The fourth subsystem is the dynamic of the y position and the roll angle:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_4(t) &= \left(\tan \bar{x}_9(t) \sin \bar{x}_{11}(t) - \tan \bar{x}_7(t) \frac{\cos \bar{x}_{11}(t)}{\cos \bar{x}_9(t)} \right) \\ &\quad (g + \bar{u}_z(t)) + \xi_y(t), \\ \dot{\phi}(t) &= A_\phi \phi(t) + \mathbf{B}_\phi \tau_\phi(t) + \xi_\phi(t).\end{aligned}\quad (46)$$

In this way, consider the following vectors and matrices:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_5(t) \\ \dot{\bar{x}}_6(t) \end{bmatrix}, \dot{\psi}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{11}(t) \\ \dot{\bar{x}}_{12}(t) \end{bmatrix}, \dot{\theta}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_9(t) \\ \dot{\bar{x}}_{10}(t) \end{bmatrix}, \\ \dot{\phi}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_7(t) \\ \dot{\bar{x}}_8(t) \end{bmatrix}, \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_j &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I_{zz}}{a_1} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_{yy}} \end{bmatrix}, \xi_i(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_i(t) \end{bmatrix}, \phi(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_7(t) \\ \bar{x}_8(t) \end{bmatrix}, \\ z(t) &= \begin{bmatrix} \bar{x}_5(t) \\ \bar{x}_6(t) \end{bmatrix}, \psi(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11}(t) \\ \bar{x}_{12}(t) \end{bmatrix}, \theta(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_9(t) \\ \bar{x}_{10}(t) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

with $i = z(t), \phi(t), \theta(t), \psi(t)$ and $j = \phi(t), \psi(t)$.

Remark 3: In order to control the translational movements in $x(t)$ and $y(t)$, we defined virtual controllers in the numerical results presented below. These controllers have the structure of a proportional-derivative control and they are designed as $\ddot{e}_x(t) = -k_1 e_x(t) - k_2 \dot{e}_x(t)$ and $\ddot{e}_y(t) = -k_3 e_y(t) - k_4 \dot{e}_y(t)$,

TABLE 1. System parameters description.

Description	Notation	Value	Units
UAV mass	m	3.091	kg
Inertia in $x_B(t)$ -axis	$I_{x_B x_B}$	0.5059	kgm^2
Inertia in $x_B(t) - y_B(t)$ -axis	$I_{x_B y_B}$ or $I_{y_B x_B}$	0	kgm^2
Inertia in $x_B(t) - z_B(t)$ -axis	$I_{z_B x_B}$ or $I_{x_B z_B}$	-0.0910	kgm^2
Inertia in $y_B(t)$ -axis	$I_{y_B y_B}$	0.4119	kgm^2
Inertia in $y_B(t) - z_B(t)$ -axis	$I_{z_B y_B}$ or $I_{y_B z_B}$	0	kgm^2
Inertia in $z_B(t)$ -axis	$I_{z_B z_B}$	0.7822	kgm^2
Gravity constant	g	9.81	$\frac{m}{s^2}$

respectively, where k_1, k_2, k_3, k_4 are positive constant gains and $e_x(t) = \bar{x}_1(t) - x_{ref}$, $e_y(t) = \bar{x}_3(t) - y_{ref}$ are the corresponding tracking errors of $x(t)$ and $y(t)$. Notice that, from equation (45), $x(t)$ can be controlled by manipulating θ , then, defining $e_\theta = \bar{x}_9 - \theta_{ref}$ and, through mathematical manipulations, the form of the reference value for theta is given by:

$$\begin{aligned}\theta_{ref} &= \arctan \left\{ \left(\frac{-k_1 e_x(t) - k_2 \dot{e}_x(t) + \ddot{e}_{ref}}{g + \bar{u}_z(t)} - a_8 \right) \frac{1}{\cos \bar{x}_{11}(t)} \right\}, \\ \text{with } a_8 &= \tan \bar{x}_7(t) \frac{\sin \bar{x}_{11}(t)}{\cos \bar{x}_9(t)}.\end{aligned}\quad (47)$$

Similarly, from equation (46), $y(t)$ can be controlled by $\phi(t)$. Defining $e_\phi(t) = \bar{x}_7(t) - \phi_{ref}$, the structure of the reference value for $\phi(t)$ is given by:

$$\begin{aligned}\phi_{ref} &= \arctan \left\{ \left(\frac{k_3 e_y(t) + k_4 \dot{e}_y(t) - \ddot{e}_{ref} + a_9}{g + \bar{u}_z(t)} \right) \frac{\cos \bar{x}_9(t)}{\cos \bar{x}_{11}(t)} \right\}, \\ \text{with } a_9 &= \tan \bar{x}_9(t) \sin \bar{x}_{11}(t).\end{aligned}\quad (48)$$

B. NUMERICAL RESULTS

In order to demonstrate the effectiveness of the robust controller (RC) described in Section IV, we conducted trajectory tracking simulations by using MatLab-2020Ra and multiple Simulink toolboxes, as well as the Bogacki-Shampine method with a sample time of $h_t = 0.001$ seconds.

The mission profile for every simulation scenario was defined by considering the UAV dynamics given in equation (2) and the considerations presented in Section V-A. The system parameters used in the simulations are given in Table 1. These values were obtained through the inertia and angular moment concepts, as well as the characteristics of the aircraft (lengths and mass). For all instances studied, the simulation time was set as $t \in [0, 100]$ seconds. In order to track a given trajectory for the translational dynamics ($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$) and to keep the rotational dynamics ($\phi(t)$, $\theta(t)$, $\psi(t)$) around the origin, the desired trajectories are given in a three dimensional space ($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$) by using the parametric equations shown in Table 2.

The designed trajectory consists of a smooth transition in speed changes during the mission. The ω term represents the frequency of the trigonometric functions used to generate the desired trajectories. The initial conditions were defined as

TABLE 2. Characteristics of the desired trajectory. $b_1 = 3.5$, $b_2 = 0.5$, $c_1 = 2$ and $\omega = 5\text{Hz}$. $c_2 = 2b_2 - 2b_2 \cos(t/\omega)$, $c_3 = (b_1 + b_2)/(1 + \exp^{-0.9(t-5)})$, $c_4 = c_1 - c_1 \cos(t/\omega)$.

Time t (s)	x_{ref}	y_{ref}	z_{ref}
$[0, \omega\pi]$	$b_1 + b_2$	c_1	c_3
$[\omega\pi, 2\omega\pi)$	$b_1 + b_2$	$-c_1 \cos(t/\omega)$	$b_1 + 0.3$
$[2\omega\pi, 3\omega\pi)$	$b_2 + b_1 \cos(t/\omega)$	$-a_1$	$b_1 + 0.3$
$[3\omega\pi, 4\omega\pi)$	$-b_1 + b_2$	$c_1 \cos(t/\omega)$	$b_1 + 0.3$
$[4\omega\pi, 5\omega\pi)$	$b_2 - b_1 \cos(t/\omega)$	c_1	$b_1 + 0.3$
$[5\omega\pi, 100)$	$c_1 - c_1 \cos(t/\omega)$	c_2	c_4

$\bar{x}_0 = [4, 2, 0.02, 0.05, 0.03, 0.05, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$. We used the following disturbances for the translational and rotational dynamics of the underactuated system:

$$\Delta(t) = [0 \ 0.1 \ c(0.1t) \ 0 \ 0.1 \ c(0.1t) \ 0 \ 0.1 \ c(3.3t) \ 0 \\ 0.05 \ c(12.54 * t) \ 0 \ 0.05 \ c(12.54t) \ 0 \ 0.1 \ c(0.1t)]^T, \quad (49)$$

where $c(*)$ stands for $\cos(*)$. Similarly, we used the following disturbances in the control signals: for $\bar{u}_z(t)$ a sawtooth function with an amplitude of 1.2 and a frequency of 1.5 Hz, for $\tau_\psi(t)$, $\tau_\theta(t)$ and $\tau_\phi(t)$ a random function with an amplitude of 1.2 and a frequency of 2 Hz. For the robust control, the matrix that transforms the dynamics in the form given in (4) to the representation given in (7) is given as:

$$\mathbf{T}_h = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ for } z \text{ subsystem } \mathbf{T}_z = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (50)$$

where $h = \phi(t), \theta(t), \psi(t)$.

In general, the sliding surface (8) for each subsystem $i = \{z(t), \phi(t), \theta(t), \psi(t)\}$ is obtained as follows:

$$\Phi_i(t) = \mathbf{K}_{1i}\varphi_i(t) + \mathbf{K}_{2i} \int_{t_0}^t \varphi_i(\tau) d\tau + \mathbf{K}_{3i}\dot{\varphi}_i(t), \quad (51)$$

with $\mathbf{K}_{1z} = 0.03118$, $\mathbf{K}_{2z} = 0.02348$, $\mathbf{K}_{3z} = 0.0188$, $\mathbf{K}_{1\phi} = 6.236$, $\mathbf{K}_{2\phi} = 2.348$, $\mathbf{K}_{3\phi} = 0.0376$, $\mathbf{K}_{1\theta} = 1.559$, $\mathbf{K}_{2\theta} = 0.2348$, $\mathbf{K}_{3\theta} = 0.0376$, $\mathbf{K}_{1\psi} = 0.3118$, $\mathbf{K}_{2\psi} = 0.2348$, $\mathbf{K}_{3\psi} = 0.188$. These gains were obtained heuristically by conducting several simulations.

Using the MatLab Yalmip-CVX toolbox, the above numerical procedure gives the following set of numerical solutions

$$\alpha_1 = 0.35, \varepsilon = 2.9 \times 10^{-5}, \\ \mathbf{X} = 1.319 \times 10^4, \mathbf{Y} = -2.209 \times 10^4, \mathbf{R} = -1.674, \\ \text{for } \phi(t), \theta(t) \text{ and } \psi(t). \\ \mathbf{X}_z = 1.319 \times 10^4, \mathbf{Y}_z = -2.209 \times 10^6, \mathbf{R}_z = -167.487, \\ \text{for } z(t). \quad (52)$$

The robust control action associated with the UAV dynamics is given as:

$$\dot{u}(t) = -\mathcal{B}_{i2}^{-1}\mathbf{K}_{3i}^{-1}\{(\mathbf{K}_{3i}\{\mathbf{Q}_{i1}\mathcal{A}_{i11} + \mathbf{Q}_{i2}\mathcal{A}_{i21}\} + \mathbf{K}_{1i}\mathbf{Q}_{i1})z_{i1}(t) \\ + (\mathbf{K}_{3i}\{\mathbf{Q}_{i1}\mathcal{A}_{i12} + \mathbf{Q}_{i2}\mathcal{A}_{i22}\} + \mathbf{K}_{2i} + \mathbf{K}_{1i}\mathbf{Q}_{i2})z_{i2}(t) \\ + (\mathbf{K}_{3i}\mathbf{Q}_{i2}\mathcal{B}_{i2} + \mathbf{K}_{i1}\mathcal{B}_{i2})u(t) + \boldsymbol{\rho}_i \text{Sign}(\Phi_i(t))\}. \quad (53)$$

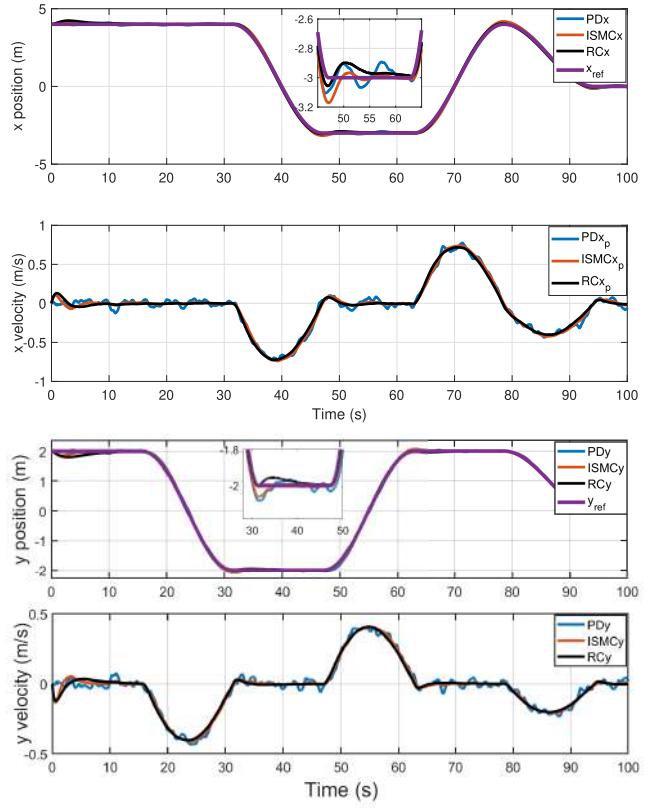


FIGURE 2. Positions and velocities of the $x(t)$ and $y(t)$ dynamics obtained from the implementation of the PD, ISMC and Robust controllers.

For the conducted tests we used:

$$\mathcal{A}_z = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{A}_h = \begin{bmatrix} 0 & -0.01 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{B}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \times 10^4 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_{z2} = 1.6749, \mathbf{Q}_{h2} = 1.6748, \\ \boldsymbol{\rho}_z = 7.95455, \boldsymbol{\rho}_h = 0.0795.$$

The values for \mathbf{K}_{1i} , \mathbf{K}_{2i} and \mathbf{K}_{3i} have already been defined previously. For considered $\gamma = 0.0001$, the ultimate bound is obtained as $b = 0.0010$. Thus, the system's trajectories arrive to its ultimate bound in time $T = 2.046$ seconds.

In order to compare the designed robust control, traditional PD control and integral sliding mode control (ISMC) were tested. The simulation parameters for the last two are described below. Figures 2 to 4, shown the simulation results associated to system under representation (7). The blue, orange, and black lines show the system response for the controllers PD, ISMC and RC, respectively. The figures are divided into subfigures, the upper ones correspond to the positions and the lower ones are related to the speeds.

The design of PD [40] controller is

$$u(t) = k_p \bar{x}(t) + k_d \dot{\bar{x}}(t), \quad (54)$$

where k_p and k_d are control gains. The control inputs for the tests performed are $u_{\bar{u}_z} = k_p z_e + k_d z_{\dot{e}_z}$, $u_\phi = k_p \theta_e + k_d \theta_{\dot{e}_\phi}$, $u_\theta = k_p \theta_e + k_d \theta_{\dot{e}_\theta}$ and $u_\psi = k_p \psi_e + k_d \psi_{\dot{e}_\psi}$. The tuning of

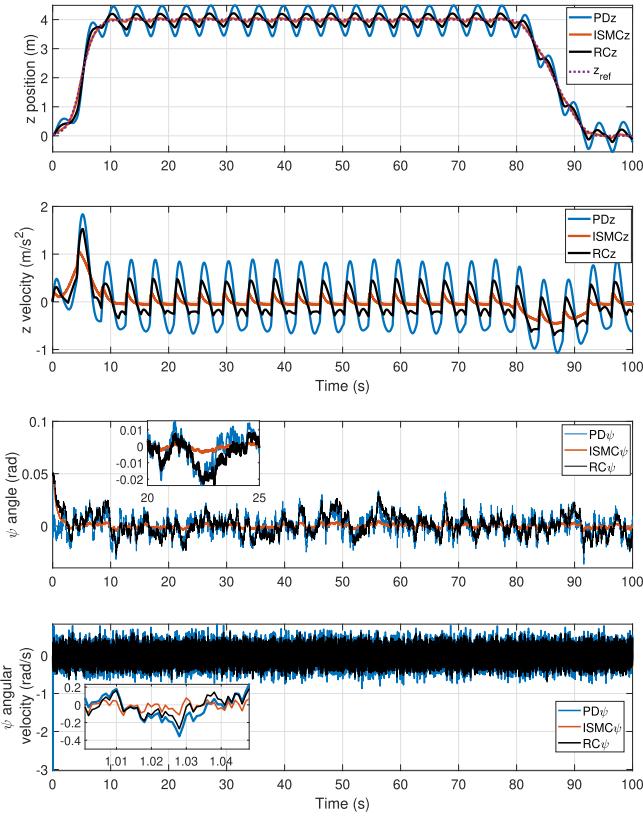


FIGURE 3. $z(t)$ position, $\psi(t)$ angular position and velocities with PD, ISMC, and Robust controller.

the gains was done using the simulink PID toolbox, however, through a fine tuning with $k_{pz} = 2$, $k_{dz} = 1$, $k_{p\phi} = 2.5$, $k_{d\phi} = 1$, $k_{p\theta} = 2.5$, $k_{d\theta} = 1$, $k_{p\psi} = 2.5$, and $k_{d\psi} = 1$ were the chosen values.

On the other hand, an integral sliding mode control was designed as it is present in [15]. To this end, system 4 was considered. The sliding surface is defined by

$$\sigma(\bar{x}(t)) = G(\bar{x}(t) - \bar{x}(0)) - G \int_0^t (A\bar{x}(\tau) + Bu_0(\tau)) d\tau, \quad (55)$$

with $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ and $\det(GB) \neq 0$ is satisfied. The integral sliding mode control is given by

$$u(t) = u_0(t) + u_1(t), \quad u(t) \in U(t) \in \mathbb{R}^m, \quad (56)$$

where $u_0(t)$ is a nominal controller and $u_1(t)$ is designed to compensate unmatched disturbances. The design of $u_0(t)$ is just used to stabilize the nominal system and was the PD controller previously mentioned. The auxiliary control on ISMC is considered as

$$u_1(t) = -(GB)^T \rho(t, \bar{x}) \text{ sign}(\sigma(\bar{x}(t))) \quad (57)$$

where $\rho(t, x) \geq \| \xi^+(t, x) \|$ and $\xi^+(t, x)$ is upper bound for ξ . The values used for each subsystem in the simulations are $G_z = [0.15 \ 0.15]$, $G_\phi = [0.11 \ 0.11]$, $G_\theta = [0.11 \ 0.11]$,

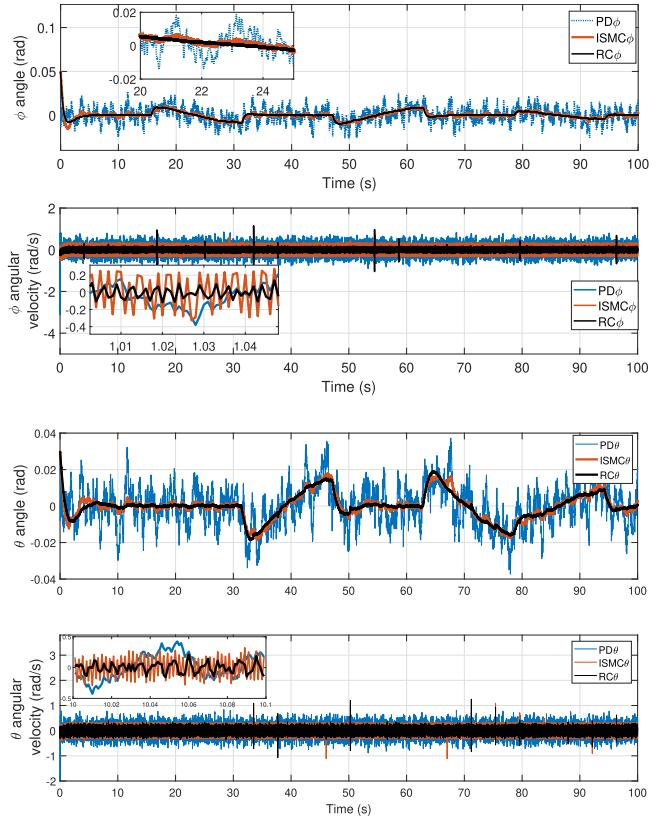


FIGURE 4. Attitude ($\phi(t)$, $\theta(t)$) and angular velocities with PD, ISMC, and Robust controller.

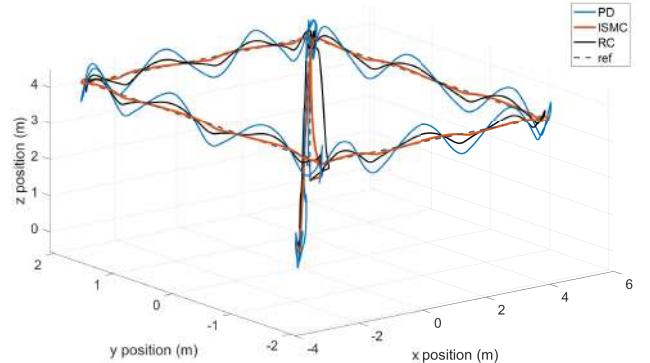


FIGURE 5. 3-Dimensional Figure shows vehicle trajectories with PD, ISMC, robust controller, and reference of $x(t)$, $y(t)$ and $z(t)$ dynamics.

$$G_\psi = [0.11 \ 0.11] \quad \rho_z = 100, \rho_\phi = 100, \rho_\theta = 100 \text{ and } \rho_\psi = 100.$$

The translational performance of the UAV, in the $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ space is shown in Figure 5. In addition, Figure 6 presents the control signal for the strategies during trajectory tracking.

The ISMC has a good performance compared to the other two controllers while the system is subjected to disturbances. But one disadvantage is the high energy consumption of this one. Also, the conclusion of which control strategy has the highest performance is presented in an analysis based on the error response. The analysis results are presented in Table 3 in terms of the translational dynamics. The absolute error

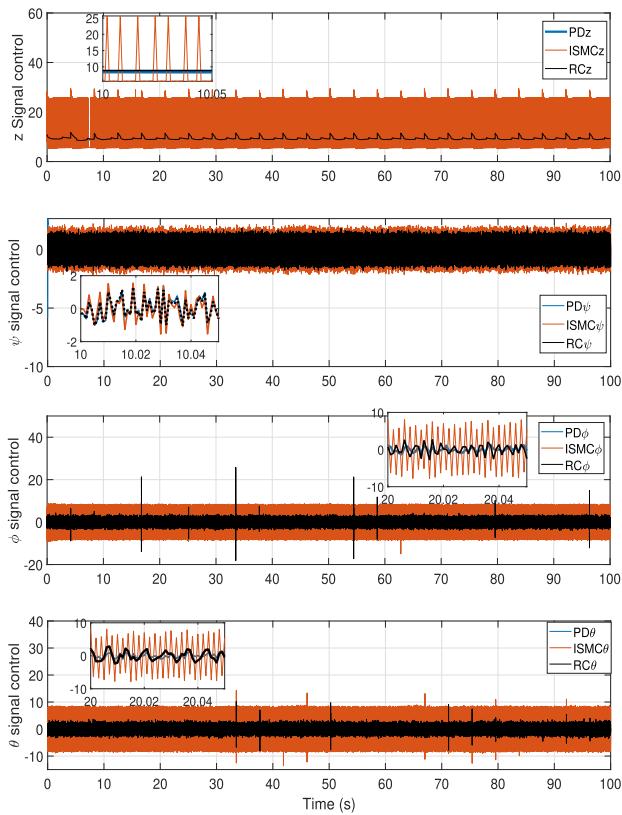


FIGURE 6. Signal controls of $z(t)$, $\psi(t)$, $\phi(t)$ and $\theta(t)$ dynamics.

TABLE 3. Errors comparative in the trajectory tracking of the UAV.

Controller	IAE	ITAE	ISE	ITSE
PD	64.6069	3248.7833	43.1353	2170.9200
RC	29.8830	1442.2882	9.8079	450.7579
ISMC	11.2153	571.4193	1.5070	77.0232

(for IAE and ITAE) illustrates which control algorithm has a better performance compared to each other. The control strategy that shows the best performance is the ISMC with respect to the RC and PD controller, as well as, the robust control shows values similar to the ISM controller. Also, the analysis exhibit the energy consumption of each controller and demonstrate the higher consumption energy is for the ISMC to reject disturbances.

The analysis of the energy consumption is defined by:

$$E_T = \int_0^t u(\tau)^T u(\tau) d\tau. \quad (58)$$

The results demonstrate that the energy consumed during the flight mission for the designed robust controller was $E_{RC} = 9041.6110 \text{ N}^2 \text{m}^2 \text{s}$, while for the proportional derivative controller was $E_{PD} = 8905.4839 \text{ N}^2 \text{m}^2 \text{s}$, and for the integral sliding mode control was $E_{ISMC} = 28262.3408 \text{ N}^2 \text{m}^2 \text{s}$. The PD control presents the best performance in terms of energy consumption, due to its structure. However, the value of the energy consumed by the robust controller is not too far from the obtained with the PD controller.

VI. CONCLUSION

In this paper, a robust control which reduces the uncertain and disturbance effects of a six-rotor aircraft was designed. By solving a specific linear matrix inequality related with a sliding mode control, the Attractive Ellipsoid Method helped to conclude the Ultimate Uniformly Bounded Stability around the trivial solution of the system. Furthermore, the tests with the six-rotor underactuated system exposed the effectiveness of the robust control algorithm designed here. The control showed that by increasing the perturbation magnitude, the control also augments and guarantees the same behavior in the translational dynamics. Despite, from the comparative study in terms of the IAE, ITAE, ISE and ITSE criteria, the ISMC demonstrated to have a better performance with respect to the obtained with the PD and RC controllers, it was the robust controller which exhibited a better performance in terms of energy consumption.

A. ABBREVIATIONS AND ACRONYMS

The following abbreviations are used in this manuscript:

UAV	unmanned Aerial Vehicle.
SMC	Sliding Mode Control.
AEM	Attractive ellipsoid Method.
RC	Robust Control.
UUB	Ultimately Uniformly Bounded.
PD	Proportional Derivative (control).
ISMC	Integral Sliding Mode Control.
ITAE	Integral Time Absolute Error.
ISE	Integral Square Error.
ITSE	Integral Time Square Error.
PID	Proportional Integral Derivative.

REFERENCES

- [1] D. Chen and Y. Zhang, "Robust zeroing neural-dynamics and its time-varying disturbances suppression model applied to mobile robot manipulators," *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.*, vol. 29, no. 9, pp. 4385–4397, Sep. 2018.
- [2] Y.-S. Ha and S. Yuta, "Trajectory tracking control for navigation of the inverse pendulum type self-contained mobile robot," *Robot. Auto. Syst.*, vol. 17, nos. 1–2, pp. 65–80, Apr. 1996.
- [3] S. Jeong and T. Hayashi, "Development of a wheeled inverted pendulum mobile platform with a four-bar parallel mechanism," *Adv. Robot.*, vol. 32, no. 4, pp. 191–201, Feb. 2018.
- [4] C. He, K. Huang, X. Chen, Y. Zhang, and H. Zhao, "Transportation control of cooperative double-wheel inverted pendulum robots adopting udwadiac control approach," *Nonlinear Dyn.*, vol. 91, no. 4, pp. 2789–2802, Mar. 2018.
- [5] T. Takei, R. Imamura, and S. Yuta, "Baggage transportation and navigation by a wheeled inverted pendulum mobile robot," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 56, no. 10, pp. 3985–3994, Oct. 2009.
- [6] I. Fantoni and R. Lozano, *Non-Linear Control for Underactuated Mechanical Systems*. Cham, Switzerland: Springer, 2002.
- [7] T. Johnson, S. Zhou, W. Cheah, W. Mansell, R. Young, and S. Watson, "Implementation of a perceptual controller for an inverted pendulum robot," *J. Intell. Robotic Syst.*, vol. 99, nos. 3–4, pp. 683–692, Sep. 2020.
- [8] R. Mondal, A. Chakraborty, J. Dey, and S. Halder, "Optimal fractional order $\text{PI}^\alpha \text{D}^\mu$ controller for stabilization of cart-inverted pendulum system: Experimental results," *Asian J. Control*, vol. 22, no. 3, pp. 1345–1359, 2020.
- [9] A. K. Bhatia, J. Jiang, Z. Zhen, N. Ahmed, and A. Rohra, "Projection modification based robust adaptive backstepping control for multipurpose quadcopter UAV," *IEEE Access*, vol. 7, pp. 154121–154130, 2019.

- [10] L. R. García, A. Dzul, R. E. Lozano, and C. Pégard, *Quad Rotorcraft Control Vision-Based Hovering and Navigation* London, U.K.: Springer, 2013.
- [11] Z. Cai, S. Zhang, and X. Jing, “Model predictive controller for quadcopter trajectory tracking based on feedback linearization,” *IEEE Access*, vol. 9, pp. 162909–162918, 2021.
- [12] M. S. Esmail, M. H. Merzban, A. A. M. Khalaf, H. F. A. Hamed, and A. I. Hussein, “Attitude and altitude tracking controller for quadcopter dynamical systems,” *IEEE Access*, vol. 10, pp. 53344–53358, 2022.
- [13] P. Ordaz, M. Ordaz, C. Cuvas, and O. Santos, “Reduction of matched and unmatched uncertainties for a class of nonlinear perturbed systems via robust control,” *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 29, no. 8, pp. 2510–2524, May 2019.
- [14] A. Poznyak, A. Polyakov, and V. Azhmyakov, *Attractive Ellipsoids in Robust Control*. Cham, Switzerland: Springer, 2014.
- [15] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, and A. Levant, *Sliding Mode Control and Observation*. Cham, Switzerland: Springer, 2014.
- [16] V. I. Utkin and H.-C. Chang, “Sliding mode control on electro-mechanical systems,” *Math. Problems Eng.*, vol. 8, nos. 4–5, pp. 451–473, 2002.
- [17] H. Lee and V. I. Utkin, “Chattering suppression methods in sliding mode control systems,” *Annu. Rev. Control*, vol. 31, no. 2, pp. 179–188, Jan. 2007.
- [18] V. Utkin and H. Lee, “Chattering problem in sliding mode control systems,” *IFAC Proc. Volumes*, vol. 39, no. 5, p. 1, 2006.
- [19] S. Kasera, A. Kumar, and L. B. Prasad, “Analysis of chattering free improved sliding mode control,” in *Proc. Int. Conf. Innov. Inf., Embedded Commun. Syst. (ICIECS)*, Mar. 2017, pp. 1–6.
- [20] Y. Orlov, L. Aguilar, and J. C. Cadiou, “Switched chattering control vs. Backlash/friction phenomena in electrical servo-motors,” *Int. J. Control.*, vol. 76, nos. 9–10, pp. 959–967, Jan. 2003.
- [21] O. García, P. Ordaz, O.-J. Santos-Sánchez, S. Salazar, and R. Lozano, “Backstepping and robust control for a quadrotor in outdoors environments: An experimental approach,” *IEEE Access*, vol. 7, pp. 40636–40648, 2019.
- [22] R. Cui, X. Zhang, and D. Cui, “Adaptive sliding-mode attitude control for autonomous underwater vehicles with input nonlinearities,” *Ocean Eng.*, vol. 123, pp. 45–54, Sep. 2016.
- [23] O. Mofid, S. Mobayen, and W.-K. Wong, “Adaptive terminal sliding mode control for attitude and position tracking control of quadrotor UAVs in the existence of external disturbance,” *IEEE Access*, vol. 9, pp. 3428–3440, 2021.
- [24] J. Davila and A. Poznyak, “Dynamic sliding mode control design using attracting ellipsoid method,” *Automatica*, vol. 47, no. 7, pp. 1467–1472, Jul. 2011.
- [25] A. Eltayeb, M. F. Rahmat, M. A. M. Basri, M. A. M. Eltoum, and M. S. Mahmoud, “Integral adaptive sliding mode control for quadcopter UAV under variable payload and disturbance,” *IEEE Access*, vol. 10, pp. 94754–94764, 2022.
- [26] A. Pisano, M. Taneli, and A. Ferrara, “Switched/time-based adaptation for second-order sliding mode control,” *Automatica*, vol. 64, pp. 126–132, Feb. 2016.
- [27] A. Polyakov and A. Poznyak, “Invariant ellipsoid method for minimization of unmatched disturbances effects in sliding mode control,” *Automatica*, vol. 47, no. 7, pp. 1450–1454, Jul. 2011.
- [28] V. I. Utkin and A. S. Poznyak, “Adaptive sliding mode control with application to super-twist algorithm: Equivalent control method,” *Automatica*, vol. 49, no. 1, pp. 39–47, Jan. 2013.
- [29] A. Eltayeb, M. F. Rahmat, M. A. M. Basri, M. A. M. Eltoum, and S. El-Ferik, “An improved design of an adaptive sliding mode controller for chattering attenuation and trajectory tracking of the quadcopter UAV,” *IEEE Access*, vol. 8, pp. 205968–205979, 2020.
- [30] S. A. Nazin, B. T. Polyak, and M. V. Topunov, “Rejection of bounded exogenous disturbances by the method of invariant ellipsoids,” *Autom. Remote Control*, vol. 68, no. 3, pp. 467–486, Mar. 2007.
- [31] Z. Lin, “Low gain and low-and-high gain feedback: A review and some recent results,” in *Proc. Chin. Control Decis. Conf.*, Jun. 2009, pp. 52–61.
- [32] K. V. Rao and A. T. Mathew, “Dynamic modeling and control of a hexacopter using PID and back stepping controllers,” in *Proc. Int. Conf. Power, Signals, Control Comput. (EPSCICON)*, Jan. 2018, pp. 1–7.
- [33] B. Zhao and D. Yue, “Nonlinear robust attitude control development for a hexarotor unmanned aerial vehicle,” in *Proc. 33rd Youth Academic Annu. Conf. Chin. Assoc. Autom. (YAC)*, May 2018, pp. 191–195.
- [34] D. Shawky, C. Yao, and K. Janschek, “Nonlinear model predictive control for trajectory tracking of a hexarotor with actively tilttable propellers,” in *Proc. 7th Int. Conf. Autom., Robot. Appl. (ICARA)*, Feb. 2021, pp. 128–134.
- [35] E. S. Espinoza, O. Garcia, I. Lugo, P. Ordaz, A. Malo, and R. Lozano, “Modeling and sliding mode control of a micro helicopter-airplane system,” *J. Intell. Robotic Syst.*, vol. 73, nos. 1–4, pp. 469–486, Jan. 2014.
- [36] G. E. M. Abro, S. A. B. M. Zulkifli, and V. S. Asirvadam, “Performance evaluation of Newton Euler & quaternion mathematics-based dynamic models for an underactuated quadrotor UAV,” in *Proc. 11th IEEE Int. Conf. Control Syst., Comput. Eng. (ICCSCE)*, Aug. 2021, pp. 142–147.
- [37] R. Jia and X. Zong, “Quadrotor UAV trajectory tracking control based on ASMC and improved ARDC,” in *Proc. Chin. Autom. Congr. (CAC)*, Nov. 2020, pp. 6078–6083.
- [38] W. M. Haddad and V. Chellaboina. *Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach*. Princeton, NJ, USA: Princeton Univ. Press, 2011.
- [39] H. K. Khalil and J. W. Grizzle, *Nonlinear Systems*, vol. 3. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, 2002.
- [40] K. J. Åström and H. Tore, *Control PID Avanzado*. London, U.K.: Pearson, 2009.



JOVANI ORTEGA VENTURA received the bachelor’s degree in electronic and telecommunications engineering and the M.Sc. degree in automatization and control from the Autonomous University of the State of Hidalgo, Hidalgo, Mexico, in 2015 and 2018, respectively, where he is currently pursuing the Ph.D. degree. His thesis is on adaptive navigation of an unmanned hybrid aerial vehicle for volcanic monitoring applications.



DANIEL BENITEZ MORALES received the bachelor’s degree in mechatronics from the Polytechnic University of Pachuca and the M.Sc. degree in automatization and control from the Autonomous University of the State of Hidalgo, Hidalgo, Mexico, where he is currently pursuing the Ph.D. degree. His research interests include UAVs and UGV applications, self-driving cars, and control of this kind of vehicle.



JESUS P. ORDAZ OLIVER received the bachelor’s degree in electronic and telecommunications engineering and the M.Sc. degree in automatic control from the Autonomous University of the State of Hidalgo, Hidalgo, Mexico, in 2004 and 2007, respectively, and the Ph.D. degree in automatic control from CINVESTAV, Mexico City, in 2012. He is currently with the Autonomous University of the State of Hidalgo. His research interests include nonlinear control systems, robust control, adaptive control, system identification, and observation.



EDUARDO S. ESPINOZA QUESADA (Senior Member, IEEE) received the Ph.D. degree in automatic control from the Center for Research and Advanced Studies, National Polytechnic Institute, Mexico, in 2013. He was a Postdoctoral Researcher with the Nevada Advance Autonomous Systems Innovation Center, University of Nevada, Reno, NV, USA, in 2016. He is currently a Professor with UMI-LAFMIA, Mexico. His research interests include UASs applications and resilient strategies for design and control of eVTOL aircraft.



TESIS_JOV

11%
Textos sospechosos

2% Similitudes
< 1 % similitudes entre comillas
0 % entre las fuentes mencionadas
9% Idiomas no reconocidos

Nombre del documento: TESIS_JOV.pdf
ID del documento: e39d90b02b75a31b9766eceb4e0c242b940f15be
Tamaño del documento original: 38,78 MB

Depositante: Eduardo Cornejo Velázquez
Fecha de depósito: 25/11/2025
Tipo de carga: interface
fecha de fin de análisis: 25/11/2025

Número de palabras: 31.327
Número de caracteres: 174.841

Ubicación de las similitudes en el documento:



Fuentes de similitudes

Fuentes principales detectadas

Nº	Descripciones	Similitudes	Ubicaciones	Datos adicionales
1	www.mdpi.com Adaptive Integral Sliding Mode Control with Chattering Eliminat... https://www.mdpi.com/2227-9717/12/11/2431 1 fuente similar	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (51 palabras)
2	link.springer.com Model-Based Robust Tracking Attitude and Altitude Control o... https://link.springer.com/article/10.1007/s42405-024-00742-4 1 fuente similar	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (51 palabras)
3	www.mdpi.com Third-Order Sliding Mode Control for Trajectory Tracking of Qu... https://www.mdpi.com/2504-446X/9/3/172	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (49 palabras)
4	www.uaeh.edu.mx Maestría en Ciencias en Automatización y Control https://www.uaeh.edu.mx/campus/icbi/oferta/maestrias/mac/	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (43 palabras)
5	hal.science Modeling and Sliding Mode Control of a Micro Helicopter-Airplane S... https://hal.science/hal-00937617	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (37 palabras)

Fuentes con similitudes fortuitas

Nº	Descripciones	Similitudes	Ubicaciones	Datos adicionales
1	www.mdpi.com Adaptive Control of Unmanned Aerial Vehicles with Varying Pay... https://www.mdpi.com/2079-9292/13/2/347	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (38 palabras)
2	portal.amelica.org http://portal.amelica.org/ameli/journal/595/5953117013/5953117013.pdf	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (34 palabras)
3	umi.cinvestav.mx https://umi.cinvestav.mx/Portals/UMI_LAB/CVs/Omar Santos.pdf?ver=q81Fq9ovqdc9ZKibk47...	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (24 palabras)
4	umi.cinvestav.mx https://umi.cinvestav.mx/Portals/UMI_LAB/CVs/Lozano Leal Rogelio.pdf?ver=NT28y8eFkkOM...	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (24 palabras)
5	Documento de otro usuario #ebf179 Viene de de otro grupo	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (18 palabras)

Fuentes ignoradas Estas fuentes han sido retiradas del cálculo del porcentaje de similitud por el propietario del documento.

Nº	Descripciones	Similitudes	Ubicaciones	Datos adicionales
1	TESIS_JOV.pdf TESIS_JOV #5e5109 Viene de de mi biblioteca	100%		Palabras idénticas: 100% (31.327 palabras)
2	TESIS_JOV.pdf TESIS_JOV #f46bb0 Viene de de mi biblioteca	100%		Palabras idénticas: 100% (31.327 palabras)

Fuente mencionada (sin similitudes detectadas) Estas fuentes han sido citadas en el documento sin encontrar similitudes.

- <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>