



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE HIDALGO

ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

**LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁCTICO EN
BACHILLERATO PARA FOMENTAR EL APRENDIZAJE CON
ENTENDIMIENTO**

PRESENTA

Karen Guadalupe Lechuga Trejo

Director

Dr. Marcos Campos Nava

Codirector

Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez

Comité tutorial

Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez

Dr. Víctor Larios Osorio

Dr. Marcos Campos Nava

Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez

Mineral de la Reforma, Hgo., México., octubre 2025.



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

School of Engineering and Basic Sciences

Área Académica de Matemáticas y Física

Department of Physics and Mathematics

Mineral de la Reforma, Hgo., a 25 de septiembre de 2025

Número de control: ICBI-AAMyF/3040/2025

Asunto: Autorización de impresión de tesis.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UA EH

El Comité Tutorial de la tesis titulada "**La demostración matemática como recurso didáctico en bachillerato para fomentar el aprendizaje con entendimiento**", realizada por la sustentante **Karen Guadalupe Lechuga Trejo**, con número de cuenta 298174, perteneciente a la **Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica**, una vez que ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el Artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente:

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

El Comité Tutorial



Dr. Marcos Campos Nava
Director



Dr. Víctor Larios Osorio
Miembro del comité





Agustín Alfredo Torres Rodríguez
Codirector



Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez
Miembro del comité

MCN/EPC

"Amor, Orden y Progreso"



2025



uaeh.edu.mx

Agradecimientos

Mi más profundo agradecimiento a mis padres y a mi hermano, por ser siempre los primeros en darme ánimo en todos mis proyectos y por su incansable apoyo y paciencia.

A Eduardo, por la emoción que comparte conmigo siempre que algo me hace feliz.

A mis amigas y amigos, por celebrarme y celebrar conmigo cuando alcanzo una nueva meta.

A mis compañeros de generación, por haber estado a mi lado en el camino y por tener siempre palabras de aliento, críticas constructivas y consejos sin los que este trabajo no hubiera sido posible.

A mis directores de tesis, por todo su trabajo y atención, paciencia y dedicación para que este trabajo resultara de la mejor manera posible, así como a mis revisores por sus acertados comentarios y consejos durante el proceso de corrección.

Finalmente, agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por el apoyo otorgado para la realización de esta tesis, a través de la beca de posgrado con número 1272355.

Resumen

El presente trabajo de investigación se encuentra motivado por la ausencia de investigaciones sobre la implementación de la demostración matemática en el aula enfocada a un aprendizaje con entendimiento y alejada de las prácticas de mecanización y memorización de algoritmos, que, a su vez, generan un rol pasivo en los procesos de enseñanza y aprendizaje en los estudiantes.

Con fundamento en la aproximación didáctica denominada enseñanza por descubrimiento, se presenta el diseño y aplicación de una secuencia de tres actividades a lo largo de tres sesiones, que integran características específicas de la demostración matemática en la asignatura de geometría sintética en el nivel medio superior. Se consideran tres objetivos particulares de la demostración: explicación, comunicación y descubrimiento de resultados, con la verificación como interés secundario, todos estos encaminados al desarrollo de un aprendizaje con entendimiento, caracterizado por la conexión entre conceptos matemáticos y por su mayor duración en la memoria a largo plazo.

Esta investigación posee un enfoque cualitativo y emplea técnicas de observación participante, cuestionarios y grabaciones de video para recolectar los resultados obtenidos tras la aplicación de las mencionadas actividades. Los resultados reportados reflejan un mejoramiento de habilidades persuasivas, reflexivas y de descubrimiento –propias de la práctica demostrativa –que condujeron al desarrollo de constructivismo acumulativo en los participantes.

Abstract

This research project is motivated by the lack of studies on the implementation of mathematical proof in the classroom aimed at promoting meaningful learning, moving away from practices centered on rote memorization and algorithmic procedures, which often lead to a passive role for students in the teaching and learning process.

Grounded in the didactic approach known as discovery-based learning, the study presents the design and implementation of a sequence of three activities, carried out over three sessions, which incorporate specific features of mathematical proof within a high school synthetic geometry course. The activities are designed around three key purposes of mathematical proof: explanation, communication, and discovery of results, with verification considered a secondary goal. All of these purposes are geared toward fostering meaningful learning, characterized by the connection between mathematical concepts and enhanced long-term retention.

This research adopts a qualitative approach and employs participant observation, questionnaires, and video recordings to collect data following the implementation of the activities. The findings indicate improvements in students' persuasive, reflective, and discovery-related skills –core elements of the practice of proving –which contributed to the development of cumulative constructivist learning among the participants.

Contenido	Página
Carta de autorización de impresión	2
Agradecimientos	3
Resumen	4
Abstract	5
 CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	 9
1.1. Introducción	9
1.2. Estado del arte	12
1.3. Planteamiento del problema	24
1.3.1. Introducción a la problemática	24
1.3.2. El problema de investigación	25
1.3.3. Pregunta de investigación	26
1.3.4. Objetivo general	26
1.3.5. Objetivos específicos	27
1.4. Justificación	27
 CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL	 28
2.1. Introducción	28
2.2. Referentes ontológicos, epistemológicos y didácticos	30
2.2.1. Dimensión ontológica: ciencia de los patrones	30
2.2.1.1. Identificar y validar patrones	32
2.2.2. Dimensión epistemológica: conocimiento matemático	34
2.2.2.1. El conocimiento en matemáticas	35
2.2.2.2. El conocimiento práctico y la demostración matemática	36
2.2.2.3. Signos de aprendizaje con entendimiento y objetivos de la demostración	39
2.2.2.3.1. Objetivo explicativo y comunicativo	39

2.2.2.3.2. Objetivo de descubrimiento	44
2.2.3. Dimensión didáctica: ¿cómo enseñar matemáticas a través de la demostración?	46
2.2.3.1. Demostración útil en el salón de clases	47
2.2.3.2. Enseñanza por descubrimiento y DUSC	48
2.2.3.3. Herramientas digitales y físicas para la exploración	52
CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA	55
3.1. Introducción	55
3.2. Técnica de investigación	55
3.3. El enfoque cualitativo, el enfoque cuantitativo y sus diferencias	56
3.4. Diseños de investigación cualitativa	57
3.4.1. Estudio de caso	58
3.5. Participantes	58
3.6. Técnicas e instrumentos de recolección de la información	59
3.7. Diseño y aplicación de la tarea de aprendizaje	60
3.7.1. Diseño de la Actividad 1	60
3.7.1.1. Un puzzle interactivo	61
3.7.2. Cuestionario 1	63
3.7.3. Diseño de la Actividad 2	64
3.7.3.1. Ejercicio 1	64
3.7.3.2. Ejercicio 2	65
3.7.3.3. Ejercicio 3	66
3.7.4. Cuestionario 2	67
3.7.5. Diseño de la Actividad 3	68
3.7.5.1. Teorema del Segmento Medio	69
3.7.6. Cuestionario 3	71
CAPÍTULO 4. RESULTADOS	72

4.1. Categorías de análisis	72
4.2. Análisis subcategorial de los resultados	74
4.2.1. Sesión 1: transcripciones	74
4.2.2. Sesión 1: producciones escritas	78
4.2.3. Sesión 1: Cuestionario 1	84
4.2.4. Sesión 2: transcripciones	93
4.2.5. Sesión 2: producciones escritas	97
4.2.6. Sesión 2: Cuestionario 2	110
4.2.7. Sesión 3: transcripciones	114
4.2.8. Sesión 3: producciones escritas	116
4.2.9. Sesión 3: Cuestionario 3	124
4.3 Resumen de los resultados	126
4.3.1 Resumen de los resultados de la Sesión 1	126
4.3.2 Resumen de los resultados de la Sesión 2	129
4.3.3 Resumen de los resultados de la Sesión 3	133
 CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES	 136
5.1. Discusión de los resultados	136
5.2. Conclusiones	146
Referencias	149
Apéndice A	156
Apéndice B	156
Apéndice C	156
Apéndice D	156
Apéndice E	156

CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Introducción

El aprendizaje de las matemáticas supone uno de los fundamentos de la educación elemental (Orrantia, 2006), por lo que es crucial abordar las problemáticas en su enseñanza a lo largo de la historia. De acuerdo con Escudero en su nota del 2023 en *El Universal*, la enseñanza de las matemáticas en México ha sido muy deficiente históricamente y los resultados de los estudios nacionales e internacionales muestran que entre el 50 y 60% de los estudiantes mexicanos que terminan la secundaria presentan serias deficiencias en esta asignatura, convirtiéndola en una de las materias de mayor índice de reprobación. La historia de la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas en México reporta en sus inicios –años 90 del siglo pasado –que en todos los niveles existe una escasa comprensión de conceptos matemáticos por parte de los estudiantes (Ávila, 2016) y, más recientemente, Vega et al. (2015) atribuyen la falta de interés y malos resultados en esta asignatura al enfoque tradicionalista en la enseñanza, es decir, a aquel en el que utilizan algoritmos sin fundamento y se repiten procedimientos mecánicamente y sin reflexión.

En este sentido, Calvo (2008) menciona que este ambiente fomenta que los estudiantes sean capaces de ejecutar mecánicamente las operaciones fundamentales básicas, pero que no sepan cómo aplicarlas en la solución de problemas, ya que sólo se les ha enseñado a actuar de forma algorítmica y repetitiva. Al respecto, Ruíz y García (2003) recomiendan un equilibrio entre el aprendizaje de los procedimientos algorítmicos y el de los conceptos, ya que los primeros carecen de significado sin los segundos y éstos últimos requieren de los primeros para su aplicación concreta.

El aprendizaje simultáneo de operaciones aritméticas y la resolución de problemas facilita el entendimiento de diversos conceptos matemáticos, razón que lo coloca como uno de los principales objetivos de la didáctica de las matemáticas. En este trabajo se tomará la definición de entendimiento que destaca su relación con la creación de conexiones entre conceptos y procedimientos matemáticos, aportada por Hiebert y Carpenter (1992):

Una idea o procedimiento matemático se dice entendido si su representación mental se encuentra conectada a una red más amplia de representaciones mentales. El grado de entendimiento se determina por el número y la fuerza de dichas conexiones. Un concepto, idea o procedimiento matemático se ve entendido en profundidad si está ligado a redes existentes que, a su vez, posean redes con conexiones más fuertes y numerosas. (p. 67)

Una manera de desarrollar el entendimiento de procesos dentro de una disciplina es considerando las herramientas¹ que los expertos utilizan para construirlo y, en este caso, una de las más importantes es la demostración matemática, también llamada prueba matemática. En este orden de ideas, Hanna (2000) argumenta que la demostración matemática posee un uso relevante por la propiedad de que motiva la observación de los conceptos involucrados en la misma, pues los estudiantes deben entender la naturaleza y los estándares del razonamiento deductivo para que puedan determinar cuándo un resultado es o no correcto, y las pruebas pueden ser de gran contribución en el salón de clases cuando el profesor es capaz de utilizarlas para alcanzar el objetivo del entendimiento matemático, además, Rav (1999) describe a la demostración matemática como portadora de conocimientos matemáticos, ya que posee métodos, herramientas, estrategias y conceptos necesarios para resolver problemas. Así, el uso de las pruebas matemáticas nos acerca al entendimiento de un resultado matemático: ver no sólo que es correcto, sino por qué lo es.

Ahora bien, la importancia del uso de la demostración en la enseñanza de las matemáticas en las aulas es ampliamente reconocida pues fomenta el desarrollo de habilidades lógicas en los estudiantes. Fiallo, Camargo y Gutiérrez (2013) reportan que en las dos ediciones de los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) se incluye a la demostración como uno de los estándares de proceso que los estudiantes deberían conocer y ser capaces de usar con más habilidad y complejidad a medida que progresan en su escolarización. Además, sugieren

¹ CadwalladerOlsker (2011) cita a Hersch como sigue “La demostración es una herramienta al servicio de la investigación, no un impedimento para la imaginación del matemático”.

que los programas de enseñanza en todos los niveles deberían capacitar a los estudiantes para reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las matemáticas, formular e investigar conjeturas, desarrollar y evaluar argumentos y demostraciones y elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración.

En este sentido, dentro del currículo escolar de matemáticas en el nivel medio superior en México, se enfatizan objetivos como la resolución de problemas, argumentación y explicación de resultados. Por ejemplo, en el programa de la asignatura de Matemáticas IV del Colegio de Bachilleres (Gobierno de México, 2023), además de la generación de modelos y el desarrollo del pensamiento crítico y reflexivo, se establece como aprendizaje esperado que: "[el estudiante] sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo." (p. 9). Por otra parte, el programa de Matemáticas para el Telebachillerato Comunitario (SEP, 2023), menciona que "...se pone el acento en que el estudiantado desarrolle la habilidad de determinar y delimitar qué variables debe considerar para describir un fenómeno y no simplemente se limite a la utilización de modelos prefabricados..." (p. 4), y en la descripción del mapa curricular de Bachillerato General (Secretaría de Educación Pública, s. f.) se hace hincapié en la importancia de generar habilidades para formular, reformular y resolver problemas, además de verificar soluciones y efectuar generalizaciones,

no es suficiente el manejo de algoritmos, reglas o procedimientos, ya que (...) se ven limitados para desarrollar su capacidad para conjeturar, buscar diferentes formas de solución, comunicar la justificación de sus respuestas a través de argumentos que les den soporte y les permitan participar activamente en la construcción de su propio conocimiento. (s. p.).

De igual modo, en el programa de Cálculo Diferencial del Bachillerato Tecnológico (Secretaría de Educación Pública, s.f.) se menciona como objetivo que "los estudiantes deben poder razonar matemáticamente, y no simplemente responder ciertos tipos de problemas mediante la repetición de procedimientos establecidos. Esto implica el que puedan hacer las aplicaciones de esta disciplina más allá del salón de clases." (p. 12).

A pesar de que la presencia de todas las ideas anteriormente mencionadas refuerzan el objetivo de que el estudiante alcance un entendimiento más allá de la mecanización de procesos o algoritmos, en los temarios de los programas antes citados no aparece la demostración matemática como un tema a tratar, al igual que en el de los programas similares de las asignaturas de matemáticas en esas modalidades de bachillerato. No limitándose al currículo de bachillerato en México, existen investigaciones como las citadas por Arce et. al. (2019) en la que se menciona que se ha detectado una progresiva desaparición de la demostración matemática en manuales como la Ley General de Educación de 1970 hasta la Ley Orgánica de Educación, tendiendo a sustituirlas por esquemas de prueba de tipo inductivo. Esta ausencia, en cuanto al orden de presentación de resultados matemáticos, “provoca que surjan otros criterios de presentación diferentes de la sistematización axiomática de los mismos” (Arce et. al., 2019, p. 421).

Así, este trabajo de investigación se interesa en analizar las características de la demostración matemática como herramienta de enseñanza en el aula de clases que pueden conducir al aprendizaje con entendimiento en contraposición con la mecanización de procesos matemáticos a través del diseño e implementación de tareas que hagan uso de estas características y con un enfoque en geometría sintética en bachillerato.

1.2 Estado del arte

La demostración de conjeturas es parte medular del trabajo matemático, pues en la comunidad matemática, estas no poseen validez hasta que una prueba matemática se las otorga. Sin embargo, una demostración puede jugar distintos roles dependiendo del autor, la audiencia y el estilo de la demostración (CadwalladerOlsker, 2011).

En este sentido, varios estudios exponen las ventajas que posee el uso de la demostración en la educación matemática, por un lado, Herbst y Brach (2006) mencionan que la disciplina matemática tiene por objetivo realizar afirmaciones sobre objetos abstractos y, a través de la demostración, los matemáticos pueden darles forma y probar dichas afirmaciones; así, puesto que se espera que los estudiantes tengan un acercamiento directo a la forma en que se desarrolla la disciplina y no sólo con los resultados producidos, se espera

que se vean involucrados en el proceso demostrativo. Esto es respaldado por el NCTM (2000) que, en su informe *Principles and Standards for School Mathematics*, estableció que el razonamiento y la demostración son esenciales en el entendimiento, exploración, justificación y uso de afirmaciones matemáticas. Además, Alibert y Thomas (2002) resaltan el carácter social de la demostración, pues Balacheff (1988) afirma que lleva a los estudiantes a la discusión para convencerse a sí mismos y a sus compañeros de los argumentos que producen. Por otra parte, el objetivo explicativo de la prueba matemática es esencial dentro del salón de clases, pues muchas veces se valorará más una prueba por su carácter explicativo que por su formalidad. Una prueba que explica, afirma Hanna (1990), debe proporcionar una razón fundamental, estar basada en las ideas matemáticas implicadas, y mostrar las propiedades que dan a la afirmación la condición de verdadera.

En estudios experimentales recientes, Samosir y Nanda (2022) trabajaron con estudiantes de quinto grado para analizar la diferencia en el aprendizaje que supone la implementación del proceso de demostración en su proceso de enseñanza y concluyen que lo mejora significativamente en cuanto a las competencias básicas en matemáticas y sugiere fuertemente utilizar dichas técnicas de enseñanza para crear una atmósfera de aprendizaje activa; sin embargo, los investigadores dejan clara la importancia de elegir correctamente las herramientas demostrativas a implementar y tomar en cuenta la condición de los estudiantes. En el mismo tenor, Onyeka y Okoye (2023) reportan que los profesores continúan utilizando el viejo sistema de enseñanza de las matemáticas basado en la suposición y la asunción, por lo que se deben implementar modos de enseñanza innovadores que se alejen de estas prácticas; el estudio encuentra evidencia de una diferencia significativa en el desempeño de los estudiantes cuando se utiliza un método demostrativo en la enseñanza, basado en el uso de actividades demostrativas que se centran en los estudiantes y los impulsan a salvar las distancias entre lo teórico y lo práctico.

Siguiendo a Hanna (2000), existe una rama de las matemáticas que se beneficia, en particular, del carácter explicativo de la demostración, ya que un gran número de pruebas poseen esta característica: la geometría sintética. Siguiendo esta idea, y revisando la

incursión de la demostración matemática en el campo de la geometría, hallamos que investigadores como Herbst y Brach (2006) resaltan el interés respecto a la demostración en la instrucción de la geometría, motivados por las necesidades de la práctica educacional. Además, Lárez (2014) enfatiza a la geometría como un lugar natural para el desarrollo del razonamiento y de las habilidades para la justificación, puesto que es donde los estudiantes aprenden a razonar y a conocer la estructura axiomática de la matemática. Caracteriza a esta ciencia como proveedora de herramientas para la construcción de conocimiento matemático, y más precisamente, para el entendimiento de cómo se van efectuando los pasos lógicos para desarrollar una demostración.

La demostración matemática posee cierto protagonismo en el currículum de nivel medio superior en países como Estado Unidos, de acuerdo con investigadores como Lampert (1993) que reportan la enseñanza de la demostración en geometría como una estructura de afirmaciones en dos columnas paralelas. En algunos lugares de Latinoamérica se sigue una práctica similar, por ejemplo, en el currículum venezolano la llamada prueba a dos columnas (PDC) es una forma metódica de presentar las demostraciones que consiste en poner las proposiciones en una columna, y las razones que las justifican en otra columna adjunta.

Aunque este tipo de demostración estructurada presenta gran utilidad, no se deben perder de vista investigaciones como las citadas por Herbst y Brach (2006) que han mostrado que, aunque un estudiante pueda entender una prueba estructurada como la mencionada, o entender la estructura en sí misma, no significa que aprecien la validez universal de la afirmación. De acuerdo a Lárez (2014), se deben proponer demostraciones que requieran del esfuerzo intelectual del estudiante y enfatiza que deben ser acordes con sus esquemas de conocimientos previos para que exista continuidad entre las producciones de conjeturas o argumentos y la construcción de la prueba.

La tesis de Díaz (2013) que presenta la experimentación con estudiantes de nivel medio en Colombia, menciona que aunque existe una potencialidad del proceso demostrativo como un posible detonante en la internalización de conocimientos geométricos, esta debe adquirir un nuevo enfoque dentro del aprendizaje que permita encontrar caminos más acertados en su acción en la escuela, es así que cuando el estudiante se ve enfrentado a una demostración

es importante que aprenda a ver no solo la verdad del enunciado, sino también el porqué. Nos recuerda Lárez (2014) que realizar una demostración no se trata de sólo recordar una serie de axiomas y proposiciones previas ya demostradas, sino que involucra la ejercitación de habilidades cognitivas básicas, por ejemplo, la lectura comprensiva, el razonamiento, el análisis, la evaluación, etc.

Es relevante citar la investigación de Herizal (2019) que revisa la comprensión de la demostración matemática en estudiantes de último año en preparatoria basado en cuatro indicadores: los estudiantes debían justificar cada paso en la construcción de una prueba, validar sus afirmaciones, aplicar los mismos pasos en pruebas similares e identificar patrones generales en la prueba. Concluye así que requieren mejorar sobre todo en el segundo y cuarto indicador, reportando además una fuerte debilidad en el entendimiento de los conceptos, lo cual afectó su capacidad de resolver problemas. Similarmente, Ibañez (2002) realiza un estudio con estudiantes de primer grado de bachillerato en España para explorar su entendimiento del concepto de demostración y si ellos son capaces de identificarla entre cuatro procesos: un cálculo, una demostración, una definición, un enunciado de una proposición y una comprobación mediante un ejemplo. El análisis de los resultados muestra que 27% de los estudiantes eligieron el segundo proceso y el resto eligieron el quinto, reflejando así una comprensión limitada del concepto. Por lo anterior, la implementación de la demostración debe estar acompañada de un proceso de reflexión en el que el estudiante atravesase procesos de exploración en un problema, la generación de conjeturas y razonamiento, para finalmente construir una demostración, y no regresar a la utilización algorítmica del proceso, ya que esto dificulta el entendimiento.

En nuestro país, existen diversos estudios que reportan un entendimiento deficiente del proceso demostrativo tanto en estudiantes como en profesores, si acaso este se encuentra presente en el aula. Larios realizó una investigación en 2005 acerca de construcción de la demostración geométrica dentro de un ambiente de Geometría Dinámica por alumnos de secundaria en México y reportó sus observaciones respecto a las conductas de los alumnos relacionadas con la rigidez geométrica, la necesidad de armonizar los componentes

figurales y conceptuales de las construcciones geométricas y la tendencia al uso de justificaciones encaminadas a las explicaciones. El investigador reporta respecto a los conceptos mencionados y con el uso del software Cabri-géomètre que existe una tendencia en usar figuras prototipo (simétricas, orientadas vertical u horizontalmente), triángulos casi isósceles (o casi equiláteros) y evitar los escálenos o los obtusángulos; respecto a los componentes figurales y conceptuales, en las actividades donde se les pidió que justificaran sus construcciones, utilizaron hipótesis que no fueron las lógicamente “correctas”, sino las que les parecían mejor bajo una percepción visual; finalmente, se recurrió principalmente a verificaciones empíricas o bien a justificaciones que tienen como objetivo explicar. En general, concluye que la inclinación a considerar los aspectos figurales por encima de los conceptuales hace que no exista una fusión entre ambos que permita su manejo óptimo. Finalmente, respecto a la demostración en la escuela, el autor opina que debe aparecer una estructura de razonamiento que si bien no tiene que ser netamente lógica, debe tener argumentos cuya validez haya sido establecida unidos de una manera coherente.

Por otro lado, el trabajo de Monroy y Astudillo (2009) explora las concepciones, creencias y dificultades que poseen estudiantes que están por ingresar a la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas en la Universidad Juárez del Estado de Durango respecto a la demostración y reportan que la lógica y la demostración se conciben de forma independiente, y que, para evitarlo, es necesario establecer a la demostración como una forma de validación y al lenguaje como forma de comunicación de lo que se valida. En cuanto a investigaciones orientadas al pensamiento deductivo en profesores de bachillerato, la de Flores (2007) deja claras las ventajas de la demostración en el contexto educativo mexicano y las prácticas argumentativas utilizadas por profesores en geometría, sin embargo, concluye un uso deficiente de las mismas.

En la introducción se hizo mención de la incongruencia detectada al contrastar los temarios de diversos sistemas de bachillerato en México y los objetivos que estos plantean a los estudiantes, siendo que existe una evidente ausencia de temas relacionados al proceso demostrativo. A pesar de que han habido ciertos cambios en la construcción del currículo

en el Nivel Medio Superior, estos no han resuelto este problema, declaran Ramírez y Hernández (2017), ya que que probablemente hacen a la matemática más cercana a los estudiantes, pero no necesariamente los fortalecen en relación a la demostración.

Afirma Larios (2018) que existe una distancia entre lo que hacen los alumnos y lo que supuestamente deberían hacer al final de su vida escolar en su estudio sobre los esquemas que emplean los alumnos de bachillerato en México para validar resultados matemáticos. El autor reporta que el uso de ciertos esquemas de argumentación avanzados no implica que las soluciones sean correctas y se implica que, a pesar de que los requerimientos de justificación de resultados existan en el currículum o incluso se traten de llevar a cabo en el aula a nivel medio superior en México, el sentido que le otorgan a los procesos y los conceptos debe ser la parte central de su uso, pues el énfasis de la demostración matemática en el aula debe estar en su sentido y significado.

Incluso en los casos en que ciertos elementos referentes a la demostración matemática son implementados en el aula –si bien no la demostración en sí misma –es importante poner atención en la manera en que se introduce este concepto. Afirman Crespo y Ponteville (2005) que si un profesor piensa que el carácter deductivo de la matemática es su esencia, en sus clases pondrá un gran peso en las demostraciones. Si, por el contrario, piensa que las matemáticas son un conjunto de fórmulas y algoritmos aplicables a diversas situaciones, entonces el alumno ejercitará para adquirir fluidez en su uso. En un estudio realizado por Camargo et al. (2006) se prueba el uso de un software de geometría dinámica y cómo influencia la concepción y producción de demostraciones en los estudiantes y concluyen que, si bien anteriormente se ha declarado estos programas son un obstáculo para que los estudiantes entiendan la necesidad de la demostración deductiva y aprendan a demostrar al afirmar que pueden llegar a la convicción de hechos geométricos considerando inútil la demostración, es de la opinión de las autoras que esto sucede si los profesores enfatizan en la función de validación de la demostración y no en la de buscar comprensión. Si además de interesarse por saber si la propiedad se cumple, lo hacen por saber por qué, se da utilidad a la actividad demostrativa hasta lograr un argumento convincente. De acuerdo con los

estudios citados, la manera en que los docentes diferencian la idea de hacer demostraciones y de enseñar a demostrar, siendo esto último algo que pocos llevan a cabo en el aula, hace que recaigan en el error antes citado: la mecanización de procesos.

Se citan algunos ejemplos en este sentido. Ibañez y Ortega (2003) reportan un estudio con alumnos de primer grado de bachillerato en la Universidad de Valladolid en España, que concluye que más de la cuarta parte de los alumnos no diferenciaba una demostración de un ejemplo de un mismo enunciado, que no identifican el enunciado de un resultado que se haya probado, que pocos alumnos consideraron que un teorema puede aplicarse directamente una vez que ya se ha demostrado y que casi la mitad de los alumnos pensaban que podría encontrarse un contraejemplo de un teorema demostrado. Similarmente, la investigación descriptiva por parte de Hernández (2012) en la Universidad Francisco de Paula Santander en Colombia, indagó sobre la situación de la actividad demostrativa de estudiantes de reciente ingreso a la Licenciatura en Matemáticas e Informática. Se enfoca en el conocimiento sobre lenguaje matemático y la concepción de la demostración de los estudiantes; respecto al primero, reconocen que más de la mitad de los estudiantes han utilizado o reconocen algunas de las palabras propias del lenguaje matemático, pero no son capaces de explicar de una manera satisfactoria su significado; respecto a la segunda, reconocen la importancia del desarrollo de la habilidad demostrativa en su proceso de formación profesional, si bien les causa cierto nivel de ansiedad. En conclusión, atribuyen el grado de conocimiento insatisfactorio de los estudiantes respecto a la actividad demostrativa en cierta medida, al desconocimiento del lenguaje matemático, y que, aunque muestran una buena predisposición de actitudes y creencias hacia la actividad demostrativa, el nivel de conocimiento y uso del lenguaje matemático y su habilidad para hacer demostraciones es preocupante. En el mismo país, se implementó la estrategia demostrativa en las aulas del Colegio Cooperativo San Antonio de Prado y se realizó un estudio por Toro (2014) para evaluar los procesos argumentativos de los estudiantes bajo el uso de tecnologías en geometría dinámica. Sucede que, si bien la demostración se ha aplicado y de cierta manera promovido, los estudiantes requieren de mayor apoyo para desarrollar las

habilidades de razonamiento que el mismo currículo escolar colombiano exige. Concluye Toro que enseñar a demostrar bajo el modelo tradicional puede convertirse en un trabajo difícil y de pocos resultados, pero si antes de la demostración hay un acercamiento a la argumentación donde se lleve de la mano al estudiante de manera que haya construcción y exploración, si se le exige a justificar sus procesos, a descubrir propiedades, producir conjeturas y comunicarlas, con seguridad se tendrían mejores resultados y el uso de herramientas digitales, particularmente software de geometría dinámica fue un elemento importante para lograr los objetivos de la investigación. Además, reitera que tal ha sido la ineficacia de la enseñanza tradicional e imitativa de la demostración en el ambiente escolar que ha sido una de las razones para eliminar la enseñanza de la demostración o para reducir su importancia en los programas de enseñanza secundaria en algunos países.

Finalmente, en años tan recientes como 2021 y 2024 se reportan dos investigaciones más respecto a la demostración matemática. Primeramente, Pulungan (2021) revisa la influencia del método demostrativo –entendido como la presentación de material de aprendizaje para aprender sobre los objetos y los procesos de forma directa –en el mejoramiento del aprendizaje de estudiantes y concluye que vuelve más activo al papel del estudiante y mejora su proceso de aprendizaje. En segundo lugar, Annong-Aksan (2024) revisa si este método tiene influencia en la percepción que poseen los estudiantes sobre las matemáticas ya que su desempeño ha sido afectado por la pandemia, como dejan ver las deficientes habilidades de lectura y comprensión, además de aquellas para resolver problemas matemáticos y concluye que los participantes poseen una percepción positiva de dicho método siempre y cuando participen activamente en el mismo. Además, sugiere que para futuras investigaciones se debe explorar su influencia en el desempeño académico.

Resumiendo lo anterior y siendo respaldados por Boero (2007) los modelos de enseñanza basados fundamentalmente en el aprendizaje a partir de la observación e imitación de las demostraciones como están escritas en los libros de texto, no se ajustan a las necesidades actuales de estudiantes y profesores, no basta con la presencia de la demostración dentro del currículo de matemáticas o de geometría, sino que es necesario un nuevo enfoque. Tras

la revisión, creemos necesario hacer énfasis en un fin muy específico: la conexión de conceptos matemáticos. La falta de familiarización con la demostración como un proceso de razonamiento no algorítmico dentro de las planificaciones de enseñanza en los distintos niveles hace necesaria la reflexión y abre una brecha importante dentro de la investigación en matemática educativa, pues muestra que la demostración, concepto central de la matemática como ciencia, no lo es en la práctica dentro de su enseñanza en nuestro país. Aunado a todo lo anterior y a la poca investigación enfocada en la argumentación en matemáticas y en la aplicación de la demostración como herramienta de enseñanza en el bachillerato en México (Monzón, 2011), además de su potencial debido a su diversos objetivos didácticos, se identifica un área de oportunidad en la investigación sobre la demostración en la didáctica de las matemáticas vista como herramienta de descubrimiento de resultados matemáticos, no únicamente como herramienta de verificación.

A continuación se presenta la *Tabla 1* que resume los resultados empíricos aludidos.

Tabla 1. <i>Tabla resumen de los resultados empíricos revisados en el estado del arte</i>		
Autor (país, año)	Propósito del trabajo	Hallazgos/Resultados de investigaciones
Lampert (Estados Unidos, 1993)	Comprender el proceso de implementación de la exploración guiada con tecnología diseñada para permitir a los estudiantes participar directamente en la exploración de la materia.	Si bien este tipo de enseñanza requiere más tiempo y una relación más exigente con los estudiantes, los profesores creen que es una forma valiosa de invertir su energía docente.
Ibañez (España, 2002)	Dar respuesta a cuestiones sobre el aprendizaje de la demostración matemática en bachillerato, por ejemplo, en qué consiste entenderla y cómo influye la manera de redactar los enunciados de los teoremas a su comprensión.	Cuando se presentan procesos no demostrativos, la mayoría de los estudiantes responden que sí lo son, esto muchas veces propiciado por la influencia de los esquemas inductivos de prueba en los alumnos de este nivel.
Ibañez y Ortega (España, 2003)	Reconocer diferentes procesos matemáticos por alumnos de primer curso de bachillerato, detallar sus dificultades en esta tarea y proponer instrucciones para mejorar esta habilidad.	1) El reconocimiento de los procesos matemáticos por parte de los alumnos puede mejorar con las instrucciones adecuadas. 2) De las funciones de la demostración, la de explicación es la que más consideran.

Crespo y Farfán (México, 2005)	Explorar el papel que desempeñan las argumentaciones en el aula de matemáticas y las características de las realizadas por reducción al absurdo, a fin de comprenderlas como un recurso de validación de resultados en matemáticas.	La totalidad de los alumnos que cursan el último año de Profesorado de Matemática reconocen la presencia de argumentaciones por reducción al absurdo en un contexto matemático, siendo capaces de explicar correctamente su fundamento lógico. Sin embargo, las reservan sólo al escenario académico.
Larios (México, 2005)	Estudiar la construcción de la demostración geométrica dentro de un ambiente de Geometría Dinámica por alumnos de secundaria en México y con actividades relacionadas con triángulos y cuadriláteros.	Se manifestaron conductas en los estudiantes que muestran que el manejo de los componentes figurales y conceptuales de los objetos geométricos utilizados no están en armonía, lo que hace que no exista una fusión entre ambos que permita su manejo óptimo.
Herbst y Brach (Estados Unidos, 2006)	Examinar las perspectivas de los estudiantes sobre la labor convencional y pública de la demostración en las clases de geometría de escuelas secundarias estadounidenses.	Los estudiantes podrían considerar ciertos problemas como inusuales para involucrarse en la demostración debido a su falta de conformidad con las normas habituales al realizar pruebas y algunas disposiciones (específicamente, la de no hacer suposiciones y no realizar construcciones auxiliares) mantienen límites entre las tareas matemáticas.
Camargo, Samper y Perry (Colombia, 2006)	Presentar que la concepción de actividad demostrativa incluye además de las acciones propias de la justificación, acciones heurísticas (visualización, exploración) encaminadas a la producción de conjeturas y su verificación.	El uso de los programas de geometría dinámica, por sí solo, no favorece la práctica de la justificación. Es únicamente mediante diseños de situaciones de aprendizaje cuya meta apunte a la práctica de la justificación como se puede aprovechar el potencial del software.
Flores (México, 2007)	Responder a la pregunta: ¿qué tanto los mismos profesores de matemáticas utilizan un razonamiento deductivo cuando resuelven problemas matemáticos?	Reportan que en los profesores se tiene una estructura de razonamiento que no favorece el uso de la deducción y el lenguaje suele ser impreciso, con un uso erróneo de conceptos.
Monroy y Astudillo (México, 2009)	Analizar la actuación de una estudiante de nuevo ingreso de una licenciatura en Matemáticas Aplicadas que formó parte de un estudio en el que se estudiaron producciones en torno a la demostración matemática.	La lógica y la demostración se conciben de manera separada. La enseñanza debería instruir acerca de la demostración como forma de validación y acerca del lenguaje como necesidad para desarrollar y comunicar una demostración.

Monzón (México, 2011)	Comentar el estado del arte que guarda la investigación sobre argumentación en América Latina.	La cantidad de investigaciones realizadas en México en torno al tema de la argumentación es muy poca y la mayoría se enfocan en los niveles básico y medio, dejando de lado el nivel superior y posgrado, en donde es indispensable un buen nivel de argumentación.
Hernández (Colombia, 2012)	Conocer los factores que inciden el proceso demostrativo, realizar un análisis acerca de lo que está sucediendo, identificar posibles obstáculos que impiden el desarrollo de esta habilidad, para diseñar estrategias de aprendizaje donde se incorpore el proceso demostrativo.	Aunque los estudiantes tienen una buena predisposición en actitudes y creencias hacia la actividad demostrativa, el conocimiento y uso del lenguaje matemático y la habilidad para hacer demostraciones no es lo satisfactorio.
Díaz y Zuluaga (Colombia, 2013)	Indagar cómo la continuidad entre la producción de conjeturas y la producción de la demostración, conlleva al aprendizaje de la Geometría Analítica, particularmente la circunferencia.	Describen que, aunque existe una potencialidad del proceso demostrativo como un posible detonante en la internalización de conocimientos geométricos, la demostración debe adquirir un nuevo enfoque que permita aprender a ver no solo la verdad del enunciado, sino también el por qué.
Lárez (Venezuela, 2014)	Documentar, discutir y analizar la importancia de las demostraciones geométricas como resolución de problemas.	Los estudiantes tienen la capacidad de realizar demostraciones en geometría, en primera instancia, de forma empírica y al finalizar, de forma deductiva. Hacer demostraciones abre las puertas al resolutor a la esencia de la Matemática: resolver problemas.
Toro (Colombia, 2014)	Estudiar la argumentación de estudiantes de grado octavo del Colegio Cooperativo “San Antonio de Prado” cuando realizan actividad demostrativa con el apoyo de sistemas de geometría dinámica.	Enseñar a demostrar bajo el modelo tradicional puede ser un trabajo difícil y de pocos resultados, pero si antes hay un acercamiento a la argumentación de manera que haya construcción y exploración, si se le exige a justificar sus procesos, a descubrir propiedades, producir conjeturas y comunicarlas, se tendrían mejores resultados.

Larios (México, 2018)	Detectar las estrategias utilizadas por los alumnos de la Escuela de Bachilleres de la UAQ y así poder proponer a futuro medios didácticos para disminuir la distancia entre lo que hacen y lo que se pretende que conozcan.	El uso de ciertos esquemas de argumentación avanzados no implica que las soluciones sean correctas. Aún hay dificultades en semestres avanzados de bachillerato, con el uso reiterado de los esquemas autoritarios y simbólicos para sostener la validez de su resultado.
Herizal, Suhendra y Nurlaelah (Indonesia, 2019)	Se realizó un estudio descriptivo cualitativo para describir la capacidad de los estudiantes de comprensión de pruebas matemáticas en estudiantes de preparatoria de último grado.	Los estudiantes: (i) justificaron adecuadamente cada paso de las demostraciones; (ii) tuvieron dificultades para validar un paso de la demostración; (iii) aplicaron adecuadamente los pasos para demostrar afirmaciones similares; y (iv) no lograron determinar ni demostrar una noción basándose en un patrón a partir de las afirmaciones dadas.
Pulungan (Indonesia, 2021)	Describir la implementación del método de demostración que podría mejorar el aprendizaje de matemáticas de los estudiantes de primer grado de la Escuela Primaria Estatal 0511 Batang Tangal Jas.	El método de aprendizaje demostrativo mejora las habilidades de pensamiento para resolver problemas; mediante el método demostrativo, los resultados de aprendizaje de los estudiantes experimentan cambios y mejoras en cada ciclo; la aplicación del método demostrativo puede mejorar la competencia de los estudiantes.
Samosir y Nanda (Indonesia, 2022)	Responder si existe algún efecto del uso de métodos de demostración con los medios de comunicación en los resultados del aprendizaje de matemáticas en estudiantes de quinto grado en SD Negeri 091546 Unong Manik.	La aplicación del método de demostración en el aprendizaje de matemáticas influye en los resultados del aprendizaje estudiantil. Los docentes pueden utilizar métodos de demostración en actividades de aprendizaje para crear un ambiente de aprendizaje activo y mejorar los resultados del aprendizaje estudiantil.
Onyeka y Okoye (Nigeria, 2023)	Cómo ofrecer evidencia real de la efectividad del uso del método de enseñanza demostrativo en la solución del problema del bajo rendimiento académico.	Los estudiantes que utilizaron el método de enseñanza demostrativo obtuvieron mejores resultados que los que utilizaron el método de enseñanza deductivo.
Annong-Aksan (Filipinas, 2024)	Evaluar el alcance del método de demostración en enseñanza de las matemáticas entre estudiantes de secundaria de la Universidad Estatal de Mindanao-Sulu.	Destaca la eficacia constante del método de demostración en todos los enfoques de enseñanza, lo que subraya la importancia de una implementación eficiente para la percepción de los estudiantes.

Fuente: Elaboración propia.

La tabla anterior pone de manifiesto que la demostración no es una novedad como objeto de investigación en educación matemática; la mayoría de las investigaciones revisadas reportan resultados en los que existe un distanciamiento entre el significado y objetivo verdadero de la demostración y la concepción que tanto estudiantes como profesores tienen de la misma cuando se emplea en el salón de clases: desde la separación entre la lógica necesaria para generar una demostración y el proceso mismo de su construcción, hasta la falta de comprensión de su importancia y uso.

Un nuevo enfoque para el uso de la demostración en el aula de clases es necesario, uno que promueva la comprensión profunda de la misma, que esté alejado de la artificialidad y no reducido únicamente a la heurística. Se requiere encontrar un equilibrio entre la argumentación heurística y la formalidad que caracteriza a la demostración, partiendo de la primera, que promueve la exploración y el descubrimiento de resultados, y obteniendo los beneficios de la segunda, cultivando la precisión en el lenguaje, la cualidad explicativa y que no solo proclame la verdad sino que justifique el porqué.

1.3 Planteamiento del problema

1.3.1. Introducción a la problemática

Señalan Torres y Nicasio (2017) que el rezago en el área de lógica matemática –definido como la falta de conocimientos y habilidades matemáticos englobados en los niveles básicos de educación necesarios para el desarrollo en la vida diaria de los estudiantes –no hace más que aumentar con el paso de los años, siendo que afecta directamente a toda la población, pues repercute en la economía, cultura y crecimiento como país, todo esto evidenciado por pruebas como el PLANEA y PISA. Aunado a lo anterior, Marmolejo y Solano (2005) aseveran que los estudiantes de secundaria y preparatoria no tienen herramientas para enfrentarse a situaciones como las de argumentar, conjeturar, deducir o demostrar, pues todas sus herramientas mentales han sido desarrolladas para otro tipo de problemas como el cálculo, la construcción y el uso de algoritmos. En el último informe PISA (2018) se observó que los estudiantes mexicanos obtuvieron un puntaje bajo el promedio OCDE en lectura, matemáticas y ciencias. Si bien en las pruebas mencionadas

anteriormente no es explícita la necesidad de realizar pruebas matemáticas, considerando lo revisado en la sección anterior se puede suponer que si los estudiantes se familiarizan con ellas, su capacidad de razonamiento matemático mejora considerablemente, conduciéndolos a un mejor desempeño en pruebas como las citadas y otras similares.

1.3.2. El problema de investigación

En la sección anterior se mostraron estudios acerca del uso de la demostración matemática en el aula cuyas conclusiones tienden a alinearse con alguna de las dos afirmaciones siguientes: los estudiantes presentan una actitud positiva y de mejoramiento en su desempeño académico siempre que el enfoque de la demostración privilegie la participación activa, los conocimientos previos y la comunicación, o bien, los estudiantes presentan una desconexión respecto al uso de la demostración y sus verdaderos objetivos, el uso se vuelve imitativo y algorítmico. Cuando se llega a esta última conclusión, los estudiantes no se benefician de las características de la demostración mencionadas anteriormente –la motivación al razonamiento y la reflexión, la exploración, el descubrimiento, el acercamiento al objeto de estudio y la comunicación – y en se alude a un problema de mayor profundidad en el aprendizaje de las matemáticas, que es la tendencia tradicional a definir al aprendizaje como la adquisición pasiva de información, usualmente a través de la repetición (Anderson et al., 1996).

El aprendizaje de conceptos es contraproducente cuando se transforma en la memorización de conceptos y mecanización de procedimientos. Este conflicto aparente entre la práctica de los matemáticos y los métodos de enseñanza conduce a una falta de interés en el significado y apreciación de las demostraciones como herramienta funcional. Este problema de desconexión se presenta particularmente en en el campo de la geometría ya que los estudiantes se limitan a describir solo el aspecto físico de las figuras, no suelen reconocer sus propiedades matemáticas y emplean un lenguaje geométrico deficiente e impreciso (Chavarría-Pallarco, 2020).

Así, sería de utilidad una investigación referente a un nuevo enfoque con el que la demostración matemática puede ser implementada en el aula de clases, aquel en que se

redirecciona su utilización de manera que se aleje de los métodos tradicionales de memorización e imitación y que se concentra en las características de la demostración que lleven a los estudiantes un aprendizaje que fomente la conexión entre los conceptos matemáticos involucrados y permita que mejore su habilidades de resolución de problemas: el aprendizaje con entendimiento. El conocimiento matemático fortalece múltiples habilidades en el individuo, tales como el razonamiento, la abstracción, el análisis, la capacidad de discrepar y decidir, de sistematizar y de resolver problemas (Defaz, 2017), sin embargo, entender matemáticas no consta únicamente de memorizar hechos y algoritmos, o de ser capaz de operar aritmética o algebraicamente (Barrera y Reyes, 2014).

En resumen, y siendo que en la práctica profesional de las matemáticas se requiere un entendimiento profundo de las relaciones entre las ideas matemáticas y sus diversas representaciones –siendo la geometría sintética una rama en la que esto es de particular importancia –es de esperar que para que el estudiante alcance un aprendizaje con entendimiento, este proceso posea un papel protagónico en el aula. Si bien se han reconocido los beneficios de la demostración matemática para este fin, es necesario enfocar algunas de sus características de manera adecuada hacia un aprendizaje con entendimiento para mejorar las habilidades que la demostración otorga como herramienta didáctica.

1.3.3. Pregunta de investigación

La pregunta que dirigirá este trabajo de investigación es: ¿Qué características de la demostración matemática conducen al aprendizaje con entendimiento en geometría sintética para estudiantes de bachillerato público, ubicado en la ciudad de Pachuca, Hidalgo?

1.3.4. Objetivo general

Determinar de forma teórica y empírica algunas características de la demostración matemática que pueden conducir al aprendizaje con entendimiento al ser involucradas en el diseño e implementación de tareas de aprendizaje en clases de geometría sintética en nivel medio superior.

1.3.5. Objetivos específicos

- Identificar teóricamente algunas de las características de la demostración matemática que pueden promover el aprendizaje con entendimiento por medio de las estrategias propias de la aproximación didáctica de la enseñanza por descubrimiento en geometría sintética en el nivel medio superior.
- Diseñar e implementar tareas de aprendizaje que integren las características identificadas y que dirijan al estudiante hacia los beneficios descritos y derivados del aprendizaje con entendimiento a través de la enseñanza por descubrimiento en las clases de geometría sintética en el nivel medio superior.

1.3.6. Justificación

En el análisis que hace Ávila en 2016 sobre la historia de la educación matemática en México, se reporta que la geometría tuvo un lugar modesto en las investigaciones de los años 80 y 90 del siglo pasado; aunque se inició la discusión acerca de su lugar en el currículo escolar y también se diseñaron situaciones para contribuir a desarrollar el pensamiento geométrico, los investigadores ocupados en el tema fueron pocos. A mediados de los 90, el enfoque fue el cálculo, por lo que otras disciplinas fueron dejadas de lado. No fue hasta el inicio de los años 2000 cuando se le dio a la geometría el protagonismo que merecía, seguida por el álgebra, mientras que el cálculo pasó a un tercer lugar en términos cuantitativos, según informan Solares y Sandoval (2013) citados en el trabajo de Ávila.

Hoy en día, las investigaciones sobre geometría son especialmente interesantes porque analizan los procesos de construcción de conceptos y de producción de conjeturas y argumentaciones (Ávila, 2016) y, desde este punto de vista, esta rama de las matemáticas representa una herramienta muy útil para la implementación de la demostración como motivante para el aprendizaje con entendimiento en los estudiantes.

Lo que motiva el presente trabajo de investigación es la necesidad de un cambio en la enseñanza de las matemáticas orientado a un enfoque que privilegie el aprendizaje con entendimiento.

CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL

2.1 Introducción

La función del marco de investigación es sostener teóricamente y justificar las características de la metodología, por esta razón, debe ser diseñado de acuerdo a las necesidades particulares de cada trabajo. A continuación se presentan las descripciones de algunos marcos que cumplen con esta función, junto con sus ventajas y desventajas.

Si nuestra investigación se sostiene fuertemente en una o varias teorías ya publicadas, estructuradas y formales, nos será de utilidad el marco teórico. En este caso, el investigador debe recolectar datos, hipotetizar y preguntarse cosas basadas en dichas teorías y, a su vez, sus resultados deben apoyarlas, extenderlas o revisarlas. Cuando se decide implementar este tipo de marco, uno debe comprometerse a seguir la agenda investigativa programada y definida por los defensores de las teorías que representan. Esto es, el investigador elige conformarse y aceptar las convenciones, argumentaciones y experimentaciones asociadas con la o las teorías que ha elegido (Eisenhart, 1991). Por un lado, este tipo de marco facilita la comunicación, fomenta los programas de investigación sistemática y demuestra el progreso entre colegas que trabajan en problemas de investigación similares al propio, con variaciones en escenarios o con las personas con quienes se va a trabajar. Por otro lado, la principal desventaja es la pérdida de información al depender de una teoría preestablecida pues, si un investigador sabe de antemano las respuestas que espera obtener y la manera en que se espera obtenerlas, se corre el riesgo de dejar de lado información crucial para extenderla y datos que necesitan ser revisados quedan fuera de la investigación.

Otro tipo de marco de investigación es el práctico. Este guía la investigación usando "lo que funciona" en la experiencia o ejercicio del tema en cuestión y se orienta a determinar las características clave de la práctica y en qué circunstancias funciona de la forma que se esperaba una técnica, un comportamiento, un estilo de enseñanza, etc. Este marco no se basa en teorías, sino en este cúmulo de ideas obtenidas de practicantes y de la investigación previa, además de la opinión pública. Los resultados se utilizan para apoyar, extender o

revisar la práctica y el investigador decide basarse en el conocimiento público y convencional, desde la perspectiva de las personas interesadas en el tema (Eisenhart, 1991). Aunque este tipo de investigaciones poseen la ventaja de involucrar directamente a las personas que tienen contacto con el problema, puede suceder que las conclusiones a las que se lleguen describan los datos en términos del conocimiento preexistente de los practicantes en lugar de proveer evidencia convincente de que una práctica es mejor. Además, en ausencia de teoría no hay manera sistemática de pensar acerca de las condiciones en las que los resultados pudieran generalizarse. Finalmente, no hay evidencia que explique por qué estas prácticas funcionen o garantía de que lo hagan bajo otras condiciones.

Para las características y fines de este trabajo de investigación, adoptaremos un tercer tipo de marco de investigación denominado marco conceptual.

Los primeros dos tipos de marco mencionados tienen como principal objetivo dar explicación a fenómenos y/o a los resultados que se estudian en una investigación determinada, ya sea teórica o práctica-empírica; un marco conceptual, por el contrario, más que ser un esqueleto explicativo, es uno que justifica. Eisenhart (1991) lo define como un argumento que incluye distintos puntos de vista y que culmina en una lista de razones para adoptar uno por encima de otro. Así, se recolectan y adoptan ideas o conceptos que sirven como guías para recabar datos y/o para analizarlos y explicarlos. En otras palabras, un marco conceptual es un argumento constituido por conceptos, ideas, interpretaciones y cualesquiera relaciones anticipadas entre ellos que sean apropiadas y útiles, dado el problema de investigación.

Al igual que el marco teórico, se basa en investigaciones previas y literatura, con la diferencia de que es más flexible: puede adoptar constructos de varias teorías, lo que le da mayor libertad para suponer y poner a prueba relaciones que puedan existir entre ellas. En este caso se pueden reunir propuestas relevantes pertenecientes a teorías actuales además de explicaciones prácticas y tomar únicamente lo que conviene a la investigación. Así, los datos se recogen para ver cuáles propuestas podrán sostenerse por evidencia empírica y se

entregan resultados reportando cuáles teorías lo consiguieron y cuáles no y un sistema de teorías reformulado basado en los hallazgos de las pruebas empíricas.

En comparación con el marco teórico y el empírico, el marco conceptual facilita formas comprensivas y digeribles de revisar un problema de investigación. Al coordinar distintos conceptos se cubre un rango mayor de potenciales influencias a nuestro tema de investigación, lo que lo enriquece. Además, tiene la virtud de que enlaza las perspectivas de los interesados en el tema que se encuentran en contacto con el mismo desde el exterior y desde el interior, dando paso a interpretaciones.

El objetivo de este capítulo es construir la base sobre la cual se desarrollarán las contribuciones y observaciones acerca del problema de investigación, además de que nos permitirá interpretar los resultados, inducir el diseño del marco metodológico y de la tarea y, en la medida de lo posible, identificar nuevas líneas de investigación.

2.2 Referentes ontológicos, epistemológicos y didácticos

En esta sección se presentará la fundamentación teórica de la investigación, comenzando por adoptar una aproximación ontológica de las matemáticas y de la demostración, y posteriormente, el concepto de aprendizaje con entendimiento y los signos que lo evidencian, haciendo énfasis en el enfoque constructivista de este trabajo. Se especificará qué tipo de prueba es útil para alcanzar nuestros objetivos didácticos y cómo puede conducir al aprendizaje con entendimiento a través de la enseñanza por descubrimiento, además de sus beneficios y relevancia para los objetivos planteados en el Capítulo 1.

2.2.1 Dimensión ontológica: la ciencia de los patrones

Una base sólida sobre la cual construir el esqueleto teórico de una investigación es esencial, y en nuestro caso, el lugar natural donde comenzar es definiendo a la disciplina.

Las matemáticas se presentan como una ciencia particular, ya que los objetos que estudia “no son reales”. Bunge (1960) afirma que

[...] la lógica y la matemática son racionales, sistemáticas y verificables, pero no nos dan informaciones acerca de la realidad. [...] tratan entes ideales [...] [que] sólo existen en la mente humana. A los lógicos y matemáticos no se les da objetos de estudio: ellos construyen sus propios objetos. (p. 6).

Teniendo en cuenta el alto nivel de abstracción de estos objetos y que no se manifiestan como fenómenos naturales, Resnik (1981) afirma que no poseen características propias o estructuras internas, solo relaciones con las estructuras en sí mismas. En otras palabras, estos objetos carecen de identidad fuera de las estructuras a las que pertenecen, no tienen características propias ajenas a estas. Denominaremos patrones a estas estructuras.

Siendo más precisos, Resnik (1981) define un patrón como una entidad consistente en uno o más objetos –posiciones –que se relacionan de diversas maneras y que dependen del contexto que le brinda la estructura a la que pertenecen. Para esclarecer este concepto, una analogía geométrica útil es la del punto, que en sí mismo no posee particularidades que lo distingan además de que denota una posición en una estructura geométrica y depende de esta para adoptar cierta caracterización. Siguiendo esta analogía, los puntos serán los objetos matemáticos y las relaciones entre ellos tomarán el papel de estructura geométrica. Por otra parte, Godino, Batanero y Font (2007) definen al objeto matemático como “cualquier entidad o cosa [...] que interviene de algún modo en la actividad matemática” (p. 11), y, a su vez, define a esta última como “toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas.” (p. 4)

Entonces, si los objetos matemáticos no poseen características propias lejos del patrón que les da contexto, el foco de estudio de las matemáticas se traslada a la identificación de estos patrones y a la inspección de las relaciones existentes entre ellos. Por lo anterior, denominaremos a las matemáticas como la ciencia de los patrones.

La siguiente pregunta que nos haremos es: si el objeto de estudio de las matemáticas son los patrones, ¿cómo podemos identificarlos y validarlos?

2.2.1.1 Identificar y validar patrones

A pesar de que el objetivo de este trabajo de investigación no está enfocado en el proceso creativo de quien hace matemáticas, al ser parte importante de la actividad matemática en cualquier nivel, se mencionará brevemente. El modelo que el psicólogo A. R. Wallas propuso en 1926, en un intento de comprender el complejo proceso de descubrimiento en la actividad matemática y de acuerdo a Peraça y Montoito (2023) constituye cinco fases – preparación, incubación, iluminación y verificación –de las cuales nos interesa la última, pues implica un fuerte razonamiento lógico en el que el patrón se analiza, se verifica y se valida –o no –optando por mejorarlo o abandonarlo.

Hanna y Barbeau (2002) conectan el proceso de identificación de patrones matemáticos con el de su verificación mediante el concepto de conjetura, definida como una suposición educada, basada en otras afirmaciones matemáticas que ya se han aceptado como verdades con anterioridad. De acuerdo con el modelo de Wallas, estas conjeturas pueden surgir de la experimentación con casos particulares y si bien este proceso es importante en la actividad matemática, lo es también su generalización.

Grabiner (2021) realiza un estudio sobre la historia de la demostración y establece que se originó como una visualización, como la necesidad de responder la pregunta, “¿Es esto verdad? Muéstramelo”. Sin embargo, llegó el momento en que esta visualización no fue suficiente para los geómetras griegos, pues el análisis de casos en que lo que deseaban probar no era aparente, debía abordarse con una prueba lógica que partiera de las afirmaciones que sí lo eran. Esto dio origen a la primera noción de demostración matemática. La geometría debía fundamentarse en un conjunto relativamente pequeño de afirmaciones esenciales –axiomas –que pudieran aceptarse sin dificultad. Toda otra afirmación cierta debía derivarse de estas reglas y ser probada utilizando algún razonamiento lógico. La gran aportación de esta época fueron los Elementos de Euclides, primera lista de axiomas propuesta de manera formal en un intento de organización y sistematización de los patrones que hasta entonces se habían detectado en geometría, más aún, fue el primer intento de su formalización a través de una argumentación lógica.

Hanna y Barbeau (2002) indican que las estructuras matemáticas modernas usualmente se describen a través de conjuntos de axiomas consistentes –sin contradicciones entre sí –y suficientemente amplios para que se puedan derivar de ellos una serie de resultados más profundos –teoremas –que se considerarán ciertos si se puede derivar de dichos axiomas en un número finito de pasos lógicos. Como primera aproximación, utilizaremos esta definición de demostración matemática como esta “serie de pasos finitos”, convirtiéndose así en el medio para otorgar validez a un patrón identificado tras la experimentación con casos concretos.

Como ya se ha mencionado, las demostraciones matemáticas tienen muchas finalidades dependiendo del público al que van dirigidas. Las matemáticas son un trabajo humano (CadwalladerOslker, 2011), por lo que la adaptación de las demostraciones a las necesidades particulares del público es esperable y necesaria. Se presenta una clasificación de la demostración basada en estos roles de acuerdo con De Villiers (1999):

- a) **Pruebas con objetivo de verificación.** Este rol parece ser el más común para la demostración matemática, pues afirma CadwalladerOslker (2011) que un teorema no es un teorema hasta que ha sido verificado por la construcción de una prueba. Para este fin, requerimos una forma de prueba deductiva que nos ayude a construir una serie de argumentos que lógicamente lo respalden.
- b) **Pruebas con objetivo explicativo.** Estas pruebas son típicamente utilizadas en el salón de clases, pues el objetivo no es mostrar que un resultado es válido, sino las razones por las cuales lo es. Se aplican en caso de que se pueda llegar al resultado tras argumentos heurísticos y brinda un sentido de entendimiento de cómo la conjetura es consecuencia de otros resultados ya aceptados anteriormente.
- c) **Pruebas con el objetivo de comunicar.** Las demostraciones están sujetas a la constante crítica de quienes las leen y es una forma de comunicar resultados entre expertos, estudiantes, maestros y aprendices. La comunicación y exposición de una prueba contribuyen a su refinamiento y a la identificación de errores, así como al convencimiento del público. Adicionalmente, explicar en voz alta una demostración

expone las propias habilidades para comprender argumentos fuera de nuestra cabeza y determinar si el razonamiento es válido para otros.

- d) **Pruebas con el objetivo de descubrir.** A pesar de lo expuesto en el punto anterior, existen numerosos ejemplos en la historia de las matemáticas donde nuevos resultados se descubrieron de una forma puramente deductiva, las geometrías no euclidianas, por ejemplo. Así, la demostración es un medio de exploración, análisis, descubrimiento e invención de nuevos resultados (De Villiers, 1999).
- e) **Pruebas con el objetivo de sistematizar.** La prueba matemática es una herramienta que expone las relaciones lógicas subyacentes entre diversas afirmaciones matemáticas y permite organizar las que no se relacionan directamente en una estructura coherente y unificada (De Villiers, 1999).
- f) **Pruebas como objetivo intelectual.** Para los matemáticos, las pruebas tienen un atractivo intelectual, pues completarlas es un ejercicio satisfactorio, así como quienes encuentran gratificante escalar una montaña: no se escala porque esté en duda su existencia, sino para saber si podemos llegar a la cima.

Habiendo abordado la naturaleza y definición de conceptos de importancia para este trabajo de investigación, procederemos a analizar cómo estos se relacionan con el conocimiento matemático y cómo este se puede adquirir a través de su utilización.

2.2.2 Dimensión epistemológica: conocimiento matemático

Entre los mayores aportes del psicólogo Jean Piaget (1896-1980) se encuentra la Teoría del Desarrollo Cognitivo, en la que busca describir y abordar cómo los seres humanos adquieren conocimiento y que descansa sobre la Teoría Constructivista. Uno de los pilares fundamentales de la última es el principio que establece que el conocimiento es una construcción del ser humano, cada persona percibe la realidad, la organiza y le da sentido en forma de constructos (Ortiz, 2015). Así pues, el conocimiento no se absorbe del entorno donde se encuentra, sino que se construye continuamente. Además, la Teoría del Desarrollo Cognitivo introduce el concepto de esquemas, que son estructuras mentales que organizan y representan el conocimiento y se basan en dos procesos (Papalia et al., 2007): primero, el

de asimilación, que se refiere al contacto que el individuo tiene con los objetos del mundo a su alrededor y cómo se apropia de sus características; en segundo lugar, el de acomodación, referido a la integración de los objetos asimilados a la red cognitiva del sujeto, y a cómo contribuyen a la construcción de nuevas estructuras de pensamientos e ideas. Así, el conocimiento es el resultado de la organización de los esquemas mentales que establece el sujeto consigo mismo y con el mundo que lo rodea (Hernández y Pacheco, 2017).

Es en esta concepción del conocimiento en la que se basará el presente trabajo. En la siguiente sección, se ahonda más específicamente en el conocimiento matemático.

2.2.2.1 El conocimiento en matemáticas

Se ha mencionado anteriormente que el conocimiento matemático es más que sólo la memorización de algoritmos o la capacidad de operar aritmética o algebraicamente. Detlefsen (1990) define al conocimiento matemático como un tipo de conocimiento práctico de cómo realizar ciertas acciones, en lugar de una reflexión racional sobre varias proposiciones y el subsecuente reconocimiento intelectual o teórico de que son verdaderas. En otras palabras, enfatiza la parte práctica del conocimiento matemático –que podemos considerar compuesto por el saber cómo hacer matemáticas –sobre la teórica. Menciona que el conocimiento genuino sobrevive y permanece accesible, se mueve a la acción y posee mayor profundidad que aquél puramente teórico o intelectual. Este énfasis también considera el aspecto local en el conocimiento teórico. Básicamente, el conocimiento matemático sobre el tema p se basa en la familiaridad local con los otros temas matemáticos a los que pertenece p , esto es, las conexiones que existen entre p y los temas con los que se relaciona. De esta manera, para el presente trabajo de investigación, consideraremos que al conocimiento matemático lo componen la parte práctica –entendimiento de métodos argumentativos y de razonamiento como la demostración –y la parte teórica –consistente en conceptos matemáticos, teoremas, algoritmos de cálculo, etc.

En alusión al conocimiento teórico, es relevante mencionar al aprendizaje por repetición o aprendizaje mecánico, basado principalmente en la habilidad de memorización. A pesar de que la memorización es importante para el aprendizaje, los estudiantes pueden no entender

profundamente el significado y el uso de lo aprendido (Retnowati, 2014), puesto que su adquisición no se acompaña de un esfuerzo por encontrar conexiones entre los elementos del material de aprendizaje. Para fortalecer estas conexiones, es necesario poner atención al conocimiento práctico, y encontrar un equilibrio entre ambos.

En este sentido, se reconoce que la representación a través de estructuras internas de tanto el aspecto teórico como el práctico del conocimiento matemático es algo vital para pensar en ideas matemáticas y, más aún, para operarlas. Con este equilibrio en mente y considerado el tradicional protagonismo del aspecto teórico de las matemáticas en su enseñanza, es necesario el fortalecimiento de la parte práctica y de las conexiones entre objetos matemáticos. El entendimiento, de acuerdo con Hiebert y Carpenter (1992), se describe en términos de la forma en que se estructuran las representaciones internas de un individuo y su crecimiento depende de si las redes cognitivas se vuelven más amplias y organizadas. Quizá la forma más simple de que ocurra esto es adhiriendo una representación para un nuevo hecho o procedimiento a una red ya existente.

En resumen, para alcanzar el equilibrio entre ambas partes del conocimiento matemático es importante enfocarse en el fortalecimiento y ampliación de las redes que conectan las representaciones internas de los objetos matemáticos, es decir, es necesario priorizar el *aprendizaje con entendimiento*. Lo que define a este tipo de aprendizaje es que estas ideas deben ser accedidas por el individuo de forma fluida en nuevas situaciones y, además, debe poseer la capacidad de utilizar lo que ha aprendido en problemas nuevos, así como de aprender información relacionada más rápidamente. Estas habilidades son esenciales porque la mayoría de los problemas nuevos requieren de estrategias previamente aprendidas; sería imposible volverse competente en matemáticas si cada problema requiriera una estrategia diferente (Stylianides y Stylianides, 2007).

2.2.2.2 El conocimiento práctico y la demostración matemática

Poniendo atención en el aspecto práctico del conocimiento matemático, varios investigadores han puesto interés en la conexión entre el aprendizaje de las matemáticas

con entendimiento, el razonamiento y la demostración. El razonamiento matemático es una parte esencial en el entendimiento puesto que el conocimiento teórico no es suficiente – conocer ideas matemáticas en general como hechos o rutinas –para utilizarlo en distintos casos (Ball y Bass, 2003). Además, el razonamiento matemático es fundamental para reconstruir el conocimiento que se haya debilitado cuando sea necesario, en contraparte con la memorización, que no permite este proceso o lo vuelve más difícil. Recordando los posibles objetivos de la demostración, se busca no sólo la presentación de argumentos, sino la actividad matemática para llegar a ciertas convicciones, realizar verificaciones y comunicarlas (Bell, 1979), por lo tanto, el razonamiento matemático está intrínsecamente relacionado con la demostración, convirtiéndola en una herramienta esencial para promover el entendimiento, de acuerdo con Zaslavsky et. al., (2012) la variedad en las perspectivas proporcionadas por múltiples pruebas y ejemplos, proporcionan una red de conexiones que profundizan el entendimiento de conceptos matemáticos.

En la sección anterior se proporcionó una primera aproximación del concepto de demostración matemática, sin embargo, esta definición es poco realista considerando el tipo de demostraciones que los matemáticos escriben realmente. En este sentido, es necesario evaluar la relevancia de la formalidad en el alcance del aprendizaje con entendimiento. Antes se mencionó que la demostración matemática utiliza axiomas –verdades aceptadas inicialmente –que sirven para construir esta serie de pasos finitos que nos llevan a una conclusión deseada, sin embargo, no habremos de volver a estos axiomas cada vez que busquemos probar un resultado. Por ejemplo, pocas veces haremos referencia a los axiomas de campo de los números reales para demostrar que, de hecho, estamos haciendo operaciones aritméticas de forma aceptable si el resultado que buscamos probar se enfoca en otras ideas. La demostración sería demasiado larga y con pasos excesivos, que incluso pueden llegar a entorpecer el entendimiento en lugar de promoverlo. Por lo anterior, esta noción tan puramente formal de demostración no refleja la práctica de los matemáticos. Siendo más laxos con esta formalidad, se permitirá el uso de teoremas ya probados, sin necesidad de regresar hasta los axiomas iniciales. Así, el significado de demostración es

aquella serie de pasos lógicos que se puedan leer, entender y revisar en su totalidad dentro del contexto de un sistema axiomático y las reglas formales de la lógica (Tall, 1989).

Recordando que las pruebas matemáticas son un trabajo humano y que es necesario que sean de utilidad para todos los miembros de la comunidad, consideraremos la definición citada por Richman y Hersh en 1998: *una prueba matemática práctica es aquella que hacemos para convencernos los unos a los otros de la veracidad de nuestros teoremas*. Bajo esta definición, este convencimiento depende de las condiciones particulares de quien escribe y lee la prueba, pues el lector hace juicios basados en criterios subjetivos. Sin embargo, esto no indica que la definición carezca del *rigor* que debe caracterizar al trabajo matemático. El rigor se refiere a este conjunto de estándares que la comunidad ha aceptado y, aunque definirlo precisamente puede ser casi imposible, podemos decir que las pruebas se escriben de tal forma que el rigor utilizado es aparente, en principio, mostrando que todos los casos relevantes se han considerado.

Weber (2009) también hace referencia a esta demostración matemática práctica², pues la describe como aquella en la que se toman en cuenta distintas representaciones de los conceptos matemáticos como gráficas, diagramas, gestos kinestésicos o ejemplos. Siguiendo a Hanna y Jahnke (1976) que colocan al rigor en una jerarquía menor en la práctica matemática y dan prioridad al entendimiento, concluimos que la prueba se vuelve convincente sólo cuando conduce a este. Similarmente, Rocha (2019) afirma que en ocasiones es mejor perder formalismo en favor de la intuición, por lo que consideramos que el uso de la prueba matemática práctica será adecuado para el presente trabajo de investigación. Con este enfoque en mente, las demostraciones relevantes serán las que tengan por objetivo la explicación, la comunicación y el descubrimiento, debido a la relevancia del primero en el salón de clases y que, de acuerdo con De Villiers (1993), es a los dos últimos a los que se debe poner mayor atención en el contexto de la educación matemática. En un papel menos protagonista, la verificación estará presente cuando la ocasión lo amerite.

² Bajo el nombre “prueba semántica”.

2.2.2.3 Signos de aprendizaje con entendimiento y objetivos de la demostración

Teniendo en cuenta el tipo de prueba matemática que se considerará en este trabajo, y ya que la principal razón para ligar a la prueba con el aprendizaje con entendimiento es su acercamiento al equilibrio entre lo procedimental y el razonamiento matemático que caracteriza a este último, en esta sección relacionamos con mayor precisión los mencionados objetivos y sus características con dicho aprendizaje.

De manera general, los tres principales objetivos de la demostración promueven dos componentes esenciales en el trabajo matemático: la reflexión y la comunicación de ideas. Barrera y Reyes (2014) definen la reflexión como el momento en que se piensa conscientemente acerca de las experiencias propias y los diferentes puntos de vista al respecto, además de analizar conscientemente lo que uno hace y las razones de por qué lo hace y determinan que la comunicación se relaciona con escuchar, hablar, escribir, observar, justificar y participar en un proceso de interacción social en una comunidad de aprendizaje, al compartir las ideas y escuchar a otros y el proceso de análisis, evaluación y ofrecimiento de sugerencias para complementar o mejorar esas ideas. Enfatizan la importancia de cuestionar, pedir aclaraciones y explicaciones, pues beneficia el pensamiento profundo para describir nuestras propias ideas, explicarlas claramente y justificarlas.

Los autores mencionan que los estudiantes que atraviesan estos procesos en su trabajo matemático cuentan con un ambiente que promueve la construcción y fortalecimiento de las conexiones entre conceptos matemáticos que conducen al entendimiento. Basándonos en la definición de aprendizaje con entendimiento que se adoptó, consideraremos tres principales signos de entendimiento: *i)* persistencia de la información en la memoria tras periodos medianos y largos de tiempo; *ii)* fortalecimiento y/o surgimiento de conexiones entre ideas o conceptos nuevos o que previamente existían en su esquema mental; y *iii)* capacidad para implementar lo aprendido en problemas similares y/o nuevos.

2.2.2.3.1 Objetivo explicativo y comunicativo

Harel y Sowder (1998) mencionan que los dos principales objetivos de un alumno cuando proporciona argumentos para sustentar o validar lo que propone son el convencimiento,

entendido como el proceso individual para remover las propias dudas acerca de la verdad de una aserción (convencerse a uno mismo); y la persuasión, como el proceso de remover las dudas de otros acerca de la verdad de una aserción (convencer a los demás). El primer objetivo, lo acerca al pensamiento crítico al promover la pregunta *por qué* y representa un importante ejercicio de reflexión que, como se mencionó anteriormente, lo acerca al aprendizaje con entendimiento. Antes de persuadir a un público de que un resultado es verdadero o de comunicarlo, el estudiante debe estar seguro de su veracidad. Para alcanzar este objetivo, se considerarán dos técnicas demostrativas particulares, por sus importantes elementos exploratorios y su capacidad de convencimiento natural para los estudiantes:

1. **Exploración de casos particulares.** Si bien esta técnica se inclina a lo heurístico y no posee la formalidad suficiente para determinar que un resultado sea válido de manera general, es una manera natural en la que el estudiante puede concretar un resultado abstracto. Siguiendo a Vinner (2011), es importante explorar ejemplos para realizar conjeturas y determinar si estas son válidas. Por parte del docente, es deseable mostrar a los estudiantes estos *micro-mundos* en los que un conjunto de ejemplos particulares apoyan cierta conjetura.
2. **Contraejemplos.** Se opta por utilizar contraejemplos cuidadosamente elegidos para alcanzar el autoconvencimiento de que un resultado es falso. En contraposición con la técnica anterior, tomando el ejemplo de Vinner (2011), en el contexto de ecuaciones cuadráticas, un estudiante puede suponer que las soluciones de ecuaciones de la forma $x^2 + bx + c = 0$, con b, c enteros, son divisores de c . Existe una infinidad de ejemplos que apoyan esta conjetura, sin embargo, es falsa. Así, la guía adecuada del profesor hacia contraejemplos –y ejemplos – representativos, puede llevarlos a darse cuenta de que la conjetura que formaron es falsa e, incluso, llevarlos a entender la importancia de establecer la validez de un resultado a través de una demostración.

Finalmente, puesto que en las pruebas prácticas el formalismo pasa a segundo término, se sirven de un elemento muy importante: las distintas representaciones y los cambios entre estas, en este caso, para alcanzar el autoconvencimiento.

En primer lugar, se tiene la visualización –en diagramas, dibujos o gráficos –de un problema matemático. Zimmermann y Cunningham (1990) señalan a la visualización matemática como el proceso de formación de imágenes –mentalmente, con lápiz y papel, o con herramientas tecnológicas –y su uso en forma efectiva para el descubrimiento matemático y el entendimiento. Estas representaciones ayudan al estudiante a concretar el problema y promueven las conexiones entre diversas representaciones mentales que poseen de diversos conceptos involucrados con él, sin embargo, debemos ser cuidadosos con esto. Como en el caso del uso de ejemplos concretos como técnica heurística, nos es de enorme utilidad la representación gráfica porque permite al estudiante acercarse a los conceptos y manipularlos con mayor facilidad, sin embargo, pueden ocurrir –y tienden a hacerlo – situaciones en las que las representaciones, así como los ejemplos concretos, nos lleven a conclusiones erróneas respecto al problema que deseamos resolver. Tomemos el ejemplo de Hitt (1998) en donde “demuestra que $64 = 65$ ” de manera visual. En la figura que ilustra este argumento, de lado izquierdo se tiene un cuadrado de área $64u^2$ y de lado derecho un rectángulo de área $65u^2$ y, por el acomodo de las figuras A, B, C y D (*Figura 1, a continuación*), pareciera que las cuatro cubren ambos cuadriláteros de manera perfecta, siendo esto imposible. Por otro lado, observando el trazo preciso con una herramienta digital, se observa que el acomodo no es perfecto:

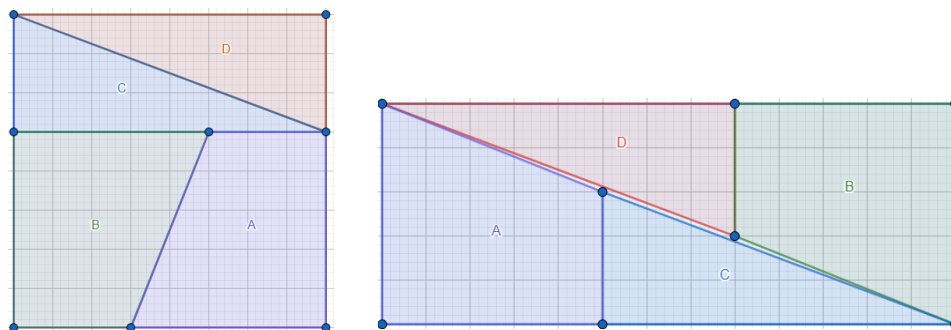


Figura 1. Trazo realizado con GeoGebra.

Por ejemplos como el anterior, no basta con recurrir a las representaciones geométricas para resolver un problema, es necesaria la articulación, libre de contradicciones, entre las diferentes representaciones semióticas utilizadas en la resolución del mismo (Hitt, 1998). Generalmente los objetos matemáticos se representan con notaciones diferentes que ayudan a producir diferentes sentidos pero no producen todos los sentidos individualmente. Por lo tanto, comprender un objeto matemático requiere utilizar diferentes notaciones y convertir una representación en otra (Font, 2009), lo que fortalece las conexiones entre dichos sentidos y promueve un aprendizaje con entendimiento.

Otra representación a tomar en cuenta será la del lenguaje tanto oral como escrito, que puede aludir a cualquiera de los dos objetivos que dan título a esta subsección, es decir, pueden servir al estudiante para autoconvencerse o para persuadir a un público de que un resultado es verdadero. Uno de los problemas teóricos más importantes es el que refiere al rol del lenguaje en las matemáticas, puesto que el objeto de estudio de esta ciencia es completamente abstracto (Morgan et. al., 2014), la transformación hacia este tipo de representaciones, especialmente partiendo de una representación simbólica, permite que el estudiante se enfrente con la necesidad de describir las características del proceso que está realizando, del problema que está abordando o de la prueba que está construyendo. Entre los beneficios más importantes del lenguaje verbal está el propio entendimiento de la actividad matemática, es decir, el estudiante se debe dar cuenta de su capacidad para traducir sus ideas entre estas dos representaciones –aunque no exclusivamente –y si puede traer a su mente las representaciones adecuadas y si estas se encuentran conectadas. Esto nos da señales de la presencia o ausencia de aprendizaje con entendimiento, puesto que cuando los estudiantes se concentran en la escritura expositiva de un argumento, los procesos cognitivos requeridos para proveer de explicaciones claras implican un pensamiento matemático y entendimiento más profundos (Craig 2011; Misfeldt 2007).

Una vez que el estudiante logra representar sus argumentos verbalmente y que alcanza el autoconvencimiento, debe moverse al objetivo de la persuasión y comunicación de resultados. Hoyles (1997) menciona que puede alentarse al estudiante a involucrarse y

apropiarse del proceso demostrativo a través de la dimensión social de las pruebas explicativas, es decir, mediante actividades que los lleven a explicar sus argumentos a un compañero o a su profesor para convencerlos de la verdad. Estudios como el de Sackur et al. (2000) promueven la creación de un ambiente social óptimo para aprender a demostrar a través de la interacción social y es en este en el que los estudiantes avanzan hacia la demostración deductiva a medida que logran una convicción propia de los enunciados que estudian. Este nivel social también promueve el aspecto de las contradicciones. Cuando dos –o más –estudiantes se involucran en una discusión y enfrentan sus conclusiones, inevitablemente existirán desacuerdos y la necesidad de reacomodar información. Como menciona Piaget en su Teoría del Desarrollo Cognitivo, diversas opiniones llevan al individuo a revisar sus afirmaciones y, de ser necesario, a modificarlas.

Por otra parte, una prueba escrita para uno mismo tiende a cambiar de forma significativa cuando se adapta para ser leída por alguien más o para comunicar un resultado, por esto, la modificación del lenguaje será una señal de intención persuasiva en el estudiante. Consogno (2005), argumenta que la noción transformacional del lenguaje escrito en el proceso de producción y reinterpretación de un texto contribuye al razonamiento matemático. Así, la autora menciona que al escribir las soluciones de un problema, un proceso de expansión lingüística lleva a los estudiantes a conectar nuevas palabras y significados con claves del problema que aborda, modificando la dirección de su razonamiento. En otras palabras, esta modificación implica cierto refinamiento, un cambio en la terminología orientado a que una tercera persona –o personas –se acerque más a la idea que el estudiante tiene en mente. Ahora bien, este cambio debe tener un sentido matemático, es necesario cierto nivel de *especialización* en el lenguaje que utilizan.

Aunque el uso de las representaciones matemáticas es necesario para el razonamiento, las representaciones coloquiales también representan un rol esencial en el apoyo del desarrollo conceptual. Se concluye que la habilidad para moverse entre ambos tipos de representaciones y modificar el lenguaje utilizado debe ser motivado por actividades desarrolladas por los docentes (Planas et al., 2018).

Finalmente, otro par de representaciones a tomar en cuenta serán la simbólica y, en menor medida, la kinestésica. Es claro que en la enseñanza tradicional de las matemáticas, las representaciones simbólicas –aquellas que involucran símbolos algebraicos, números y letras –han tomado protagonismo a lo largo de la historia, sin embargo, la manipulación de signos no representa entendimiento a menos que el estudiante sea capaz de entender su significado. Este protagonismo tiene una razón, ya que de acuerdo con Pimm (1987), citado por Planas et al. (2018), cualquier consideración de lenguaje matemático debe tomar en cuenta las formas de comunicación distintivas de la matemática escrita, en particular, la notación algebraica; sin embargo, para determinar si el estudiante ha alcanzado el nivel de entendimiento adecuado para manipular estos símbolos sin perder de vista su significado, estas transformaciones de representación son de gran relevancia.

Finalmente, si bien el enfoque kinestésico o de gestos físicos no tendrá especial acento en este trabajo, cuando estos aparecen también dan cuenta el proceso de cambio que atraviesan los estudiantes y de las conexiones entre dichas representaciones mentales que ellos poseen. Bjuland, Cestari y Borgersen (2007) estudiaron cómo el docente y los estudiantes combinan el uso de gestos y lenguaje verbal al estudiar el plano cartesiano y distinguieron movimientos que los participantes integraban con su lenguaje verbal, y cómo los llevaban al uso de estrategias discursivas como comparación y coordinación. Concluyeron que, en el razonamiento matemático, los gestos y el discurso se desarrollan al mismo tiempo y que los primeros refuerzan al segundo. Estas reflexiones son señales de un nivel más profundo de entendimiento.

2.2.2.3.2 Objetivo de descubrimiento

Con este objetivo, nos referimos al descubrimiento o invención de nuevos resultados de forma deductiva, mediante la exploración y análisis de una demostración, además del aspecto que permite una generalización futura. Estos resultados pueden ser proposiciones, nuevas pruebas, afirmaciones, conceptos, contraejemplos, definiciones, entre otros. Por su naturaleza, este objetivo se encuentra estrechamente relacionado con el aprendizaje y la enseñanza por descubrimiento. El primero, se refiere a la forma en que se expone a los

estudiantes a preguntas y experiencias particulares de tal forma que ellos descubran conceptos e ideas por sí mismos (Hammer, 1997) y, en cuanto a la enseñanza por descubrimiento, se abordará en la sección didáctica de este capítulo.

En la obra *The Act of Discovery* (1961), Bruner hace énfasis en que el descubrimiento, ya sea por un estudiante que lo encuentra por sí solo o por un científico en su campo de especialización, es esencialmente “el reacomodo o transformación de evidencia de tal modo que se pueda ir más allá de ella, redireccionada a nuevos conocimientos.” (p. 2) y, dentro del aula de clases, habla de cuatro beneficios que trae al estudiante, de los cuales resaltamos el aumento de la potencia intelectual y el desarrollo del proceso de la memoria, pues son los que evidencian de mejor manera su relación con el aprendizaje con entendimiento.

El autor declara que existe una diferencia significativa entre la forma de proceder ante un problema cuando, por un lado, se sabe que hay un patrón o una regularidad a descubrir y, por otro, cuando se cree que todo es producto del azar. Así, la actividad cognitiva oscila entre dos dimensiones que él llama empirismo episódico y constructivismo acumulativo. El empirismo episódico se caracteriza por la recopilación no restringida de información que carece de conectividad y es deficiente en cuanto a la persistencia organizada, definida como la cualidad de persistir en una tarea de manera dirigida, con un objetivo, no de forma caótica; el segundo tiene la cualidad de poseer una sensibilidad a la restricción de la recopilación de datos, restricción dictada por la conectividad entre los mismos y, además, posee persistencia organizada. De este par de conceptos se desprende la relación que existe entre el descubrimiento y el aprendizaje con entendimiento.

Como se mencionó ampliamente en secciones anteriores, el fundamento del aprendizaje con entendimiento es que permite adquirir la capacidad de conectar ideas, conceptos y procesos matemáticos, y es en el constructivismo acumulativo en el que se organiza la información adquirida, además de dirigirla a la conexión entre las ideas que la componen. Bruner (1961) concluye que el descubrimiento tiene el efecto de llevar al estudiante a convertirse en un constructivista, es decir, que organiza sus hallazgos de forma que no sólo se enfoque en sus regularidades y relaciones, sino también a evitar la recopilación de

información sin tomar en cuenta los usos de ésta. La práctica en el descubrimiento que realizamos por nosotros mismos nos enseña a adquirir información de forma que esté lista y sea viable en la resolución de problemas lo que, inevitablemente, estimula la potencia intelectual del individuo y es base fundamental del aprendizaje con entendimiento: tener acceso de forma fluida a la información aprendida al enfrentarse a problemas futuros.

Retomando esta característica del aprendizaje con entendimiento, el autor nos habla de otro importante beneficio: la conservación de la memoria. Su visión sobre esta tiene por premisa que el principal problema de la memoria no es la capacidad, sino la recuperación y la clave para alcanzarla de manera oportuna es la organización. En términos más simples, se reduce a saber dónde encontrarla y cómo llegar a ella. Un estudio dirigido por Bruner indica que cualquier organización de información que reduzca la complejidad agregada al material al insertarla en una estructura cognitiva que la persona haya construido, hará que el material se vuelva más accesible a la recuperación. En otras palabras, al construir la mencionada estructura cognitiva a través de, digamos, conexiones profundas entre las ideas que nos interesa aprender, se tendrá acceso oportuno a la información.

A lo largo de la sección siguiente se especificarán las características que deben cumplir las demostraciones que nos serán útiles para alcanzar los objetivos mencionados, además de algunas técnicas demostrativas que, si bien no es necesario limitarnos a estos, son cuando menos adecuadas para cada uno de ellos.

2.2.3 Dimensión didáctica: ¿cómo enseñar matemáticas a través de la demostración?

El valor y presencia de la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática en la didáctica ha cobrado fuerza en los últimos años (Godino y Recio, 2001). Sin embargo, como se mencionó anteriormente, la aproximación puramente formal a este concepto no es adecuada para alcanzar un aprendizaje con entendimiento, ya que la prueba en matemáticas como disciplina es diferente a la presente en la matemática escolar (Rocha, 2019). Por lo tanto, en la presente sección se exponen las características de una demostración útil en el salón de clases (DUSC, a partir de ahora) de acuerdo a Stylianides y Ball (2008):

- 1) Utiliza afirmaciones previamente aceptadas en la comunidad del aula de clases que son verdaderas y a las que se tiene acceso sin mayor justificación.
- 2) Emplea formas de razonamiento válidas y conocidas por la comunidad en el aula o, en su defecto, que están a su alcance conceptualmente hablando.
- 3) Se comunica con formas de expresión apropiadas y conocidas por la comunidad en el aula o, en su defecto, que están a su alcance conceptualmente hablando.

Adicionalmente, Larios (2015) propone que las **demostraciones en el contexto escolar** deben tener por objetivo convencerse a sí mismo y a los demás de una afirmación o hecho matemático, por lo tanto, una demostración en este contexto se considera como aquella prueba matemática práctica que cumple con tres componentes esenciales: el conjunto de afirmaciones aceptadas (axiomas, teoremas, definiciones), la forma de argumentación (tipo de demostración: por contradicción, directa, etc.) y la forma en que estos argumentos se representan (distintas representaciones). Desde luego, hay que considerar lo que es aceptado, conocido o conceptualmente accesible para una comunidad en un aula y momento específicos. Así, esta es la estructura que seguirán las demostraciones relevantes para esta investigación, que de manera implícita involucran los objetivos descritos en la sección anterior.

En la siguiente subsección se busca especificar la estructura de la DUSC, considerando como base los tres puntos anteriormente mencionados.

2.2.3.1 Demostraciones útiles en el aula de clases

Ahora bien, a pesar de que la prueba práctica no se enfoca en la formalidad, es necesario determinar qué tipo de argumentos serán aceptados como “suficientemente formales”. Se considerará el modelo de Toulmin (2007) como una herramienta para analizar la estructura funcional de los argumentos dados por los estudiantes, cuya interpretación rescatamos de Larios (2015). El autor menciona que este modelo buscó determinar si un argumento era válido a partir de su estructura y las relaciones entre los elementos que intervienen en él, y proporciona un diagrama donde resume dicha estructura:

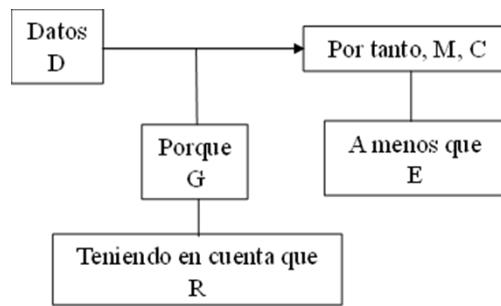


Figura 3. Esquema de la estructura de una demostración válida en el salón de clases.

Los elementos que conforman esta demostración “suficientemente formal” son: conjunto de afirmaciones aceptadas o datos (D); forma de argumentación accesible o respaldo (R) y la forma en que estos argumentos se representan; garantías (G), que muestra la relación entre los datos y la conclusión; modalizadores (M), que indican los probables resultados en la argumentación; condiciones excepcionales (E), que pueden servir para aceptar o rechazar las conclusiones dependiendo de la situación; y, por último, conclusiones (C). Nótese que para que una DUSC adopte esta estructura, basta con adaptar estos elementos a la comunidad específica a la que nos dirigimos.

2.2.3.2 Enseñanza por descubrimiento y DUSC

Se ha descrito ampliamente la importancia de los tres principales objetivos de una DUSC, sin embargo, nos compete ahora determinar las estrategias que nos permitirán aprovechar estos beneficios en el aula. Como se ha mencionado anteriormente, la enseñanza por descubrimiento es la aproximación didáctica a implementar, y se centra en el contenido de la matemática como algo culturalmente valioso que debe ser conocido por los estudiantes y que, además, debe ser descubierto o redescubierto mediante diferentes técnicas instructivas: diálogo socrático, razonamientos dirigidos mediante actividades explícitamente programadas, inducción a partir de ejemplos, etc. (Del Río, 2011). Esta aproximación establece que los estudiantes deben ser capaces de producir y construir su propio conocimiento y está orientada hacia la participación interactiva entre los estudiantes, el profesor, los contenidos estudiados y la estructura cognitiva del estudiante (Baro, 2011).

Del Río (2011) destaca la influencia positiva de este tipo de enseñanza en la retención, si bien enfocar la atención en descubrir conceptos toma más tiempo, después de un periodo prolongado se observa que estos estudiantes tienden a recordar mejor la información que a quienes se explica sin necesidad de explorar, evidencia de aprendizaje con entendimiento.

Se consideró necesario complementar el proceso de enseñanza por descubrimiento con una estrategia que incentiva la interacción social entre estudiantes y el docente, se trata de la sugerencia de Sackur et al. (2000) de utilizar *discusiones matemáticas* descritas por Bartolini (1991) como herramientas de enseñanza que toman en cuenta la necesidad de la interacción social en la construcción de las matemáticas. Se destacan cinco etapas que el estudiante debe atravesar, de las cuales rescatamos las primeras tres por su relevancia para el presente trabajo, siendo que la tercera se adaptó a las necesidades del mismo:

1. Los estudiantes activan su propio conocimiento, utilizan lo que saben y algunos de ellos pueden cometer ciertos errores esperados.
2. Al trabajar juntos, tienen la oportunidad de:
 - Confrontar su opinión con la de los demás y elegir una respuesta, generando un conflicto entre los estudiantes.
 - Una vez elegida, se aseguran de su validez a través de la discusión con otros.
 - Llegar a un acuerdo con bases matemáticas. En este punto, experimentan la necesidad de cierto conocimiento matemático para justificar sus resultados.
3. Se reporta lo obtenido al grupo general y al profesor. Aquí, toma lugar el proceso de síntesis. Los estudiantes hablan de su trabajo y el profesor puede intervenir y tomar ventaja de los avances de ciertos individuos para guiar a los demás.

En el siguiente esquema, tomado de Sackur et al. (2000), se resume el proceso social en el que participan los estudiantes en su práctica demostrativa.



Diagrama 1. Esquema de intercambio social en el salón de clases.

Esta propuesta de trabajo en el aula promueve que los estudiantes interactúen socialmente y desarrollen habilidades de comunicación y argumentación oral y escrita.

Como se mencionó anteriormente, el centro lógico del aprendizaje por descubrimiento se encuentra en la evaluación de conjeturas mediante la demostración, lo que deja claro que la función de verificación está estrechamente relacionada con el descubrimiento. Una vez que el estudiante descubre patrones nuevos, será necesario comprobarlos o refutarlos con un argumento deductivo, enfatizando que los descubrimientos que realicen no serán válidos a menos que una prueba se produzca y que a pesar de haberlo intuido mediante el uso de ejemplos, no son de ninguna manera sustitución ésta. Puesto que este proceso no promete ser inmediato o evidente, se requieren ciertas consideraciones para diseñar tareas didácticas que promuevan el descubrimiento a través de la demostración.

Miyazaki (2000) describe en su estudio sobre el uso de la función de descubrimiento de la demostración las características que deben tener las actividades orientadas a este fin. Además, Larios (2015) también enlista las etapas que atraviesa el estudiante para adoptar la práctica demostrativa orientada al descubrimiento de manera natural.

A continuación, se presenta una combinación de ambas aportaciones que involucra una serie de elementos a tener en cuenta por el profesor para implementar una enseñanza por descubrimiento sugeridos por Del Río (2011) además del proceso para diseñar este tipo de actividades y aplicarlas en el aula.

Tabla 2. Proceso de aplicación de actividades en la enseñanza por descubrimiento para el estudiante y para el docente	
<i>Proceso del estudiante</i>	<i>Proceso del docente</i>
Se parte de la exploración de una situación propuesta por el profesor. El estudiante realiza una observación detallada de los elementos que componen el problema, y procura organizarlos adecuadamente.	La actividad debe estar diseñada tras la identificación de ideas previas de los estudiantes, sus concepciones intuitivas y su nivel de competencia en las estructuras conceptuales sobre las que se asientan los nuevos conceptos o procedimientos algorítmicos.
Los estudiantes producen una conjetura o planteamiento de una propiedad tras la observación llevada a cabo.	Este proceso apoya en estrategias como: ❖ Elaboración de definiciones. ❖ Razonamientos dirigidos: dada la dificultad intrínseca de ciertos argumentos, éstos se presentan de modo inacabado, con numerosas lagunas que el alumno debe rellenar. ❖ Complementación de cálculos.
Exploración orientada a la búsqueda de justificaciones de las conjeturas o propiedades planteadas u observadas.	Basados en las conjeturas producidas, se busca guiar al alumno hacia el tipo de argumentación adecuada para probar o refutar sus proposiciones.
Producción de la demostración que valida o justifica las conjeturas o las propiedades planteadas u observadas. No solamente deben seguir la serie de argumentos en una prueba sino comprender por qué se requieren.	Muchas veces las demostraciones emplean cierto nivel de dificultad que requiere orientación del docente. Esta orientación debe alcanzar un equilibrio que no anule el proceso constructivo pero que garantice la evaluación de conjeturas eficaz.
Una vez que el estudiante ha comprendido la necesidad de cada elemento en la serie de argumentos de la prueba, será capaz de hacer nuevas proposiciones.	A partir de casos estudiados anteriormente, se pide encontrar un procedimiento general, si existe, para situaciones similares. Preguntas que pueden orientar son: 1. ¿Pueden las hipótesis debilitarse? 2. ¿Cuáles son realmente necesarias para realizar la demostración? 3. ¿Existe una posible generalización?

Fuente: Elaborada con ideas de Miyasaki (2000), Larios (2015) y Del Río (2011).

2.2.3.3 Herramientas digitales y físicas para la exploración

Las herramientas son las mediadoras entre el mundo real y el conceptual (Leung y Bolite-Frant, 2021). Además de ayudarnos a extender nuestras capacidades físicas o a realizar tareas en periodos cortos de tiempo, Hidalgo (2016) afirma que la humanidad ha logrado incrementar sus capacidades cognitivas a través de su interacción con herramientas materiales y simbólicas. De acuerdo con Leung y Bolite-Frant (2021), las herramientas influyen la cognición, al igual que tienen impacto en el conocimiento matemático.

En el contexto de la didáctica de las matemáticas, las herramientas han jugado un papel importante. Siguiendo a los mismos autores, una actividad de aprendizaje diseñada con base en el uso de herramientas, puede acortar la distancia entre el conocimiento previo y los contenidos que se pretende aprender, además, citan a Brousseau (1998) al afirmar que facilitan la acción, la formulación y la validación. En este sentido, una actividad basada en herramientas es un diseño con el objetivo de activar un entorno interactivo donde el docente, los estudiantes y los recursos se enriquecen mutuamente al producir experiencias matemáticas (Leung y Bolite-Frant, 2021) y sus diseños descansan fuertemente en la mediación entre la dicha interacción y el conocimiento matemático que se desea construir. Para el presente trabajo, se tomaron en cuenta dos tipos de herramientas para el diseño de tareas matemáticas orientadas al aprendizaje con entendimiento: las físicas y las digitales.

Se considera una herramienta física aquella en la que el estudiante emplea instrumentos de medición o instrumentos que lo ayudan a trazar o a plasmar distintas representaciones de objetos matemáticos utilizando lápiz y papel o similares (regla, escuadra, compás, etc.). La utilización de tales herramientas en la enseñanza de las matemáticas es una estrategia didáctica establecida, al menos para estudiantes jóvenes, pues existen teorías que afirman que los niños requieren referentes concretos para desarrollar conceptos matemáticos abstractos de acuerdo a la cita de (Piaget, 1966) que aportan Bartolini y Maschietto (2008). La cualidad de estas herramientas de ser concretas las vuelve eficientes, relevantes y transparentes cuando se emplean en actividades específicas y en relación con las transformaciones que atraviesan en las manos de quienes las utilizan, de acuerdo con las

mismas autoras. En otras palabras, la ventaja de estas herramientas reside en que quienes las utilizan tienen un sentido de transparencia, pues no existe un mecanismo oculto, todo depende de su utilización y, además, provee de cierta libertad en su empleo.

Cada herramienta posee diferentes niveles de obstaculización epistémica, es decir, sus propias limitantes al ser utilizadas. Estos obstáculos pueden utilizarse para crear conflicto cognitivo y estimular el proceso de aprendizaje (Leung y Bolite-Frant, 2021). Las herramientas físicas como hojas cuadriculadas de distintos tamaños, por ejemplo, se pueden utilizar para diseñar actividades para el aprendizaje de área, operaciones aritméticas, etc., dependiendo de cómo concibe a las matemáticas quien diseña la actividad. El empleo de herramientas de otro tipo, implica otras ventajas y obstáculos. Las herramientas digitales como los softwares de geometría dinámica, se pueden utilizar para cubrir un amplio espectro epistemológico: desde dibujar de forma precisa, hasta la exploración de nuevos teoremas geométricos o el discurso argumentativo. Esta gama de aplicaciones nos lleva a considerar que, con su uso, se presenta la oportunidad de ampliar el sistema cognitivo de los estudiantes, expresado en términos del uso de la memoria, las operaciones y cálculos, la representación de las ideas, el uso de símbolos, etc. (Santos Trigo, 2021). Además, estas herramientas son un medio adecuado en la búsqueda del aprendizaje con entendimiento, pues proveen de representaciones de objetos matemáticos y tienen el potencial de generar significados de acuerdo con Artigue y Mariotti (2014), citados por Leung y Bolite-Frant (2021).

La familiaridad en el uso de la herramienta y su uso efectivo son consideraciones pedagógicas importantes en este diseño y la precisión que aportan las herramientas digitales reduce los errores provenientes del mal uso de la herramienta. Con las ventajas de ambos tipos de herramientas en mente, y considerando la mayor amplitud y practicidad de las digitales, se consideró apropiada su utilización en el diseño de las actividades a aplicar en el presente trabajo. Teniendo en mente la orientación equilibrada, clave en la enseñanza con entendimiento, el diseño de estas actividades debe tener en cuenta las limitaciones de estas herramientas para emplearlas como guía hacia el descubrimiento, pero aún así permitir la

exploración. Por su practicidad y fácil utilización, en esta investigación se utilizó GeoGebra como herramienta digital y una regla de medición en centímetros como herramienta física. La combinación de estas herramientas crea un ambiente pedagógico multi-representacional, lo que proporciona oportunidades de expresar generalidad (Leung y Bolite-Frant, 2021).

A continuación se presenta un diagrama a modo de resumen, en el que se integran las principales teorías y conceptos relevantes en el marco conceptual de nuestro trabajo.

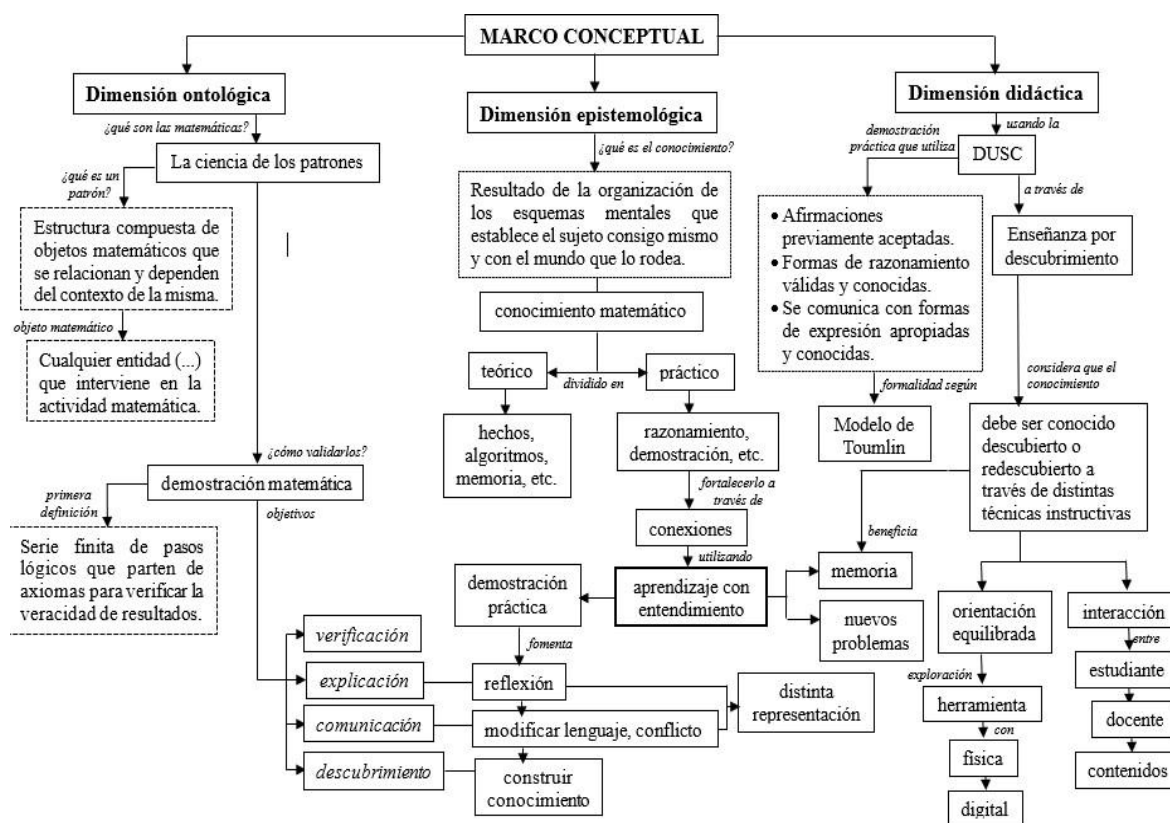


Diagrama 3. Esquema de los elementos teóricos del marco conceptual.

A continuación, nos permitimos pasar al siguiente capítulo en el que se ponen en práctica las ideas citadas en este marco conceptual en el diseño de la metodología de investigación y, a su vez, en las tareas a implementar.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

3.1 Introducción

Todas las investigaciones poseen características y necesidades particulares derivadas de sus objetivos por lo que existen diversas metodologías que las cubren de forma específica. Puesto que la presente investigación refiere a la Didáctica de las Matemáticas, y habiendo descrito ya los objetivos y la pregunta de investigación que la motiva, es preciso abordar y justificar la manera en la que se pretende alcanzar los primeros y responder la segunda, tomando en cuenta la naturaleza del trabajo de investigación.

En el presente capítulo, se describe la metodología adoptada para el desarrollo de este trabajo, el paradigma metodológico, el diseño y los participantes, además de la actividad diseñada y de los protocolos de aplicación a los participantes, así como los instrumentos utilizados para la recolección de la información.

3.2 Técnica de investigación

En el trabajo investigativo existen dos metodologías que son, cuando menos, las más conocidas para sustentar y llevar a cabo el análisis de la investigación: el enfoque cuantitativo y el enfoque cualitativo. De acuerdo con Grinnell (1997), citado por Hernández, Fernández y Baptista (2010), ambos enfoques emplean procesos metódicos y empíricos en su esfuerzo para generar conocimiento y utilizan, en términos generales, cinco fases similares y relacionadas entre sí:

1. Llevan a cabo la observación y evaluación de fenómenos.
2. Establecen suposiciones o ideas como consecuencia de la observación realizada.
3. Demuestran el grado en que las suposiciones o ideas tienen fundamento.
4. Revisan tales suposiciones o ideas sobre la base de las pruebas o del análisis.
5. Proponen nuevas observaciones y evaluaciones para esclarecer, modificar y fundamentar las suposiciones e ideas o incluso para generar otras.

A pesar de las similitudes mencionadas, el investigador o investigadora debe tener cuidado en elegir el enfoque que mejor se adapte a su trabajo, puesto que estos dos tienen

características propias que se adhieren mejor a ciertos tipos de investigación. A continuación, se describen ambos enfoques haciendo énfasis en el cualitativo pues, como se verá a continuación, es el que mejor se adapta al presente trabajo de investigación.

3.3 El enfoque cuantitativo, el enfoque cualitativo y sus diferencias

Hernández et al. (2010) enlistan una serie de características generales del enfoque cuantitativo y lo identifican como una serie de pasos con orden riguroso que no se puede alterar, o bien, como un patrón predecible que valida la investigación y pretende “medir” los fenómenos referidos al mundo real. Esta medición es numérica y utiliza la recolección de datos para probar hipótesis y el análisis estadístico para establecer patrones de comportamiento y probar teorías. Entre sus objetivos están el desechar o invalidar otras propuestas que se contraponen a la propia, además de buscar la generalización de resultados obtenidos en una muestra representativa de una población mayor. Se caracteriza por su objetividad: no deben intervenir cuestiones ajenas al fenómeno para que puedan replicarse y predecir otros fenómenos similares, construir teorías y relacionarlas entre sí. Desde luego, en el enfoque cuantitativo lo subjetivo existe, sin embargo, se aboca a demostrar qué tan bien se adecúa el conocimiento a la realidad objetiva.

Por el contrario, el enfoque cualitativo toma en cuenta fenómenos en los que la subjetividad juega un papel importante, pues se encuentra especialmente apegado a las ciencias sociales. Puede concebirse como un conjunto de prácticas interpretativas que transforman al mundo en una serie de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos. Es naturalista, pues se interesa por la cotidianidad de sus objetos y/o participantes, e interpretativo, pues intenta encontrar sentido a los fenómenos en función de los significados que las personas les otorguen (Hernández, et. al., 2010). Este enfoque no se ata al orden de los pasos de manera tan rigurosa como el cuantitativo, de hecho, tiene como característica definitoria el dinamismo en la indagación, se mueve entre los hechos y su interpretación y varía de acuerdo a las particularidades de cada estudio. Otra característica de este enfoque es que la información recopilada proviene de personas o grupos de personas, por lo que se deben tomar en cuenta condiciones logísticas a las que el investigador debe adaptarse; por lo

anterior, es preciso considerar el factor social al entrar al campo. Por lo tanto, la muestra, la recolección y el análisis son fases que se realizan prácticamente de manera simultánea.

Bajo la búsqueda cualitativa, en lugar de iniciar con una teoría particular y luego “voltear” al mundo empírico para confirmar si ésta es apoyada por los hechos, se comienza examinando el mundo social; en este proceso se desarrolla una teoría coherente con los datos, de acuerdo con lo que observa, frecuentemente denominada teoría fundamentada (Esterberg, 2002); en este caso se avoca más a un proceso inductivo al contrario de la deductividad característica del enfoque cuantitativo. Otra característica importante del enfoque cualitativo es que se recolectan datos cualitativos, definidos por Patton (2002) como descripciones detalladas de situaciones, personas, interacciones, conductas y sus manifestaciones, mediante técnicas como la observación no estructurada, entrevistas abiertas, interacción con grupos, etc. Por último, estas investigaciones no pretenden generalizar los resultados a poblaciones más amplias, regularmente no buscan que sus estudios lleguen a replicarse ya que la realidad subjetiva en sí misma es objeto de estudio. Características como la profundidad de los datos, la riqueza interpretativa, la contextualización del ambiente, detalles y experiencias únicas, y la flexibilidad que aporta el enfoque cualitativo nos motivan a adoptar esta metodología para el presente trabajo de investigación. Además, puesto que los objetivos del mismo se apegan a las ciencias sociales, dicho enfoque nos será de utilidad para estudiar la manera en que la propuesta presentada influye en el aprendizaje del estudiante.

3.4 Diseños de investigación cualitativa

El enfoque cualitativo se caracteriza porque la información recolectada tiene la finalidad de comunicar ideas y significados y consiste principalmente en palabras, aunque también puede tratarse de información en forma de imágenes, dibujos, gestos, entre otros. Para identificar dichos significados e ideas existe el diseño de investigación, que puede entenderse como el plan, la estructura y las estrategias que se utilizarán para responder a las preguntas de investigación y, además, señala cómo se obtendrán los datos. Su elaboración incluye componentes que deben ser coherentes con las preguntas y el planteamiento del

problema (Flick, 2015), por lo que dependen de las características particulares de cada investigación. Considerando las particularidades del presente, se decidió emplear el estudio de caso. A continuación se describen las características que justifican su elección.

3.4.1 Estudio de caso

La metodología de estudios de caso está diseñada para profundizar el estudio de una situación determinada y, de acuerdo con Bell (2010), brinda la oportunidad de estudiar a profundidad una parte de cierto problema con un tiempo que generalmente es limitado. Como sujetos de análisis puede tenerse a un fenómeno, una persona, un evento o caso muy concreto, donde el análisis deberá realizarse dentro del medio ambiente en que se desenvuelve el objeto de estudio (Muñoz, 2011).

De acuerdo con Stake (1999) existen tres tipos de estudios de caso:

1. **Intrínseco:** provee información directa de su aplicación, no contribuye necesariamente a la comprensión de otros casos o de una problemática general.
2. **Instrumental:** aporta elementos de análisis para entender una problemática en conjunto que no sólo involucra el caso específico que se estudia.
3. **Colectivo:** se enfoca en el estudio simultáneo de varios casos con la misma problemática pero en diversas personas, familias, empresas, o cualquier otro sujeto de estudio. La intención es utilizar cada caso como un instrumento para conocer la situación en su conjunto, sobre un mismo aspecto.

La presente investigación, por sus características y su objetivo de análisis, se beneficia del diseño de estudio de caso de tipo instrumental. Por la naturaleza de la didáctica de las matemáticas, existen diversas formas de apreciarla y llevarla a cabo en el aula y la elección de un caso en particular puede reportar fenómenos como los descritos en el Capítulo 2.

3.5 Participantes

Es importante motivar el pensamiento crítico y la reflexión en todas las etapas de desarrollo del estudiante, sin embargo, habiendo revisado los programas de estudio de diversos niveles educativos se identificó –como se mostró en el Capítulo 1 –que es en los de nivel medio

superior donde se establece como competencia la habilidad para justificar resultados matemáticos. Aunado a esto y, puesto que la herramienta principal del presente es la demostración matemática, es conveniente seleccionar participantes con la madurez cognitiva adecuada que nos permita introducir ideas acerca del pensamiento deductivo que dicha herramienta nos ofrece para alcanzar nuestros objetivos.

Por lo anterior, y debido a la disponibilidad y acceso que tuvo la investigadora, se entabló comunicación con un docente de un plantel del Colegio de Bachilleres del Estado de Hidalgo (COBAEH), México, quien le permitió trabajar con uno de sus grupos de segundo semestre. Este grupo cuenta con 35 estudiantes y fue seleccionado debido a que cursan la asignatura “Pensamiento Matemático II”, cuyos contenidos incluyen conceptos básicos de geometría sintética, que se alinean con el tema de estudio de esta investigación. Se llevaron a cabo tres sesiones de dos horas cada una debido a que se trató de clases oficiales con esta temporalidad programada; las tres intervenciones se realizaron a lo largo de dos semanas, con dos y tres días de separación, con el objetivo de observar signos de aprendizaje con entendimiento entre las sesiones 1 y 3. Dichas sesiones sucedieron aproximadamente a mitad del periodo escolar Enero-Julio 2024, puesto que en ese momento los estudiantes ya habían sido introducidos a los temas que fueron de interés para la presente investigación.

3.6 Técnicas e instrumentos de recolección de la información

Se utilizaron tres técnicas para la recolección de datos: la observación participante, las producciones escritas de los estudiantes y el cuestionario, pues son adecuadas para estudiar el nivel de involucramiento de los estudiantes con el tema tratado en las sesiones. En cuanto a la observación no participante se utilizó como instrumento la videograbación –previo permiso otorgado por escrito por parte del director de la institución –lo que permite el análisis del comportamiento de los participantes y su interacción verbal con la investigadora, así como las respuestas presentadas. Por otra parte, sus producciones escritas permiten evaluar el desarrollo del aprendizaje con entendimiento a lo largo de las sesiones, además de estudiarlo en casos individuales con características de interés, o bien, determinar patrones de respuesta en el grupo. Finalmente, fue importante determinar si se alcanzaron

los objetivos de cada sesión una vez concluidas, el instrumento para averiguarlo fue el cuestionario respondido al final de cada sesión y de manera individual por los estudiantes.

En el Apéndice A se encuentra la transcripción de la videograbación; en el Apéndice B, la hoja de instrucciones correspondiente a cada una de las actividades y, finalmente, en el Apéndice C, los cuestionarios aplicados a todos los participantes, por cada sesión.

3.7 Diseño y aplicación de la tarea de aprendizaje

Puesto que uno de nuestros objetivos es diseñar tareas de aprendizaje que integren características que encauzan al aprendizaje con entendimiento, y una de las características definitorias de este aprendizaje es la capacidad de utilizar la información almacenada previamente para la resolución de nuevos problemas, se decidió implementar actividades durante tres sesiones. Otra ventaja de haber contado con tres sesiones es el sentido de naturalidad que aportan a la implementación de la demostración matemática en el aula, pues los participantes desconocían completamente este concepto, y un nivel adecuado de familiaridad fue necesario antes de poder beneficiarse de sus características.

A continuación se describen las actividades y los cuestionarios implementados; además, en el Apéndice D, se coloca un análisis de los protocolos diseñados para cada sesión.

3.7.1 Diseño de la Actividad 1

Se trata de una actividad introductoria que tiene por objetivo que los estudiantes se familiaricen con la justificación de resultados matemáticos, en particular, la fórmula para calcular el área de un triángulo; en el Apéndice B se muestra su estructura. En las instrucciones, se solicita al participante abrir el archivo y explorar con los movimientos permitidos, rotación con los deslizadores y traslación sobre las respectivas hipotenusas. Posteriormente se presentan las preguntas: “¿Cómo justificarías que el área de cualquier triángulo se calcula multiplicando lo largo de la base por la de la altura y dividiéndose entre dos?” y “¿Cómo utilizarías el puzzle para justificarlo?”, con la intención de guiar e incentivar la exploración con el objetivo del descubrimiento. El uso de la herramienta digital en este caso se debe a que, puesto que se trata de la sesión introductoria, se prefiere

una exploración guiada para evitar la frustración del participante. La exploración se limita a los movimientos que permite el puzzle, despierta el interés del estudiante y privilegia la orientación equilibrada, que no anule el proceso constructivo pero que garantice la producción eficaz de conjeturas. Esta herramienta nos permitió alcanzarla. Posteriormente, se presenta una tabla de dos columnas, en la primera se pide colocar las ideas que surgen tras la exploración, generando conjeturas acerca del comportamiento del puzzle al realizar los movimientos permitidos. En la segunda columna se halla la pregunta “¿Cómo me puede ayudar a justificar lo solicitado?” que guía al estudiante para mantener en mente su objetivo, evitando que genere conjeturas que no aporten a este: esto fomenta el constructivismo cumulativo sobre el empirismo episódico en su actividad cognitiva.

3.7.1.1 Un puzzle interactivo

La principal herramienta utilizada en esta sesión fue el puzzle interactivo, cuya estructura se muestra en la *Figura 5* a continuación:

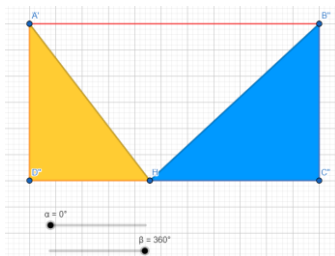


Figura 5. Puzzle interactivo.

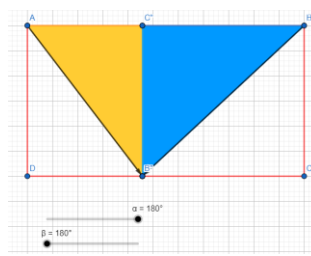


Figura 6. Acomodo esperado de los triángulos en el puzzle.

El manipulativo virtual diseñado por Campos Nava y Torres Rodríguez fue utilizado a sugerencia de los asesores, pues ha sido una importante herramienta implementada previamente en diversos talleres con profesores. Este rompecabezas consiste en un rectángulo en cuya base se ubica un punto H, que es móvil; posteriormente, se construyen dos triángulos que comparten, cada uno, uno de los lados más cortos del rectángulo y con un vértice en el punto H. Además, se tienen un par de deslizadores que permiten rotar los triángulos 180°, el de la izquierda en contra del sentido de las manecillas del reloj y el de la derecha en el sentido de las manecillas del reloj; asimismo, los triángulos se pueden trasladar a lo largo de sus respectivas hipotenusas.

El objetivo del puzzle es que los estudiantes exploren los movimientos de los triángulos rectángulos, poniendo especial atención en el triángulo de vértices H, A y B, y que observen que el acomodo de los triángulos rectángulos en el antes mencionado es perfecto, es decir, que el triángulo amarillo y el azul cubren por completo al triángulo AHB, como se muestra en la *Figura 6*. Se espera que los estudiantes lleguen a la conclusión de que el área del rectángulo rojo ABCD es igual a dos veces el área del triángulo amarillo más dos veces el área del triángulo azul. Tras el descubrimiento del dato anterior, concluir que el área del triángulo AHB es la mitad del rectángulo ABCD es directo.

La implementación de la actividad anterior tuvo el objetivo de incentivar la exploración, promoviendo el pensamiento crítico en contraposición a la aceptación inmediata de una fórmula proporcionada en el aula: se buscó que los participantes se cuestionaran una fórmula que han aceptado previamente desde su educación básica y que mediante la exploración con el manipulativo digital, descubrieran por sí mismos que la fórmula tiene sentido y es verdadera. A continuación se presenta el *Diagrama 1*, que ilustra la influencia de los elementos teóricos en el diseño de la Actividad 1.

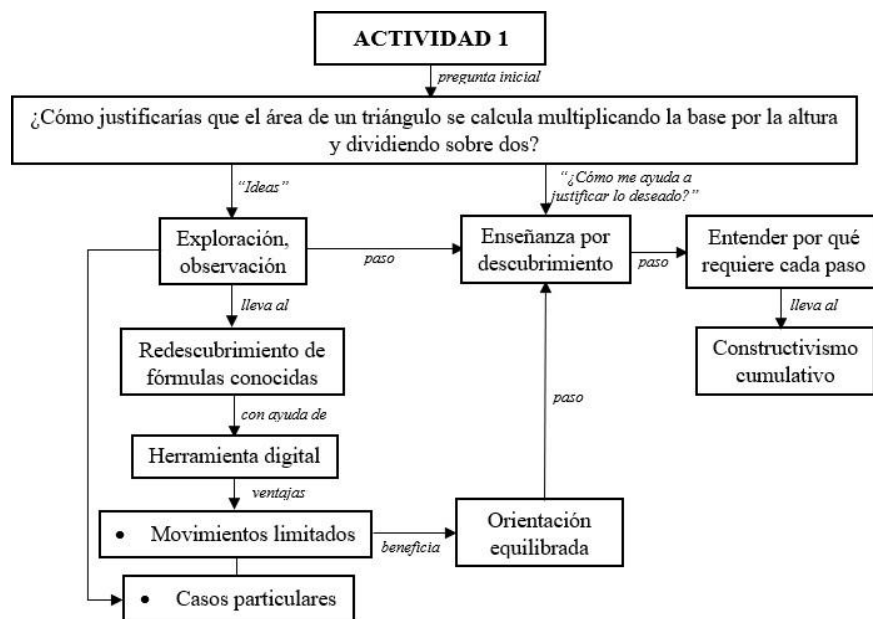


Diagrama 4. Elaboración propia. Elementos teóricos en la Actividad 1.

En la siguiente sección se presenta el análisis del Cuestionario 1, aplicado tras la implementación de la Actividad 1.

3.7.2 Cuestionario 1

El objetivo del Cuestionario 1 (Apéndice C) fue obtener información acerca del entendimiento de los estudiantes y de su retención de información tras la actividad, además de explorar si se comprendió la generalidad de justificaciones como la que construyeron y cómo la herramienta digital influyó en el proceso de exploración/descubrimiento, además de observar si trasladaron sus ideas a un problema nuevo.

La siguiente tabla muestra cada una de las preguntas junto con su respectivo objetivo:

Tabla 2. Análisis del Cuestionario 1	
Pregunta	Objetivo
1) Después de todo lo discutido anteriormente, escribe una justificación breve de por qué el área de un triángulo se calcula multiplicando su base por su altura y dividiendo por dos.	Una vez que se autoconvencieron con argumentos matemáticos, convencer a alguien más mediante una producción escrita; se fomenta el cambio de representación para producir su primer esbozo de demostración.
2) ¿Esta justificación es válida para todos los triángulos posibles (escalenos, isósceles y equiláteros)? ¿Por qué?	Identificar si el estudiante comprende la condición de generalidad de una justificación matemática.
3) Explica cómo te fue de ayuda la herramienta digital. ¿Crees que se te hubieran ocurrido las mismas ideas si la actividad hubiera sido usando sólo papel y lápiz?	Determinar los beneficios de la herramienta digital.
4) ¿Qué ideas te aportó el puzzle para llegar a la conclusión?	Determinar los beneficios de la herramienta digital. Vuelta atrás: revisar sus propias ideas.
5) Si el rectángulo inicial fuera más grande o más pequeño ¿funcionaría la idea que se te ocurrió?	Alejarlos del uso del puzzle, orientarlos a identificar la condición de generalidad.
6) ¿Puedes aplicar alguna de las ideas de este puzzle a un problema diferente?	Que expandan sus argumentos a un problema adicional.
7) ¿Te sería de ayuda para justificar que la fórmula del área de un pentágono regular se encuentra multiplicando el perímetro por la apotema (recuerda que es el segmento perpendicular al lado del pentágono que pasa por su centro, ver Figura 1) y dividiendo sobre dos?	Identificar si el estudiante es capaz de aplicar las ideas demostradas en un problema adicional y si nota que para el caso presentado, se tienen cinco triángulos, por lo que puede usar el resultado verificado en clase.
8) ¿Y de cualquier polígono regular?	Generalización del problema adicional. Ver si nota que para cualquier polígono regular puede usar el razonamiento anterior.

Fuente: Elaboración propia.

A continuación, se analizan de forma análoga los instrumentos utilizados en la Sesión 2 y 3.

3.7.3 Diseño de la Actividad 2

Esta actividad consta de tres ejercicios sobre triángulos, cada uno con su objetivo particular que se abordará a profundidad en sus correspondientes subsecciones. En general, se espera que tras la aplicación de la Actividad 2 los participantes comprendan el concepto de demostración y su importancia, identificando lo que no es una demostración y que por sí mismos produzcan una DUSC; además, motivar la exploración con ayuda de herramientas físicas y el descubrimiento de resultados. Cabe aclarar que para esta actividad todas las herramientas utilizadas fueron físicas debido a que la exploración y el descubrimiento no se ven limitados a las digitales. En el Apéndice B se muestra la estructura de la Actividad 2. En las instrucciones se pide resolver los ejercicios en grupo y realizar anotaciones individuales cuando sea requerido; se inicia con el Ejercicio 1, revisado a continuación.

3.7.3.1 Ejercicio 1

El primer ejercicio tiene el objetivo de que los participantes comprendan por qué existen las demostraciones. Se muestra cómo la percepción visual, especialmente en geometría, a menudo muestra información incorrecta y que son necesarios argumentos lógicos para asegurarnos de no cometer errores. Se pretende crear un conflicto que genere desequilibrio y crear la necesidad de reacomodar las representaciones mentales de diversos conceptos geométricos que poseen los participantes, para así restablecer el equilibrio.

El ejercicio se muestra a continuación, junto con el diagrama correspondiente:

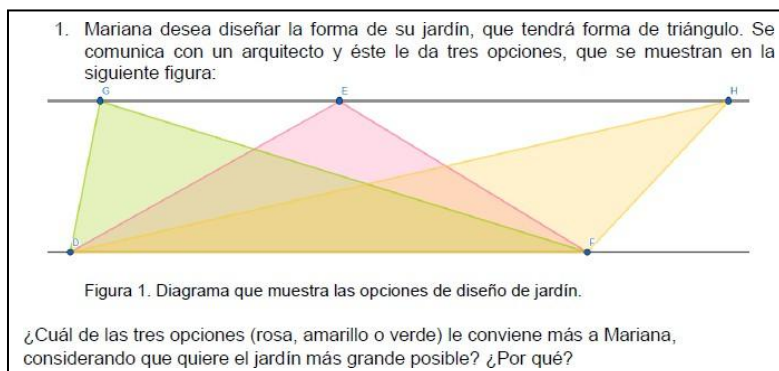


Figura 7. Ejercicio 1, Actividad 2.

El diagrama muestra dos líneas paralelas que simulan un pasillo, y las tres opciones en forma de triángulos. Cuestionar a los estudiantes sobre el jardín que mejor conviene en extensión los involucra con el área, tema discutido en la Sesión 1. El razonamiento adecuado es que, primero, los participantes conecten la fórmula revisada la sesión previa con la pregunta, que observen que los tres triángulos coinciden en base y altura por la condición de paralelismo de las líneas y concluyan, al calcular sus áreas, que las tres opciones son equivalentes. Sin embargo, se esperaba que los estudiantes conjeturaran incorrectamente, basándose en la percepción visual de las figuras y concluyeran que alguna de las opciones era la mejor y con esto se generara un conflicto, tras lo cual la investigadora llevaría a cabo la orientación que los conduciría al reacomodo de información.

3.7.3.2 Ejercicio 2

El objetivo del Ejercicio 2 es incentivar la exploración mediante casos particulares y preparar al participante para el ejercicio siguiente. A continuación, se muestra el enunciado:

¿Se puede construir un triángulo dadas cualesquiera tres medidas? ¿Por qué?
Construye un triángulo con las medidas indicadas:

- 7cm, 11cm, 6cm
- 4cm, 3cm, 6cm
- 11cm, 5cm, 3cm

Figura 8. Ejercicio 2, Actividad 2.

Para la resolución de este ejercicio, los estudiantes utilizaron una regla de 15 cm, y un lápiz. La pregunta busca despertar curiosidad acerca de las condiciones que deben cumplir tres medidas para que se pueda construir un triángulo con ellas. Se sugiere la construcción de tres triángulos particulares, siendo que los primeros dos se pueden construir y el tercero no. Es importante notar que hay otra pregunta: “¿Por qué?”, para que los participantes busquen darle una explicación a este nuevo desequilibrio, de manera similar al del ejercicio anterior. La exploración y el uso de la herramienta física ayudan a tener contacto directo con el problema, y se esperan numerosos intentos que los lleven a convencerse de que el tercer triángulo no se puede construir sin importar las condiciones que propongan. Se pretende que esto los conduzca a la pregunta: ¿Por qué con los primeros dos grupos de medidas sí funcionó y con este no? ¿Qué tienen de diferente o qué tienen en común? Estas

preguntas motivan el reconocimiento de patrones y conducen al descubrimiento de un resultado importante: La Desigualdad del Triángulo (DdT).

3.7.3.3 Ejercicio 3

Tras la exploración y discusión del Ejercicio 2, se les presenta el siguiente resultado:

El Teorema de la Desigualdad del Triángulo dice: Al sumar la medida de cualesquiera dos lados de un triángulo debe dar un resultado mayor o igual al del lado restante.

¿Cómo expresarías este resultado usando símbolos matemáticos?
Puedes apoyarte del siguiente diagrama.

Figura 8. Ejercicio 3, Actividad 2.

Se presenta la condición necesaria para construir un triángulo con tres medidas y la nombra “Teorema de la Desigualdad del Triángulo”. El objetivo de este ejercicio es abordar la siguiente etapa en la enseñanza por descubrimiento, es decir que, tras el razonamiento dirigido por la investigadora, ellos puedan representar el resultado en símbolos matemáticos y posteriormente, producir su demostración. Se espera que la representación simbólica sea:

$$i + j \geq k \qquad i + k \geq j \qquad k + j \geq i$$

La estructura del ejercicio consta de apartados para guiar al estudiante en la construcción de una DUSC, y que puedan diferenciar las partes de esta. Cabe mencionar que la investigadora realiza una sugerencia y la denomina el “Postulado de la Mínima Distancia” y se refiere al resultado: “La distancia más corta que hay entre un punto A y un punto B dados, es una línea recta”, con la orientación equilibrada en mente y motivando la conexión entre esta y la idea ya mostrada bajo tres representaciones distintas en el enunciado del ejercicio. Se espera que el estudiante observe que para llegar de, por ejemplo, el punto I al J en el diagrama presentado, se tienen dos trayectorias: la recta y la que pasa por el punto K, por lo tanto, la distancia recorrida en la trayectoria recta (k) es menor que la distancia que pasa primero por el punto K (j) y luego llega a J (i), llegando así al resultado deseado.

A continuación se presenta el *Diagrama 3*, en el que se muestra cómo intervienen los elementos teóricos mencionados en el diseño de cada uno de los tres ejercicios:

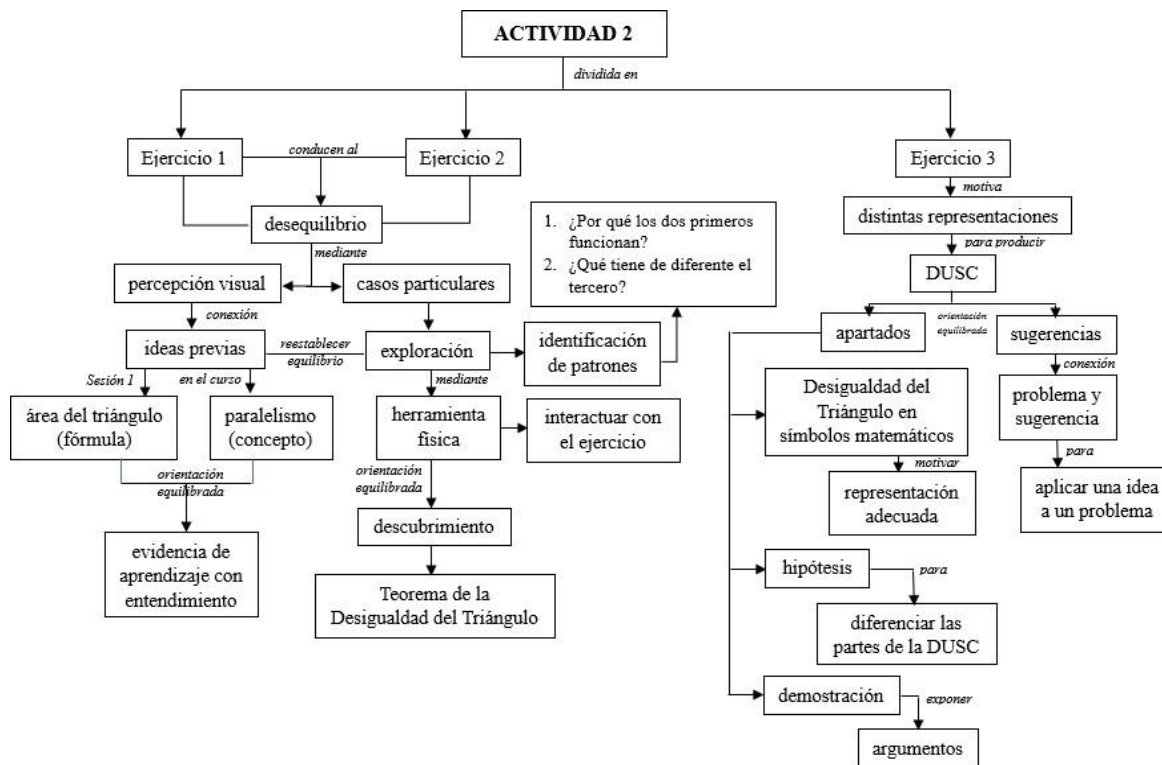


Diagrama 5. Elaboración propia. Elementos teóricos en la Actividad 2.

En la siguiente sección se analiza el Cuestionario 2, aplicado posterior a la Actividad 2.

3.7.4 Cuestionario 2

La aplicación del Cuestionario 2 (Apéndice C) tuvo por objetivo identificar si los participantes comprendieron el concepto expuesto y enfrentarlos a un problema similar y a uno nuevo para comprobar su capacidad de aplicar las ideas revisadas.

La siguiente tabla muestra los objetivos particulares de cada pregunta del Cuestionario 2:

Tabla 3. Análisis del Cuestionario 2	
Pregunta	Objetivo
1) ¿Es necesario demostrar que dados un punto A y un punto B, una única recta pasa por ellos? ¿Por qué?	Identificar si se comprende cuándo se necesita hacer una demostración.
2) ¿Se pueden construir los siguientes triángulos? ¿Por qué? a. 80cm, 10cm, 100cm. b. 60cm, 150cm, 120cm. c. 60cm, 50cm, 120cm.	Identificar si el estudiante puede aplicar las ideas demostradas a un problema similar.

3) Demuestra que para calcular el área de un pentágono regular de lado l (todos sus lados miden lo mismo) se multiplica el perímetro del pentágono (p), por la medida de la apotema (a) y se divide entre 2. Recuerda que la apotema es el segmento perpendicular a cada lado que parte del centro del pentágono. Sugerencias: • Recuerda que un pentágono regular se puede dividir en 5 triángulos de base l. • Nota que la apotema (a) es la altura de los triángulos y todos miden lo mismo.	Nuevo problema: se espera que en esta ocasión el estudiante produzca una demostración con mayor estructura. Identificar si las ideas de la Sesión 1 permanecieron en su memoria.
--	---

Fuente: Elaboración propia.

A continuación se concluye la sección con el análisis de las herramientas para la Sesión 3.

3.7.5 Diseño de la Actividad 3

Se considera la actividad de mayor importancia para este trabajo, pues con ella se espera observar el desempeño de los estudiantes tras la introducción al concepto de DUSC y su utilización en el desarrollo de habilidades de exploración y descubrimiento. Esta actividad consta de un ejercicio tomado de Flores (2007) y tiene por objetivo que los estudiantes exploren y realicen conjeturas que los lleven a descubrir el Teorema del Segmento Medio (TSM), además de demostrar sus conjeturas. Se utilizó una construcción en GeoGebra descrita en la siguiente sección, proporcionada de forma digital e impresa. En el Apéndice B se muestra la estructura de la Actividad 3 y en la *Figura 9* el diagrama correspondiente. En las instrucciones se solicita observar el diagrama, leer las especificaciones y llenar la tabla, la totalidad de la sesión fue destinada a la realización del ejercicio de manera individual y con la herramienta proporcionada, siendo que la investigadora estuvo disponible para resolver dudas en todo momento.

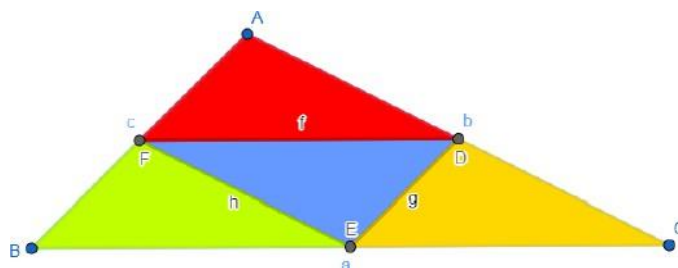


Figura 9. Ejercicio 3, Actividad 2.

Las especificaciones del problema establecen la generalidad del triángulo –los estudiantes podían modificar su forma y tamaño como desearan –y a la hipótesis, que los puntos D, E y F se encuentran a la mitad de los lados sin importar los movimientos. La pregunta “¿Cuál es la relación entre los triángulos ADF, BEF, CDE y ABC?” tiene la intención de que se realice la exploración del diagrama utilizando las herramientas de GeoGebra como la medición de áreas, distancias etc., incluso se les dio a los estudiantes la libertad de hacer nuevos trazos si así lo requerían. Puesto que en esta sesión se les dio mayor independencia a los participantes, se decidió optar por la herramienta digital como orientación indirecta.

Posterior a la instrucción citada, se presenta una tabla de tres columnas, en la primera se colocan las hipótesis, en la segunda las conjeturas y en la tercera, la explicación de cómo llegaron a estas. En esta sesión, se requiere que los estudiantes puedan diferenciar las hipótesis de las conjeturas y, para observar la influencia de la herramienta digital, que describan cómo llegaron a las mencionadas suposiciones.

3.7.5.1 Teorema del Segmento Medio

Idealmente, se esperaba que los participantes llegaran al descubrimiento del TSM:

Teorema del Segmento Medio: *Al unir los puntos medios de dos lados de un triángulo, el segmento obtenido es paralelo al lado restante del triángulo y con proporción uno a dos.*

En otras palabras, si para el triángulo ABC de la *Figura 10* unimos los puntos medios de AB y BC – segmento medio de AB– se cumplen las relaciones $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ y $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. Estas relaciones se mantienen para los segmentos medios de todos los lados.

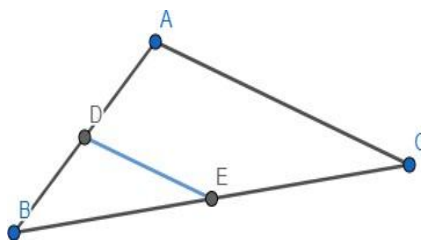


Figura 10. Diagrama que ilustra el Teorema del Segmento Medio.

Si bien no se pretende que los participantes enuncien el resultado como se hizo anteriormente, la relación entre los triángulos del diagrama en la Actividad 3 es que las áreas de los cuatro triángulos, al igual que sus perímetros coinciden. Esto se puede ver fácilmente con las herramientas de medición de GeoGebra, además, sus áreas son la cuarta parte del triángulo ABC. Este resultado es equivalente al TSM e involucra resultados revisados en las sesiones anteriores, como paralelismo y cálculo de áreas de triángulos.

En la última parte de la Actividad 3, se solicita enlistar las conjeturas que surgieron, proporcionando una pequeña justificación que las confirme o refute, con el objetivo de que el estudiante atraviese la última etapa de la enseñanza por descubrimiento. En el diagrama a continuación se ilustran los elementos teóricos involucrados en el diseño de la Actividad 3 y, en la siguiente sección se presenta el análisis del Cuestionario 3.

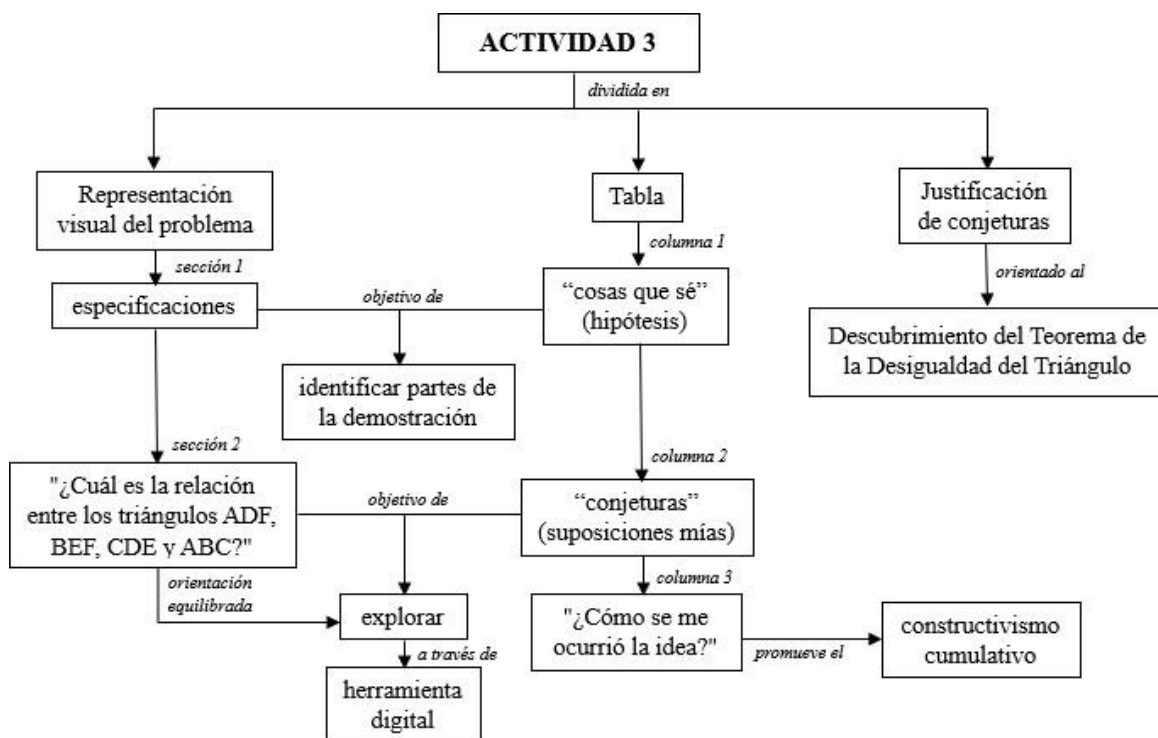


Diagrama 6. Elaboración propia. Elementos teóricos en la Actividad 3.

3.7.6 Cuestionario 3

El Cuestionario 3 (Apéndice C) pretende recabar información sobre la comprensión de los participantes del concepto de demostración y su importancia, además de obtener retroalimentación sobre la aplicación de las actividades.

La siguiente tabla muestra cada una de las preguntas junto con su respectivo objetivo:

Tabla 4. Análisis del Cuestionario 3	
Pregunta	Objetivo
1) En tus propias palabras escribe qué entiendes por una demostración matemática.	Identificar si el estudiante entiende y recuerda qué es una demostración matemática.
2) ¿Para qué sirve una demostración matemática?	Identificar si el estudiante entiende y recuerda para qué es una demostración matemática.
3) ¿Qué cosas te hubiera gustado hacer durante la sesión?	Retroalimentación.

Fuente: *Elaboración propia.*

Habiendo abordado el análisis del diseño de las actividades aplicadas y su relación directa con la teoría, en el siguiente capítulo se procederá al análisis de los resultados obtenidos.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En el presente capítulo se analizan los resultados obtenidos con el uso de los instrumentos y la metodología descritos. En primer lugar, se describen las categorías y subcategorías consideradas, argumentando su elección con base en el marco conceptual y, posteriormente, se analizan los datos. Esta última etapa se dividió en tres partes, obedeciendo a los tres grupos de datos recabados: transcripciones de grabación de video, producciones escritas y cuestionarios; este análisis se realiza desde la perspectiva de los teóricos citados en el marco conceptual y desde la perspectiva de la investigadora quien aplicó las tareas.

4.1 Categorías de análisis

En Capítulo 1 se planteó como objetivo identificar las características de la demostración que conducen al aprendizaje con entendimiento a través de la aplicación de actividades utilizando el enfoque de la enseñanza por descubrimiento y como herramienta principal, la DUSC. Así, se consideran cuatro categorías de análisis; asimismo, cada una de ellas posee subcategorías que permiten clasificar los hallazgos tras la aplicación de las actividades. En la *Tabla 5* se muestran las categorías de análisis con sus subcategorías y el código con el que nos referiremos a ellas, además, se destaca el sustento teórico para cada una.

Tabla 5. Categorías y subcategorías de análisis			
	Categorías	Subcategorías	Código
1	Signos de entendimiento (SigEn)	Memoria	M
		Conexiones	Cx
		Aplicación a un problema similar	PS
		Aplicación a un problema nuevo	PN
2	Signos de explicación (SigEx)	Distintas representaciones	DR-E
		Reflexión	R
		Autoconvencimiento	A
3	Signos de comunicación (SigC)	Distintas representaciones	DR-C
		Modificación del lenguaje	ML
		Conflicto	Cf
4	Signos de descubrimiento (SigD)	Nuevas definiciones	NDef
		Nuevas proposiciones	NPro
		Nuevas pruebas	NPr

Fuente: Elaboración propia.

1. **Signos de entendimiento.** Se precisa una categoría que nos ayude a identificar si se obtuvieron los resultados esperados tras la aplicación de las actividades.
 - a) Memoria (M): Signo de aprendizaje con entendimiento seleccionado para observar la capacidad de retener información. Por las limitaciones de tiempo, se pudo evaluar en lapsos de tiempo de máximo una semana.
 - b) Conexiones (Cx): Característica definitoria del entendimiento, es necesaria para identificar relaciones entre conceptos previos y nuevos, o bien, la capacidad de relacionar entre sí los conceptos e ideas nuevos.
 - c) Aplicación a un problema similar (PS): Para identificar la capacidad de los participantes de identificar las similitudes entre problemas antes abordados y nuevos y volver a aplicar las ideas que le fueron útiles.
 - d) Aplicación a un problema nuevo (PN): Difiere con la subcategoría anterior en el nivel de modificación del problema original; si bien se pueden usar los conceptos entendidos previamente, esto no resulta evidente en un principio.
2. **Signos de explicación.** Se trata de uno de los beneficios que trae el uso de la DUSC. Esta categoría pretende determinar si mediante argumentos y técnicas demostrativas se logran identificar las razones por las que un resultado es verdadero o falso, es decir, el autoconvencimiento. Esta reflexión fortalece las conexiones entre conceptos y lleva a un aprendizaje con entendimiento.
 - a) Distintas representaciones (DR-E): Se refleja la creación de conexiones mediante el uso de distintas representaciones de las ideas que surgen tras la exploración para autoconvencerse de que un resultado es verdadero o falso.
 - b) Reflexión (R): Se cuestiona la utilidad de las conjeturas para alcanzar su objetivo demostrativo.
 - c) Autoconvencimiento (A): Se autoconvence de la veracidad o falsedad de un resultado mediante técnicas o heurísticas alusivas a la PUSC.
3. **Signos de comunicación.** Refiere a otro de los objetivos de la demostración y pretende identificar las instancias en que se comunicaron resultados con el objetivo

de convencer o persuadir a un público, fortaleciendo las conexiones entre conceptos y conduciendo a un aprendizaje con entendimiento.

- a) Distintas representaciones (DR-C): Se refleja la creación de conexiones mediante el uso de distintas representaciones de las ideas surgidas tras la exploración para persuadir de que un resultado es verdadero o falso.
- b) Modificación del lenguaje (ML): Se modifica el lenguaje con el que se expresa sus argumentos para persuadir a su público; esto crea, o bien fortalece, las conexiones entre las ideas matemáticas previamente revisadas.
- c) Conflicto (Cf): Se enfrenta un conflicto o desequilibrio generado por la interacción con un público, reorganiza la información y la comunica.

4. Signos de descubrimiento. Busca identificar los posibles descubrimientos o redescubrimientos y cómo se crean conexiones o se fortalecen las existentes.

- a) Nuevas definiciones (NDef): Crea conexiones entre ideas previas o bien, conecta ideas nuevas para generar una nueva definición.
- b) Nuevas proposiciones (NPro): Genera nuevas conjeturas o proposiciones basadas en la exploración con la herramienta digital o la herramienta física.
- c) Nuevas pruebas (NPru): Genera nuevas pruebas apoyándose en las existentes, identificando las partes invariantes y modificándolas adecuadamente.

4.2 Análisis subcategorial de los resultados

En la presente sección se procede al análisis de los resultados utilizando las categorías y subcategorías previamente descritas. Dentro del análisis de cada sesión se tendrá la sección referente a la transcripción, a la producción escrita y al cuestionario, en ese orden.

4.2.1 Sesión 1: transcripción

En la presente sección se resaltan los episodios representativos de las categorías y sus subcategorías sustentados por teóricos y con el aporte de la investigadora; el análisis de algunos episodios omitidos se adjunta en el Apéndice E. Se utilizan tablas en las que se enfrentan los episodios con las aportaciones de la investigadora y, a continuación de esta, se

coloca el aporte teórico que respalda su ubicación dentro de la categoría; esta organización es una variación de la diseñada por Bertely (2000). De no encontrar episodios referentes a alguna categoría, ésta no aparecerá. En la tabla a continuación, “I” se refiere a los diálogos de la Investigadora y E1, E6, etc., se refiere a los diálogos de los diferentes participantes.

Tabla 6. Episodios alusivos a la Categoría 1 en la transcripción de la Sesión 1		
Subcategoría	Episodio	Investigadora
Cx	Episodio 1	El estudiante realiza la conexión entre el movimiento de los objetos que sugiere la investigadora y su propia idea previa.
	I: (...) Ok, observen cómo voy a mover los triangulitos, así... (...) ¿Qué pueden observar (...)? E1: Que es como si el triángulo ABH lo hubiera partido como yo decía y ahora ya tienes dos triángulos rectángulos, y con eso se puede aplicar lo que yo le decía que es la mitad de que si se dibujara un cuadrilátero alrededor del triángulo.	
	Episodio 2	El participante realiza la conexión entre la fórmula revisada al inicio de la sesión (adaptada al caso particular de un cuadrado) para dar un argumento que justifique lo solicitado.
	I: (...) Entonces, ya teniendo esto (...) ¿cómo podrían explicárselo a alguien? (...) E1: Podría ser utilizando la misma fórmula del cuadrado ¿no? I: Ajá. E1: Que es esencialmente base por altura, entonces de ahí nos apoyamos (...)	

Fuente: Elaboración propia.

En el Episodio 1, el participante conecta la idea que tuvo acerca del acomodo de los triángulos que sugiere la investigadora, ampliando la red de representaciones que creó previo al surgimiento de su idea; en el segundo, conecta el concepto de área de un cuadrado en dicha red; así, se evidencian señales de entendimiento (Hiebert y Carpenter, 1992).

Tabla 7. Episodios alusivos a la Categoría 3 en la transcripción de la Sesión 1		
Subcategoría	Episodio	Investigadora
DR-C	Episodio 1	El participante eligió una representación kinestésica para persuadir a la investigadora de que su idea es plausible. Al decir “delimitado por la misma área” se refiere a que coinciden su base y altura.
	E1: A mí se me ocurre que cuando hacemos un triángulo [hace ademán de construirlo en el aire] y digamos un cuadrado [hace ademán de construirlo en el aire] delimitado por la misma área del triángulo, el área del triángulo nos da la mitad del área del cuadrado.	

	Episodio 2	Puesto que la investigadora no entiende la descripción, el participante cambia su representación a una visual y coloca una flecha para indicar el movimiento que debe seguir la figura para formar un rectángulo.
	I: Eh... no entendí muy bien tu idea. ¿Quieres pasar? ¿Sí? Adelante. [El Estudiante 2 realiza un diagrama en el pizarrón] [Observe línea 152 - 159 en APÉNDICE A]	
	Episodio 3	El participante modifica la información que tiene y la convierte en una representación algebraica dentro de su discurso para que tenga sentido para el resto de sus compañeros.
	I: (...) Observen estas dos ecuaciones. (...) ¿cómo llego a que el área del rectángulo, del triángulo [corrige] es base por altura sobre dos? (...) E1: Que, evidentemente, el área del triángulo es realmente la misma ecuación que el área del triángulo, pero sin el dos, porque es la mitad. [Observe línea 639 - 656 en APÉNDICE A]	
ML	Episodio 1	El estudiante realiza un esfuerzo para hacerse entender utilizando el término “desfragmentar” para referirse a que las unidades de área se van reduciendo en tamaño en los lados del triángulo.
	E6: Bueno yo digo que como toda figura geométrica tiene una base, bueno esta longitud en cualquier fórmula se va a ocupar, pero el problema viene en la altura porque ¿cómo decirlo? el triángulo se “desfragmenta” y por ese fragmento después se tiene que dividir entre dos.	
	Episodio 2	El estudiante simula una conversación hipotética en la que él le explicaría a una tercera persona su idea y procura convencer de la veracidad de la misma.
	E1: Que es esencialmente base por altura, entonces de ahí nos apoyamos, “mira aquí tenemos nuestro cuadrilátero y hacemos un triángulo, nos damos cuenta de que es un triángulo rectángulo es la mitad del cuadrilátero, por eso se divide entre dos, un paso más que con la fórmula anterior que sólo era base por altura, ahora lo dividimos entre dos porque el triángulo abarca la mitad del cuadrilátero”.	
Cf	Episodio 1	Existe un conflicto al intentar usar la misma idea para justificar la fórmula del área del rectángulo. Más tarde, realiza una conjetura para reacomodar la información y justificar la nueva fórmula.
	I: (...) ¿Alguien más? E6: Bueno yo digo que como toda figura geométrica tiene una base, bueno esta longitud en cualquier fórmula se va a ocupar, pero el problema viene en la altura porque ¿cómo decirlo? el triángulo se “desfragmenta” y por ese fragmento después se tiene que dividir entre dos.	

Fuente: Elaboración propia.

Los episodios referentes a la subcategoría DR-C reflejan instancias en las que los participantes realizaron un cambio de representación en las ideas que buscaban comunicar. Pape y Tchoshanov (2001) mencionan que las distintas representaciones de ideas matemáticas deben considerarse herramientas de actividad cognitiva, por ejemplo, representaciones gráficas pueden ser utilizadas para ayudar a los estudiantes a explicar o justificar un argumento; esto aplica para otro tipo de representaciones, pues los mismos autores argumentan que cuando se utilizan múltiples representaciones, el nivel de interacción social entre los estudiantes aumenta automáticamente, es decir, intercambian más sus ideas y aprenden de las soluciones de los demás.

Similarmente, para los episodios alusivos a ML, Morgan et al. (2014) hacen notar que, en un aula de clases, las palabras y los símbolos matemáticos no conforman la totalidad de la comunicación que se lleva a cabo y la elección del lenguaje impacta en la teoría, el significado, etc. Consogno (2006) menciona que la transformación del lenguaje escrito que conduce a reinterpretaciones contribuye al razonamiento matemático. Los episodios muestran las transformaciones de sus ideas para comunicarlas y hacerlas entender, expandiendo su lenguaje y llevando a asociaciones con nuevos significados.

En cuanto al episodio referente a la subcategoría Cf, enfatizamos la postura de Sackur et al. (2000) (ver *Diagrama 1*, Capítulo 2) que esquematiza el proceso de comunicación en el aula, donde los estudiantes activan el conocimiento actual y a través del error se promueve un conflicto, definido como un desequilibrio cognitivo provocado por el hallazgo de información que obliga al individuo a realizar un reacomodo de la misma para adaptarse.

Tabla 8. Episodios alusivos a la Categoría 4 en la transcripción de la Sesión 1		
Subcategoría	Episodio	Investigadora
NProp	Episodio 1	El estudiante realiza una exploración con la herramienta y produce una nueva conjetura basada en la idea que tuvo originalmente.
	E1: Ya revisé la idea que le había comentado y me di cuenta que también funciona con el triángulo equilátero con el único que funciona es con el que tiene todos los lados iguales.	

Episodio 2		
E1:	Acabo de percatarme de otra cosa.	
I:	¿Qué pasó?	Tras la exploración prolongada con la herramienta, expande su idea original a nuevos casos, extendiendo su conjetura.
E1:	Bueno, cuando tenemos un triángulo escaleno y lo dividimos partiendo desde su base obtenemos dos triángulos y los dos tienen un ángulo recto y ahí se puede aplicar lo mismo ¿no? Lo que le comentaba anteriormente.	

Fuente: Elaboración propia.

En la tercera fase del modelo de Wallas (1926) se afirma que pueden surgir conjeturas de la experimentación con casos particulares, como es el caso del Episodio 1, el participante estudia casos específicos: inicia con el triángulo isósceles y posteriormente concluye que se cumple para el equilátero. Se definió conjetura como una suposición educada basada en afirmaciones matemáticas que ya se han aceptado y, en el Episodio 2, el estudiante extiende la propia al caso del triángulo escaleno, dada por cierta para los dos casos anteriores.

4.2.2 Sesión 1: producciones escritas

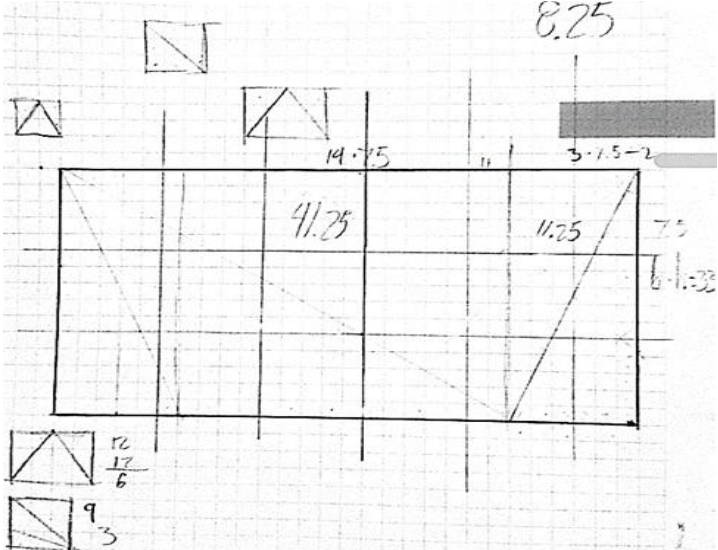
En esta sección se presentarán los episodios hallados en las producciones escritas de forma análoga a la anterior; se comienza con las producciones previas a la explicación de la investigadora y, posteriormente, se analizan las relativas a la Actividad 1. Se partió con preguntas exploratorias sobre las razones por las que los participantes creían que la fórmula del área de un triángulo funciona; se les solicitó escribir argumentos para convencerse de ello, a continuación se muestran algunos. Para esta etapa de la sesión se reunieron dieciséis producciones a pesar de que hubo veintiún asistentes debido a que o bien el participante llegó tarde y no atendió a la instrucción o no tuvo el deseo de hacerlo; no hay que olvidar que pese a que las actividades se realizaron durante sus clases y el profesor titular les invitó a tomarlo con seriedad, la participación fue voluntaria.

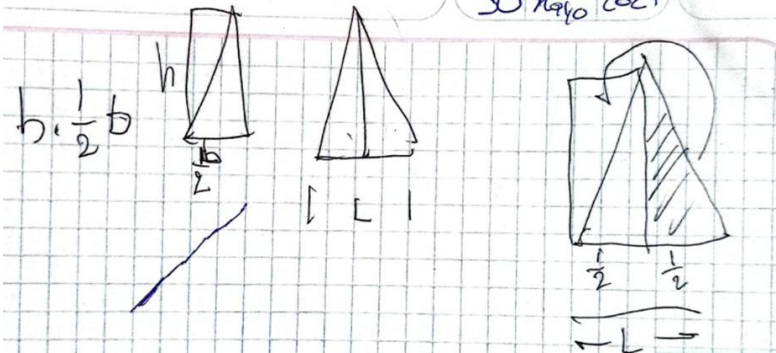
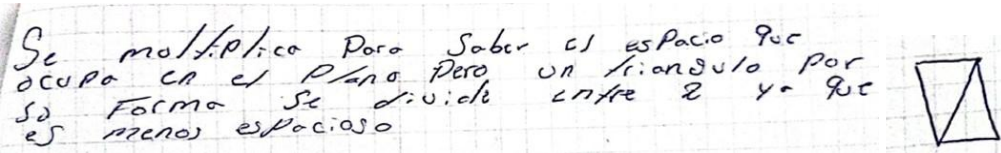
Se eligieron episodios de acuerdo a los argumentos producidos para justificar lo solicitado y tomando ejemplos representativos de cada uno; los argumentos presentes fueron:

1. Porque se trata de la mitad de un cuadrado/rectángulo.
2. Porque la altura divide al triángulo a la mitad y, al rotarlo, se convierte en rectángulo.

3. Porque, al ocupar “menos espacio” comparado con un rectángulo/cuadrado de misma base y misma altura, se debe dividir entre dos.

El primer argumento fue el que más se repitió y se toma un episodio donde se incluyen argumentos escritos y un diagrama ilustrativo con medidas específicas. Para el segundo argumento, se incluye un episodio con un diagrama que indica cómo rotar la mitad del triángulo y para el tercer argumento, se presenta la única producción donde estuvo presente.

Tabla 9. Episodios alusivos a la Categoría 2 en las producciones escritas de la Sesión 1	
Subcategoría	Episodio 1
A	El área del triángulo se calcula así, posiblemente porque al dibujar un triángulo si se dibuja un cuadrado con la base y la altura del triángulo el área del triángulo dará la mitad del área del cuadrado que se dibujase <i>Imagen 1. Producción escrita del participante 1.</i>
DR-E	 <i>Imagen 2. Diagrama del participante 1.</i>
Investigadora	
El participante hace conjeturas basadas en la representación gráfica que produce y se autoconvence de que la fórmula funciona. Utiliza ideas previas como la fórmula para el área de un cuadrado y realiza mediciones específicas de acuerdo a los diagramas que produce; estos últimos son una representación que lo apoya en el proceso de autoconvencimiento.	
Subcategoría	Episodio 2

A / DR-E	 <i>Imagen 3. Diagrama del participante 2.</i>
Investigadora	
El participante ilustra el argumento de que, dado un triángulo en el que la altura coincide con la mediatriz de la base y girar una de las mitades, se forma un rectángulo. Si bien no describe con palabras dicho argumento, hace uso de otra representación para convencerse a sí mismo y de una flecha que indica el movimiento de rotación necesario.	
Subcategoría	Episodio 3
A / DR-E	 <i>Imagen 4. Producción escrita y diagrama del participante 3.</i>
Investigadora	
Se aborda una idea intuitiva, menciona que el triángulo “es menos espacioso” que el rectángulo, por tanto, de ahí surge el “sobre dos”.	

Fuente: Elaboración propia.

En los tres episodios se reporta la presencia de las subcategorías A y DR-E; recordamos que la categoría 2 engloba episodios en los que el participante utiliza heurísticas relativas a la demostración para observar la *maquinaria interna* de los resultados y entender las razones por las son verdaderos (Rav, 1999). Puesto que todos ellos aceptaban ya la fórmula del área del triángulo, restaba únicamente que se convencieran de su funcionamiento conectándola con la definición de área revisada al inicio de la sesión. En el primer episodio, el participante usa casos particulares como técnica exploratoria para alcanzar esto y al cambiar de representación, utiliza medidas específicas para autoconvencerse.

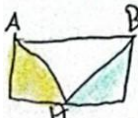
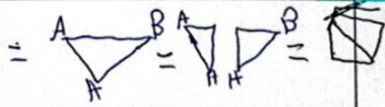
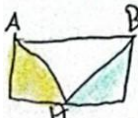
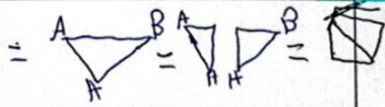
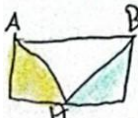
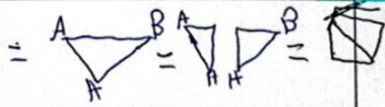
Recordemos que el cambio de representación con este objetivo, para entender y comunicar, se construye y se adapta para propósitos específicos (Greeno y Hall, 1997). En el segundo

episodio el argumento se basa nuevamente en un caso particular, esta vez, de un triángulo isósceles que el participante ilustra y se autoconvence visualizando mediante un diagrama, notemos que colocó una flecha para indicar rotación, por lo que se trata de una representación que alude a la kinestesia. Finalmente, el tercer episodio evidencia un pensamiento mayormente intuitivo y aunque esta heurística basada en la conexión con la idea visitada previamente para el caso del rectángulo pueda ser suficiente, entrelazar habilidades como la experimentación, el descubrimiento, la generación de conjeturas y el análisis para llegar a una demostración podría ayudar a construir o reconstruir nuevos significados (Ramírez y Hernández, 2017).

Ahora bien, respecto a las producciones escritas de la Actividad 1, es decir, la tabla descrita en el capítulo anterior (Apéndice B), se encontró evidencia de episodios dentro de las categorías 2, 3 y 4. Se obtuvieron un total de veintiún producciones debido a la asistencia en la Sesión 1. En la *Tabla 10* se presenta la única producción que alude a subcategorías de las categorías 2, 3 y 4; en la *Tabla 11*, la única en la que se encuentra una combinación de subcategorías de la categoría 2 y de la 4 y, finalmente, en la *Tabla 12*, una producción representativas en la que se encuentran las subcategorías R y/o A de la categoría 2, en el Apéndice E se muestra una producción alusiva a la subcategoría DR-C y otra a R.

Como nota aclaratoria, producciones escritas de cuatro participantes no fueron incluidas debido a que presentaron una copia exacta de lo que hizo otro compañero, se trató de los participantes que no pudieron descargar la aplicación; otras cuatro se omitieron debido a que la tabla estaba incompleta (no colocaban nada en alguna de las dos columnas) o bien, estaba totalmente vacía; finalmente, dos producciones no fueron incluidas debido a argumentos incompletos que no pudieron ubicarse en ninguna categoría; por lo anterior, en esta sesión se obtuvieron once producciones con información relevante.

Tabla 10. Episodio alusivo a las Categorías 2, 3 y 4 en las producciones escritas de la Sesión 1

Episodio 1									
<table> <tr> <th>Idea</th> <th>¿Cómo me puede ayudar a justificar lo solicitado?</th> </tr> <tr> <td>Al utilizar la aplicación y usar los triángulos y formar un cuadrado aparecen los puntos, A, B, C, D que al sumarlo da como resultado un .</td> <td></td> </tr> <tr> <td>  Al utilizar los triángulos y moverlos obtenemos un cuadrado y del otro lado nos queda otro cuadrado. Al sumarlo nos da un rectángulo que es el área completa. El cuadrado en blanco es el área de el triángulo blanco. </td> <td> que al juntar los triángulos se hacen 2 cuadrados el de color y el blanco el blanco sale $B \cdot A$ que es igual al resultado que buscamos que es el de el triángulo en blanco </td> </tr> <tr> <td>   </td> <td>  </td> </tr> </table>	Idea	¿Cómo me puede ayudar a justificar lo solicitado?	Al utilizar la aplicación y usar los triángulos y formar un cuadrado aparecen los puntos, A, B, C, D que al sumarlo da como resultado un .		 Al utilizar los triángulos y moverlos obtenemos un cuadrado y del otro lado nos queda otro cuadrado. Al sumarlo nos da un rectángulo que es el área completa. El cuadrado en blanco es el área de el triángulo blanco.	que al juntar los triángulos se hacen 2 cuadrados el de color y el blanco el blanco sale $B \cdot A$ que es igual al resultado que buscamos que es el de el triángulo en blanco	 		
Idea	¿Cómo me puede ayudar a justificar lo solicitado?								
Al utilizar la aplicación y usar los triángulos y formar un cuadrado aparecen los puntos, A, B, C, D que al sumarlo da como resultado un .									
 Al utilizar los triángulos y moverlos obtenemos un cuadrado y del otro lado nos queda otro cuadrado. Al sumarlo nos da un rectángulo que es el área completa. El cuadrado en blanco es el área de el triángulo blanco.	que al juntar los triángulos se hacen 2 cuadrados el de color y el blanco el blanco sale $B \cdot A$ que es igual al resultado que buscamos que es el de el triángulo en blanco								
 									
Imagen 5. Producción escrita del participante 2.									
Subcategoría	Investigadora								
R / NPru / DR-C	Las primeras dos ideas se ven incompletas, o bien, no se reflexionó al respecto. Respecto a las otras dos ideas, notamos que mueve el punto H de modo que tenga dos triángulos del mismo tamaño y rota el triángulo amarillo, teniendo la mitad del rectángulo cubierto. Observe que el estudiante llega a la prueba para la fórmula del área del triángulo en el caso particular en que H es el punto medio, sin embargo, es un excelente indicio de una prueba en la que se autoconvenció del resultado, aquí es claro que hubo reflexión respecto a los movimientos realizados. Notemos también que realiza diagramas para ilustrar sus argumentos, por lo que realizó la tarea extra de convencer a la lectora.								

Fuente: Elaboración propia.

El episodio reportado muestra señales de reflexión, pues el estudiante analiza cómo sus ideas fueron útiles. Se observa de igual manera que, a pesar de que no fue una instrucción expresa, él procura persuadir mediante un diagrama. Herramientas específicas de representación contribuyen al desarrollo de actividad matemática de acuerdo con Craig (2011) y Misfeldt (2007), citados por Morgan et al. (2014). Se considera que el estudiante aporta una nueva prueba porque se identifican elementos de las DUSCs de acuerdo al Modelo de Toulmin (2007), en este caso, se considera Dato (D) el hecho de que coloca el

punto H a la mitad de la base y obtiene dos cuadrados de igual área. Los diagramas ilustran la forma de argumentación basada en que la suma de las áreas de ambos cuadrados es igual al área original y, aunque no nota que existen condiciones excepcionales si H está a la mitad de la base, es una primera aproximación basada en un caso particular.

Tabla 11. Episodio alusivo a la Categoría 2 y 4 en las producciones escritas de la Sesión 1

Episodio 1							
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Idea</th><th>¿Cómo me puede ayudar a justificar lo solicitado?</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>ante los triángulos equiláteros y triángulos rectángulos si se dibuja un cuadrado/rectángulo el área del triángulo es la mitad del cuadrado</td><td>ayuda porque los triángulos mencionados siguen un patrón, el escaleno al tener todos los lados diferentes es inmune a esta afirmación</td></tr> <tr> <td>Cuando un triángulo escaleno se divide con la línea de altura obtenemos dos triángulos rectángulos, a los que se le puede aplicar la afirmación anterior</td><td>este proceso nos regresa a la tesis anterior.</td></tr> </tbody> </table>	Idea	¿Cómo me puede ayudar a justificar lo solicitado?	ante los triángulos equiláteros y triángulos rectángulos si se dibuja un cuadrado/rectángulo el área del triángulo es la mitad del cuadrado	ayuda porque los triángulos mencionados siguen un patrón, el escaleno al tener todos los lados diferentes es inmune a esta afirmación	Cuando un triángulo escaleno se divide con la línea de altura obtenemos dos triángulos rectángulos, a los que se le puede aplicar la afirmación anterior	este proceso nos regresa a la tesis anterior.
Idea	¿Cómo me puede ayudar a justificar lo solicitado?						
ante los triángulos equiláteros y triángulos rectángulos si se dibuja un cuadrado/rectángulo el área del triángulo es la mitad del cuadrado	ayuda porque los triángulos mencionados siguen un patrón, el escaleno al tener todos los lados diferentes es inmune a esta afirmación						
Cuando un triángulo escaleno se divide con la línea de altura obtenemos dos triángulos rectángulos, a los que se le puede aplicar la afirmación anterior	este proceso nos regresa a la tesis anterior.						
<i>Imagen 6. Producción escrita del participante 1.</i>							
Subcategoría	Investigadora						
R / NPro	El participante describe el movimiento al que llega y realiza una afirmación, además, propone los casos en los que esta se cumple; sugiere el caso en el que no se cumple, proposiciones que resultan de la exploración de la herramienta digital.						

Fuente: Elaboración propia.

Recordemos que en la enseñanza por descubrimiento, las tareas instructivas deben permitir a los alumnos utilizar activamente sus propios conocimientos y habilidades para producir las conexiones que conducen a un aprendizaje con entendimiento (Del Río, 2011). Respecto a la subcategoría NPro, tras la exploración el estudiante realiza una proposición que no llega a ser ejemplo representativo de una DUSC. Sin embargo, regresando a la cita de Hanna y Barbeau (2002) (ver Capítulo 2), el proceso de conjeturar se convierte en la conexión entre los procesos de identificación de patrones matemáticos y su verificación.

Tabla 12. Episodios alusivos a la Categoría 2 en las producciones escritas de la Sesión 1

Episodio 1

Idea	¿Cómo me puede ayudar a justificar lo solicitado?
el movimiento de a ca girando a los grados	por que al rotar el triángulo, los ángulos externos aumentan sus grados
el movimiento de B inicia desde los 360°	Por que esta al lado opuesto de a
El movimiento de a inicia desde los 0°	por que esta al lado opuesto B .
De acuerdo con el movimiento del punto H el triángulo se moverá y con eso algún lado	por que la mover el punto H , se mueve la punta un lado crece y el otro disminuye
al mover el lado HD hasta el punto D de la derecha el lado AD	por que se convertiría en uno mismo que el lado HD

Imagen 8. Producción escrita del participante 6.

Subcategoría

Investigadora

R/A

El estudiante realiza una exploración basada en la rotación y reflexiona continuamente sobre los cambios que realiza. Mueve el punto H y nota que si lo coloca en un extremo del cuadrado obtiene un triángulo rectángulo, lo que presenta el caso particular en el que un triángulo es la mitad del rectángulo, siendo esta técnica de ayuda a su autoconvencimiento en el caso particular.

Fuente: Elaboración propia.

Para los episodios anteriores se recuerda que Fiallo et al. (2013) establece que los tres objetivos de la demostración que son motivo de este trabajo de investigación promueven dos componentes esenciales en el trabajo matemático: la reflexión y la comunicación de ideas y que, Barrera y Reyes (2014) resaltan la importancia de estos procesos en favor del aprendizaje con entendimiento.

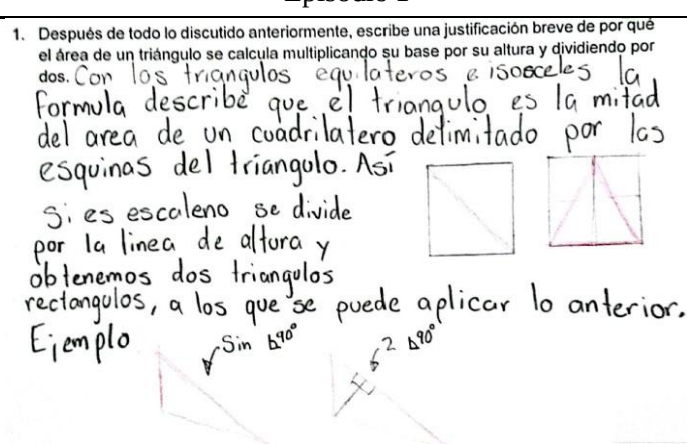
4.2.3 Sesión 1: cuestionario 1

En esta sección se presentan las respuestas al Cuestionario 1, cuyo objetivo fue obtener información acerca del entendimiento de los participantes tras la actividad, de su retención de información y explorar si se comprendió la generalidad de la justificación; además,

explorar la influencia de la herramienta digital en la exploración/descubrimiento. Se enlistan las preguntas y se determina si se alcanzó el objetivo de cada una (ver *Tabla 2*).

1) Después de todo lo discutido anteriormente, escribe una justificación breve de por qué el área de un triángulo se calcula multiplicando su base por su altura y dividiendo por dos.

De las veintiún respuestas obtenidas, únicamente cuatro cumplieron con el objetivo deseado ya sea porque el participante realizó cambios de representación para comunicar (DR-C), modificó su lenguaje para hacerse entender (ML) o incluso, generó un esbozo de demostración (NPru) que posee elementos de una DUSC de acuerdo con el modelo de Toulmin (2007); estos episodios se muestran en la *Tabla 13*. Cabe mencionar que doce participantes abordaron la pregunta confundiendo un caso particular con la prueba general, se muestra un ejemplo de este argumento en donde hubo un cambio de representación para facilitar la comunicación. Del resto, dos participantes dieron argumentos incompletos o alejados de las ideas vistas en la sesión que no fueron concluyentes y tres colocaron respuestas incorrectas, en las que se evidenció una falta de entendimiento de la actividad.

Tabla 13. Respuestas alusivas a las Categorías 3 y 4 en el Cuestionario 1 (pregunta 1)	
Episodio 1	
1. Después de todo lo discutido anteriormente, escribe una justificación breve de por qué el área de un triángulo se calcula multiplicando su base por su altura y dividiendo por dos. Con los triángulos equiláteros e isósceles la fórmula describe que el triángulo es la mitad del área de un cuadrilátero delimitado por las esquinas del triángulo. Así Si es escaleno se divide por la línea de altura y obtenemos dos triángulos rectángulos, a los que se puede aplicar lo anterior. Ejemplo  <i>Imagen 9. Producción escrita del participante 1.</i>	
Subcategoría	Investigadora
DR-C / NPru	Se observa un cambio de representación en la que el estudiante compara dos casos particulares, el del triángulo rectángulo y el de un triángulo oblicuángulo (escaleno), esto con el objetivo de comunicar la idea a la lectora. Por otra parte, se evidencia la construcción de una prueba en la que se observa la presencia de los

	Datos (D) –triángulos equiláteros e isósceles –con la garantía (G) de que son la mitad del área de un cuadrilátero. El estudiante encuentra una excepción para los triángulos escalenos pero establece las condiciones Excepcionales (E) para adaptar sus argumentos al caso especial y declara las Conclusiones (C).
--	---

Episodio 2

1. Después de todo lo discutido anteriormente, escribe una justificación breve de por qué el área de un triángulo se calcula multiplicando su base por su altura y dividiendo por dos.

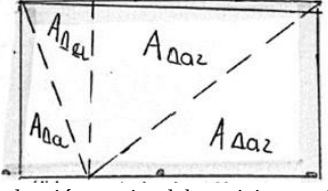
Porque el rectángulo tiene 6 puntos los cuales son los puntos A, C, B, D, H, C y para resumir que el área del triángulo se calcula multiplicando su base por altura y dividiendo por 2.

En mi caso yo explico que el rectángulo tiene 2 pares y 4 medidas las cuales cada par es igual.

Todo pequeño $A_{\Delta 1}$

$A_{\Delta} = b \cdot h = 2A_{\Delta 1} + 2A_{\Delta 2} = 2(A_{\Delta 1} + A_{\Delta 2})$

Todo grande $A_{\Delta 2}$



$A_{\Delta} = A_{\Delta 1} + A_{\Delta 2}$

$A_{\Delta} = \frac{b \cdot h}{2}$

Imagen 10. Producción escrita del participante 4.

Subcategoría	Investigadora
DR-C / NPru	El estudiante declara los Datos (D) aceptados tras la exploración que es que "el rectángulo tiene 2 pares y 4 medidas las cuales cada par es igual" y los argumentos de Respaldo (R) los transforma en otra representación, en este caso, en un diagrama y representación algebraica para que la lectora lo acepte y, en la misma manera, declara la condición algebraicamente.

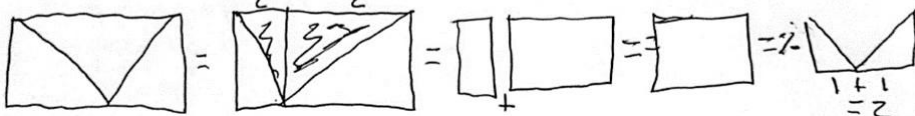
Episodio 3

1. Después de todo lo discutido anteriormente, escribe una justificación breve de por qué el área de un triángulo se calcula multiplicando su base por su altura y dividiendo por dos.

Porque el rectángulo fue dividido en 2 rectángulos logrando obtener 2 pares de triángulos así mismo obtenemos la área del rectángulo que es $A = 2\Delta + 2\Delta$ esto quiere decir que es la suma de los 2 triángulos de cada rectángulo por lo que para sacar el área del triángulo es $\frac{b}{2} \cdot h$ ya que es la mitad del rectángulo (así) esto quiere decir que de una manera más lógica y entendible al sumar $1\Delta + 1\Delta$ da el área de ella.

Imagen 11. Producción escrita del participante 10.

Subcategoría	Investigadora
--------------	---------------

DR-C / ML / NPru	El estudiante realiza una combinación entre representaciones algebraicas y lenguaje verbal para convencer a la lectura del argumento; considera como Datos (D) que puede dividir el rectángulo en cuatro triángulos, aunque comete el error de decir que son iguales. Se observa una modificación del lenguaje que procura persuadir con palabras como “lógica” y “entendible”.
Episodio 4	
1. Después de todo lo discutido anteriormente, escribe una justificación breve de por qué el área de un triángulo se calcula multiplicando su base por su altura y dividiendo por dos. $A_{\triangle} = b \cdot h = 2 A_{\Delta}$ En los dos triángulos amarillos que al unirlos hacen un rectángulo, + 2 A_{Δ} azul, son otros triángulos que al sumarlos hacen otro rectángulo y al sumar los dos rectángulos hacen el área del rectángulo grande y es dividido entre dos por que son los triángulos donde queremos buscar el área 	
Imagen 12. Producción escrita del participante 2.	
Subcategoría	Investigadora
DR-C / NPru	El estudiante parte de una representación algebraica y del área del rectángulo como Datos (D) y la combina con la verbal. Complementa con un cambio de representación a un diagrama en el que combina signos algebraicos y busca convencer a la lectora, y declara las conclusiones (C) de la misma forma.
Episodio 5	
1. Después de todo lo discutido anteriormente, escribe una justificación breve de por qué el área de un triángulo se calcula multiplicando su base por su altura y dividiendo por dos. El área de un triángulo se calcula multiplicando su base por su altura y dividiendo por 2 por que un triángulo puede considerarse como la mitad de un rectángulo. El área de un rectángulo se calcula multiplicando su base por su altura ($A = b \cdot h$), el área de un triángulo será la mitad de eso es decir ($A = \frac{b \cdot h}{2}$)	
Imagen 13. Producción escrita del participante 5.	
Subcategoría	Investigadora
DR-C	El participante confunde el caso de los triángulos rectángulos con la prueba general y la conecta con la idea previa del área del rectángulo, utilizando representaciones algebraicas para persuadir.

Fuente: Elaboración propia.

Los episodios anteriores tienen la característica de que el participante se conduce hacia la subcategoría DR-C. Citando a Pape y Tchoshanov (2001) estas representaciones se pueden utilizar tanto para facilitar un argumento como para apoyar las conclusiones a las que habían llegado previamente. Los Episodios 1-4 tienen en común que el participante condujo los argumentos hacia una nueva prueba y en la tabla se enlistaron los elementos de una demostración basada en el modelo de Toulmin (2007) con los que cumplen, sin embargo, de manera general, se les presentó el argumento para que realizaran una reinterpretación y así pudieran identificar qué argumentos se aceptaron desde el principio, cuáles debían justificar y la forma de hacerlo (en la que algunos utilizaron diagramas) y la forma de comunicarlo, esbozando, sin notarlo, una DUSC (Stylianides y Ball, 2008).

2) *¿Esta justificación es válida para todos los triángulos posibles (escalenos, isósceles y equiláteros)? ¿Por qué?*

Las respuestas fueron en su mayoría afirmativas, sin embargo, muchas se basaron en la creencia de que un caso particular representa la generalización para todos los triángulos o bien, no hubo justificación de por qué la respuesta fue afirmativa, excepto en un caso que se presenta a continuación. Hubo un total de cuatro respuestas negativas en las que los estudiantes no comprendieron la condición de generalidad de la demostración.

Tabla 14. Respuesta alusiva a la Categoría 1 en el Cuestionario 1 (pregunta 2)	
Episodio 1	
2. ¿Esta justificación es válida para todos los triángulos posibles (escalenos, isósceles y equiláteros)? ¿Por qué? Si, solo con excepción del escaleno. Solo hace falta cortarlo y convertirlo a triángulos rectangulos, volviendo a ser valida. <i>Imagen 14. Producción escrita del participante 1.</i>	
Subcategoría	Investigadora
PS	Se observa que el estudiante, tras notar que los casos particulares en que logra justificar lo deseado requieren de generalización, da la idea para hacerlo y concluye la validez general del resultando, evidenciando su capacidad de adaptar sus ideas a problemas similares: esto es, ya no trata a los triángulos isósceles únicamente, modifica para adaptarlo a los escalenos.

Fuente: Elaboración propia.

Tras notar que su conjetura no se cumple para un caso particular, el estudiante debe adaptar sus argumentos a un nuevo problema. La capacidad de utilizar un conocimiento en distintas situaciones es esencial porque la mayoría de los problemas nuevos requieren la solución a través de estrategias previamente aprendidas (Stylianides y Stylianides, 2007), además, al ser capaz de decidir qué partes de la prueba anterior mantener y qué cambios realizar, se evidencia constructivismo acumulativo en la actividad cognitiva del participante.

3) Explica cómo te fue de ayuda la herramienta digital. ¿Crees que se te hubieran ocurrido las mismas ideas si la actividad hubiera sido usando sólo papel y lápiz?

Los participantes reportaron, en su mayoría, que la herramienta digital les aportó una visión alternativa a la que hubieran tenido acceso únicamente usando lápiz y papel; de veintiún participantes, diecisiete respondieron “no” a la pregunta planteada, es decir, que las ideas que colocaron no se les hubieran ocurrido de no tener la herramienta digital. Algunas de las respuestas más comunes fueron que la herramienta “*agilizó su proceso*”, que les aportó “*ideas diferentes*”, que podían mover las figuras con “*mayor libertad*” y que “*no hubieran trazado igual con papel y lápiz*”. Del resto, un participante dejó la pregunta en blanco y dos no justificaron su respuesta y sólo uno reportó que sólo utilizó papel y lápiz.

4) ¿Qué ideas te aportó el puzzle para llegar a la conclusión?

Se comparó la respuesta a esta pregunta con el proceso de resolución del participante, es decir, se observó si, en efecto, volvió sobre sus pasos para observar qué ideas le sirvieron para llegar a la solución y cómo se las aportó la herramienta. Lo anterior ocurrió con cuatro participantes ya que, a pesar de que doce mencionaron algunas ideas, estas eran muy generales, no se relacionaban con su proceso de solución o remitían a los beneficios generales de la herramienta digital mencionados en la respuesta anterior como que los “*movimientos les ayudaron*” o que fue “*más fácil y rápido*”. En la *Tabla 15* se presenta un episodio representativo de las producciones que cumplieron el objetivo, evidencia de la categoría 2 (subcategoría R), pues el estudiante reflexiona sobre cómo le ayudaron sus ideas para alcanzar su objetivo.

Finalmente, un participante afirma que la herramienta digital sólo le ofreció una confirmación de las ideas que ya habían surgido con su exploración utilizando papel y lápiz; otro que no pudo “*explicar*” el caso del cuadrado; otro más respondió “*no sé*” y dos no respondieron la pregunta.

Tabla 15. Respuestas alusivas a la Categoría 2 en el Cuestionario 1 (pregunta 4)

Idea desarrollada (Episodio 1)	
Idea	¿Cómo me puede ayudar a justificar lo solicitado?
moviendo el H con el C formando un Triángulo	que al unir a H con C la mitad de ambas hagan una diagonal obteniendo 2
cualquier triángulo si se parte a la mitad obtenemos dos triángulos rectángulos	cuando el triángulo se parte a la mitad y se obtiene dos triángulos rectángulos

Imagen 15: Producción escrita del participante 8.

Respuesta 1	
4. ¿Qué ideas te aportó el puzzle para llegar a la conclusión? que cuando el triángulo se parte a la mitad, obtenemos dos triángulos rectángulos ¿qué al mover el H con el C forman un triángulo cuando se hacen en diagonal obteniendo dos lados iguales.	
Investigadora	
Se reporta la idea del caso particular de dividir el rectángulo en dos triángulos rectángulos, reflejando una vuelta sobre sus pasos.	

Fuente: Elaboración propia.

El diseño de esta pregunta tiene el objetivo de promover el pensamiento crítico para que los estudiantes realicen una organización de información consciente y restringida por la conexión entre los elementos, esto es constructivismo acumulativo (Bruner, 1961).

5) Si el rectángulo inicial fuera más grande o más pequeño ¿funcionaría la idea que se te ocurrió?

Se analiza si las respuestas fueron afirmativas o negativas y, en el caso primero, si dieron una razón para justificarla. Un total de once participantes la dieron, con argumentos tales como “*las medidas no importan porque no eran específicas*”, “*los triángulos siguen teniendo tres lados*” o “*solo necesitamos que haya dos triángulos*”; cuatro sólo respondieron afirmativamente sin justificación. Finalmente, sólo uno respondió negativamente con el argumento “*no, porque estuviera de un lado salido*”; dos dejaron la pregunta en blanco y dos de ellos respondieron “*tal vez*” y otro con “*quizá fuera diferente*”.

6) ¿Puedes aplicar alguna de las ideas de este puzzle a un problema diferente?

De los veintiún participantes, diecinueve respondieron afirmativamente; de estos últimos, nueve fueron más específicos con sus ideas, siendo tres las más repetitivas:

1. Sustituir el rectángulo por un cuadrado, evidencia de la subcategoría PS de la categoría 1, reportado por tres participantes;
2. Utilizarlas “*con un círculo*”, idea que no ampliaron y puede ser evidencia de empirismo episódico, reportado por tres participantes;
3. Aplicarlo a “*otras figuras*”, u “*otros polígonos*” pero que requerían mayor exploración, o bien, no especificaron más allá, reportado por tres participantes.

Por otro lado, diez participantes no ampliaron su respuesta, aunque fue afirmativa. Finalmente, un participante respondió “*no sé*” y otro más no respondió.

A pesar de que para la primera idea, generar una variación del rectángulo al cuadrado es generar en sí mismo un nuevo problema, la variación es mínima y no implica modificaciones mayores en cuanto a la solución dada en el original; sin embargo, es importante notar que el hecho de que estos participantes hayan observado que el problema se resuelve con las mismas ideas que dieron previamente es un intento de resolución de un problema similar. Esta idea difiere de las dos anteriores ya que estas últimas carecen de profundidad y no tienen que ver con el problema anterior.

7) ¿Te sería de ayuda para justificar que la fórmula del área de un pentágono regular se encuentra multiplicando el perímetro por la apotema (recuerda que la apotema es el segmento perpendicular al lado del pentágono que pasa por el centro del mismo, ver Figura 1) y dividiendo sobre dos?

La mayoría de los estudiantes no respondieron algo relevante, y aunque no se esperaba que produjeran una demostración completa, gran parte de ellos respondieron “sí”, dejaron la pregunta en blanco o algo equivalente como escribir “no sé”. Únicamente un participante propone una división que puede ser evidencia de la conexión (Cx) de las ideas presentes en la actividad anterior: dividir la figura en otras y calcular sus áreas para, finalmente, sumarlas y obtener el área total; sin embargo, no notó que un pentágono se puede dividir en cinco triángulos equiláteros.

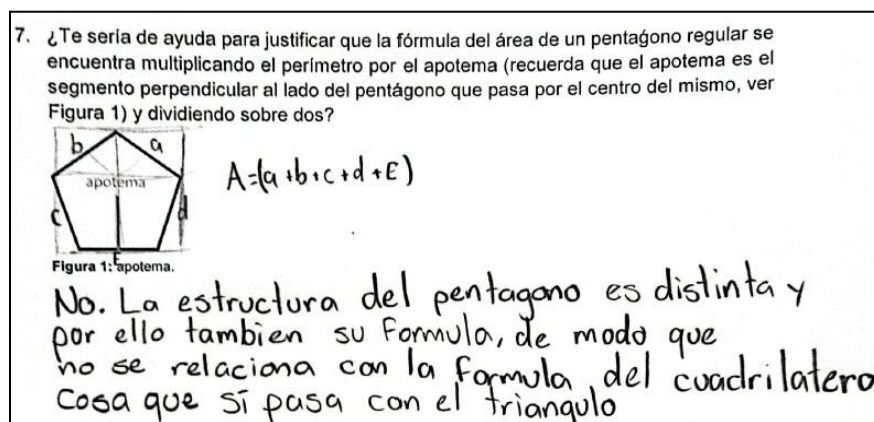


Imagen 17. Producción escrita del estudiante 1 que evidencia la subcategoría C de la categoría 1.

Este episodio evidencia la conexión entre la idea previamente explorada de forma no explícita con el uso del puzzle, que si se divide una figura y se calcula el área de cada una de sus partes y se suma, se obtiene el área total. Poder utilizar la idea mencionada en una situación distinta es una de las características definitorias del aprendizaje con entendimiento (Hiebert y Carpenter, 1997), si el participante hubiera llegado a la solución, se tendría evidencia de la categoría 4, referente descubrimiento; sin embargo, la división no fue conveniente y se quedó en el estado de conexión.

8) ¿Y de cualquier polígono regular?

Se obtuvieron respuestas similares a las de la pregunta anterior, catorce participantes respondieron afirmativamente, sin embargo, no justificaron la respuesta o colocaron una idea general como “*depende de sus lados*” o “*aplica en cualquier polígono regular*”, sin mayor justificación. Un participante respondió “*no sé*” y seis dejaron la pregunta en blanco.

A continuación, se realiza el análisis de los resultados de la Sesión 2.

4.2.4 Sesión 2: transcripción

De forma análoga, se resaltan los episodios relevantes en la transcripción de la Sesión 2.

Tabla 16. Episodio alusivo a la Categoría 1 en la transcripción de la Sesión 2		
Subcategoría	Episodio	Investigadora
M / Cx	Episodio 1	Al cuestionar al estudiante cómo justificar que las tres opciones son del mismo tamaño, recuerda los conceptos relativos al área revisados la sesión anterior: base y altura; además fortalece la conexión previamente revisada entre dichos conceptos y la fórmula para calcular su área.
	I: (...) ¿Cómo escribiste tus argumentos? E16: Bueno sí puse más o menos los objetivos. (...) De que... los triángulos... los tres triángulos comparten la misma base y los tres triángulos comparten la misma altura. I: (...) ¿qué papel juega en tu demostración? ¿Es hipótesis o argumento? E16: Sería una... una hipótesis. I: Ajá, es una hipótesis, bien. ¿Qué más? E16: Y que para calcular su área se utiliza la fórmula de base por altura sobre dos.	

Fuente: Elaboración propia.

En este episodio se observan en conjunto dos subcategorías, en primer lugar el estudiante recuerda los conceptos vistos en la sesión anterior que, si bien sólo tuvo cuatro días de diferencia con la segunda, evidencia retención en la memoria, característica importante del aprendizaje con entendimiento (Stylianides y Stylianides, 2007). Por otra parte, Barrera y Reyes (2014) enfatizan la relación de este aprendizaje con el fortalecimiento de conexiones ya existentes, evidenciado de igual manera en el episodio.

Tabla 17. Episodio alusivo a la Categoría 2 en la transcripción de la Sesión 2		
Subcategoría	Episodio	Investigadora
A	Episodio 1	Una técnica válida para determinar si un resultado es falso es la búsqueda de contraejemplos; así se autoconviene de que el resultado es falso..
	I: (...) "¿Se puede construir un triángulo dadas cualesquiera tres medidas?" Algunos estudiantes: No. I: Ok... sí, no, quiero que escriban su respuesta y la razón por la cual lo creen. E9: No porque ya lo intenté y no se pudo...	

Fuente: Elaboración propia.

Si bien el participante no empleó una demostración para responder la pregunta, se convence mediante la técnica de la contradicción, la cual aporta el beneficio explicativo y, citando a Rocha (2019), “en ocasiones es mejor perder formalismo en favor de la intuición”.

Tabla 18. Episodios alusivos a la Categoría 3 en la transcripción de la Sesión 2		
Subcategoría	Episodio	Investigadora
DR-C	Episodio 1	Motivado por la investigadora, el participante realiza un cambio de representación a una algebraica, y lo expresa verbalmente.
	I: Ajá, por ejemplo, si los lados del triángulo son a , b y c , ¿cómo expreso la suma de alguno de los dos? De un par de lados. E3: $a + b$.	
ML	Episodio 1	Al no expresar su argumento verbalmente con claridad suficiente para hacerse entender, el participante cambia a la representación kinestésica para ilustrar la razón por la que el tercer triángulo no se puede construir.
	I: (...) ¿Creen que se puede hacer con cualesquiera tres medidas? E10: Bueno, no porque al intentarlo con algunas medidas no se puede... o sea una medida muy larga con dos que son muy cortas pues no... se puede. [indica las diferencias entre las medidas con ademanes]	
	Episodio 2	
	E10: Es así, por decirlo, la medida a es la base. La medida b es la de, bueno, la de un triángulo es la que mide 7, y la medida c es la que mide 6 cm. Lo que pasa es que una tiene una medida mayor y las otras tienen una medida menor, esas son medidas que casi son iguales, [inaudible] eso quiere decir que al unir las coinciden y se cierra el triángulo.	En este episodio, la participante modifica su argumento introduciendo medidas específicas para hacerse entender por la investigadora, tratando de hacer más concreta tu explicación.

Cf	Episodio 1	Los estudiantes hallan conflicto al encontrar el desacuerdo en el número de triángulos que se pueden construir, por lo que ambos revisan sus trazos para confirmar su respuesta.
	I: (...) ¿Ya armaron los tres triángulos, ya escribieron? E6: No, sólo se pueden dos. I: Ok. E14: ¿Cuáles dos? Si sólo se puede uno. E6: El último es el que no sale.	

Fuente: Elaboración propia.

El episodio referente a la primera subcategoría (DR-C) reporta el tránsito de la representación verbal a la algebraica, con apoyo de la investigadora. De acuerdo con Radford (2010) el vínculo entre las representaciones mentales y las externas (manipulación de signos o símbolos) es que, de alguna manera, las últimas reflejan las estructuras del funcionamiento mental. En otras palabras, la manera en que los estudiantes representan algebraicamente un enunciado refleja cómo su representación mental de este se transforma, lo que fortalece las conexiones preexistentes con otras representaciones mentales.

Respecto a la segunda subcategoría, notamos que en los episodios señalados se observa, inicialmente, una fuerte ambigüedad en los argumentos expuestos por los estudiantes y, motivados por la investigadora, en mayor o menor medida, existe una modificación del lenguaje orientada a una mayor especificidad en sus enunciados. Puga et al. (2016) reiteran que el conocimiento de un lenguaje específico nos lleva a interactuar dentro del contexto específico de una disciplina, imprescindible para comprender y comunicar eficientemente. Finalmente, para el episodio referente a la subcategoría Cf, recomendamos revisar el diagrama de Sackur et al. (2000) (*Diagrama 1*, Capítulo 2) en el que se simula el proceso comunicativo en el aula. Se observa cómo la interacción entre dos estudiantes los conduce a la revisión de sus afirmaciones, puesto que sus posturas contrarias generan un conflicto.

Tabla 19. Episodios alusivos a la Categoría 4 en la transcripción de la Sesión 2		
Subcategoría	Episodio	Investigadora
NProp	Episodio 1	El estudiante realiza una conjetura basada en la exploración con la herramienta física, una regla graduada.
	E1: Los tres triángulos tienen la misma medida. I: [asintiendo] Ok, ¿por qué? E1: Ya los medí.	

	Episodio 2	Tras la exploración visual, conjetura por qué los triángulos coinciden en área.
	E2: Porque los lados grandes de cada uno son los que le faltan al otro.	
	Episodio 3	Con apoyo de la investigadora, la estudiante genera una conjetura en términos matemáticos basada en su exploración visual.
	I: (...) ¿Qué cumplen estas medidas que las hacen tan especiales como para que podamos construir un triángulo? (...)	
	E10: Mm... puede ser que tiene medidas que al medirse... concuerdan entre sí...	
	I: (...) ¿cómo le explicas a alguien, matemáticamente, que esto es verdad o que estos lo cumplen? (...)	
	E10: Pues la relación que tienen que tener es que la base... por inicio, tiene que ser más grande que las otras dos. (...) Una tiene que tener una medida... un poco más chica que la otra.	
	Episodio 4	Tras la exploración con la herramienta, se produce una conjetura que relaciona dos medidas del triángulo con la restante.
	E1: Yo encontré que la base no puede ser mayor al doble de los otros... de cualquiera de los otros dos lados.	

Fuente: Elaboración propia.

El primer episodio nos remite al uso de las herramientas físicas para la producción de conjeturas. El Estudiante 1 en particular, se veía estrechamente dependiente de la especificidad de los ejemplos proporcionados, es decir, le era difícil desapegarse de las medidas en las figuras de los ejercicios presentados. La interpretación que hace Ferrari (2003) sobre el trabajo de Hilbert indica que la práctica matemática requiere que se desarrolle la habilidad de concentrarse en lo que es importante, sin deshacerse completamente del contexto, en otras palabras, de la abstracción. La mencionada dependencia y las distintas representaciones juegan un papel crucial en este proceso pues pueden promoverlo o entorpecerlo. Si bien, en este caso su dependencia presenta una ventaja, pues la medición lo llevó a conjeturar un resultado correcto, esto podría llevar a la incapacidad de abstracción cuando estas ventajas no están a su alcance.

Respecto al episodio 3, la investigadora hace énfasis en el hallazgo de “regularidades”, es decir, promueve que los estudiantes identifiquen patrones basados en la exploración de casos particulares, proceso mencionado en el modelo de Wallas (1926) previamente revisado. Similarmente, en el episodio 4, el participante aporta una conjetura en la que relaciona las medidas de los lados del triángulo como condición para su construcción.

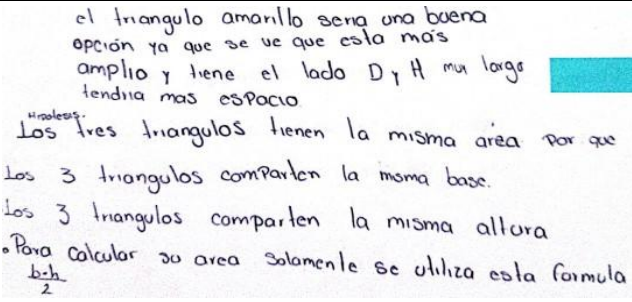
4.2.5 Sesión 2: producciones escritas

En esta sección se presentarán los episodios relevantes hallados en las producciones escritas de la Sesión 2; como se observó en la sección de análisis del diseño de las actividades, en la Actividad 2 se abordaron tres problemas. El presente análisis aborda dichos problemas en orden. Estos episodios se presentan en tablas que siguen el mismo formato que en la sección anterior, además de la justificación teórica con las citas correspondientes.

Para el ejercicio 1, se encontró evidencia de episodios dentro de las cuatro categorías definidas, sin embargo, no de todas las subcategorías. Se obtuvieron 27 producciones debido a la asistencia en la Sesión 2. Se presentan dos producciones que aluden a la combinación de subcategorías de la categoría 1 y alguna otra; cabe aclarar que existen producciones en las que se encuentran presentes únicamente subcategorías de la categoría 1 (M y Cx) y de la 3 (NPro) que, puesto que son muy similares a las presentadas en las tablas previamente mencionadas, no se incluyen y aquella que combina subcategorías de las categorías 3 y 4 se presenta en el Apéndice E.

Como nota aclaratoria, cuatro producciones no fueron incluidas debido a que los participantes dejaron el ejercicio en blanco y trece debido a que se expusieron argumentos incompletos que no pudieron ubicarse en ninguna categoría; por lo tanto, se obtuvieron diez producciones con información relevante.

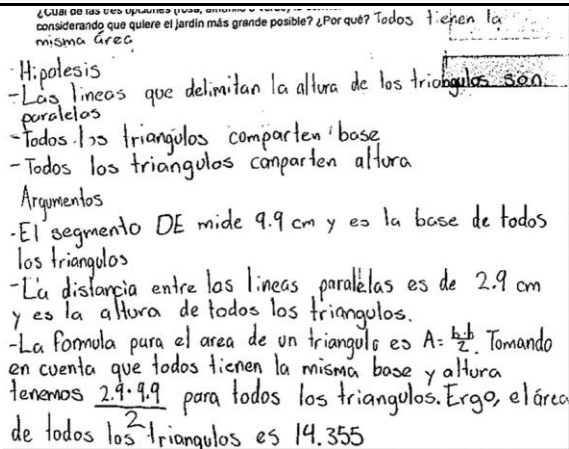
Tabla 20. Episodio alusivo a las Categorías 1, 2 y 3 en las producciones escritas de la Sesión 2

Episodio 1	
 el triángulo amarillo sería una buena opción ya que se ve que está más amplio y tiene el lado D y H muy largo tendría mas espacio Los tres triángulos tienen la misma área por que los 3 triángulos comparten la misma base. los 3 triángulos comparten la misma altura • Para calcular su área solamente se utiliza esta fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$	
<i>Imagen 18.</i> Diagrama del participante 7.	
Subcategoría	Investigadora
Cf	La participante, supone basándose en la longitud de la hipotenusa DH del triángulo amarillo que es la mejor opción, enfrentándose a un conflicto que posteriormente resuelve produciendo una prueba útil en el salón de clases.
Cx	La estudiante realiza la conexión entre la coincidencia de las alturas y las bases en los tres triángulos con su área.
M	Al establecer los argumentos de su prueba, recuerda que la fórmula revisada en la sesión anterior puede serle de utilidad.
A	La estudiante se autoconviene a través de una demostración cuya estructura se acerca a una útil en el salón de clases, si bien, le faltan detalles. Establece las garantías (G) en la fórmula del área del triángulo, con el respaldo (R) de que las alturas y las bases coinciden e indica las conclusiones (C); notamos que le falta establecer los datos (D) en las hipótesis.

Fuente: Elaboración propia.

A lo largo de este episodio, aparecen distintos conceptos de la Teoría de Desarrollo Cognitivo de Piaget (1977). El estudiante supone una respuesta y se enfrenta a un conflicto luego de escuchar la conclusión a la que llega el grupo, por lo que debe existir un proceso de acomodación al que llega gracias a la prueba que produce. En ella, juega un papel importante la memoria y al integrar los objetos asimilados a la red cognitiva, estos contribuyen a la construcción de nuevas estructuras dentro de sus esquemas mentales. Además, existió una conexión entre los conceptos de base y altura y la fórmula del área ya que pudo trasladarlo en forma de argumento con orden y validez, elementos cruciales del lenguaje matemático (Puga et al., 2016), para llegar a la conclusión.

Tabla 21. Episodio alusivo a las Categorías 1 y 4 en las producciones escritas de la Sesión 2

Episodio 1	
 ¿Cuál de las tres figuras (base, altura o área) considerando que quiere el jardín más grande posible? ¿Por qué? Todos tienen la misma área. Hipótesis - Las líneas que delimitan la altura de los triángulos son paralelas - Todos los triángulos comparten base - Todos los triángulos comparten altura Argumentos - El segmento DE mide 9.9 cm y es la base de todos los triángulos - La distancia entre las líneas paralelas es de 2.9 cm y es la altura de todos los triángulos. - La fórmula para el área de un triángulo es $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Tomando en cuenta que todos tienen la misma base y altura tenemos $\frac{2.9 \cdot 9.9}{2}$ para todos los triángulos. Ergo, el área de todos los triángulos es 14.355	
<i>Imagen 19: Diagrama del participante 1.</i>	
Subcategoría	Investigadora
Cx	El participante, en primer lugar, es capaz de diferenciar la hipótesis de los argumentos y en las previas realiza la conexión entre los conceptos de altura y base con el de área del triángulo, llevándolo a contestar que las áreas coinciden.
NPru	El estudiante se autoconvencer a través de la medición de los lados de los triángulos y realiza una DUSC, pues se observa que en su estructura señala los datos (D) en las hipótesis, establece las garantías (G) en la fórmula del área del triángulo, con el respaldo (R) de que las alturas y las bases coinciden e indica las conclusiones (C).

Fuente: Elaboración propia.

Este es uno de los primeros episodios en los que se observa que el estudiante produce una DUSC con la estructura esperada del modelo de Toulmin (2007) y se encuentra ligada a que el estudiante realizó las conexiones necesarias para comprender y organizar sus argumentos eficientemente, dando cuenta, además, de la presencia de constructivismo acumulativo en la estructura de su prueba, pues es capaz de restringir la información a aquella que tiene un objetivo determinado en la argumentación.

El análisis del segundo ejercicio se enfoca en identificar si los estudiantes se autoconvencieron del resultado haciendo uso de la técnica demostrativa del contraejemplo y si, basándose en la exploración de la herramienta física, pudieron generar una nueva proposición, por lo tanto, las categorías predominantes fueron la 2 y la 4. Cabe aclarar que esta proposición no tiene por qué ser cien por ciento acertada. Primero, se presentan las

producciones en las que hubo autoconvencimiento y se produjo una conjetura con lenguaje matemático; en segundo lugar, se presentan las producciones en las que hubo autoconvencimiento y cierta proposición ambigua; en tercer lugar se muestran aquellas en las que existe autoconvencimiento y cierta justificación de por qué en los ejemplos dados sí fue posible la construcción; finalmente, se muestran dos producciones en las que el uso de la herramienta física pudo ser un obstáculo en la exploración del participante. Como nota aclaratoria, 2 producciones no fueron incluidas debido a que el estudiante argumentó con conceptos ajenos a los revisados y no pudieron ubicarse en ninguna categoría; 11 debido a que no hubo una justificación de por qué no se pudo construir el tercer triángulo además de “no pude” o similares y, aunque hubo autoconvencimiento, hizo falta argumentación. Además, 5 producciones ya que los participantes no respondieron el ejercicio y, por último, 2 producciones en que los participantes escribieron exactamente lo mismo que otro; por lo anterior, en esta sesión se obtuvieron 8 producciones con información relevante.

En la *Tabla 22* se presenta una producción con evidencia de subcategorías como la NPro, A y DR-E, que se presentaron en otras producciones (Apéndice E) de forma muy similar. Cabe notar que ningún participante probó las medidas sin antes intentar trazar los triángulos y, al final, el éxito -o no -en la construcción fue lo que los condujo al autoconvencimiento.

Tabla 22. Episodio alusivo a las Categorías 2, 3 y 4 en las producciones escritas de la Sesión 2

Episodio 1
Construye un triángulo con las medidas indicadas: • 7cm, 11cm, 6cm • 4cm, 3cm, 6cm • 11cm, 5cm, 3cm No, ya que lo eh intentado y no me ha salido. tiene que variar la medida no tiene que ser tan larga un lado y muy serios los otros lados. Lo primero es que c tiene que ser mas largo que a, b en lo que a, b tampoco tienen que ser tan chicos que la base ni muy largos una medida intermedia para que puedan cerrar. La base tiene que ser menor que el doble de los lados.

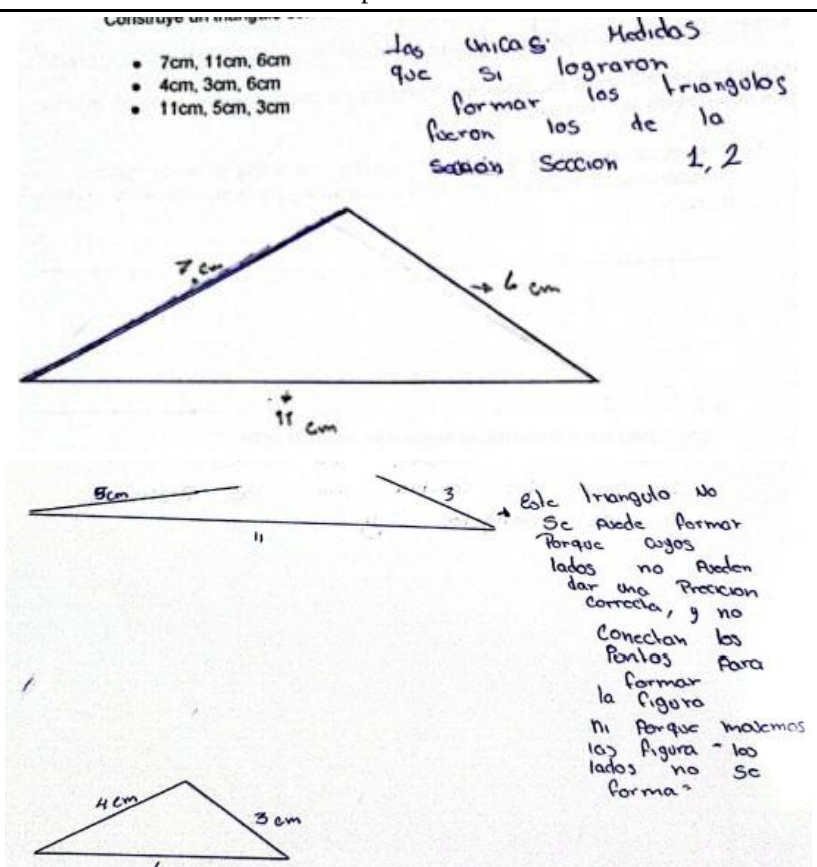
Imagen 20: Diagrama del participante 7.

Subcategoría	Investigadora
A / DR-E / NPro / ML	En este caso, además del cambio de representación al gráfico se observa que el estudiante abstrae la información y nombra los lados del triángulo 1 como a, b y c, y determina, que el lado c debe ser más largo que los otros y que estos deben tener una medida “ <i>intermedia</i> ”. Más tarde modifica su lenguaje y propone que la base debe ser mayor que el doble de los lados, lenguaje que, además de preciso, emplea términos matemáticos, a diferencia del anterior.

Fuente: Elaboración propia.

La subcategoría A se halla en las producciones que, basándose en el uso de contraejemplos, responden la pregunta planteada. De forma indirecta se busca introducir al estudiante al tipo de demostración denominado “reducción al absurdo” a través de los contraejemplos; de acuerdo a Sáenz (2002) esta técnica demostrativa es un método de razonamiento deductivo de especial trascendencia en el quehacer matemático, sin embargo, esta no se abordó directamente debido a que presenta una problemática epistemológica, cognitiva y también didáctica y, aunque se trata de una problemática importante, no es el objetivo de este trabajo abordarla. Respecto a la subcategoría DR-E, en la mayoría de las producciones se trata del intento del estudiante de construir los triángulos. Más específicamente, en el episodio anterior, aunque se observa que las conjeturas proporcionadas no son precisas o correctas del todo, recordemos que Del Río (1991) establece que aunque en la fase inicial del descubrimiento se produzcan errores y se emitan falsas conjeturas, el centro lógico de la enseñanza por descubrimiento se encuentra en la evaluación de estas conjeturas. Barberà (1996) nos dice que, en el transcurso de la resolución de un problema matemático cabe destacar la reverbalización que a menudo se produce cuando se tiene la necesidad de mayor explicitación, traduciendo las palabras del enunciado que se le ha presentado en otras más asequibles y familiares, como un ejemplo cercano, o una situación ya conocida, etc. Este proceso de modificación puede favorecer una elección más adecuada de la estrategia de resolución. Es notoria esta reverbalización en la primera proposición del estudiante y, una vez comprendida esta y obtenidos los beneficios en cuanto a entendimiento, se desarrolla la afirmación con mayor claridad para darse a entender a la investigadora.

En la siguiente tabla, se muestra una producción representativa en la que el estudiante busca justificar por qué dos de los tres triángulos se pueden construir, pero no alcanza a sugerir una proposición que generalice las condiciones necesarias para su construcción.

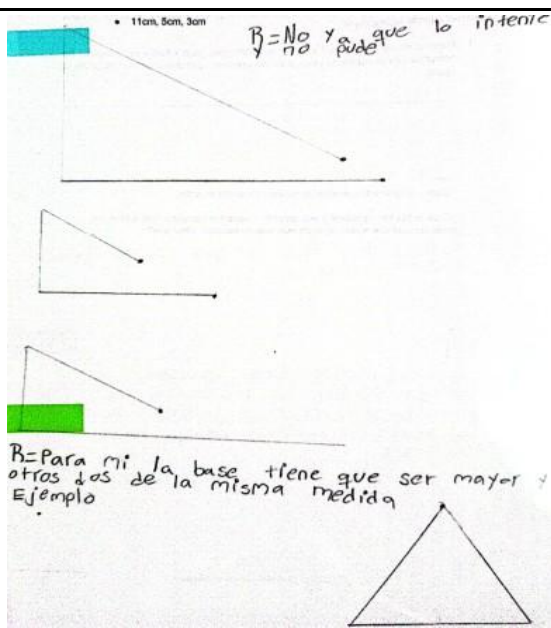
Tabla 23. Episodio alusivo a las Categorías 2 y 3 en las producciones escritas de la Sesión 2	
Episodio 1	
 Construye un triángulo • 7cm, 11cm, 6cm • 4cm, 3cm, 6cm • 11cm, 5cm, 3cm Las únicas Medidas que si lograron formar los triángulos fueron los de la Sección 1, 2 Este triángulo no se puede formar porque algunos lados no pueden dar una Precisión correcta, y no conectan los puntos para formar la figura ni porque incluso los lados no se forman	
Imagen 21: Diagrama del participante 1.	
Subcategoría	Investigadora
A / DR-E / ML	En este caso, el estudiante modifica el lenguaje sin haber identificado un patrón que lo lleve a caracterizar las medidas con las que se puede construir un triángulo. En su lugar, describe los ejemplos específicos en que logró construirlos, sin necesariamente llegar a una proposición. Si bien este proceso no está completo, es el inicio del surgimiento de una proposición más general.

Fuente: Elaboración propia.

En el episodio anterior, existió una modificación del lenguaje que, si bien no ocurrió durante una interacción directa entre los participantes y la investigadora, de acuerdo con

Barberá (1996), se puede llevar a cabo mediante la exteriorización del propio pensamiento, momento en el que el alumno no sólo está comunicando a modo de copia fiel lo que ha asimilado, etapa crucial en el proceso desarrollado por Piaget en su Teoría de Desarrollo Cognitivo, y además sigue estructurando y relacionando sus propias ideas.

Finalmente, se muestra una de las representaciones escritas en que la herramienta física pudo ser obstáculo para la exploración del problema, de las dos producidas.

Tabla 24. Episodio alusivo a las Categorías 2 y 4 en las producciones escritas de la Sesión 2	
Episodio 1	
 Handwritten student work showing three right-angled triangles. The first triangle has a vertical side of 11cm, a horizontal side of 5cm, and a hypotenuse of 3cm. The second triangle has a vertical side of 11cm and a horizontal side of 5cm. The third triangle has a vertical side of 11cm and a horizontal side of 5cm. The student has written "B=No y puede que lo intente" and "B=Para mi la base tiene que ser mayor y otros dos de la misma medida Ejemplo".	
<i>Imagen 22: Diagrama del participante 11.</i>	
Subcategoría	Investigadora
A / DR-E / NPro	Si bien el estudiante propone una conjetura, esta es incorrecta basada en la representación que obtiene de la herramienta física. Es claro que intenta adaptar las dimensiones dadas a triángulos rectángulos, la cual es una condición demasiado específica que estas no cumplen. Este error puede deberse a las limitaciones de la herramienta física o incluso a una mala conceptualización de lo que es un triángulo en su esquema mental, etiquetando como tal únicamente a los que poseen un ángulo recto.

Fuente: Elaboración propia.

En el episodio anterior se produce una conjetura incorrecta proveniente de una mala conceptualización del triángulo, pues el participante confunde el caso particular de un

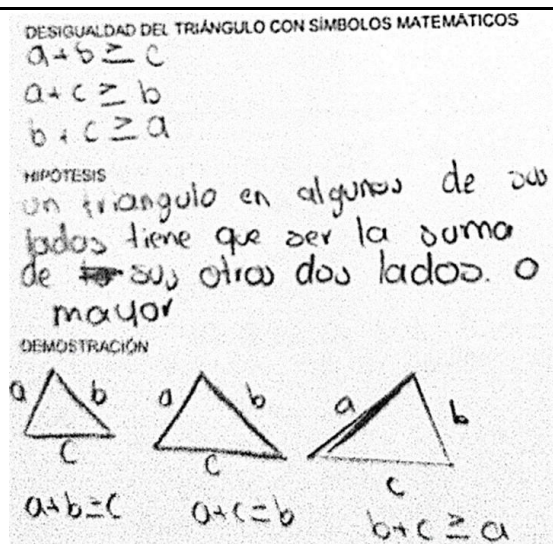
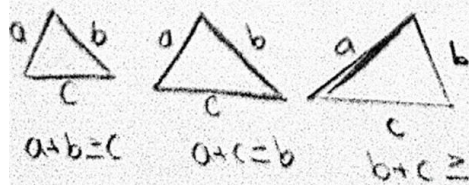
triángulo rectángulo con el de un triángulo en general o, incluso, podría deberse a las limitaciones del trazo con regla y lápiz que no permitieron variar en mayor medida los segmentos para construir un triángulo. En casos como estos, una DUSC es una herramienta crucial para organizar ideas y notar si los elementos que se involucran en la argumentación son los correctos, jugando un papel importante el objetivo explicativo de la prueba, en el Capítulo 2 se cita a Larios (2015) que nos dice que en el contexto escolar, interesan más las demostraciones que explican ya que el estudiante conjetura, explora y argumenta, desarrollando conocimiento con énfasis en la comprensión del proceso y del resultado.

El análisis del último ejercicio busca identificar signos de entendimiento dirigidos por el cambio de representación de la información, la organización de la misma y si, finalmente, los estudiantes pudieron construir una DUSC de manera consciente junto con las modificaciones del lenguaje adecuadas para persuadir; así, las principales categorías identificadas en estos episodios fueron la 2, 3 y 4. Se organizan y presentan los resultados en tres tablas: la primera cuenta con un episodio representativo de aquellos en los que el participante únicamente logró hacer el cambio de representación escrito al simbólico o visual del resultado a demostrar; en la segunda, uno en que también logró identificar la hipótesis y se produjeron algunos argumentos, correctos o no, y en la última tabla se reportan aquellas en que el estudiante tuvo éxito en producir una DUSC.

Cabe aclarar que doce producciones no se incluyeron ya que, en nueve de estas los participantes no fueron claros en sus argumentos y no se pudieron colocar en ninguna categoría o bien, no argumentaron; en tres no se respondió, dejándonos con quince producciones con información relevante.

En la tabla siguiente, se presenta una producción representativa de las 6 en que lo único que se identificó fue la capacidad de cambio de representación en el estudiante.

Tabla 25. Episodio alusivo a la Categoría 2 en las producciones escritas de la Sesión 2

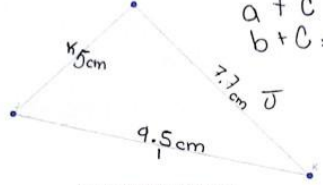
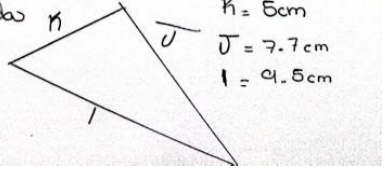
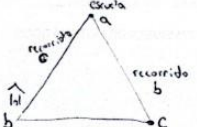
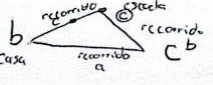
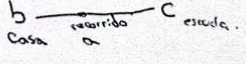
Episodio 1	
 DESIGUALDAD DEL TRIÁNGULO CON SÍMBOLOS MATEMÁTICOS $a+b \geq c$ $a+c \geq b$ $b+c \geq a$ HIPÓTESIS un triángulo en algunos de sus lados tiene que ser la suma de sus otros dos lados o mayor DEMOSTRACIÓN  $a+b=c$ $a+c=b$ $b+c \geq a$	
<i>Imagen 23: Producción escrita del participante 12.</i>	
Subcategoría	Investigadora
DR-E	Se observa que el participante pudo realizar el cambio de representación de la Desigualdad del Triángulo usando símbolos matemáticos, siendo que le fue proporcionada de manera escrita y verbal por la investigadora. Realizó, además, un cambio de representación al figural para ilustrar el resultado con tres triángulos diferentes. No colocó otro argumento.

Fuente: Elaboración propia.

En el episodio presentado en la *Tabla 27* se identifican habilidades que tienen que ver con el cambio de representación con objetivo explicativo debido a que, para poder trasladar sus argumentos a un espacio de lenguaje matemático, es necesario expresar el resultado que desea demostrar de esta manera. Cai et al. (1996) mencionan que es necesario que los estudiantes sean motivados a utilizar varias representaciones, como dibujos, expresiones matemáticas o texto escrito, para comunicar sus pensamientos. Esto promueve el razonamiento del estudiante, que, por consiguiente, nos lleva al mayor entendimiento.

En la *Tabla 26* a continuación, se muestran dos producciones representativas en las que el participante logró expresar argumentos que se acercan a la estructura de una DUSC o bien, en los que, mediante técnicas heurísticas, logra autoconvencerse de los resultados que desea probar, además de identificar adecuadamente las hipótesis.

Tabla 26. Episodios alusivos a las Categorías 2, 3 y 4 en las producciones escritas de la Sesión 2

Episodio 1	
¿Cómo expresarías este resultado usando símbolos matemáticos? Puedes apoyarte del siguiente diagrama.  Figura 2. Triángulo de lados I, J, K. $a + b \geq c$ $a + c \geq b$ $b + c \geq a$ DEMOSTRACIÓN al sumar $K + J \geq I$ esto quiere decir que $5 + 7.7 \text{ cm} = 12.7 \text{ cm}$ esto quiere decir que es mayor d I así todos los lados K al sumarlos son mayor.  $K = 5 \text{ cm}$ $J = 7.7 \text{ cm}$ $I = 9.5 \text{ cm}$	
Imagen 24: Producción escrita del participante 10.	
Subcategoría	Investigadora
DR-E / A	Se observa el cambio de representación, además, agrega medidas concretas al diagrama y, basada en estas, se autoconviene de la veracidad de la Desigualdad del Triángulo, sin embargo, no realiza argumentos generales para probarla.
Episodio 2	
Desigualdad del triángulo es que establecemos que la longitud de cualquier lado del triángulo es siempre menor que la suma de las longitudes de los otros 2 lados. es determinar si un conjunto de longitudes puede formar un triángulo válido. en este caso yo afirmaría, que la distancia a es mayor que b y que el recorrido para llegar al punto C es corto para llegar a mi destino. o más bien si me pierdo que el camino hacia a la escuela está en el punto b, y desde mi casa está el punto C, entonces Sumaria, el los 2 lados para tomar como atajo al punto a, aunque el punto b este cerca del C. en este caso estaría bien tomar el recorrido hacia el punto a porque estuviera considerando que a es mayor que C. Por ejemplo $a + b \geq c$  y bien tal vez me angustia sería que Suma los lados indicados y saber que son mayor que el tercer punto. Por ejemplo $b + c \geq a$. Por que la distancia b sería un atajo corto para distancia C y culminar con el punto a para llegar. y no dar tanta vuelta a los siguientes recorridos. yo opino que la única manera para llegar es recorrer la distancia b tomar como atajo el recorrido a ya que el camino es directo y corto para llegar al punto C.  	
Imagen 25: Producción escrita del participante 13.	

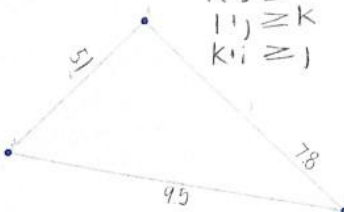
Subcategoría	Investigadora
DR-E / ML	El participante establece el objetivo que tiene que es demostrar la Desigualdad del Triángulo para caracterizar las medidas que funcionan para construir esta figura, esto evidencia una buena organización de la información. Además, realiza un cambio de representación usando la analogía que sugirió la investigadora: imaginar que hay que viajar de casa a la escuela, estableciendo estos destinos en los vértices del triángulo y, dependiendo de dónde se encuentren, notar que la forma más rápida de llegar es una línea recta, sin pasar por el vértice libre. El estudiante realiza una modificación del lenguaje y aborda dos posibilidades, cuando la casa está en el punto b y cuando está en el punto c, sin embargo, no incluye la última posibilidad, no pudiendo llegar al resultado. A pesar de lo anterior, se observa que fue capaz de utilizar la hipótesis para generar una serie de argumentos que lo llevaban a la conclusión final.

Fuente: Elaboración propia.

En el Episodio 1, el estudiante representa el triángulo con medidas concretas y, tras la exploración de las mismas con la herramienta física se autoconviene de la veracidad del resultado. Vinner (2011) menciona que es legítimo examinar ejemplos particulares y, si estos respaldan la conjetura a la que hemos llegado, entonces es una "conjetura válida".

En el Episodio 2, se observa la organización adecuada de la información, evidencia de constructivismo acumulativo. Por otra parte, tras la modificación del lenguaje, realiza una argumentación incompleta, que cumple con la estructura de una DUSC.

A continuación se muestran los episodios en los que el participante produce una DUSC.

Tabla 27. Episodios alusivos a las Categorías 2, 3 y 4 en las producciones escritas de la Sesión 2
Episodio 1
¿Cómo expresarías este resultado usando símbolos matemáticos? Puedes apoyarte del siguiente diagrama. $51 + 95 = 14.6$ $78 + 95 = 17.3$ $51 + 78 =$  Figura 2: Triángulo de lados i, j, k. $k + j \geq i$ $i + j \geq k$ $k + i \geq j$ DESIGUALDAD DEL TRIÁNGULO CON SÍMBOLOS MATEMÁTICOS $k + j \geq i$ $i + j \geq k$ $k + i \geq j$

HIPÓTESIS

- El segmento más largo no puede superar el doble de cualquiera de los lados.
- La distancia más corta entre dos puntos es la línea recta

DEMOSTRACIÓN

No. Si tenemos dos lados de cualquier medida al sumarse deben dar igual o más que el otro lado, ej. $2+1=3$

Pero para diseñar un triángulo el segmento más largo no puede rebosar el doble de cualquiera de los otros segmentos, de ser así, el triángulo no podría cerrarse

La condición primordial para construir un triángulo es que la suma de dos de sus lados den como resultado el igual o mayor al lado restante. Representado de otra manera podríamos mostrar lo siguiente:

La distancia ϕ es evidentemente más pequeña que la suma de $A+C$. De modo que la distancia más corta entre a y b es la línea recta, tal y como dice el postulado de la mínima distancia. Esto se aplica a todos y cada uno de los lados de los triángulos de cualquier tipo

Imagen 26: Producción escrita del participante 1.

Subcategoría	Investigadora
DR-E / A / ML / NPro /NPru	Primero, notemos que el participante realiza la medición de los lados del triángulo que se muestra en el planteamiento del ejercicio, con las que comprueba la Desigualdad del Triángulo, autoconvenciéndose de la representación simbólica que produjo y de, además, la veracidad de la misma. Aunado al establecimiento de la hipótesis del Postulado de la Mínima Distancia, agrega una propia, que si bien no corresponde al apartado en que lo colocó, es una nueva proposición basada en la medición concreta. En su argumentación, coloca ejemplos concretos para sostener sus proposiciones, esta modificación del lenguaje tiene el claro objetivo de persuadir a la investigadora. Finalmente, haciendo uso del Postulado de la Mínima Distancia, logra construir

una argumentación que lo lleva a una prueba útil en el salón de clases: se observa que en su estructura señala los datos (D) en las hipótesis, establece las garantías (G) en el hecho de que dentro de un triángulo hay líneas rectas, por lo que el postulado es aplicable, con el respaldo (R) que es la argumentación deductiva e indica las conclusiones al final (C).

Episodio 2

DEMOSTRACIÓN

Para llegar a un lado más rápido hay que poner en práctica el postulado de la mínima distancia.

Por ejemplo: Para recorrer de su casa a la escuela de lugar de pasar por el punto B y A simplemente podría pasar por la Cuadra 2 (b) y así simplemente recorrer una cuadra y no dos.

Es lo mismo como si ahora fuera diferente.

Para no pasar por dos cuadras a y b sería más fácil simplemente pasar por la Cuadra 1 (c).

otro ejemplo sería:

Para llegar de la casa a la escuela más rápido y no dar vueltas sería pasando del punto B a C que es la distancia a y no ir a dar más vuelta ir del punto B a A y llegar al C pasando por la distancia c y b. Sería de nuevo utilizar el postulado de la mínima distancia que es llegar de una forma más rápida y haciendo una línea recta.

Imagen 27: Producción escrita del participante 7.

Subcategoría	Investigadora
DR-E / A / NPrü	Primero, se observa un cambio de representación en el que se establecen medidas concretas y el autoconvencimiento sobre la DdT, utilizándolas. Posteriormente, utiliza el postulado para argumentar utilizando la analogía sugerida por la investigadora, y cambia de lugar la escuela en todos los vértices del triángulo, repitiendo su argumento para llegar a la conclusión deseada, produciendo una prueba útil en el salón de clases: señala los datos (D) en las hipótesis, establece las garantías (G) en el hecho de que dentro de un triángulo hay líneas rectas, haciendo la analogía de “cuadras”, por lo que el postulado es aplicable, con el respaldo (R) que es la argumentación deductiva e indica las conclusiones al final, cubriendo las tres desigualdades con un argumento análogo en cada ocasión (C).

Fuente: Elaboración propia.

En los episodios anteriores se identifica que los participantes comienzan a construir pruebas más estructuradas de acuerdo al modelo mencionado. La escasez de episodios no sorprende ya que, citando a Vinner (2011), el concepto de demostración no está definido en el nivel de estudios de preparatoria, los estudiantes están supuestos a adquirir esta habilidad mediante los ejemplos a los que se ven expuestos durante el periodo en que estudian matemáticas.

4.2.6 Sesión 2: cuestionario 2

En esta sección se presentarán las respuestas al Cuestionario 2, cuyo objetivo fue identificar si el estudiante comprende lo que es una demostración, si puede aplicar las ideas entendidas a un problema similar y si son capaces de generar una DUSC de forma individual. Desafortunadamente en esta sesión, por cuestiones de tiempo, se les solicitó no responder la pregunta 3, sin embargo, dos estudiantes realizaron intentos de resolverlo, que se presentan. Para el resto, solo se analizan las dos primeras preguntas. Se enlistan las dos preguntas y se determina si se alcanzó el objetivo particular de cada una (ver *Tabla 3*).

1) ¿Es necesario demostrar que dados un punto A y un punto B, una única recta pasa por ellos? ¿Por qué?

De los veintisiete participantes de la sesión, únicamente veintidós respondieron el cuestionario, sin embargo, dos participantes no respondieron la pregunta 1 por lo que sólo veinte fueron analizadas. De estas veinte respuestas, en dos de ellas se presentó una respuesta ambigua que no se analizó. Así, de las dieciocho respuestas, siete fueron

negativas y once fueron afirmativas, por lo tanto, el objetivo se cumplió con menos de la mitad de los participantes con respuestas relevantes. De las once respuestas afirmativas, cinco presentaron un argumento que tiene que ver con triángulos, sin embargo, tres fueron idénticas, lo que indica que los participantes realizaron una copia exacta de la respuesta de alguien más. A continuación se muestra un ejemplo representativo de este argumento:

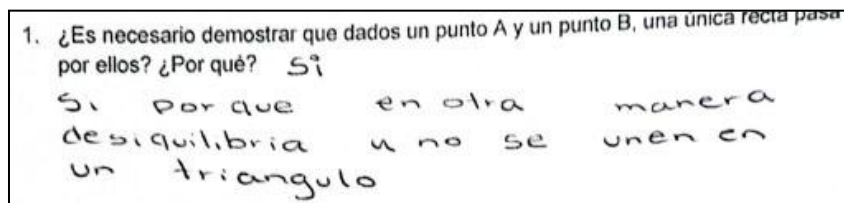


Imagen 28: Producción escrita del participante 15.

La respuesta anterior sugiere una confusión acerca de la pregunta, ya que no tiene que ver, en principio, con un triángulo. Esto indica que no es capaz de organizar la información que obtuvo en la sesión y utiliza la que no es relevante, signos de empirismo episódico (Bruner, 1961), esta respuesta fue repetida de manera similar por otros dos participantes.

Del resto, tres tuvieron argumentos como “*verificar que fueran las medidas correctas*” y el resto no dieron más justificaciones que “*para que sea más fácil*” o “*para que se entienda*”. De las siete respuestas negativas, tres tienen que ver con el Postulado de la Mínima Distancia, lo que indica una conexión (Cx) entre este resultado y la pregunta planteada, esta se expresaba con frases como “*No, es la distancia más corta*” o “*es la más rápida*” o “*es una sugerencia para conocer la mínima distancia entre los puntos A y B*”. Si bien, no son respuestas del todo claras, indican cierta conexión con lo discutido en la sesión al relacionar una línea recta con la distancia más corta, rápida o mínima entre dos puntos. Dos respuestas emplean el término “*obvio*” o “*lógico*”, una de ellas se muestra a manera de ejemplo:

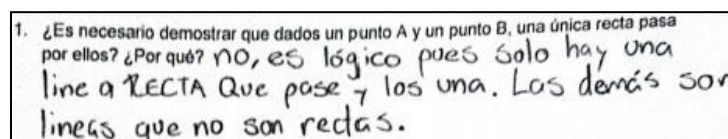


Imagen 29: Producción escrita del participante 1.

En este caso, el estudiante menciona que de no ser verdad, no serían rectas, evidencia de la fortaleza del concepto en su esquema mental. Finalmente, las últimas dos respuestas negativas no dan mayor justificación que “no podría pasar otra recta”.

2) ¿Se pueden construir los siguientes triángulos? ¿Por qué?

- a. 80cm, 10cm, 100cm.
- b. 60cm, 150cm, 120cm.
- c. 60cm, 50cm, 120cm.

De los veintidós participantes que respondieron, diez resolvieron de forma correcta o parcialmente correcta la actividad y el resto de manera incorrecta. A continuación se muestra una respuesta correcta y otra parcialmente correcta con los argumentos esperados, es decir, la utilización de la DdT lo cual es un indicativo de la presencia subcategoría PS de SigE. Este tipo de respuestas se repitieron en otro par de participantes.

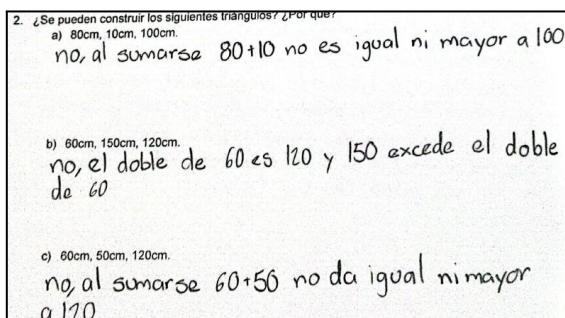


Imagen 30: Producción escrita del participante E1.

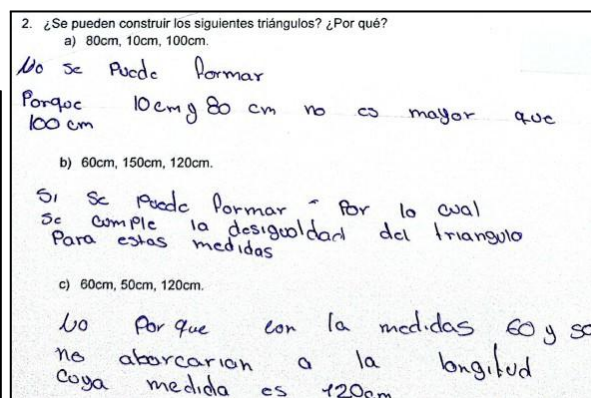


Imagen 31: Producción escrita del participante E14.

Las producciones muestran, primero, una respuesta parcialmente correcta y otra correcta totalmente. Se observa que el primer estudiante utiliza el criterio de la DdT correctamente en los incisos a) y c), sin embargo, en el inciso b) utiliza una conjetura que produjo previamente y que no se cumplía de manera general, sin embargo, este es un signo de la subcategoría M, a pesar de que no comprobó dicha conjetura. En cuanto a la *Imagen 31*, se ve la correcta aplicación del resultado, aunque en el inciso b) no observamos sus cálculos.

Del resto de las respuestas, tres fueron parcialmente correctas y tres completamente correctas, sin embargo, mostraron argumentos que no involucran el uso de la DdT sino que

fueron del tipo: “no, porque la base es muy grande” o “sí, porque tiene dos medidas largas”. Para las respuestas que fueron incorrectas, se observó que diez contestaron “sí” o “no” sin mayor justificación o bien, colocaron argumentos como “sí, porque las medidas son similares” o “no, porque no se tocarían”. Se destaca una producción en la que la DdT fue comprendida al revés (Imagen 32), probablemente por una confusión con los signos.

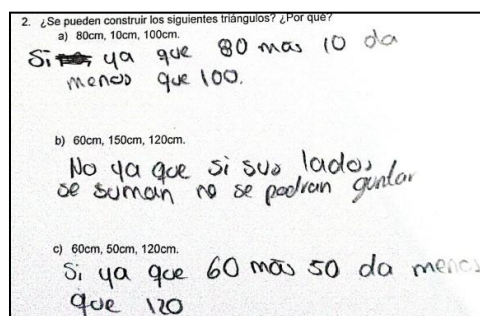


Imagen 32: Producción escrita del participante 12.

3) Demuestra que para calcular el área de un pentágono regular de lado l (todos sus lados miden lo mismo) se multiplica el perímetro del pentágono (p), por la medida de la apotema (a) y se divide entre 2.

Recuerda que el apotema es el segmento perpendicular a cada lado que parte del centro del pentágono.

Sugerencias:

- Recuerda que un pentágono regular se puede dividir en 5 triángulos de base l .
- Nota que la apotema (a) es la altura de los triángulos y todos miden lo mismo.

Es importante señalar que por limitaciones de tiempo, esta pregunta fue omitida de las instrucciones. Sin embargo, dos participantes hicieron intentos de resolverlo y se muestran a continuación, en la Tabla 28:

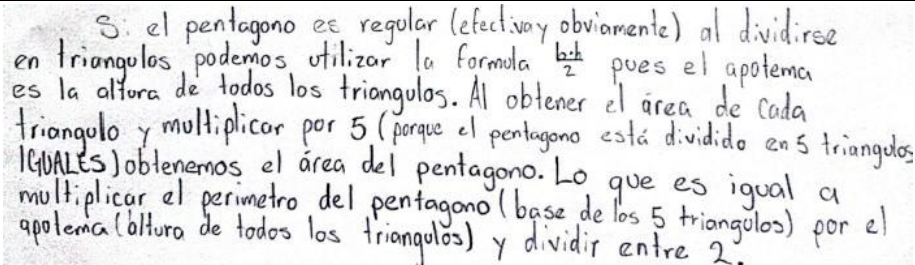
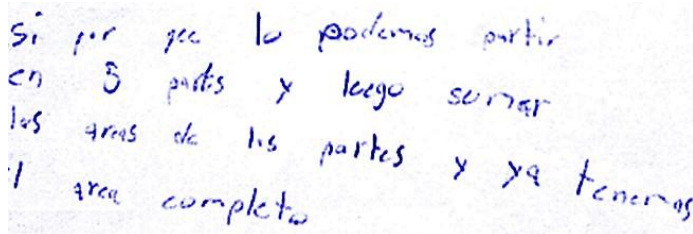
Tabla 28. Respuestas alusivas a las Categorías 1 y 4 en el Cuestionario 2 (pregunta 3)
Episodio 1


Imagen 33: Producción escrita del participante 1.

Subcategoría	Investigadora
Cx / PN / NPrü	El participante deja claro de manera implícita que el hecho de que el pentágono se regular es suficiente para afirmar que se puede dividir en cinco triángulos distintos, aplicando la fórmula ya comprobada del área del triángulo, evidenciando su capacidad de aplicar lo aprendido a un nuevo problema. Si bien un cambio de representación pudo ayudar a aclarar la argumentación, esta no es necesaria, pues lo expresa verbalmente con suficiente claridad. Finalmente, construye una argumentación que lo lleva a una DUSC: identifica los datos (D) en las sugerencias, establece las garantías (G) de que el pentágono es regular, por lo que los triángulos internos son iguales, con el respaldo (R) que es la argumentación deductiva e indica las conclusiones al final (C).
Episodio 2	
 <i>Imagen 34: Producción escrita del participante 16.</i>	
Subcategoría	Investigadora
Cx / PN	Comparando con el caso anterior, si bien el argumento es en esencia el mismo, carece de los detalles y la justificación del Episodio 1, por lo que si bien conecta adecuadamente y puede aplicar la fórmula del triángulo a un problema nuevo, no alcanza a producir una DUSC.

Fuente: Elaboración propia.

Recordando la cita de Larios (2015) en el Capítulo 2, el conocimiento matemático obtenido de los problemas adicionales podría servir como punto de inicio para nuevas exploraciones, descubrimientos y demostraciones en el salón de clase y este proceso puede continuar indefinidamente. Si bien en este caso por las limitaciones de tiempo no se pudo explorar este ámbito de la manera esperada, y a pesar de que la instrucción fue expresa de no responder esta pregunta, que dos estudiantes lo hayan hecho y de manera correcta es indicio de un desarrollo de habilidades demostrativas que puede conducirlos al aprendizaje con entendimiento de conceptos como área, polígono regular y triángulo.

4.2.7 Sesión 3: transcripción

Para finalizar, se presenta el análisis de la Sesión 3, comenzando por fragmentos representativos de la transcripción de la grabación de video. En la siguiente tabla se reflejan

los episodios correspondientes a las categorías presentadas y a sus subcategorías. Cabe mencionar que en esta última sesión el diálogo con la investigadora se redujo significativamente, debido a que el objetivo de esta sesión fue que los estudiantes finalmente produjeran una DUSC. Así, se identificaron cuatro episodios relevantes.

Tabla 29. Episodio alusivo a la Categoría 1 en la transcripción de la Sesión 3		
Subcategoría	Episodio	Investigadora
M	Episodio 1	El estudiante logra recordar el concepto de triángulo que ha revisado con anterioridad en el curso y que lo utiliza en el contexto de la sesión.
	I: (...) ¿Qué es un triángulo? ¿Alguien me puede decir qué es un triángulo, o qué entienden por triángulo? E8: Figura geométrica de tres lados.	

Fuente: Elaboración propia.

Se observa y se refuerza la importancia de que el estudiante recuerde no solo los conceptos vistos en las sesiones previas, sino que también lo haga con otros que ha visto en el curso y pueda hacer uso de los mismos en el contexto de la sesión, ya que es una característica importante del aprendizaje con entendimiento (Stylianides y Stylianides, 2007).

Tabla 30. Episodios alusivos a la Categoría 3 en la transcripción de la Sesión 3		
Subcategoría	Episodio	Investigadora
DR-C	Episodio 1	La investigadora introduce una analogía para explicar cómo utilizar la hipótesis. Más tarde, el Estudiante 1 debe hacer el cambio de representación de vuelta al algebraico para comunicar el resultado que desea probar, habiéndose ya beneficiado del cambio previo.
	I: (...) digamos que aquí recorro una cuadra, aquí otra cuadra... cuadra 1, cuadra 2, cuadra 3 [etiqueta los lados del triángulo como cuadras] si yo voy primero a C y luego a B, estoy recorriendo dos cuadras y si yo voy de A a B directamente sólo estoy recorriendo una cuadra. Entonces ¿cuál es el camino más corto de acuerdo con el Postulado de la Mínima Distancia? Todos: El de una cuadra. I: El de una cuadra, ¿y cómo se llama ese recorrido? Todos: c . I: Entonces c es más chiquito, que ¿qué? E1: Que la suma de $a + b$.	
ML	Episodio 1	En el recuento de los resultados producidos en la sesión anterior, el estudiante

	I: ¿cómo pueden, usando el Postulado de la Mínima Distancia, cómo pueden comprobar alguna de estas tres desigualdades? Quiero escuchar alguna idea. E1: Bueno, utilizando la misma analogía que nos decía, podemos tomar en cuenta que por ejemplo de la A al B es nada más una cuadra de distancia, por así decirlo y de A a B, pasando por C tendríamos que tomar dos cuadras.	realiza una modificación del lenguaje en la que adopta la analogía sugerida y persuade acerca del camino más corto de acuerdo al postulado.
--	--	---

Fuente: Elaboración propia.

Seguir las transformaciones de lenguaje "menos matemático" a "más matemático" nos ayuda a entender cómo los estudiantes se vuelven más habilidosos en la matemática escolar (Chapman, 1992) la modificación del lenguaje de mayor cotidianidad a mayor abstracción y viceversa ayuda a ganar entendimiento y a moverse ágilmente entre ambos.

Tabla 31. Episodio alusivo a la Categoría 4 en la transcripción de la Sesión 3		
Subcategoría	Episodio	Investigadora
NPro	Episodio 1	El estudiante realiza una conjetura basada en la exploración visual del problema, que debe ser confirmada o refutada mediante la exploración y demostración posterior.
	I: (...) “¿Cuál es la relación entre los triángulos ABF, ADF, BEF, bueno...” entre todos. ¿cuál es la relación entre el triángulo rojo, el azul, el verde y el amarillo? E9: Ah, pues todos son iguales ¿no?	

Fuente: Elaboración propia.

La generación de conjeturas por medios visuales, siempre que siga de una exploración cuidadosa y demostración o refutación posterior, podría ayudar a construir o reconstruir nuevos significados (Ramírez y Hernández, 2017), sin embargo, es importante que el estudiante haya alcanzado el objetivo de la Sesión 2, en la que se observó que, la mayoría de las veces, afirmar cosas basadas únicamente en la visualización lleva a errores.

4.2.8 Sesión 3: producciones escritas

En esta sección se analizan los episodios relevantes en las producciones escritas de la Sesión 3; tal como se presentó en el análisis del diseño de la Actividad 3, se abordó un único problema en el que se esperaba ver el desempeño de todas las habilidades desarrolladas por los participantes durante las sesiones anteriores. En primer lugar, se

analiza la tabla en la que los estudiantes exploraron el problema con ayuda de la herramienta digital; para determinar si lograron identificar las hipótesis y ligarlas con sus respectivas conjeturas. Posteriormente se analizan las demostraciones respectivas a cada conjetura para identificar si siguen la estructura de una DUSC.

Para esta sesión asistieron veinticinco participantes, de los que cinco no respondieron el ejercicio, no lo comprendieron, o no siguieron las instrucciones, por lo que únicamente veinte producciones fueron relevantes. Se identificaron cuatro conjeturas que surgieron en varias ocasiones y para varios participantes, hubo producciones en las que se mostraron una, dos y hasta tres de estas conjeturas de manera simultánea. La primera fue “*las áreas son iguales*” y la identificamos como *a*). La segunda involucra el concepto de “*semejanza*” y la identificamos como *b*). La tercera habla de “*ángulos iguales*” y la identificamos como *c*). La cuarta conjetura involucra el concepto de “*perímetro*” y la identificamos como *d*).

De las veinte producciones tomadas en cuenta, diez contenían una sola conjetura: seis mencionaron solo la conjetura *a*), una menciona la *b*), dos la *c*) y una la *d*). Del resto, cinco producciones contenían dos conjeturas: una contenía la *a*) y la *b*); tres la *a*) y la *c*) y una la *c*) y *d*). Finalmente, de las cinco producciones restantes que contenían tres conjeturas de manera simultánea, dos mencionaron la *a*), *b*) y *c*); una la *a*), *c*) y *d*) y dos la *b*), *c*) y *d*).

Acorde a los objetivos mencionados, es importante que además de la producción de conjeturas, los estudiantes fueran capaces de demostrarlas y que estas provinieran de hipótesis acordes. A continuación se realiza el análisis de las producciones, que dependerá de si los estudiantes alcanzaron o no los objetivos planteados y comenzando por quienes presentaron una conjetura y terminando con quienes presentaron 3.

De las seis producciones que sólo mencionaron la conjetura *a*), dos no justificaron su conjetura en absoluto (el más claro de ellos se presenta en el Apéndice E), cumpliéndose únicamente la subcategoría NPro, basada en la exploración; uno de ellos logró relacionar exitosamente la hipótesis con la proposición surgida a través de la exploración (Apéndice E), evidencia de la subcategoría Cx, pero no produjo una demostración. En tres

producciones, los estudiantes intentaron ofrecer argumentos para su proposición, pero no alcanzaron la estructura de una DUSC (se muestra la más clara de ellas en la *Tabla 32*), aunque hubo cambio de representación con tal objetivo (DR-C).

Tabla 32. Episodios alusivos a las Categorías 1, 3 y 4 en las producciones escritas de la Sesión 3

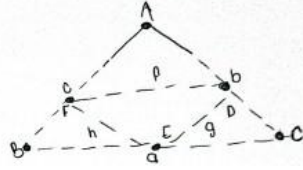
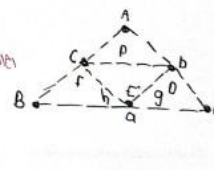
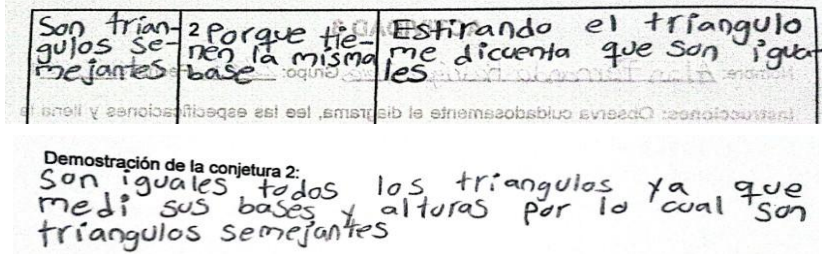
Episodio 1							
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Cosas que sé (hipótesis)</th> <th>Conjeturas (suposiciones mías)</th> <th>¿Cómo se me ocurrió la conjetura? (GeoGebra)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>los puntos a, c, b siempre están en medio en medio</td> <td>el área no cambia cuando quiero cambiar al triángulo de lugar</td> <td>Movi los puntos A y me di cuenta que no cambia su área</td> </tr> </tbody> </table>		Cosas que sé (hipótesis)	Conjeturas (suposiciones mías)	¿Cómo se me ocurrió la conjetura? (GeoGebra)	los puntos a, c, b siempre están en medio en medio	el área no cambia cuando quiero cambiar al triángulo de lugar	Movi los puntos A y me di cuenta que no cambia su área
Cosas que sé (hipótesis)	Conjeturas (suposiciones mías)	¿Cómo se me ocurrió la conjetura? (GeoGebra)					
los puntos a, c, b siempre están en medio en medio	el área no cambia cuando quiero cambiar al triángulo de lugar	Movi los puntos A y me di cuenta que no cambia su área					
Demostración de la conjetura 1 La área y las bases del triángulo son iguales 							
Demostración de la conjetura 2: En cada área los triángulos son iguales por 3 puntos iguales y longitudes iguales esto hace que cada lado mida igual que el otro 							
Imagen 35: Producción escrita del participante 4.							
Subcategoría	Investigadora						
Cx / DR-C / NPro	El estudiante realiza la conexión entre la hipótesis y la conjetura que surge de la exploración con la herramienta digital. En esta ocasión sí realiza un intento de argumentación, sin embargo, no cumple con la estructura de una DUSC, pues a pesar de que realiza cambios de representación y que conecta ideas de sesiones previas como base con área, sólo establece afirmaciones sin justificarlas.						

Imagen 35: Producción escrita del participante 4.

Fuente: Elaboración propia

En el episodio presentado, es relevante observar los beneficios que trae la herramienta digital, Bray (2017) menciona que el uso adecuado de estas herramientas promueve la exploración, la investigación y la colaboración; observamos de nuevo la presencia de conexiones entre ideas, en este caso, entre la hipótesis y la proposición y se beneficia de la herramienta en su exploración, sin embargo, no alcanza la etapa de la argumentación.

La única producción en la que se menciona la conjetura b) se analiza en la *Tabla 33*:

Tabla 33. <i>Episodio alusivo a la Categoría 4 en las producciones escritas de la Sesión 3</i>	
Episodio 1	
 <i>Imagen 36: Producción escrita del participante 11.</i>	
Subcategoría	Investigadora
Cx / NPro	Respecto a la conjetura b) se identifica la conexión con el término “semejanza” que pudieron haber revisado anteriormente en el curso. Sin embargo, aunque el estudiante recuerda este término y lo conecta con que “tienen la misma base” no explica con mayor detalle. En la sección de demostración, conecta el concepto de bases y alturas iguales con el de semejanza, no mencionando el área en ningún momento y no produciendo argumentos para justificar su proposición.

Fuente: *Elaboración propia.*

Es de interés notar que a pesar de que este participante menciona que los triángulos coinciden en base y altura, existe una ausencia completa del concepto de área en sus conjeturas; pareciera incluso que la sustituye por “semejanza”. Podría tratarse de una confusión entre significados, o bien, a que el estudiante no recuerda los conceptos revisados en las sesiones anteriores.

En ambas producciones en las cuales sólo se menciona la conjetura c), los participantes tuvieron problemas para relacionar correctamente las hipótesis con su conjetura y únicamente uno de ellos intentó argumentar para demostrarla (Apéndice E).

Finalmente, para la producción en que sólo se muestra la conjetura d), el estudiante no logra conectar las hipótesis con la conjetura y no produce una DUSC, por lo que sólo existe evidencia de la subcategoría NPro y omitimos la evidencia fotográfica de la conjetura.

De los estudiantes que propusieron dos conjeturas, aquél que propuso la a) y la b) exhibió un intento de argumentarlas que desemboca en una DUSC:

Tabla 34. Episodio alusivo a Categorías 1, 2, 3 y 4 en las producciones escritas de la Sesión 3

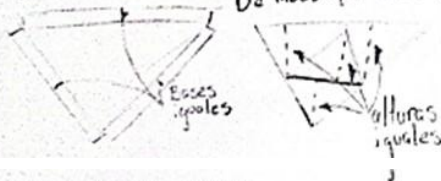
Episodio 1

Cosas que sé (hipótesis)	Conjeturas (suposiciones mías)	¿Cómo se me ocurrió la conjetura? (GeoGebra)
Los puntos D, E, F están a la mitad de los lados del triángulo ABC.	1 No importa cómo se muevan los puntos A, B y C. El área de todos los triángulos internos permanecen iguales.	Con la herramienta "área" se puede calcular el área de los triángulos internos, que son exactamente iguales entre sí

	2 No importa cómo se mueva el triángulo ABC. La estructura de los triángulos internos es exactamente la misma a la del triángulo ABC.	Al mover los puntos A, B o C, todos los triángulos cambian debido a que todos los puntos D, E y F están inamovibles en los puntos medios de sus lados. Herramienta: Mover puntos A, B, C
--	---	---

Demostración de la conjetura 1

Al tener la estructura de un triángulo, y dividirlo en 4 triángulos iguales vemos que las bases son iguales y las alturas también, pues los cuatro triángulos internos se modifican acorde a la estructura del exterior. Si obedecen la especificación 2, siempre las bases adyacentes serán la mitad de el segmento en el que se encuentran de modo que las alturas serán iguales también



Demostración de la conjetura 2:

Al tener la estructura de un triángulo y dividirlo en 4 triángulos iguales estos deben seguir la estructura del triángulo exterior para encajar debidamente

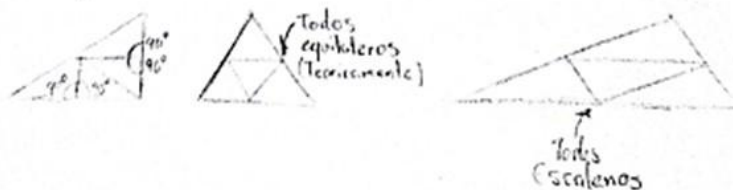


Imagen 37: Producción escrita del participante 1.

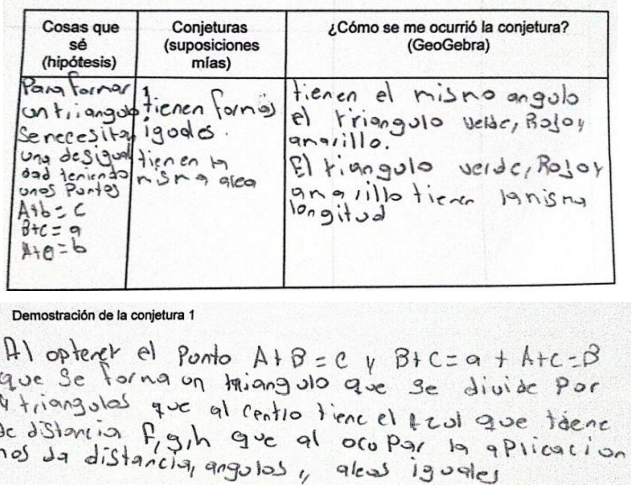
Subcategoría	Investigadora
Cx / DR-E / DR-C / NPro / NPru	El Estudiante 1 conecta satisfactoriamente la hipótesis con las dos conjeturas que produce y a las que llega tras la exploración. En la sección de demostración, logra producir una DUSC: señala los datos (D) en las hipótesis de la tabla, establece las garantías (G) revisando que las bases y las alturas coinciden entre sí, con el respaldo (R) que es la argumentación deductiva e indica las conclusiones al final, concluyendo que las áreas son iguales (C). Además, para ser más claro en sus argumentos, coloca diagramas representativos. En cuanto a la segunda prueba, no argumenta con suficiente profundidad, solo sugiere argumentos heurísticos de semejanza en triángulos y también muestra diagramas que representan distintos ejemplos para autoconvencerse de que su afirmación se cumple siempre.

Fuente: Elaboración propia.

En la primera demostración que produce el participante, muestra un diagrama con objetivo comunicativo, pues él ya ha comprendido y aceptado el resultado que quiere probar, en este caso sólo quiere persuadir al público. Por el contrario, en la segunda parte, como no está seguro de la veracidad de lo que afirma, realiza diagramas que representan ejemplos de distintos triángulos donde se cumple, para convencerse a sí mismo de ello. Vinner (2011) recomienda que, después de formar una conjetura y antes de apresurarse a afirmar su veracidad o falsedad, es útil detenerse a examinarla analíticamente; tal proceso puede considerarse una herramienta del pensamiento. Una forma de operacionalizar una prueba matemática es agregar el elemento social en el que se le pide al estudiante convencer a un público o a sí mismo de una verdad (Hoyles, 1997), de este modo, la producida por el Estudiante 1 cumple estos requisitos y si bien la segunda no cumple con la estructura de una DUSC, posee características de autoconvencimiento.

Respecto a quienes sugirieron la conjetura *a)* y *c)*, dos de ellos intentaron producir una demostración, que se muestran en el Apéndice E y, en cuanto al tercer participante, expone una confusión acerca de la Desigualdad del Triángulo y trata de relacionarla con el ejercicio de manera errónea, indicio de la presencia de empirismo episódico:

Tabla 35. Episodios alusivos a las Categorías 1 y 4 en las producciones escritas de la Sesión 3

Episodio 1	
 <i>Imagen 38: Producción escrita del participante 2.</i>	
Subcategoría	Investigadora
M / NPro	El participante sugiere igualdades de ángulos para tres triángulos, excepto el azul, al igual que en “longitud”, sin embargo, coloca en hipótesis la Desigualdad del Triángulo con una fuerte confusión en cuanto a signos, colocando igualdades en lugar de desigualdades. En el área de demostración utiliza esa misma representación errónea, no logrando producir una prueba coherente.

Fuente: Elaboración propia.

Es interesante observar cómo el participante evidencia la ausencia de entendimiento de la DdT gracias a la desconexión entre el significado de los signos mayor y menor que, con su representación. Barberà (1996) señala la importancia de relacionar al significado con el significante en el lenguaje matemático, objetivo prioritario en el desarrollo lingüístico en matemáticas, pues estas relaciones ayudan a entender el significado de las estructuras, referidas como patrones en este trabajo de investigación.

Finalmente, en cuanto a quienes expusieron las conjeturas *c)* y *d)*, uno de ellos presenta una fuerte confusión con la Desigualdad del Triángulo y el otro sólo genera conjeturas basadas en la exploración de la herramienta digital (Apéndice E).

Para los participantes quienes propusieron tres conjeturas, uno de ellos que sugiere la *a)*, *b)* y *c)* utiliza un ejemplo particular para autoconvencerse (Tabla 36), la producción del otro participante que intenta producir una demostración se presenta en el Apéndice E.

Tabla 36. Episodio alusivo a Categorías 1, 2, 3 y 4 en las producciones escritas de la Sesión 3

Episodio 1													
Responde: ¿Cuál es la relación entre los triángulos ADF, BEF, CDE y ABC? Triángulos semejantes Explora utilizando GeoGebra y escribe tus conjeturas en la siguiente tabla.													
<table><tr><th>Cosas que sé (hipótesis)</th><th>Conjeturas (suposiciones mías)</th><th>¿Cómo se me ocurrió la conjetura? (GeoGebra)</th></tr><tr><td>Estirando los puntos A, B y C hasta tener un triángulo Equilátero</td><td>Se pueden obtener áreas de la misma medida ABC</td><td>Se estiran los puntos obteniendo el triángulo Equilátero logrando tener 4 triángulos equiláteros dentro de el mismo</td></tr></table>		Cosas que sé (hipótesis)	Conjeturas (suposiciones mías)	¿Cómo se me ocurrió la conjetura? (GeoGebra)	Estirando los puntos A, B y C hasta tener un triángulo Equilátero	Se pueden obtener áreas de la misma medida ABC	Se estiran los puntos obteniendo el triángulo Equilátero logrando tener 4 triángulos equiláteros dentro de el mismo						
Cosas que sé (hipótesis)	Conjeturas (suposiciones mías)	¿Cómo se me ocurrió la conjetura? (GeoGebra)											
Estirando los puntos A, B y C hasta tener un triángulo Equilátero	Se pueden obtener áreas de la misma medida ABC	Se estiran los puntos obteniendo el triángulo Equilátero logrando tener 4 triángulos equiláteros dentro de el mismo											
<table><tr><td>Puntos los 4 triángulos pequeños tienen la misma área</td><td>2 Ya que el triángulo EDE está en puntos medios del ABC siempre tiene que las triángulos sean semejantes al grande y la misma área</td><td>4 Al mover cada vértice de los puntos nos podemos dar cuenta que siempre los triángulos pequeños logran tener la misma forma y misma área</td></tr><tr><td>los medidos de los triángulos pequeños son iguales</td><td>3 Ya que todos los triángulos tienen la misma medida porque son semejantes a uno mayor y son la mitad de sus lados</td><td>5 Como los triángulos siempre se dividen al grande en 4 más pequeños siempre el área se divide en 4 haciendo que todos los triángulos pequeños tengan la misma área</td></tr><tr><td colspan="2"></td><td>todos los triángulos tienen la misma área</td></tr><tr><td colspan="2"></td><td>Calculando las áreas en geogebra</td></tr></table>		Puntos los 4 triángulos pequeños tienen la misma área	2 Ya que el triángulo EDE está en puntos medios del ABC siempre tiene que las triángulos sean semejantes al grande y la misma área	4 Al mover cada vértice de los puntos nos podemos dar cuenta que siempre los triángulos pequeños logran tener la misma forma y misma área	los medidos de los triángulos pequeños son iguales	3 Ya que todos los triángulos tienen la misma medida porque son semejantes a uno mayor y son la mitad de sus lados	5 Como los triángulos siempre se dividen al grande en 4 más pequeños siempre el área se divide en 4 haciendo que todos los triángulos pequeños tengan la misma área			todos los triángulos tienen la misma área			Calculando las áreas en geogebra
Puntos los 4 triángulos pequeños tienen la misma área	2 Ya que el triángulo EDE está en puntos medios del ABC siempre tiene que las triángulos sean semejantes al grande y la misma área	4 Al mover cada vértice de los puntos nos podemos dar cuenta que siempre los triángulos pequeños logran tener la misma forma y misma área											
los medidos de los triángulos pequeños son iguales	3 Ya que todos los triángulos tienen la misma medida porque son semejantes a uno mayor y son la mitad de sus lados	5 Como los triángulos siempre se dividen al grande en 4 más pequeños siempre el área se divide en 4 haciendo que todos los triángulos pequeños tengan la misma área											
		todos los triángulos tienen la misma área											
		Calculando las áreas en geogebra											
Demostración de la conjetura 1 al colocar los puntos A, B y C se puede obtener un triángulo Equilátero logrando obtener con 4 triángulos Equiláteros pequeños con la misma área													
Demostración de la conjetura 2: los 4 triángulos pequeños tienen la misma área esto quiere decir que ya que el triángulo F-BE está en puntos medios del ΔABC logrando que sean semejantes y tengan la misma medida													
Demostración de la conjetura 4: Como son los triángulos son iguales gracias a que las medidas semejantes a el mayor													
Demostración de la conjetura 5: Como todas las triángulos se dividen por el grande logrando que las 4 triángulos pequeños tengan la misma medida													
Imagen 39: Producción escrita del participante 10.													
Subcategoría	Investigadora												
Cx / A / NPro	Se observa que la participante colocó los vértices del triángulo de manera específica para obtener un triángulo equilátero, y sólo entonces pudo notar y conectar el diagrama con la semejanza de triángulos y autoconvencerse de su conjetura mediante este ejemplo particular, sin embargo, no extiende este razonamiento al resto de triángulos, no produce una argumentación más allá.												

Fuente: Elaboración propia.

El uso relevante de ejemplos en este episodio nos recuerda lo que menciona Vinner (2011), respecto a la importancia de los ejemplos particulares en relación con la demostración

matemática mencionando que los estudiantes están supuestos a entender el concepto de demostración a través de los varios ejemplos a los que se ven expuestos tras un periodo largo de estudiar matemáticas. Se espera que dicha experiencia sea satisfactoria para que produzcan un concepto sólido de lo que es una prueba.

El participante que propone las conjeturas *a)*, *c)* y *d)* las resume al decir que “*los triángulos son de la misma medida*”, sin embargo, los argumentos que expone para justificarlos no son claros y por ello se omite dicha producción, en la que sólo se evidencia la subcategoría NPro de la categoría 4, además de que no establece las hipótesis que tomó en cuenta.

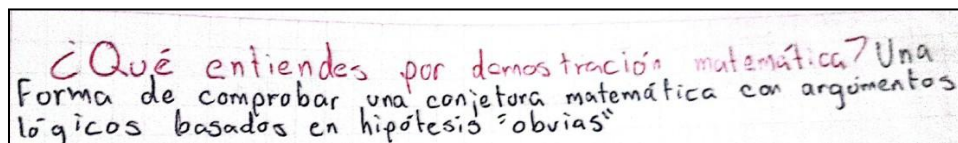
Finalmente, quienes sugirieron las conjeturas *b)*, *c)* y *d)* no intentaron justificar en absoluto sus conjeturas; uno de ellos no establece las hipótesis y el otro sí. Para evitar la repetición, se omiten esas producciones, pues ya se ha dicho y argumentado teóricamente que en estos casos involucran las categorías 1 y 4, con subcategorías Cx y NPro, respectivamente.

4.2.9 Sesión 3: cuestionario 3

En esta sección se presentarán las respuestas al Cuestionario 3, cuyo objetivo fue recabar información sobre la comprensión del concepto de demostración matemática y su importancia, además de obtener retroalimentación sobre la aplicación de las actividades. Se enlistan las preguntas y se determina si se alcanzó el objetivo de cada una (ver *Tabla 4*).

1) ¿Qué entiendes por demostración matemática?

Los veinticinco participantes de la Sesión 3 respondieron a la pregunta, diez respuestas fueron correctas y se considera cumplido el objetivo; siete respuestas tuvieron algunos elementos ambiguos, pero en general, siguieron la idea de lo que es una demostración por lo que el objetivo se cumplió parcialmente. Por último, ocho respuestas fueron incorrectas. A continuación se muestra una respuesta acertada, a modo de ejemplo.



¿Qué entiendes por demostración matemática? Una forma de comprobar una conjetura matemática con argumentos lógicos basados en hipótesis "obvias"

Imagen 40: Producción escrita del participante 1.

La producción anterior da cuenta de una respuesta en la que el participante comprende el concepto de demostración matemática, evidenciando conexiones (Cx) entre los nuevos conceptos presentados, como “conjetura” y “argumento” y, finalmente, entendimiento.

2) ¿Para qué sirve una demostración matemática?

Los veinticinco participantes de la Sesión 3 respondieron a la pregunta. En este caso, es relevante comparar las respuestas con las de la pregunta 2, ya que comprender el uso de una demostración se ve claramente ligado a la comprensión del concepto.

Así, de los diez participantes que respondieron correctamente la pregunta 1, sólo uno respondió incorrectamente la segunda pregunta; esto indica congruencia en la mayoría de las respuestas y se considera cumplido el objetivo. De las siete respuestas ambiguas para la pregunta 1, sólo uno de ellos respondió correctamente la pregunta 2, tres lo hicieron ambiguamente y tres de manera incorrecta; de igual forma se percibe cierta coherencia, ya que al no tener claro el concepto, es esperable que no se comprenda el uso. Por último, de las ocho respuestas incorrectas para la pregunta 1, cuatro respondieron de la misma forma la pregunta 2, tres fueron ambiguos y uno respondió correctamente. De igual forma, la ambigüedad es esperable cuando no se considera entendido un concepto, y la pregunta correcta pudo ser una coincidencia.

Se muestra un ejemplo de una respuesta correcta.

A photograph of a handwritten note on a piece of paper. The text is written in black ink and reads: "¿Para qué sirve una demostración matemática? Para comprobar si una conjetura matemática es verdad, o bien si no lo es." The text is written in a cursive, slightly slanted style.

Imagen 41: Producción escrita del participante 1.

El participante demuestra signos de memoria, que es un elemento del entendimiento. Cabe aclarar que también respondió correctamente la pregunta 1.

3) ¿Qué más te hubiera gustado hacer en la actividad? ¿Cambiarías algo?

De los veinticinco participantes, uno no respondió la pregunta y otro lo hizo de manera incomprensible, por lo que se consideran sólo veintitrés respuestas. De estas, once reportaron no querer cambios y no sugirieron hacer algo más en las actividades. Del resto, cuatro sugirieron ver más figuras geométricas, como círculos u otro tipo de triángulos; dos

sugirieron juegos didácticos y grupales; dos sugirieron actividades visuales y sin escribir tanto o bien, uso de materiales físicos. Las últimas cuatro sugerencias fueron: conocer más de la app; resolver más ejercicios con números, es decir, concretos; conocer más sobre cómo conjeturar y ejercicios para ejercitar el vocabulario matemático.

4.3 Resumen de los resultados

En atención a quien lee el presente trabajo, se presenta una breve sección que resume el amplio análisis de los resultados obtenidos.

4.3.1 Resumen de los resultados de la Sesión 1

En cuanto a los resultados de las transcripciones de audio, se observó principalmente la presencia de las categorías y subcategorías presentadas en la *Tabla 37*:

Tabla 37. Resumen de resultados relativos a las transcripciones de la Sesión 1		
Categoría	Subcategoría	Resultados
SigEn	Cx	Reportamos dos episodios con evidencia de conexiones entre la fórmula previamente aceptada y conocida por los participantes –fórmula del área del rectángulo –y la del área del triángulo.
SigC	DR-C	Reportamos tres episodios de la primera subcategoría, con representaciones kinestésicas del participante al explicar en voz alta, representaciones algebraicas y con diagramas que se presentaron en el pizarrón frente al grupo.
	ML	Reportamos dos episodios en los que se presenta la modificación del lenguaje al hipotetizar una conversación en la que uno de los estudiantes pretende explicar a alguien más su idea y otro en que se utilizan términos diferentes con el mismo objetivo.
	Cf	Reportamos un episodio en el que el participante se enfrenta con el conflicto de no obtener los resultados esperados al aplicar el mismo razonamiento que funcionó anteriormente a un problema nuevo.
SigD	NPro	Reportamos un episodio con el estudiante 1, quien presenta proposiciones relativas a lo que se cumple para distintos casos particulares de triángulos.

Fuente: Elaboración propia.

En esta sección de resultados se nota la constante participación de los Estudiantes 1 y 2.

En cuanto a los resultados de las producciones escritas, primero se resumen los obtenidos previa presentación de la Actividad 1 y posteriormente los relativos a la misma (*Tabla 38*).

Recordamos que las producciones solicitadas previas a la Actividad 1 tuvieron el objetivo de explorar en entendimiento de los estudiantes respecto a la fórmula del área del triángulo, la mayoría de los argumentos se alinearon con las ideas relativas a la afirmación de que “*un triángulo es la mitad de un rectángulo*”. En segundo lugar, se abordaron las relativas al argumento que afirma que “*la altura del triángulo lo divide a la mitad*” y sugiriendo una rotación de una de las mitades para formar el rectángulo; para este argumento los estudiantes no notan que la afirmación realizada es falsa en general. Finalmente, sólo un participante justifica la relación entre estas dos fórmulas diciendo que “*el triángulo ocupa menos espacio, por eso se divide entre dos*”.

Aunque el nivel de formalidad de los tres argumentos fue variado, estas producciones cumplieron el objetivo de intentar convencer a la lectora de la relación entre ambas fórmulas y se identificó evidencia de las subcategorías A y DR-E de la categoría SigEx, ambas encaminadas a eliminar dudas propias ante las proposiciones sugeridas.

En cuanto a los resultados de las producciones tras aplicar la Actividad 1, se observa en la *Tabla 38* que hubo un episodio con evidencia relativa a subcategorías de la categoría SigEx; uno que presenta una intersección entre las categorías 2, 3 y 4 y otro con intersección entre las categorías 2 y 4.

Tabla 38. Resumen de resultados relativos a las producciones escritas de la Sesión 1		
Categorías	Subcategorías	Resultados
SigEx / SigC / SigD	R, DR-C y NPru	Reportamos un episodio con evidencia de reflexión, un cambio de representación con objetivo comunicativo –enfocado en diagramas –y particularmente, la aparición temprana de una nueva prueba acorde a los estándares del modelo de Toulmin, por parte del Estudiante 2.
SigEx / SigD	R y NPro	Reportamos un episodio con evidencia de reflexión y una nueva proposición basada en la exploración de casos particulares con medidas específicas, por parte del Estudiante 1.
SigEx	R y A	Reportamos un episodio que no llega a la persuasión pero presenta el proceso de reflexión que lleva al convencimiento del Estudiante 3.

Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, se resumen los resultados referentes al Cuestionario 1 en la *Tabla 39*.

En este caso, por la asistencia hubieron veintiún respuestas a analizar.

Tabla 39. Resumen de resultados relativos al Cuestionario 1 de la Sesión 1

Pregunta	Respuestas	Resultados
1	Cuatro respuestas cumplieron con el objetivo de la pregunta.	Poseen evidencia de las subcategorías DR-C y ML en cuanto a SigC, la primera enfocada a diagramas y representaciones algebraicas y la segunda utiliza palabras para persuadir. En estos casos se produce una NPrü de acuerdo con el modelo de Toulmin.
	Doce respuestas presentan confusión.	Se confunde un caso particular con una prueba general.
	Dos no pudieron clasificarse.	Argumentos incompletos.
	Tres no cumplen con el objetivo.	Evidencia de falta de entendimiento de la actividad.
2	Una respuesta (Estudiante 1) presenta evidencia de entendimiento.	El estudiante es capaz de trasladar el problema a uno similar (PS), da argumentos para cada uno de los casos particulares, modificando el caso inicial que tenía. Esto es evidencia de aprendizaje con entendimiento.
	Dieciséis respuestas presentan confusión.	Los participantes confunden un caso particular con el general.
	Cuatro respuestas no cumplen con el objetivo.	Responden negativamente, evidencia de falta de entendimiento de la condición de generalidad de la prueba.
3	Diecisiete respuestas describen la utilidad de la herramienta digital.	Admiten que algunos de sus argumentos no se les hubieran ocurrido de no ser por la utilización de la herramienta digital proporcionada.
4	Cuatro respuestas cumplieron con el objetivo de la pregunta.	Al comparar las respuestas que dieron con su proceso de resolución, se confirma que hubo un proceso de reflexión (R) y de vuelta sobre sus pasos.
	Ocho respuestas no cumplieron la totalidad del objetivo.	Respondieron con ideas que no se pudieron comparar con su proceso resolutivo.
	Una respuesta describe beneficios no considerados antes por la investigadora.	Argumenta que la herramienta digital solo le ofreció una confirmación de lo que ya había descubierto con lápiz y papel.
	Ocho respuestas no cumplen con el objetivo.	No responden adecuadamente, o simplemente no lo hacen.
5	Once respuestas cumplen con el objetivo de la pregunta.	Justificaron su respuesta, señal de entendimiento de la generalidad de la demostración.
	Cuatro respuestas cumplen parcialmente con el objetivo.	No presentaron ninguna justificación para su respuesta afirmativa.

	Cinco respuestas no cumplen con el objetivo.	Responden negativamente, señal de falta de entendimiento de la generalidad de la demostración, o bien, no responden o responden “no sé”.
6	Nueve respuestas cumplen con el objetivo de la pregunta.	La respuesta es afirmativa y se dividen en tres principales argumentos: 1. Sustituir el rectángulo por un cuadrado; aunque la variación del problema es menor, existe evidencia de SigD (PS). 2. “Con un círculo”; ninguno amplía su idea más allá, lo que puede ser evidencia de empirismo episódico. 3. “A otras figuras” o “A otros polígonos”; ninguno amplía su idea más allá, lo que puede ser evidencia de empirismo episódico.
	Diez cumplen parcialmente con el objetivo de la pregunta.	A pesar de que responden afirmativamente, no dan mayor justificación.
	Dos no cumplen con el objetivo.	Responden negativamente o no lo hacen.
7	Un participante cumple con el objetivo de la pregunta.	Aunque la respuesta es negativa –incorrecta –el participante muestra evidencia de Cx ya que presenta una división del pentágono.
8	Catorce respuestas cumplen parcialmente con el objetivo.	Responden afirmativamente, pero no elaboran más en su respuesta.
	Siete respuestas no cumplen con el objetivo.	Responden negativamente, “no sé” o simplemente no responden.

Fuente: Elaboración propia.

A continuación se procede a resumir los resultados de la Sesión 2.

4.3.2 Resumen de los resultados de la Sesión 2

En cuanto a los resultados de las transcripciones de audio, se observó principalmente la presencia de las categorías y subcategorías presentadas en la *Tabla 40*:

Tabla 40. Resumen de resultados relativos a las transcripciones de la Sesión 2		
Categoría	Subcategoría	Resultados
SigEn	Cx y M	Reportamos un episodio con evidencia de conexión entre los elementos revisados del triángulo –base y altura –y su fórmula para calcular área; además, con espacio de cuatro días, se observa una retención en la memoria de dicha fórmula.
SigEx	A	Reportamos un episodio con evidencia de autoconvencimiento mediante el empleo de prueba y error y el uso de la técnica de contraejemplos.

SigC	DR-C	Reportamos un episodio en el que hubo un cambio de representación al algebraico motivado por la investigadora.
	ML	Reportamos dos episodios, el primero con una modificación de lenguaje orientado al uso de ademanes y el segundo mediante la concretización de su explicación empleando medidas específicas.
	Cf	Reportamos un episodio en el que surge un desacuerdo entre dos compañeros que los motiva a revisar sus respectivas respuestas par dar lugar a un reacomodo de información.
SigD	NPro	Reportamos cuatro episodios en los que surgen proposiciones gracias a la exploración de la herramienta física y la exploración visual y, con el apoyo de la investigadora, dos que intentan sugerir las condiciones que deben cumplir tres medidas para construir un triángulo.

Fuente: Elaboración propia.

En esta sección de resultados se nota cierta dependencia del Estudiante 1 a la utilización de la herramienta física y a la implementación de ejemplos particulares.

Los resultados de las producciones escritas referentes a la Actividad 2, como se observa en la *Tabla 41*, contienen variadas intersecciones entre las distintas categorías de análisis.

Tabla 41. Resumen de resultados relativos a las producciones escritas de la Sesión 2		
Categorías	Subcategorías	Resultados
<i>Ejercicio 1</i>		
SigEn / SigEx / SigC	Cf, Cx, M y A	Reportamos un episodio con evidencia de conflicto, producto de la percepción visual del participante. Existe conexión entre los elementos base y altura del triángulo con la fórmula para hallar su área, que persiste en su memoria tras la primera sesión. Finalmente, existe autoconvencimiento que no llega a ser una DUSC.
SigEn / SigD	Cx y NPro	Reportamos un episodio con evidencia de conexión entre los elementos base y altura del triángulo con la fórmula para hallar su área, además, diferencia las hipótesis de los argumentos. En este caso, se produce una nueva prueba para mostrar que los tres triángulos poseen la misma área de acuerdo con el modelo de Toulmin.
<i>Ejercicio 2</i>		
SigEx / SigC / SigD	A, DR-E, NPro y ML	Reportamos un episodio en el que existe autoconvencimiento gracias a las representaciones en forma de diagramas e intentos varios del participante de construir los triángulos, existe una modificación del lenguaje en la que emplea términos matemáticos para generar una nueva proposición y existe una reverbalización; si bien la proposición no es del todo acertada –afirma que la base debe ser mayor dos veces

		la longitud de los otros lados –es señal del proceso de descubrimiento.
SigEx / SigC	A DR-E y ML	Reportamos un episodio en el que existe autoconvencimiento gracias a las representaciones en forma de diagramas y símbolos, aunque no alcanza a proponer algo nuevo, existe una exteriorización de los propios al modificar su lenguaje para describir los ejemplos que pudo construir en un intento de encontrar similitudes.
SigEx / SigD	A DR-E y NPro	Reportamos un episodio en el que existe autoconvencimiento gracias a las representaciones en forma de diagramas y simbólicas y con ayuda del empleo de medidas específicas; en este caso existe una nueva proposición –incorrecta –gracias al uso de la herramienta física que pudo representar un obstáculo o bien, la mala conceptualización del triángulo que posee el participante y lo lleva a creer que forzosamente debe tener un ángulo recto.
<i>Ejercicio 3</i>		
SigEx	DR-E	Reportamos un episodio en el que existe un cambio de representación al simbólico del Teorema de la Desigualdad del Triángulo.
SigEx	DR-E y A	Reportamos un episodio en el que existe un cambio de representación al simbólico del Teorema de la Desigualdad del Triángulo y el autoconvencimiento de su veracidad mediante la utilización de ejemplos particulares con medidas concretas.
SigEx / SigC	DR-E y ML	Reportamos un episodio en el que existe un cambio de representación al simbólico de la DdT y, además, la modificación del lenguaje motivada por la investigadora en la que el participante imagina una situación en la que tiene que elegir el camino más corto para trasladarse de su casa a la escuela. En este caso se reporta una buena organización, evidencia de constructivismo acumulativo.
SigEx / SigC / SigD	DR-E, A, ML, NPro y NPr	Reportamos un episodio en el que existe un cambio de representación al simbólico y en diagramas de la DdT, pues se autoconvence mediante ejemplos con medidas concretas. Existe una verbalización con el objetivo de persuadir y propone una conducción extra para la DdT tras el análisis con las medidas concretas. Además, produce una nueva prueba de acuerdo al modelo de Toulmin.
SigEx / SigD	DR-E, A y NPr	Reportamos un episodio en el que existe un cambio de representación al simbólico y en diagramas de la DdT, pues se autoconvence mediante ejemplos con medidas concretas. Además, produce una nueva prueba de acuerdo al modelo de Toulmin.

Fuente: Elaboración propia.

En este caso, es esperable que haya habido pocas producciones con pruebas de acuerdo al modelo citado, ya que este proceso es complicado para estudiantes de nivel medio superior

que nunca han sido expuestos al mismo y que, además, están acostumbrados al modelo tradicional de enseñanza de las matemáticas.

Finalmente, se resumen los resultados referentes al Cuestionario 2 en la *Tabla 42*.

En este caso, por la asistencia y la disposición hubieron veintidós respuestas a analizar.

Tabla 42. Resumen de resultados relativos al Cuestionario 2 de la Sesión 2		
Pregunta	Respuestas	Resultados
1	Tres respuestas cumplieron con el objetivo de la pregunta.	Poseen evidencia de la subcategoría Cx , pues respondieron aludiendo al Postulado de la Mínima Distancia, resultado previamente revisado.
	Cuatro respuestas cumplieron parcialmente con el objetivo.	Si bien la respuesta es correcta, posee justificaciones ambiguas que no tienen que ver con lo revisado.
	Quince no cumplen con el objetivo.	Trece responden equivocadamente y con argumentos sin sentido o idénticos, dos de ellos no respondieron.
2	Diez respuestas cumplen con el objetivo total o parcialmente.	Tres respuestas incluyen el uso de la DdT, lo cual es evidencia de PS , pues pueden utilizar resultados anteriores en problemas similares. Una respuesta utiliza una conjetura que previamente sugirió, evidenciando M . El resto poseen justificaciones ambiguas que no tienen que ver con la DdT.
	Doce respuestas no cumplen con el objetivo.	Los participantes responden sin justificación alguna.
3	Una respuesta cumple con el objetivo de la pregunta.	La capacidad de responder a un problema nuevo (PN) de forma satisfactoria denota la presencia de conexiones (Cx) ya que el Estudiante 1 utilizó la fórmula del área del triángulo al dividir el pentágono regular correctamente en esta ocasión –recordemos que en la Sesión 1 realizó una división inconveniente. Además, produce una nueva prueba (NPru) para la fórmula del área del pentágono regular.
	Una respuesta cumple parcialmente con el objetivo de la pregunta.	Aporta una sugerencia correcta sin ahondar en el problema nuevo (PN) lo que denota la presencia de conexiones (Cx) ya que el Estudiante 16 utilizó la fórmula del área del triángulo; no llega a producir una DUSC.

Fuente: Elaboración propia.

Recordemos que para la pregunta 3, por cuestiones de tiempo, fue solicitado no responder. A pesar de esto, la presencia de dos respuestas correctas da evidencia de entendimiento y del fortalecimiento de la actividad demostrativa.

4.3.3 Resumen de los resultados de la Sesión 3

En cuanto a los resultados de las transcripciones de audio, se observó principalmente la presencia de las categorías y subcategorías presentadas en la *Tabla 43*:

Tabla 43. Resumen de resultados relativos a las transcripciones de la Sesión 3		
Categoría	Subcategoría	Resultados
SigEn	M	Reportamos un episodio en el que el participante recuerda el concepto de triángulo que ha estudiado en el curso.
SigC	DR-C	Reportamos un episodio en el que existe un cambio de representación al simbólico y con ayuda de la analogía introducida por la investigadora.
	ML	Reportamos un episodio en el que se transiciona a un lenguaje “más matemático” con ayuda de la analogía introducida por la investigadora.
SigD	NPro	Reportamos un episodio en el que se produce una proposición basada en la exploración visual que requiere una demostración posterior.

Fuente: Elaboración propia.

En esta sesión las interacciones con la investigadora se redujeron debido al objetivo.

Los resultados de las producciones escritas referentes a la Actividad 3, como se observa en la *Tabla 44*, contienen principalmente cuatro conjeturas: la a) que menciona "áreas iguales", la b) que involucra el término " semejanza", la c) que menciona "ángulos iguales" y la d) que involucra el término "perímetro".

Tabla 44. Resumen de resultados relativos a las producciones escritas de la Sesión 3		
Categorías	Subcategorías	Resultados
<i>Sugieren la conjetura a)</i>		
SigD	NPro	Reportamos dos episodios con evidencia de nuevas proposiciones, sin embargo, no las justifican.
SigEn / SigD	Cx y NPro	Reportamos un episodio con evidencia de conexión entre las hipótesis y las conjeturas realizadas.
SigEn / SigC / SigD	Cx, DR-C y NPro	Reportamos tres episodios con evidencia de conexión entre las hipótesis y las conjeturas realizadas y un intento de justificación con ayuda de distintas representaciones, sin embargo, no se llega a la construcción de una DUSC.
<i>Sugieren la conjetura b)</i>		
SigEn / SigD	Cx y NPro	Reportamos un episodio con evidencia de conexión con un concepto previamente visto en el curso, el de semejanza. Aunque no ahonda en

		sus conjeturas ni las justifica, conecta los elementos base y altura con el concepto mencionado, aunque no con el de área.
<i>Sugieren la conjetura c)</i>		
Reportamos dos episodios sin evidencia de categorías, el primero no relaciona sus hipótesis con las conjeturas y el segundo hace un intento de justificación sin ir más allá (Apéndice E).		
<i>Sugieren la conjetura d)</i>		
SigD	NPro	Reportamos un episodio en el que se sugiere una conjetura, sin embargo, no se conecta a las hipótesis y no produce una DUSC.
<i>Sugieren la conjetura a) y b)</i>		
SigEn / SigEx / SigC / SigD	Cx, DR-E, DR-C, NPro y NPr	Reportamos un episodio en el que existe conexión entre las hipótesis y las conjeturas realizadas. Una de ellas –de la cual el participante está seguro –emplea cambios de representación en forma de diagramas para persuadir. Además, produce una DUSC de acuerdo al modelo de Toulmin. La segunda –de la que no está seguro –emplea cambios de representación y el uso de ejemplos con medidas particulares para convencerse a sí mismo.
<i>Sugieren la conjetura a) y c)</i>		
Reportamos dos episodios en que el participante intenta realizar justificaciones (Apéndice E).		
SigEn / SigD	M y NPro	Reportamos un episodio en el que existe una fuerte confusión respecto a los signos involucrados con la DdT. Se presenta una conjetura respecto a la medida de los ángulos, que si bien no se trató en las sesiones, evidencia memoria de un concepto visto previamente.
<i>Sugieren la conjetura c) y d)</i>		
Reportamos dos episodios, uno en que el participante posee una fuerte confusión con los signos involucrados en la DdT y otro en que se presentan conjeturas sin justificación (Apéndice E).		
<i>Sugieren la conjetura a), b) y c)</i>		
Reportamos un episodio en que el participante intenta realizar justificaciones (Apéndice E).		
SigEn / SigEx / SigD	Cx, A y NPro	Reportamos un episodio en el que, mediante un ejemplo particular – triángulo equilátero –el participante propone conjeturas y se autoconviene, conectando con las hipótesis, sin embargo, no la extiende de manera general ni la demuestra.
<i>Sugieren la conjetura a), c) y d)</i>		
SigD	NPro	Reportamos en el Apéndice E un episodio en que se resumen las conjeturas con la frase “los triángulos son de la misma medida”, sin embargo, los argumentos que expone para justificarlos no son claros.
<i>Sugieren la conjetura b), c) y d)</i>		
SigEn /	Cx, y NPro	Reportamos dos episodios en el Apéndice E donde no intentaron

SigD		justificar en absoluto sus conjeturas; uno de ellos no establece las hipótesis y el otro sí.
------	--	--

Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, se resumen los resultados referentes al Cuestionario 3 en la *Tabla 45*.

En este caso, por la asistencia y la disposición hubieron veinticinco respuestas a analizar.

Tabla 45. Resumen de resultados relativos al Cuestionario 3 de la Sesión 3		
Pregunta	Respuestas	Resultados
1	Diez respuestas cumplieron con el objetivo de la pregunta.	Poseen evidencia de la subcategoría Cx en cuanto a los conceptos de conjetura y argumento, puesto que respondieron correctamente.
	Siete respuestas cumplieron parcialmente con el objetivo.	Si bien se presenta ambigüedad, las ideas se encaminan hacia el concepto de demostración.
	Ocho no cumplen con el objetivo.	Responden incorrectamente, evidenciando falta de entendimiento.
2	Nueve respuestas cumplen con el objetivo.	Son aquellas que respondieron correctamente la pregunta 1, excepto uno de los participantes. excepción de este último, el resto evidencia conexión (Cx) entre el concepto y el uso de la demostración.
	Una respuesta cumple con el objetivo parcialmente.	Aunque la respuesta a la pregunta 1 fue ambigua, en esta fue correcta.
	Catorce respuestas no cumplen con el objetivo.	Se presenta falta de entendimiento de la utilidad de la demostración matemática.
3	En esta pregunta, dos participantes no respondieron. Once no sugirieron cambios ni dieron retroalimentación. Cuatro sugirieron el mayor uso de figuras geométricas distintas, dos el uso de juegos didácticos, dos el uso de elementos visuales y menos escritura y por último, cuatro sugirieron ahondar más en el uso de la app, hacer ejercicios con números concretos, explorar más el proceso de conjeturar y el vocabulario y lenguaje matemáticos.	

Fuente: Elaboración propia.

Tras el resumen anterior, se procede al capítulo final de este trabajo, donde se discuten los resultados y se generan conclusiones.

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En el presente capítulo se discuten los resultados obtenidos y cómo estos nos llevan a responder la pregunta de investigación; además, se especifica el nivel de alcance de los objetivos, tanto el general como los particulares.

5.1 Discusión

Recordamos que nuestra pregunta de investigación es la siguiente: ¿Qué características de la demostración matemática conducen al aprendizaje con entendimiento en geometría sintética para estudiantes de segundo semestre del nivel medio superior en México?; la parte teórica de la misma, se respondió en los capítulos 1 y 2 de este trabajo, ya que se reportaron varios estudios que respaldan características de la demostración que conducen al entendimiento, como son: la explicativas (reflexivas, abiertas a cambios de representación, remoción de dudas propias), la comunicativas (cambios en el lenguaje, remoción de dudas del público y generadoras de conflicto) y orientadas al descubrimiento de nuevos resultados, además de cualidades de verificación, razonamiento y pensamiento crítico. Ahora bien, pongamos atención a las características que resultaron relevantes para este fin de manera empírica, esto es, tras la aplicación de las tareas de aprendizaje al grupo de participantes.

En cuanto al diseño de la Actividad 1 y el protocolo de la primera sesión, recordamos al lector que las características de la demostración que se vieron involucradas en mayor medida en la tabla fueron también aspectos importantes de la enseñanza por descubrimiento —**orientación equilibrada y reflectividad en la construcción de sus conjeturas provenientes de la exploración del puzzle, además de la exploración de las habilidades de comunicación**— ya que apoyaron a los participantes a no acumular información innecesaria y a practicar el constructivismo acumulativo durante la sesión, fuertemente motivado por la explicación posterior de la investigadora y las interacciones con ella. Con esto en cuenta, los resultados referentes a las producciones escritas de la Actividad 1 dejan ver la presencia de, sobre todo, la categoría **SigEx**, es decir, fueron importantes los indicios

de **reflexión** obtenidos en comparación con los hallazgos previos a la aplicación de la actividad, que si bien también reportaron evidencia de subcategorías de SigEx, fueron un tanto más intuitivas. Cabe destacar que fueron de gran ayuda para su exploración posterior con la herramienta digital. Estos resultados dan cuenta de los beneficios que da la reflexión a este respecto. En menor medida, se observó evidencia de una disposición temprana a conjeturar y, sorpresivamente, **se reporta la primera DUSC (SigD)** de acuerdo con el modelo de Toulmin y las características antes discutidas. Este hallazgo es de particular importancia, ya que no se esperaban resultados relativos al descubrimiento en la primera sesión, lo cual refleja un entendimiento inicial de la demostración, resultado que interesa a nuestro trabajo de investigación, y gracias a la implementación de la enseñanza por descubrimiento. Además, se observan los primeros indicios de **cambios de representación con el objetivo de persuadir (SigC)** en lugar de explicarse a sí mismos, mostrando resultados favorables respecto a la comunicación.

En esta sección de la actividad, la mayoría de los participantes buscaba abordar primero un caso particular: el de colocar el punto H de modo que obtuvieran dos triángulos de las mismas dimensiones y, como se revisó ampliamente en el Capítulo 2, la exploración de casos particulares es de los primeros pasos que sigue el estudiante para dar lugar al proceso demostrativo y es relevante resaltar que existieron numerosos procesos en la primera sesión en los que sucedió, indicando que se dirigían hacia el desarrollo de habilidades deductivas propias de la demostración. Este autoconvencimiento fue facilitado por el hecho de que los participantes ya conocían la fórmula del área del triángulo y sólo bastó concentrar la actividad en que se convencieran de su generalidad y funcionamiento, los elementos explicativos más formales de la demostración no tuvieron una enorme presencia en este caso debido a que se trataba de una sesión introductoria y los argumentos heurísticos como diagramas o ejemplos particulares fueron aceptados con mayor facilidad. Bajo esta evaluación y como se mencionó anteriormente, la DUSC producida fue un resultado importante, algunos argumentos fueron visuales y relativos a casos particulares, sin

embargo, se refleja la intuición del participante y que el diseño de las actividades aplicadas daba los resultados deseados a la par del uso del puzzle digital.

Al contrastar estos resultados con el Cuestionario 1, encontramos que en esta primera sesión, la mayoría de las respuestas reflejan que los estudiantes no cumplieron el objetivo planteado para las preguntas de manera individual, pues la mayoría de ellos presentaron confusión respecto al concepto de generalidad. Se observó que sólo la notaron en el caso de las medidas, pues entendieron que no es necesario que sean específicas, sin embargo, no identificaron la generalidad en el tipo de triángulo que analizan ya que la mayoría se inclinó por el acomodo de H que daba dos triángulos iguales. Además, confunden el caso particular de un triángulo con la prueba general, sin embargo, existen algunos que sí comprenden la generalidad. En general, se identificaron respuestas alusivas a las cuatro categorías, con mayor énfasis en la 3 y 4 y, en particular, en las subcategorías DR-C, ML, NPro y NPru. Aunque gran parte de las respuestas aluden a confusiones relacionadas con la generalidad de sus argumentos, los ejemplos concretos también jugaron un papel importante en el autoconvencimiento. La redacción de las preguntas lleva al estudiante a tener en cuenta que será leído, por lo que, en numerosas ocasiones, se identifican cambios en el lenguaje y en las representaciones orientados a la mayor comprensión de la investigadora.

Se destaca que en la primera pregunta se volvió a generar una DUSC de manera temprana y además la adaptación a la dinámica comunicativa de parte del Estudiante 1, es decir, comenzó a perseguir el objetivo de convencer a un público. Similarmente, en cuanto a la pregunta 2, se observó que el mismo estudiante fue capaz de trasladar sus hallazgos a un problema similar (**SigEn**), señal de aprendizaje con entendimiento. Los resultados de este sugieren que la implementación de elementos de la demostración como la reflexión y el desarrollo de la comunicación puede llevar a indicios relacionados con la creación de conexiones y finalmente a la producción de una DUSC en sesiones tempranas, aunque en pocos participantes. Además, se observaron indicios de que los participantes llevaron el problema a uno similar (SigEn), salvando así una confusión que suele presentarse en estudiantes de este nivel educativo: el cuadrado es un caso particular de un rectángulo

(pregunta 6). Respecto a la pregunta 7, aunque la mayoría no respondieron satisfactoriamente, hubo un caso en que se reporta la existencia de conexión (**SigEn**) entre la fórmula del área del triángulo y una división del pentágono regular que sugiere el Estudiante 1, aunque esta no fue la adecuada, lo que le impidió resolver el problema. La pregunta 8 no cumplió con su objetivo, ya que las respuestas carecieron de justificación. Finalmente, respecto al uso de la herramienta digital, la mayoría de los participantes tienen la opinión de que esta mejoró el proceso de exploración y que generó un ambiente en que se les ocurrieron ideas que no hubieran surgido con una herramienta física.

Respecto a la parte en que hubo interacción entre los participantes y la investigadora, se observó el menor nivel de independencia para ellos, ya que la intervención de la investigadora fue importante para la introducción del concepto de demostración matemática. Las preguntas del inicio y las interacciones fueron de especial relevancia, ya que en ellas se presentaron la mayoría de episodios relacionados con la categoría **SigC** y sus subcategorías, esto debido al fomento del ejercicio y sondeo de las habilidades de comunicación y persuasión, además de las ideas previas que tenían al respecto; además, se pretendía una introducción natural a las características de la demostración: se observaron los primeros intentos de persuadir con argumentos heurísticos y con cambios de representación que, si bien eran intuitivos y en ocasiones carecían de claridad, reflejaban el proceso de modificación de lenguaje necesario para traducir sus propias ideas y comunicarlas, pasando incluso por el enfrentamiento del conflicto. Este último provino de preguntas planteadas por la investigadora que pasan del concepto del área del rectángulo al del área del triángulo para que desarrollaran habilidades inquisitivas y se preguntaran *¿por qué?*; esta característica contrasta con la presentación directa de las fórmulas a la que los participantes estaban acostumbrados. En esta sección, también se encuentra evidencia de conexión (**SigEn**) entre la fórmula previamente aceptada del área del rectángulo y la del triángulo, señal de entendimiento. De igual manera, se observaron proposiciones expresadas de manera verbal para justificar la fórmula solicitada. En general, en esta primera sesión, si ordenamos nuestras categorías de acuerdo con los resultados más

relevantes referentes a cada uno, obtendríamos a SigEx en primer lugar, seguido de SigC y SigEn, terminando con SigD, hallazgo importante e inesperado.

En la Sesión 2 se pretendió involucrar elementos demostrativos de forma ligeramente más natural y con menos acompañamiento de la investigadora para evaluar y observar el nivel de entendimiento de la misma en los participantes. Para el diseño de la Actividad 2 y el protocolo de la segunda sesión, las principales características de la demostración involucradas fueron también, como en la actividad anterior, propias de la enseñanza por descubrimiento –**cualidad exploratoria, generación de conflicto y comunicación subsecuente, reflexión y utilización de contraejemplos como técnica demostrativa** –y los resultados obtenidos pertenecen a las cuatro categorías de análisis planteadas.

Para el Ejercicio 1, se obtienen importantes resultados respecto al entendimiento, pues los estudiantes realizan conexiones (**SigEn**) entre los elementos del triángulo revisados la sesión anterior y la fórmula demostrada, además de que recuerdan dichos conceptos de forma fluida. Además, los resultados referentes al elemento comunicativo de la demostración, motivados en gran medida por la investigadora del mismo modo que en la sesión anterior, reflejaron conflictos individuales y grupales que los llevaron al autoconvencimiento basado en argumentos matemáticos y hacia la persuasión de sus compañeros (**SigEx y SigC**). Además, estos conflictos alcanzaron el objetivo de reafirmar la importancia de la demostración matemática en problemas en que la percepción visual puede ser engañosa. Las habilidades de exploración generadas por el diseño de la sesión y actividad anteriores, resultaron en que tres participantes comenzaron a generar conjeturas (**SigD**) tras la exploración del problema 1 de la Actividad 2, ya fuera utilizando la herramienta física y medidas concretas o la exploración visual y suposiciones heurísticas, lo cual refleja signos de una actitud inquisitiva en los participantes. Además, se produce nuevamente un hallazgo importante respecto a la categoría **SigD**: nuevamente se produce una DUSC, cabe aclarar, por un estudiante que ya lo había conseguido en la sesión anterior.

En cuanto al Ejercicio 2, se les permitió explorar una técnica demostrativa denominada "demostración por contradicción" en la búsqueda de contraejemplos de manera más independiente, al explorar con la herramienta física, pero aún gozando de la guía del diseño. Los resultados fueron sobre todo de tipo explicativo (**SigEx**) ya que gracias a los intentos de construcción con lápiz y papel y los cambios de representación, se autoconvencieron de la respuesta negativa a la pregunta, en la mayoría de los casos, esto indica el primer indicio del uso de una técnica demostrativa más formal para alcanzar el autoconvencimiento. Este ejercicio particular también fortaleció la identificación de patrones y la implementación de elementos exploratorios de casos particulares que permite identificar elementos invariantes y generar conjeturas, como las que produjeron (**SigD**). Estas proposiciones fueron expresadas en un lenguaje matemático de mayor claridad que en la sesión anterior (**SigC**), sin embargo, en la mayoría de los casos esta mayor independencia al escribir sus conjeturas o tratar de defender sus argumentos produjo abundancia de respuestas que no gozaban de lenguaje matemático, más bien, utilizaron lenguaje cotidiano para convencer de la conveniencia de cierta opción en los terrenos que no tiene cabida en una discusión matemática del problema. Esto puede deberse a que los estudiantes aún no se acostumbran al lenguaje utilizado y requieren de más tiempo para familiarizarse con él y con el proceso de persuasión de un público ajeno a sí mismos. Otro elemento importante en el diseño de este ejercicio fue la motivación a generar distintas representaciones de la información, esta vez con objetivo explicativo y no comunicativo (**SigEx y SigC**).

Cabe aclarar que existieron dos producciones en las que el uso de la herramienta física pudo obstaculizar la exploración en el sentido de que sólo trataron de construir triángulos rectángulos, lo cual pudo haber cambiado al presentar una herramienta digital donde pudieran mover los lados con mayor libertad. En este caso, los participantes respondieron incorrectamente, sin embargo, es importante enfrentar al estudiante con los posibles errores que pueda cometer para que, al poner a prueba sus conjeturas y note un error, pueda corregirlo; de ahí la importancia de ser cuidadosos con el uso de estas herramientas y saber

orientar a los estudiantes de forma satisfactoria. También es posible que estos errores se deban a una concepción errónea del triángulo en estos participantes.

Para el Ejercicio 3, cuyo diseño se vio influenciado por el cambio de representación solicitado y por la instrucción explícita de construir una DUSC, los resultados, nuevamente, tendieron sobre todo a la categoría **SigEx**. La investigadora estuvo disponible para responder dudas y ayudó de manera grupal a los participantes a realizar el primer cambio de representación del verbal al simbólico, además de que sugirió una analogía con lenguaje cotidiano para explicar el Postulado de la Mínima Distancia. El resto de la actividad requirió mayor independencia de los participantes. Se observa el uso de medidas concretas para el autoconvencimiento, técnica válida en la exploración y facilitada por la elección de la herramienta física y hubo un par de ocasiones en que la modificación del lenguaje implicó reverbificar nuevas proposiciones (**SigD**) para convencer a la investigadora.

En este ejercicio se producen dos DUSC que, comparadas con las previas, finalmente cumplen con la estructura del modelo de Toulmin (**SigD**), dando cuenta de los beneficios del diseño de las actividades y los elementos demostrativos elegidos en la misma tales como elementos explicativos más formales como la contradicción, el conflicto y los cambios de representación. Es de relevancia mencionar que el estudiante que produjo una DUSC en la Sesión 1 lo volvió a hacer en la Sesión 2, y aunque en la primera se le observó dependiente de las medidas concretas –aunque no fueran necesarias –en esta sesión aún hizo uso de estas pero ya no formaron parte de la redacción de los argumentos en su prueba, lo que refleja un desprendimiento de lo concreto y un acercamiento a la abstracción. La organización correcta de sus argumentos y la correcta conexión entre ellos refleja constructivismo acumulativo y es señal de aprendizaje con entendimiento (**SigEn**).

El Cuestionario 2 tuvo un diseño y función evaluativo en el sentido de que buscó determinar si los estudiantes lograron adquirir ciertas habilidades propias del aprendizaje con entendimiento, por ejemplo, emplear lo aprendido en problemas similares o nuevos. La primera pregunta reporta que menos de la mitad de los participantes había aún comprendido

el concepto de demostración, sin embargo, desde luego hubo respuestas acertadas, que en este caso reflejan aceptación y comprensión de la demostración como herramienta matemática; además, estos resultados no necesariamente implican que sus habilidades de razonamiento no se vean desarrolladas, siendo las respuestas a la segunda pregunta un respaldo para esta afirmación como a continuación se discute. Se observó que cerca de la mitad de los participantes fueron capaces de aplicar el resultado revisado a un problema similar (**SigEn**) de forma correcta o parcialmente correcta, indicio de éxito en la aplicación de los conceptos revisados. En estas respuestas, la mayoría lograron emplear la DdT de forma correcta, hubo quienes tuvieron errores aritméticos o por conjeturas falsas que realizaron previamente, no consiguieron la respuesta correcta en su totalidad. Este éxito total o parcial es señal de aprendizaje con entendimiento. Se destaca una ocasión en que el estudiante da una respuesta totalmente opuesta por una confusión con los signos, lo cual es un error que no refleja la comprensión del contenido que nos interesó en las sesiones. En cuanto a la última pregunta, los conceptos se lograron aplicar a un problema nuevo por parte de dos participantes, uno de ellos produciendo una DUSC que corrige la división inconveniente que le impidió resolver el ejercicio similar en el Cuestionario 1, lográndolo en esta ocasión. El otro participante coloca una sugerencia relevante en esta pregunta, pero no completa su argumento; este par de hallazgos son de especial importancia pues recordamos que para esta tercera pregunta, por cuestiones de tiempo, se les solicitó específicamente no responderla. El hecho de que dos participantes lo hayan hecho correctamente y, más aún, que uno haya producido una DUSC, es importante evidencia de **SigEn** y del fortalecimiento de sus habilidades de razonamiento.

Es relevante recordar que en esta sesión la discusión guiada del problema, propia de la enseñanza por descubrimiento, fomentó modificaciones del lenguaje para explicar sus posturas individuales y los llevaron a desarrollar un lenguaje matemático más específico, además de defender sus posturas y persuadir a sus compañeros. Continuaron siendo relevantes los intercambios de diálogo entre la investigadora y los participantes, pues permitieron identificar que los elementos de la demostración aplicados al diseño de la

Actividad 1 resultan en signos de entendimiento como la memoria o la conexión (**SigEn**) entre las fórmulas e ideas demostradas en dicha sesión y el nuevo problema presentado para la Actividad 2. Para esta sesión, el orden de nuestras categorías de acuerdo con los resultados más relevantes resulta con SigEx en primer lugar, seguido de SigD y SigEn, terminando con SigC.

En la última sesión se les proporcionó mayor independencia a los estudiantes, con el objetivo de observar si adquirieron las habilidades esperadas e identificar signos de entendimiento. Previo a la resolución individual del primer ejercicio, se presentaron episodios relativos a categorías **SigC** y **SigEn** debido a que la investigadora realizó la explicación del resultado revisado la Sesión 2, lo que produjo una discusión guiada con el grupo, si bien más breve debido a que el objetivo de la tercera sesión no se centraba en esta, sino en el desempeño individual de los participantes.

El diseño del único ejercicio a resolver implicó sobre todo elementos exploratorios y de descubrimiento, por lo que los resultados se encontraron mayormente en las categorías SigEn y SigD, lo cual es de interés para nuestro trabajo, ya que se esperaba que en esta tercera sesión desembocaran las habilidades adquiridas en la primera y la segunda. Se permitió a los estudiantes explorar de manera individual, sin embargo, continuaron teniendo una guía en las instrucciones ya que se les mencionaron ciertas hipótesis bajo el nombre "especificaciones" para observar si lograban identificar que se trataba de lo mismo a pesar del cambio de nombre. La pregunta que dirige toda la actividad permite que los participantes decidan qué elementos de los triángulos explorar, teniendo ya el respaldo de los conceptos vistos en las sesiones anteriores como áreas o incluso perímetros; esto no los limitó ya que se les comentó que tenían total libertad de explorar cualesquiera otras herramientas en el diagrama digital, lo que dio la oportunidad de ampliar las conexiones existentes respecto a triángulos.

El diseño de la tabla permitió una mejor organización al participante y le recordó de forma sutil que siempre debe ligar sus hipótesis a sus conjeturas, además de describir cómo las obtuvo la investigadora. Durante esta sesión se presentaron episodios referentes a SigD, ya

que el elemento de descubrimiento de la demostración empieze a ser relevante en el diseño al tener previas dos sesiones para familiarizarse con el concepto y poder explorar este beneficio de manera adecuada. A pesar de que la producción de conjeturas es un indicio importante de la mencionada categoría, para que existan indicios de aprendizaje con entendimiento era importante que los participantes mostraran signos de memoria o de conexiones realizadas entre los conceptos importantes al intentar justificar su proposición, lo cual sucedió con moderada recurrencia pues fue identificado en la mitad de los participantes, resultado que nos lleva a los objetivos planteados en este trabajo de investigación, pues reflejan signos de entendimiento (SigEn), reflexión (SigEx) y constructivismo acumulativo. En las proposiciones de los participantes aparecieron dos conceptos no revisados que fueron semejanza y ángulos, aunque no es relevante para nuestra investigación, puede ser señal de conexión tras haberlos revisado anteriormente en el curso. Un episodio de especial relevancia –del participante 1 –produce la DUSC más refinada (SigC) que se revisó en este trabajo en la que conecta con elementos revisados en sesiones anteriores (SigEn), esto es señal de una evolución individual en las habilidades demostrativas del participante, además de que se desprendió totalmente del uso de medidas concretas, lo que lo acercó a la abstracción. Produce además una conjetura que no prueba, pero de la que se autoconviene a través de cambios de representación (SigEx). En otro episodio, se aplicó el uso de un ejemplo particular con el triángulo equilátero para que una participante se convenciera de su conjetura (SigD y SigEx), sin embargo, no la extiende de manera general. Una nota aquí, la participante se da cuenta de esto y no afirma que se cumpla para cualquier caso, evidenciando un entendimiento mayor de la generalidad de la demostración en comparación con la Sesión 1. De igual manera, se presentaron dos episodios con fuertes indicios de empirismo episódico en los que los participantes colocaron todos los conceptos revisados sin conectarlos satisfactoriamente y sin producir argumentos coherentes, por lo anterior, es importante ser cuidadosos con la cantidad de conceptos presentados a los estudiantes, para evitar confusiones y que se abrumen al tratar de organizarlos. Es relevante mencionar un episodio con una fuerte confusión respecto a los signos involucrados en la Desigualdad el Triángulo, evidencia de falta de entendimiento.

En cuanto al Cuestionario aplicado al final de la Sesión 3, se esperaba sondear el entendimiento del concepto de demostración matemática en comparación con sesiones anteriores. Afirmamos basándonos en los resultados que el objetivo de la pregunta 1 se cumplió satisfactoriamente para cerca de la mitad de los participante, reflejando un mayor entendimiento del concepto de demostración (SigEn) y, respecto a la pregunta 2, pudieron conectarlo con su uso. Para esta sesión, el orden de nuestras categorías de acuerdo con los resultados más relevantes resulta con SigD en primer lugar, seguido de SigC y SigEn, terminando con SigEx. La última pregunta aporta retroalimentación respecto a la implementación de las actividades por parte de la investigadora, se sugieren otras actividades que impliquen juegos didácticos, actividades visuales y el uso de materiales físicos; además, un participante sugiere haberlo estudiado más ampliamente el lenguaje matemático. Estas sugerencias pueden ser útiles para próximos trabajos.

5.2 Conclusiones

Tras la discusión anterior, podemos revisar el alcance de nuestros objetivos y responder la parte empírica de nuestra pregunta de investigación basándonos en las características demostrativas implicadas en los diseños de las actividades y en los correspondientes resultados que se obtuvieron tras su aplicación.

En la Sesión 1, la actividad aplicada gozó de características tales como la reflectividad, la orientación equilibrada en la exploración y el sondeo de habilidades de comunicación en los participantes, predominando sobre todo estos últimos, ya que este objetivo de la demostración busca ejercitar las habilidades de **persuasión** y **convencimiento** del estudiante, por lo que la investigadora lo implementó para el sondeo de información del grupo y para evaluar el estado de dichas habilidades para comenzar las sesiones. Se identificó que este elemento de la demostración fue de vital importancia para introducir naturalmente este concepto a los participantes. La **reflexión** fue una característica que permitió fomentar el constructivismo acumulativo en contraposición con la mecanización y el empirismo episódico, que llevan al pronto olvido de información. Los principales resultados que se observaron fueron referentes a la explicación y a la comunicación –con el

inesperado hallazgo de una DUSC –signos tempranos de entendimiento en la construcción de conexiones, y el uso de la herramienta digital permitió restringir a los participantes lo suficiente para que exploraran sin alejarse el objetivo previsto para la sesión introductoria. De este modo, las características implicadas en el diseño condujeron sobre todo al ejercicio persuasivo y explicativo, y al aprendizaje con entendimiento en menor medida, más bien, de manera inesperada por tratarse de la primera sesión.

En la segunda sesión, elementos **comunicativos** como el **conflicto** tuvieron un doble objetivo: promover una actitud inquisitiva en el estudiante y dar razones por las que la demostración matemática es de hecho una herramienta útil, además de poner atención en el intercambio comunicativo posterior al conflicto. En cuanto a la implementación de cierto **formalismo** propio de la demostración en la presente, se observó que la técnica de la **contradicción** llevó a los participantes a un **autoconvencimiento** natural del resultado planteado y a la **producción de conjeturas**, por lo que este elemento en el diseño también dio resultados relativos al **descubrimiento** de resultados. La producción de dos DUSC, una en el problema similar (pregunta 2) y otra en el problema nuevo (pregunta 3) refleja que los elementos elegidos para el diseño de la Actividad 2 reportan signos de aprendizaje con entendimiento. Algo importante que tomar en cuenta, sin embargo, es que estas pruebas fueron producidas por el mismo estudiante y puesto que en poco más de la mitad del grupo no se reflejaron signos de entendimiento, habría que evaluar otros elementos de la demostración en el diseño o bien, restar formalidad en su presentación. De manera general, las características implementadas en el diseño de la Actividad 2 desembocaron sobre todo en resultados en la categoría explicativa y de descubrimiento y al aprendizaje con entendimiento de manera moderada, al igual que a la comunicación.

Las limitaciones de tiempo desembocaron, sobre todo en la Sesión 3, en que algunos participantes no alcanzaran los objetivos esperados. Los elementos involucrados en el diseño fueron sobre todo **exploratorios** y de **descubrimiento**, ya que se buscaba la mayor independencia de los participantes. Los primeros se beneficiaron de la herramienta digital y orientaron a los segundos, esta vez de manera individual y con menor guía de la

investigador. Fue importante permitir a los participantes explorar individualmente para evaluar si los beneficios del descubrimiento estaban presentes. Por otra parte, elementos como la **comunicación** continuaron presentes de manera implícita, ya no se les pedía expresamente convencer, sino demostrar, lo cual realizaron o intentaron realizar en la mitad de los casos, por lo que la mayor exploración y ejercicio del uso del **lenguaje matemático** fue necesario. Puesto que se solicitó demostrar sus propias conjeturas individualmente, tuvieron libertad de utilizar herramientas demostrativas con tanto **formalismo** como quisieran, por lo que este elemento estuvo involucrado implícitamente en el diseño de esta última actividad. Este formalismo fue reflejado en las producciones de pocos participantes. Así, las características implementadas en el diseño de la última actividad desembocaron sobre todo en resultados en la categoría de descubrimiento y comunicación, con el aprendizaje con entendimiento para pocos participantes y la explicación en último lugar.

En resumen, considerando que todas las características implicadas en el diseño de las tareas promueven el aprendizaje con entendimiento de acuerdo al análisis teórico realizado, se concluye que por cada sesión las más relevantes fueron, en la primera, la comunicativa ya que llevó a un hallazgo temprano, en la segunda, el descubrimiento tras la exploración, que llevó a una DUSC en el problema similar y, en la tercera, nuevamente el descubrimiento que lleva a la DUSC más refinada, cabe aclarar, en el mismo participante. Finalmente, una categoría emergente que se pudo identificar fue la influencia de la investigadora en la implementación de las actividades, si bien la orientación equilibrada es un elemento esencial para la enseñanza por descubrimiento, en las sesiones analizadas tuvo un enorme protagonismo la manera en que la investigadora dirigió las interacciones con los participantes, las preguntas que realizó y cómo esto impactó en los resultados reflejados es de sumo interés. Es deseable que en futuros trabajos de investigación se pudiera contar con más de tres sesiones de trabajo, para incluir elementos comunicativos, además de poner especial atención en que el empleo de herramientas físicas o digitales no obstaculicen el proceso de exploración.

REFERENCIAS

- Alibert, D. y Thomas, M. (2002). Research on Mathematical Proof. En D. Tall, (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 215-231). Springer. <https://doi.org/d3dghk>
- Anderson, D. S., & Piazza, J. A. (1996). Changing Beliefs: Teaching and Learning Mathematics in Constructivist Preservice Classrooms. *Action in Teacher Education*, 18(2), 51–62. <https://doi.org/10.1080/01626620.1996.10462833>
- Annonng-Aksan, J. (2024). Extent of demonstration method on Mathematics teaching approaches among senior high school students of Mindanao State University–Sulu. *Journal of Interdisciplinary Perspectives*, 2 (6), 206-217. <https://doi.org/10.69569/jip.2024.0099>
- Arce, M., Conejo, L., Dos Santos, C. Ortega, T. y Pecharromán, C. (2019). Concepciones del profesorado de educación secundaria sobre la demostración matemática y su enseñanza y aprendizaje. En E. Badillo, et al. (Eds.) *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional*. (pp. 417-438). Ediciones Universidad Salamanca.
- Ávila, A. (2016). La investigación en educación matemática en México: una mirada a 40 años de trabajo. *Memorias del congreso de investigación sobre el tercer sector*, 28(3), 31-59. <https://doi.org/10.24844/em2803.02>
- Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de collège*. (Tesis de grado). Universidad Joseph Fuourier, Francia.
- Ball, D. L. y Bass, H, (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, y D. Schifter (Eds.). *A Research Companion to Principals and Standards for School Mathematics* (pp. 27-44). Reston. National Council of Teachers of Mathematics.
- Barberà, E. (1996) La función del lenguaje en la educación matemática, *Cultura y Educación*, 8(4), 93-102. <https://doi.org/10.1174/11356409660561313>
- Baro, A. (2011). Metodologías activas y aprendizaje por descubrimiento. *Revista Digital Innovación y Experiencias Educativas*, 40, 1-11.
- Barrera Mora, F., y Reyes Rodríguez, A. (2014). Sobre el aprendizaje con entendimiento en matemáticas. *Pädi Boletín Científico De Ciencias Básicas E Ingenierías Del ICBI*, 2(3), 3-5. <https://doi.org/10.29057/icbi.v2i3.525>
- Bartolini, M. G. (1991). Social Interaction and Mathematical Knowledge. *Proceedings of PME XV*. 1. 30.
- Bartolini, M. G., y Maschietto, M. (2008). Machines as tools in teacher education. *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 183-208). Sense Publishers. <https://goo.su/zAOLfd>
- Bell, A.W. (1979) The learning of process aspects of mathematics. *Educ Stud Math*, 10, 361–387. <https://doi.org/10.1007/BF00314662>
- Bell, J. (2010). *Doing your research project: A guide for first-time researchers in education, health and social science*. McGraw-Hill Open University Press.
- Bertely Busquets, M. (2000). *Conociendo nuestras escuelas: Un acercamiento etnográfico a la cultura escolar*. Paidós.

- Bjuland, R., Cestari, M. L., y Borgersen, H. E. (2007). Pupils' mathematical reasoning expressed through gesture and discourse. *CERME5* (pp. 1129–1139).
- Boero, P. (2007). *Theorems in School From History, Epistemology and Cognition To Classroom Practice*. Sense Publishers.
- Bray, A. y Tangney, B. (2017). Technology usage in mathematics education research – A systematic review of recent trends, *Computers & Education*, 114, 255-273. <https://doi.org/gbww5q>
- Bruner, J. S. (1961). The act of discovery. *Harvard Educational Review*, 31(1), 21-32. <https://doi.org/10.4324/9780203088609-13>
- Bunge, M. (1960). La ciencia: Su método y su filosofía. Siglo Veinte.
- CadwalladerOlsker, T. (2011). What do we mean by mathematical proof? *Journal of Humanistic Mathematics*, 1(1), 33–60. <https://doi.org/10.5642/jhummath.201101.04>
- Cai, J., Jakabcsin, M. S., y Lane, S. (1996). Assessing students' mathematical communication. *School Science and Mathematics*, 96(5), 238–246. <https://doi.org/cx3k8w>
- Calvo Ballester, M. M., (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. *Revista Educación*, 32(1), 123-138. <https://n9.cl/qz60h>
- Camargo, L., Samper, C. y Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas*, 27(3), 371-383.
- Chapman, A. (1992). *Language practices in school mathematics: A social semiotic perspective*. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:221994512>
- Chavarria-Pallarco, N. A. (2020). Modelo Van Hiele y niveles de razonamiento geométrico de triángulos en estudiantes de Huancavelica. *Investigación Valdizana*, 14(2), 85–95. <https://doi.org/10.33554/riv.14.2.587>
- Consogno, V. (2005). The semantic-transformational function of written verbal language in mathematics. *European Research in Mathematics Education*, 4, 810-820. <https://n9.cl/bjs14>
- Craig, T. S. (2011). Categorization and analysis of explanatory writing in mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(7), 867–878. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2011.611909>
- Crespo, C. y Ponteville, C. (2005). Las funciones de la demostración en el aula de matemática. En J. Lezama, M. Sánchez, J. G. Molina, (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 18. 307-312.
- De Villiers, M. D. (1999). Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad. En D. Bennett y D. Scher (Eds.) *Key Curriculum Press*. 3-11.
- De Villiers, M. D. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*. 15-30.
- Defaz Cruz, G. J. (2017). El desarrollo de habilidades cognitivas mediante la resolución de problemas matemáticos. *Journal of Science and Research*, 2(5), 14–17. <https://doi.org/pv2w>
- Del Río Sánchez, J. (2011). Aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento. Estudio comparado de dos metodologías. *Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia: CIDE*, 12.
- Detlefsen, M. (1990). Brouwerian Intuitionism. *Mind*, 99(396), 501–534. <https://n9.cl/rt16b>

- Díaz, D. J. y Zuluaga, D. G. (2013). *De la producción de conjeturas a la demostración en un contexto de geometría sintética-analítica: el caso de la circunferencia*. [Tesis no publicada] Universidad del Valle.
- Eisenhart, M. A. (1991) Conceptual Frameworks for Research Circa 1991: Ideas from a Cultural Anthropologist; Implications for Mathematics Education Researchers. *Proceedings of the 13th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 202-219.
- Escudero, E. B. (11 de julio de 2023). El abandono de la educación matemática en México. *El Universal*. <https://bit.ly/4llsd1F>
- Esterberg, K. G. (2002). *Qualitative methods in social research*. Boston: McGraw-Hill.
- Ferrari, P. L. (2003). Abstraction in mathematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 358(1435), 1225–1230. <https://doi.org/10.1098/rstb.2003.1316>
- Fiallo, J., Camargo, L., y Gutiérrez, Á. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Directory of Open Access Journals*. 31(2). 181-205. <https://n9.cl/0guh1d>
- Flick, U. (2015). *El diseño de la investigación cualitativa*. (pp. 147-148). Ediciones Morata.
- Flores, Á. H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*. 19(1). 87-95. <https://doi.org/10.24844/EM1901.03>
- Font, V. (2009). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Revista de Educación Matemática*, 24(2), 7-25.
- Gobierno de México. (17 de junio de 2023). Programas de estudio vigentes: Colegio de Bachilleres. gob.mx. <https://n9.cl/0qymmc>
- Godino, J. D. y Recio, Á. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las ciencias*, 19(3), 405-414. <https://doi.org/py25>
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Greeno, J. G., y Hall, R. P. (1997). Practicing Representation: Learning with and about Representational Forms. *The Phi Delta Kappan*, 78(5), 361–367. <https://n9.cl/2bn31>
- Hammer, D. (1997). Discovery Learning and Discovery Teaching. *Cognition and Instruction*, 15(4), 485–529. <http://www.jstor.org/stable/3233776>
- Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21(1), 6–13. <https://doi.org/cjbpsq>
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44. 5–23. <https://doi.org/10.1023/A:1012737223465>
- Hanna, G. y Jahnke, H. (1996). Proof and Proving. *International Handbook of Mathematics Education*. 987-1033. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_27
- Hanna, G., y Barbeau, E. (2002). Proof in mathematics. 1-5.

- Harel, G., y Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III*. (pp. 234-283). Providence.
- Herbst, P., y Brach, C. (2006). Proving and Doing Proofs in High School Geometry Classes: What Is It That Is Going On for Students? *Cognition and Instruction*, 24(1), 73–122. https://doi.org/10.1207/s1532690xc2401_2
- Herizal, H., Suhendra, S., y Nurlaelah, E. (2019). The ability of senior high school students in comprehending mathematical proofs. *Journal Of Physics Conference Series*, 1157(2). 5-6. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1157/2/022123>
- Hernández Mella, R., y Pacheco Salazar, B. (2017). La (pre)ocupación por el aprendizaje: desde la complejidad piagetiana al conocimiento situado. *Ciencia y Educación*, 1(1), 37–44. <https://doi.org/10.22206/cyed.2017.v1i1.pp37-44>
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill Interamericana. (pp. 4-11).
- Hernández Suárez, C. A. (2012). Caracterización de la actividad demostrativa en estudiantes de educación superior. *Eco Matemático*, 3(1), 36–43. <https://doi.org/10.22463/17948231.118>
- Hidalgo, E. B. (2016). Creando certeza en las ideas matemáticas vía el uso de la tecnología digital. *Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática*, 15, 349-360. <http://funes.uniandes.edu.co/21546/>
- Hiebert, J., y Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 67, 69). New York: Macmillan.
- Hitt Espinosa, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1(1), 7-25.
- Hoyles, C. (1997). The Curricular Shaping of Students' Approaches to Proof. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 7–16. <http://www.jstor.org/stable/40248217>
- Ibañez, M. J. & Ortega, T. (2003). Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de Bachillerato. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, (21)(1), 49-63. <https://n9.cl/qpl8>
- Lampert, M. (1993). Teacher's thinking about students' thinking about geometry: The effects of new teaching tools. En J. L. Schwartz, M. Yerushalmy y B. Wilson (Eds.), *The geometric supposer: What is it a case of?*, (pp. 143–177). Educational Technology Center. <https://eric.ed.gov/?id=ED294724>
- Lárez Villarroel, J. D. (2014). Las demostraciones geométricas como instancias de resolución de problemas. *Paradigma*, 35(2), 183-198. <https://n9.cl/kg71g>
- Larios Osorio, V. (2005). La construcción de la prueba geométrica en un ambiente de Geometría Dinámica en secundaria. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 18, 765-770.
- Larios Osorio, V. (2015). La construcción continua de la demostración como medio para enseñar y aprender a validar matemáticamente. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. 2-5, 11-12. <https://n9.cl/t8ifv>

- Larios Osorio, V. (2018). Un estudio exploratorio de los esquemas que emplean los alumnos de bachillerato para validar resultados matemáticos. *Transformación*, 14(2), 190-201. <https://n9.cl/3736pf>
- Leung, A., y Bolite-Frant, J. (2021). Designing Mathematics Tasks: The Role of Tools. *Task Design In Mathematics Education an ICMI study*, 22, 191-221. <https://doi.org/pv6h>
- Marmolejo, E. y Solano, M. (2005). Convención didáctica sobre la demostración geométrica. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, 139-145.
- Misfeldt, M. (2007). Idea Generation during mathematical writing: Hard work or a process of discovery? En D. Pitta Pantazi, y G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1240–1249). <https://n9.cl/k42n8>
- Miyasaki, M. (2000). What are essentials to apply the «discovery» function of proof in lower secondary school mathematics? *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, 4(24), 1-8.
- Monroy, A. A., y Astudillo, M. T. G. (2010). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de una caso. *Enseñanza de las ciencias*, 28(1), 73-84. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3622>
- Monzón Laurencio, L. A. (2011). Argumentación: objeto olvidado para la investigación en México. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 2(13), 50.
- Morgan, C., Craig, T., Schuette, M. et al. (2014). Language and communication in mathematics education: An overview of research in the field. *ZDM – Mathematics Education*, 46(6), 843–853. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0624-9>
- Muñoz, C. (2011). *Cómo elaborar y asesorar una investigación de tesis*. Pearson Educación.
- Onyeka, E. C., y Okoye, G. N. (2023). Effectiveness of demonstration teaching method on students' academic achievement in mathematics in rivers state nigeria. *African Journal of Educational Management, Teaching and Entrepreneurship Studies*, 8(2), 32-42. <https://n9.cl/wkp1m>
- Orrantia, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Revista Psicopedagogía*, 23(71), 158-180. <https://bit.ly/44HlnLP>
- Ortiz Granja, D. (2015). El constructivismo como teoría y método de enseñanza. *Sophia, Colección de Filosofía de la Educación*, 19, 93-110.
- Papalia, D., Wendkos, S. y Duskin, R. (2007). *Desarrollo humano*. McGraw-Hill Interamericana.
- Pape, S. J., y Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory Into Practice*, 40(2), 118–127. <https://doi.org/fkj3bj>
- Patton, M. Q. (1980). *Qualitative Evaluation Methods*. Sage Publications.
- Peraça, G., y Montoito, R. (2023). Creativity and creative thinking: a practical study on the models of Wallas and Hadamard. *Zetetiké*, 31, 4-7. <https://doi.org/pv26>
- Planas, N., Morgan, C., y Schütte, M. (2018). Mathematics education and language: Lessons and directions from two decades of research. *Educational Studies in Mathematics*, 101(1), 1–13. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9872-7>

- Puga Peña, L. A., Rodríguez Orozco, J. M., y Toledo Delgado, A. M. (2016). Reflexiones sobre el lenguaje matemático y su incidencia en el aprendizaje significativo. *Colección de Filosofía de la Educación*, 20, 197–218. <https://doi.org/10.17163/soph.n20.2016.09>
- Pulungan, S. A. (2021). Application Of Demonstration Method To Improve Mathematics Learning Achievement Of Class 1 Students SD 0511 Batang Tangel Jas TP 2020/2021. *Indonesian Journal of Basic Education*, 4(2), 247-254.
- Radford, L. (2010). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 237–268. <https://doi.org/cxhqxh>
- Ramírez, D., Hernández, J. (2017). El aprendizaje de la demostración en las cónicas. En Serna, L. A. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 218-226.
- Rav, Y. (1999). Why Do We Prove Theorems?. *Philosophia Mathematica*, 7(1), 5–41. <https://doi.org/10.1093/philmat/7.1.5>
- Resnik, M. D. (1981). Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference. *Noûs*, 15(4), 529. <https://doi.org/10.2307/2214851>
- Retnowati, E. (2014). *Psychology of mathematics learning: constructing knowledge* [Disertación de doctorado]. Universidad del Estado de Yogyakarta.
- Richman F., Hersh R. (1998). What is Mathematics, Really?, *Philosophia Mathematica*, 6(2). 245–255. <https://doi.org/10.1093/philmat/6.2.245>
- Rocha, H. (2019). Mathematical proof: from mathematics to school mathematics. *Physical and Engineering Sciences*, 377. <https://doi.org/10.1098/rsta.2018.0045>
- Ruíz, D., y García, M. (2003). El lenguaje como mediador en el aprendizaje de la aritmética en la primera etapa de educación básica. *Educere*, 7(23), 321-327. <https://n9.cl/l7wxc>
- Sackur, C., Drouhard, J. P, y Maurel, M. (2000). Experiencing the necessity of a mathematical statement. *PME*, 24. <http://dx.doi.org/10.13140/2.1.3052.8801>
- Sáenz Castro, C. (2002). Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas. En M. F. Moreno, et al. (Eds.), *Actas del Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. 47-62.
- Samosir, A. y Nanda F. A. (2022). The Influence of Demonstration Methods with Media on Mathematics Learning Outcomes SDN 091546 Unong Manik, Simalungun Regency. *International Journal of Educational Research Excellence*, 1(2), 245–247. <https://doi.org/pv6t>
- Santos Trigo, M. (2021). Resolución de Problemas Matemáticos y Tecnologías Digitales: Agenda de Investigación y desarrollos. 205-222 <https://n9.cl/06u3j>
- Secretaría de Educación Pública. (2023). Programa de estudios del Recurso Sociocognitivo: Pensamiento Matemático I. <https://dgb.sep.gob.mx/programas-de-estudio>
- Secretaría de Educación Pública. (s.f.). Bachillerato General. Dirección General del Bachillerato. <https://dgb.sep.gob.mx/bachillerato-general>
- Secretaría de Educación Pública. (s.f.). Programa de estudios del componente básico del marco curricular común de la educación media superior. Cálculo Diferencial.
- Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.

- Stylianides, A. J., y Stylianides, G. J. (2007). Learning mathematics with understanding: A critical consideration of the learning principle in the Principles and Standards for School Mathematics. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 4(1), 103–114. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1063>
- Stylianides, A. J., y Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(4), 307–332. <https://doi.org/csijh4r>
- Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching*, 127(28), 32.
- Toro, J. A. (2014). *Acercamiento a la argumentación en un ambiente de geometría dinámica: grado octavo*. [Tesis de maestría]. Universidad de Medellín.
- Torres Boy, Á. N. y Nicasio Tovar, D. (2017). Análisis del rezago matemático en alumnos de nivel medio superior. *Jóvenes en la ciencia*, 3(2), 500–504. <https://n9.cl/d6vj2>
- Vega Vega, J. C., Niño Duarte, F. y Cárdenas, Y. P. (2015). Enseñanza de las matemáticas básicas en un entorno e-Learning: un estudio de caso de la Universidad Manuela Beltrán Virtual. *Revista EAN*, (79), 172–187. <https://bit.ly/465unhl>
- Vinner, S. (2011). The role of examples in the learning of mathematics and in everyday thought processes. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 43(2), 247–256. <https://doi.org/10.1007/s11858-010-0304-3>
- Weber, K. (2009). How syntactic reasoners can develop understanding, evaluate conjectures, and generate counterexamples in advanced mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(2–3), 200–208. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.08.001>
- Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I., y Winicki-Landman, G. (2012). The Need for Proof and Proving: Mathematical and Pedagogical Perspectives. *Proof and Proving in Mathematics Education*, 15, 216–217. <https://doi.org/pv27>
- Zimmermann, W., y Cunningham, S. (1990). What is mathematical visualization? En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and mathematics*. 3.

APÉNDICES

A continuación se presentan los links que llevan al archivo en Google Drive correspondiente a cada uno de los apéndices mencionados.

Apéndice A

https://docs.google.com/document/d/1Bc9sRHR3qqNtIEFkkdaJbQ3N00OVbV2W/edit?usp=drive_link&oid=101007184424057806474&rtpof=true&sd=true

Apéndice B

https://docs.google.com/document/d/1xePJgAkMgwaws1k0lIM5s0psTqfy0Go/edit?usp=drive_link&oid=101007184424057806474&rtpof=true&sd=true

Apéndice C

https://docs.google.com/document/d/1GwDv12hA39mL4fqIO2zYPgOE-2IYz4FJ/edit?usp=drive_link&oid=101007184424057806474&rtpof=true&sd=true

Apéndice D

https://docs.google.com/document/d/1tm5X6V6HkgpFgOIC4j6r7OAKxZvFZ0tc/edit?usp=drive_link&oid=101007184424057806474&rtpof=true&sd=true

Apéndice E

https://docs.google.com/document/d/1Ms3ZUi7lodZ4EsoWq_S1pzPnnIX8uDmb/edit?usp=drive_link&oid=101007184424057806474&rtpof=true&sd=true