



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Criterio de estabilidad robusta en el sistema masa-resorte-amortiguador con derivada fraccionaria conforme general

Tesis para obtener el título de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

presenta

Iván Delgado Carmona

bajo la dirección de

Dr. Raúl Temoltzi-Ávila

Pachuca, Hidalgo, Octubre de 2025



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
School of Engineering and Basic Sciences

Mineral de la Reforma, Hgo., a 17 de octubre de 2025

Número de control: ICBI-D/1834/2025

Asunto: Autorización de impresión.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

Con Título Quinto, Capítulo II, Capítulo V, Artículo 51 Fracción IX del Estatuto General de nuestra Institución, por este medio, le comunico que el Jurado asignado al egresado de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas **Iván Delgado Carmona**, quien presenta el trabajo de titulación "**Criterio de estabilidad robusta en el sistema masa-resorte-amortiguador con derivada fraccionaria conforme general**", ha decidido, después de revisar fundamento en lo dispuesto en el Título Tercero, Capítulo I, Artículo 18 Fracción IV; dicho trabajo en la reunión de sinodales, **autorizar la impresión del mismo**, una vez realizadas las correcciones acordadas.

A continuación, firman de conformidad los integrantes del Jurado:

Presidente: Dr. Roberto Ávila Pozos

Secretario: Dr. Ronald Richard Jiménez Munguía

Vocal: Dr. Raúl Temoltzi Ávila

Suplente: Dr. José Félix Fernando Barrera Mora

Sin otro particular por el momento, reciba un cordial saludo.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

Mtro. Gabriel Vergara Rodríguez
Director del ICBI

GVR/YCC

Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P. 42184
Teléfono: 771 71 720 00 Ext. 40001
direccion_icbi@uaeh.edu.mx, vergara@uaeh.edu.mx

"Amor, Orden y Progreso"



uaeh.edu.mx

Resumen

En esta tesis se considera un sistema masa-resorte-amortiguador que admite una perturbación externa que se supone pertenece a un conjunto prefijado de funciones continuas a trozos. Se introduce una derivada fraccionaria conforme general en la ecuación diferencial de segundo orden que describe la dinámica del sistema masa-resorte-amortiguador mediante el método de fraccionalización. El problema de la máxima desviación se formula y se estudia en el sistema resultante de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales. Utilizando la solución del problema de máxima desviación, se obtiene un ciclo límite máximo, y este se utiliza para establecer un criterio de estabilidad robusta para las soluciones de la ecuación diferencial fraccionaria conforme general. Un criterio de estabilidad robusta se obtiene considerando una extensión de la definición de estabilidad bajo perturbaciones de acción constante que se usa en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Los resultados obtenidos se ilustran numéricamente.

Abstract

In this thesis we consider a mass-spring-damper system that admits a external perturbation that is assumed to belong to a prefixed set of piecewise continuous functions. The general conformable fractional derivative is introduced in the second order differential equation that describes the dynamics of the mass-spring-damper system through the fractionalization method. The maximum deviation problem is formulated and studied in the resulting system of general conformable fractional differential equations. Using the solution of the maximum deviation problem, a maximum limit cycle is obtained, and this is used to establish a robust stability criterion for the solutions of the general conformable fractional differential equation. A robust stability criterion is obtained by considering an extension of the definition of stability under constant-acting perturbations that is used in systems of ordinary differential equations. The results obtained are illustrated numerically.

Dedicatoria

A mis padres,
quienes siempre me han apoyado en cada aspecto de mi vida.

Agradecimientos

Quiero extender un agradecimiento muy particular a mi asesor, el Dr. Raúl Temoltzi Ávila, quien me apoyó todo el tiempo a lo largo de la realización de éste trabajo, del que aprendí mucho más de lo que él cree. Quien molesté en repetidas ocasiones, hasta en días no laborales. Sin embargo, siempre estuvo pendiente para escucharme y discutir conmigo el trabajo. Gracias doctor por el gran apoyo que me dió y ¡Felicidades a ambos por el buen trabajo realizado!.

De igual manera, agradezco el apoyo en la revisión de éste trabajo al Dr. Fernando Barrera Mora, con quien tuve una serie de discusiones acerca de mi trabajo, las cuales fueron bastante enriquecedoras, y no solo para ésta tesis, si no también como matemático. Y en general, a los revisores, quienes me apoyaron a mejorar esta tesis, el Dr. Ronald R. Jiménez Munguía y el Dr. Roberto Ávila Pozos.

Agradezco a Kareem García, a quien considero mi más querida amiga, por acompañarme por toda la licenciatura y sacar adelante ésto juntos, por todo el apoyo, en todos los sentidos, durante la licenciatura, muchas gracias. Y al final, lo logramos.

A mi mujer, Isabel Orozco, quien fue parte indispensable en esta recta final de mi vida en la licenciatura e inicio de mi vida profesional. Por todas las veces que tuvo la paciencia de escucharme. Gracias por apoyarme siempre y estar aquí.

Finalmente, a mis padres, a quienes les debo todo y sin ellos éste trabajo no hubiese sido posible. Gracias padres por todo, éste logro es de ustedes también, pues soy el reflejo de los grandes aprendizajes y valores que me inculcaron, así como las virtudes y habilidades que aprendí de ustedes a lo largo de mi vida.

Índice general

Resumen	v
Abstract	vii
Dedicatoria	ix
Agradecimientos	xi
Introducción	3
1. Preliminares del cálculo fraccionario	1
1.1. Introducción	1
1.2. Derivadas e integrales fraccionarias conformes	5
2. Formulación del problema de máxima desviación	19
3. Aplicación en el sistema masa-resorte-amortiguador con cálculo fraccionario conforme general	25
3.1. Introducción	25
3.2. Formulación del problema	26
3.3. Problema de máximas desviaciones	27
3.3.1. Algunas propiedades del tubo de alcanzabilidad $F(\mathbf{p}_0)$	29
3.3.2. Algunas propiedades del tubo de alcanzabilidad $F(\mathbf{p}_1)$	33
3.3.3. Algunas propiedades de los tubos de alcanzabilidad $F(\mathbf{p}_k)$	37
4. Criterio de estabilidad robusta	41
A. Código en Octave	49
Conclusión	53
Bibliografía	55

Introducción

El objetivo de las ecuaciones diferenciales es servir de instrumento para estudiar los cambios en el mundo físico. En la teoría de sistemas dinámicos, se busca estudiar y modelar matemáticamente diversos procesos físicos relevantes. Una de las áreas de aplicación son las oscilaciones mecánicas que hacen uso de dichas ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, fenómenos como el movimiento de una masa unida a un resorte, las oscilaciones de torsión en un eje con un volante, las oscilaciones descritas por un amortiguador en un automóvil, el flujo de corriente en un circuito en serie, entre otros más. Dichos planteamientos pueden describirse mediante la solución de un problema de valor inicial simple de la forma

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = g(t), \quad x(0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = x'_0, \quad (1)$$

cuyo modelo es muy estudiado, por ejemplo, en textos como Devaney *et al.* (1999); Boyce y DiPrima (2002), en los cuales se estudia el comportamiento de sus soluciones. Esto ilustra que *muchos problemas físicos, al ser planteados matemáticamente, son idénticos*. Al estudiar las soluciones de la ecuación (1), un problema válido para abordar es el de buscar la estabilidad robusta de dichas soluciones, es decir, si el sistema original sin perturbaciones tiene soluciones estables, entonces, al agregar una perturbación externa (muchas veces desconocida), las soluciones siguen manteniendo su carácter de estabilidad dentro de ciertos límites.

En este trabajo se presenta un criterio de estabilidad robusta en un sistema masa-resorte-amortiguador empleando el cálculo fraccionario conforme general, y que se obtiene a partir del problema de valores iniciales (1) al introducir derivadas fraccionarias conformes generales. Un método que a veces se utiliza para introducir derivadas fraccionarias en ecuaciones diferenciales ordinarias de orden entero, consiste en reemplazar las derivadas enteras con derivadas fraccionarias. Este procedimiento se denomina *método de fraccionalización*, ver Rosales *et al.* (2011). Este método, de sustituir derivadas enteras por derivadas fraccionarias en una ecuación diferencial ordinaria, ha sido ampliamente considerado en la literatura, y algunos casos particulares son los siguientes: un análisis de las soluciones de un oscilador mecánico descrito por una ecuación diferencial fraccionaria llevado a cabo en Gómez-Aguilar *et al.* (2012b), una ecuación diferencial fraccionaria que describe el comportamiento de un proyectil bidimensional en un medio resistivo es considerado en Rosales *et al.* (2014), la velocidad vertical de un cuerpo en caída libre estudiado

en Ebaid *et al.* (2017), y la ecuación diferencial fraccionaria conforme que describe la ley de enfriamiento de Newton es analizado en Ortega y Rosales (2018).

En vista de ello, el contenido de la tesis es el siguiente. En el Capítulo 1 se muestra una introducción al cálculo fraccionario, el cual se caracteriza por el hecho de que las derivadas e integrales utilizadas tienen orden fraccionario. Se presentan también algunas propiedades y definiciones de la derivada e integral fraccionaria conforme general, y algunas propiedades tales como los teoremas que corresponden a versiones de los teoremas fundamentales del cálculo para derivadas fraccionarias conformes generales. Con el objetivo de construir un criterio de estabilidad robusta, se busca resolver el problema de máxima desviación para el sistema masa-resorte-amortiguador, con lo cual, en el Capítulo 2 se aborda la construcción geométrica general de un conjunto de alcanzabilidad correspondiente al sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales con perturbaciones externas. La mayor parte de este capítulo se basa en lo expuesto en Temoltzi-Ávila (2024) para la construcción de conjuntos de alcanzabilidad para ecuaciones diferenciales de orden entero. En el Capítulo 3 se realiza un estudio del sistema ya mencionado con cálculo fraccionario conforme general, en donde se analiza la existencia y propiedades de un ciclo límite para dicho sistema. Finalmente, en el Capítulo 4 se establece un criterio de estabilidad robusta en la ecuación diferencial fraccionaria conforme resultante de la fraccionalización. El criterio de estabilidad robusta se obtiene mediante una extensión del concepto de estabilidad bajo perturbaciones de acción constante, introducido por G. N. Duboshin e I. G. Malkin, el cual se aplica regularmente a ecuaciones diferenciales con derivadas de orden entero, véase Elsgoltz (1969).

Finalmente, se comenta que los resultados principales de este trabajo de tesis se presentan en Delgado-Carmona y Temoltzi-Ávila (2025).

Capítulo 1

Preliminares del cálculo fraccionario

1.1. Introducción

Se sabe que el cálculo fraccionario tiene sus orígenes en 1695, debido a un intercambio de cartas entre L'Hôpital y Leibniz, en el cual se discutió el significado de la derivada $\frac{d^n}{dx^n}$ cuando $n = \frac{1}{2}$, ver Oldham y Spanier (1974). Como consecuencia de este evento histórico, se han considerado varias definiciones de derivadas fraccionarias, entre las cuales se encuentran las definiciones de Riemann–Liouville, Grunwald–Letnikov, Caputo, Riesz, Riesz–Caputo, Atangana–Baleanu, Weyl, etc.; ver Caponetto *et al.* (2014) y Sales Teodoro *et al.* (2019). Una característica principal de estas definiciones es que no cumplen algunas reglas tradicionales del cálculo clásico, por ejemplo, algunas de estas definiciones no satisfacen la regla del producto, la regla del cociente o la regla de la cadena.

Después del acontecimiento sobre el intercambio de cartas de L'Hôpital y Leibniz, no es hasta el siglo XVIII que matemáticos destacados como Euler y los hermanos Bernoulli exploraron conceptos relacionados. Euler desarrolló una extensión del factorial para números racionales mediante la función gamma, un avance crucial para el desarrollo del cálculo fraccionario, mientras que, en Sánchez-Muñoz (2011), se expone que Johann Bernoulli investigó derivadas fraccionarias de funciones exponenciales, mientras que Daniel Bernoulli aplicó estos conceptos al estudio de la cuerda vibrante. El siglo XIX marcó el inicio de la formalización del cálculo fraccionario. Laplace mencionó derivadas de orden fraccionario en su trabajo “Théorie Analytique des Probabilités” de 1812, y Lacroix habló sobre la derivada de orden arbitrario, además extendió la integral definida a órdenes fraccionarios en 1819. Fourier, en 1822, introdujo una definición de derivada fraccionaria en el contexto del análisis de la transferencia de calor. En 1823, Niels Henrik Abel utilizó derivadas fraccionarias para resolver el problema de la tautócrona, marcando una de las primeras aplicaciones concretas de esta teoría, ver Vinagre y Monje (2006). Posteriormente, Joseph Liouville contribuyó significativamente al definir la derivada fraccionaria para funciones representadas mediante series exponenciales. Inspirado por estos avances, Riemann formuló en 1847 la integral fraccionaria que lleva su nombre, sentando las bases del enfoque Riemann–Liouville. Para 1867 Grunwald presentó su propia definición de de-

2 Preliminares del cálculo fraccionario

rivada fraccionaria. Durante el siglo xx, el cálculo fraccionario continuó evolucionando. Weyl definió la integración fraccionaria para funciones periódicas en 1917, mientras que Marchaud propuso una definición basada en diferencias finitas en 1927. En la segunda mitad del siglo, matemáticos como Kolmogorov y otros consolidaron la teoría del cálculo fraccionario moderno. En este mismo siglo, en 1969, el físico matemático Michele Caputo propone una nueva definición de derivada fraccionaria. En el siglo xxi, el cálculo fraccionario ha experimentado un auge en sus aplicaciones, desde el modelado de fenómenos físicos complejos, hasta el análisis de sistemas dinámicos no lineales. Las investigaciones de Anatoli Kilbas, Srivastava, Baleanu, Victor Tarasov y otros han enriquecido la teoría, demostrando la relevancia de esta rama del análisis matemático. Para explorar más sobre el contexto histórico del cálculo fraccionario, se sugiere revisar el artículo de Lozada-Coronel *et al.* (2024).

En lo siguiente se muestra un método habitualmente usado en el cálculo fraccionario para obtener, en un caso particular, los operadores de integración y derivación en el sentido de Riemann–Liouville. Este consiste en obtener primero una integral fraccionaria y, posteriormente, la derivada fraccionaria de una función. Con dicho objetivo, sigamos el siguiente razonamiento de manera breve, expuesto en más detalle en Miller y Ross (1993).

Consideremos el operador integral usual ${}_a I_t$ definido por

$$({}_a I_t p)(t) = \int_a^t p(s) ds.$$

Sabemos del cálculo tradicional que el operador integral de una función p puede ser considerado como el operador inverso de la diferenciación, es decir

$$\frac{d}{dt}({}_a I_t p)(t) = p(t).$$

Si el operador ${}_a I_t$ se aplica n -veces a $p(t)$, es decir, si consideramos el operador definido por $({}_a I_t^n p)(t) = ({}_a I_t({}_a I_t^{n-1} p))(t)$ para $n \geq 2$, entonces se obtiene

$$({}_a I_t^n p)(t) = \int_a^t \int_a^{t_1} \cdots \int_a^{t_{n-1}} p(t_0) dt_0 dt_1 \cdots dt_{n-1}.$$

El uso de la fórmula de integración repetida de Cauchy se puede utilizar para reducir la expresión anterior a una única integral

$$({}_a I_t^n p)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} p(s) ds.$$

En este punto podemos decir que se obtiene la integral de orden n para la función p , es decir, se itera el operador integral n -veces. Si recordamos que $(n-1)! = \Gamma(n)$, donde $\Gamma(t)$ es la función gamma definida por

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty s^{t-1} e^{-s} ds,$$

en la expresión anterior se obtiene el siguiente operador integral:

$$({}_a I_t^n p)(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-s)^{n-1} p(s) ds.$$

La contribución de los trabajos de Riemann y de Liouville al cálculo fraccionario consistió en analizar las propiedades de este operador al substituir el valor de n por α con $0 < \alpha \leq 1$. Al operador resultante se le llama operador integral fraccionario de Riemann–Liouville de lado izquierdo, entendiendo que α es el orden de dicho operador. En tal caso, la integral de Riemann–Liouville de lado izquierdo de una función p de orden α resulta ser

$$({}^{RL}I_t^\alpha p)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} p(s) ds.$$

Empleando un razonamiento similar se puede obtener la integral de Riemann–Liouville de lado derecho de una función p de orden α , definida como

$$({}^{RL}I_b^\alpha p)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} p(s) ds.$$

Siguiendo el razonamiento de que los operadores derivada e integral son inversos uno del otro, se llega a que la derivada fraccionaria de Riemann–Liouville de lado izquierdo de orden $\alpha \in (0, 1)$ de una función p es

$$({}^{RL}D_t^\alpha p)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} p(s) ds,$$

mientras que la derivada fraccionaria de Riemann–Liouville de lado derecho de orden $\alpha \in (0, 1)$ de una función p es

$$({}^{RL}D_b^\alpha p)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} p(s) ds.$$

Adicionalmente, para cada $n \in \mathbb{N}$, se puede obtener la derivada fraccionaria de Riemann–Liouville de lado izquierdo de orden $\alpha \in (n-1, n)$ de una función p como

$$({}^{RL}D_t^\alpha p)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} p(s) ds,$$

y la derivada fraccionaria de Riemann–Liouville de lado derecho de orden $\alpha \in (n-1, n)$ de una función p como

$$({}^{RL}D_b^\alpha p)(b) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} p(s) ds.$$

En general, a lo largo de la historia se han empleado otros métodos para obtener otras propuestas de operadores fraccionarios. A continuación se hace un breve recuento de algunas definiciones de derivada fraccionaria de orden $\alpha \in (n-1, n)$, las cuáles son tomadas de Sales Teodoro *et al.* (2019).

4 Preliminares del cálculo fraccionario

- Derivada de Grunwald–Letnikov de lado izquierdo

$$({}^{GL}D_{a^+}^{\alpha}p)(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)p(t+kh)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)}, \quad nh = t - a.$$

- Derivada de Riemann–Liouville de lado izquierdo

$$({}^{RL}D_{a^+}^{\alpha}p)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} p(s) ds, \quad a \leq t.$$

- Derivada de Caputo de lado izquierdo

$$({}^CD_{a^+}^{\alpha}p)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{ds^n} (p(s)) ds, \quad a \leq t.$$

Existen también propuestas de definiciones de derivada de lado derecho, y se definen de manera análoga.

- Derivada de Weyl

$$({}_tD_{\infty}^{\alpha}p)(t) = (-1)^m \left(\frac{d}{ds} \right)^m ({}_tW_{\infty}^{\alpha}p)(t),$$

donde

$$({}_tW_{\infty}^{\alpha}p)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{\infty} (s-t)^{\alpha-1} p(s) ds.$$

- Derivada de Riesz

$$({}_tD_t^{\alpha}p)(t) = -\frac{1}{2 \cos(\alpha\pi/2)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_{-\infty}^t (t-s)^{n-\alpha-1} p(s) ds + \int_t^{\infty} (s-t)^{n-\alpha-1} p(s) ds \right).$$

- Derivada de Atangana–Baleanu expresada en el sentido de Caputo

$$({}^{ABC}D_t^{\alpha}p)(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t p'(s) E_{\alpha} \left(-\alpha \frac{(t-s)^{\alpha}}{1-\alpha} \right) ds, \quad a < t < b,$$

donde

$$E_{\alpha}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{\Gamma(m\alpha+1)},$$

representa la función de Mittag–Leffler clásica con un parámetro α , y $B(\alpha)$ denota una función que cumple con la condición $B(0) = 1 = B(1)$.

A partir de lo anterior, se observa que el cálculo fraccionario se caracteriza por el hecho de que las derivadas e integrales utilizadas tienen orden fraccionario.

En los últimos años, Khalil y sus colaboradores introdujeron el concepto de derivada fraccionaria conforme en Khalil *et al.* (2014). La derivada fraccionaria conforme es interesante debido a la cantidad de resultados que se han obtenido, dado que algunos problemas en los que se consideran ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes pueden modelarse de manera más precisa; ver Abdeljawad (2015). Además, el estudio de las propiedades y aplicaciones de la derivada fraccionaria conforme ha captado la atención de varios investigadores. En particular, existe un interés en estudiar las características principales de las soluciones de ecuaciones diferenciales cuando se consideran derivadas fraccionarias conformes; ver por ejemplo Souahi *et al.* (2017), Bayour y Torres (2017), Zhong y Wang (2018) y Öğrekçi *et al.* (2021). Se han introducido otras extensiones al concepto de derivada fraccionaria conforme, algunos casos particulares se pueden consultar en Almeida *et al.* (2016), Zhao y Luo (2017), Abu-Shady y Kaabar (2021) y Kajouni *et al.* (2021). En este trabajo se presenta el concepto de *derivada fraccionaria conforme general* introducido en Zhao y Luo (2017) y se analizan sus propiedades principales. Este concepto generaliza el concepto de derivada fraccionaria conforme discutido en Khalil *et al.* (2014). Dicha derivada satisface muchas de las propiedades bien conocidas para la derivada de orden entero, de ahí la razón de su consideración en este trabajo. Como dato adicional, en Kiskinov *et al.* (2021) se menciona la existencia de más de cien trabajos de investigación en los últimos años en los que se emplea esta derivada, sin embargo, al ser de tipo local, diversos autores la denominan *derivada conforme* o *derivada tipo fraccionario*, en lugar de derivada fraccionaria conforme.

1.2. Derivadas e integrales fraccionarias conformes

Esta sección resume las propiedades de la derivada fraccionaria conforme general introducida en Zhao y Luo (2017).

Definición 1.1 (Zhao y Luo 2017). Sea $\hat{\Phi}$ el conjunto formado por las funciones continuas $\varphi: [0, \infty) \times (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen

- $\varphi(t, 1) = 1$ para todo $t > 0$,
- $\varphi(t, \alpha) \neq 0$ para todo $(t, \alpha) \in (0, \infty) \times (0, 1]$,
- $\varphi(\cdot, \alpha) \neq \varphi(\cdot, \beta)$, donde $\alpha \neq \beta$ y $\alpha, \beta \in (0, 1]$.

Se denota además la función constante por $\varphi_0(t, \alpha) \equiv 1$. A las funciones que pertenecen al conjunto $\Phi = \hat{\Phi} \cup \{\varphi_0\}$ se les llamará *funciones fraccionarias conformes*.

Definición 1.2 (Zhao y Luo 2017). Sean $0 \leq a < b$ y $\varphi: [0, \infty) \times (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función fraccionaria conforme. La derivada fraccionaria conforme general de lado izquierdo de

6 Preliminares del cálculo fraccionario

orden α de una función $p: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$({}_a D_t^{\alpha, \varphi} p)(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{p(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - p(t)}{\epsilon}$$

siempre que el límite exista para todo $t \in (a, b)$ y $\alpha \in (0, 1]$. En tal caso, decimos que p es α -diferenciable de lado izquierdo. Por otra parte, si $({}_a D_t^{\alpha, \varphi} p)(t)$ existe para todo $t \in (a, b)$, entonces

$$({}_a D_t^{\alpha, \varphi} p)(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} ({}_a D_t^{\alpha, \varphi} p)(t), \quad ({}_a D_t^{\alpha, \varphi} p)(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} ({}_a D_t^{\alpha, \varphi} p)(t).$$

La integral fraccionaria conforme general de lado izquierdo de p de orden $\alpha \in (0, 1]$ se define como

$$({}_a I_t^{\alpha, \varphi} p)(t) = \int_a^t \frac{p(s)}{\varphi(s, \alpha)} ds,$$

siempre que la integral exista para todo $t \in (a, b)$ y $\alpha \in (0, 1]$. En tal caso, decimos que p es α -integrable de lado izquierdo.

Se observa que para $\alpha = 1$ y $\varphi(t, \alpha) = 1$, la α -derivada de lado izquierdo se reduce a la derivada ordinaria de primer orden, y la α -integral de lado izquierdo se reduce a la integral ordinaria de primer orden. Más adelante se muestran algunos ejemplos en los que se determina la α -derivada de lado izquierdo y la α -integral de lado izquierdo de algunas funciones.

Nota. Los siguientes supuestos se considerarán a lo largo de este trabajo.

- Se utilizará el término “ α -diferenciable” para funciones que son α -diferenciables de lado izquierdo y, de la misma manera, se utilizará el término “ α -integrable” para funciones que son α -integrables de lado izquierdo.
- Haciendo un abuso de notación, en adelante se empleará ${}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t)$ para hacer referencia a $({}_a D_t^{\alpha, \varphi} p)(t)$, de igual manera, se empleará ${}_a I_t^{\alpha, \varphi} p(t)$ para referirse a $({}_a I_t^{\alpha, \varphi} p)(t)$. Cuando $a = 0$ se escribe ${}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t)$ como ${}_0 D_t^{\alpha, \varphi} p(t)$ y ${}_a I_t^{\alpha, \varphi} p(t)$ como ${}_0 I_t^{\alpha, \varphi} p(t)$.
- Se denotará por $C_\varphi^1([a, b])$ el conjunto de funciones que son α -diferenciables de lado izquierdo en $[a, b]$ y tal que ${}_a D_t^{\alpha, \varphi} p$ es continua en $[a, b]$. De manera análoga, se denota por $R_\varphi([a, b])$ el conjunto de funciones que son α -integrables de lado izquierdo. A lo largo de este trabajo se supondrá que las funciones a considerar pertenecen a dichos conjuntos.

Existe un concepto de derivada fraccionaria conforme general de lado derecho e integral fraccionaria conforme general de lado derecho que se define de forma análoga, ver Zhao y Luo (2017). En general, el uso de esta derivada está enfocada en el análisis de problemas en tiempo inverso.

Una propiedad de la derivada conforme que se muestra en Atangana *et al.* (2015) es que, en general, si $\alpha, \beta \in (0, 1]$, entonces

$${}_a D_t^{\alpha, \varphi} {}_a D_t^{\beta, \varphi} p(t) \neq {}_a D_t^{\alpha+\beta, \varphi} p(t), \quad t \in (a, b).$$

Las siguientes propiedades de funciones α -diferenciables se satisfacen.

Teorema 1.3 (Zhao y Luo 2017). Si $p: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es α -diferenciable en $t_0 \in (a, b)$, $\alpha \in (0, 1]$, entonces p es continua en t_0 .

Demostración. Se observa que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (p(t_0 + \epsilon \varphi(t_0, \alpha)) - p(t_0)) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{p(t_0 + \epsilon \varphi(t_0, \alpha)) - p(t_0)}{\epsilon} \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \\ &= {}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t) \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon = 0. \end{aligned}$$

Se concluye que al elegir $k = \epsilon \varphi(t_0, \alpha)$, se cumple $\lim_{k \rightarrow 0} p(t_0 + k) = p(t_0)$, es decir, p es continua en t_0 . $\square$

Teorema 1.4 (Zhao y Luo 2017). Sea $\alpha \in (0, 1]$ y sean p y q funciones α -diferenciables en un punto $t_0 \in (a, b)$. Entonces

(a) Si $p(t) \equiv k$, $k = \text{const}$, entonces ${}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t) \equiv 0$.

(b) Para todo $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ se cumple

$${}_a D_t^{\alpha, \varphi} (k_1 p + k_2 q)(t) = k_1 {}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t) + k_2 {}_a D_t^{\alpha, \varphi} q(t).$$

(c) ${}_a D_t^{\alpha, \varphi} (p \cdot q)(t) = p(t) \cdot {}_a D_t^{\alpha, \varphi} q(t) + q(t) \cdot {}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t)$.

(d) ${}_a D_t^{\alpha, \varphi} \left(\frac{p}{q} \right) (t) = \frac{q(t) \cdot {}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t) - p(t) \cdot {}_a D_t^{\alpha, \varphi} q(t)}{q^2(t)}$.

(e) Si p es diferenciable en $t \in (a, b)$, entonces p es α -diferenciable en $t \in (a, b)$ y

$${}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t) = \varphi(t, \alpha) \frac{dp}{dt}(t).$$

Demostración. Sea $p(t) \equiv k$ con $k = \text{const}$, entonces se sigue que

$${}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{p(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - p(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{k - k}{\epsilon} = 0,$$

esto muestra (a). Sean ahora $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ y sean p y q funciones α -diferenciables, entonces se obtiene

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{\alpha, \varphi} (k_1 p + k_2 q)(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(k_1 p + k_2 q)(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - (k_1 p + k_2 q)(t)}{\epsilon} \\ &= k_1 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{p(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - p(t)}{\epsilon} + k_2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - q(t)}{\epsilon} \\ &= k_1 {}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t) + k_2 {}_a D_t^{\alpha, \varphi} q(t), \end{aligned}$$

8 Preliminares del cálculo fraccionario

lo cual muestra (b). De manera análoga se tiene

$$\begin{aligned}
 {}_a D_t^{\alpha, \varphi} (p \cdot q)(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(p \cdot q)(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - (p \cdot q)(t)}{\epsilon} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{p(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) \cdot q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - p(t) \cdot q(t)}{\epsilon} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{-p(t)q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) + p(t)q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha))}{\epsilon} \right) \\
 &= p(t) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - q(t)}{\epsilon} + \\
 &\quad + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{p(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - p(t)}{\epsilon} \cdot q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) \right) \\
 &= p(t) {}_a D_t^{\alpha, \varphi} q(t) + q(t) {}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t).
 \end{aligned}$$

Donde se ha usado el hecho de que al ser q α -diferenciable en t , entonces es continua en t (véase el Teorema 1.3), por lo tanto, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) = q(t)$, mostrando así (c). Por otra parte,

$$\begin{aligned}
 {}_a D_t^{\alpha, \varphi} \left(\frac{p}{q} \right) (t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{p}{q} \right) (t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - \left(\frac{p}{q} \right) (t)}{\epsilon} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{q(t)p(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - p(t)q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha))}{\epsilon q(t)q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha))} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{q(t)p(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - p(t)q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha))}{\epsilon q(t)q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha))} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{-p(t + \epsilon \varphi(t, \alpha))q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) + p(t + \epsilon \varphi(t, \alpha))q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha))}{\epsilon q(t)q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha))} \right) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) \frac{p(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - p(t)}{\epsilon q(t)q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha))} - \\
 &\quad - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) \frac{q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - q(t)}{\epsilon q(t)q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha))} \\
 &= \frac{1}{q(t)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{p(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - p(t)}{\epsilon} - \\
 &\quad - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{p(t + \epsilon \varphi(t, \alpha))}{q(t)q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha))} \frac{q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - q(t)}{\epsilon} \\
 &= \frac{q(t)}{q^2(t)} {}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t) - \frac{p(t)}{q^2(t)} {}_a D_t^{\alpha, \varphi} q(t) \\
 &= \frac{q(t) \cdot {}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t) - p(t) \cdot {}_a D_t^{\alpha, \varphi} q(t)}{q^2(t)}.
 \end{aligned}$$

Una vez más, se ha usado el hecho de que p y q son α -diferenciables en t , entonces son continuas en t (véase el Teorema 1.3), de esta manera, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) = q(t)$ y

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} p(t + \epsilon\varphi(t, \alpha)) = p(t)$. Esto muestra la validez de (d). Por último, de acuerdo a la definición de la derivada fraccionaria conforme general, si se considera $k = \epsilon\varphi(t, \alpha)$, entonces

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{p(t + \epsilon\varphi(t, \alpha)) - p(t)}{\epsilon} \\ &= \varphi(t, \alpha) \lim_{k \rightarrow 0} \frac{p(t + k) - p(t)}{k} \\ &= \varphi(t, \alpha) \frac{dp}{dt}(t), \end{aligned}$$

lo cual muestra (e). $\square$

La versión del teorema de Rolle para derivadas fraccionarias conformes generales es la siguiente.

Teorema 1.5 (Zhao y Luo 2017). Sea p una función dada que satisface

- p es α -diferenciable para algún $\alpha \in (0, 1]$ y cualquier $t \in [a, b]$,
- $p(a) = p(b)$.

Entonces, existe $c \in (a, b)$, tal que ${}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(c) = 0$.

Demostración. Dado que p es α -diferenciable en cualquier $t \in [a, b]$, entonces p es continua en $[a, b]$ por el Teorema 1.3. Debido a que $p(a) = p(b)$, debe existir $c \in (a, b)$ que es un punto máximo o mínimo local. Sin pérdida de generalidad, supongamos que c es un punto mínimo local. Entonces

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(c) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{p(c + \epsilon\varphi(c, \alpha)) - p(c)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \frac{p(c + \epsilon\varphi(c, \alpha)) - p(c)}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Note que el primer límite es no negativo y el segundo límite es no positivo. Por lo tanto, de la α -diferenciabilidad se sigue que ${}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(c) = 0$. $\square$

En lo que sigue se supone dada una función $\varphi(t, \alpha)$ fraccionaria conforme que satisface $\varphi(t, \alpha) > 0$ para todo $t \in [a, b]$ y $\alpha \in (0, 1]$ y tal que $\frac{1}{\varphi(t, \alpha)}$ es Riemann integrable. Se define $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$h(t) = \int_a^t \frac{1}{\varphi(s, \alpha)} ds, \quad (1.1)$$

Se observa que la función h es continua en $[a, b]$ y α -diferenciable para todo $t \in [a, b]$. De la definición de derivada fraccionaria conforme general se sigue que ${}_a D_t^{\alpha, \varphi} h(t) = 1$ para todo $t \in [a, b]$.

El correspondiente teorema del valor medio para derivadas fraccionarias conformes generales es el siguiente.

10 Preliminares del cálculo fraccionario

Teorema 1.6 (Zhao y Luo 2017). Sea $a > 0$, $p: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función α -diferenciable para algún $\alpha \in (0, 1]$ y cualquier $t \in [a, b]$, y $h(t)$ la función definida en (1.1). Entonces existe $c \in (a, b)$, tal que

$${}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(c) = \frac{p(b) - p(a)}{h(b) - h(a)}.$$

Demostración. Consideremos la siguiente función

$$g(t) = p(t) - p(a) - \frac{p(b) - p(a)}{h(b) - h(a)} (h(t) - h(a)).$$

La función g satisface las condiciones del teorema de Rolle (Teorema 1.5) para derivadas fraccionarias conformes generales. Por lo tanto, existe $c \in (a, b)$ tal que ${}_a D_t^{\alpha, \varphi} g(c) = 0$, así,

$${}_a D_t^{\alpha, \varphi} g(c) = {}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(c) - \frac{p(b) - p(a)}{h(b) - h(a)} {}_a D_t^{\alpha, \varphi} h(c) = 0.$$

Dado que ${}_a D_t^{\alpha, \varphi} h(c) = 1$, entonces

$${}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(c) = \frac{p(b) - p(a)}{h(b) - h(a)},$$

lo cual establece el resultado deseado. $\square$

Teorema 1.7 (Zhao y Luo 2017). Si p es α -diferenciable y ${}_a D_t^{\alpha, \varphi} p$ es acotada en $[a, b]$ y continua en a , entonces p es uniformemente continua en $[a, b]$ y, por lo tanto, p es acotada en $[a, b]$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Usando el Teorema 1.6 se tiene que, para $t_1, t_2 \in [a, b]$ arbitrarios, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$p(t_2) - p(t_1) = {}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(c) (h(t_2) - h(t_1)).$$

Dado que ${}_a D_t^{\alpha, \varphi} p$ es acotada en $[a, b]$, existe $M_0 > 0$ tal que $|{}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t)| \leq M_0$ para todo $t \in [a, b]$. Por lo tanto

$$|p(t_2) - p(t_1)| \leq M_0 |h(t_2) - h(t_1)|.$$

Ahora, dado que $h(t)$ es continua en $[a, b]$, entonces es uniformemente continua en $[a, b]$, por lo tanto, existe M_1 tal que $|h(t_2) - h(t_1)| \leq M_1 |t_2 - t_1|$ para todo $t_1, t_2 \in [a, b]$. De esta manera,

$$|p(t_2) - p(t_1)| \leq M |t_2 - t_1|,$$

donde $M = M_0 M_1$. De este modo, podemos escoger $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ de tal manera que si $|t_2 - t_1| < \delta$, entonces $|p(t_2) - p(t_1)| < \varepsilon$. Así, p es uniformemente continua en $[a, b]$. $\square$

La regla de la cadena para derivadas fraccionarias conformes generales es la siguiente.

Teorema 1.8 (Zhao y Luo 2017). Sea $\alpha \in (0, 1]$ y sean p y q funciones α -diferenciables en un punto $t \in (a, b)$. Entonces

$${}_a D_t^{\alpha, \varphi}(p \circ q)(t) = \frac{dp}{dt}(q(t)) \cdot {}_a D_t^{\alpha, \varphi} q(t).$$

Demostración. Por definición se sigue que

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{\alpha, \varphi}(p \circ q)(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(p \circ q)(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - (p \circ q)(t)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{p(q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha))) - p(q(t))}{q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - q(t)} \cdot \frac{q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - q(t)}{\epsilon} \right). \end{aligned}$$

Consideremos ahora una nueva función ψ definida de la siguiente manera:

$$\psi(\epsilon) = \begin{cases} \frac{p(q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha))) - p(q(t))}{q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - q(t)}, & \text{si } q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - q(t) \neq 0, \\ \frac{dp}{dt}(q(t)), & \text{si } q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - q(t) = 0. \end{cases}$$

Probemos que ψ es continua en 0. Sea pues $\varepsilon > 0$. Sabemos que p es diferenciable en $q(t)$. Esto significa que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{p(q(t) + k) - p(q(t))}{k} = \frac{dp}{dt}(q(t)).$$

Así, existe $\delta > 0$ tal que,

$$\text{si } 0 < |k| < \delta, \text{ entonces } \left| \frac{p(q(t) + k) - p(q(t))}{k} - \frac{dp}{dt}(q(t)) \right| < \varepsilon.$$

Por otra parte, q es α -diferenciable en t y, por lo tanto, es continua en t , de manera que existe $\hat{\delta} > 0$ tal que

$$\text{si } |\epsilon \varphi(t, \alpha)| < \hat{\delta}, \text{ entonces } |q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - q(t)| < \delta.$$

Se supone que $k = q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - q(t) \neq 0$, con lo cual se tiene

$$\psi(\epsilon) = \frac{p(q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha))) - p(q(t))}{q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - q(t)} = \frac{p(q(t) + k) - p(q(t))}{k}.$$

Luego, si $|\epsilon \varphi(t, \alpha)| < \hat{\delta}$, entonces

$$\left| \psi(\epsilon) - \frac{dp}{dt}(q(t)) \right| < \varepsilon.$$

Así, se ha mostrado que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi(\epsilon) = \frac{dp}{dt}(q(t))$, es decir, ψ es continua en 0. Por otra parte, si $k = q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - q(t) = 0$, entonces resulta que

$$\frac{p(q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha))) - p(q(t))}{\epsilon} = \psi(\epsilon) \cdot \frac{q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - q(t)}{\epsilon}.$$

12 Preliminares del cálculo fraccionario

Por lo tanto, volviendo a la idea inicial, se tiene

$$\begin{aligned}
 {}_a D_t^{\alpha, \varphi}(p \circ q)(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{p(q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha))) - p(q(t))}{\epsilon} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi(\epsilon) \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{q(t + \epsilon \varphi(t, \alpha)) - q(t)}{\epsilon} \\
 &= \frac{dp}{dt}(q(t)) {}_a D_t^{\alpha, \varphi} q(t).
 \end{aligned}$$

El resultado se ha mostrado. $\square$

Los siguientes dos teoremas corresponden a versiones de los teoremas fundamentales del cálculo para derivadas fraccionarias conformes generales.

Teorema 1.9 (Zhao y Luo 2017). Si p es continua en (a, b) entonces para todo $t \in (a, b)$ y $\alpha \in (0, 1]$, la siguiente igualdad se satisface ${}_a D_t^{\alpha, \varphi} {}_a I_t^{\alpha, \varphi} p(t) = p(t)$.

Demostración. Dado que p es continua, entonces ${}_a I_t^{\alpha, \varphi} p(t)$ es diferenciable. De acuerdo con el inciso (e) del Teorema 1.4, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 {}_a D_t^{\alpha, \varphi} {}_a I_t^{\alpha, \varphi} p(t) &= \varphi(t, \alpha) \frac{d}{dt} ({}_a I_t^{\alpha, \varphi} p(t)) \\
 &= \varphi(t, \alpha) \frac{d}{dt} \left(\int_a^t \frac{p(s)}{\varphi(s, \alpha)} ds \right) \\
 &= \varphi(t, \alpha) \frac{p(t)}{\varphi(t, \alpha)} \\
 &= p(t),
 \end{aligned}$$

lo cual establece el resultado. $\square$

Teorema 1.10 (Zhao y Luo 2017). Si p es diferenciable en $[a, b]$, $\alpha \in (0, 1]$, entonces ${}_a I_t^{\alpha, \varphi} {}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t) = p(t) - p(a)$.

Demostración. Dado que p es diferenciable, de acuerdo al teorema 1.4 inciso (e), resulta que

$$\begin{aligned}
 {}_a I_t^{\alpha, \varphi} {}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t) &= {}_a I_t^{\alpha, \varphi} \left(\varphi(t, \alpha) \frac{dp}{dt}(t) \right) \\
 &= \int_a^t \frac{\varphi(s, \alpha) \frac{dp}{ds}(s)}{\varphi(s, \alpha)} ds \\
 &= \int_a^t \frac{dp}{ds}(s) ds \\
 &= p(t) - p(a),
 \end{aligned}$$

lo cual muestra el resultado. $\square$

El siguiente teorema presenta un criterio para determinar cuando una función p es creciente o decreciente, introduciendo la derivada fraccionaria conforme general.

Teorema 1.11. Si ${}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t)$ existe sobre (a, b) y ${}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t) \geq 0$ (respectivamente, ${}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t) \leq 0$) para todo $t \in (a, b)$, entonces la función p es creciente (respectivamente, decreciente) en (a, b) .

Demostración. Sean $t_1, t_2 \in [a, b]$ con $t_1 < t_2$. Consideramos la función definida en (1.1) y la siguiente función

$$g(t) = p(t) - p(t_1) - \frac{p(t_2) - p(t_1)}{h(t_2) - h(t_1)} (h(t) - h(t_1)).$$

La función g satisface las condiciones del teorema de Rolle para derivadas fraccionarias conformes generales en (t_1, t_2) (véase el Teorema 1.5), es decir, g es α -diferenciable para todo $\alpha \in (0, 1]$ y $t \in (t_1, t_2)$, y además $g(t_1) = g(t_2)$. Por lo tanto, existe $t_0 \in (t_1, t_2)$ tal que ${}_a D_t^{\alpha, \varphi} g(t_0) = 0$, de donde

$${}_a D_t^{\alpha, \varphi} g(t_0) = {}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t_0) - \frac{p(t_2) - p(t_1)}{h(t_2) - h(t_1)} {}_a D_t^{\alpha, \varphi} h(t_0).$$

De lo anterior se sigue que

$${}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t_0) = \frac{p(t_2) - p(t_1)}{h(t_2) - h(t_1)}.$$

Es claro que si ${}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t_0) \geq 0$, entonces $p(t_2) \geq p(t_1)$. Por lo tanto, p es creciente en (a, b) . Análogamente, si ${}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t_0) \leq 0$, entonces $p(t_2) \leq p(t_1)$. De este modo, p es decreciente en (a, b) . $\square$

En el siguiente ejemplo se muestra como determinar la derivada fraccionaria conforme general de algunas funciones particulares. Para ello se considera la función $h(t)$ como en (1.1) y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.12. Las siguientes identidades que involucran la derivada fraccionaria conforme general de las siguientes funciones son válidas.

$$(a) \quad {}_0 D_t^{\alpha, \varphi} e^{\lambda h(t)} = \lambda e^{\lambda h(t)}$$

$$(b) \quad {}_0 D_t^{\alpha, \varphi} \sin(\lambda h(t)) = \lambda \cos(\lambda h(t))$$

$$(c) \quad {}_0 D_t^{\alpha, \varphi} \cos(\lambda h(t)) = -\lambda \sin(\lambda h(t))$$

14 Preliminares del cálculo fraccionario

Se muestra cada caso de forma directa usando el Teorema 1.4 inciso (e). Dado que la función exponencial es diferenciable, resulta que

$$\begin{aligned}
 {}_0D_t^{\alpha,\varphi} e^{\lambda h(t)} &= \varphi(t, \alpha) \frac{d}{dt} e^{\lambda h(t)} \\
 &= \varphi(t, \alpha) e^{\lambda h(t)} \frac{d}{dt} \lambda h(t) \\
 &= \varphi(t, \alpha) e^{\lambda h(t)} \frac{\lambda}{\varphi(t, \alpha)} \\
 &= \lambda e^{\lambda h(t)},
 \end{aligned}$$

esto muestra el inciso (a). Por otra parte, considerando que la función seno es diferenciable, resulta que

$$\begin{aligned}
 {}_0D_t^{\alpha,\varphi} \sin(\lambda h(t)) &= \varphi(t, \alpha) \frac{d}{dt} \sin(\lambda h(t)) \\
 &= \varphi(t, \alpha) \cos(\lambda h(t)) \frac{d}{dt} \lambda h(t) \\
 &= \varphi(t, \alpha) \cos(\lambda h(t)) \frac{\lambda}{\varphi(t, \alpha)} \\
 &= \lambda \cos(\lambda h(t)),
 \end{aligned}$$

lo cual muestra el inciso (b). Finalmente, notemos que la función coseno es diferenciable, por lo tanto

$$\begin{aligned}
 {}_0D_t^{\alpha,\varphi} \cos(\lambda h(t)) &= \varphi(t, \alpha) \frac{d}{dt} \cos(\lambda h(t)) \\
 &= \varphi(t, \alpha) (-\sin(\lambda h(t))) \frac{d}{dt} \lambda h(t) \\
 &= -\sin(\lambda h(t)) \varphi(t, \alpha) \frac{\lambda}{\varphi(t, \alpha)} \\
 &= -\lambda \sin(\lambda h(t)),
 \end{aligned}$$

lo cual muestra el inciso (c).

Es importante notar que existen funciones diferenciables, o infinitamente diferenciales, en el sentido de la derivada fraccionaria conforme general, que no lo son en el sentido tradicional. En los siguientes ejemplos, los cuales han sido adaptados de Abdeljawad (2015), se analiza este hecho. En dichos ejemplos se considera, en particular, la función $\varphi(t, \alpha) = (t - a)^{1-\alpha}$, con lo cual la derivada fraccionaria conforme de orden α de una función $r: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es

$${}_aD_t^{\alpha,\varphi} r(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{r(t + \epsilon \cdot (t - a)^{1-\alpha}) - r(t)}{\epsilon}.$$

En particular, se elige $q(t) = \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}$. Si $\varepsilon = \epsilon \cdot (t - a)^{1-\alpha}$, entonces $\epsilon = \varepsilon \cdot (t - a)^{\alpha-1}$ y,

por lo tanto,

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{\alpha, \varphi} q(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{q(t + \epsilon \cdot (t - a)^{1-\alpha}) - q(t)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(t - a + \epsilon \cdot (t - a)^{1-\alpha})^\alpha - (t - a)^\alpha}{\alpha \epsilon} \\ &= \frac{1}{\alpha (t - a)^{\alpha-1}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(t - a + \epsilon)^\alpha - (t - a)^\alpha}{\epsilon} = 1. \end{aligned}$$

De esta manera,

$${}_a D_t^{\alpha, \varphi} \frac{(t - a)^\alpha}{\alpha} = 1. \quad (1.2)$$

Esta derivada fraccionaria conforme será empleada en lo que sigue.

Ejemplo 1.13. Consideremos la función exponencial $r(t) = e^{\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}}$, donde $0 < \alpha < 1$. Veamos que la función $r(t)$ no es diferenciable en $t = a$. De acuerdo con la definición de derivada clásica se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(a+h) - r(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{(a+h-a)^\alpha}{\alpha}} - e^{\frac{(a-a)^\alpha}{\alpha}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{h^\alpha}{\alpha}} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{\alpha-1} e^{\frac{h^\alpha}{\alpha}},$$

es claro que este último límite diverge, con lo cual se muestra la no diferenciableidad de $r(t)$ en $t = a$. Veamos que r es α -diferenciable en dicho punto. Se observa que $r(t) = (p \circ q)(t)$, donde $p(t) = e^t$ y $q(t) = \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}$. Se muestra primero que dicha función es α -diferenciable en $t \in (a, \infty)$. Se sigue del inciso (e) del Teorema 1.4 que la función p es α -diferenciable en $t \in (a, \infty)$ y, haciendo uso del Teorema 1.8, resulta que

$${}_a D_t^{\alpha, \varphi} (p \circ q)(t) = \frac{dp}{dt}(q(t)) \cdot {}_a D_t^{\alpha, \varphi} q(t) = e^{\frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}},$$

y, por lo tanto,

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha, \varphi} (p \circ q)(t) = 1,$$

lo cual muestra que $r(t)$ es α -diferenciable en $t = a$.

Ejemplo 1.14. Sean $r: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $r(t) = \sin \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}$. Observemos que esta función no es diferenciables en $t = a$, ya que resulta que se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(a+h) - r(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{(a+h-a)^\alpha}{\alpha} - \sin \frac{(a-a)^\alpha}{\alpha}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h^\alpha}{\alpha}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{\alpha-1} \cos \frac{h^\alpha}{\alpha}, \end{aligned}$$

y como este límite no existe, se sigue que $r(t)$ no es diferenciable en $t = a$. Por otra parte, se observa que $r(t) = (p \circ q)(t)$, donde $p(t) = \sin t$ y $q(t) = \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}$. La función q es

16 Preliminares del cálculo fraccionario

α -diferenciable en $t \in (a, \infty)$ y, de acuerdo con el Teorema 1.4, se puede verificar que la función p también es α -diferenciable en $t \in (a, \infty)$. Por lo tanto, haciendo uso del Teorema 1.8 resulta que

$${}_a D_t^{\alpha, \varphi}(p \circ q)(t) = \frac{dp}{dt}(q(t)) \cdot {}_a D_t^{\alpha, \varphi} q(t) = \cos \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha},$$

por lo tanto,

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha, \varphi}(p \circ q)(t) = 1,$$

lo que muestra que $r(t)$ es α -diferenciable en $t = a$.

Ejemplo 1.15. Consideremos la función $r(t) = \frac{1}{1 - \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}}$, donde $0 < \alpha < 1$. Veamos que la función $r(t)$ no es diferenciable en $t = a$:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(a+h) - r(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1 - \frac{h^\alpha}{\alpha}} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{1-\alpha}(\alpha - h^\alpha)}, \end{aligned}$$

dado que $0 < \alpha < 1$, el límite anterior no existe, mostrándose así lo que se quería. Veamos que r sí es α -diferenciable en $t = a$. Se observa primero que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{r(t + \epsilon \cdot (t-a)^{1-\alpha}) - r(t)}{\epsilon} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1 - \frac{(t+\epsilon \cdot (t-a)^{1-\alpha})^\alpha}{\alpha}} - \frac{1}{1 - \frac{t^\alpha}{\alpha}}}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{\alpha}{\alpha - (t+\epsilon \cdot (t-a)^{1-\alpha})^\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha - t^\alpha}}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha(\alpha - t^\alpha) - \alpha(\alpha - (t + \epsilon \cdot (t-a)^{1-\alpha})^\alpha)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha((t + \epsilon \cdot (t-a)^{1-\alpha})^\alpha - t^\alpha)}{\epsilon} \\ &= \frac{\alpha}{(t-a)^{\alpha-1}} \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(t + \epsilon)^\alpha - t^\alpha}{\epsilon} \\ &= \frac{\alpha^2(t-a)^{1-\alpha}}{t^{1-\alpha}}, \end{aligned}$$

es decir,

$${}_a D_t^{\alpha, \varphi} r(t) = \frac{\alpha^2(t-a)^{1-\alpha}}{t^{1-\alpha}}.$$

Al considerar el límite $t \rightarrow a$ en la expresión anterior, resulta que la función $r(t)$ es α -diferenciable en $t = a$.

Se termina este apartado con la siguiente observación que será empleada más adelante. Se supone que $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una trayectoria definida como $\gamma(t) = (p(t), q(t))^\top$, donde el símbolo $^\top$ se emplea para denotar transposición, y donde p y q se asume son α -diferenciables en $t \in (a, b)$. De acuerdo con la definición de α -derivada, se puede extender la definición de la α -derivada de la trayectoria $\gamma(t)$ como

$${}_a D_t^{\alpha, \varphi} \gamma(t) = ({}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t), {}_a D_t^{\alpha, \varphi} q(t))^\top, \quad t \in (a, b).$$

En tal caso, el argumento de la α -derivada ${}_a D_t^{\alpha, \varphi} \gamma(t)$ es la expresión

$$\arg {}_a D_t^{\alpha, \varphi} \gamma(t) = \arctan \left(\frac{{}_a D_t^{\alpha, \varphi} q(t)}{{}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t)} \right), \quad t \in (a, b),$$

a condición de que ${}_a D_t^{\alpha, \varphi} p(t) \neq 0$ para $t \in (a, b)$.

Capítulo 2

Formulación del problema de máxima desviación

En este capítulo se abordará la construcción geométrica del conjunto de alcanzabilidad Q de un sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales con perturbaciones externas. La mayor parte de este capítulo se basa en lo que se expone en Temoltzi-Ávila (2024) para la construcción de los conjuntos de alcanzabilidad para ecuaciones diferenciales de orden entero.

Sean los semiplanos

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad \mathbb{R}_-^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\},$$

en los cuales se considera la dinámica descrita por el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\alpha, \varphi} x &= f_1(x, y, u(t)) = m_{11}x + m_{12}y + b_1u(t), \\ {}_0D_t^{\alpha, \varphi} y &= f_2(x, y, u(t)) = m_{21}x + m_{22}y + b_2u(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde la función $u(t)$ es una perturbación externa que se supone pertenece a un conjunto $\mathcal{U}$ de funciones prefijado. Ahora, el vector de condiciones iniciales de (2.1) está dado por

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} -a_0^{\text{máx}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_0^{\text{máx}} > 0.$$

Para cada elección de la perturbación externa $u(t) \in \mathcal{U}$, las soluciones de (2.1) con las condiciones iniciales dadas, definen una trayectoria que se denota por $\gamma_u(t) = (x(t), y(t))^T$ para cada $t \geq 0$. Se tiene así que $\gamma_u(0) = \mathbf{p}_0$.

Suponemos que $f_1(x, y, u(t)) > 0$ para cualquier perturbación $u(t) \in \mathcal{U}$, de tal manera que cuando se incrementa el tiempo $t \geq 0$, la función $x(t)$ de la trayectoria $\gamma_u(t) = (x(t), y(t))^T$ se incrementa también desde $\mathbf{p}_0$. En particular, suponemos el caso en el que existe un intervalo $[0, \tau]$ con $\tau > 0$, tal que para cualquier perturbación externa $u(t) \in \mathcal{U}$ arbitraria, la trayectoria $\gamma_u: [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que inicia desde el punto $\mathbf{p}_0$ (y que es

20 Formulación del problema de máxima desviación

definida en el sentido de Filippov, ver Temoltzi-Ávila (2024)), interseca a la recta $y = 0$ por segunda vez en algún tiempo $t_u \in [0, \tau]$ en un punto de la forma

$$\gamma_u(t_u) = \begin{bmatrix} x(t_u) \\ 0 \end{bmatrix},$$

el cual depende de la elección $u(t) \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, para cada $t \in [0, t_u]$, se sigue que $\gamma_u(t) \in \mathbb{R}_+^2$. La Figura 2.1 muestra dos trayectorias $\gamma_{u^*}(t)$ y $\gamma_{u^{**}}(t)$ que cumplen los supuestos considerados para dos funciones $u^*(t), u^{**}(t) \in \mathcal{U}$.

Definamos $S(\mathbf{p}_0)$ como el conjunto de los puntos de la forma $\gamma_u(t_u)$ tal como se acaban de definir y que depende de la función elegida $u(t) \in \mathcal{U}$, es decir,

$$S(\mathbf{p}_0) = \bigcup_{u(t) \in \mathcal{U}} \gamma_u(t_u).$$

Dicho conjunto $S(\mathbf{p}_0)$ es llamado *segmento lineal de alcanzabilidad a partir de $\mathbf{p}_0$* . Además note que $S(\mathbf{p}_0) \subset \partial \mathbb{R}_-^2 \cap \partial \mathbb{R}_+^2$. En la Figura 2.1 se representa una interpretación de dicho conjunto y las dos trayectorias solución asociadas a las funciones $u^*(t), u^{**}(t) \in \mathcal{U}$.

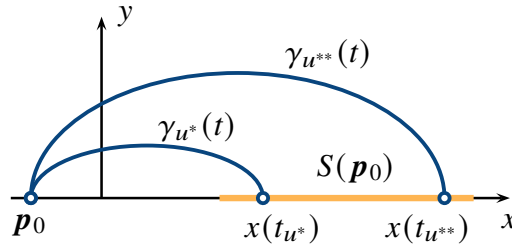


Figura 2.1. Segmento lineal de alcanzabilidad a partir de $\mathbf{p}_0$.

Es adecuado plantearse los problemas de optimización

$$\inf_{u(t) \in \mathcal{U}} S(\mathbf{p}_0) \quad \text{y} \quad \sup_{u(t) \in \mathcal{U}} S(\mathbf{p}_0),$$

siempre y cuando existan sus soluciones. Si esto es así, la solución del primer problema de optimización se llama *desviación mínima* del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (2.1), y la solución del segundo problema de optimización se llama *máxima desviación* del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (2.1). Por lo tanto, en caso de que existan tales soluciones, se busca hallar perturbaciones $u_{\min}(t), u_{\max}(t) \in \mathcal{U}$, que permitan determinar la mínima y la máxima desviación del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes (2.1). En otras palabras, determinar la menor y la mayor distancia del origen al punto de intersección de las trayectorias $\gamma_u(t)$ con el eje $y = 0$. De existir estas desviaciones, se denotan por $a_1^{\min}$ y $a_1^{\max}$, y a las perturbaciones $u_{\min}(t)$ y $u_{\max}(t)$ se les denomina *mejor perturbación externa* y *peor perturbación externa*, respectivamente.

De existir la peor perturbación externa $u_{\text{máx}}(t) \in \mathcal{U}$, a la correspondiente trayectoria solución $\gamma_{u_{\text{máx}}}(t) = (x_{a_0^{\text{máx}}}(t), y_{a_0^{\text{máx}}}(t))^T$ del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (2.1), la denominaremos *trayectoria de máxima desviación*. A partir de esta trayectoria es posible obtener el valor $a_1^{\text{máx}} = x_{a_0^{\text{máx}}}(t_1)$, donde $t_1 \in [0, \tau]$ es algún instante que debe determinarse, y tal que la primera máxima desviación de la coordenada x satisfice

$$\sup_{u(t) \in \mathcal{U}} S(\mathbf{p}_0) = a_1^{\text{máx}}.$$

Un razonamiento análogo se utiliza para resolver el problema de optimización opuesto, el problema de mínima desviación sobre el sistema (2.1). Una vez hallada la mínima perturbación $u_{\text{mín}}(t) \in \mathcal{U}$, es posible determinar la denominada *trayectoria de mínima desviación*, denotada por $\gamma_{u_{\text{mín}}}(t) = (x_{a_0^{\text{mín}}}(t), y_{a_0^{\text{mín}}}(t))^T$ definida para $t \in (0, t_0)$ donde $t_0 \in [0, \tau]$.

El conjunto formado por las trayectorias solución $\gamma_u(t)$ para el sistema (2.1) que pertenecen a $\mathbb{R}_+^2$ y que están asociadas a una elección de la perturbación $u(t) \in \mathcal{U}$, se le llama *conjunto de alcanzabilidad*¹ y se denota por $F(\mathbf{p}_0)$.

La interpretación geométrica se observa en la Figura 2.2.

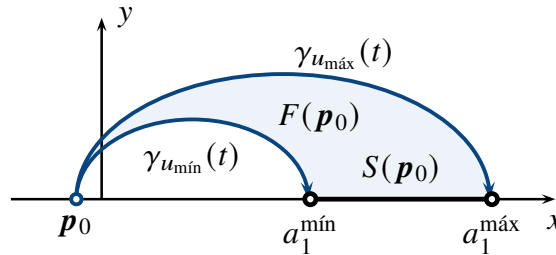


Figura 2.2. Interpretación de la trayectoria de mínima desviación $\gamma_{u_{\text{mín}}}(t)$, la trayectoria de máxima desviación $\gamma_{u_{\text{máx}}}(t)$, la mínima desviación $a_1^{\text{mín}}$, la máxima desviación $a_1^{\text{máx}}$, y el conjunto de alcanzabilidad $F(\mathbf{p}_0)$.

En lo que sigue, se presenta un método para obtener explícitamente las trayectorias de máxima y de mínima desviación para el sistema de ecuaciones diferenciales con derivadas fraccionarias conformes (2.1), así como el conjunto de alcanzabilidad.

Consideremos la perturbación $u_{\text{máx}}(t) \in \mathcal{U}$ como aquella que determina el mayor valor del argumento para la α -derivada de la trayectoria ${}_0D_t^{\alpha, \varphi} \gamma_u(t)$, es decir,

$$u_{\text{máx}}(t) = \arg \left\{ \max_{u(t) \in \mathcal{U}} \arg {}_0D_t^{\alpha, \varphi} \gamma_u(t) \right\} = \arg \left\{ \max_{u(t) \in \mathcal{U}} \frac{{}_0D_t^{\alpha, \varphi} y(t)}{{}_0D_t^{\alpha, \varphi} x(t)} \right\}, \quad (2.2)$$

¹El conjunto $F(\mathbf{p}_0)$ también se llama *embudo integral* o *conjunto parcial de alcanzabilidad con vértice* $\mathbf{p}_0$, véase Butkovskiy (1990).

22 Formulación del problema de máxima desviación

dado que se supuso en (2.1) que la función $f_1(x, y, u(t)) > 0$, es decir, ${}_0D_t^{\alpha, \varphi} x > 0$, y debido a las propiedades de la derivada fraccionaria conforme general, las igualdades anteriores son válidas. Con lo cual, resulta que si $x_{a_0^{\max}}(t)$ y $y_{a_0^{\max}}(t)$, son las soluciones para el sistema (2.1), correspondientes a dicha perturbación $u_{\max}(t)$, y $t_1 > 0$ es el primer instante en donde $x_{a_0^{\max}}(t_1) = a_1^{\max}$ y $y_{a_0^{\max}}(t_1) = 0$, entonces

$$\gamma_{u_{\max}}(t) = (x_{a_0^{\max}}(t), y_{a_0^{\max}}(t))^{\top}, \quad t \in (0, t_1),$$

corresponde a la trayectoria de máxima desviación. Veamos que esto es así, consideremos otra función $u(t) \in \mathcal{U}$ de tal manera que la correspondiente solución $\gamma_u(t) = (x(t), y(t))^{\top}$ del sistema que inicia en $\mathbf{p}_0$, es tal que pasa sobre un punto $(x(t^*), y(t^*))^{\top} \in \gamma_{u_{\max}}([0, t_1])$ que está por encima de la trayectoria $\gamma_{u_{\max}}(t)$ para algún instante $t > t^*$, con lo cual, en dicho punto se satisface

$$\frac{f_2(x(t^*), y(t^*), u(t^*))}{f_1(x(t^*), y(t^*), u(t^*))} > \frac{f_2(x_{a_0^{\max}}(t^*), y_{a_0^{\max}}(t^*), u_{\max}(t^*))}{f_1(x_{a_0^{\max}}(t^*), y_{a_0^{\max}}(t^*), u_{\max}(t^*))}.$$

Sin embargo, este caso no es posible, ya que de ser válida la desigualdad anterior, se contradice la definición de la máxima perturbación (2.2), pues en el punto $(x(t^*), y(t^*))^{\top}$ la función $u_{\max}(t)$ no describe el máximo argumento de la α -derivada ${}_aD_t^{\alpha, \varphi} \gamma(t)$. Por lo tanto, $\gamma_{u_{\max}}(t)$ corresponde a la trayectoria de máxima desviación. A partir de esto, $\gamma_{u_{\max}}(t)$ describe la frontera superior del conjunto de alcanzabilidad $F(\mathbf{p}_0)$, como se muestra en la Figura 2.2.

De manera análoga, consideremos la perturbación $u_{\min}(t) \in \mathcal{U}$ que determina el menor valor para el argumento de la α -derivada de la trayectoria ${}_0D_t^{\alpha, \varphi} \gamma_u(t)$, es decir,

$$u_{\min}(t) = \arg \left\{ \min_{u(t) \in \mathcal{U}} \arg {}_0D_t^{\alpha, \varphi} \gamma_u(t) \right\} = \arg \left\{ \min_{u(t) \in \mathcal{U}} \frac{{}_0D_t^{\alpha, \varphi} y(t)}{{}_0D_t^{\alpha, \varphi} x(t)} \right\}. \quad (2.3)$$

Con lo cual, resulta que si $x_{a_0^{\min}}(t)$ y $y_{a_0^{\min}}(t)$ son las soluciones para el sistema (2.1), correspondiente a la perturbación $u_{\min}(t)$, y $t_1 > 0$ es el primer instante en donde $x_{a_0^{\min}}(t_1) = a_1^{\min}$ y $y_{a_0^{\min}}(t_1) = 0$, entonces

$$\gamma_{u_{\min}}(t) = (x_{a_0^{\min}}(t), y_{a_0^{\min}}(t))^{\top}, \quad t \in (0, t_1),$$

corresponde a la trayectoria de mínima desviación. Utilizando un argumento similar, se puede mostrar que la trayectoria $\gamma_{u_{\min}}(t)$ define la frontera inferior del conjunto de alcanzabilidad $F(\mathbf{p}_0)$, como se aprecia en la Figura 2.2.

De tal manera, se puede concluir que el conjunto de alcanzabilidad satisface

$$\partial F(\mathbf{p}_0) = \gamma_{u_{\min}}(t) \cup \gamma_{u_{\max}}(t) \cup S(\mathbf{p}_0).$$

La posibilidad de obtener esta representación de forma explícita, depende de poder determinar de forma analítica la solución del sistema de ecuaciones diferenciales conformes

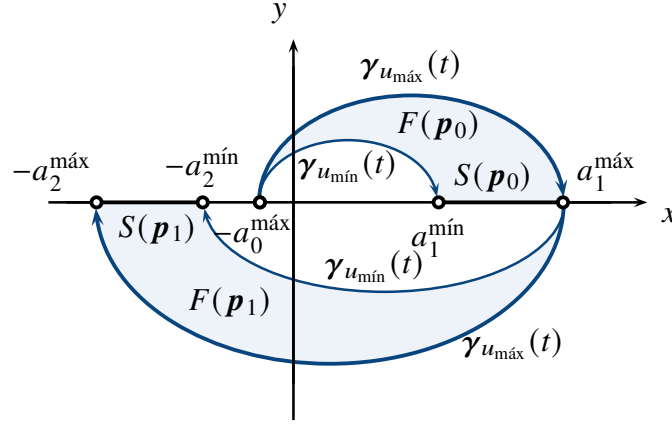


Figura 2.3. Interpretación geométrica de los conjuntos de alcanzabilidad y las máximas desviaciones.

generales (2.1), cuando se eligen las perturbaciones $u_{m\acute{a}x}(t)$ y $u_{m\acute{i}n}(t)$ que se definen en las expresiones (2.2) y (2.3), respectivamente.

Ahora, si se considera el punto

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} a_1^{m\acute{a}x} \\ 0 \end{bmatrix},$$

se puede realizar el procedimiento anteriormente descrito con el objetivo de construir un conjunto de alcanzabilidad $F(\mathbf{p}_1)$, como se muestra en la Figura 2.3.

Por construcción, es claro que este procedimiento se puede repetir de forma indefinida sobre cada máxima desviación $a_k^{m\acute{a}x}$ para determinar los correspondientes conjuntos de alcanzabilidad $F(\mathbf{p}_k)$, con lo cual, es natural considerar el estudio de dos tipos de soluciones $(x(t), y(t))^T$ del sistema (2.1): soluciones para las cuales la sucesión de máximas desviaciones $\{a_k^{m\acute{a}x}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es convergente y soluciones para las cuales esta sucesión es divergente. El primer tipo de soluciones permiten construir soluciones periódicas que convergen a un único ciclo límite estable, mientras que las segundas corresponden a soluciones oscilantes no acotadas, de acuerdo al conocido mapa de Poincaré, ver Fradkov y Pogromsky (1998).

En el siguiente capítulo se presenta una aplicación del cálculo fraccionario conforme general en el sistema masa-resorte-amortiguador, en el cual se aborda una aplicación sobre la construcción de los conjuntos de alcanzabilidad con el fin de establecer un criterio de estabilidad robusta.

24 Formulación del problema de máxima desviación

Capítulo 3

Aplicación en el sistema masa-resorte-amortiguador con cálculo fraccionario conforme general

3.1. Introducción

Se considera el modelo clásico de un sistema masa-resorte-amortiguador, que consiste en una masa m , usualmente medida en kg, que está unida a un resorte lineal con constante k , medido en N/m (Newton por metro), y a un amortiguador lineal con coeficiente b , medido en Ns/m (Newton-segundos por metro). Suponemos que una fuerza externa $f(t)$ excita la dinámica del sistema de tal manera que la masa experimenta un desplazamiento $x(t)$ y una velocidad $\frac{dx}{dt}(t)$. La Figura 3.1 muestra un esquema de este modelo. Dicho modelo es un caso particular del muy conocido oscilador armónico amortiguado, el cual se perturba con una fuerza externa.

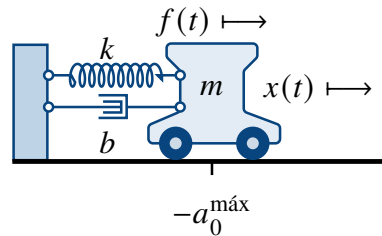


Figura 3.1. Sistema masa-resorte-amortiguador.

Se sabe que la ecuación diferencial de segundo orden que describe la dinámica de este modelo es

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = f(t).$$

En un oscilador armónico, el resorte proporciona una fuerza que obedece la ley de Hooke,

con lo cual, el término kx proviene de dicha ley, y el término $b \frac{dx}{dt}$ corresponde a la fuerza de amortiguamiento, véase por ejemplo Devaney *et al.* (1999).

Alternativamente, si escogemos la frecuencia natural del sistema $\omega = (k/m)^{1/2}$ y el coeficiente de amortiguamiento $\mu = b/2m$, entonces esta ecuación diferencial puede expresarse como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{f(t)}{m}.$$

y de éste, considerando una nueva variable $y = \frac{dx}{dt}$, la ecuación diferencial puede expresarse como el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega^2 x - 2\mu y + u(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $u(t) = \frac{1}{m} f(t)$. El sistema (3.1) se complementa con las condiciones iniciales

$$x(t) \Big|_{t=0} = -a_0^{\text{máx}}, \quad \frac{dx}{dt}(t) \Big|_{t=0} = 0, \tag{3.2}$$

donde $a_0^{\text{máx}} \geq 0$ es una constante dada. Se sabe que la dinámica de la ecuación diferencial de segundo orden depende de los posibles valores del coeficiente de amortiguamiento. En este trabajo se considera el caso de subamortiguamiento: $0 < \mu < \omega$.

3.2. Formulación del problema

La ecuación diferencial fraccionaria conforme general asociada con (3.1)–(3.2) es obtenida por el método de fraccionalización descrito en Rosales *et al.* (2011), que consiste en introducir un nuevo parámetro σ que representa los componentes del tiempo (medido en segundos) en la ecuación diferencial fraccionaria conforme general con una dimensionalidad adecuada, es decir, asumimos que es posible la siguiente asignación:

$$\frac{d}{dt} x(t) \mapsto \frac{1}{\sigma^{1-\alpha}} {}_0 D_t^{\alpha, \varphi} x(t), \quad \alpha \in (0, 1]. \tag{3.3}$$

Es importante señalar que en Gómez-Aguilar *et al.* (2012a) se realiza un estudio sobre el modelo matemático del sistema masa-resorte-amortiguador con un enfoque en el cálculo fraccionario, similar al que se considera en este trabajo, en el cual se aborda la misma ecuación diferencial que describe la dinámica del modelo. En dicho trabajo se realiza la misma asignación (3.3) para obtener la ecuación diferencial fraccionaria asociada. El desarrollo que se lleva a cabo sigue la definición de derivada fraccionaria en el sentido de Caputo, expuesta al inicio del Capítulo 1, y donde se presenta un análisis del modelo y las soluciones para la ecuación diferencial fraccionaria homogénea, así como un análisis de

las soluciones cuando se consideran las ecuaciones $b \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$ y $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = f(t)$, presentadas en términos de la función de Mittag-Leffler. Otros casos de estudio similares se analizan en Gómez-Aguilar *et al.* (2015) y Sene y Gómez-Aguilar (2019).

Según el desarrollo que se expone en Cruz-Duarte *et al.* (2020), particularmente para el problema estudiado en este trabajo, se debe elegir $\sigma^{1-\alpha} = \omega^{\alpha-1}$, con lo cual, la ecuación diferencial fraccionaria conforme general asociada a (3.1) tiene la siguiente forma

$$\omega^{1-\alpha} {}_0D_t^{\alpha,\varphi}(\omega^{1-\alpha} {}_0D_t^{\alpha,\varphi}x) + 2\mu\omega^{1-\alpha} {}_0D_t^{\alpha,\varphi}x + \omega^2x = u(t).$$

Considerando la nueva variable, $y = \omega^{1-\alpha} {}_0D_t^{\alpha,\varphi}x$, obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\alpha,\varphi}x &= \omega^{\alpha-1}y, \\ {}_0D_t^{\alpha,\varphi}y &= -\omega^{\alpha+1}x - 2\mu\omega^{\alpha-1}y + \omega^{\alpha-1}u(t). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Las condiciones iniciales de (3.4) son

$$x(t)|_{t=0} = -a_0^{\max}, \quad y(t)|_{t=0} = 0. \quad (3.5)$$

Si asumimos que el único conocimiento sobre la perturbación externa es que es una función acotada: $|u(t)| \leq \delta$, podemos suponer que esta función representa una perturbación externa que pertenece al conjunto

$$u(t) \in \mathcal{U} = \{u(t) \in PC(\mathbb{R}) \mid |u(t)| \leq \delta\},$$

donde $PC(\mathbb{R})$ denota el conjunto de funciones continuas a trozos definidas en $\mathbb{R}$ y $\delta > 0$ es una constante.

El conjunto de alcanzabilidad $\mathcal{Q}$ del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (3.4)–(3.5) con perturbaciones externas $u(t) \in \mathcal{U}$ se define como

$$\mathcal{Q} = \{(x(t), y(t))^\top \in \mathbb{R}^2 \mid (x(t), y(t))^\top \text{ satisface (3.4)–(3.5) para alguna } u(t) \in \mathcal{U}\}.$$

El problema de determinar el conjunto de alcanzabilidad $\mathcal{Q}$ ha sido estudiado extensamente para el problema de valor inicial (3.1)–(3.2) con perturbaciones externas $u(t) \in \mathcal{U}$; véase por ejemplo Kurzhanski y Varaiya (2014). Un método que se ha utilizado consiste en emplear la solución del problema de máxima desviación formulado por Bulgakov; véase Elishakoff y Ohsaki (2010). En este trabajo, se pretende determinar las principales propiedades del conjunto de alcanzabilidad $\mathcal{Q}$ del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (3.4)–(3.5) con perturbaciones externas $u(t) \in \mathcal{U}$.

3.3. Problema de máximas desviaciones

En este apartado se busca resolver el problema de máxima desviación asociado al planteamiento original, siguiendo la construcción expuesta en el Capítulo 2. Con lo cual, primero

fijamos un punto $\mathbf{p}_0 = (-a_0^{\text{máx}}, 0)^\top$, con $a_0^{\text{máx}} > 0$ una constante dada, y luego resolvemos el problema de máxima desviación siguiendo el argumento geométrico dado en Formal'skii (2010, 2015) para sistemas de ecuaciones diferenciales de orden entero.

En el semiplano positivo $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ consideramos el conjunto de trayectorias descritas por $\gamma_u(t) = \{(x(t), y(t))^\top \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$ que corresponden a una perturbación externa $u(t) \in \mathcal{U}$ y que tienen a $\mathbf{p}_0$ como condición inicial. El conjunto de estas curvas cubre un conjunto $F(\mathbf{p}_0)$ de puntos en el plano que forman un *conjunto de alcanzabilidad*, véase la Figura 3.2. La frontera de este conjunto está descrito por dos trayectorias $\gamma_{u_{\text{mín}}}(t)$ y $\gamma_{u_{\text{máx}}}(t)$ que están asociadas con las perturbaciones externas $u_{\text{mín}}(t), u_{\text{máx}}(t) \in \mathcal{U}$, donde $u_{\text{máx}}(t)$ se obtiene del siguiente argumento geométrico que es válido debido a las propiedades de la derivada fraccionaria conforme general:

$$\begin{aligned}
 u_{\text{máx}}(t) &= \arg \left\{ \max_{u(t) \in \mathcal{U}} \arg {}_0D_t^{\alpha, \varphi} \gamma_u(t) \right\} \\
 &= \arg \left\{ \max_{u(t) \in \mathcal{U}} \frac{{}_0D_t^{\alpha, \varphi} y(t)}{{}_0D_t^{\alpha, \varphi} x(t)} \right\} \\
 &= \arg \left\{ \max_{u(t) \in \mathcal{U}} \left\{ -\omega^2 \frac{x(t)}{y(t)} - 2\mu\omega + \frac{u(t)}{y(t)} \right\} \right\} \\
 &= \delta \operatorname{sign} y(t).
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Un argumento similar se utiliza para demostrar que $u_{\text{mín}}(t) = -\delta \operatorname{sign} y(t)$.

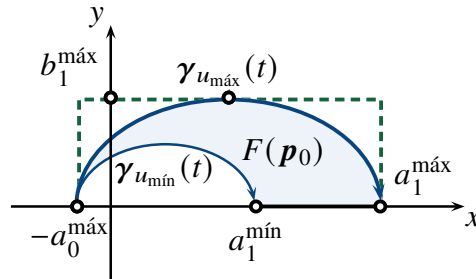


Figura 3.2. Interpretación geométrica del problema de máxima desviación.

Después de sustituir la función $u_{\text{máx}}(t) = \delta \operatorname{sign} y(t)$ en (3.4), obtenemos el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned}
 {}_0D_t^{\alpha, \varphi} x &= \omega^{\alpha-1} y, & x(0) &= -a_0^{\text{máx}} \\
 {}_0D_t^{\alpha, \varphi} y &= -\omega^{\alpha+1} x - 2\mu\omega^{\alpha-1} y + \omega^{\alpha-1} \delta, & y(0) &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

La solución de este problema de valores iniciales permite obtener la trayectoria $\gamma_{u_{\text{máx}}}(t)$, la cual se representa como

$$\gamma_{u_{\text{máx}}}(t) = \{(x_{a_0^{\text{máx}}}(t), y_{a_0^{\text{máx}}}(t))^\top \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\},$$

cuyas coordenadas se obtienen en la siguiente sección. De manera análoga, si se sustituye la función $u_{\min}(t) = -\delta \operatorname{sign} y(t)$ en (3.4) se puede obtener la trayectoria $\gamma_{u_{\min}}(t)$.

3.3.1. Algunas propiedades del tubo de alcanzabilidad $F(p_0)$

Introduciendo la derivada fraccionaria conforme general de la primera ecuación del sistema (3.7), se tiene

$${}_0D_t^{\alpha,\varphi} {}_0D_t^{\alpha,\varphi} x = {}_0D_t^{\alpha,\varphi} \omega^{\alpha-1} y,$$

donde se supone que la función x es dos veces diferenciable, con lo cual tiene sentido al planteamiento del modelo y obedece a (3.1)–(3.2). Empleando las propiedades de la derivada fraccionaria conforme general descritas en el Teorema 1.4, resulta que

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\alpha,\varphi} {}_0D_t^{\alpha,\varphi} x &= \varphi(t, \alpha) {}_0D_t^{\alpha,\varphi} \frac{dx}{dt} + \frac{dx}{dt} {}_0D_t^{\alpha,\varphi} \varphi(t, \alpha) \\ &= \varphi^2(t, \alpha) \frac{d^2x}{dt^2} + \varphi(t, \alpha) \frac{d\varphi}{dt}(t, \alpha) \frac{dx}{dt}. \end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo lo anterior en la segunda ecuación del sistema (3.7), se tiene lo siguiente

$$\varphi^2(t, \alpha) \frac{d^2x}{dt^2} + \varphi(t, \alpha) \frac{d\varphi}{dt}(t, \alpha) \frac{dx}{dt} = -\omega^{2\alpha} x - 2\mu\omega^{2(\alpha-1)}\omega^{1-\alpha}\varphi(t, \alpha) \frac{dx}{dt} + \omega^{2(\alpha-1)}\delta,$$

o bien,

$$\varphi^2(t, \alpha) \frac{d^2x}{dt^2} + \varphi(t, \alpha) \frac{d\varphi}{dt}(t, \alpha) \frac{dx}{dt} + \omega^{2\alpha} x + 2\mu\omega^{\alpha-1}\varphi(t, \alpha) \frac{dx}{dt} = \omega^{2(\alpha-1)}\delta. \quad (3.8)$$

Con el fin de determinar la solución de la ecuación diferencial anterior, en lo que sigue consideremos el siguiente cambio de variable

$$s = h(t), \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\varphi(t, \alpha)},$$

donde la función $h(t)$ es la función definida en (1.1). Con este cambio de variable se obtiene

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{\frac{d\varphi}{dt}(t, \alpha)}{\varphi^2(t, \alpha)}.$$

Haciendo uso de la regla de la cadena resulta que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt}; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d^2x}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2.$$

30 Aplicación en el sistema masa-resorte-amortiguador con cálculo fraccionario conforme general

Por lo tanto, en la ecuación (3.8) se tiene

$$\begin{aligned} \varphi^2(t, \alpha) \left(\frac{dx}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d^2x}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \right) + \left(\frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} \right) \varphi(t, \alpha) \frac{d\varphi}{dt}(t, \alpha) + \\ + 2\mu\omega^{\alpha-1} \varphi(t, \alpha) \left(\frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} \right) + \omega^{2\alpha} x = \omega^{2(\alpha-1)} \delta, \end{aligned}$$

y después de sustituir las derivadas conocidas, resulta

$$\begin{aligned} \varphi^2(t, \alpha) \left(-\frac{\frac{d\varphi}{dt}(t, \alpha)}{\varphi^2(t, \alpha)} \frac{dx}{ds} + \frac{1}{\varphi^2(t, \alpha)} \frac{d^2x}{ds^2} \right) + \left(\frac{1}{\varphi(t, \alpha)} \frac{dx}{ds} \right) \varphi(t, \alpha) \frac{d\varphi}{dt}(t, \alpha) + \\ + 2\mu\omega^{\alpha-1} \varphi(t, \alpha) \left(\frac{1}{\varphi(t, \alpha)} \frac{dx}{ds} \right) + \omega^{2\alpha} x = \omega^{2(\alpha-1)} \delta, \end{aligned}$$

o de manera equivalente,

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \left(-\frac{d\varphi}{dt}(t, \alpha) + \frac{d\varphi}{dt}(t, \alpha) + 2\mu\omega^{\alpha-1} \right) \frac{dx}{ds} + \omega^{2\alpha} x = \omega^{2(\alpha-1)} \delta,$$

lo cual se expresa finalmente como:

$$\frac{d^2x}{ds^2} + 2\mu\omega^{\alpha-1} \frac{dx}{ds} + \omega^{2\alpha} x = \omega^{2(\alpha-1)} \delta. \quad (3.9)$$

La solución de la ecuación diferencial homogénea de (3.9) se obtiene de la siguiente manera. Consideramos la ecuación característica asociada $r^2 + 2\mu\omega^{\alpha-1}r + \omega^{2\alpha} = 0$, cuyas raíces son

$$r_1 = -\mu\omega^{\alpha-1} + \omega^{\alpha-1}i\sqrt{\omega^2 - \mu^2}, \quad r_2 = -\mu\omega^{\alpha-1} - \omega^{\alpha-1}i\sqrt{\omega^2 - \mu^2}.$$

Por lo tanto, la solución para la ecuación homogénea de (3.9) es

$$x(s) = e^{-\mu\omega^{\alpha-1}s} \left(c_1 \cos(\beta\omega^{\alpha-1}s) + c_2 \sin(\beta\omega^{\alpha-1}s) \right),$$

donde $\beta = (\omega^2 - \mu^2)^{1/2}$. De acuerdo con el cambio de variable considerado, una solución general de la primera coordenada del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (3.7) resulta ser

$$x(t) = \frac{\delta}{\omega^2} + e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \left(c_1 \cos(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) + c_2 \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) \right).$$

De acuerdo a las condiciones iniciales en (3.7) se tiene $x(0) = \frac{\delta}{\omega^2} + c_1 = -a_0^{\text{máx}}$, de lo cual resulta

$$c_1 = -\left(a_0^{\text{máx}} + \frac{\delta}{\omega^2} \right),$$

y dado que ${}_0D_t^{\alpha,\varphi}x(0) = 0$ y

$${}_0D_t^{\alpha,\varphi}x(t) = e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \left(-\beta\omega^{\alpha-1}c_1 \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) + \beta\omega^{\alpha-1}c_2 \cos(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) \right) + \\ + \left(-\mu\omega^{\alpha-1}e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \right) \left(c_1 \cos(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) + c_2 \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) \right),$$

entonces ${}_0D_t^{\alpha,\varphi}x(0) = \beta\omega^{\alpha-1}c_2 - \mu\omega^{\alpha-1}c_1 = 0$, con lo cual se obtiene

$$c_2 = \frac{\mu}{\beta}c_1.$$

Por lo tanto,

$$x_{a_0^{\max}}(t) = \frac{\delta}{\omega^2} - \left(a_0^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \left(\cos(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) + \frac{\mu}{\beta} \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) \right).$$

Por otra parte, como $y_{a_0^{\max}}(t) = \omega^{1-\alpha} {}_0D_t^{\alpha,\varphi}x_{a_0^{\max}}(t)$, entonces

$${}_0D_t^{\alpha,\varphi}x_{a_0^{\max}}(t) = e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \left(-\beta\omega^{\alpha-1}c_1 - \mu\omega^{\alpha-1}c_2 \right) \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) \\ = e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \left(-\beta\omega^{\alpha-1}c_1 - \frac{\mu^2}{\beta}\omega^{\alpha-1}c_1 \right) \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) \\ = \omega^{\alpha-1} \left(\frac{\beta^2 + \mu^2}{\beta} \right) \left(a_0^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) \\ = \frac{\omega^{\alpha+1}}{\beta} \left(a_0^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)).$$

De esta manera

$$y_{a_0^{\max}}(t) = \frac{\omega^2}{\beta} \left(a_0^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)).$$

Por lo tanto, la trayectoria $\gamma_{u^{\max}}(t)$ está descrita por las coordenadas

$$x_{a_0^{\max}}(t) = \frac{\delta}{\omega^2} - \left(a_0^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \left(\cos(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) + \frac{\mu}{\beta} \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) \right), \\ y_{a_0^{\max}}(t) = \frac{\omega^2}{\beta} \left(a_0^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)),$$

donde $t \in (0, t_1)$ y $t_1 > 0$ es el instante para el cual $y_{a_0^{\max}}(t) \geq 0$ para todo $t \in (0, t_1)$.

Observamos que $a_1^{\max} = x_{a_0^{\max}}(t_1)$, donde $t_1 > 0$ es el primer instante en el que se satisface la condición $y_{a_0^{\max}}(t_1) = 0$. En tal caso, nos proponemos obtener dicho valor. De primera instancia, consideremos que $y_{a_0^{\max}}(t_1) = 0$, entonces

$$y_{a_0^{\max}}(t_1) = \frac{\omega^2}{\beta} \left(a_0^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t_1)} \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t_1)) = 0,$$

32 Aplicación en el sistema masa-resorte-amortiguador con cálculo fraccionario conforme general

de lo cual, resulta que $\sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t_1)) = 0$, lo que implica que t_1 es solución de la ecuación $\beta\omega^{\alpha-1}h(t_1) = \pi$. De esta relación, se obtiene que

$$x_{a_0^{\max}}(t_1) = \frac{\delta}{\omega^2} - \left(a_0^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2}\right) e^{-\frac{\pi\mu}{\beta}}(-1) = \frac{\delta}{\omega^2} + \left(a_0^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2}\right) e^{-\frac{\pi\mu}{\beta}}.$$

De esta manera, la primer máxima desviación de la coordenada x es

$$a_1^{\max} = Aa_0^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2}(1 + A), \quad A = \exp\left(-\frac{\pi\mu}{\beta}\right). \quad (3.10)$$

Dado que $F(\mathbf{p}_0)$ contiene las trayectorias $\gamma_u(t)$ asociadas con cada elección $u(t) \in \mathcal{U}$, la primera máxima desviación $b_1^{\max}$ de la coordenada y , se obtiene a partir de la condición $b_1^{\max} = y_{a_0^{\max}}(\hat{t}_1)$, donde el instante $\hat{t}_1 \in (0, t_1)$ se determina a partir de la ecuación ${}_0D_t^{\alpha, \varphi} \gamma_{u_{\max}}(\hat{t}_1) = k\mathbf{e}_1$, donde $k > 0$ y $\mathbf{e}_1^\top = (1, 0)$ es el primer vector canónico de $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, la siguiente igualdad debe satisfacerse: ${}_0D_t^{\alpha, \varphi} y_{a_0^{\max}}(\hat{t}_1) = 0$. A partir de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (3.4), obtenemos que

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\alpha, \varphi} y_{a_0^{\max}}(\hat{t}_1) &= \frac{\omega^2}{\beta} \left(a_0^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2}\right) e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(\hat{t}_1)} \\ &\quad \left(\beta\omega^{\alpha-1} \cos(\beta\omega^{\alpha-1}h(\hat{t}_1)) - \mu\omega^{\alpha-1} \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(\hat{t}_1))\right) = 0. \end{aligned}$$

y considerado la identidad: $a \cos(\lambda t) + b \sin(\lambda t) = (a^2 + b^2)^{1/2} \cos(\lambda t - \arctan(\frac{b}{a}))$ válida para todo $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\alpha, \varphi} y_{a_0^{\max}}(\hat{t}_1) &= \frac{\omega^2}{\beta} \left(a_0^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2}\right) e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(\hat{t}_1)} \\ &\quad \left(\sqrt{\beta^2\omega^{2(\alpha-1)} + \mu^2\omega^{2(\alpha-1)}} \cos\left(\beta\omega^{\alpha-1}h(\hat{t}_1) - \arctan\left(-\frac{\mu}{\beta}\right)\right)\right) = 0, \end{aligned}$$

de lo cual, resulta que

$$\cos\left(\beta\omega^{\alpha-1}h(\hat{t}_1) - \arctan\left(-\frac{\mu}{\beta}\right)\right) = 0,$$

lo que implica que $\hat{t}_1$ es solución de la ecuación $\beta\omega^{\alpha-1}h(\hat{t}_1) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{\mu}{\beta})$. De esta ecuación resulta

$$\begin{aligned} y_{a_0^{\max}}(\hat{t}_1) &= \frac{\omega^2}{\beta} \left(a_0^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2}\right) e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(\hat{t}_1)} \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(\hat{t}_1)) \\ &= \frac{\omega^2}{\beta} \left(a_0^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2}\right) \exp\left(-\frac{\mu}{\beta} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\mu}{\beta}\right)\right)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\mu}{\beta}\right)\right). \end{aligned}$$

Notemos que $\sin(\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{\mu}{\beta})) = \frac{\beta}{\omega}$. Considerando que $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta)$, donde $\theta = \arctan(\frac{\mu}{\beta})$, entonces

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\mu}{\beta}\right) = \cos\left(\arctan\frac{\mu}{\beta}\right).$$

Dado que $\tan(\theta) = \frac{\mu}{\beta}$, entonces $\theta = \arctan(\frac{\mu}{\beta})$, con lo cual

$$\cos(\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{\mu^2 + \beta^2}},$$

y dado que $\beta^2 = \omega^2 - \mu^2$, entonces $\cos(\theta) = \frac{\beta}{\omega}$. Por lo tanto

$$y_{a_0^{\max}}(\hat{t}_1) = \frac{\omega^2}{\beta} \left(a_0^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) \exp\left(-\frac{\mu}{\beta} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\mu}{\beta} \right)\right) \frac{\beta}{\omega}.$$

De esta manera, la primer máxima desviación de la coordenada y es

$$b_1^{\max} = \omega \left(a_0^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) B, \quad B = \exp\left(-\frac{\mu}{\beta} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\mu}{\beta} \right)\right). \quad (3.11)$$

En las expresiones anteriores hemos obtenido los valores $a_1^{\max}$ y $b_1^{\max}$ que son conocidos como la *primera máxima desviación de la coordenada x* y la *primera máxima desviación de la coordenada y*, respectivamente. En la Figura 3.2 de la página 28 se ilustra la interpretanción de esta construcción geométrica.

Observemos que $a_1^{\max}$ y $b_1^{\max}$ no dependen del orden de $\alpha \in (0, 1]$ de la derivada fraccionaria conforme general en (3.4) y que los instantes t_1 y $\hat{t}_1$ sí dependen de $\alpha \in (0, 1]$.

El argumento utilizado para construir $F(\mathbf{p}_0)$ es simétrico, en el sentido de que si fijamos el punto $\mathbf{p}_1 = (a_1^{\max}, 0)^\top$, donde $a_1^{\max}$ está definido en (3.10), entonces podemos construir el conjunto de alcanzabilidad $F(\mathbf{p}_1)$ con la propiedad de que el límite inferior de este conjunto está descrito por la extensión de la trayectoria $\gamma_{u_{\max}}(t)$, cuyas componentes son soluciones de (3.4) definidas en $(0, t_2)$, donde $t_2 > t_1$; ver Figura 3.3. En este caso, obtenemos la trayectoria

$$\gamma_{u_{\max}}(t) = \begin{cases} (x_{a_0^{\max}}(t), y_{a_0^{\max}}(t))^\top, & t \in (0, t_1), \\ (x_{a_1^{\max}}(t - t_1), y_{a_1^{\max}}(t - t_1))^\top, & t \in (t_1, 2t_1). \end{cases}$$

3.3.2. Algunas propiedades del tubo de alcanzabilidad $F(\mathbf{p}_1)$

Consideremos el punto $\mathbf{p}_1 = (a_1^{\max}, 0)^\top$, con $a_1^{\max}$ como se define en (3.10), y luego resolvemos el problema de máxima desviación siguiendo el argumento geométrico dado en Formalskii (2010, 2015) para sistemas de ecuaciones diferenciales de orden entero.

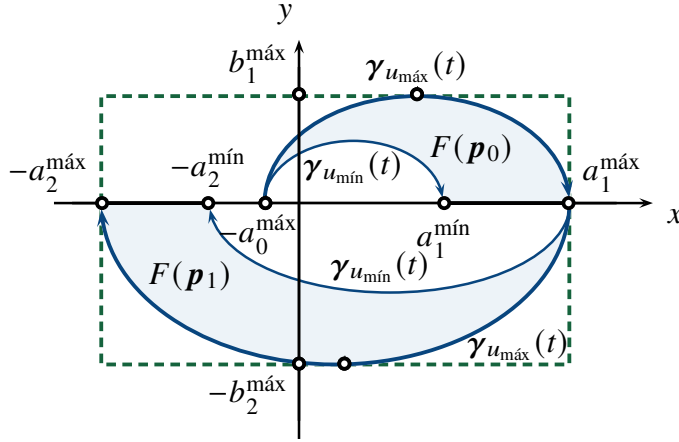


Figura 3.3. Interpretación geométrica del problema de máxima desviación.

En el semiplano negativo $\mathbb{R}_-^2 = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$ consideramos el conjunto de trayectorias descritas por $\gamma_u(t) = \{(x(t), y(t))^\top \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$ que corresponden a una perturbación externa $u(t) \in \mathcal{U}$ y que tienen a p_1 como condición inicial. El conjunto de estas curvas forman un conjunto $F(p_1)$ de puntos en el plano que describen un *conjunto de alcanzabilidad*, véase la Figura 3.3. La frontera de este conjunto está descrita por dos trayectorias $\gamma_{u_{\min}}(t)$ y $\gamma_{u_{\max}}(t)$ que están asociadas con las perturbaciones externas $u_{\min}(t), u_{\max}(t) \in \mathcal{U}$, donde $u_{\max}(t)$ se obtiene del mismo argumento expuesto en (3.6). Similarmente se utiliza el mismo argumento para demostrar que $u_{\min}(t) = -\delta \operatorname{sign} y(t)$.

Después de sustituir la función $u_{\max}(t) = \delta \operatorname{sign} y(t)$ en (3.4), obtenemos el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\alpha, \varphi} x &= \omega^{\alpha-1} y, & x(0) &= a_1^{\max} \\ {}_0D_t^{\alpha, \varphi} y &= -\omega^{\alpha+1} x - 2\mu\omega^{\alpha-1} y + \omega^{\alpha-1} \delta, & y(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

La solución de este problema de valores iniciales permite obtener la trayectoria $\gamma_{u_{\max}}(t)$, la cual se representa como

$$\gamma_{u_{\max}}(t) = \{(x_{a_1^{\max}}(t), y_{a_1^{\max}}(t))^\top, \in \mathbb{R}^2 \mid t \in (t_1, t_2)\}.$$

Consideramos el mismo razonamiento expuesto en la Subsección 3.3.1, con lo cual el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (3.12) es similar a (3.7), por lo que la solución para la ecuación homogénea es la misma

$$x(t) = e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \left(c_1 \cos(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) + c_2 \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) \right).$$

Suponemos nuevamente una solución particular constante, y entonces resulta que

$$x(t) = -\frac{\delta}{\omega^2} + e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \left(c_1 \cos(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) + c_2 \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) \right).$$

Como se planteó anteriormente, las condiciones iniciales para éste segundo instante están fijadas por el punto $\mathbf{p}_1 = (a_1^{\text{máx}}, 0)^\top$, donde $a_1^{\text{máx}}$ está definido en (3.10). Por lo tanto

$$x(0) = -\frac{\delta}{\omega^2} + c_1 = a_1^{\text{máx}}, \quad c_1 = a_1^{\text{máx}} + \frac{\delta}{\omega^2}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\alpha, \varphi} x(t) &= e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \left(-\beta\omega^{\alpha-1}c_1 \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) + \beta\omega^{\alpha-1}c_2 \cos(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) \right) + \\ &+ \left(-\mu\omega^{\alpha-1}e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \right) (c_1 \cos(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) + c_2 \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t))), \end{aligned}$$

entonces

$${}_0D_t^{\alpha, \varphi} x(0) = \beta\omega^{\alpha-1}c_2 - \mu\omega^{\alpha-1}c_1 = 0; \quad c_2 = \frac{\mu}{\beta}c_1.$$

De esto se sigue que

$$x_{a_1^{\text{máx}}}(t) = -\frac{\delta}{\omega^2} + \left(a_1^{\text{máx}} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \left(\cos(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) + \frac{\mu}{\beta} \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) \right).$$

Además, como $y_{a_1^{\text{máx}}}(t) = \omega^{1-\alpha} {}_0D_t^{\alpha, \varphi} x_{a_1^{\text{máx}}}(t)$, entonces

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\alpha, \varphi} x_{a_1^{\text{máx}}}(t) &= A e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \left(-\beta\omega^{\alpha-1} \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) + \mu\omega^{\alpha-1} \cos(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) \right) + \\ &+ \left(-\mu\omega^{\alpha-1}e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \right) \left(\cos(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) + \frac{\mu}{\beta} \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) \right) \\ &= \left(a_1^{\text{máx}} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \left(-\beta\omega^{\alpha-1} - \frac{\mu^2\omega^{\alpha-1}}{\beta} \right) \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) \\ &= \omega^{\alpha-1} \left(\frac{-\beta^2 - \mu^2}{\beta} \right) \left(a_1^{\text{máx}} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) \\ &= -\frac{\omega^{\alpha+1}}{\beta} \left(a_1^{\text{máx}} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)). \end{aligned}$$

De esta manera

$$y_{a_1^{\text{máx}}}(t) = -\frac{\omega^2}{\beta} \left(a_1^{\text{máx}} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)).$$

Por lo tanto, la segunda trayectoria esta descrita por las coordenadas

$$\begin{aligned} x_{a_1^{\text{máx}}}(t) &= -\frac{\delta}{\omega^2} + \left(a_1^{\text{máx}} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \left(\cos(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) + \frac{\mu}{\beta} \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) \right), \\ y_{a_1^{\text{máx}}}(t) &= -\frac{\omega^2}{\beta} \left(a_1^{\text{máx}} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)), \end{aligned}$$

36 Aplicación en el sistema masa-resorte-amortiguador con cálculo fraccionario conforme general

donde $t_2 > t_1$ es el instante para el cual $y_{a_1^{\max}}(t - t_1) \leq 0$ para todo $t \in (t_1, t_2)$. La perturbación externa está nuevamente descrita por $u_{\max}(t) = \delta \operatorname{sign} y(t)$ y $t_2 = 2t_1$.

Además, obtenemos de la extensión de la trayectoria en el intervalo (t_1, t_2) la segunda máxima desviación de la coordenada x y la segunda máxima desviación de la coordenada y . Observemos que el valor $a_2^{\max}$ es la *segunda máxima desviación de la coordenada x* , dicho valor satisface la relación $-a_2^{\max} = x_{a_1^{\max}}(t_2 - t_1)$ en el intervalo (t_1, t_2) . Nos proponemos obtener dicho valor.

Notemos que se cumple la igualdad $y_{a_1^{\max}}(t_2) = 0$, por lo tanto

$$y_{a_1^{\max}}(t_2 - t_1) = -\frac{\omega^2}{\beta} \left(a_1^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t_2-t_1)} \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t_2 - t_1)) = 0,$$

de lo cual, tiene que ser

$$\sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t_2 - t_1)) = 0,$$

lo que implica que t_2 es solución de la ecuación $\beta\omega^{\alpha-1}h(t_2 - t_1) = \pi$. De esta relación,

$$\begin{aligned} x_{a_1^{\max}}(t_2 - t_1) &= -\frac{\delta}{\omega^2} + \left(a_1^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t_2-t_1)} \\ &\quad \left(\cos(\beta\omega^{\alpha-1}h(t_2 - t_1)) + \frac{\mu}{\beta} \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t_2 - t_1)) \right) \\ &= -\frac{\delta}{\omega^2} + \left(a_1^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\frac{\pi\mu}{\beta}} \left(\cos(\pi) + \frac{\mu}{\beta} \sin(\pi) \right) \\ &= -\frac{\delta}{\omega^2} + \left(a_1^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\frac{\pi\mu}{\beta}} (-1) \\ &= -\frac{\delta}{\omega^2} - \left(a_1^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\frac{\pi\mu}{\beta}}. \end{aligned}$$

De esta manera, la segunda máxima desviación de la coordenada x es

$$a_2^{\max} = Aa_1^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2}(1 + A). \quad (3.13)$$

Por otra parte, el valor $b_2^{\max}$ es la *segunda máxima desviación de la coordenada y* , dicho valor satisface la relación $-b_2^{\max} = y_{a_1^{\max}}(\hat{t}_2 - t_1)$, donde el instante $\hat{t}_2 \in (t_1, t_2)$ satisface la ecuación ${}_0D_t^{\alpha,\varphi} \gamma_{u_{\max}}(\hat{t}_2 - t_1) = k\mathbf{e}_1$, donde $k > 0$ y $\mathbf{e}_1^\top = (1, 0)$ es el primer vector canónico de $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, la siguiente igualdad se cumple: ${}_0D_t^{\alpha,\varphi} y_{a_1^{\max}}(\hat{t}_2 - t_1) = 0$ y se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\alpha,\varphi} y_{a_1^{\max}}(\hat{t}_2 - t_1) &= -\frac{\omega^2}{\beta} \left(a_1^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(\hat{t}_2-t_1)} \\ &\quad \cdot \left(\beta\omega^{\alpha-1} \cos(\beta\omega^{\alpha-1}h(\hat{t}_2 - t_1)) - \mu\omega^{\alpha-1} \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(\hat{t}_2 - t_1)) \right) = 0. \end{aligned}$$

Entonces

$${}_0D_t^{\alpha, \varphi} y_{a_1^{\max}}(\hat{t}_2 - t_1) = -\frac{\omega^2}{\beta} \left(a_1^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu \omega^{\alpha-1} h(\hat{t}_2 - t_1)} \cdot \left(\sqrt{\beta^2 \omega^{2(\alpha-1)} + \mu^2 \omega^{2(\alpha-1)}} \cos \left(\beta \omega^{\alpha-1} h(\hat{t}_2 - t_1) - \arctan \left(-\frac{\mu}{\beta} \right) \right) \right) = 0,$$

se sigue que

$$\cos \left(\beta \omega^{\alpha-1} h(\hat{t}_2 - t_1) - \arctan \left(-\frac{\mu}{\beta} \right) \right) = 0,$$

lo que resulta que $\hat{t}_2$ es solución de la ecuación $\beta \omega^{\alpha-1} h(\hat{t}_2 - t_1) = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\mu}{\beta}$, la cual se alcanza en el instante $\hat{t}_2 = 2\hat{t}_1$. Dado lo anterior,

$$\begin{aligned} y_{a_1^{\max}}(\hat{t}_2 - t_1) &= -\frac{\omega^2}{\beta} \left(a_1^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu \omega^{\alpha-1} h(\hat{t}_2 - t_1)} \sin(\beta \omega^{\alpha-1} h(\hat{t}_2 - t_1)) \\ &= -\frac{\omega^2}{\beta} \left(a_1^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) \exp \left(-\frac{\mu}{\beta} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\mu}{\beta} \right) \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\mu}{\beta} \right). \end{aligned}$$

Observemos que $\sin(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\mu}{\beta}) = \frac{\beta}{\omega}$. Dado que $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$, donde $x = \arctan \frac{\mu}{\beta}$, entonces

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\mu}{\beta} \right) = \cos \left(\arctan \frac{\mu}{\beta} \right).$$

Considerando la razón trigonométrica $\tan(\theta) = \frac{\mu}{\beta}$, se tiene que $\theta = \arctan(\frac{\mu}{\beta})$ y, por lo tanto, $\cos(\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{\mu^2 + \beta^2}}$, y dado que $\beta^2 = \omega^2 - \mu^2$, entonces $\cos(\theta) = \frac{\beta}{\omega}$. Por lo tanto

$$y_{a_1^{\max}}(\hat{t}_2 - t_1) = -\frac{\omega^2}{\beta} \left(a_1^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) \exp \left(-\frac{\mu}{\beta} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\mu}{\beta} \right) \right) \frac{\beta}{\omega}.$$

De esta manera, la segunda máxima desviación de la coordenada y es

$$b_2^{\max} = \omega \left(a_1^{\max} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) B. \quad (3.14)$$

Notamos una vez más que $a_2^{\max}$ y $b_2^{\max}$ no dependen del orden $\alpha \in (0, 1]$ de la derivada fraccionaria conforme general en (3.4), mientras que los instantes t_2 y $\hat{t}_2$ sí dependen de él.

3.3.3. Algunas propiedades de los tubos de alcanzabilidad $F(p_k)$

El procedimiento que se utilizó para obtener las máximas desviaciones (3.10) y (3.11), así como (3.13) y (3.14), puede repetirse de manera recurrente para obtener dos sucesiones

38 Aplicación en el sistema masa-resorte-amortiguador con cálculo fraccionario conforme general

de máximas desviaciones $\{a_k^{\text{máx}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{b_k^{\text{máx}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que dependen de la elección $a_0^{\text{máx}} > 0$:

$$\begin{aligned} a_k^{\text{máx}} &= A a_{k-1}^{\text{máx}} + \frac{\delta}{\omega^2} (1 + A), \\ b_k^{\text{máx}} &= \omega \left(a_{k-1}^{\text{máx}} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) B, \end{aligned} \quad (3.15)$$

que se obtienen a partir de la trayectoria $\gamma_{u_{\text{máx}}}(t)$ descrita por

$$\gamma_{u_{\text{máx}}}(t) = \begin{cases} (x_{a_0^{\text{máx}}}(t), y_{a_0^{\text{máx}}}(t))^{\top}, & t \in (0, t_1), \\ (x_{a_1^{\text{máx}}}(t - t_1), y_{a_1^{\text{máx}}}(t - t_1))^{\top}, & t \in (t_1, 2t_1), \\ \dots & \dots \\ (x_{a_k^{\text{máx}}}(t - kt_1), y_{a_k^{\text{máx}}}(t - kt_1))^{\top}, & t \in (kt_1, (k+1)t_1). \end{cases}$$

De acuerdo con Elaydi (2005), si una relación de recurrencia definida por $c_{k+1} = g(c_k)$ es tal que g tiene un punto fijo $c^* \in \mathbb{R}$, y si $|\frac{dg}{d\xi}(\xi)| < 1$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, entonces el punto fijo de g es asintóticamente estable, es decir, $c^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} c_k$. Por lo tanto, tenemos los siguientes límites para (3.15).

De primera instancia, definamos la relación recurrente dada en (3.15). Consideremos a $c_{k+1} = g(c_k) = A c_k + \frac{\delta}{\omega^2} (1 + A)$. Observemos lo siguiente

$$\frac{dg}{d\xi}(\xi) = \frac{d}{d\xi} A \xi + \frac{d}{d\xi} \frac{\delta}{\omega^2} (1 + A) = A.$$

Notemos que $0 < A < 1$, así $|\frac{dg}{d\xi}(\xi)| < 1$, lo que implica que g es asintóticamente estable. De lo anterior, resulta que, si a^* es un punto de equilibrio asintóticamente estable de g , entonces $a^* = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k^{\text{máx}}$. Este valor debe cumplir

$$a^* = a^* A + \frac{\delta}{\omega^2} (1 + A),$$

por lo tanto,

$$a^* = \frac{\delta}{\omega^2} \frac{1 + A}{1 - A}.$$

De la definición $A = e^{-\frac{\pi\mu}{\beta}}$, se sigue que

$$a^* = \frac{\delta}{\omega^2} \frac{1 + e^{-\frac{\pi\mu}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{\pi\mu}{\beta}}}.$$

Por otra parte, observemos que

$$\frac{1 + e^{-\frac{\pi\mu}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{\pi\mu}{\beta}}} = \frac{1 + e^{-\frac{\pi\mu}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{\pi\mu}{\beta}}} \cdot \frac{e^{\frac{\pi\mu}{2\beta}}}{e^{\frac{\pi\mu}{2\beta}}} = \frac{e^{\frac{\pi\mu}{2\beta}} + e^{-\frac{\pi\mu}{2\beta}}}{e^{\frac{\pi\mu}{2\beta}} - e^{-\frac{\pi\mu}{2\beta}}} = \coth \frac{\pi\mu}{2\beta},$$

entonces,

$$a^* = \frac{\delta}{\omega^2} \coth \frac{\pi\mu}{2\beta}.$$

De igual manera, para $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k^{\text{máx}} = b^*$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} b_k^{\text{máx}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \omega \left(a_{k-1}^{\text{máx}} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) B \\ &= \omega \left(\frac{\delta}{\omega^2} \coth \frac{\pi\mu}{2\beta} + \frac{\delta}{\omega^2} \right) B \\ &= \frac{\delta}{\omega} \left(1 + \coth \frac{\pi\mu}{2\beta} \right) B. \end{aligned}$$

Del razonamiento anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} a^* &= \lim_{k \rightarrow \infty} a_k^{\text{máx}} = \frac{\delta}{\omega^2} \coth \frac{\pi\mu}{2\beta}, \\ b^* &= \lim_{k \rightarrow \infty} b_k^{\text{máx}} = \frac{\delta}{\omega} \left(1 + \coth \frac{\pi\mu}{2\beta} \right) \exp \left(-\frac{\mu}{\beta} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\mu}{\beta} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Los parámetros a^* y b^* se conocen como las *máximas desviaciones* de las coordenadas correspondientes x y y . Observamos que los parámetros a^* y b^* no dependen del orden $\alpha \in (0, 1]$ de la derivada fraccionaria conforme general en (3.4).

Como se mencionó anteriormente, el sistema recurrente (3.15) es asintóticamente estable. Si se elige la siguiente variación de la condición inicial $a_0^{\text{máx}} = a^* \pm \delta a$, donde $\delta a > 0$, entonces las sucesiones correspondientes de máximas desviaciones también convergen, respectivamente, a a^* y b^* .

La convergencia de los sistemas dinámicos discretos en (3.16) nos permite concluir que el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (3.4) tiene un ciclo límite único $\gamma_{u_{\text{máx}}}^*(t) = (x_{a^*}(t), y_{a^*}(t))^T$, donde $t \in (0, t_1)$, cuyas coordenadas están definidas por

$$\begin{aligned} x_{a^*}(t) &= \pm \frac{\delta}{\omega^2} \mp \left(a^* + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \left(\cos(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) + \frac{\mu}{\beta} \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)) \right), \\ y_{a^*}(t) &= \pm \frac{\omega^2}{\beta} \left(a^* + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu\omega^{\alpha-1}h(t)} \sin(\beta\omega^{\alpha-1}h(t)), \end{aligned}$$

ver la Figura 3.4. Este ciclo límite se obtiene bajo el efecto de la perturbación $u_{\text{máx}}(t) = \delta \text{sign } y(t)$ en el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (3.4) con condiciones iniciales (3.5). El ciclo límite $\gamma_{u_{\text{máx}}}^*(t)$ es asintóticamente y orbitalmente estable, de acuerdo con el conocido mapa de Poicaré, ver Fradkov y Pogromsky (1998). La perturbación $u_{\text{máx}}(t)$ se conoce como *peor perturbación externa* y el ciclo límite $\gamma_{u_{\text{máx}}}^*(t)$ se conoce como *ciclo límite máximo*. Observamos que si $a_0^{\text{máx}} > 0$, entonces

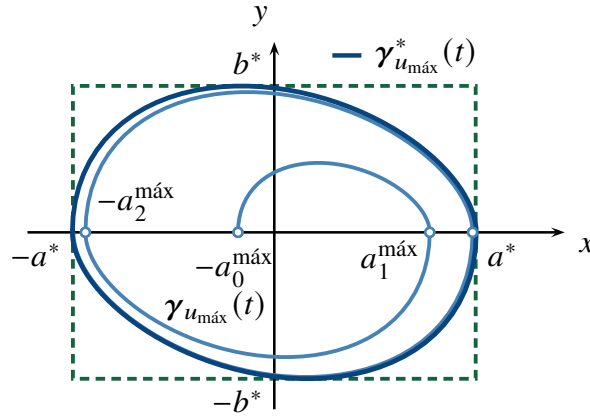


Figura 3.4. Interpretación geométrica del ciclo límite máximo del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (3.4) con condiciones iniciales (3.5).

el ciclo límite máximo $\gamma_{u_{máx}}^*(t)$ también se obtiene si se considera una condición inicial de la forma $\mathbf{p}_0 = (a_0^{\text{máx}}, 0)^\top$.

Observamos que el ciclo límite máximo del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (3.4) es invariante con respecto al orden $\alpha \in (0, 1]$, es decir, tenemos el mismo ciclo límite máximo para cada elección de $\alpha \in (0, 1]$. Esto se deduce al observar que si $\tau = \omega^{\alpha-1}h(t)$ con $t \in (0, t_1)$, entonces el ciclo límite máximo $\gamma_{u_{máx}}^*(\tau) = (x_{a^*}(\tau), y_{a^*}(\tau))^\top$ tiene las siguientes coordenadas

$$\begin{aligned} x_{a^*}(\tau) &= \pm \frac{\delta}{\omega^2} \mp \left(a^* + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu\tau} \left(\cos(\beta\tau) + \frac{\mu}{\beta} \sin(\beta\tau) \right), \\ y_{a^*}(\tau) &= \pm \frac{\omega^2}{\beta} \left(a^* + \frac{\delta}{\omega^2} \right) e^{-\mu\tau} \sin(\beta\tau). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Este resultado se justifica al observar que, en el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (3.4), que se obtiene a partir de (3.3), la derivada fraccionaria conforme general respecto a x y respecto a y son exactamente un múltiplo de la derivada de orden entero multiplicada por la función $\varphi(t, \alpha)$.

Finalmente, notamos que las coordenadas en (3.17) corresponden a las coordenadas del ciclo límite máximo $\gamma_{u_{máx}}^*(t)$ a medida que $\alpha \rightarrow 1$.

Lo anterior se puede resumir de la siguiente manera:

Teorema 3.1. El sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (3.4) con condiciones iniciales (3.5) tiene un ciclo límite máximo único $\gamma_{u_{máx}}^*(t)$, que está descrito de manera única independientemente del orden $\alpha \in (0, 1]$. El ciclo límite máximo se obtiene bajo el efecto de la peor perturbación externa $u_{máx}(t) = \delta \operatorname{sign} y(t)$.

Capítulo 4

Criterio de estabilidad robusta

La importancia del ciclo límite máximo $\gamma_{u_{\max}}^*(t)$ en el problema de máximas desviaciones se debe a la posibilidad de establecer un criterio de estabilidad robusta para ecuaciones diferenciales de orden entero, lo cual es conocido en la literatura, véase por ejemplo Aleksandrov *et al.* (2010, 2021). En vista del Teorema 3.1, ahora se puede establecer un criterio de estabilidad robusta para el caso de la ecuación diferencial fraccionaria conforme general (3.4) con perturbaciones externas $u(t) \in \mathcal{U}$. En este breve capítulo, se establece un criterio basado en una extensión de la definición de estabilidad bajo perturbaciones de acción constante, introducida por G. N. Duboshin e I. G. Malkin para sistemas de ecuaciones diferenciales de orden entero, ver Elsgoltz (1969).

Con este objetivo, consideramos la siguiente norma definida en el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (3.4):

$$\|\gamma_u\| = \max \left\{ \max_{t \geq 0} |x(t)|, \max_{t \geq 0} |y(t)| \right\}.$$

Sin pérdida de generalidad, asumimos que las condiciones iniciales (3.5) son de la forma $\gamma_u(0) = \mathbf{p}$, donde $\mathbf{p} = (a_0^{\max}, 0)^\top$ y $|a_0^{\max}| \leq a^*$, con a^* el parámetro definido en (3.16).

Adicionalmente, en $\mathbb{R}$ consideramos definida la norma $\|\mathbf{p}\|_\infty = \max\{|p_1|, |p_2|\}$ para cada $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^\top \in \mathbb{R}^2$.

Por otro lado, si en el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (3.4) no hay perturbación externa y las condiciones iniciales son nulas, es decir, si $u_0(t) \equiv 0$ y $a_0^{\max} = 0$, entonces la solución correspondiente es la solución trivial: $\gamma_{u_0}(t) \equiv \mathbf{0}$. Dicha solución se denomina *no perturbada*.

Consideramos el siguiente concepto:

Definición 4.1. La solución no perturbada $\gamma_{u_0}(t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (3.4) es robustamente estable con respecto a perturbaciones externas $u(t) \in \mathcal{U}$ y a condiciones iniciales $\gamma_u(0) = \mathbf{p}$, si para todo $\epsilon > 0$ existen $\eta_1(\epsilon) > 0$ y $\eta_2(\epsilon) > 0$ tales que, bajo las condiciones: $\|\mathbf{p}\|_\infty \leq |a_0^{\max}| < \eta_1(\epsilon)$ y $|u(t)| \leq \delta < \eta_2(\epsilon)$ para todo $t \geq 0$, cualquier solución del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (3.4) satisface la desigualdad $\|\gamma_u\| < \epsilon$.

42 Criterio de estabilidad robusta

De acuerdo con la construcción de las máximas desviaciones a^* y b^* , observamos que el ciclo límite máximo $\gamma_{u_{\max}}^*(t)$ tiene como líneas tangentes las rectas $x = \pm a^*$ y $y = \pm b^*$, de lo cual se sigue que, para cualquier otra elección de $u(t) \in \mathcal{U}$, la trayectoria correspondiente satisface la inclusión

$$\gamma_u(t) \subset [-a^*, a^*] \times [-b^*, b^*], \quad t \geq 0.$$

Por lo tanto, la estimación $\|\gamma_u\| < \epsilon$ se satisface siempre que se cumpla $\max\{a^*, b^*\} < \epsilon$, es decir, siempre que

$$\delta < \eta_2(\epsilon) = \frac{\epsilon}{\max\{\hat{p}, \hat{q}\}}, \quad (4.1)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \frac{1}{\omega^2} \coth \frac{\pi\mu}{2\beta}, \\ \hat{q} &= \frac{1}{\omega} \left(1 + \coth \frac{\pi\mu}{2\beta} \right) \exp \left(-\frac{\mu}{\beta} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\mu}{\beta} \right) \right). \end{aligned}$$

Evidentemente,

$$\eta_1(\epsilon) = \delta \hat{p}, \quad (4.2)$$

y por lo tanto, $\eta_1(\epsilon) < \hat{p}\eta_2(\epsilon)$. Esto permite obtener el siguiente resultado:

Teorema 4.2. Si dado $\epsilon > 0$ se eligen $\eta_1(\epsilon)$ y $\eta_2(\epsilon)$ de acuerdo a las expresiones (4.1) y (4.2), entonces para cada elección de la perturbación externa $u(t) \in \mathcal{U}$ en el lado derecho del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (3.4), la correspondiente solución $\gamma_u(t)$ con condiciones iniciales $\mathbf{p} = (a_0^{\max}, 0)^\top$, donde $|a_0^{\max}| \leq a^*$, satisface el estimado

$$\|\gamma_u\| \leq \epsilon,$$

es decir, la solución no perturbada $\gamma_{u_0}(t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (3.4) es robustamente estable con respecto a las perturbaciones externas $u(t) \in \mathcal{U}$ y las condiciones iniciales $\gamma_u(0) = \mathbf{p}$

Los siguientes ejemplos muestran la validez del criterio de estabilidad robusta. Asumimos en ellos que la función fraccionaria conforme es $\varphi(t, \alpha) = t^{1-\alpha}$. En cada ejemplo, se muestran las gráficas correspondientes a las trayectorias solución $(x_{a_k^{\max}}(t), y_{a_k^{\max}}(t))^\top$, así como la parametrización de dichas funciones mostrando su respectivo ciclo límite. Las gráficas se obtuvieron empleando el código mostrado en el Apéndice A.

Ejemplo 4.3. Suponemos que los parámetros en el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (3.4) son $\mu = 0.2$ y $\omega = 1.0$. Con estos parámetros, tenemos $\hat{p} \approx 3.3507$ y $\hat{q} \approx 3.2897$. Si consideramos el problema de encontrar soluciones de (3.4) de manera que satisfagan $\|\gamma_u(t)\| < 1$, entonces, a partir de (4.1) y (4.2), se sigue que basta elegir $\eta_1(\epsilon) = 0.9000$ y $\eta_2(\epsilon) = 0.2985$.

Elegimos $a_0 = -0.5$ y $\delta = \frac{9}{10}\eta_2(\epsilon)$ y, como caso particular, se consideran los casos $\alpha = 0.4$, $\alpha = 0.7$ y $\alpha = 1.0$. La Figura 4.1 muestra las trayectorias de las funciones $x(t)$

y $y(t)$ en las cuales se ha determinado el mismo número de máximas desviaciones para $t \in [0, 29]$. Los ciclos límite correspondientes se observan en la Figura 4.2. Observamos que las trayectorias correspondientes en el plano de fase coinciden.

Ejemplo 4.4. Suponemos que los parámetros en el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (3.4) son $\mu = 0.45$ y $\omega = 1.0$. Con estos parámetros, tenemos $\hat{p} \approx 1.7892$ y $\hat{q} \approx 1.5991$. Si consideramos el problema de encontrar soluciones de (3.4) de manera que satisfagan $\|\gamma_u(t)\| < 1$, entonces, a partir de (4.1) y (4.2), se sigue que basta elegir $\eta_1(\epsilon) = 0.9000$ y $\eta_2(\epsilon) = 0.558909$.

Elegimos $a_0 = -0.5$ y $\delta = \frac{9}{10}\eta_2(\epsilon)$ y, como caso particular, se consideran los casos $\alpha = 0.4$, $\alpha = 0.7$ y $\alpha = 1.0$. La Figura 4.3 muestra las trayectorias de las funciones $x(t)$ y $y(t)$ en las cuales se ha determinado el mismo número de máximas desviaciones para $t \in [0, 33]$. Los ciclos límite correspondientes se observan en la Figura 4.4. Observamos que las trayectorias correspondientes en el plano de fase coinciden.

Ejemplo 4.5. Suponemos que los parámetros en el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (3.4) son $\mu = 0.7$ y $\omega = 1.0$. Con estos parámetros, tenemos $\hat{p} \approx 1.5251$ y $\hat{q} \approx 1.1579$. Si consideramos el problema de encontrar soluciones de (3.4) de manera que satisfagan $\|\gamma_u(t)\| < 1$, entonces, a partir de (4.1) y (4.2), se sigue que basta elegir $\eta_1(\epsilon) = 0.9000$ y $\eta_2(\epsilon) = 0.655705$.

Elegimos $a_0 = -0.5$ y $\delta = \frac{9}{10}\eta_2(\epsilon)$ y, como caso particular, se consideran los casos $\alpha = 0.4$, $\alpha = 0.7$ y $\alpha = 1.0$. La Figura 4.5 muestra las trayectorias de las funciones $x(t)$ y $y(t)$ en las cuales se ha determinado el mismo número de máximas desviaciones para $t \in [0, 45]$. Los ciclos límite correspondientes se observan en la Figura 4.6. Observamos que las trayectorias correspondientes en el plano de fase coinciden.

Ejemplo 4.6. Suponemos que los parámetros en el sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes generales (3.4) son $\mu = 0.8$ y $\omega = 1.0$. Con estos parámetros, tenemos $\hat{p} \approx 1.5686$ y $\hat{q} \approx 1.0891$. Si consideramos el problema de encontrar soluciones de (3.4) de manera que satisfagan $\|\gamma_u(t)\| < 1$, entonces, a partir de (4.1) y (4.2), se sigue que basta elegir $\eta_1(\epsilon) = 0.9000$ y $\eta_2(\epsilon) = 0.637519$.

Elegimos $a_0 = -0.5$ y $\delta = \frac{9}{10}\eta_2(\epsilon)$ y, como caso particular, se consideran los casos $\alpha = 0.4$, $\alpha = 0.7$ y $\alpha = 1.0$. La Figura 4.7 muestra las trayectorias de las funciones $x(t)$ y $y(t)$ en las cuales se ha determinado el mismo número de máximas desviaciones para $t \in [0, 58]$. Los ciclos límite correspondientes se observan en la Figura 4.8. Observamos que las trayectorias correspondientes en el plano de fase coinciden.

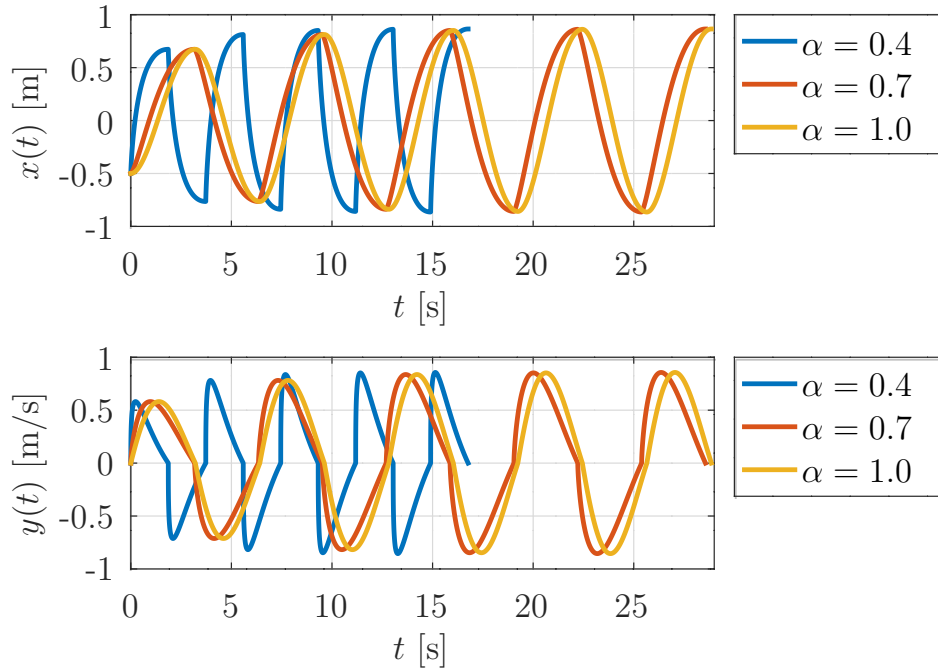


Figura 4.1. Desplazamientos $x(t)$ y $y(t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes del Ejemplo 4.3, en donde se consideran los parámetros $\mu = 0.2$ y $\omega = 1.0$.

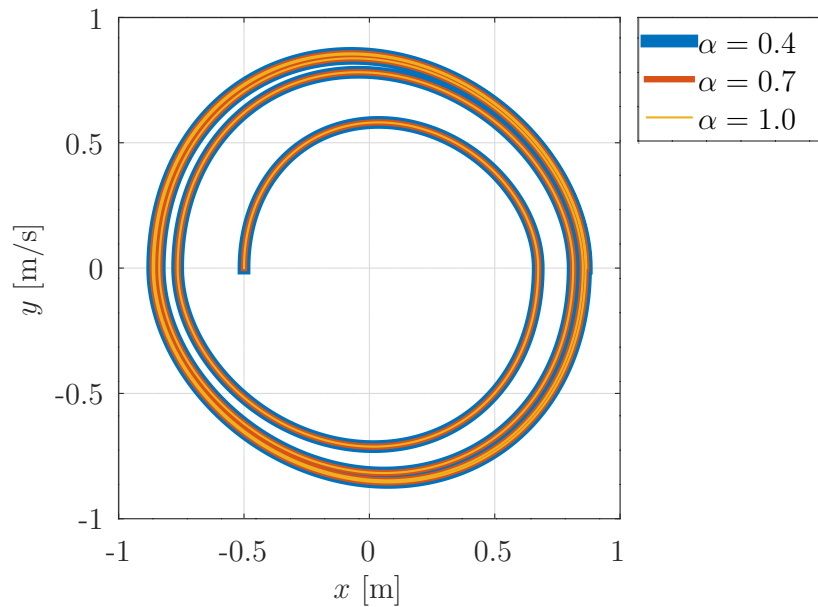


Figura 4.2. Trayectorias del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes que convergen al ciclo límite máximo del Ejemplo 4.3.

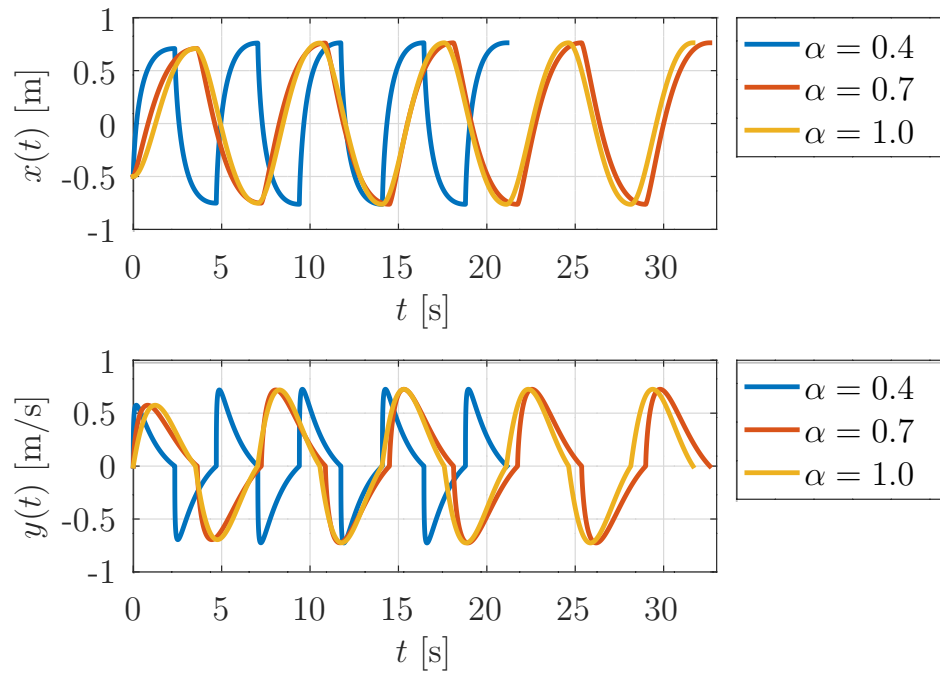


Figura 4.3. Desplazamientos $x(t)$ y $y(t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes del Ejemplo 4.4, en donde se consideran los parámetros $\mu = 0.45$ y $\omega = 1.0$.

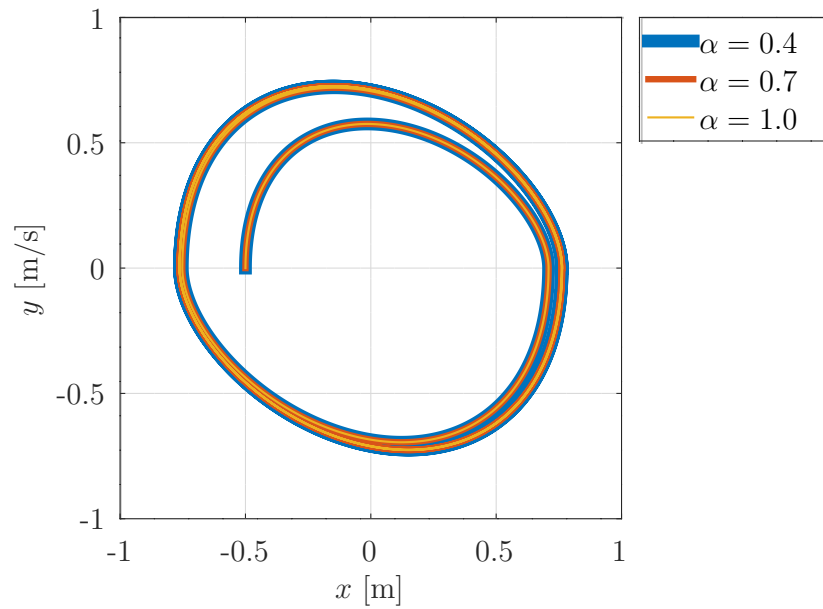


Figura 4.4. Trayectorias del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes que convergen al ciclo límite máximo del Ejemplo 4.4.

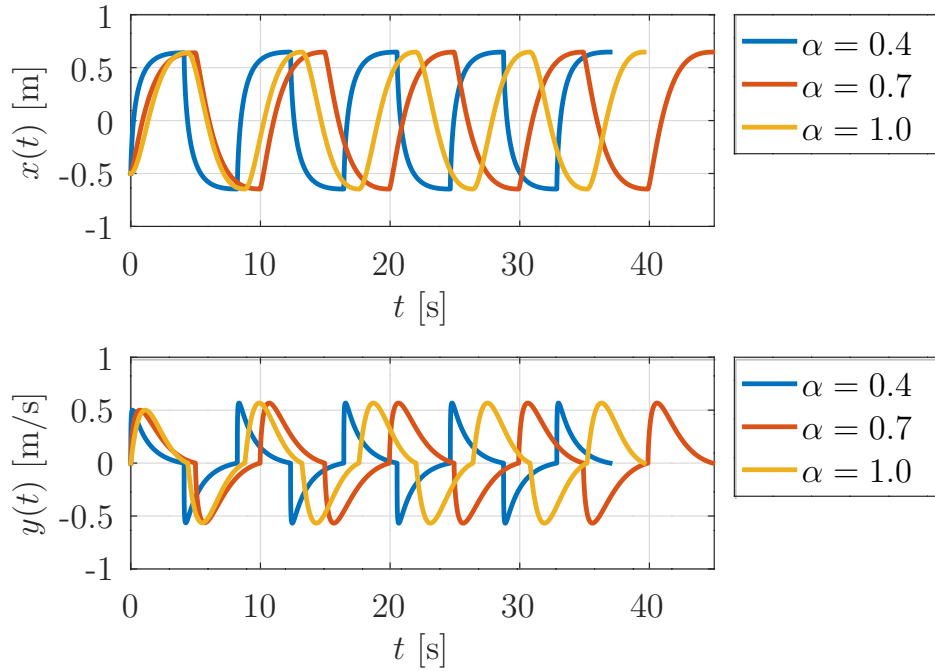


Figura 4.5. Desplazamientos $x(t)$ y $y(t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes del Ejemplo 4.5, en donde se consideran los parámetros $\mu = 0.7$ y $\omega = 1.0$.

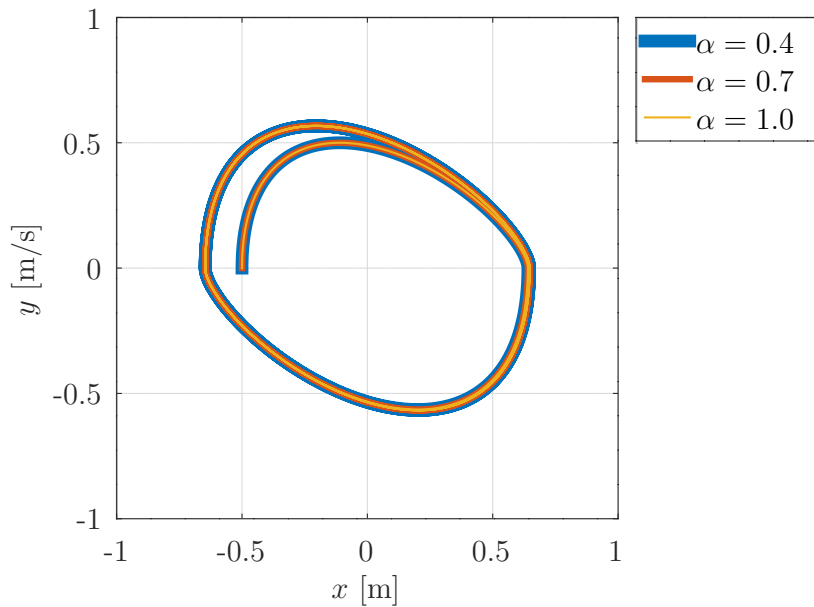


Figura 4.6. Trayectorias del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes que convergen al ciclo límite máximo del Ejemplo 4.5.

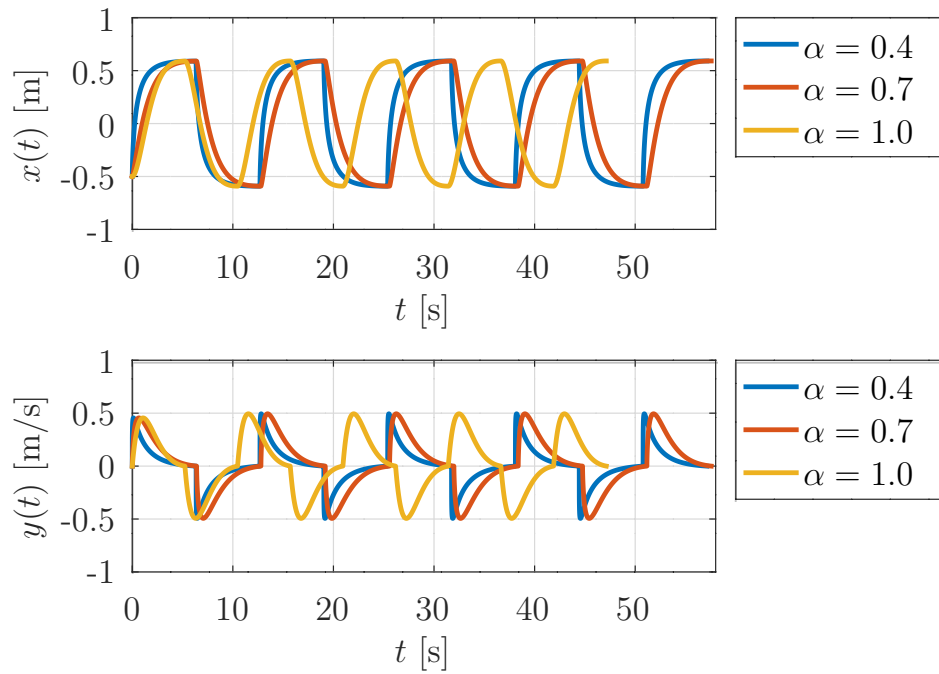


Figura 4.7. Desplazamientos $x(t)$ y $y(t)$ del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes del Ejemplo 4.6, en donde se consideran los parámetros $\mu = 0.8$ y $\omega = 1.0$.

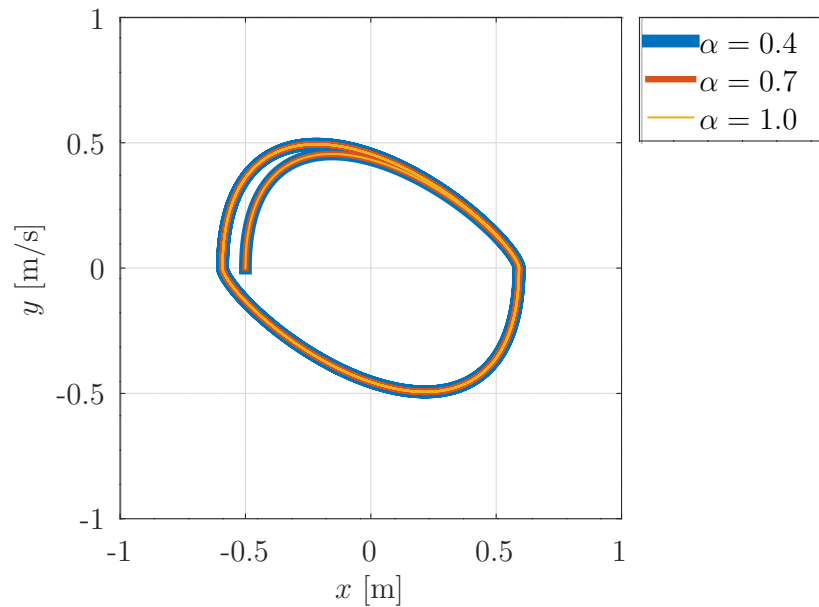


Figura 4.8. Trayectorias del sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias conformes que convergen al ciclo límite máximo del Ejemplo 4.6.

Apéndice A

Código en Octave

Sol.m

```
1
2 function [t,xmax,ymax] = Sol(Ao,Mu,Omega,Delta,Num,MaxT,C)
3
4 Alpha = linspace(0.4,1,Num);
5 Beta = sqrt(1-Mu^2);
6 for k = 1:length(Alpha)
7     Tau = ((pi*Alpha(k)/Beta).^(1./Alpha(k)))/Omega;
8     t(k,:) = linspace(0,Tau,MaxT);
9     TA = (Mu*(Omega*t(k,:)).^Alpha(k))/Alpha(k);
10    TB = (Beta*(Omega*t(k,:)).^Alpha(k))/Alpha(k);
11    D = Delta/Omega^2;
12    xmax(k,:) = -(Ao+D)*exp(-TA).*(cos(TB)+Mu*sin(TB)/Beta)+D;
13    ymax(k,:) = (Omega^2)*(Ao+Delta/Omega^2)*exp(-TA).sin(TB)/
        Beta;
14 endfor
15 xmax = sign(C)*xmax;
16 ymax = sign(C)*ymax;
17 endfunction
```

Clm.m

```
1 N = 8;
2 Num = 3;
3 Ao = 0.5;
4 Mu = 0.2;
5 Omega = 1.0;
6 Beta = sqrt(1-Mu^2);
7 A = exp(-pi*Mu/Beta);
8 P = coth(pi*Mu/2*Beta)/Omega^2;
9 R = exp(-Mu*(pi/2-atan(Mu/Beta))/Beta);
10 Q = (1+coth(pi*Mu/2*Beta))*R/Omega;
11
12 EtaOne = 1/max([P,Q]);
```

50 Código en Octave

```

13 Delta    = 9*EtaOne/10;
14 EtaTwo   = Delta*P;
15 MaxT     = 1000;
16 [t,x,y] = Sol(Ao,Mu,Omega,Delta,Num,MaxT,1);
17
18 T = t;
19 X = x;
20 Y = y;
21 for j = 1:N
22     An      = A*Ao+Delta*(1+A)/Omega;
23     [t,x,y] = Sol(An,Mu,Omega,Delta,Num,MaxT,(-1)^j);
24     T       = [T T(:,j*MaxT)+t];
25     X       = [X x];
26     Y       = [Y y];
27     Ao      = An;
28 endfor
29
30 figure(1)
31 subplot(2,1,1)
32 plot(T(1,:),X(1:,:), 'LineWidth',2);
33 hold on
34 plot(T(2,:),X(2:,:), 'LineWidth',2);
35 plot(T(3,:),X(3:,:), 'LineWidth',2);
36 set(gca, 'FontName', 'Times', 'FontSize',14);
37 hb = get(gcf, "currentaxes");
38 set(hb, 'FontName', 'Times', 'FontSize',14);
39 xlabel('$t$ [s]', 'FontName', 'Times', 'FontSize',14);
40 ylabel('$x(t)$ [m]', 'FontName', 'Times', 'FontSize',14);
41 grid on;
42 axis([0 29 -1 1]);
43 LStr = {'$\alpha = 0.4$', '$\alpha = 0.7$', '$\alpha = 1.0$'};
44 lb = legend(LStr);
45 legend (lb, 'location', 'northeastoutside');
46 set(lb, 'FontName', 'Times', 'FontSize',14);
47 subplot(2,1,2)
48 plot(T(1,:),Y(1:,:), 'LineWidth',2);
49 hold on
50 plot(T(2,:),Y(2:,:), 'LineWidth',2);
51 plot(T(3,:),Y(3:,:), 'LineWidth',2);
52 set(gca, 'FontName', 'Times', 'FontSize',14);
53 hc = get(gcf, "currentaxes");
54 set(hc, 'FontName', 'Times', 'FontSize',14);
55 xlabel('$t$ [s]', 'FontName', 'Times', 'FontSize',14);
56 ylabel('$y(t)$ [m/s]', 'FontName', 'Times', 'FontSize',14);
57 grid on;
58 axis([0 29 -1 1]);
59 LStr = {'$\alpha = 0.4$', '$\alpha = 0.7$', '$\alpha = 1.0$'};
60 lc = legend(LStr);
61 legend (lc, 'location', 'northeastoutside');

```

```

62 set(lc,'FontName','Times','FontSize',14);
63 print(figure(1),'-deps','-color','F4.1.eps','-
    depstexstandalone');
64 system ("latex F4.1.tex");
65 system ("dvips F4.1.dvi");
66 print(figure(1),'-dpdf','-color','F4.1.pdf',"-
    dpdflatexstandalone");
67 system ("pdflatex F4.1");
68
69 figure(2)
70 plot(X(3,:),Y(3:),'LineWidth',6);
71 hold on
72 plot(X(2,:),Y(2:),'LineWidth',3);
73 plot(X(2,:),Y(2:),'LineWidth',1);
74 set(gca,'FontName','Times','FontSize',14);
75 ha = get(gcf, "currentaxes");
76 set(ha,'FontName','Times','FontSize',14);
77 xlabel("$x$ [m]","FontName','Times','FontSize',14);
78 ylabel("$y$ [m/s]","FontName','Times','FontSize',14);
79 grid on;
80 axis equal;
81 axis([-1 1 -1 1]);
82 LStr = {'$\alpha = 0.4$', '$\alpha = 0.7$', '$\alpha = 1.0$'};
83 la = legend(LStr);
84 legend (la, "location", "northeastoutside");
85 set(la,'FontName','Times','FontSize',14);
86 print(figure(2),'-deps','-color','F4.2.eps','-
    depstexstandalone');
87 system ("latex F4.2.tex");
88 system ("dvips F4.2.dvi");
89 print(figure(2),'-dpdf','-color','F4.2.pdf',"-
    dpdflatexstandalone");
90 system ("pdflatex F4.2");
91
92 fprintf('\nValores hallados:\n\n');
93 fprintf('\n Eta1 --> %f',EtaOne)
94 fprintf('\n Eta2 --> %f\n\n',EtaTwo)
95 fprintf('\n T      --> %f\n\n',T(1,length(T)))

```


Conclusión

Se ha obtenido una recopilación de propiedades y resultados de la derivada e integral fraccionaria conforme general, en donde se presentan ejemplos de funciones que permiten comparar la diferenciabilidad en el sentido del cálculo usual y el cálculo fraccionario, así como ejemplos en donde se muestra cómo determinar la derivada fraccionaria conforme general de funciones particulares.

Basado en lo expuesto en Temoltzi-Ávila (2024), se ha presentado el problema de máxima desviación de la ecuación diferencial de segundo orden, en particular la que describe la dinámica del sistema masa-resorte-amortiguador, que mediante el método de fraccionalización, es posible introducir la derivada fraccionaria conforme general. Con la ayuda de la solución de dicho problema de máxima desviación correspondiente al sistema masa-resorte-amortiguador, se ha construido un ciclo límite máximo para la ecuación diferencial fraccionaria conforme general, se probó que dicho ciclo límite máximo es asintóticamente y orbitalmente estable, de acuerdo con el conocido mapa de Poincaré. La construcción del ciclo límite máximo ha permitido establecer un criterio de estabilidad robusta para la solución no perturbada de la ecuación diferencial fraccionaria conforme general. Se ha demostrado también que este ciclo límite máximo y el criterio de estabilidad robusta correspondiente no dependen del orden fraccionario de la derivada fraccionaria conforme general, sin embargo, el tiempo que se toma para la construcción de dicho ciclo límite máximo sí depende del orden de la derivada. Se mostraron ejemplos en donde se muestra la validez de dicho criterio y una comparación del comportamiento de las soluciones para distintos valores del orden de la derivada.

Bibliografía

- Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279:57–66.
<https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.10.016>.
- Abu-Shady, M. y Kaabar, M. K. A. (2021). A generalized definition of the fractional derivative with applications. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021:9444803.
<https://doi.org/10.1155/2021/9444803>.
- Aleksandrov, V. V., Bugrov, D. I., Zhermolenko, V. N., y Konovalenko, I. S. (2021). Attainability set and robust stability of perturbed oscillatory systems. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 70(1):30–34.
<https://doi.org/10.3103/S0027133021010027>.
- Aleksandrov, V. V., Reyes-Romero, M., Sidorenko, G. Y., y Temoltzi-Ávila, R. (2010). Stability of controlled inverted pendulum under permanent horizontal perturbations of the supporting point. *Mechanics of Solids*, 45(2):187–193.
<https://doi.org/10.3103/S0025654410020044>.
- Almeida, R., Guzowska, M., y Odziejewicz, T. (2016). A remark on local fractional calculus and ordinary derivatives. *Open Mathematics*, 14(1):1122–1124.
<https://doi.org/10.1515/math-2016-0104>.
- Atangana, A., Baleanu, D., y Alsaedi, A. (2015). New properties of conformable derivative. *Open Mathematics*, 13(1):889–898.
<https://doi.org/10.1515/math-2015-0081>.
- Bayour, B. y Torres, D. F. (2017). Existence of solution to a local fractional nonlinear differential equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 312(2017):127–133.
<https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.01.014>.
- Boyce, W. y DiPrima, R. (2002). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Limusa Wiley, México, 4a edición.

- Butkovskiy, A. G. (1990). *Phase portraits of control dynamical systems*, volumen 63 de *Mathematics and Its Applications*. Springer, Dordrecht.
<https://doi.org/10.1007/978-94-011-3258-9>.
- Caponetto, R., Capelas de Oliveira, E., y Tenreiro Machado, J. A. (2014). A review of definitions for fractional derivatives and integral. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014:238459.
<https://doi.org/10.1155/2014/238459>.
- Cruz-Duarte, J. M., Rosales-García, J. J., y Correa-Cely, C. R. (2020). Entropy generation in a mass-spring-damper system using a conformable model. *Symmetry*, 12(3):395.
<https://doi.org/10.3390/sym12030395>.
- Delgado-Carmona, I. y Temoltzi-Ávila, R. (2025). Robust stability problem in the mass-spring-damper system with general conformable fractional derivative. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 13(Especial):53–60.
<https://doi.org/10.29057/icbi.v13iEspecial.13494>.
- Devaney, R. L., Blanchard, P., y Hall, G. R. (1999). *Ecuaciones diferenciales*. Thomson, Boston.
- Ebaid, A., Masaedeh, B., y El-Zahar, E. (2017). A new fractional model for the falling body problem. *Chinese Physics Letters*, 34(2):020201.
<https://doi.org/10.1088/0256-307x/34/2/020201>.
- Elaydi, S. (2005). *An introduction to difference equations*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 3a edición.
<https://doi.org/10.1007/0-387-27602-5>.
- Elishakoff, I. y Ohsaki, M. (2010). *Optimization and anti-optimization of structures under uncertainty*. Imperial College Press, Singapore.
<https://doi.org/10.1142/p678>.
- Elsogoltz, L. (1969). *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Mir, Moscú.
- Formalskii, A. M. (2010). On the synthesis of optimal control for second-order systems. *Doklady Mathematics*, 81(1):164–167.
<https://doi.org/10.1134/S1064562410010448>.
- Formalskii, A. M. (2015). *Stabilisation and motion control of unstable objects*, volumen 23 de *Studies in Mathematical Physics*. De Gruyter, Berlin.
<https://doi.org/10.1515/9783110375893>.
- Fradkov, A. L. y Pogromsky, A. Y. (1998). *Introduction to control of oscillations and chaos*, volumen 35 de *World Scientific Series on Nonlinear Science Series A*. World Scientific, Singapore.
<https://doi.org/10.1142/3412>.

- Gómez-Aguilar, J. F., Rosales-García, J. J., y Bernal-Alvarado, J. J. (2012a). Mathematical modelling of the mass-spring-damper system - A fractional calculus approach. *Acta Universitaria*, 22(5):5–11.
- Gómez-Aguilar, J. F., Rosales-García, J. J., Bernal-Alvarado, J. J., Córdova-Fraga, T., y Guzmán-Cabrera, R. (2012b). Fractional mechanical oscillators. *Revista Mexicana de Física*, 58(4):348–352.
- Gómez-Aguilar, J. F., Yépez-Martínez, H., Calderón-Ramón, C., Cruz-Orduña, I., Escobar-Jiménez, R. F., y Olivares-Peregrino, V. H. (2015). Modeling of a mass-spring-damper system by fractional derivatives with and without a singular kernel. *Entropy*, 17(9):6289–6303.
<https://doi.org/10.3390/e17096289>.
- Kajouni, A., Chafiki, A., Hilal, K., y Oukessou, M. (2021). A new conformable fractional derivative and applications. *International Journal of Differential Equations*, 2021:6245435.
<https://doi.org/10.1155/2021/6245435>.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., y Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264:65–70.
<https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.002>.
- Kiskinov, H., Petkova, M., Zahariev, A., y Veselinova, M. (2021). Some results about conformable derivatives in Banach spaces and an application to the partial differential equations. *AIP Conference Proceedings*, 2333(1).
<https://doi.org/10.1063/5.0041758>.
- Kurzhanski, A. B. y Varaiya, P. (2014). *Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation*. Systems & Control: Foundations & Applications. Springer, Switzerland.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-10277-1>.
- Lozada-Coronel, J., Gutiérrez-Corona, J. N., y Quezada-Téllez, L. A. (2024). Introducción al cálculo fraccionario. Una aplicación a la ley de enfriamiento de Newton. *Revista Mixba'al*, 15(1):9–36.
<https://doi.org/10.24275/uami/dcbi/mix/v15n1/loguque>.
- Miller, K. S. y Ross, B. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. John Wiley & Sons, INC., New York.
- Öğrekçi, Y., Başcı, Y., y Misir, A. (2021). Ulam type stability for conformable fractional differential equations. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, 70(2):807–817.
<https://doi.org/10.1007/s12215-020-00532-3>.

58 BIBLIOGRAFÍA

- Oldham, K. B. y Spanier, J. (1974). *The fractional calculus: Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*, volumen 111 de *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, Inc., New York.
- Ortega, A. y Rosales, J. J. (2018). Newton's law of cooling with fractional conformable derivative. *Revista Mexicana de Física*, 64(2):172–175.
<https://doi.org/10.31349/RevMexFis.64.172>.
- Rosales, J., Guía, M., Gómez, F., Aguilar, F., y Martínez, J. (2014). Two dimensional fractional projectile motion in a resisting medium. *Open Physics*, 12(7):517–520.
<https://doi.org/10.2478/s11534-014-0473-8>.
- Rosales, J. J., Gómez, J. F., Guía, M., y Tkach, V. I. (2011). Fractional electromagnetic waves. En *International Conference on Laser and Fiber-Optical Networks Modeling (LFNM)*, pp. 1–3.
<https://doi.org/10.1109/LFNM.2011.6144969>.
- Sales Teodoro, G., Tenreiro Machado, J. A., y Capelas de Oliveira, E. (2019). A review of definitions of fractional derivatives and other operators. *Journal of Computational Physics*, 388:195–208.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.03.008>.
- Sánchez-Muñoz, J. M. (2011). Génesis y desarrollo del cálculo fraccional. *Revista Pensamiento Matemático*, 1(2):1–15.
- Sene, N. y Gómez-Aguilar, J. F. (2019). Fractional mass-spring-damper system described by generalized fractional order derivatives. *Fractal and Fractional*, 3(3):39.
<https://doi.org/10.3390/fractalfract3030039>.
- Souahi, A., Makhoulouf, A. B., y Hammami, M. A. (2017). Stability analysis of conformable fractional-order nonlinear systems. *Indagationes Mathematicae*, 28(6):1265–1274.
<https://doi.org/10.1016/j.indag.2017.09.009>.
- Temoltzi-Ávila, R. (2024). *El problema de máxima desviación en el plano*. Héctor Ochoa Bacelis (Textos de enseñanza de Ciencias Básicas). Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
<https://doi.org/10.19136/lpmd040324y>.
- Vinagre, B. M. y Monje, C. A. (2006). Introducción al control fraccionario. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 3(3):5–23.
- Zhao, D. y Luo, M. (2017). General conformable fractional derivative and its physical interpretation. *Calcolo*, 54(3):903–917.
<https://doi.org/10.1007/s10092-017-0213-8>.

- Zhong, W. y Wang, L. (2018). Basic theory of initial value problems of conformable fractional differential equations. *Advances in Difference Equations*, 2018(1):321.
<https://doi.org/10.1186/s13662-018-1778-5>.

56 BIBLIOGRAFÍA

.