UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE HIDALGO

ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

PROCESOS COGNITIVOS EN EL APRENDIZAJE DE LA MEDIA ARITMÉTICA: CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO MEDIANTE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS Y LA ANALOGÍA CON EL CENTRO DE MASA

PRESENTA

Marco Antonio Hernández Rivera

Director

Dr. Carlos Arturo Soto Campos

Codirector

Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez

Comité tutorial

Dr. Isidro Jesús González Hernández
Dr. Marcos Campos Nava
Dr. Carlos Arturo Soto Campos
Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez

Mineral de la Reforma, Hgo., México, agosto 2025

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
School of Engineering and Basic Sciences
Área Académica de Matemáticas y Física
Department of Physics and Mathematics

Mineral de la Reforma, Hgo., a 28 de agosto de 2025

Número de control: ICBI-AAMyF/2976/2025
Asunto: Autorización de impresión de tesis.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

El Comité Tutorial de la tesis titulada **"Procesos cognitivos en el aprendizaje de la media aritmética: construcción de significado mediante representaciones semióticas y la analogía con el centro de masa"**, realizada por el sustentante **Marco Antonio Hernández Rivera,** con número de cuenta **359870,** perteneciente a la **Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica**, una vez que ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el Artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente:

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

El Comité Tutorial

Dr. Carlos Arturo Soto Campos
Director

Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez
Codirector

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Dr. Isidro Jesús González Hernández
Miembro del comité

Dr. Marcos Campos Nava
Miembro del comité

CASC/EPC

Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P. 42184
Teléfono: 52 (771) 71 720 00 Ext. 40155 y 40156
aamyf_icbi@uaeh.edu.mx, ravila@uaeh.edu.mx

Agradecimientos

Este trabajo de tesis es producto de un esfuerzo colaborativo, por lo cual, quiero agradecer al programa educativo de la Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica de la UAEH, por brindarme el espacio y herramientas que me han permitido crecer tanto personal como profesionalmente.

De igual manera, agradezco profundamente a mi director de tesis, el Dr. Carlos Arturo Soto Campos, quien durante los dos años que estuve bajo su tutela me acompañó y auxilió en numerosas ocasiones, de la misma forma que mi codirector, el Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez, cuya orientación y guía fueron fundamentales en el presente trabajo. Y a mis sinodales el Dr. Isidro Jesús González Hernández y al Dr. Marcos Campos Nava por su paciencia e irreemplazable contribución.

Por su parte, también quiero agradecer a todos mis profesores que me impartieron clases a lo largo de los cuatro semestres del posgrado, de quienes me llevo grandes recuerdos y facilitaron enormemente mi aprendizaje. Del mismo modo, a mis compañeros de clase, a quienes ya puedo llamar amigos, por los momentos compartidos, las horas de estudio y su ayuda incondicional.

Mi agradecimiento también al CONACYT, cuyo apoyo me permitió estudiar este programa.

Y finalmente, a mi familia, que siempre ha respaldado mis decisiones, siendo el pilar fundamental a lo largo de toda mi vida.

Resumen

El aprendizaje y enseñanza de la estadística se aborda desde el nivel básico en México, específicamente en secundaria donde en los tres años se imparte de acuerdo al plan de estudios de matemáticas. La elaboración de esta tesis está motivada por trabajos de investigación en los que se concluye que la enseñanza de la media aritmética se asocia con dificultades de los estudiantes para comprender y aplicar este concepto. Sumado a esto, la relación entre la media aritmética y el centro de masa proporciona una gran oportunidad para el diseño de actividades que cambien el abordaje de su enseñanza y aprendizaje.

Por lo tanto, se tiene como objetivo identificar las características del aprendizaje, así como los procesos cognitivos y matemáticos desarrollados por los estudiantes durante la aplicación de actividades, utilizando representaciones semióticas de la media aritmética. Al mismo tiempo, se analizan las producciones y transformaciones de los registros y representaciones semióticas hechas por los estudiantes y su relación tanto con la representación inicial como con la media aritmética.

Participaron seis estudiantes de segundo grado de secundaria, quienes mostraron diversos conceptos y estrategias para resolver las actividades, simultáneamente identificaron propiedades de la media, acercándolos al aprendizaje significativo. Una de estas estrategias de particular interés, es el denominado para fines de la investigación como *equidad de distancias*, mediante el cual los participantes construyeron y utilizaron el algoritmo computacional de la media aritmética.

Abstract

Statistics teaching and learning is introduced in Mexico at the basic education level, particularly in Junior High School, where it is taught during the three years according to the national mathematical curriculum. This thesis it is motivated by research findings that indicate persistent difficulties among students' in understanding and applying this concept. In addition, the relation between the arithmetic mean and the center of mass brings a great opportunity to design activities that change the way it is taught and learned.

Therefore, the aim of this study is to identify the characteristics of students' learning, as well as the cognitive and mathematical processes they develop during the application of the activities based on semiotic representations of the arithmetic mean. At the same time, to analyze students productions and transformations of the registers and semiotic representations and how they relate both to the initial representation and the concept of the arithmetic mean.

Six second grade Junior High School students' participated in this study, they showed a variety of strategies and conceptual approaches to solve the activities, simultaneously, they identified key properties of the arithmetic mean, fostering meaningful learning. One noteworthy strategy named *distance equity*, involved constructing and applying the computational algorithm of the mean.

Índice general

Agradecimientos II

Resumen III

Abstract IV

1. Introducción 1

1.1. Revisión de Literatura 5

1.1.1. Contextualización de las matemáticas 5

1.1.2. Manipulativos virtuales 7

1.1.3. Problemas en el aprendizaje de la media aritmética 10

1.1.4. Representaciones de la media aritmética 15

1.2. Planteamiento del Problema 26

1.3. Preguntas de Investigación 26

1.3.1. Pregunta general de investigación 27

1.3.2. Preguntas particulares de investigación 27

1.4. Objetivos 27

1.4.1. Objetivo General 27

1.4.2. Objetivos Particulares 27

2. Marco Conceptual 29

2.1. Dimensión ontológica 31
2.2. Dimensión epistemológica 31
2.3. Dimensión didáctica 32
2.4. La media aritmética o promedio 34
2.5. Referentes Teóricos 36
2.5.1. Teoría del Aprendizaje Significativo 36
2.5.2. Teoría de los Registros de Representación Semiótica 42

3. Marco Metodológico **48**
3.1. Introducción 48
3.2. Diseño de la investigación 49
3.3. Participantes 50
3.4. Diseño de la actividad 51
3.5. Descripción del manipulativo virtual 55
3.6. Implementación de las actividades 56
3.7. Instrumentos de recolección de la información y análisis de datos 57

4. Resultados **58**
4.1. Introducción 58
4.2. Proceso de solución de las actividades 59
4.2.1. Estudiantes de alto rendimiento 59
4.2.2. Estudiantes de rendimiento promedio 65
4.2.3. Estudiantes de bajo rendimiento 70
4.3. Resumen de las estrategias de solución 75
4.4. Estrategia utilizada: Equidad de distancias (ED) 76
4.5. Tratamientos y conversiones presentes en las diferentes actividades . . . 78
4.6. Aprendizaje alcanzado 81
4.7. Cierre 84

5. Discusión y conclusiones **86**

5.1. Trabajo a Futuro 89

5.2. Reflexiones finales 90

Apéndices **97**

5.3. Apéndice A. Secuencia de actividades 97

5.4. Apéndice B. Producciones escritas de los participantes 97

5.5. Apéndice C. Transcripción de la sesión 97

Índice de figuras

2.1. *Dimensiones del aprendizaje* 40
2.2. *Clasificación de los registros semióticos* 45
2.3. *Relación entre la teoría del aprendizaje significativo y la teoría de los registros de representación semiótica* 47

3.1. *Funciones del manipulativo virtual* 56

4.1. *Producciones escritas del participante 1* 61
4.2. *Producciones escritas del participante 6* 64
4.3. *Producciones escritas del participante 3* 70
4.4. *Producciones escritas del participante 5* 75
4.5. *Ruta de conversiones* 81
4.6. *Clasificación del aprendizaje de los participantes* 84

Índice de tablas

1.1. *Resumen de la revisión de literatura* 20

4.1. *Resumen actividades 3-10* 75
4.2. *Resumen actividad 11* 76
4.3. *Registros utilizados por los participantes* 80

Capítulo 1

Introducción

El aprendizaje y enseñanza de la estadística se aborda desde el nivel básico en México. De acuerdo con el Programa de Estudios para la Educación Primaria -Programa Sintético de la Fase 4 y 5- desarrollados y publicados por la Secretaría de Educación Pública (SEP), es a partir de cuarto grado de primaria cuando se presentan las medidas de tendencia central, siguiendo con el mismo enfoque en quinto grado (SEP, 2024a). En sexto grado de acuerdo a SEP (2024b) se amplía el estudio de estas medidas estadísticas con la introducción de la mediana y media aritmética, y como se puede ver en el libro de texto desarrollado por la Dirección General de Materiales Educativos (DGME) se define a las medidas de tendencia central como:

> También conocidas como MTC, son aquellas que describen un conjunto de datos centrales en una lista. Se pueden distinguir tres formas usuales para obtenerlas: media aritmética, mediana y moda. Por ejemplo, al medirse toma un conjunto de datos numéricos como la altura de todos los compañeros de clase, y se pueden ordenar de menor a mayor. (DGME, 2024a, p. 114)

Similarmente, se dice que la media aritmética es un "Número que se obtiene al sumar los datos de un conjunto y dividir el resultado entre el número total de datos. También

se conoce como promedio o media." (DGME, 2024a, p. 107). Asimismo, durante los tres años de secundaria se imparte de manera sistemática el tema de las medidas de tendencia central (SEP, 2024c). En los libros de texto de nivel secundaria *Saberes y Pensamiento Científico*, en DGME (2024b) se menciona que la media aritmética es el *centro de gravedad de los datos* y se hace una definición formal de la media como el cociente la suma de los valores del conjunto de datos y el número total de datos, y esta denotada por $\bar{x}$ de modo que se puede expresar como:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

De igual forma, se presentan ejercicios resueltos donde se aplica la definición de la media, estos ejercicios están en diferentes contextos, tales como determinar la masa corporal promedio de un grupo de alumnos, las horas promedio que los adolescentes miran la televisión y la media de goles que un futbolista anota en una temporada (DGME, 2024d). Adicionalmente en DGME (2024c) se resaltan las siguientes propiedades:

1. La media podrá calcularse sólo si el conjunto de datos es numérico.
2. La media es única para un conjunto de datos.
3. Los valores demasiado grandes o pequeños (valores extremos) alteran significativamente esta medida... En conclusión, si se tiene un valor alejado de la mayoría de los valores del conjunto de datos, este provoca una variación significativa en la media. (p. 87)

En este sentido, Spiegelhalter (2019) menciona que las clases de estadística se fundamentan en la memorización de algoritmos y técnicas aplicables en diferentes situaciones; sin embargo, la comprensión de estas fórmulas, al igual que los problemas que surgen durante el proceso de aprendizaje se dejan de lado para priorizar la memorización ya mencionada. Lo anterior resalta con lo expuesto por Garfield y Ben-Zvi (2007), quienes aseguran que el contexto de los problemas estadísticos que se presentan a los estudian-

tes, así como la propia experiencia de los estudiantes con ese contexto determinado, es fundamental para el razonamiento de los conceptos matemáticos.

Esta investigación es motivada por el análisis de publicaciones previas, tal como lo expone Molero et al. (2019) y Pollatsek et al. (1981) que la enseñanza de la media como un tema sencillo que se aborda de manera algorítmica no genera un aprendizaje significativo, los estudiantes tienen dificultades para su comprensión y aplicación. Sumado a esto, la relación entre la media aritmética y el centro de masa proporciona una gran oportunidad para el diseño de actividades que cambien el abordaje de su enseñanza y aprendizaje.

Se pretende lograr un aprendizaje significativo mediante la contextualización de la media aritmética con tópicos físicos, específicamente el centro de masa. La definición de centro de masa es fundamental en cursos introductorios de física, y si bien no se espera que los estudiantes dominen totalmente este tema, se intenta motivar a los estudiantes de secundaria a buscar y hallar el punto de equilibrio de un sistema de masas en un proceso que se considera intuitivo, como lo exponen Inhelder y Piaget (1985) en su experimento *El Equilibrio de la Balanza*, donde participantes que se encontraban en el estadio de Operaciones Concretas (subestadio IIA, de 7 a 9 años de edad) lograban encontrar el equilibrio mediante prueba y error, ajustando tanto la masa de los objetos como la distancia a la que se colocaban en el sistema, mostrando que pueden encontrar el equilibrio sin conocimientos formales. Por su parte los participantes en el estadio de Operaciones Formales (subestadio IIIB, de 13 años en adelante), establecieron relaciones directas entre las masas y la distancia a la que se colocaban resolviendo el problema rápidamente.

Con la enseñanza por medio de resolución de problemas contextualizados, se puede lograr una vinculación entre las matemáticas y algunos tópicos de diferentes disciplinas que constituyen la formación académica de los estudiantes de nivel secundaria, siendo en este caso la enseñanza de la media por medio de representaciones semióticas. El

vínculo entre disciplinas puede llegar a cambiar la perspectiva del alumno hacia las matemáticas, evitando la tendencia de verlas como una herramienta, pasando a ser una forma de pensamiento y razonamiento, a su vez, visualizando de manera tangible sus aplicaciones (Clarke & Roche, 2018), sin embargo, existen otros factores que se deben considerar y no depender unicamente de ello, ya que no todos los estudiantes interactúan con el contexto de la misma manera, como concluyen Widjaja (2013) y Boaler (1993).

En el presente trabajo, se busca aportar una nueva perspectiva al aprendizaje de la media aritmética de acuerdo con una postura constructivista, donde se espera que los estudiantes sean capaces de construir su conocimiento interactuando con un objeto matemático (media aritmética), aspirando a que el aprendizaje sea significativo de acuerdo a las características descritas por Ausubel et al. (1983), en el que para alcanzar este tipo de aprendizaje, es necesario relacionar las ideas nuevas con las ya presentes en la estructura cognoscitiva del alumno.

Además, con la realización de actividades diseñadas de forma que sean relacionables de manera sustancial, que de acuerdo con Ausubel et al. (1983), un material se relaciona de manera sustancial cuando esta relación es de manera no literal o al pie de la letra, y no arbitraria, se espera la construcción de un aprendizaje significativo, así como un mayor entendimiento del concepto matemático mediante el transito entre registros de representación semiótica expuestos por Duval (2017), partiendo de un sistema construido como un sistema de balance.

1.1. Revisión de Literatura

En esta sección se lleva a cabo una revisión de la literatura de investigación relacionada con los siguientes temas: contextualización de las matemáticas, manipulativos virtuales, problemas de aprendizaje de la media aritmética y representaciones de la media aritmética.

La revisión de literatura tiene la finalidad de explorar los trabajos de investigación relacionados con la presente tesis, además de justificar el problema de investigación y determinar el posible aporte del trabajo.

1.1.1. Contextualización de las matemáticas

Jiménez et al. (2019) identificaron los beneficios del aprendizaje contextualizado de la matemática. El marco de investigación que emplearon los autores, se integró con la perspectiva de aprendizaje en contextos y la teoría de aprendizaje REACT (relacionar, experimentar, aplicar, cooperar y transferir), la taxonomía de Bloom y las etapas de la pirámide de Miller. Además, en el estudio se llevó a cabo un proceso de intervención didáctica basada en cuatro fases: clase magistral, diseño de casos de estudio, aplicación de contextos, así como seguimiento y evaluación. Los participantes fueron 150 estudiantes de licenciatura, inscritos en una asignatura denominada Fundamentos Matemáticos. Los participantes fueron alumnos de una universidad técnica particular en Ecuador. Además, se aplicó una encuesta, integrada por ocho preguntas, para conocer la opinión de los estudiantes sobre los casos de estudio. Se concluyó que el aprendizaje contextual proporciona al alumno una base académica sólida, actitudes favorables y positivas de trabajo, mejores habilidades y comprensión de cómo los conceptos académicos se relacionan con la realidad.

Por su parte Clarke y Roche (2018) realizaron una investigación con el objetivo de ofrecer las bases para el uso de tareas contextualizadas, así como ejemplos que

expliquen el pensamiento de los estudiantes, la retroalimentación de los profesores y las restricciones de este tipo de tareas, bajo la perspectiva de la teoría de la demanda cognitiva. En el trabajo analizan diversos marcos teóricos para definir el contexto y su importancia en el aprendizaje de las matemáticas, además de aplicar un cuestionario a 95 profesores de matemáticas y 224 estudiantes. Por otro lado, se analizaron los resultados de diversos problemas contextualizados. Se observó que la correcta elección de tareas contextualizadas puede ayudar a los estudiantes a realizar conexiones entre las matemáticas y sus aplicaciones, de modo que atrae el interés de los estudiantes, mostrando que estas tareas tienen un doble beneficio. Sin embargo, tanto los hábitos del docente como la disposición y hábitos de estudio del alumno son cruciales en el éxito de las tareas contextualizadas. Finalmente, se menciona que tanto los maestros como los estudiantes muestran aceptación e interés hacia las tareas contextualizadas, sin embargo, es importante tener un buen análisis sobre los beneficios y restricciones que estas tareas brindan para una mejor aplicación de ellas y la obtención de mejores resultados.

A su vez, Widjaja (2013) investigó el impacto de los problemas matemáticos contextualizados en el aprendizaje y el desarrollo del pensamiento matemático. Se aplicaron cuatro problemas contextualizados a grupos de educación básica, de cuarto, quinto y sexto grado, en Indonesia. El trabajo fue estudiado bajo la perspectiva de la teoría de educación matemática realista, en la que el contexto juega un papel significativo como punto de partida en el aprendizaje, para que los estudiantes exploren nociones matemáticas en una situación que es *real* para ellos. Se identificó que los problemas contextuales no hacen más fáciles ni motivantes las matemáticas directamente en los estudiantes, ya que cuentan con diferentes experiencias que afectan su interpretación del contexto, muchas veces incluso ignorándolo. Es fundamental aprovechar las oportunidades que se tengan para la discusión y crear un vínculo adecuado entre el contexto y las ideas matemáticas, el contexto puede llevar a un aprendizaje con entendimien-

to cuando los estudiantes toman un rol activo en la discusión, haciendo preguntas y explicando sus justificaciones y razonamientos.

Finalmente, Boaler (1993) analizó y criticó el uso y efectos del contexto en el aprendizaje de las matemáticas, mediante el estudio de diversas perspectivas del aprendizaje de las matemáticas en un contexto realista, explicando que los estudiantes no perciben las tareas matemáticas escolares como reales solamente porque estén enunciadas en situaciones del mundo real, sin embargo, esto no significa que no cambien nada, ya que el desempeño de los estudiantes está determinado por ello. No todas las personas reaccionan al contexto de la misma manera, debido a la diversidad de experiencias personales, lo que altera el cómo interpretan y tratan de resolver las tareas. Por lo tanto, se sugiere que, añadido al contexto se debe brindar la libertad a los estudiantes de explorar, experimentar y descubrir con los problemas, esto hará que construyan un significado propio, analizando de este modo situaciones matemáticas y entendiendo los aspectos centrales del problema.

1.1.2. Manipulativos virtuales

Hakim et al. (2019) examinaron teorías de abstracción en matemáticas y su posible implementación en la educación matemática, integrando manipulativos virtuales para proveer una solución para diversos problemas en el aprendizaje. Esta investigación, es un estudio preliminar que define los requisitos y necesidades de análisis de los manipulativos virtuales, mediante el estudio de las teorías de la epistemología genética de Piaget y sociocultural de Vygotsky. Identificaron que los métodos de aprendizaje que involucren actividades de manipulación de materiales concretos provocan el proceso de abstracción empírica, debido a que generan experiencia inmediata para los estudiantes, a su vez, los manipulativos virtuales pueden ser usados para desarrollar abstracción teórica de modo que aporta a la construcción de conceptos complejos, ya que pueden apoyar a identificar estructuras matemáticas en diferentes situaciones, de modo que se forman conjeturas

y siendo al mismo tiempo auxiliares en la resolución de problemas. Concluyen que el proceso de abstracción es uno de los componentes más importantes en el aprendizaje de las matemáticas, para lo cual, los manipulativos virtuales crean situaciones que ayudan al desarrollo de la abstracción, sin embargo, se deben considerar diferentes aspectos y características de los manipulativos para realizar el proceso de la mejor manera.

Por su parte, Moyer-Packenham y Westenskow (2013) analizaron los resultados de 66 investigaciones acerca de los efectos de los manipulativos virtuales en el aprendizaje de las matemáticas y rendimiento de los estudiantes, en todas las investigaciones abordaron el análisis conceptual de áreas que promueven el aprendizaje matemático. En su investigación Moyer-Packenham y Westenskow (2013) definen a los manipulativos virtuales como "un interactivo, representación visual basado en la red de un objeto dinámico que presenta oportunidades de construir conocimiento matemático" (p. 35). El estudio usó un diseño de meta-análisis para calcular el efecto del tamaño de los puntajes de investigaciones empíricas que reportaron los resultados de los estudiantes en pruebas matemáticas, y a su vez, para determinar qué tanto fue el cambio en el aprendizaje de los estudiantes, se utilizó la *d de Cohen*[1], en resultados de exámenes pre y post pruebas con el manipulativo virtual. El análisis de las investigaciones permitió identificar cinco áreas en las que los manipulativos virtuales promueven el aprendizaje de los estudiantes: i) restringen la concentración en aspectos específicos; ii) apoyan la creatividad y la variedad de soluciones; iii) relacionan las acciones directamente con la representación del objeto matemático mediante movimientos físicos; iv) aumentan la precisión y v) fungen como motivación y retenedores de atención.

Los manipulativos virtuales permiten a los estudiantes explorar ideas matemáticas de maneras que son muy diferentes de las actividades en lápiz y papel, brindando oportunidades para que el aprendizaje ocurra con diferentes tipos de observaciones

[1]De acuerdo con Cohen (1988) la medición d indica el tamaño del efecto entre dos valores (la hipótesis nula o medición de partida, y la hipótesis alternativa o medición final). Se determina dividiendo la diferencia de promedios de ambas poblaciones entre la desviación estándar combinada, el valor de la d indica por cuantas desviaciones estándar difiere una media con respecto a la otra.

matemáticas.

Durmus y Karakirik (2006) identificaron los usos, e implicaciones de los manipulativos virtuales en el aprendizaje de las matemáticas, siguiendo una metodología teórica, basándose en investigaciones hechas en el área, con una perspectiva constructivista, especialmente siguiendo la teoría socio-cultural. Los resultados muestran que con el uso apropiado de manipulativos es posible que un estudiante construya un concepto o descubra una relación matemática, debido a que pueden ser usados como un intermediario entre el mundo real y el mundo matemático. Además de considerar esencial que a todos los estudiantes se les debe brindar la oportunidad de experimentar con los manipulativos, la sola demostración del maestro no es suficiente para visualizar todo el potencial. Se identificaron algunas características de los manipulativos virtuales beneficiosos, tales como que consistan de acciones sencillas de cambiar, repetir y deshacer, permitan a los estudiantes guardar configuraciones y secuencias de acciones, vinculen dinámicamente diferentes representaciones y mantengan una estrecha conexión entre los objetos representados y símbolos, permitan a los estudiantes y profesores plantear y resolver sus propios problemas, y que los estudiantes tengan la posibilidad de desarrollar un control cada vez mayor de una herramienta matemática flexible y extensible, para ayudar a formar conexiones entre ideas matemáticas.

Se concluye que la integración de la tecnología en la instrucción matemática requiere que los estudiantes estén cómodos con las nuevas representaciones matemáticas, los manipulativos virtuales como aplicaciones informáticas viables hacen que las representaciones matemáticas se familiaricen con los estudiantes al mismo tiempo de ayudar a apreciar las aplicaciones significativas de las matemáticas para resolver problemas del mundo real. La mayoría de los manipulativos virtuales simplemente implementan el acercamiento de *aprendiendo con el modelo*, sin embargo, se pueden lograr buenos resultados de igual manera con manipulativos diseñados con el enfoque *aprendiendo a modelar*. El potencial de los manipulativos virtuales para mejorar la calidad de la

educación matemática es muy prometedora debido a que a diario nuevos proyectos y sitios web son desarrollados para diseñar manipulativos virtuales para alguna área de las matemáticas.

1.1.3. Problemas en el aprendizaje de la media aritmética

Rocha et al. (2024) analizaron las reflexiones de profesores de primaria de matemáticas sobre la posibilidad de la enseñanza de la media aritmética desde la perspectiva de la alfabetización estadística. Se trabajó con cuatro profesores de matemáticas, a los cuales se les aplicó un cuestionario y se les pidió participar en discusiones grupales, en las que se analizaron los errores que los estudiantes cometen frecuentemente al enfrentarse a situaciones que involucran la media aritmética. Por otro lado, los profesores participantes propusieron actividades de aprendizaje de esta medida de tendencia central, basadas en la alfabetización estadística y contextualizadas en situaciones con las que los estudiantes están familiarizados. Se observó que los profesores se enfocaron más en los errores del uso del algoritmo computacional de la media y en la estructura de los problemas, señalando que sería beneficioso si se brindara más información que les sea de ayuda a los estudiantes, sin embargo, también se identificaron en los profesores problemas de interpretación y comprensión de la media como un valor representativo de un conjunto de datos, por lo que se recomienda discutir sobre este problema, para que los profesores reflexionen sobre su práctica docente, así como acercarlos a la enseñanza de la media mediante la alfabetización estadística con tareas contextualizadas.

A su vez, Molero et al. (2019) evaluaron el entendimiento de la media aritmética en estudiantes de primer año de bachillerato, y clasificaron los conflictos semióticos que ocurren en las respuestas parcialmente correctas e incorrectas, con un enfoque ontosemiótico. Para ello, aplicaron un cuestionario de siete preguntas a un grupo de 84 estudiantes de primer año de bachillerato, este cuestionario considera aplicaciones y propiedades de la media, así como representaciones verbales y numéricas, siguiendo un

análisis cualitativo, para determinar los objetos relacionados con la media que son mejor entendidos. Se identificaron diversos conflictos semióticos, por ejemplo cuando el estudiante no reconoce que un problema puede ser resuelto con la media aritmética, conflictos relacionados con conceptos, como confundir la media con la mediana, conflictos relacionados con el algoritmo, y tener problemas para vincularlo con las propiedades de la medida estadística. Para Molero et al. (2019) es importante que los profesores sean conscientes de las dificultades que los estudiantes cuentan al inicio del bachillerato, en donde la media es percibida como un concepto simple. De igual manera sugieren que se continúe la investigación sobre el aprendizaje de la media y el entendimiento de objetos estadísticos para comprender la complejidad de la actividad matemática.

Por su parte, Rodríguez y Castro (2018) identificaron el nivel conceptual y procedimental de la media aritmética en estudiantes de 11° grado (6° semestre de bachillerato en México). Se evaluaron a 148 estudiantes, con la resolución de 9 problemas contextualizados, tomando en cuenta definiciones de conceptos y de algoritmos. El estudio fue de carácter cualitativo, apoyado en estadística descriptiva. Solo el 50 % de los estudiantes logró identificar la media aritmética cuando se presentan los datos de manera explícita, asociándola con la suma y posterior división del total de los datos, el 50 % de los estudiantes realiza bien el algoritmo, mientras que los demás no están seguros de qué hacer. El 30 % de los estudiantes asocian el valor calculado de la media aritmética con un porcentaje, mientras que el 40 % de ellos describe a la media aritmética como un valor medio. La diversidad de conceptos podría estar influenciada por los libros de texto y la manera en la que el profesor administra el currículo. El significado que los estudiantes le dan al promedio está relacionado con el contexto en el que se presenta el problema, de lo contrario lo asumen como un cálculo matemático más. Se considera que la comprensión de un concepto no puede ser simplemente conocer definiciones y propiedades, sino que también a reconocer los problemas donde se emplea, notaciones y palabras con las que se representa. La comprensión de la media aritmética esta orien-

tada por el algoritmo, pero es necesario que los estudiantes adquieran la capacidad de expresión simbólica, gráfica y de argumentación.

Sirnik y Kmetič (2010) analizaron el entendimiento del concepto de la media aritmética en dos grupos de estudiantes de diferente edad. Fueron seleccionados 27 estudiantes de 18 años de edad que cursaban el último año de bachillerato que aplicaron un examen de 10 ítems, a la vez que 20 estudiantes de 13 años de escuela secundaria resolvieron una versión reducida de la prueba, conformada de 7 ítems. En ambos grupos, se evaluaron conocimientos sobre la media, la moda y la mediana en contextos matemáticos, de la vida diaria y relacionado con tópicos físicos. Los resultados muestran que hubo muy pocas diferencias entre ambos grupos. Es claro que los estudiantes dominan el algoritmo de la media, sin embargo no son capaces aplicarlo para solucionar situaciones del día a día. Sirnik y Kmetič (2010) sugieren que las escuelas deben poner más atención a los procesos inversos, para interpretar de mejor manera lo que la media significa en un conjunto de datos. Los estudiantes raramente se enfrentan con problemas de respuesta abierta en contextos matemáticos y de la vida real, así como con investigaciones estadísticas complejas, y que impliquen la toma de decisiones.

De igual manera, Cruz y Garret (2008) identificaron los niveles de entendimiento predominantes demostrados por estudiantes, de acuerdo con las respuestas obtenidas en las tareas planteadas y con las diferencias en los niveles de comprensión entre estudiantes de bachillerato y universitarios. Para ello, aplicaron un instrumento de evaluación a 227 estudiantes, 130 de ellos en el último año de la preparatoria, de entre 16 y 21 años. Los 97 restantes fueron estudiantes de la facultad de educación, 31 de los cuales se estaban especializando en matemáticas, mientras que 66 en educación, de entre 22 y 49 años. Las tareas evalúan el uso del promedio como el mejor estimador de un valor desconocido cuando hay errores de medición y cómo influyen estos valores atípicos en el cálculo del promedio, esto para identificar las posibles dificultades de los estudiantes. Todo lo anterior visto y analizado bajo la perspectiva de la teoría neo-piagetiana, la cual

es un modelo jerárquico para el estudio del desarrollo de los estudiantes en el proceso de aprendizaje, compuesto de diversos niveles. Los estudiantes mostraron conocimiento de la media, sin embargo, algunos escriben el cálculo de manera incorrecta, mientras que otros confunden la media con la mediana. Se concluye que los estudiantes no están familiarizados con los valores atípicos, algunos de los estudiantes fallan para reconocer que el promedio es la medida de tendencia central que puede ser usada como mejor estimador. Por otro lado, no hay diferencias notables entre los estudiantes de bachillerato y los universitarios. Las dificultades emergen porque los estudiantes no están familiarizados con aspectos conceptuales de la media, estudian el cálculo del algoritmo, y ocupan las representaciones adecuadas, pero no cubren las propiedades más tangibles. Los estudiantes pueden obtener la media aritmética para un conjunto de datos dado, pero ésto no está relacionado con los aspectos conceptuales.

En cambio, Strauss y Bichler (1988) examinaron el desarrollo del entendimiento de siete propiedades de la media aritmética para evaluar los efectos del material usado en la prueba y el medio de presentación. 80 estudiantes fueron participantes de esta prueba, 20 de cada grupo de edad (8, 10, 12 y 14 años). El instrumento constó de 32 tareas. Cada participante realizó su prueba de manera individual junto con un instructor, las sesiones iban de 30 a 60 minutos y la palabra promedio no se usó durante las sesiones para analizar el entendimiento de las propiedades de la media sin evocar el conocimiento escolar. Las propiedades de la media consideradas fueron que el promedio se encuentra entre los valores extremos, la suma de las desviaciones desde el promedio es cero, que es influenciado por los valores diferentes al promedio, no es necesariamente igual a uno de los valores que fueron sumados, puede ser una fracción que no tiene equivalente en la realidad, cuando se calcula el promedio, si existe un valor igual a cero debe ser considerado, y que el promedio es representativo de los valores que fueron promediados. Los resultados sugieren que el entendimiento de las propiedades del promedio cambia con la edad, y se ve en el tipo de justificaciones que los participaron ofrecieron en las tareas.

En la primera y segunda propiedad algunos de los estudiantes sentían que no tenían la información suficiente para llegar a una respuesta. En la tercera y cuarta propiedad las tareas fueron resultas de manera correcta por prácticamente la mayoría. En la quinta propiedad los participantes de 8 años tuvieron dificultades en calcular la fracción. Y finalmente, en la sexta y séptima propiedad los participantes más jóvenes justificaban sus respuestas mediante razones sociales para elegir el valor que representa mejor una distribución de datos. Se cree que presentar materiales concretos y manipularlos frente a los estudiantes no tendrá efecto ya que son acompañados de presentaciones verbales muy similares a lo que lo concreto ofrece.

A su vez, Pollatsek et al. (1981) determinaron el nivel de entendimiento conceptual de la media en estudiantes de licenciatura, así como analizar los métodos utilizados en la resolución de problemas que la requieren. Para lograrlo realizaron entrevistas a 17 estudiantes de psicología, tres de ellos habían cursado la mitad de la asignatura de estadística. Esta entrevista consistía en que los estudiantes pensaran en voz alta mientras resolvían una seria de problemas de media aritmética y media ponderada, con una duración de 45 a 50 minutos. Se confirmó que muchos estudiantes no son capaces de ponderar y combinar dos medias en una. Para algunos de los estudiantes la media aritmética era además del procedimiento más fácil que podían hacer, el método en el que pensaron primero, sino que además era el único que tenían para combinar los promedios. Algunos de ellos en los problemas que requieran calcular la media ponderada, consideraban que no se les proporcionaba los datos necesarios, así que hacían lo mejor que podían calculando la media aritmética. Con el análisis de los resultados obtenidos, se concluye que se pueden distinguir tres tipos de conocimiento, el funcional se refiere al entendimiento de la media como concepto que tiene un significado en el mundo real, los datos de la prueba sugieren que los sujetos tienen diferentes niveles de este conocimiento. El computacional involucra una fórmula para la determinación de la media aritmética y otra para la ponderada. El análogo puede apoyarse en representaciones visuales, para

representar a la media como el punto de balance. Este tipo de representaciones puede ser suficiente para prevenir errores en la resolución de problemas, ya que con este se suele aproximar el valor de la media pero no para obtener un valor exacto, sin embargo, en la prueba no se encontraron evidencias de que los estudiantes usaran este tipo de conocimiento. Finalmente, se menciona que los cursos de estadística están enfocados en la memorización de fórmulas y reglas para la resolución de un tipo específico de problemas, haciendo que los estudiantes no desarrollan la capacidad de traducir los datos de una situación problema a una estructura para su cálculo y resolución.

1.1.4. Representaciones de la media aritmética

Fuentes (2020) ilustró la variación de la media aritmética a valores extremos por medio de su representación en un sistema físico. Este sistema físico es el de una palanca, que se utiliza como un símil mecánico para determinar la media o punto de equilibrio de un conjunto de datos. Con ello se logra visualizar de manera gráfica la variación de la media siendo desplazada cuando datos extremos son introducidos al sistema. De igual manera se logró representar con este método la media ponderada en el que a cada valor se le asigna una importancia o *peso* correspondiente a su frecuencia en el conjunto de datos. Se concluyó que un conjunto de datos en el que se busca la media puede ser representado como un sistema físico de palanca, donde la media es equivalente al punto de equilibrio o centro de masa. Este tipo de sistemas pueden ser de ayuda para apoyarse en la enseñanza de la media y media ponderada, ya que de esta forma se visualiza de manera "clara" su sensibilidad a datos *extremos* presentes en el conjunto de datos y cómo dicha variabilidad de los datos afecta a estas mediciones.

Por su parte, Medina et al. (2018) buscaban problematizar la media aritmética para identificar y determinar elementos que deberían ser estudiados por los docentes de matemáticas de educación básica bajo la perspectiva de la teoría socioespistemológica. Para ello, identificaron los argumentos funcionales que se consideran deben hacerse

explícitos en el aprendizaje de la media aritmética en nivel primaria y secundaria, diseñando actividades que no estuvieran centralizadas en el objeto matemático, sino en una representación gráfica del mismo para la formación de significados. En las actividades se usaron conceptos como estabilidad, igualdad de distancias y repartición equitativa, los cuales ayudan a identificar significados de la media, expandiendo las situaciones en las que los estudiantes pueden aplicar estos conocimientos. Si bien la actividad fue diseñada para nivel de educación básica, se considera que puede ser aplicada en otros niveles. Esta estrategia en la que se propone el aprendizaje de la media aritmética mediante una representación gráfica ayuda a la generación de nuevos argumentos y la identificación de relaciones que son oportunidades que se pierden al verla como una operación aritmética de suma y división.

Daiga y Driskell (2021) buscaban determinar qué tipo de pensamiento estadístico demuestran los estudiantes de educación básica al resolver actividades enfocadas en las medidas de tendencia central mediante el pensamiento *transnumerativo*[2], que describe la idea fundamental de reorganizar información mediante diferentes representaciones para mejorar el entendimiento. Para ello, se aplicaron dos actividades enfocadas en la media aritmética a estudiantes de educación básica, en la primera, los participantes reorganizaron regletas de Cuisenaire, de modo que les permitía visualizar una longitud media. En la segunda actividad los estudiantes tenían que hallar el elemento faltante de un conjunto de datos brindado, extendiendo el uso de la media aritmética como una línea horizontal en dos gráficas de barras. Los estudiantes idearon diversas estrategias para resolver la primer actividad, desde la aplicación del algoritmo computacional de la media, hasta el acomodo estratégico de las regletas para conjeturar métodos de resolución, esto los llevó a ver la media como el punto de equilibrio o balance del conjunto de datos. Posteriormente, en la segunda actividad, los participantes trataron

[2]Para Wild y Pfannkuch (1999) la *transnumeración* es un tipo de pensamiento estadístico fundamental que consiste en formar y cambiar representaciones de datos para una mejor comprensión de ese sistema.

resolver la tarea por tanteo hasta que relacionaron este problema con el primero, para nuevamente balancear sus datos. Se concluye que los estudiantes necesitan de diversas oportunidades para representar de diferentes maneras los objetos matemáticos, ya que, mediante la exploración de actividades, ellos reorganizan la información que apoya la transnumeración.

Por otro lado, Sarkar y Rashid (2016) desarrollaron un método visual para entender el valor de la media de un conjunto de datos. Lograron obtener dos métodos de representación geométrica de la media, la primera representación consiste en una gráfica donde el eje vertical esté dado por el valor de la función de la distribución empírica, mientras que en el eje horizontal se muestran los valores presentes en la muestra de datos, al trazar una perpendicular al eje x que divida ambas secciones de igual área de la gráfica se logra hallar la media. Para la segunda representación se parte de un histograma de frecuencias, y nuevamente se traza una perpendicular que divida el área de cada lado de la gráfica en igualdad, pudiendo hacerse por prueba y error o como es recomendado, usando la media ponderada de los valores medios de las columnas del histograma. La perspectiva geométrica de la media es de ayuda para entender muchas de sus propiedades de manera visual, que pueden llegar a ayudar a su aprendizaje de manera más clara, además de lograr su principal cometido, representando la media de dos diferentes maneras alternativas al de un sistema de equilibrio anteriormente citado.

Similarmente, Lesser et al. (2014) analizaron cómo el uso de modelos físicos ayuda al desarrollo de conocimientos sobre las medidas de tendencia central. Se aplicó una prueba previa de diez preguntas acerca de la media y mediana a diez estudiantes, esto seguido de una clase de demostración de 45 minutos, además de una discusión de los modelos de balance como parte de la clase para explorar estas mediciones, finalizando con otra prueba (con similares preguntas y condiciones que la prueba anterior). Durante todos los pasos de la demostración, los estudiantes fueron cuestionados sobre las actividades realizadas y también tenían la oportunidad de formular preguntas. Se notó

una mejora en los resultados, esto denota una construcción de conocimientos acerca de la relación entre la media y la mediana tanto práctico como conceptual, prueba de esto es la pregunta en donde se les pidió a los alumnos una definición de mediana y una interpretación válida en un contexto específico, donde en la prueba previa el 50 % de los alumnos respondió correctamente, teniendo un incremento significativo en la segunda evaluación. Todo esto es consistente con los resultados de las preguntas realizadas durante la sesión de clase. Se espera que este modelo pueda ayudar para que los maestros se sientan más preparados con algunos temas pedagógicos que pueden surgir cuando se enseñan estas medidas centrales. Adicionalmente mencionan que datos del mundo real pueden ser explorados para proveer a los estudiantes una mayor práctica en estas mediciones. Usualmente es una cuestión de identificar qué situación real no es probable que tenga valores atípicos y cuales situaciones son de interés para los estudiantes. Trabajar con estos modelos refuerza el proceso necesario para obtener valores numéricos de las medidas de tendencia central.

En este sentido, O'Dell (2012) diseñó una secuencia de tareas para estudiantes de educación básica con métodos alternativos para la enseñanza de la media por medio de su representación como un punto de balance en un conjunto de datos. La secuencia está dividida en dos partes, en las primeras seis tareas, los estudiantes trabajan con herramientas móviles (una regla de 12 pulgadas, cubos de madera de una o media pulgada, y una pieza que sirva como punto de apoyo). Las tareas consisten en equilibrar el sistema de balance, manteniendo el punto de equilibrio en el medio de la regla (pulgada seis), siendo cada tarea cada vez más demandante, desarrollando ideas que serán usadas posteriormente en la segunda parte de la actividad en la que los estudiantes ya no cuentan con el manipulativo, sólo con una hoja de papel y un conjunto de datos en la que deben determinar la media o el punto de equilibrio. Con ésta secuencia de tareas se logró adaptar la analogía entre la media y el centro de masa en un sistema que permite a los estudiantes desarrollar un entendimiento de la media como un punto de balance

en un conjunto de datos, concluyendo que a los estudiantes se les debe brindar la oportunidad de explorar las diversas características de un sistema como éste, de ésta forma logrando encontrar métodos alternativos de resolución con base a estas características que van notando por medio las tareas, manipulación de objetos y discusión a lo largo de la actividad.

Finalmente, Gfeller et al. (1999) estudiaron la percepción de futuros profesores de matemáticas sobre la media y qué tan diferente es al uso del algoritmo computacional. De igual manera, analizaron si existe alguna relación entre la formación de futuros profesores de matemáticas y la forma en la que resuelven problemas que involucran a la media. Los participantes fueron 13 futuros maestros de ciencias y 7 de matemáticas que están inscritos en una maestría de un año de artes de la enseñanza. Todos los participantes contaban con licenciatura tales como matemáticas, economía, biología, y química. El instrumento de recolección de datos fue diseñado para obtener información pertinente al entendimiento del concepto, los problemas se enfocaban en encontrar la media de un conjunto de datos, o encontrar el elemento faltante del conjunto con una media dada. Además, se les solicitaba a los participantes que una vez resueltos los problemas buscaran una segunda solución. Se observó que no hay diferencia significativa entre los futuros profesores de ciencias y los de matemáticas al usar el algoritmo computacional para resolver problemas, además de que fue el método de resolución más común en ambos grupos, por otra parte, solo dos de los participantes no usaron el balanceo de desviaciones en la resolución de los problemas. Se concluyó que los futuros profesores matemáticas tienen una visión más amplia de la media aritmética a comparación de los profesores de ciencias, aunque no se encontraron suficientes evidencias que demostraran que los antecedentes de los participantes afectasen en la resolución de los problemas balanceando desviaciones.

La Tabla 1.1 sintetiza los resultados de mayor impacto en las investigaciones incluidas en la revisión de literatura.

Tabla 1.1: *Resumen de la revisión de literatura*

Autores	**Pregunta**	**Teorías y Conceptos**	**Metodología**	**Resultados**
Jiménez et al. (2019) Aprendizaje de la matemática basado en el contexto de las ciencias.	¿Cómo promover la comprensión sobre temas fundamentales de matemática como ecuaciones y funciones mediante la contextualización de ciencias afines?	Teoría del aprendizaje contextual REACT.	Se aplicó una encuesta a 150 estudiantes para conocer su opinión y percepción con respecto a los casos de estudio utilizados en el aula como recurso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.	Se obtuvo una mejora en las calificaciones, así como en las encuestas de interés por la asignatura.
Clarke y Roche (2018) Using contextualized task to engage students in meaningful and worthwhile mathematics learning.	¿Cuáles son los fundamentos para el uso de tareas contextualizadas en el aprendizaje de las matemáticas?	Demanda cognitiva.	Se estudian diversos marco teóricos para definir el contexto y su importancia en el aprendizaje. Además, se aplican cuestionarios y problemas a 95 profesores y 224 estudiantes para conocer su opinión sobre ellos y su desempeño.	La correcta elección de tareas contextualizadas puede ayudar a los estudiantes a realizar conexiones entre las matemáticas y sus aplicaciones, aumentando el interés de los estudiantes, mostrando que estas tareas tienen un doble beneficio. Sin embargo, tanto los hábitos del docente como la disposición y hábitos de estudio del alumno son cruciales en el éxito de las tareas contextualizadas.
Widjaja (2013) The use of contextual problems to support mathematical learning.	¿Qué impacto tiene el uso de problemas contextuales en el aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo del pensamiento matemático?	Educación matemática realista.	Se presentan a estudiantes de diferentes grados de educación básica cuatro problemas contextuales analizando su pensamiento matemático.	El problema contextual por si solo no lleva a un aprendizaje con entendimiento, sino que requiere que tanto los maestros como los alumnos trabajen junto para hacer que el contexto tenga significado.
Boaler (1993) Te Role of Contexts in the Mahtematics Classroom: Do they Make Mahtematics More “Real”?	¿Cómo el contexto realista afecta al aprendizaje de las matemáticas?	Contexto realista en las matemáticas.	Se analizaron diversas posturas acerca de los beneficios y efectos del contexto realista en la educación matemática.	El desempeño de los estudiantes está determinado por contexto. No todas las personas reaccionan a el de la misma manera, debido a la diversidad de experiencias personales. Los autores sugieren que, añadido al contexto se debe brindar la libertad a los estudiantes de explorar, experimentar y descubrir con los problemas, esto hará que construyan un significado propio.

Continúa en la siguiente página

Autores	Pregunta	Teorías y Conceptos	Metodología	Resultados
Hakim et al. (2019) Virtual manipulatives media in mathematical abstraction.	¿Cómo los manipulativos virtuales promueven la abstracción matemática para el aprendizaje?	Epistemología genética y sociocultural.	Estudio preliminar que define los requisitos y necesidades de análisis de los manipulativos virtuales.	Los métodos de aprendizaje que involucren actividades de manipulación de materiales concretos provocan el proceso de abstracción empírica, a su vez, los manipulativos virtuales pueden ser usados para desarrollar abstracción teórica, ya que pueden apoyar forman conjeturas y siendo al mismo tiempo auxiliares en la resolución de problemas.
Moyer-Packenham y Westenskow (2013) Effects of Virtual Mianipulatives on Student Archivement and Mathematics Learning.	¿Cuáles son los efectos de los manipulativos virtuales en el aprendizaje matemático?	Manipulativo virtual, objetos digitales de aprendizaje.	El estudio usó un diseño de meta-análisis para calcular el efecto del tamaño de los puntajes de investigaciones empíricas que reportaron los resultados de los estudiantes en pruebas matemáticas.	Los manipulativos virtuales promueven el aprendizaje de los estudiantes ya que restringen la concentración, promueven la creatividad, relacionan representaciones de los objetos matemáticos con las acciones de los estudiantes, mejoran la precisión y motivación.
Rocha et al. (2024) Teaching arithmetic mean from the perspective of statistical leteracy in the final years: Relfections with teachers.	¿Qué opinan profesores de matemáticas sobre la posibilidad de enseñar la media aritmética desde la perspectiva de la alfabetización estadística?	Alfabetización estadística.	Se aplico un cuestionario a cuatro profesores de matemáticas de primaria, además de invitarlos a participar en discusiones grupales, donde se analizaron los errores frecuentes de los estudiantes al trabajar con la media aritmética y proponer actividades contextualizadas.	Los profesores se enfocaron más en los errores del uso del algoritmo computacional de la media y en la estructura de los problemas, sin embargo, también se identificaron en los profesores problemas de interpretación y comprensión de la media como un valor representativo de un conjunto de datos.
Molero et al. (2019) Evaluation of Secondary Student´s Understanding of Arithmetic Mean.	¿Cuál es el nivel de entendimiento y los conflictos semióticos respecto de la media aritmética en estudiantes de primer año de bachillerato?	Enfoque ontosemeótico.	Se aplicó un cuestionario de siete preguntas a un grupo de 84 estudiantes de primer año de bachillerato, que considera aplicaciones y propiedades de la media.	Los estudiantes no reconocen que los problemas pueden ser resueltos con la media aritmética, confunden las medidas de tendencia central, así como problemas operacionales con el algoritmo.

Continúa en la siguiente página

Autores	Pregunta	Teorías y Conceptos	Metodología	Resultados
Rodríguez y Castro (2018) Significado de la media aritmética y el uso de la palabra promedio en estudiantes de 11° grado.	¿Cuál es el nivel conceptual y procedimental de la resolución de problemas que involucran la media aritmética en estudiantes de 11° grado?	Significado, promedios, errores y dificultades.	Se evaluaron a 148 estudiantes de 11° grado, con 9 problemas contextualizados, tomando en cuenta definiciones de conceptos, conceptos de algoritmos y promedios. El estudio es de carácter cualitativo.	Solo el 50 % de los estudiantes logra identificar la media aritmética cuando se presentan los datos de manera explícita, asociándolo con la suma y posterior división del total de datos. El 50 % de los estudiantes realiza bien el algoritmo, los demás no están seguros de que hacer.
Sirnik y Kmetič (2010) Understanding of Arithmetic Mean.	¿Qué nivel de entendimiento de la media aritmética tienen dos grupos de estudiantes con diferentes edades?	Media aritmética.	27 estudiantes de último año de bachillerato aplicaron un examen de 10 ítems, y 20 estudiantes de escuela secundaria resolvieron una prueba reducida de 7 ítems. Se evaluaron conocimientos sobre la media, la moda y la mediana.	Los estudiantes dominan el algoritmo de la media, sin en embargo no lo aplican para solucionar situaciones del día a día. Los estudiantes raramente se enfrentan con problemas de respuesta abierta en contextos matemáticos y de la vida real, lo que dificulta la interpretación de la media de un conjunto de datos.
Cruz y Garret (2008) Understanding the Arithmetic Mean: A Study with Secondary and University Students.	¿Cuáles son los niveles de entendimiento predominantes demostrados por estudiantes de acuerdo con las respuestas obtenidas en las tareas planteadas?	Teoría neo-piagetiana.	Se evaluó el uso del promedio como el mejor estimador de un valor desconocido cuando hay errores de medición y como influyen estos valores atípicos en el cálculo del promedio, y las posibles confusiones de los estudiantes de bachillerato y universidad.	Los estudiantes no están familiarizados con los valores atípicos, algunos de ellos fallan para reconocer que el promedio es la medida de tendencia central que puede ser usada como mejor estimador, ocupan las representaciones adecuadas, pero no cubren las propiedades más tangibles.
Strauss y Bichler (1988) The Development of Children´s Concepts of the Arithmetic Average.	¿Cual es el nivel de entendimiento de estudiantes de educación básica sobre 7 propiedades de la media aritmética?	La media aritmética y sus propiedades.	80 estudiantes de educación básica realizaron una secuencia de 32 tareas de manera individual en sesiones que iban de 30 a 60 minutos.	El entendimiento de las propiedades del promedio cambia con la edad, esto se refleja en el tipo de justificaciones que los participantes ofrecieron en las tareas. Por lo tanto, se recomienda presentar las propiedades de menor a mayor dificultad de acuerdo al desarrollo del entendimiento de los estudiantes.

Continúa en la siguiente página

Autores	Pregunta	Teorías y Conceptos	Metodología	Resultados
Pollatsek et al. (1981) Concept or computation: Students understanding of the mean.	¿Cuáles son las concepciones de los estudiantes de nivel universitario de la media? ¿Qué métodos ocupan para la resolución de problemas que involucran la media?	Resolución de problemas.	Se solicitó a 17 estudiantes de psicología que pensaran en voz alta mientas resolvían una serie de problemas. El entrevistador examinaba a los estudiantes en un intento de analizar el razonamiento en sus respuestas.	Muchos estudiantes no son capaces de ponderar y combinar dos medias en una sola, para algunos la media aritmética era el único recurso que tenían para tratar con promedios y medias. Se pueden distinguir tres tipos de conocimiento, el funcional, computacional, y análogo.
Fuentes (2020) An Analogy between Statistics and Physics: The Arithmetic Mean and a Lever System.	¿Es posible representar un conjunto de datos y su media aritmética en un sistema físico?	Media aritmética, media ponderada, centro de masa.	Se calculan diferentes medias aritméticas y ponderadas, ilustradas en diagramas que simulan un sistema físico, para poder observar de mejor manera como es el comportamiento de la media cuando las masas son desplazadas a lo largo del sistema.	Se observó de manera clara como la posición de la media aritmética o centro de masa varía cuando se experimenta con las masas o datos. De igual manera se logró representar en este sistema de palanca la media ponderada.
Medina et al. (2018) La resignificación de la media aritmética, bajo el análisis gráfico de la representación de los datos.	¿Qué elementos de la media aritmética deben ser estudiados por los docentes de educación básica?	Teoría socioespistemológica.	Se diseñaron actividades que no tuvieran centralizadas al objeto matemático, usando conceptos como estabilidad, igualdad de distancias y repartición equitativa.	Cuando se propone el aprendizaje de la media aritmética mediante una representación gráfica ayuda a la generación de nuevos argumentos y la identificación de relaciones que son oportunidades que se pierden al verla como una operación aritmética de suma y división.
Daiga y Driskell (2021) Visualizing the Arithmetic Mean.	¿Qué tipo de pensamiento estadística demuestran los estudiantes de educación básica al resolver actividades enfocadas en las medidas de tendencia central?	Pensamiento Transnumerativo.	Se aplicaron dos actividades a estudiantes de primaria utilizando manipulativos físicos y representaciones gráficas de la media aritmética.	Los estudiantes idearon diversas estrategias para resolver las actividades, desde la aplicación del algoritmo computacional de la media, hasta el acomodo estratégico del manipulativo para conjeturar métodos de resolución, esto los llevo a ver la media como el punto de equilibrio o balance del conjunto de datos. Los estudiantes mediante la exploración de actividades, ellos reorganizan la información que apoya la transnumeración.

Continúa en la siguiente página

Autores	Pregunta	Teorías y Conceptos	Metodología	Resultados
Sarkar y Rashid (2016) A geometric view of the mean of a set of numbers.	¿Cómo representar de manera visual la media de un conjunto de datos para apoyar su entendimiento?	La media aritmética como el centro de masa.	Se intenta hallar nuevas formas de representar a la media aritmética, para ello se determinó una función con la cual y mediante su gráfica se pretende lograr el objetivo.	Se lograron obtener dos métodos de representación de la media. El primero es la gráfica de una función que al dividirla en dos secciones de igual área se obtiene la media, el segundo método es un histograma, que nuevamente, se divide en dos secciones de igual área para encontrar la media.
Lesser et al. (2014) Finding a Happy Median: Another Balance Representation for Measures of Center.	¿Cómo los modelos físicos pueden ayudar a los estudiantes a tener una mejor base conceptual y contextual para comprender y distinguir las medidas de tendencia central?	Modelos de balance de las medidas de tendencia central.	Se aplico una prueba previa a diez estudiantes que consistió de diez preguntas acerca de la mediana, seguido de una demostración y una discusión de los modelos de balance, concluyendo con una prueba.	Los estudiantes adquirieron conocimiento acerca de la relación entre la media y la mediana, demostrando un efecto tanto practico como significativo, se nota un incremento en lo aciertos en la segunda evaluación.
O'Dell (2012) The mean as balance point.	¿Cómo enseñar la media aritmética con mediante una secuencia de tareas con métodos alternativos de representación gráfica?	La media aritmética como centro de masa de un sistema de balance.	Estudiantes de educación básica resolvieron un secuencia de tareas. Las primeras seis tareas con un manipulativo, en la segunda parte, los estudiantes sólo contaban con una hoja de papel y lápiz.	Completando esta secuencia de tareas se permite a los estudiantes desarrollar un entendimiento significativo de la media como un punto de balance en un conjunto de datos, descubriendo a través de las tareas propiedades de la media.
Gfeller et al. (1999) Preservice Teacher´s Use of Multiple Representation In Solving Arithmetic Mean Problems.	¿Los futuros profesores de ciencias y matemáticas ven a la media de manera diferente con respecto al uso del algoritmo computacional o el uso de desviaciones de equilibrio?	Media aritmética y diversas formas de representarla.	Se aplicaron diversos problemas a 20 futuros maestros para obtener información pertinente al entendimiento del concepto.	El algoritmo computacional fue el método de resolución más común. No se encontraron suficientes evidencias que demostraran que los antecedentes de los participantes afectasen en la resolución de los problemas balanceando desviaciones.

Se hace evidente el contraste presente en los resultados de investigaciones pertinentes, tal como los trabajos de Jiménez et al. (2019) y Widjaja (2013) en donde si bien ambos resaltan la importancia del contexto en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas Widjaja (2013) hace hincapié en que es necesario complementarlo con una participación activa en clase. De manera similar Moyer-Packenham y Westenskow

(2013) identifican y resaltan las áreas en las que los manipulativos virtuales apoyan el aprendizaje de las matemáticas.

Las investigaciones de las dificultades en el aprendizaje y concepción de la media aritmética por su parte se mostraron de manera más consistente, ya que evidencian dificultades en la aplicación y resolución de problemas pertinentes al tema, arrojando que una de las principales causas es el aprendizaje mecanizado de algoritmos, y si bien los estudiantes son capaces de aplicar el algoritmo en ejercicios en donde la cuestión es explícita, una vez se les presentan problemas contextualizados, tienen dificultades para incluso la identificación de su posible aplicación para la solución, como lo exponen Cruz y Garret (2008).

Por otro lado, se analizaron publicaciones en las que se presentan diversas maneras de representar a la media aritmética, pero solo las realizadas por O'Dell (2012) y Lesser et al. (2014) fueron las que se aplicaron con el propósito de analizar el comportamiento y aprendizaje de los estudiantes con estas alternativas.

Lo anterior es importante resaltar, ya que se puede interpretar del trabajo de Gfeller et al. (1999) una mayor capacidad de representar la media aritmética puede ser sinónimo de un mayor entendimiento de esta medida y sus propiedades, ayudando a justificar y dar significado al valor de la media como se pudo observar en la investigación hecha por Strauss y Bichler (1988).

La revisión de literatura como ya se observó, realza áreas en las que la presente investigación puede aportar a lo ya investigado sobre el aprendizaje de la media aritmética.

1.2. Planteamiento del Problema

Mediante la revisión de literatura se han identificado áreas de oportunidad pertinentes al aprendizaje de la media aritmética, debido a que, si bien existen diferentes formas de representar esta medida de tendencia central, tal como lo estudio Sarkar y Rashid (2016), su enseñanza no se suele abordar con alguna de estas perspectivas o desde su relación o representación física, sino como un algoritmo que llega a causar dificultades en la comprensión y aprendizaje como lo expone Pollatsek et al. (1981).

Adicionalmente, esta investigación es apta para la incorporación de manipulativos similar a lo hecho por O'Dell (2012), además de la adición de manipulativos virtuales, que como lo explican Moyer-Packenham y Westenskow (2013) brindan una nueva perspectiva en la exploración de ideas matemáticas y pueden ser de ayuda para lograr construir un aprendizaje significativo.

Bajo este contexto, este proyecto de tesis abordará el análisis de las características del aprendizaje y de los procesos cognitivos y matemáticos que desarrollan los estudiantes al aplicar una serie de actividades utilizando representaciones semióticas contextualizada en la física mediante el análisis de las producciones hechas por estudiantes de segundo grado de secundaria.

1.3. Preguntas de Investigación

Con lo descrito anteriormente se plantean las siguientes preguntas de investigación, las cuales están enfocadas en el estudio de las características del aprendizaje desarrollado y de las producciones elaboradas por estudiantes de segundo grado de secundaria al realizar las actividades planteadas.

1.3.1. Pregunta general de investigación

¿Cuáles son las características del aprendizaje y los procesos cognitivos y matemáticos que desarrollan los estudiantes al realizar una serie de actividades utilizando representaciones semióticas de la media aritmética, y cómo contribuyen estos procesos a la construcción de un aprendizaje significativo?

1.3.2. Preguntas particulares de investigación

- ¿Qué características tienen las producciones y transformaciones de representaciones semióticas hechas por los estudiantes, y cómo contribuyen estas a la construcción del concepto de media aritmética?
- ¿Cómo se relacionan las producciones de los estudiantes con la representación inicial y el concepto de media aritmética, y cómo dichas relaciones se refleja en el tránsito entre registros de representación semióticos?

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

Identificar las características del aprendizaje, así como de los procesos cognitivos y matemáticos desarrollados por los estudiantes al realizar una serie de actividades, utilizando representaciones semióticas de la media aritmética, con el propósito de analizar de qué manera estos procesos favorecen la construcción de un aprendizaje significativo.

1.4.2. Objetivos Particulares

- Analizar las producciones y transformaciones de representaciones semióticas hechas por los estudiantes para comprender cómo contribuyen a la construcción del concepto de media aritmética.

- Examinar las relaciones entre la representación inicial, las producciones de los estudiantes y la media aritmética, para identificar el tránsito entre registros de representación semióticos.

Capítulo 2

Marco Conceptual

En esta sección se explica qué es un marco conceptual, así como sus diferencias con un marco teórico y un marco práctico. De igual manera, se explicitan los supuestos ontológicos, epistemológicos y didácticos adoptados en la realización de esta tesis; así como los constructos teóricos utilizados.

De acuerdo con Eisenhart (1991), un marco de investigación es una estructura de conceptos que orienta la realización de un trabajo de investigación, así como el análisis e interpretación de los datos empíricos asociados con un fenómeno. Por otro lado, Lester (2005) considera que un marco de investigación está integrado por ideas que fungen como base para la realización de una investigación. Las ideas que integran un marco constituyen estructura para conceptualizar el funcionamiento de un fenómeno, dando sentido a la información, apoyando el entendimiento del problema, desarrollando de esta manera una base para el diseño de un estudio.

Eisenhart (1991) identifica tres tipos de marcos de investigación, los cuales se diferencian en su funcionalidad. Un marco teórico es una estructura que guía la realización de una investigación de acuerdo con una teoría formal. Cuando se adopta un marco teórico se deben seguir las pautas determinadas por la teoría para enriquecer o revisar dicha teoría. Cuando se utiliza un marco teórico se puede llegar a omitir información

interesante contenida en la información empírica debido a que el análisis se lleva a cabo con el fin de "calzar" los datos dentro de la estructura teórica.

Un marco práctico por otra parte, se enfoca en problemas con valor pragmático, dejando en un segundo plano el entendimiento teórico. Un marco de este tipo se construye con el objetivo de determinar características de la práctica profesional y de las circunstancias en que una practica es funcional. Un marco práctico está formado por conocimiento profesional, hallazgos de investigaciones previas y puntos de vista de quienes participantes en un fenómeno. En este tipo de marcos no hay una discusión sobre el porqué de las cosas funcionan como lo hacen, sino basta con que las cosas funcionen de cierta manera.

Finalmente, un marco conceptual esta estructurado por diferentes elementos o constructos teóricos retomados de teorías o aproximaciones diversas, sin embargo la inclusión de cada elemento debe de justificarse. Este marco es guía para la recolección, análisis y explicación de la información empírica asociada a un trabajo de investigación. Los constructos que integran un marco conceptual deben de relacionarse de una manera apropiada y útil. Este tipo de marco se somete a revisiones sucesivas, con la finalidad de actualizarlo y mejorarlo. Tienen la ventaja de que la investigación es analizada bajo diferentes perspectivas, facilitando la comprensión de la problemática, por ello, los conceptos e ideas deben estar relacionados de manera adecuada y clara.

Para la realización de esta tesis se optó por construir un marco conceptual, ya que brinda la posibilidad de bajo diferentes perspectivas teóricas pertinentes, analizar la información y obtener conclusiones adecuadas al problema de investigación. Los elementos del marco conceptual incluyen la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, así como elementos de la teoría de las representaciones semióticas de Duval. Antes de la descripción de los elementos básicos del marco se lleva a cabo una descripción de los supuestos ontológicos, epistemológicos y didácticos que se sostienen, con la finalidad de clarificar por qué el investigador hace las cosas de cierta manera.

2.1. Dimensión ontológica

De acuerdo a Honderich (2005), la ontología es una rama de la filosofía interesada en el estudio del ser y de la naturaleza de la realidad. En este apartado se hace explícita la conceptualización de las matemáticas que orienta el desarrollo de la tesis.

Una de las diversas formas en las cuales se puede entender la actividad matemática es como un proceso de transformación de representaciones semióticas (Duval, 2017), tanto al resolver problemas, como al demostrar conjeturas. Existen diferentes tipos de registros de representación que a su vez contienen a los sistemas de representación, tales como gráficos, icónicos, simbólicos, e incluso el lenguaje. Así, adoptamos la postura que las matemáticas se estudian, comprenden y desarrollan al expresar y transformar ideas matemáticas mediante sistemas de representación. Una representación de un objeto o concepto matemático es más que una construcción aislada, ya que forma parte de un sistema de ideas entrelazadas (Goldin & Shteingold, 2001), lo cual fundamenta la importancia de los sistemas de representación y sus mutuas relaciones para las matemáticas y su aprendizaje.

La percepción de las matemáticas adoptada se apoya en gran medida en el rol que tienen los sistemas de representación en el desarrollo de las matemáticas. Como sugieren Thompson y Saldanha (2003), los símbolos son un pilar fundamental en el entendimiento de los matemáticos, por lo que continuamente existe el esfuerzo de desarrollar sistemas simbólicos para representar de forma eficiente conceptos e ideas matemáticas.

2.2. Dimensión epistemológica

La epistemología es una rama de la filosofía enfocada en contestar preguntas asociadas con el conocimiento, su origen, limitaciones y naturaleza (Honderich, 2005). En este trabajo de investigación se adopta una postura constructivista, en la cual se supone que el conocimiento no se encuentra ni en el sujeto ni en el objeto de conocimiento, sino

que es el producto de la interacción entre el sujeto y el objeto del conocimiento (Piaget, 1972). Así, el conocimiento es el producto de la actividad que el sujeto lleva a cabo con el objeto del conocimiento. Particularmente, se adopta una postura socioconstructivista basada en la perspectiva de Lev Vygotsky, quien considera que la interacción entre sujeto y objeto no es directa, sino que se lleva a cabo a través de mediadores. Entre estos mediadores, Vygotsky (1986) resalta el papel de las producciones culturales en la determinación de las características del conocimiento que construyen las personas.

Una perspectiva epistemológica sociocultural es compatible con la pregunta de investigación de este trabajo, ya que al utilizar manipulativos virtuales se está haciendo uso de mediadores y es importante conocer su impacto en la construcción del concepto de media aritmética. Por su parte, la contextualización de la media aritmética en tópicos físicos, busca que los estudiantes tengan una actitud de interés por aprender que se requieren para lograr un aprendizaje significativo. Similarmente, al ser el centro de masa el tema de vinculación y al utilizar el manipulativo, los estudiantes podrán experimentar de manera dinámica con las propiedades de la media aritmética, siendo esencial que los estudiantes estén familiarizados con operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división) para poder construir un conocimiento significativo.

2.3. Dimensión didáctica

Al hablar de esta dimensión mediante el diseño del ambiente instruccional se busca moldear las características que se consideran apropiadas para el conocimiento que construyen los estudiantes. En este caso, interesa que el ambiente instruccional favorezca la construcción de un *aprendizaje significativo*, para lo cual se hará uso de las teorías, previamente mencionadas, de David Ausubel y Raymond Duval.

Para lograr el objetivo expresado en el párrafo previo, es necesario que las actividades de aprendizaje sean potencialmente significativa, lo que depende de la naturaleza

del material, y de la estructura cognoscitiva del alumno, quien debe contar con los conocimientos previos necesarios (Ausubel et al., 1983). Es importante que la naturaleza del material sea tal que se pueda relacionar de manera intencionada con las ideas del estudiante. Además, se debe promover la relación o conexión entre los símbolos o ideas expresadas simbólicamente. De acuerdo con Duval (2017), los registros de representación pueden ser de utilidad para determinar si una secuencia de enseñanza es útil para desarrollar ciertas habilidades matemáticas. Por lo tanto, dos tipos de actividades son requeridas en el proceso de aprendizaje para que los estudiantes logren transitar de la descripción de acciones a la formulación matemática.

El primer tipo de actividades se enfoca en las operaciones relevantes al trabajar con el material de apoyo (el manipulativo virtual) y los registros escritos. El segundo tipo de actividades se centra en la designación de objetos, figuras y acciones matemáticas. Estas actividades son relevantes para el apoyo en el correcto desarrollo en la formación de ideas mentales no verbalizadas al abordar las actividades, que da a su vez paso al entendimiento matemático al integrar en la verbalización palabras técnicas, definiciones y teoremas. Otro elemento importante dentro de la teoría de los registros de representación semiótica son las unidades de significado matemático, que deben ser identificados en más de dos registros con el objetivo de no confundir el objeto matemático con su representación en algún registro. Más adelante en este capítulo se hablará más a profundidad de este concepto.

Para este trabajo se decidió diseñar las actividades de manera que durante cada una de ellas los estudiantes identificaran propiedades de la media aritmética mediante el trabajo con el manipulativo, para que posteriormente con esta información transitar a otro registro, el cual será de acuerdo a las características de sus conocimientos previos y su estructura cognoscitiva. El conocimiento construido mediante este proceso, puede, de acuerdo con Ausubel et al. (1983) ser de diferentes tipos, que dependen tanto del tipo de instrucción o actividad realizado, siendo por recepción o por descubrimiento,

que a su vez tienen la posibilidad de desarrollarse por recepción o significativo.

Las dos condiciones necesarias para desarrollar el aprendizaje significativo son que la tarea de aprendizaje sea potencialmente significativa, de modo que sea relacionable de manera sustancial con los conocimientos previos (siguiendo el principio básico de Ausubel) y que el estudiante tenga una actitud inquisitiva y abierta.

Tal y como Mintzes et al. (1997) expresan, el aprendizaje significativo conlleva la incorporación trascendente de nuevos conocimientos a la memoria de largo plazo, cosa que requiere un fuerte vínculo entre los conocimientos nuevos con los ya existentes en la estructura cognoscitiva del aprendiz, por lo tanto es esencial que las representaciones usadas de la media aritmética sean relacionables con los conocimientos y experiencias previas de los estudiantes, de manera que favorezca el transito entre registros de representación para lograr un mayor entendimiento del objeto matemático, a la vez de que las tareas sean significativas, atractivas y desafiantes para los estudiantes.

2.4. La media aritmética o promedio

Como ya se ha mencionado, el objeto matemático en el cual se enfoca el estudio de su aprendizaje en el presente trabajo es la media aritmética, también conocido como promedio, es por ello que es importante definirlo. Barlow (1993) define la media aritmética como:

> Si quieres describir tu información con solo un número, la mejor y más significativa forma de promediar es la media aritmética. Está denotada por una barra superior sobre la cantidad en cuestión: de este modo si hay N elementos en el conjunto de datos
>
> $$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$$

Entonces el valor medio de x es

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i. \quad \text{(p. 6)}$$

Por otro lado, Devore et al. (2015) comenta que

> Para un conjunto dado de números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la medida más conocida y útil del centro es la media o promedio aritmético del conjunto. Como casi siempre se pensará que los números x_i constituyen una muestra, a menudo se hará referencia al promedio aritmético como la media muestral y se le denotará por $\bar{x}$. La media muestral $\bar{x}$ de las observaciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ está dada por
>
> $$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \quad \text{(p. 25)}$$

Adicionalmente, Devore et al. (2015) menciona que la media aritmética puede ser representada físicamente, como un eje horizontal en el que se colocan muestras de igual masa, de modo que el punto en el cual se equilibre el eje mediante un punto de apoyo es el correspondiente al valor de $\bar{x}$.

Por su parte, Walpole (2007) señala que las medidas de tendencia central a las cuales pertenece la media aritmética, son útiles para brindar valores cuantitativos sobre la ubicación central de un conjunto de datos siendo la media un promedio numérico, y de la misma forma que Devore et al. (2015), Walpole (2007) hace alusión a la analogía entre la media aritmética y un sistema de balance donde el punto en el que se puede colocar el apoyo para equilibrar el sistema, es el respectivo a la media.

2.5. Referentes Teóricos

2.5.1. Teoría del Aprendizaje Significativo

En su teoría del aprendizaje significativo, Ausubel et al. (1983) distingue diferentes tipos de aprendizaje. La manera más importante de diferenciar los tipos de aprendizaje es formulando dos distinciones de proceso, la primera es de aprendizaje por recepción y por descubrimiento, y la segunda entre aprendizaje mecánico (o repetición) y significativo.

La primer dimensión definida por el aprendizaje por recepción y descubrimiento se distingue entre sí debido a que en el aprendizaje por recepción la mayoría de las nociones adquiridas por el alumno no las descubre por sí mismo, sino que son dadas, el contenido que se debe aprender es presentado al estudiante en su forma final, no se debe hacer ningún descubrimiento, solo internalizar el material para poder reproducirlo en un futuro. Mientras que en el aprendizaje por descubrimiento el contenido principal de lo que va a ser aprendido no se brinda, sino que debe ser descubierto por el alumno antes de que incorpore lo significativo de la tarea a su estructura cognoscitiva, o sea a la organización y contenidos totales de las ideas de una persona, así como de las que pertenecen a áreas específicas de conocimiento, es decir, la tarea de aprendizaje distintiva y previa consiste en descubrir algo. El alumno debe reordenar la información, integrarla con la estructura cognoscitiva existente y transformar la combinación integrada de manera que se descubra la relación entre medios y fines que hacía falta, solo después de haber realizado el descubrimiento, el contenido se hace significativo; de la misma manera que al internalizar el contenido este se hace significativo en el aprendizaje por recepción.

En la segunda dimensión (mecánico-significativo) existe la creencia que el aprendizaje por recepción es necesariamente mecánico, y el realizado por descubrimiento es significativo. Sin embargo, ambos tipos de aprendizaje constituyen una dimensión independiente al otro, por lo que tanto el aprendizaje por recepción como por descubri-

miento pueden ser mecánicos o significativos dependiendo de las condiciones en la que ocurran.

Si la tarea de instrucción puede relacionarse de manera no arbitraria y sustancial (no literal) con los conocimientos previos del alumno, además de que este tenga la actitud correspondiente es posible construir un aprendizaje significativo independientemente si es por recepción o por descubrimiento.

Por otro lado, el aprendizaje por repetición ocurre cuando la tarea de instrucción consiste en asociaciones arbitrarias, o que el alumno no tenga los conocimientos necesarios para hacer que la tarea sea potencialmente significativa, y si el alumno adquiere una actitud de internalizarla al pie de la letra. Con esto notamos la importancia que tiene el aprendizaje significativo sobre el mecánico.

Así como el aprendizaje por recepción no es necesariamente mecánico, la resolución de problemas no es únicamente significativa, a menos que las operaciones constitutivas deben ser significativas por sí mismas.

Ambos tipos de aprendizaje (significativo y mecánico) no son complementarios en el sentido de que en el momento en el que suceda uno el otro no, sino que al igual que con el aprendizaje por recepción y descubrimiento pueden ocurrir simultáneamente al abordar una misma tarea.

De acuerdo con Ausubel et al. (1983) en el aprendizaje mecánico por recepción la tarea de aprendizaje no es ni potencialmente significativa ni tampoco convertida en tal durante la internalización. Por otro lado en el aprendizaje significativo por recepción, la tarea potencialmente significativa es comprendida (hecho significativo) durante el proceso de internalización que involucra la construcción de significados nuevos, entendiéndose el significado como el producto del aprendizaje significativo, como una representación particular, recordado por símbolos relacionados de manera sustancial y no arbitraria con la estructura cognoscitiva.

Lo anterior requiere de una actitud de aprendizaje significativo, que es la disposi-

ción por parte del estudiante a relacionar una tarea de aprendizaje sustancial con su estructura cognoscitiva, al igual que necesita material potencialmente significativo, que pueda por sí mismo estar relacionado de manera no arbitrara (plausible, sensible y no azarosamente) y sustancial (no al pie de la letra) con cualquier estructura cognoscitiva apropiada (que posea significado lógico) y que la estructura cognoscitiva del alumno contenga ideas de afianzamiento relevantes con las que el nuevo material pueda guardar relación de manera que sea posible *asimilar* éstas nuevas ideas.

La interacción entre los significados nuevos y los conocimientos previos del alumno da lugar a los significados reales. El aprendizaje significativo por recepción es importante porque es el mecanismo que se utiliza para adquirir y almacenar en la memoria ideas e información de cualquier campo del conocimiento. Pueden distinguirse tres tipos de aprendizaje significativo por recepción.

El *aprendizaje de representaciones* es el más cercano al aprendizaje mecánico, ocurre cuando se igualan en significado símbolos arbitrarios con sus referentes. Es significativo porque las equivalencias entre representaciones se relacionan de manera no arbitraria, como ejemplos de procesos de generalización, que se suelen desarrollan desde el quinto año de vida. Se ocupa de los significados de símbolos o palabras unitarios.

Por otro lado, en el *aprendizaje de conceptos*, aprender un concepto equivale a aprender que el concepto está representado por una nueva palabra, o que la nueva palabra concepto es de significado equivalente al del concepto mismo, es conveniente saber representar el nuevo concepto aprendido con una sola palabra de significado equivalente a éste. Aprender lo que significa un concepto consiste en aprender sus atributos que lo distinguen, y esto implica un tipo diferente de aprendizaje significativo de naturaleza sustancial y no nominalista o representativa.

Finalmente, el *aprendizaje de proposiciones* se ocupa de los significados de las ideas expresadas por grupos de palabras combinadas en oraciones, ya que la idea resultante es más que la suma de significados de las palabras componentes individuales, sin em-

bargo, el aprendizaje de representaciones es una condición necesaria para el aprendizaje de proposiciones. A su vez, el aprendizaje de proposiciones se divide en subordinado, superordinado y combinatorio.

El aprendizaje de proposiciones subordinado ocurre cuando una proposición con significado *lógico* perteneciente a una disciplina particular, se integra de manera significativa con proposiciones específicas superordinadas ya presentes en la estructura cognoscitiva del alumno. A su vez, este tipo de aprendizaje puede ser derivativo si el material de aprendizaje simplemente ejemplifica o apoya una idea ya existente en la estructura cognoscitiva, o correlativo si es una extensión, elaboración, modificación o limitación de proposiciones previamente aprendidas.

Por su parte, el aprendizaje de proposiciones superordinado ocurre cuando una proposición nueva se relaciona con ideas subordinadas específicas en la estructura cognoscitiva existente, y se relaciona con un fundamento amplio de contenidos generalmente pertinentes en la estructura que puede ser incluida en el.

Y finalmente, el aprendizaje de proposiciones combinatorio se refiere a los casos en que una proposición potencialmente significativa no se puede relacionar con ideas superordinadas o subordinadas específicas de la estructura cognoscitiva del alumno, pero es relacionable con un fundamento amplio de contenidos generalmente relevantes de tal estructura.

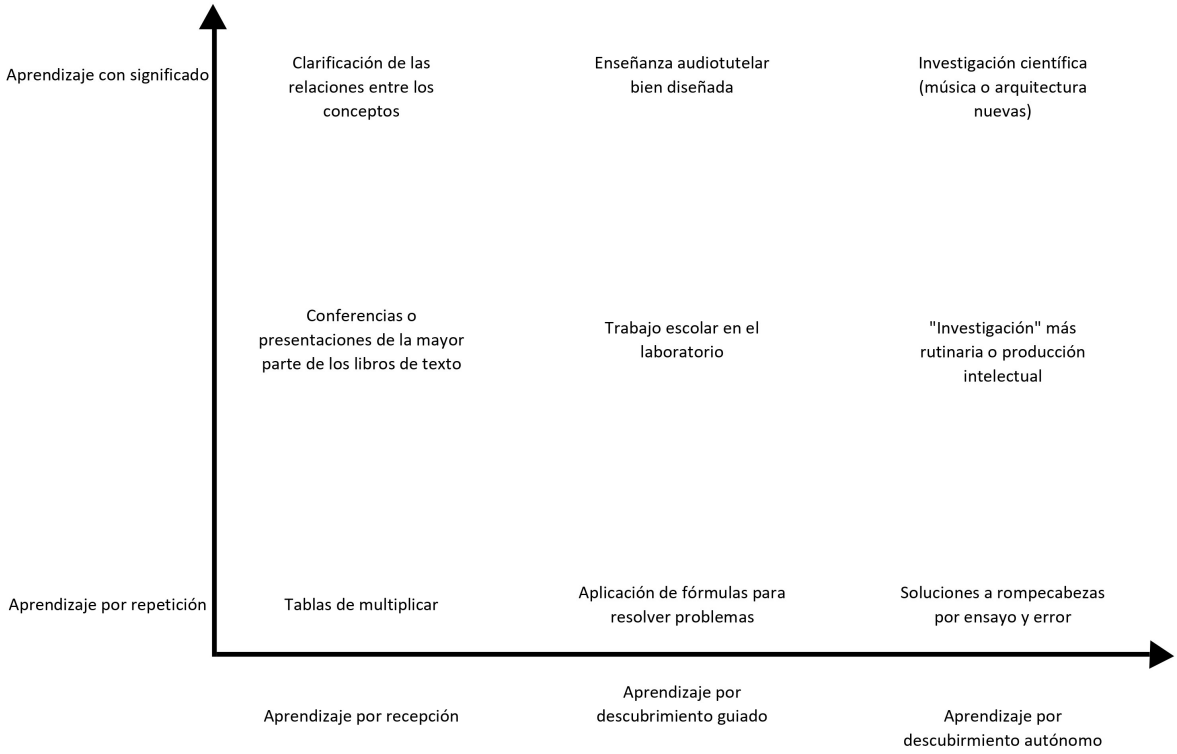
Adicionalmente, en el aprendizaje por descubrimiento existe el aprendizaje de proposiciones, con la diferencia de que en este, el alumno debe descubrir el contenido por si mismo, generando proposiciones que representen ya sea soluciones a los problemas o los pasos sucesivos para resolverlos.

Sin embargo, las diferentes variaciones del aprendizaje que se presentan en la dimensión recepción-descubrimiento surgen durante la resolución de problemas, donde las proposiciones de resolución son transformadas (reestructuradas, reorganizadas, sintetizadas e integradas) en proposiciones (de sustrato) asequibles, ya sean proposiciones de

planteamiento de problemas que definen la naturaleza y condiciones de la situación problema presente, o proposiciones antecedentes, pertinentes del conocimiento construido que atañen al problema. Es mediante esta transformación de proposiciones que se incorporan relaciones potencialmente significativas, permitiendo que tanto el aprendizaje por recepción como por descubrimiento puedan ser significativos.

La Figura 2.1 ejemplifica los diferentes tipos de aprendizaje formados por las dimensiones recepción-descubrimiento y mecánico-significativo expuestos en la teoría del aprendizaje significativo.

Figura 2.1: *Dimensiones del aprendizaje*



Nota. Adaptado de *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo* (p. 35), por D. Ausubel et al., 1983, Trillas.

Ausubel et al. (1983) condiciona el aprendizaje significativo, debido a que este presupone que alumno manifieste una actitud de aprendizaje significativo (disposición para relacionar sustancial y no arbitrariamente el nuevo material con su estructura cognosci-

tiva) y que el material que aprende es potencialmente significativo para el (relacionable con su estructura de conocimiento sobre una base no arbitraria y no al pie de la letra), si alguna de estas condiciones no se cumple el resultado carecerá de significado y/o será aprendizaje mecánico en caso de que sea la intención del alumno.

Para que la tarea de aprendizaje sea potencialmente significativa depende de dos factores, la naturaleza del material que se va a aprender, como de la naturaleza de la estructura cognoscitiva del alumno en particular. La naturaleza del material no debe ser arbitrario ni vago para que pueda relacionarse de modo intencionado y sustancial con las correspondientes ideas relevantes dentro de la capacidad de aprendizaje del ser humano. Esta propiedad de la tarea de aprendizaje determina si el material es o no potencialmente significativo, pertenece a la significación lógica.

Para que el material de aprendizaje sea significativo lógicamente debe ser relacionable no arbitraria, pero si sustancialmente con las ideas pertinentes y correspondientes que se hallen dentro de la capacidad de aprendizaje humano: La relacionabilidad no arbitraria se refiere a si el material en sí muestra la suficiente intencionalidad (o falta de arbitrariedad), entonces hay una base adecuada y casi obvia de relacionarlo de modo no arbitrario con los tipos de ideas correspondientes pertinentes que los seres humanos son capaces de aprender.

Mientras que la relacionabilidad sustancial a si el material de aprendizaje es lo suficientemente no arbitrario, un símbolo o grupo de símbolos de ideativos equivalentes podría relacionarse con la estructura cognoscitiva sin que hubiese ningún cambio resultante en el significado, o sea que, ni el aprendizaje significativo ni el significado que surge dependen del uso exclusivo de signos particulares y ni de otros, el mismo concepto o proposición podrían expresarse de manera sinónima y deberían seguir comunicando exactamente el mismo significado.

Como ya se mencionó previamente, la función de la estructura cognoscitiva del alumno es fundamental en el aprendizaje significativo, no basta con que el material sea

intencionado y sustancialmente relacionable con las ideas correspondientes relevantes que algunos seres humanos podrían aprender en circunstancias apropiadas, es necesario también que tal contenido ideativo exista en la estructura cognoscitiva del alumno particular. Las estructuras cognoscitivas de diferentes alumnos constituyen las variables y determinantes más decisivos de la significatividad potencial, factores como la edad, ocupación, clase social y cultura.

Está teoría es de importancia en el trabajo ya que mediante ella se busca analizar las características del conocimiento construido por los estudiantes que participarán en la aplicación de la tarea diseñada.

2.5.2. Teoría de los Registros de Representación Semiótica

Raymond Duval desarrolló su teoría de los registros de representación semiótica como una herramienta para identificar las problemas de comprensión matemática persistentes, utilizando las variaciones hechas en representaciones en un mismo registro como el medio, ya que, como Duval (2017) menciona, estos fenómenos "are not observed because they are not directly observable in the spontaneous exchanges in class or the single mathematical interpretations of students' productions" [no son observados porque no son directamente observables en las interacciones espontáneas en clase o en las interpretaciones únicas de las producciones matemáticas de los estudiantes] (p. 111), siendo de esta forma permite analizar las condiciones cognitivas necesarias para comprender las matemáticas.

Esta teoría está fundamentada en el papel que juegan las representaciones y signos en el desarrollo del conocimiento, en donde ambos tienen la capacidad de fungir como mediadores en el acceso a los objetos matemáticos que representan, de modo que un signo es cualquier cosa que independientemente de lo que se perciba sensorialmente de ellos, evoca o representa algo más de manera meramente referencial, dentro de un contexto dado es una *unidad elemental de significado* (tales como letras, acrónimos,

números, palabras clave o gestos manuales), que por si solos son insuficientes en el desarrollo de actividad matemática, por otro lado, una representación semiótica es un sistema organizado compuesto por signos, que sirve como medio de representación de objetos matemáticos, cada representación semiótica tiene una organización interna específica compuesta por niveles en la que se pueden distinguir las verdaderas unidades de significado (agrupación de unidades que tienen un significado diferente al individual de cada uno de sus componentes, siendo estos componentes los signos) (Duval, 2017).

Por lo tanto, la principal discrepancia entre signo y representación semiótica es la relación que cada uno de ellos tiene con el objeto en sí, ya que los signos mantienen solo una relación referencial, mientras que la estructura organizada de las representaciones permite su *manipulación* en lo que a continuación se denominara tratamientos y conversiones. Duval (2017) ejemplifica a las representaciones semióticas como "in natural language, the sentences and not the words, in mathematical language the equations and not the numbers and letters, in geometrical visualization configuration of figural units and not the points or the straight lines" [en lenguaje natural, los enunciados y no las palabras, en lenguaje matemático las ecuaciones y no los números y letras, en visualización geométrica la configuración de unidades figurativas y no los puntos o las líneas rectas] (p. 18).

Partiendo de la premisa de que el análisis de la actividad matemática se basa en la resolución de problemas y los procesos de entendimiento matemático, Raymond Duval teniendo una perspectiva cognitiva, identifica el rápido reconocimiento de los objetos a través de sus múltiples posibles representación semióticas, distinguiendo las unidades de significado y niveles de organización, y la auto confianza para explorar posibles maneras de resolución propias de tareas y comprobar su relevancia como las dos condiciones necesarias para poder denominar la comprensión matemática.

Adicionalmente, para el análisis cognitivo de la actividad matemática y el funcionamiento del pensamiento matemático se debe considerar el modo de acceso a los objetos

matemáticos y la naturaleza de la actividad matemática, y el desarrollo de actividad matemática depende de la variedad de representaciones semióticas que pueden ser usadas al igual que de la necesidad de producir o considerar dos representaciones diferentes del mismo objeto.

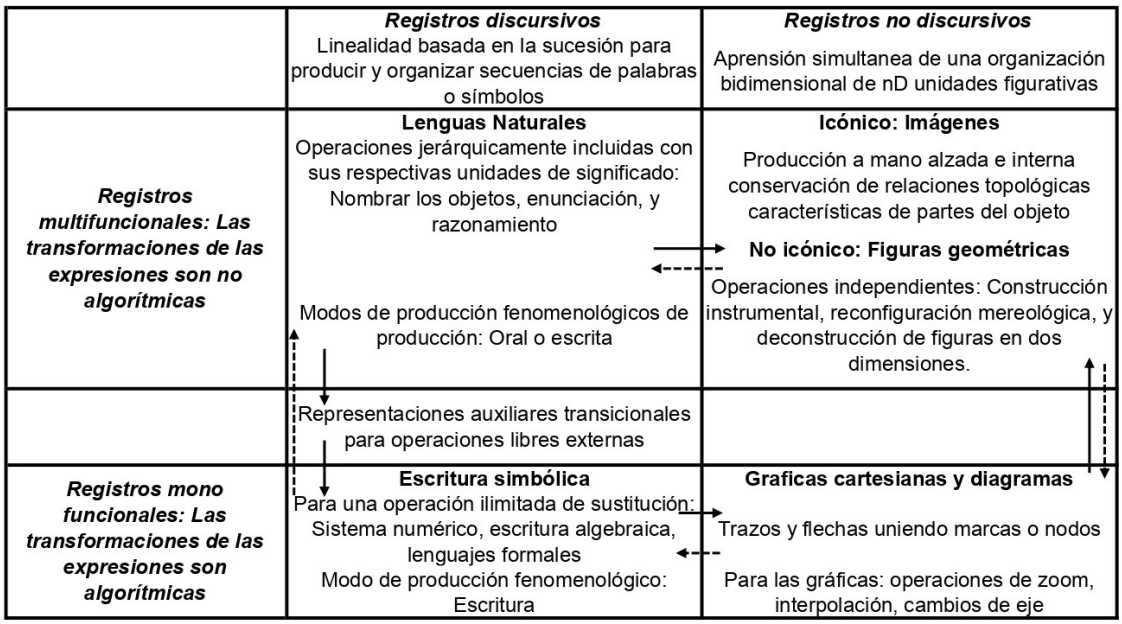
Las transformaciones (o movilización) de las representaciones semióticas ya mencionadas se denominan tratamientos y conversiones. Los tratamientos consisten en la producción de una representación semiótica en el mismo registro, mientras que las conversiones generan una representación dentro de un registro diferente.

Por lo tanto, es fundamental analizar los procesos cognitivos que subyacen una actividad matemática, tales como el mapeo uno a uno, siendo una operación cognitiva que permite acceder a objetos empíricamente inaccesibles, que se realiza entre unidades de significado de las representaciones semióticas utilizadas, es crucial tanto matemática como cognitivamente para distinguir la representación inicial y la representación producida.

La actividad matemática consiste en transformar las representaciones semióticas en otras para obtener nueva información o conocimiento y resolver problemas, por ello Duval (2017) identificó los tipos de registros de representaciones semióticas que pueden ser usadas en matemáticas, las cuales están presentes en la Figura 2.2.

De acuerdo con Duval (2017), un registro movilizado responsable del acto de pensar está compuesto por tres funciones cognitivas. Implica que el sujeto tenga conciencia de las operaciones para que las realice de manera intencionada y espontánea. A su vez, requiere de la producción de representaciones de objetos, porque pensar, es pensar en algo, y las representaciones mentales son representaciones semióticas internalizadas, esta producción es una objetivación, la creación de una representación semiótica precede al pensamiento de los objetos representados. Y por último, la transformación de representaciones (conversión o tratamiento), que es el proceso en el que se relacionan varias representaciones, donde las denominadas *relaciones topológicas* (relaciones espaciales

Figura 2.2: *Clasificación de los registros semióticos*



Nota. Adaptado de *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations* (p. 85), por R. Duval, 2017, Springer International Publishing.

entre los elementos que conforman a una figura u objeto, que no dependen de la exactitud de sus medidas, de distancias o ángulos, sino de la disposición de la configuración general) ayudan a vincular diferentes registros y representaciones entre sí.

Por ende, es necesario movilizar al menos un segundo registro para lograr discernir e identificar las unidades de significado relevantes que estén presentes en las representaciones producidas, de la misma forma que coordinar estos registros de tal manera que funcionen de manera armónica.

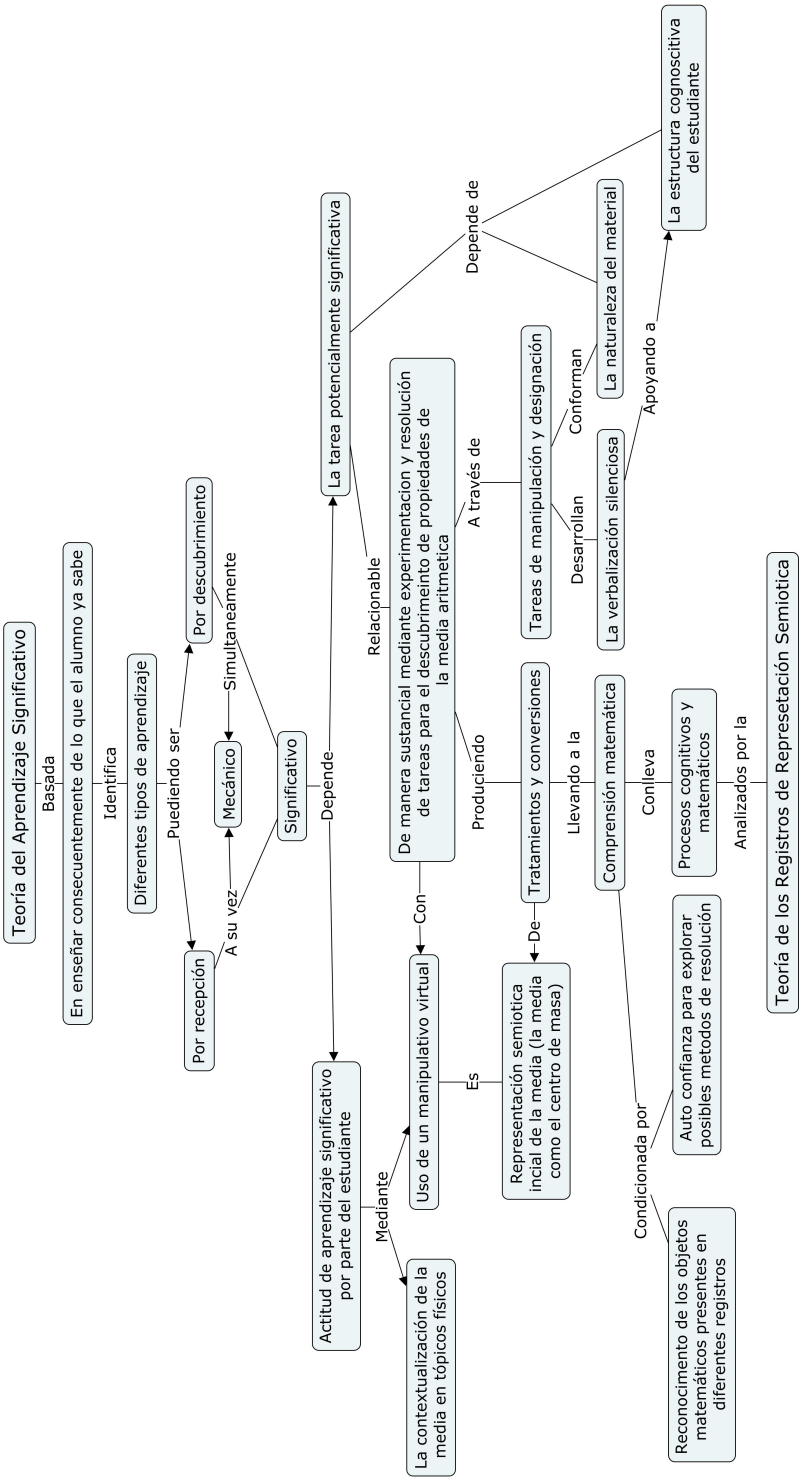
Concluyendo, la teoría de representaciones semióticas es relevante en esta investigación ya que mediante ella se podrá realizar un análisis de las condiciones epistemológicas y matemáticas presentes en el aprendizaje de la media aritmética partiendo de una representación semiótica.

Tanto la teoría del aprendizaje significativo como la teoría de los registros de re-

presentación semiótica son adecuados para la presente investigación, sus propuestas epistemológicas, didácticas y ontológicas son coherentes con las cuales se planteó la problemática y se diseñó la investigación.

Adicionalmente, se considera que se complementan de manera idónea para los objetivos de investigación propuestos, tal como se muestra en la siguiente Figura 2.3.

Figura 2.3: *Relación entre la teoría del aprendizaje significativo y la teoría de los registros de representación semiótica*



Capítulo 3

Marco Metodológico

3.1. Introducción

De acuerdo con Jackson II et al. (2007), la metodología nos da la pauta para realizar una investigación, como delimitar un problema para poder explorarlo, colectar de manera apropiada la información, y vincularla de manera lógica con el problema, su análisis y conclusiones.

Con base a Jackson II et al. (2007), este trabajo es de carácter cualitativo. Este tipo de investigaciones se caracterizan por analizar datos recabados en diferentes registros ya sea escritos, verbales, gráficos, mediante los cuales se expresan significados. En la investigación cualitativa la interpretación que el investigador realiza de la información tiene una gran relevancia (Hernández et al., 2006). Al respecto Gubrium y Holstein (1997) consideran que la investigación cualitativa busca entender y describir las características del problema de investigación, antes de poder intentar explicarlo. Así, las investigaciones cualitativas involucran procesos de interpretación y de teorización para dar sentido a la información, mediante la categorización de ésta y la identificación de patrones en los datos. Si bien la investigación cualitativa incluye diversos niveles de subjetividad, al mismo tiempo brinda la oportunidad de prestar mayor atención a los significados, y

a las diferentes interacciones de las personas involucradas en un fenómeno, lo que apoya el análisis de un problema desde diferentes perspectivas, enriqueciendo los posibles resultados de un estudio.

Dados los objetivos de esta investigación, el enfoque cualitativo es adecuado, ya que mediante él se podrán analizar las interacciones de los participantes con las actividades diseñadas en las que se utiliza el manipulativo virtual, identificando características en sus producciones escritas y verbales, y su papel en el aprendizaje de la media aritmética de acuerdo la teoría del aprendizaje significativo y la teoría de los registros de representaciones semióticas.

3.2. Diseño de la investigación

El diseño de un trabajo cualitativo puede tomar diversas formas. De acuerdo con Hernández et al. (2006), el diseño puede basarse en la teoría fundamentada, diseño etnográfico, diseño narrativo, diseño fenomenológico, diseño investigación-acción, o estudio de casos. Se decidió que el diseño de la investigación para esta tesis sea un estudio de casos.

Hiebert et al. (2023) definen al estudio de casos como una investigación en profundidad de un ejemplo particular o caso, que debe ser identificable con límites claros, y debe ser lo suficientemente significativo para justificar la observación, colecta de información y análisis detallados. Es necesario comprender y describir el caso dentro del contexto en el que se desarrolla el fenómeno. Por otra parte, Merriam y Tisdell (2015) mencionan que el estudio de casos cualitativo es un tipo de investigación intensiva, que incluye una descripción holística y análisis de una entidad singular, fenómeno, o unidad social.

Existen diferentes tipos de estudio de caso. De acuerdo con Stake (2005) un estudio de caso puede ser intrínseco, instrumental, o multi casos, siendo el pertinente para este trabajo el estudio de caso instrumental. El *estudio de caso instrumental* se caracteriza

porque el caso sirve de apoyo para entender un fenómeno diferente, ya sea un problema o replantear una generalización, y si bien el caso es todavía analizado a profundidad, el análisis tiene el propósito de entender de mejor manera el tema de interés.

Merriam y Tisdell (2015) argumentan que la información obtenida de los estudios de casos es más concreta que abstracta, más contextual, más desarrollado por la interpretación del lector, proporcionando a los estudios de casos su experiencia propia y entendimiento, lo que lleva a generalizaciones cuando la nueva información del caso es añadida a la vieja, y basado más en poblaciones de referencia pensadas por el lector, extendiendo la generalización de poblaciones de referencia.

Los resultados obtenidos mediante investigaciones basadas en estudios de caso pueden interpretarse como nuevas hipótesis que ayuden a estructurar investigaciones futuras. Las descripciones y análisis ricos y densos de un fenómeno, a partir de un estudio de casos pueden ser adecuados, pero el tiempo y dinero que requieren son inconvenientes para su realización. Además, el producto derivado de estas investigaciones puede ser muy extenso y detallado, lo cual puede complicar la lectura del informe final y la aplicación de los resultados. Por otra parte, los resultados del un estudio de casos dependen fuertemente de la sensibilidad e integridad del investigador, así como de sus intuiciones y habilidades a lo largo del trabajo investigativo.

3.3. Participantes

Los participantes de la investigación fueron seis estudiantes de una secundaria privada, ubicada en el municipio de Pachuca de Soto, Hidalgo, quienes cursaban segundo grado en el mismo grupo. Los participantes fueron seleccionados por su docente de matemáticas.

La escuela y los participantes fueron seleccionados por conveniencia. Los participantes se seleccionaron de forma que hubiera un par de estudiantes en cada nivel de rendimiento: alto, promedio y bajo. Steinmayr et al. (2014) mencionan que el rendimien-

to escolar representa los logros que un estudiante ha alcanzado dentro de las actividades escolares, los objetivos se componen por el logro académico, satisfacción, adquisición de habilidades y competencias, persistencia, logros de objetivos de aprendizaje, y el éxito profesional (York et al., 2015). Este criterio de selección tuvo el propósito de diversificar las características académicas de los participantes.

Las actividades a partir de las cuales se recolectó la información empírica se implementaron de forma previa a que los estudiantes abordaran el tema de medidas de tendencia central en su curso de matemáticas.

3.4. Diseño de la actividad

Las actividades que se implementaron con los estudiantes estuvo basada en la diseñada por O'Dell (2012), en la cual se hace uso de un manipulativo físico. Sin embargo, se hicieron modificaciones, siendo la más notoria el uso de un manipulativo virtual. Adicionalmente, se siguieron lineamientos estipulados en la teoría del aprendizaje significativo (Ausubel et al., 1983) y en la teoría de los registros de representaciones semióticas (Duval, 2017) .

Las actividades se diseñaron de forma que satisficiera las características mencionadas por Ausubel et al. (1983) para lograr la construcción de un aprendizaje con significado. En este contexto, se buscó que las ideas de la actividad se relacionaran de modo intencionado y sustancial con los conocimientos previos de los participantes, considerando que son estudiantes de segundo grado de secundaria; además que tales ideas se relacionaran de manera no arbitraria y sustancial, de forma que un mismo concepto o proposición pudiera expresarse en diferentes registros de representación, pero comunicando el mismo significado (Duval, 2017).

Además, considerando que las medidas de tendencia central son abordadas desde la educación primaria en México, se asumió que los participantes ya tenían una noción

de la media aritmética. Para evitar que abusen del uso del algoritmo para calcular la media aritmética, no se les mencionó el concepto matemático. Sin embargo, se esperaba que con el desarrollo de las actividades lograran identificarlo y posiblemente ocupar sus conocimientos previos estadísticos.

Finalmente, se esperaba que el manipulativo virtual ayudara a que los estudiantes desarrollaran una actitud inquisitiva, además de que las actividades fueran lo suficientemente interesantes y con la dificultad adecuada para que los participantes mantuvieran interés en su realización.

Duval (2017) menciona que la organización de secuencias de actividades siempre tiene dos elementos, uno de de ellos es la propiedad matemática que debe ser descubierta por los estudiantes. La secuencia se construye de forma que se inicie de actividades prácticas o específicas, y se progrese hacia construcciones teóricas o formales a través de diferentes interacciones. Adicionalmente, actividades específicas son necesarias de manera que los estudiantes puedan transitar de la descripción de las acciones concretas y de la designación usual de las figuras reconocidas perceptualmente, a la formulación matemática de las operaciones relevantes involucradas al operar con el material de apoyo.

Estas actividades buscan apoyar la verbalización silenciosa, que es cercana a la expresión oral espontánea, permitiendo anticipar o manejar el avance de cualquier actividad. Toda fraseología matemática o entendimiento de expresión matemático, requiere un cambio profundo en esta espontánea verbalización silenciosa, emergiendo cuando la verbalización silenciosa integra diferentes operaciones discursivas que el discurso matemático fusiona en palabras técnicas, que condensan definiciones, y teoremas para un razonamiento válido. Se incorporaron actividades relevantes y operaciones de designación en la operación del manipulativo.

Por lo anterior, las actividades diseñadas para llevar a cabo este estudio estuvieron divididas en en tres fases, en la primera se especifican las acciones relevantes asociadas

con la operación del manipulativo y operaciones de designación ya mencionadas. En la segunda fase están contenidas las actividades pertinentes a la identificación de propiedades de la media aritmética con el manipulativo virtual. Mientras que en la tercera, se busca que los estudiantes encuentren el *punto de equilibrio* o media aritmética de un conjunto de datos sin el apoyo del manipulativo, realizando un mapeo uno a uno y comparen su método de resolución (cambiando el tipo de representación y posiblemente registro) con la representación inicial, idealmente relacionando todo lo descubierto en la actividad con sus conocimientos de medidas de tendencia central previos. Las secuencia de las 11 actividades se pueden consultar en la sección 5.3 Apéndice A, que a su vez fueron las hojas de trabajo que se entregaron a cada uno de los participantes.

A continuación se enlistan las características que se consideraron al diseñar e integrar cada una de las actividades de la secuencia de instrucción.

1. Operaciones relevantes en la manipulación de apoyo para establecer las condiciones de trabajo, consiste en una lista de cinco puntos que describen las características y posibilidades del manipulativo y sus elementos.

2. Operaciones de designación de objetos y/o situaciones presentes al momento de experimentar con el manipulativo, se conforma de tres puntos que hacen referencia a la denominación de los elementos del manipulativo y de su comportamiento.

3. Es la actividad más simple de la secuencia, se busca que los participantes se familiaricen con el manipulativo, se pide que se construya dos sistemas de balance en equilibrio que serán de utilidad en actividades posteriores, además de las instrucciones consta de dos diagramas en los cuales se les pide registrar sus sistemas hallados.

4. Está ideada con el propósito de identificar que sumar una constante a las variables de un sistema es equivalente a sumar esa constante al punto de equilibrio o media

aritmética, por lo tanto los diagramas de esta actividad no cuentan con el apoyo, ya que es uno de los elementos que deben desplazar.

5. De manera similar a la actividad anterior, tiene el objetivo de observar que multiplicar las variables asociadas a un sistema por una constante es equivalente a multiplicar la media de esas variables por la misma constante, y de la misma manera que en la actividad anterior el diagrama no cuenta con el apoyo.

6. Busca que los participantes noten que es posible colocar dos masas en la misma posición, además de buscar que construyan un sistema simétrico a partir de las condiciones dadas; es decir, que en un conjunto de datos puede haber más de un elemento con el mismo valor, por lo que el diagrama de esta actividad ya cuenta con dos masas colocadas en la posición 20.

7. Al condicionar que el sistema involucrado en la actividad tenga un número de masas impar y que se parta de un sistema en equilibrio se queda con la única posibilidad de colocar la masa restante sobre el apoyo. Lo anterior significa que en un conjunto de datos puede haber uno o más elementos de igual valor a la media aritmética de ese conjunto.

8. Esta actividad busca identificar un posible mal entendido creado por las dos actividades anteriores. Al tener un número de masas impar y no tener la posibilidad de colocar masas sobre el apoyo se busca que construyan un sistema asimétrico.

9. Se busca que empiecen a transformar el registro inicial o que busquen una manera de equilibrar sistemas sin depender completamente del manipulativo virtual, se les brindan dos diagramas en desequilibrio de seis masas, los cuales deben balancear con solo la posibilidad de agregar una más y desplazarla, sin modificar las ya existentes.

10. Se pretende que los estudiantes transformen un conjunto de datos en otro diferente con la misma media, además de notar las condiciones necesarias para que esto sea posible, para ello se les brinda un sistema ya en equilibrio, debiendo hacer movimientos en ambos lados del apoyo que expongan patrones en el comportamiento del sistema.

11. Al apartarlos del manipulativo se pretende, de manera intencionada, que transiten entre diferentes registros de representación semiótica, además de que piensen en casos generales y no solo en el conjunto de nueve elementos propuesto.

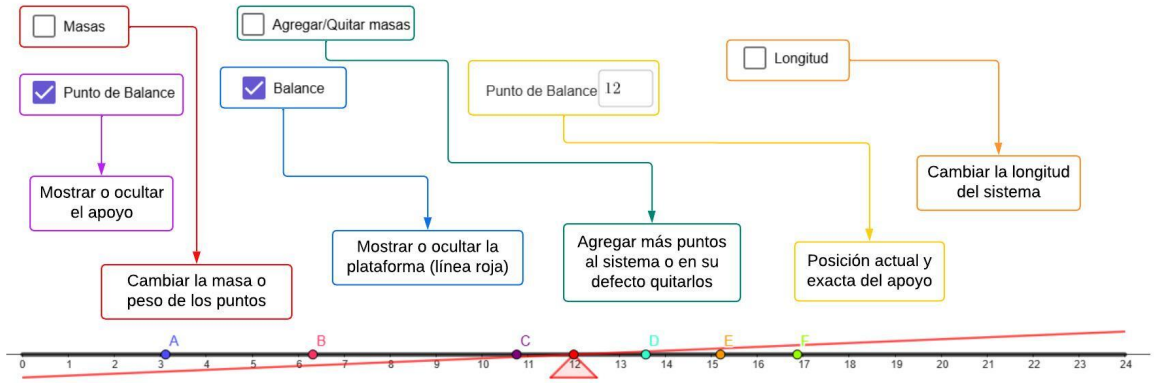
Previo a la aplicación de las actividades todas ellas se resolvieron (por parte del autor del presente trabajo) de la mayor manera de formas posibles, esto con el objetivo de poder identificar los intentos de resolución que los participantes podían presentar durante la sesión, y en caso de que sea requerido auxiliar con lo que más adelante se denominaron preguntas auxiliares de modo que se interfiriera lo menos posible y alterar el proceso de cada uno de ellos. Estas peguntas se centran en cuestionar si habían encontrado similitudes en sus respuestas, si podían predecir el comportamiento del manipulativo, o si su método de resolución podría ser aplicado a otros sistemas.

3.5. Descripción del manipulativo virtual

El manipulativo se diseñó con el *sistema de Geometría Dinámica* GeoGebra Clásico versión 6.0. Fue pensado como una representación digital de un sistema de balanza o palanca, el cuál puede ser modificado para que la palanca tenga la longitud que se desee, además de la capacidad del usuario para agregar o quitar un máximo de 10 masas y desplazarlas a lo largo del sistema. También es posible desplazar o ocultar el apoyo, todo lo anterior con una respuesta instantánea del comportamiento del balance. El manipulativo fue desarrollado en siete versiones, siendo la última la utilizada por los participantes en la investigación. Mediante el siguiente enlace se puede acceder a

la última versión del manipulativo: https://www.geogebra.org/classic/fnnetnkq. En la Figura 3.1, se explican las funciones del manipulativo.

Figura 3.1: *Funciones del manipulativo virtual*



3.6. Implementación de las actividades

Las actividades fueron aplicadas en una sesión de 3 horas en el aula de cómputo de la escuela secundaria a la que asisten los participantes. Los participantes contaban con una laptop con acceso a internet para trabajar con GeoGebra y con las hojas de trabajo que se les proporcionó, las cuales contenían las actividades y diagramas donde registrar cada uno de sus sistemas, responder las preguntas pertinentes y realizar operaciones que ellos consideren necesarias. Al inicio de la sesión se brindó una breve explicación de las actividades, y las herramientas que necesitarían. El autor de la tesis fungió como instructor durante la implementación. El instructor apoyó a los participantes en caso de tener dudas sobre las instrucciones.

Para efecto del análisis se consideran tres partes en la sesión de trabajo. La primera consistió en las dos actividades iniciales, de manipulación y designación. Estas actividades fueron abordadas por los participantes en los primeros 10 minutos de la sesión.

La segunda parte consta de las actividades 3 a la 10, las cuales tienen el objetivo de que los participantes identifiquen propiedades de la media aritmética mediante la experimentación con el manipulativo virtual. La tercera parte incluyó la resolución de la actividad 11, en donde se les retiró el manipulativo virtual para idear un método para hallar el punto de balance de un conjunto de datos dado, la cual duró aproximadamente una hora y treinta minutos.

3.7. Instrumentos de recolección de la información y análisis de datos

La información empírica se recolectó mediante las producciones escritas elaboradas por los participantes. Además, se grabó en video la sesión de trabajo, la cual se transcribió posteriormente. De acuerdo con Merriam y Tisdell (2015) las grabaciones en video permiten capturar no solo las comunicaciones verbales de ideas, sino también comportamientos, y expresiones no verbales que comunican significados. Los participantes fueron notificados sobre la grabación de la sesión, de igual manera no se tomó captura de sus rostros. El video solo será visto por el autor de la tesis y el director de la misma, por lo que nadie más tendrá acceso a dicho archivo, ni será publicado por ningún medio.

Para el análisis de la información se partió de identificar el método y estrategias de resolución de las actividades (descritas con detalle en siguiente capítulo), poniendo especial atención a identificar conversiones y tratamientos de las representaciones; con base en la información de las transcripciones y las producciones escritas, ya que el lenguaje natural es un registro de representación (Duval, 2017).

Capítulo 4

Resultados

4.1. Introducción

En este capítulo se describe la forma en que los seis participantes abordaron las actividades, identificando los procesos cognitivos y matemáticos desarrollados durante la actividad. Para analizar tales procesos y el pensamiento matemático que desarrollaron, se analizaron las transformaciones de las representaciones utilizadas, ya sea mediante los procesos de tratamiento o conversión (Duval, 2017). Por lo tanto, es relevante considerar tanto la clasificación descrita en la Figura 2.2, tanto las producciones desarrolladas por los participantes durante la aplicación de las actividades. De igual manera, se mencionan los registros y representaciones utilizadas por los participantes, así como la razón por la cual se consideran de este modo. Finalmente, se busca clasificar el aprendizaje alcanzado al concluir la sesión (Ausubel et al., 1983). Lo anterior involucró un examen detallado de los instrumentos de recolección de información, las producciones escritas que se encuentran en la sección 5.4 Apéndice B y la transcripción de la grabación en video en la sección 5.5 Apéndice C compuesta de 1509 líneas de diálogo.

4.2. Proceso de solución de las actividades

A continuación se describe de manera detallada el proceso y métodos utilizados por cada uno de los participantes al abordar las actividades. Este análisis detallado es básico en el diseño metodológico seleccionado, el cual es un estudio instrumental de casos. Posterior al análisis de casos individuales se lleva a cabo una identificación de semejanzas y diferencias con la finalidad de identificar patrones o regularidades en los comportamientos o los significados asociados con el desarrollo de las actividades.

La siguiente descripción de los procesos de resolución de todos los participantes consta de las actividades 3 a la 11, las primeras dos actividades se omitieron debido a la naturaleza de las mismas que están descritas en la sección 3.4 Diseño de la actividad, en las que si bien se consideran necesarias, su desarrollo no requería de la resolución de alguna situación, sino de identificar y denominar al manipulativo, sus elementos y comportamiento.

4.2.1. Estudiantes de alto rendimiento

Participante 1

Este participante utilizó una estrategia única en comparación con las estrategias utilizadas por el resto de los participantes. En el primer sistema de balance propuesto de la actividad 3 colocó todas las masas sobre el punto de apoyo. Adicionalmente, el segundo sistema balanceado lo realizó de manera simétrica; es decir, el lado izquierdo del sistema es un reflejo del lado derecho, mencionando en sus producciones escritas (presentes en el documento PEP1 en la sección 5.4 correspondiente al apéndice B) que "los puntos deben de estar en lugar contrario, ya que si no se realiza de esa manera habría un desequilibrio".

Para las actividades 4 y 5 prefirió utilizar el sistema en el cual las masas están en la misma posición, por lo que no tuvo dificultades para notar que el sistema permanecerá

en equilibrio a lo largo del mismo bajo esas condiciones.

En la actividad 6, construyó un sistema simétrico similar a lo hecho en la actividad 1, es importante recalcar que el participante identifica que una vez colocadas dos masas en el lado opuesto de las masas E y F, puede desplazar las dos masas restantes a las posiciones que desee, siempre y cuando estas se *contrarresten*, o en su defecto colocarlas sobre el apoyo.

A continuación, en la actividad 7, utilizando el sistema anterior, logró identificar que la única posición de equilibrio se conseguía cuando la masa recién agregada se ubicaba sobre el apoyo.

Durante la actividad 8 el participante no comprendió las instrucciones, por lo que el sistema expuesto no cumplió las condiciones solicitadas, ya que colocó nuevamente todas las masas sobre el apoyo, lo cual se especificaba en las instrucciones que no era válido.

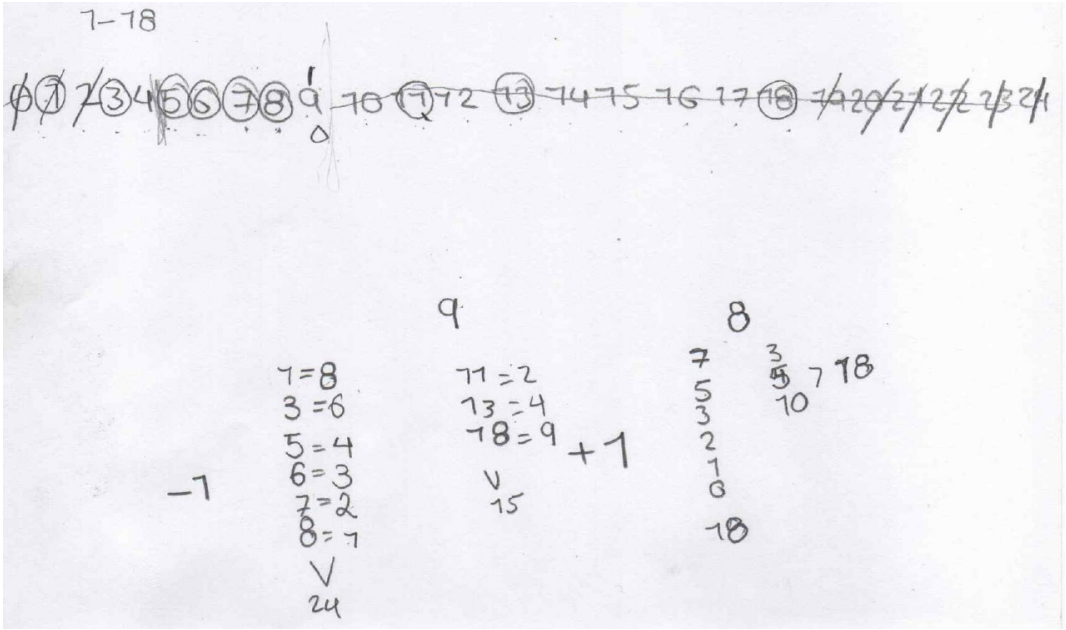
Para la actividad 9 el participante determinó que para lograr equilibrar el sistema agregando una sola masa, la suma de las distancias del lado izquierdo del apoyo a este mismo, debe ser igual a la suma de las distancias de las masas del lado derecho del apoyo. De manera que estando A y B en 2, C en 4, E y D en 22 y F en 24 con el apoyo en 12, entonces, como la distancia de A y B al apoyo es de 10, de C al apoyo es 8, entonces $10 \times 2 + 8 = 28$. De manera análoga la distancia de E y D al apoyo es de 10, mientras que de F al apoyo es de 12, por lo que $10 \times 2 + 12 = 32$. Como la diferencia del lado derecho con respecto del izquierdo es de 4, se necesita tener un punto que esté a 4 unidades de distancia del apoyo, siendo éste sobre 8.

En la actividad 10, el participante observó que al cambiar la posición de una masa del lado izquierdo del apoyo, este debe estar acompañado de un movimiento similar del lado derecho del apoyo, siempre y cuando este segundo movimiento sea de la misma distancia que el primero y hacia la dirección contraria, además de mencionar en el documento PEP1 “Considero que hay muchas ya que varían muchos movimientos y

combinaciones posibles".

Actividad 11. En esta última actividad, observó que sus datos van del 1 al 18, e identificó aquellos en los cuales no había masas, siendo estos 2, 4, 9, 10, 12, 14, 15, 16 y 17, eliminó tres números de los extremos para quedarse como candidatos el 10, 12 y 14, de los cuales eligió al 10 como mejor opción, pero después de utilizar la estrategia creada en la actividad 9 y averiguar que 10 no es la posición deseada abandonó método de resolución. Posteriormente descartó los números que creyó evidentes que no podían ser el punto de equilibrio (del 1 al 4 y del 10 al 18), y consideró que iniciar de la mitad (9) era un buen punto de partida para buscar el centro de masa, con lo que utilizando nuevamente la estrategia de la actividad 9 analizó esta posición, obteniendo que no es el punto de equilibrio, pero desplazando hacia el 8 su posición y ajustando todas las distancias del apoyo a las masas encontrando que este es el centro de masa, como se muestra en la Figura 4.1.

Figura 4.1: *Producciones escritas del participante 1*



Participante 6

La actividad tres fue realizada de manera no simétrica en ambos sistemas en equilibrio desarrollados. Sin embargo, se observan movimientos de la misma magnitud para pasar de un sistema a otro sin perder el equilibrio, y manteniendo las masas de los extremos en las mismas posiciones.

Durante la actividad 4, el participante desplazó todas las masas una unidad hacia la izquierda escribiendo en el documento PEP6 que "para conseguir un equilibrio es fundamental realizar el mismo cambio al centro de la masa si se cambian las unidades".

Para la actividad 5, el participante esperaba que al reducir todas sus masas a la mitad su centro de masa requería ese mismo cambio para lograr el equilibrio, por lo que mencionó en la actividad cuatro.

La actividad 6 fue completada mediante un acomodo simétrico de las masas, guiándose con la distancia de los extremos del sistema a las masas, tomando como punto de partida los puntos E y F.

Durante la actividad 7 el participante identifica la única posición en la cual el sistema permanece en equilibrio sobre el apoyo, sin embargo comenta que para poder equilibrar un sistema sin colocar masas sobre el apoyo es necesario que el número de masas sea par, para poder tener el mismo número de ellas de ambos lados del apoyo.

El participante tuvo dificultades en la actividad 8, debido a que se encontró con la contradicción de lo concluido en la actividad anterior, y si bien logró equilibrar el sistema no pudo hallar un método que le fuera de utilidad, trató de sumar la posición de los puntos del lado izquierdo del apoyo y ver si encontraba alguna relación con los del lado derecho, pero sin éxito.

Por otro lado en la actividad 9 en el primer sistema existió un mal entendido en la posición de las masas, ya que el participante menciona en sus producciones escritas (PEP6) que colocando la masa extra sobre el apoyo se equilibra el sistema y que "cumple con la teoría de la 7, en realidad la 7 la complemente con esto" como mencionó en sus

producciones escritas, posiblemente el error fue haber colocado la masa C en la posición 0, de esta manera lo que menciona el participante sería correcto. Para el segundo sistema contó las distancias de las masas del lado izquierdo al apoyo, y de la misma manera del lado derecho, mencionando que deben sumar los mismo, de manera similar a la participante 1, por lo que la masa que agregó para equilibrar el sistema la colocó en el la posición 19 a 7 unidades del apoyo.

Para resolver la actividad 10, el participante utilizó lo observado en las actividades 4 y 5, concluyendo que puede haber muchas configuraciones en equilibrio con el apoyo en 14, se cumple que al mover una masa de algún lado del apoyo tiene que ser correspondido por un movimiento de otra masa del lado contrario del apoyo de la misma distancia que el primero, por *movimientos equitativos*.

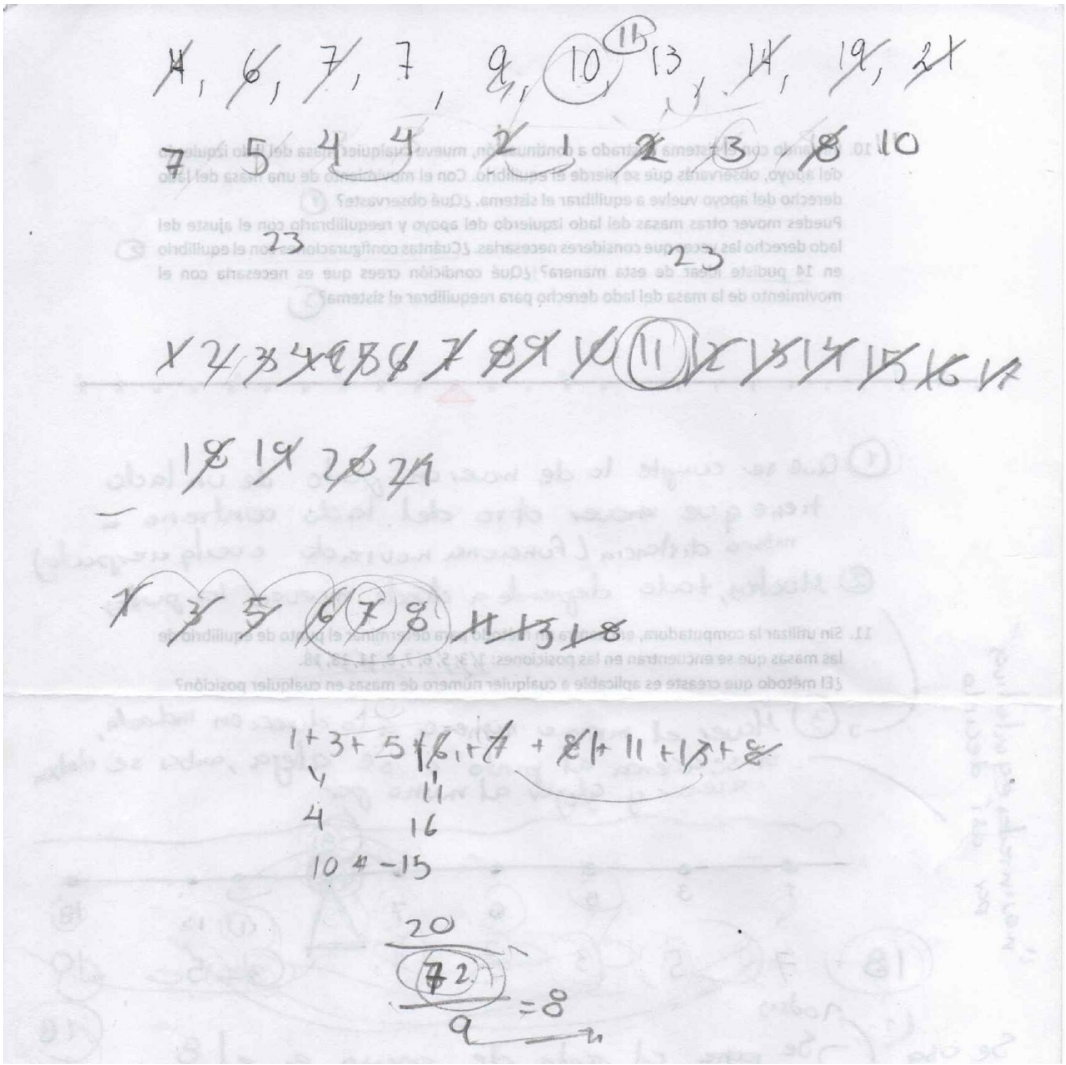
Actividad 11. El participante trató de utilizar lo observado en la actividad 9, sin embargo no estaba teniendo mucho éxito al utilizar esta estrategia.

Después de un tiempo explorando este método, surgió de manera espontánea que la media era el concepto matemático detrás de toda la actividad. El participante confundía los nombres de las medidas de tendencia central, ya que, si bien mencionó de manera correcta que se trataba de la media, intentó hallar el punto de equilibrio como si se tratase de la mediana, como se observa en la Figura 4.2. Al darse cuenta de su error, empezó a reflexionar, recordando el algoritmo de la media aritmética, aplicándolo tal y como se nota en la parte final de la Figura 4.2. Finalmente, confirmó su resultado al utilizar la estrategia de la actividad 9. Por todo lo anterior, el participante 6 concluyó en las producciones escritas que,

> El resultado del centro de balance es el mismo del promedio de todos los puntos (la media) además se coloca de manera de que la distancia desde este a los puntos sea la misma, es decir las distancias sumadas, darán el mismo resultado en ambos lados, el valor del centro va a cambiar cada que se muevan todos los puntos o que algún factor externo influya en los mismos,

es decir si todos los puntos se multiplican por 0.5 el centro va a cambiar a un nuevo valor.

Figura 4.2: *Producciones escritas del participante 6*



4.2.2. Estudiantes de rendimiento promedio

Participante 2

En la actividad 3 el participante realizó un acomodo en equilibrio simétrico para el primer sistema, mientras que para el segundo movió tres masas (una del lado izquierdo, y dos del derecho) para acomodarlo en equilibrio, por lo que es asimétrico.

Para la actividad 4 partió del sistema simétrico anterior, disminuyendo dos unidades a cada una de las masas, de la misma forma que al apoyo, sin embargo no encuentra una relación en la cantidad de este cambio para llegar nuevamente al equilibrio.

Sin embargo, ya en la actividad 5, logra identificar esta relación, comentando que esperaba que de la misma manera en que las masas se redujeron a la mitad el apoyo también lo haría.

Durante la actividad 6, el participante logró equilibrar el sistema colocando las cuatro masas que podía desplazar del lado izquierdo del apoyo y espaciadas cada dos unidades, pero sin lograr justificar su método de resolución, de manera que dependió completamente del uso e interacción con el manipulativo.

En la actividad 7 identificó que la única posición para mantener el equilibrio en un sistema agregando una sola masa es sobre el apoyo, escribiendo en PEP2 "si lo pongo en otro punto que no sea en el centro se va a desnivelar por la cantidad de masa en un extremo y en el otro no" discrepando con lo realizado en la actividad anterior donde de un lado del apoyo colocó 4 masas y 2 del otro.

Similarmente en la actividad 8 logra equilibrar la balanza como se le pide, sin embargo nuevamente sin poder justificar su método, ya que lo hizo colocando más masas cerca del centro de apoyo.

Por otro lado, ya en la actividad 9 logra idear un método para equilibrar los sistemas, siendo este mismo el visto en los participantes de alto rendimiento, que la suma de las distancias de las masas de un lado del apoyo sea igual al del lado opuesto. Es importante mencionar que esta actividad fue la ultima realizada, se observa un ajuste

de la estrategia utilizada en la actividad 11, donde en este caso si se consideran el total de las masas y no solo el máximo y mínimo.

Finalmente en la actividad 10, concluye de manera escrita que existen muchos acomodos de las masas para un sistema con el apoyo en 14 mencionando sus producciones escritas que "la condición es que debes de mover los puntos de los dos lados de manera equitativa para tener un balance", sin embargo ni este participante ni ninguno de los anteriores han desplazado una masa de un lado del apoyo al otro.

Actividad 11. Durante la resolución de la actividad 11 y posteriormente de la actividad 9 el participante 2 trabajó de manera colaborativa con el participante 3, debido a la cercanía que había entre sus asientos cuando alguno de estos dos participantes consultaba algo con el instructor el otro participante se incorporaba a la discusión.

El participante 2 menciona que identificó en las actividades pasadas que los valores que estén muy separados generan más peso en el sistema a diferencia de los que están juntos, y debido a que en esta actividad cuenta con valores continuos como el 5, 6, 7 y 8, y el siguiente valor es 11, tiene un espacio de dos (9 y 10) en donde puede colocar el apoyo.

Considerando que el apoyo está entre el valor máximo y mínimo redujo el espacio posible en el que podría estar, comentando en la última hoja de sus apuntes (PEP2) "hice más chiquitos los números más grandes y más grandes los números chiquitos" de manera que sus valores ahora eran 3, 4, 5 ,6, 7, 8, 11, 13, 15. En este procedimiento el participante menciona al 16, añadiendo un valor a su conjunto, pero esto es ocasionado a que si bien su masa que denominó B que originalmente estaba en 3 la desplazó a 4, hizo un movimiento extra a su masa I que originalmente estaba en 18, pero al desplazar A de 1 a 3, B pasó a 16, y finalmente a 15 por el movimiento de B, duplicando esta masa, una pasando a 15 y la otra permaneciendo en 16, pero al final no considerándola en su método de comprobación.

Ubicó su centro de masa en 9 ya que la distancia del mínimo y máximo al apoyo es

igual, $9 - 3 = 15 - 9$.

Si bien, después de realizar esta actividad el participante corrigió su estrategia en la actividad 9, no regresó a verificar su resultado de esta actividad.

Participante 3

El participante 3 construyó los dos sistemas de la actividad 3 asimétricos, ambos con 3 masas a cada lado del apoyo.

Para la actividad 4 disminuyó una unidad a todas sus masas, escribiendo en PEP3 que "al mover todos una unidad más todo se volvió a equilibrar", esto con el movimiento hacia la misma dirección y distancia del apoyo .

Para la actividad 5, el participante logró equilibrar el sistema al dividir las masas a la mitad, sin embargo se observa que tenía dudas sobre la validez de colocar masas en puntos medios, ya que al inicio de la actividad se les hizo la sugerencia de que colocaran las masas en unidades enteras debido a que justamente en esta actividad tendrían dificultades para colocar las masas en las mitades de estos puntos medios, está duda se observa en el siguiente diálogo de las líneas 147 a la 159 de la transcripción de la sesión (documento presente en los apéndices, sección 5.5):

> **Participante 3:** Profe (señala su pantalla con un sistema en equilibrio)
> **Instructor:** ¿Ya quedó?
> **Participante 3:** Pero, me quedó en la mitad
> **Instructor:** Ah, justo lo que les había comentado de que fueran número enteros, era para evitar de que si inicialmente tenían una masa en un cuarto luego iba a ser más difícil acomodarlo, pero así está bien. ¿Esperabas que pasara eso?
> **Participante 3:** Eh, no jajaja
> **Instructor:** ¿Por qué no? ¿Qué característica le ves (al apoyo) con respecto a los demás (masas)?

Participante 3: Eeeh ¿cómo?

Instructor: ¿Tienen alguna relación los movimientos que hiciste con este (apoyo)?

Participante 3: No sé

Instructor: A ver chécalo y trata de averiguarlo

Aún cuando logró equilibrar el sistema y darse cuenta que al mover todas las masas a la mitad de su posición original el apoyo también se comportaba de ésta manera, su registro fue inadecuado, ya que su confusión de no colocar masas en puntos medios permaneció en esta actividad.

Para la actividad 6, el participante distribuyó los puntos para que que tuviera la misma cantidad de ambos lados del apoyo, acomodando los 3 del lado izquierdo en posiciones cualquiera, mientras que el del lado derecho moverlo hasta lograr el equilibrio, dependiendo altamente del uso del manipulativo. No obstante, el participante regresó a esta actividad para corroborar su método de resolución de la actividad 9, del que se hablará más adelante.

Para la actividad 7 identificó con éxito que el apoyo es la única posición en la que puede agregar una masa extra a un sistema ya en equilibrio, así como en la actividad 8 distribuir un número impar de masas en un sistema en equilibrio sin colocar masas en el apoyo, o sea, teniendo más masas en un lado del centro de masa que del otro.

Por otro lado, durante la actividad 9 desarrolló la misma estrategia que los demás participantes, igualando la suma de las distancias de las masas al apoyo de ambos lados de éste.

Y en la última actividad con el manipulativo el participante identifica que hay muchas posibilidades de distribuir las masas en el sistema manteniendo el equilibrio mediante *movimientos equitativos*.

Actividad 11. Como ya se mencionó, durante las actividades 11 y 9 los participante

2 y 3 trabajaron de manera colaborativa.

El participante con lo observado en las actividades previas, en donde notó que el centro de masa está entre el valor mínimo y máximo intentó reducir este espacio mediante movimientos equitativos de los extremos, como en la actividad 10, moviendo el 1 al 3 y 18 al 16, sin embargo movió de igual forma la masa que ya tenía en 3 (que el participante nombró B) al 4, sin realizar su movimiento correspondiente del lado contrario, esto muestra que consideraba que no podía tener dos masas en la misma posición.

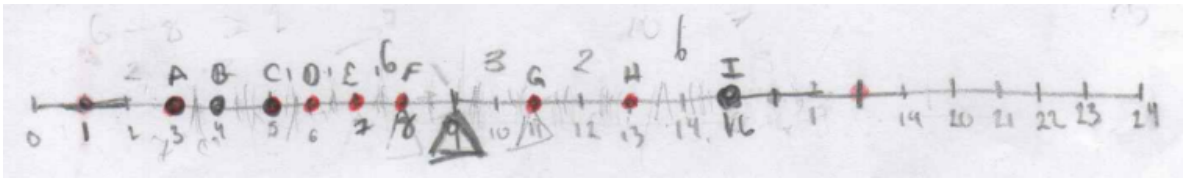
Y si bien pudo continuar con esta estrategia reduciendo cada vez mas el espacio entre el mínimo y máximo hasta tener todas sus masas en la misma posición, solamente realizó ese par de movimientos.

Por otro lado, el participante menciona de manera escrita que "hay una relación entre estas (las masas), el punto de apoyo, están más cerca de los números más pequeños y más lejos de los más grandes", con esto supuso que su apoyo debía estar cerca de las masas que ya tenia agrupadas del 3 al 8 y lejanas del 11, 13, y 16, considerando que el 9 era una buena opción.

Finalmente sumó las distancias de los puntos de ambos lados de su apoyo para verificar que fueran iguales (como lo hecho en la actividad 9), pero en esta ocasión consideró solo la suma de su apoyo (9) a su valor mínimo (3) y máximo (16), omitiendo por error el 15, y con esto obteniendo que la distancia de ambos lados es de 6, con lo que dio válido su resultado.

Se observa nuevamente que se utilizó la estrategia de equidad de distancias, que sin embargo no era correcta hasta su uso en la resolución de la actividad 9, en donde ya se consideró la suma total de las distancias de las masas al apoyo.

Figura 4.3: *Producciones escritas del participante 3*



4.2.3. Estudiantes de bajo rendimiento

Participante 4

El participante 4 en la actividad 3 tuvo dificultades para construir los sistemas en equilibrio, siendo uno de ellos erróneo, posiblemente al desplazamiento del apoyo, sin embargo el segundo sistema fue distribuido sin inconvenientes.

Para la actividad 4 el participante optó por armar otro sistema diferente a los hechos en la actividad 3, con el cual identificó que al desplazar las masas de manera equitativa y hacia la misma dirección en un sistema ya balanceado el centro de apoyo se tiene que mover esta misma distancia para volver a equilibrar el sistema.

Durante la actividad utilizó el sistema de la actividad 5, en donde el participante seguía teniendo dificultades principalmente con el entendimiento de las actividades, sin embargo logró balancear el sistema, como se puede observar en el siguiente diálogo de la transcripción de la videograbación, de las líneas 207 a la 222, de la 264 a la 271 y finalmente de la 276 a la 303.

> **Participante 4:** Aquí en esta actividad (5), ¿Es como la anterior? Por ejemplo, aquí le aumento 0.5 para la suma
> **Instructor:** En realidad no, aquí la indicación es multiplicar por 0.5, para que al hacerlo con tus masas te queden a la mitad, y así con todos
> **Participante 4:** Mmmm, entonces este lo multiplico por 0.5, aquí este también (el apoyo)
> **Instructor:** Ese lo vas a tener que acomodar al final, pero ¿me imagino que

ya sabes más o menos en donde lo vas a colocar?

Participante 4: Si!

Instructor: ¿En dónde?

Participante 4: Como por aquí (señalando su pantalla en donde quedaría el punto moviendo el apoyo 3 unidades como en la actividad anterior)

Instructor: ¿Por qué?

Participante 4: Porque fue lo que las había movido

Instructor: ¿Pero ahorita todas se va a mover esa cantidad?

Participante 4: Eeeh jajaja ay no, tendría que averiguar cuanto se van a mover

Instructor: A ver inténtalo

...

Participante 4: ¿Y aquí? ¿Tengo que mover el apoyo?

Instructor: Una vez hayas dividido todos a la mitad, empieza a encontrar el apoyo, pero, ¿ya sabes por donde va a quedar?

Participante 4: (asiente con la cabeza)

Instructor: ¿Por dónde?

Participante 4: ¿Por el 4?

Instructor: ¿Por qué por el 4?

Participante 4: ¿Por qué también es la mitad?

...

Participante 4: Profesor...

Instructor: ¿No te da?

Participante 4: No

Instructor: ¿Y si dividiste todos a la mitad? ¿Este es el que ocupaste (refiriéndome al sistema en equilibrio con el que partió)?

Participante 4: Si

Instructor: A ver veamos, el primero te tiene que quedar en 0

Participante 4: Ah, pero, ya lo tengo acá

Instructor: Pero es para corroborar.

Participante 4: Ok

Instructor: Bueno, otro en 1.5, el siguiente en 3, otro en 6, otro en 7.5 y el último en 9.

Participante 4: Si

Instructor: Si, los colocaste bien, experimenta un poco para ver en dónde se equilibra

Participante 4: Es aquí

Instructor: ¿Listo?

Participante 4: ¿Y a fuerzas...? Bueno es que aquí, me dio esto

Instructor: ¿Lo tienes en 4.5?

Participante 4: Si

Instructor: ¿Y el anterior dónde lo tenías?

Participante 4: En 9

Instructor: ¿Se parece?

Participante 4: Si, es la mitad

Instructor: ¿Y es lo que esperabas?

Participante 4: Si

En la actividad 6 realizó un acomodo simétrico para balancear el sistema, pero sin justificar su estrategia, y en la actividad 7 describe que el apoyo es el único punto donde se puede colocar el apoyo debido a que en "los dos lados debe ser la misma cantidad" de masas como escribió en sus apuntes del documento PEP4.

Posteriormente en las actividades 8 y 9 construyó sistemas en balance escribiendo que se consigue porque "ahí se logra el balance de masa" denotando una alta dependencia

con el manipulativo, logrando el balance a prueba y error.

Ya en la actividad 10 identificó que existen diversos acomodos de las masas con el argumento hecho en sus producciones escritas, que debido a que el número de masas es par entonces "se puede realizar de forma equitativa" refiriéndose a que siempre puede tener la misma cantidad de masas de ambos lados del apoyo, y el sistema estará en equilibrio siempre que se hagan *movimientos equitativos* (de la misma magnitud pero en sentido contrario) en ambos lados.

Actividad 11. Debido a cuestiones escolares el participante se tuvo que retirar antes de terminar toda la actividad, solo teniendo tiempo en esta actividad de escribir "La masa tiene que ser equivalente en los dos lados" y que "Los movimientos que se realizan tienen que ser iguales en los 2 lados", un par de conclusiones que observó a lo largo de las demás actividades.

Participante 5

En la actividad 3, el participante armó dos sistemas asimétricos, mientras que en la cuarta actividad fue el único participante que desplazó sus masas hacía el lado derecho, sin embargo no esperaba que para volver a equilibrar el sistema su apoyo lo tuviera que mover también hacia ese lado y con la misma magnitud.

De manera similar menciona que tampoco esperaba que al colocar las masas a la mitad de las distancias de su posición el centro de masa también tendría que cambiar de esa manera para equilibrar el sistema. El participante cometió un error al momento de registrar su acomodo en las producciones escritas, ya que colocó un punto en 8.5 siendo la posición correcta 9.5.

Durante la actividad 6 el participante escribió en PEP5 que su "estrategia para lograr el equilibrar las masas fue buscar tal vez un patrón que pudiese generar el equilibrio", sin embargo lo hizo mediante la interacción con el manipulativo a prueba y error, logrando un acomodo asimétrico. Igualmente en la actividad 7 identifica el apoyo como el único

lugar donde puede colocar la masa extra para que el sistema permanezca en equilibrio.

Nuevamente en la actividad 8, realizó un acomodo asimétrico sin justificar su método de resolución, dependiendo completamente del uso del manipulativo, cosa que se reafirma en la actividad 9, mencionando en sus producciones escritas que "la posición de la masa agregada es que el único punto donde puede ser colocada la séptima masa para que quede en equilibrio", notándose que desplazó la masa agregada por todo el sistema para hallar su lugar.

Finalmente en la actividad 10 identifica que existen muchas posibilidades de sistemas en equilibrio añadiendo que "la condición para que pueda equilibrarse es que si se mueve una a la izquierda otro se tiene que dirigir al lado contrario" en PEP5.

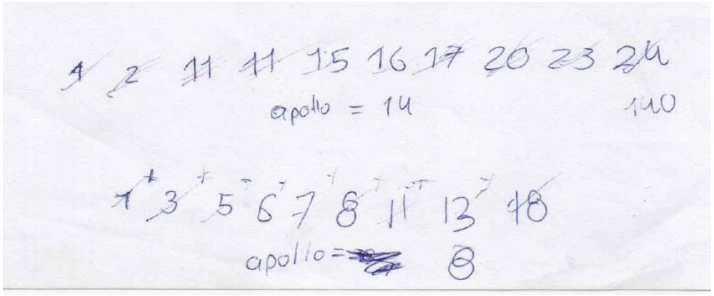
Actividad 11. En un principio, debido a que el numero de masas es impar (7) y a lo observado en actividades previas, el participante consideró que podía buscar el sistema en equilibrio en que tuviera el mismo número de masas (3) de ambos lados del apoyo y la restante sobre este, sin embargo decidió cambiar de estrategia al no encontrar un patrón que le ayudara.

Posteriormente, su estrategia consistió en operar con su conjunto de datos, para ello observó la actividad 10, en la cual sabía el conjunto entero de 10 datos (1, 2, 11, 11, 15, 16, 17, 20, 23, 24), además del apoyo (14). Al sumar todos los datos de su conjunto o valor de sus masas obtuvo 140, con esto logró observar la similitud entre esta suma, el valor del apoyo, y la cantidad de masas o datos, en la cual al dividir la suma entre el número de datos obtiene el valor del apoyo. Después de corroborar esto con actividades previas, resolvió la actividad 11 de esta manera obteniendo que al apoyo está en 8, como se observa en la Figura 4.4, y mencionado nuevamente en PEP5:

> Yo obtuve la forma para poder saver cual es el punto de equilibrio utilizando los numeros de las masas y eso lo sume y el reultado que obtuve lo dividi entre la cantidad de numeros de masas qe hay, una idea que tuve al resolver la actividad fue que en todos los casos el punto de apollo siempre esta entre

el valor menor y el mayor valor y la otra idea fue que cuando observe que cuando un punto tenia que moverse de la misma forma que otro punto tenia que moverse.

Figura 4.4: *Producciones escritas del participante 5*



4.3. Resumen de las estrategias de solución

En la Tabla 4.1 se sintetizan las estrategias utilizadas por los participantes de las actividades 3 a la 10. Por su parte la Tabla 4.2 contiene las estrategias de los participantes para resolver la actividad 11. Nuevamente, por la razón ya explicada en la sección 4.2 se omitieron las primeras dos actividades.

Tabla 4.1: *Resumen actividades 3-10*

Actividad	**Participante 1**	**Participante 2**	**Participante 3**	**Participante 4**	**Participante 5**	**Participante 6**
3	MA	AS	AA	AS	AA	AA
4	MA	DM	ME	ME	ME	ME
5	MA	ME	ME	ME	ME	ME
6	AS	DM	DM	AS	DM	AS
7	UA	UA	UA	UA	UA	UA
8	Error de comprensión	DM	DM	DM	DM	DM
9	ED	ED	ED	DM	DM	ED
10	ME	ME	ME	ME	ME	ME

Siendo

MA: Todas las masas sobre el apoyo

UA: Una masa en el apoyo

AS: Acomodo simétrico

AA: Acomodo asimétrico

ME: Movimientos equitativos

DM: Dependencia al manipulativo

ED: Estrategia equidad de distancias

Tabla 4.2: *Resumen actividad 11*

Participante	**Método de resolución**
1	Aproximación, descartando los valores "obvios" que no podían ser candidatos, considerando la mitad (9) del sistema, verificando con ED, para finalmente desplazar el apoyo a 8.
2 y 3	Disminución del espacio donde se puede estar la media (entre el máximo y mínimo,) mediante movimientos equitativos, aproximando con un criterio observado en el que "mientras más estén juntos (las masas) menos peso hacen" y "mientras más diferencia hay... más peso hacen" por lo que colocaron su masa en 9 verificando mediante ED pero solo considerando el máximo y mínimo) (9-3=15-9), no la suma de todas las distancias.
5	Analizando la actividad 10, buscando operar con la posición de las masas, sumo todas obteniendo 140, notando que es múltiplo de la posición del apoyo (14) y del número total de masas (10). Por lo que para encontrar el apoyo la suma se divide por el número de masas.
6	Mediante ED sin éxito, para posteriormente de manera "espontanea" pensar en la media, sin embargo tenía confusión con las medidas de tendencia central, verificando primero con la mediana, y después darse cuenta de su error, recordando el algoritmo de la media aritmética.

4.4. Estrategia utilizada: Equidad de distancias (ED)

En cuatro de los seis participantes se repitió una estrategia para balancear un sistema en el cual solo se puede desplazar una masa, es de particular interés ya que como se muestra a continuación conforma un cambio entre registros de representación, pudiento hacer el proceso denominado por Duval (2017) como mapeo uno a uno entre unidades de significado, en el manipulatvo virtual los participantes identificaron la relación entre la posición en la que se colocaba cada masa con respecto al apoyo, con el equilibrio, de manera muy similar a lo visto en el experimento *El Equilibrio de la Balanza* de Inhelder y Piaget (1985), de modo que cada masa en su sistema (registro icónico) corresponde

numéricamente (registro simbólico) al de su posición como un elemento de un conjunto de datos, y lo mismo sucede con el apoyo y su posición. Sin embargo, esta conversión del registro icónico al simbólico no fue directa como se explicará más adelante.

La estrategia ya fue mencionada en repetidas ocasiones, consiste en igualar la suma de las distancias de las masas al apoyo en ambos lados de este, visto de manera general en un sistema de 7 masas tenemos,

$$(\bar{x} - A) + (\bar{x} - B) + (\bar{x} - C) + (\bar{x} - G) = (D - \bar{x}) + (E - \bar{x}) + (F - \bar{x}) \tag{1}$$

Desarrollando obtenemos,

$$4\bar{x} - A - B - C - G = D + E + F - 3\bar{x} \tag{2}$$

$$7\bar{x} - A - B - C - G = D + E + F \tag{3}$$

A partir de esta igualdad, se puede llegar al algoritmo computacional de la media aritmética. Sin embargo, los participantes la utilizaron para encontrar el elemento faltante del conjunto de datos, de acuerdo a lo solicitado actividad 9 y, posteriormente, como método de comprobación para la actividad 11.

Siendo lo inicialmente mencionado,

$$\bar{x} = \frac{A + B + C + D + E + F + G}{7} \tag{4}$$

O sea,

$$\bar{x} = \frac{A + B + C + D + ... + M_n}{n} \tag{5}$$

Para determinar el elemento faltante en el conjunto de datos se tiene,

$$G = 7\bar{x} - A - B - C - D - E - F \tag{6}$$

De modo que,

$$M_x = n\bar{x} - A - B - C - ... - M_n \tag{7}$$

Siendo ambas ecuaciones equivalentes.

4.5. Tratamientos y conversiones presentes en las diferentes actividades

Para la explicación de estos procesos, primeramente se mencionarán las representaciones utilizadas por los participantes y al registro al que pertenecen:

- Sistema de balanza: Se considera un registro icónico, ya que es una representación de un objeto físico, en donde cada elemento del manipulativo es referente de un objeto en la realidad y tienen similitud estructural (más no son una *copia exacta*), los puntos siendo masas, el segmento de recta la palanca o plataforma de equilibrio, y el triángulo el punto de apoyo. Mientras que la manipulación de esta representación ya sea tanto en GeoGebra como en lápiz y papel se consideran tratamientos.

- Expresiones retoricas, verbales y escritas: en el momento en el que los participantes explican sus métodos de solución en cualquiera de estas dos maneras de expresión, se considera que están realizando una conversión del registro de partida al de lenguas naturales.

- Equidad de distancias: Esta representación se clasificó como gráfico, ya que los participantes representaban una recta o secuencia numérica en la cual colocaban

los puntos en las distancias en las que las sumas de estas al punto de apoyo es igual en ambos lados de este como en se muestra en las Figuras 4.1, 4.2 y 4.3. Se diferencían con el registro icónico en que en estas representaciones se dejaba de lado la plataforma y su comportamiento para enfocarse en las distancias que había entre los puntos colocados y uno buscado. Sin embargo, para la obtención del punto faltante, los participantes se valieron de operaciones aritméticas, resolviendo una ecuación de manera segmentada. Por lo tanto, el método de equidad de distancias es gráfico para todos los participantes que lo utilizaron, pero no todos los representaron de manera simbólica, la gran mayoría se quedaron en un registro auxiliar transicional.

- Algoritmo de la media: Registro simbólico y lenguas naturales.

Por otro lado, se observó en diversas ocasiones que los participantes iniciaban el tránsito entre registros (conversiones), sin embargo, al momento de obtener el resultado que buscaban no terminaban de formalizar este nuevo registro.

Lo anterior es claro al momento de analizar el método de equidad de distancias, en el que se apoyaban de operaciones de suma y resta, pero sin llegar a expresar de manera algebraica este método (Figura 4.1), como se muestra en la ecuación (1), o en el caso del participante 5 en la Figura 4.4, no representa el algoritmo descubierto de manera algebraica, sino que se limita a colocar el conjunto de datos, la suma de este y la posición del apoyo, al mismo tiempo que expresa de manera escrita en sus conclusiones y hablada en las líneas 1320 a 1335 de la transcripción el método de resolución.

Resalta que el participante 6 fue el único que logró transitar al registro simbólico, aunque esto haya sucedido al momento de relacionar las medidas de tendencia central y el centro de masa, no del método de equidad de distancias, por lo que al recordar el algoritmo de la media aritmética lo representó con la ecuación (5) con el conjunto de datos de la actividad 11 como se ve en la Figura 4.2.

En la Tabla 4.3 se exponen las conversiones entre registros de representación reali-

zadas por los participantes de acuerdo a lo presentado por Duval (2017) en la Figura 2.2.

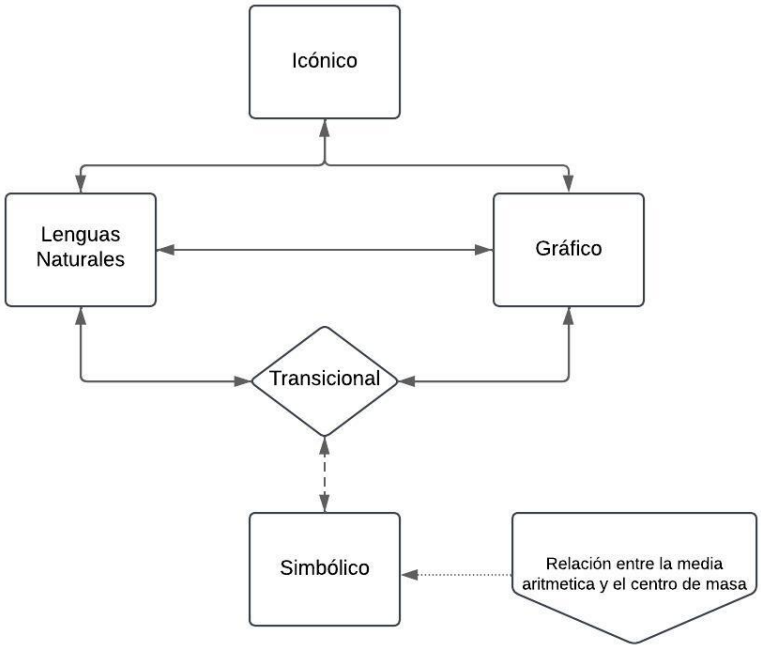
Tabla 4.3: *Registros utilizados por los participantes*

Participante	**Icónico-No Icónico**	**Lenguas Naturales**	**Transicional**	**Simbólico**	**Gráfico**
1	Todas (menos en la actividad 11)	Todas	9 y 11	-	9 y 11
2	Todas	Todas	9 y 11	-	9 y 11
3	Todas	Todas	9 y 11	-	9 y 11
4	Todas (menos en la actividad 11)	Todas	-	-	-
5	Todas (menos en la actividad 11)	Todas	11	-	-
6	Todas	Todas	8, 9 y 11	11	8, 9 y 11

Con todo lo descrito anteriormente, se deduce la ruta de conversiones que siguieron los participantes, representada en la Figura 4.5, en la que todos partieron de un registro icónico y, mediante las actividades fueron transitando primeramente hacia el registro de lenguas naturales, y en la actividad 9 la gran mayoría utilizaron (a excepción de los participantes 4 y 5) el registro gráfico mediante el método de ED, para finalmente concluir en un registro trasicional hacía el simbólico.

Por otra parte, el participante 6 al no poder lograr la conversión del registro gráfico-transicional-simbólico, es cuando identifica la relación entre la media aritmética y el centro de masa, y al momento de corroborar esta relación transita en sentido contrario al original, ya que al determinar la media del conjunto de datos, verifica el resultado mediante ED, sin embargo esta conversión no es directa, sino que nuevamente pasa por el registro auxiliar transicional.

Figura 4.5: *Ruta de conversiones*



Esta ruta identificada es congruente con lo presentado por Duval (2017) en la Figura 2.2.

4.6. Aprendizaje alcanzado

Según todo lo descrito y analizado pertinente a lo realizado por los participantes, se clasificó el aprendizaje que se considera cada uno de ellos desarrolló o estaba en vías de ello.

Inicialmente se observa que los participantes 1, 2, 3 y 6 presentaron características de aprendizaje significativo de proposiciones, de acuerdo a como se menciona a continuación.

Como ya se mencionó, el participante 6 fue quien más registros de representación desarrolló a lo largo de la actividad, al igual de ser el único quien identificó a la media

aritmética y desarrolló una conclusión más completa, en la cual denota un ajuste y extensión de lo que el participante sabía de la media aritmética.

Lo anterior es claro al analizar el momento en el cual tiene la confusión entre los nombres de las medidas de tendencia central, si bien relacionó la actividad con estas, no identificaba cuál era la que llevaría a la solución, esto haciendo que el aprendizaje sea a su vez correlativo, de acuerdo a lo descrito por Ausubel et al. (1983), y presente en el capitulo 2 del presente trabajo.

Por otro lado, el participante 6 mantuvo un diálogo activo con el instructor a lo largo de la actividad, todos sus métodos de resolución e ideas pertinentes para ello fueron propias, por lo cual fueron por descubrimiento.

Por su parte los participante 1, 2 y 3, idearon métodos de resolución para todas las actividades, sin embargo no identificaron las medidas de tendencia central, esto posiblemente fue causado a la falta de tránsito en el registro simbólico, con lo cual pudieron haber identificado el objeto matemático. Sin embargo, debido a todas las propiedades de la media que lograron identificar y usar a lo largo de las actividades se clasifica su aprendizaje como combinatorio, ya que como se mencionó, no lograron relacionarlo con ideas estadísticas superordinadas ni subordinadas.

Ahora bien, el participante 1 denota un mayor dominio en el tránsito entre los registros de representación ya ideados, como se muestra en la actividad 11, en el que aunque sigue trabajando en el método de ED, no depende de una representación gráfica de el, sino que termina en un registro transicional hacia el simbólico de manera más segura a diferencia de los participantes 2 y 3, que aunque ocuparan una estrategia de movimientos equitativos para reducir el "espacio" en el que la media podía estar, no lo desarrollaron más allá de unos cuantos movimientos.

Estos tres participantes 1, 2 y 3, idearon sus métodos de resolución, sin embargo requirieron de más preguntas auxiliares para apoyarlos en las actividades, como se puede ver a lo largo de toda la transcripción de la sesión. Por lo tanto clasifica como

un aprendizaje significativo por descubrimiento guiado.

Por su parte los participante 4 y 5 fueron quienes presentaron mayor dificultad, esto es claro al observar la dependencia al manipulativo en diferentes actividades, al igual que no obtener el método de ED.

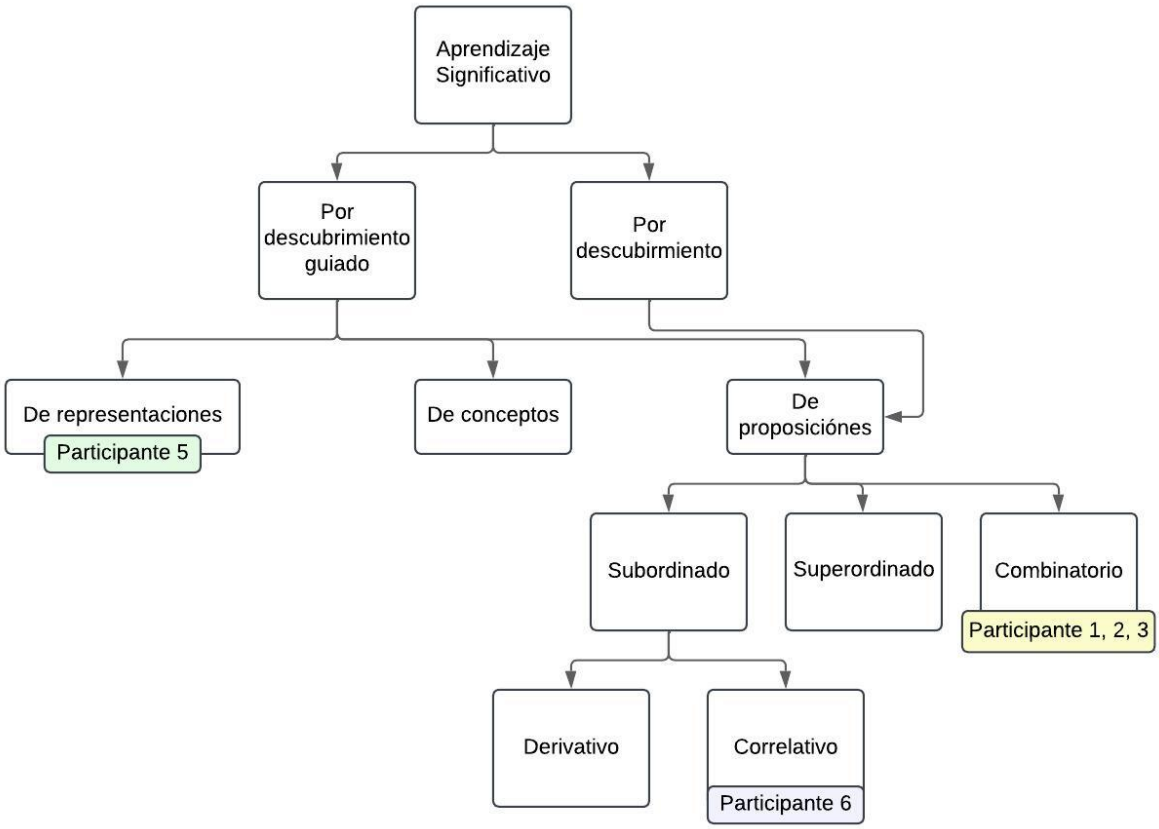
Pese a eso, el participante 5 fue junto al participante 6 quien utilizó el algoritmo computacional (sin llegar a representarlo de manera simbólica) de la media como solución de la actividad 6, no obstante la forma en la cual se le ocurrieron fue distinta. Debido a esto y a lo descrito en el marco conceptual, se cataloga este aprendizaje como significativo de representaciones, y que se observa una relación entre esta forma de obtención del centro de masa (media) con el registro icónico (manipulativo).

Por su parte le participante 4 aunque no haya tenido la oportunidad de concluir con la última actividad, su desarrollo en las actividades previas apuntan a un resultado similar con el participante 5, sin embargo, por falta de esta información no se determinó el aprendizaje del participante 4.

De igual manera que con los tres primeros participantes el participante 5 necesitó preguntas auxiliares para llevarlo hacia donde él apuntaba, en donde debido a que su intento de solución de la actividad 11 consistió en operar con el conjunto de datos brindado se le hizo la sugerencia de consultar los sistemas ya resultados en actividades previas para buscar relaciones entre sus elementos que le fueran de utilidad para su método de resolución, por lo tanto es un aprendizaje por descubrimiento guiado.

Dicho todo lo anterior, el aprendizaje desarrollado por los participantes puede ser visto en la Figura 4.6.

Figura 4.6: *Clasificación del aprendizaje de los participantes*



Se observa que el aprendizaje significativo por recepción se omite en el diagrama debido a que no se presentó en ninguno de los participantes.

4.7. Cierre

Es de interés mencionar que el participante 6 fue el único que logró identificar a la media aritmética como el objeto matemático sobre el cual están fundamentadas las actividades, y es de igual forma el único participante que transitó entre los cuatro registros de representación, brindándole significado a esta medida de tendencia central más allá de una operación matemática, como se muestra en las líneas 1363 a la 1386 de la transcripción.

Y si bien los demás participantes no identificaron a la media aritmética, se presentó de manera repetida (en 4 de los 6 participantes) el método denominado ED, que como se mostró previamente, es una gran oportunidad para vincular ambos conceptos, completando el tratamiento del registro transicional al simbólico.

A pesar de eso, se analiza que mediante esta relación entre la media aritmética y el centro de masa es posible la formación de un aprendizaje significativo, aunque se presentaron diferentes características entre los participantes, en todos se puede observar la construcción del concepto mediante esta relación y la experimentación con el manipulativo.

Sin embargo, el abordar el aprendizaje de esta medida de tendencia central mediante esta relación de conceptos, no es garantía de éxito, ya que como se pudo observar, existe la posibilidad de que al resolver las actividades el estudiante dependa altamente del manipulativo, lo que dificulta la identificación de relaciones y patrones tal como con los participantes 4 y 5, que justamente son quienes no lograron transitar a una representación gráfica (método de ED), y aunque el participante 5 llegase al algoritmo de la media aritmética no lo relacionó con esta medida estadística, sino que lo interpretó como la forma de obtener el punto de equilibrio del sistema.

Capítulo 5

Discusión y conclusiones

De acuerdo con lo expuesto en el capítulo de resultados, se obtuvo evidencia de que en los participantes se presentaron diversos tipos de aprendizaje con diferentes características, el participante 6 llegando a desarrollar un aprendizaje significativo por descubrimiento de proposiciones subordinado correlativo, siendo a su vez, el único participante que transitó en todos los registros de representación semiótica.

Por otro lado, el participante 5 desarrolló un aprendizaje significativo por descubrimiento guiado de representaciones, siendo el más cercano al aprendizaje por repetición. Este participante tuvo dependencia al manipulativo al momento de resolver las actividades y justificar sus respuestas, al mismo tiempo de no transitar en todos los registros de representación.

Mientras que los participantes 1, 2 y 3 alcanzaron un aprendizaje significativo por descubrimiento guiado de proposiciones combinatorio, sin embargo el participante 1 demostró un tránsito entre registros más controlado, al mismo tiempo que mejores resultados en las actividades.

Igual de relevante, es mencionar la estrategia de ED, que 4 de los 6 participantes idearon, y del cual se puede extender como una oportunidad para transitar al registro simbólico y a su vez al algoritmo de la media aritmética, apoyando de esta forma el

desarrollo de significado de la media.

Se observa que los participantes 4 y 5 fueron quienes mayores problemas encontraron al momento de justificar sus resultados y operar el manipulativo, de igual manera el participante 5 optó por una estrategia diferente para la resolución de la actividad 11 sin considerar lo concluido en las actividades previas, lo que se puede extraer de esto es que las características y elementos de las actividades, y del manipulativo no se relacionaron de manera sustancial con su estructura cognoscitiva de la forma que se buscaba y esperaba.

El manipulativo del sistema de balance fue el medio por el cual los participantes empezaron a identificar patrones y propiedades de la media, que posteriormente les sirvió para resolver actividades, además, como ya se mencionó, esto no es sinónimo de la construcción de un aprendizaje significativo, es necesario el averiguar de manera detallada las características de los estudiantes para su mejor uso, y adaptar las actividades de acuerdo a lo ya mencionado.

Analizando la transcripción de la sesión, es claro notar la importancia de las dos primeras actividades, de manipulación y designación, ya que los participantes tuvieron cómo nombrar a los objetos que manipulaban tanto las acciones que realizaban. Sin embargo, también se observa que todos los participantes a excepción del participante 6 quien identificó a la media aritmética (teniendo problemas al confundir la media con la mediana, siendo esto un problema recurrente en el aprendizaje de las medidas de tendencia central, tal y como lo menciona Cruz y Garret (2008) en su investigación), siguieron nombrando ambas cosas de esta manera, por lo que en todos los registros en los que transitaron fueron relacionados con el inicial, sin llegar a vincularlo con el concepto estadístico.

Por otra parte, se observaron grandes similitudes con lo concluido por Pollatsek et al. (1981) con su denominado conocimiento análogo de la media, siendo esta coincidencia la capacidad de realizar aproximaciones de su valor dado un conjunto de datos (como

con los participantes 1,2 y 3, en la actividad 11), con la gran diferencia de que con esta forma de representación de la media no se buscaba que fuera un método para su determinación, sino más bien, el mecanismo por el cual brindarle significado con la ayuda del tratamientos y conversiones de ese registro icónico.

A su vez, se notan elementos de lo concluido por Moyer-Packenham y Westenskow (2013), ya que, como se ha mencionado, los estudiantes lograron presentar diversos métodos de resolución de las actividades partiendo del manipulativo, siendo el claro ejemplo de esto la estrategia ED, o sea, el algoritmo computacional de la media aritmética, estando estrechamente relacionado con lo mencionado por Durmus y Karakirik (2006) y el enfoque aprendiendo con el modelo.

Con todo lo dicho y analizado, se puede concluir que el aprendizaje de la media aritmética mediante la relación con el centro de masa es una gran oportunidad para proveer de significado a este objeto matemático, por lo que la construcción de un aprendizaje con significado mediante el tratamiento y conversión de representaciones semióticas puede ser muy similar a lo descrito en en la Figura 2.3, las ideas que se introducían en las actividades se relacionaban de manera sustancial y no al pie de la letra con los conocimientos previos de los participantes, siendo un factor importante la diversidad de representaciones y registros que se presentaron debido a que cada uno de ellos desvela características del objeto matemático. En este sentido, el transito entre registro siguió un rumbo como se esperaría de acuerdo a Duval (2017) y como se observa en la Figura 4.5, donde las representaciones construidas y la inicial (presentada con el manipulativo) se relacionaban mediante las unidades de significado, partiendo de un sistema de balance a elementos numéricos relacionados por la suma de diferencias entre ellos y un valor buscado.

Sin embargo, se deben considerar diversos factores, tales como el uso adecuado del contexto y la no dependencia al manipulativo, al mismo tiempo de no confundir el mismo manipulativo con el objeto detrás de este, al igual que considerar las características de

los estudiantes, ya que como se pudo observar, se obtienen diferentes resultados en correspondencia a las características de los participantes, por lo tanto, es necesario la modificación de las actividades para una mejor adecuación a ellos.

5.1. Trabajo a Futuro

Como se pudo observar, si bien se obtuvieron buenos resultados en el presente estudio, existieron dificultades en la identificación de propiedades de la media. Por lo tanto, una primera aproximación a la mejora del aprendizaje de la media con su relación con el centro de masa es mediante la extensión de las actividades presentada, esto con el objetivo de apoyar de mejor manera a los estudiantes, para exponer de manera más clara los patrones presentes durante la experimentación con el manipulativo, facilitando de este modo el tránsito a los demás registros, específicamente al simbólico, el cual fue el de mayor dificultad para todos los participantes. De manera similar, poner más atención a la estrategia de ED, que como se ha mencionado en repetidas ocasiones, apareció de manera frecuente y es un medio ideal para el transito al registro simbólico.

Ahora bien, una manera de inducir el tránsito a lo continuo, puede verse en Fuentes (2020), donde se ejemplifica el caso de la media ponderada. Para este efecto, el manipulativo en GeoGebra tiene la capacidad de variar o cambiar el peso y el tamaño de los puntos que corresponden a diferentes masas en el mismo. Para el mejor entendimiento de este efecto, se hace necesario la creación de otras actividades. Hasta donde el autor de este trabajo tiene conocimiento, esta investigación no está reportada.

Finalmente, el estudio de una distribución continua de masas representa un reto tanto desde la perspectiva de la creación del manipulativo, como de la presentación de los propios conceptos, al estar involucrados elementos del cálculo diferencial, de modo que para su introducción, es necesario que se aborde con estudiantes de nivel bachillerato o superior.

Dos propuestas para extender el presente estudio a momentos de órdenes mayores pueden consultarse en (Lord & Yan, 2011) y (Nelsen, 1998). Particularmente, en el segundo de estos trabajos, se expone que es posible representar un registro simbólico correspondiente al momento de inercia mediante su correspondiente registro gráfico. De particular importancia es la varianza, cuya definición se hace equivalente al momento de inercia de un sólido con una distribución de masa continua.

5.2. Reflexiones finales

Gracias a todo lo observado y analizado durante el proceso de realización de la presente tesis, se aprendió que es fundamental brindar a los estudiantes la oportunidad de explorar problemas matemáticos con diversos enfoques, de esta manera se pueden generar perspectivas y métodos de resolución interesantes, que con la adecuada guía y apoyo del docente se pueden apuntar y refinar en diversas representaciones en uno y más registros del mismo objeto matemático, apoyando así la construcción de un aprendizaje significativo.

Por otro lado, si bien la tesis mostró resultados favorables con esta metodología, es necesario realizar ajustes a la misma, tales como aumentar en el número de sesiones, a la vez del tiempo total en el que los estudiantes trabajen en las actividades, con el objetivo de que el proceso de apropiación y desprendimiento del manipulativo se realice de mejor manera, ayudando de este modo a la identificación de patrones, lo que llevaría a una mejor identificación de la relación entre los registros de representación semiótica.

Bibliografía

Ausubel, D., Novak, J., Hanesian, H., & Pineda, M. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. Trillas.

Barlow, R. (1993). *Statistics: A Guide to the Use of Statistical Methods in the Physical Sciences*. Wiley.

Boaler, J. (1993). The Role of Contexts in the Mathematics Classroom: Do They Make Mathematics More "Real"? *For the Learning of Mathematics*, *13*(2), 12-17.

Clarke, D., & Roche, A. (2018). Using contextualized tasks to engage students in meaningful and worthwhile mathematics learning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *51*, 95-108. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.006

Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*. L. Erlbaum Associates.

Cruz, J. A., & Garret, A. J. (2008). Understanding the Arithmetic Mean: A Study with Secondary and University Students. *Research in Mathematical Education*, *12*, 49-66.

Daiga, M., & Driskell, S. (2021). Visualizing the Arithmetic Mean. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*, *114*(8), 607-615. https://doi.org/10.5951/MTLT.2020.0192

Devore, J., Cárdenas, J., & Flores, J. (2015). *Probabilidad y Estadística Para Ingeniería y Ciencias*. CENGAGE Learning.

DGME. (2024a). *Nuestros saberes: Libro para alumnos, maestros y familia. Sexto Grado*. Secretaría de Educación Pública. https://libros.conaliteg.gob.mx/2024/P6SDA.htm

DGME. (2024b). *Saberes y pensamiento científico. Primer grado*. Secretaría de Educación Pública. https://libros.conaliteg.gob.mx/2024/S1SAA.htm

DGME. (2024c). *Saberes y pensamiento científico. Segundo grado*. Secretaría de Educación Pública. https://libros.conaliteg.gob.mx/2024/S2SAA.htm

DGME. (2024d). *Saberes y pensamiento científico. Tercer grado*. Secretaría de Educación Pública. https://libros.conaliteg.gob.mx/2024/S3SAA.htm

Durmus, S., & Karakirik, E. (2006). Virtual Manipulatives in Mathematics Education: A Theoretical Framework. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, *5*(1), 117-123.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Eisenhart, M. A. (1991). Conceptual Frameworks for Research Circa 1991: Ideas From A Cultural Anthropologist; Implications For Mathematics Education Researchers. *Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 202-219.

Fuentes, M. (2020). Una analogía entre la Estadística y la Física: la media aritmética y un sistema de palanca. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, *1*(104), 75-81.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2007). How Students Learn Statistics Revisited: A Current Review of Research on Teaching and Learning Statistics. *International Statistical Review*, *75*(3), 372-396. https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2007.00029.x

Gfeller, M. K., Niess, M. L., & Lederman, N. G. (1999). Preservice Teachers' Use of Multiple Representations In Solving Arithmetic Mean Problems. *School Science and Mathematics*, *99*, 250-257.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. *The roles of representation in school mathematics*, 1-23.

Gubrium, J., & Holstein, J. (1997). *The New Language of Qualitative Method*. Oxford University Press.

Hakim, L. L., Alghadari, F., & Widodo, S. A. (2019). Virtual manipulatives media in mathematical abstraction. *Journal of Physics: Conference Series*, *1315*(1), 012017. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1315/1/012017

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. MacGraw-Hill/Interamericana.

Hiebert, J., Cai, J., Hwang, S., Morris, A., & Hohensee, C. (2023). *Doing Research: A New Researcher's Guide*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-19078-0

Honderich, T. (2005). *The Oxford Companion to Philosophy*. Oxford University Press.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1985). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente: ensayo sobre la construcción de las estructuras operatorias formales*. Paidós.

Jackson II, R. L., Drummond, D. K., & Camara, S. (2007). What Is Qualitative Research? *Qualitative Research Reports in Communication*, *8*(1), 21-28. https://doi.org/10.1080/17459430701617879

Jiménez, Y., Delgado, J., & Castillo, D. P. (2019). Aprendizaje de la matemática basado en el contexto de las ciencias. *Revista Electrónica Calidad en la Educación Superior*, *10*, 53-73. https://doi.org/10.22458/caes.v10i2.2603

Lesser, L., Wagler, A., & Abormegah, P. (2014). Finding a Happy Median: Another Balance Representation for Measures of Center. *Journal of Statistics Education*, *22*. https://doi.org/10.1080/10691898.2014.11889714

Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *Zdm*, *37*, 67-85.

Lord, N., & Yan, A. (2011). A difference in the behaviour of moments of inertia and variance. *The Mathematical Gazette*, *95*(534), 556-557. https://doi.org/10.1017/S002555720000379X

Medina, D., Cordero, F., & Soto, D. (2018). La resignificación de la media aritmética, bajo el análisis gráfico de la representación de los datos. *Aspectos socioesposte-moógicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar*, *31*(1), pp. 148-155.

Merriam, S., & Tisdell, E. (2015). *Qualitative Research: A Guide to Design and Implementation*. Wiley.

Mintzes, J. J., Wandersee, J. H., & Novak, J. D. (1997). Chapter 13 - Meaningful Learning in Science: The Human Constructivist Perspective. En G. D. Phye (Ed.), *Handbook of Academic Learning* (pp. 405-447). Academic Press. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/B978-012554255-5/50014-4

Molero, A., Gea Serrano, M., & Batanero, C. (2019). Evaluation of Secondary Students' Understanding of Arithmetic Mean. *13th International Technology, Education and Development Conference*, 3360-3364. https://doi.org/10.21125/inted.2019.0871

Moyer-Packenham, P., & Westenskow, A. (2013). Effects of Virtual Manipulatives on Student Achievement and Mathematics Learning. *International Journal of Virtual and Personal Learning Environments*, *4*, 35-50. https://doi.org/10.4018/jvple.2013070103

Nelsen, R. B. (1998). Correlation, Regression Lines, and Moments of Inertia. *The American Statistician*, *52*(4), 343-345. https://doi.org/10.1080/00031305.1998.10480593

O'Dell, R. S. (2012). The Mean as Balance Point. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *18*(3), pp. 148-155.

Piaget, J. (1972). *La psicología de la inteligencia*. Psique.

Pollatsek, A., Lima, S., & Well, A. D. (1981). Concept or Computation: Students' Understanding of the Mean. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 191-204.

Rocha, W. M. S. d., Carvalho, L. M. T. L. d., & Eugênio, R. d. S. (2024). Teaching arithmetic mean from the perspective of statistical literacy in the final years: Reflections with teachers. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, *14*(3), 1-18. https://doi.org/10.37001/ripem.v14i3.3702

Rodríguez, J., & Castro, D. (2018). Significado de la media aritmética y el uso de la pralabra promedio en estudiantes de 11° grado. *Memorias del III Encuentro Colombiano de Educación Estocástica*, 399-409.

Sarkar, J., & Rashid, M. (2016). A geometric view of the mean of a set of numbers. *Teaching Statistics*, *38*(3), 77-82. https://doi.org/10.1111/test.12101

SEP. (2024a). Programa Sintético Fase 4. https://educacionbasica.sep.gob.mx/wp-content/uploads/2024/06/Programa_Sintetico_Fase_4.pdf

SEP. (2024b). Programa Sintético Fase 5. https://educacionbasica.sep.gob.mx/wp-content/uploads/2024/06/Programa_Sintetico_Fase_5.pdf

SEP. (2024c). Programa Sintético Fase 6. https://educacionbasica.sep.gob.mx/wp-content/uploads/2024/06/Programa_Sintetico_Fase_6.pdf

Sirnik, M., & Kmetič, S. (2010). Understanding of Arithmetic Mean. *8th International Conference of Teaching Statistics*.

Spiegelhalter, D. (2019). *The Art of Statistics: Learning from Data*. Penguin Books.

Stake, R. (2005). Qualitative Case Studies. *The Sage handbook of qualitative research*.

Steinmayr, R., Meißner, A., Weidinger, A., & Wirthwein, L. (2014, julio). Academic Achievement. En *Education*. Oxford Bibliographies. https://doi.org/10.1093/obo/9780199756810-0108

Strauss, S., & Bichler, E. (1988). The Development of Children's Concepts of the Arithmetic Average. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(1), 64-80.

Thompson, P., & Saldanha, L. (2003). Fractions and Multiplicative Reasoning. *Research companion to the principles and standards for school mathematics*.

Vygotsky, L. (1986). *Thought and Language*. MIT Press.

Walpole, R. (2007). *Probabilidad Y Estadistica Para Ingenieria Y Ciencias*. Pearson Educación. https://books.google.com.mx/books?id=jBnRMQAACAAJ

Widjaja, W. (2013). The Use of Contextual Problems to Support Mathematical Learning. *Indo-MS JME*, *4*(2), 151-159. https://doi.org/10.22342/jme.4.2.413.151-159

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique*, *67*(3), 223-248. http://www.jstor.org/stable/1403699

York, T., Gibson III, C., & Rankin, S. (2015). Defining and Measuring Academic Success. *Practice Assessment, Research and Evaluation*, *20*(5). https://doi.org/ https://doi.org/10.7275/hz5x-tx03

Apéndices

Para apoyar la política institucional de ahorro de papel en la UAEH, la consulta de los siguientes documentos, mencionados en la tesis, se puede realizar mediante los respectivos enlaces.

5.3. Apéndice A. Secuencia de actividades

https://drive.google.com/file/d/1f_Ei1D182yOg6yebl5Ys9GtW2BwveeKI/view?usp=drive_link

5.4. Apéndice B. Producciones escritas de los participantes

https://drive.google.com/drive/folders/1SkeZ8GIlpUnunko_YhevaX_Rf_KJ16sf?usp=drive_link

5.5. Apéndice C. Transcripción de la sesión

https://drive.google.com/file/d/1Ve19Ywq2Gb9pssbykPy2pANIVpCNJ8Yd/view?usp=sharing