UNIVERSIDAD AUTÓNOMA

DEL ESTADO DE HIDALGO

ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

TESIS

Dificultades que presentan estudiantes de secundaria al resolver problemas de cálculo mental

PRESENTA

Yesica Liliana Islas Arias

Director

Dr. Marcos Campos Nava

Codirector

Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez

Comité tutorial

Dra. María Guadalupe Simón Ramos
Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez
Dr. Marcos Campos Nava
Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez

Mineral de la Reforma, Hgo., México., mayo de 2025

Mineral de la Reforma, Hgo., a 30 de abril de 2025

Número de control: ICBI-AAMyF/362/2025
Asunto: Autorización de impresión de tesis.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

El Comité Tutorial de la tesis titulada **"Dificultades que presentan estudiantes de secundaria al resolver problemas de cálculo mental"**, realizada por la sustentante Yesica Liliana Islas Arias, con número de cuenta 477758, perteneciente a la **Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica**, una vez que ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el Artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente:

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

El Comité Tutorial

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Dr. Marcos Campos Nava
Director

Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez
Codirector

Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez
Miembro del comité

Dra. María Guadalupe Simón Ramos
Miembro del comité

MCN/EPC

Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P. 42184
Teléfono: 52 (771) 71 720 00 Ext. 40124, 40119
aamyf_icbi@uaeh.edu.mx, ravila@uaeh.edu.mx

Resumen

El cálculo mental, es una de las competencias matemáticas utilizadas con mayor frecuencia en la vida cotidiana, sin importar la actividad laboral de las personas, por lo que cobra especial relevancia, ya que se usa dentro y fuera del contexto escolar. La investigación del cálculo mental ha sido estudiado con diferentes perspectivas, algunos trabajos se han enfocado en descubrir las estrategias que emplean los estudiantes cuando abordan tareas de cálculo mental, algunos otros en emplear el cálculo mental como estrategia didáctica en el aula, sin embargo, se han encontrado pocos trabajos enfocados a identificar las dificultades que presentan los estudiantes al abordar este tipo de tareas. En esta línea de ideas, el presente trabajo se enfocó en identificar las dificultades que obstaculizan a los estudiantes en la resolución de este tipo de actividades, este fenómeno se analizó desde la perspectiva del desarrollo del sentido numérico. Desde el punto de vista de algunos investigadores, el desarrollo del sentido numérico, puede dotar de significado a los conocimientos que los estudiantes elaboran en sus clases de aritmética.

El marco conceptual que soporta esta investigación se dividió en tres dimensiones: ontológica, epistemológica y didáctica. La ciencia de los patrones es la conceptualización que adopta este trabajo sobre las matemáticas. Mientras que la dimensión epistemológica es de corte constructivista, considerando el aprendizaje significativo como sustento. El enfoque basado en la resolución de problemas es la postura tomada para la dimensión didáctica.

Para dar respuesta a las preguntas que se plantearon, se aplicó una prueba de cálculo mental a nueve estudiantes matriculados en una secundaria pública de la ciudad de Tulancingo en el estado de Hidalgo, México. Posterior a ello, se les entrevistó para conocer los procesos llevados a cabo. Las dificultades encontradas están en torno a los componentes del sentido numérico siendo cuatro de estos componentes con los que mayormente se vieron conflictuados los estudiantes. Estas dificultades fueron clasificadas en dos tipos.

Abstract

Mental arithmetic is one of the most frequently used mathematical skills in everyday life, regardless of the work activity of people, so it is especially relevant, since it is used inside and outside the school context. The investigation of mental arithmetic has been studied from different perspectives, some works have focused on discovering the strategies used by students when approaching mental arithmetic tasks, some others on using mental arithmetic as a didactic strategy in the classroom, however, few works have been found focused on identifying the difficulties presented by students when approaching this type of tasks. In this line of ideas, the present work focused on identifying the difficulties that hinder students in the resolution of this type of activities, this phenomenon was analyzed from the perspective of the development of number sense. From the point of view of some researchers, the development of number sense can give meaning to the knowledge that students elaborate in their arithmetic classes.

The conceptual framework that supports this research was divided into three dimensions: ontological, epistemological and didactic. The science of patterns is the conceptualization adopted by this work on mathematics. While the epistemological dimension is constructivist, considering meaningful learning as a support. The approach based on problem solving is the position taken for the didactic dimension.

To answer the questions posed, a mental arithmetic test was administered to nine students enrolled in a public high school in the city of Tulancingo in the state of Hidalgo, Mexico. Afterwards, they were interviewed to learn about the processes carried out. The difficulties encountered are related to the components of number sense, with four of these components being the ones with which the students were most conflicted. These difficulties were classified into two types.

Agradecimientos

A la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, por brindarme la oportunidad de realizar mis estudios de posgrado y ser parte de este logro personal y profesional.

A la Secretaría de Educación Pública del Estado de Hidalgo, por las facilidades otorgadas que me permitieron realizar mis estudios de maestría, lo cual me compromete a brindar un mejor servicio educativo a favor de la comunidad estudiantil.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías por la beca otorgada durante los estudios de posgrado.

De manera muy especial agradezco al Dr. Marcos Campos Nava y al Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez asesores de este proyecto de investigación, por su dedicación y paciencia para guiarme en este proceso tan importante en mi vida profesional.

Dedicatoria

A mi padre

A pesar de tu ausencia me sigues mostrando el camino
Mi amor y admiración por siempre pá.

Contenido **Página**

1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Introducción

Desarrollar y consolidar habilidades matemáticas es de suma importancia para todo individuo. En el mundo actual, numerosos procesos se asisten y giran en torno a las matemáticas. Éstas forman parte de algunas situaciones cotidianas para la vida, y a menudo no se es consciente de ello (Álvarez, 2006). Así mismo, fomentan el desarrollo de estructuras cognitivas, es decir, proveen de herramientas que desarrollan una estructura mental lógica permitiendo afrontar diversas circunstancias cotidianas (Gómez y Mireles, 2019).

Leer cantidades, enumerar y agrupar objetos, operar numéricamente son algunos ejemplos de situaciones que viven a diario las personas (Baroody, 2000; citado en Álvarez 2006). En este sentido, las personas se enfrentan a la necesidad de tener una competencia matemática básica. En esta línea de ideas, organizaciones internacionales como la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), consideran importante que los estudiantes desarrollen competencias matemáticas (OCDE, 2016).

Una de las competencias matemáticas utilizadas con mayor frecuencia en la vida cotidiana sin importar la actividad laboral, es el cálculo mental, por lo que esta habilidad cobra especial relevancia, ya que se usa dentro y fuera del contexto escolar. Por ejemplo, cuando se realizan compras, al calcular cuotas y distancias, al planificar el gasto familiar, entre otras. En numerosas ocasiones se realizan estos cálculos de manera mental y una forma de hacerlo es descomponer los números originales involucrados en el cálculo, en otros equivalentes que resulte sencillo su manejo. Además de resultar funcional e imprescindible el cálculo mental impulsa un trabajo intelectual como el analizar y comparar diferentes caminos de solución, encontrar el origen de algunos errores, validar ciertas estrategias, así como anticipar resultados (De Marinis, 2008).

A pesar de la relevancia del cálculo mental en la vida cotidiana, y que en México en educación básica uno de los propósitos del estudio de las matemáticas, es precisamente desarrollar habilidades de cálculo mental y escrito y utilizarlas de manera flexible en las operaciones con números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos (SEP, 2017), se han observado resultados poco favorables en el desarrollo de tales habilidades a través de la aplicación de la prueba SisAT. Prueba que se ha venido aplicando en todos los niveles de educación básica a partir del año 2013. Su propósito es contribuir a la prevención y atención del rezago y el abandono escolar al identificar a los alumnos en riesgo, a través de la exploración de las habilidades básicas para el aprendizaje (lectura, escritura y cálculo mental). Un área evaluada dentro de estas pruebas, es la asociada con las operaciones aritméticas básicas, la cual está directamente relacionada con el desarrollo del sentido numérico de los estudiantes. Una posible explicación a este fenómeno la ofrece Berch (2005), quien señaló una relación entre el cálculo mental y el sentido numérico. La relación entre el sentido numérico y el cálculo mental no es simple, ya que algunos autores consideran que el cálculo mental forma parte del sentido numérico (Lemonidis, 2016), mientras que otros sugieren que están relacionados pero separados (DFE, 2010; Heirdsfield, 2002). Por último, otros autores apoyan una relación bidireccional, sugiriendo que las habilidades de sentido numérico influyen en las habilidades de cálculo mental, pero, al mismo tiempo, la práctica del cálculo mental también fomenta el sentido numérico (Ruiz y Balbi, 2018).

El cálculo mental ha sido un tema discutido en relación con la educación matemática durante más de cuatro décadas. Parte de su relevancia proviene de ser el método de cálculo más utilizado en la vida cotidiana (Gómez, 1989; Lemonidis, 2016), lo que significa que debe ser enseñado explícitamente en las escuelas (Lemonidis, 2016). Al mismo tiempo, la enseñanza del cálculo mental ha ganado importancia, debido a que algunos autores sugieren una relación con varias otras habilidades matemáticas como la mejora en la resolución de problemas, el razonamiento, así como una relación en el rendimiento del álgebra. (Parra, 1994; Ruiz y Balbi, 2018; Watson et al., 2018).

Con base en lo anterior se considera relevante identificar las dificultades que pueden presentar los alumnos al enfrentarse a problemas de cálculo mental, para estar en condiciones de sugerir e implementar estrategias que contrarresten estas dificultades para el logro de aprendizajes matemáticos con significado.

1.2. Revisión de la Literatura

La literatura en torno al cálculo mental (en lo sucesivo CM) es diversa, algunos estudios se enfocan en identificar las estrategias que utilizan los estudiantes al enfrentarse a problemas de cálculo, algunos otros en relacionar ésta con la habilidad de resolución de problemas o con el desarrollo de otras habilidades, así como también algunos estudios se enfocan en la enseñanza de esta habilidad como estrategia didáctica.

En este sentido, Mochón y Vázquez (1995) realizaron una investigación sobre las habilidades de CM y estrategias que utilizan niños de seis escuelas primarias y secundarias (entre 11 y 16 años), ubicadas en el municipio de Nezahualcóyotl, México. Los participantes fueron seleccionados al azar. Se diseñó un cuestionario dividido en dos bloques de preguntas: uno compuesto de 20 operaciones aritméticas *puras*, y el otro, de 9 problemas aritméticos contextualizados. Se identificó un desempeño pobre de los estudiantes, pero sirvió para detectar a los alumnos más hábiles. Los estudiantes con mejores habilidades de CM fueron entrevistados, para conocer los procesos cognitivos que emplearon. Los resultados indican que los estudiantes en general, no tienen a su disposición estrategias variadas de cálculo y que se debe trabajar primero con las estrategias de *pasos repetidos*, y *descomposición* sencilla y doble, por ser las más sencillas para los niños. Posteriormente, se debe introducir el redondeo, que se usó muy poco, pero que es importante, porque ayuda a calcular de forma eficiente. Se sugiere contextualizar los cálculos con situaciones cotidianas como operaciones monetarias ya que existe evidencia de que un contexto real ayuda a los estudiantes a utilizar estrategias de CM.

En el mismo tenor, Reys et al. (1995) realizaron un estudio para evaluar la actitud, las preferencias de cálculo y el rendimiento de CM de 755 estudiantes japoneses de 2º, 4º, 6º y 8º grado. Se construyeron y utilizaron dos instrumentos de encuesta: una de actitud y la otra de capacidad de CM (con dos formas de presentación una oral y la otra visual). Las encuestas se administraron durante un período de clase (50 minutos) en el último trimestre del año escolar. Cuatro escuelas japonesas (tres de primaria y una de secundaria) participaron en el estudio. Se encontró que: (i) existe una amplia gama de rendimiento en el CM en todos los niveles, (ii) el modo de presentación afectó significativamente los resultados, de forma que una representación visual produjo normalmente rendimientos más altos, (iii) el rendimiento aumentó a medida que aumentaban los años de escolarización, (iv) el rendimiento con la representación decimal fue mayor que con las fracciones, (v) existe una fuerte dependencia de las imágenes mentales de un algoritmo de papel/lápiz o el uso de ábaco soroban, (vi) la precisión fue mayor cuando se emplearon estrategias distintas a la de utilizar una imagen mental de un algoritmo de papel/lápiz, (vii) los alumnos tienden a utilizar estrategias aprendidas para calcular mentalmente, en particular una imagen mental de un algoritmo de papel/lápiz.

Blöte et al. (2000) realizaron un estudio para evaluar la flexibilidad estratégica de los estudiantes en CM. Participaron en el estudio 60 estudiantes de segundo curso de primaria de Holanda. Los resultados mostraron que la preferencia por determinados procedimientos matemáticos dependía de las características numéricas de los problemas esto indica que los estudiantes tenían una buena comprensión conceptual de los números y los procedimientos. Otra conclusión del estudio fue que los estudiantes mostraron un comportamiento estratégico más flexible con los problemas de contexto que con los de expresión numérica.

Otro estudio en torno al tópico fue el de Cortés-Flores et al. (2004) quienes desarrollaron un estudio para conocer el nivel de habilidad para resolver problemas de estimación en estudiantes de 2º año de secundaria, así como identificar las estrategias mentales que utilizan los mejores estimadores. Aplicaron una prueba, traducida y adaptada del modelo de Reys et al. (1982), a 248 estudiantes de ocho escuelas públicas y privadas ubicadas en Ensenada, México. Utilizaron la metodología propuesta por Reys et al. (1982), la cual consiste en dos etapas: (i) una prueba de cálculo estimativo con el fin de seleccionar a los mejores estimadores (39 problemas aritméticos de respuesta abierta), (ii) una entrevista a los alumnos anteriores para identificar las estrategias que utilizan al resolver problemas de estimación. Los resultados indican que, en general, la prueba resultó difícil para los estudiantes, y que estos poseen bajas habilidades para resolver problemas mentales. Las estrategias mayormente utilizadas fueron el *redondeo* y el *dígito de la izquierda*, existiendo algunas diferencias, en función del tipo de operación en el problema.

Ortega et al. (2006) desarrollaron un estudio para analizar las dificultades asociadas a estrategias de CM aditivo. La metodología es de tipo cualitativo y cuantitativo, por un lado, se realizó y analizó un test sobre la descomposición de estrategias y por otra parte se cuantificó las respuestas de los estudiantes para determinar el grado de significación de las dificultades. El estudio se realizó con 68 alumnos de 1o, 2o y 4to de la ESO en España. En sus resultados encontraron que la mayor dificultad que tuvieron los alumnos fue en las estrategias de hacer composiciones para restas con llevadas, descomponer y cambiar el signo para restar de un número mayor a otro menor, descomponer reagrupando datos para sumar sin llevadas, descomponer reagrupando datos para sumar con llevadas y hacer una descomposición doble para hacer una resta con llevadas.

Gálvez et al. (2011) realizaron un estudio para detectar las estrategias cognitivas, idiosincrásicas o aprendidas en alumnos del primer ciclo de educación básica en Chile e investigaron la correlación entre el desempeño de CM y el rendimiento escolar en matemáticas. El marco teórico utilizado se basó en que la actividad cognitiva opera con base en metáforas sensoriomotrices, desde lo más concreto a lo más abstracto. La primera parte del estudio fue de carácter cualitativo, consistió en diseñar un instrumento de diagnóstico que contenía 18 tríos de ejercicios fundamentalmente para CM de sumas, y contemplaba preguntar de manera oral a los niños, la manera en que lo habían hecho. Se realizó en un total de 330 alumnos. A partir de este trabajo realizaron un programa interactivo que medía los tiempos de cada ejercicio, esta segunda etapa fue de carácter cuantitativo y se llevó a cabo con 100 estudiantes. Como resultados obtuvieron que los estudiantes tuvieron diversas estrategias de CM, sin embargo, hubo ausencia casi total de representaciones, visualizaciones o metáforas, así como los estudiantes experimentaron dificultad al verbalizar su modo de trabajo. Un hallazgo sorpresivo de este estudio, fue que los niños mostraron mucha facilidad cuando los cálculos se trataban de *dobles* o *mitades.*

Valencia (2013) realizó un estudio para determinar la influencia del programa REOPERA (programa para el desarrollo del CM, basado en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo), en el desarrollo del CM. El estudio se llevó a cabo con 69 estudiantes de primer a cuarto año de educación básica en Chile. La investigación tuvo un diseño pre-experimental con evaluación antes y después de la intervención. Los resultados aportan mejoras significativas en el CM de los estudiantes concluyendo que el programa REOPERA es una estrategia de gran utilidad para la mejora del CM en estudiantes en este ciclo escolar.

Por su parte, Sengül (2013) realizó un estudio para identificar el uso de estrategias de sentido numérico (en lo sucesivo SN) utilizadas por profesores de primaria en formación. Los participantes fueron 133 profesores en formación inscritos en una universidad estatal de Estambul, Turquía. Se utilizó el *test de sentido numérico* que abarca cinco componentes del sentido numérico. La metodología consistió en estudios de caso. Los datos se analizaron con métodos cualitativos y cuantitativos. Los resultados aportan evidencia de que el SN de los profesores en formación es muy bajo, y que prefieren utilizar *métodos basados en reglas* en lugar de componentes del SN. Además, se ofrecieron sugerencias para futuros estudios enfatizando la necesidad de aumentar el conocimiento de los futuros profesores sobre el SN y su uso.

Almeida et al. (2014) realizaron una investigación sobre el SN con un grupo de futuros profesores de matemáticas de secundaria (estudiantes universitarios de la Universidad de La Laguna, España). Realizaron un estudio descriptivo y cualitativo de las respuestas a una prueba escrita (10 ítems), diseñada a partir de investigaciones previas (Yang, 2005; Yang et al., 2009) con el objetivo de evaluar el éxito y analizar las estrategias de los alumnos en tareas numéricas que permiten hacer uso de componentes del SN. En la investigación participaron 67 estudiantes, 33 de segundo año y 34 de tercer año. Obteniendo como conclusiones que, por lo general, los participantes no usan el SN para abordar las actividades propuestas.

Barrera-Mora et al. (2018) realizaron una investigación para identificar estrategias de CM al realizar sumas y restas en contextos de compraventa. Una tarea denominada *La tienda departamental* se implementó con 24 estudiantes (9 hombres y 15 mujeres) pertenecientes a los tres grados de una escuela telesecundaria ubicada en una comunidad rural de México. Se identificaron cuatro estrategias principales para la suma y cuatro para la resta (la estrategia que mejor comprendieron y utilizaron fue la suma por partes y, en el caso de la resta, la estrategia por descomposición del sustraendo). Los alumnos inventaron las estrategias, sin que el instructor las haya enunciado o ejemplificado previamente; es decir, estuvieron inmersos en un contexto de resolución de problemas. El contexto de juego y competencia promovió que los alumnos que poseían más experiencia en la realización de cálculos brindaran apoyo y asesoría a sus compañeros que mostraban algunas dificultades para realizar los cálculos.

Ruiz y Balbi (2018) realizaron una investigación donde se diseñó e implementó un programa de intervención para la enseñanza del CM en una primaria privada de Uruguay. El programa se orientó a evaluar los efectos de la enseñanza del CM con números de dos dígitos, la estimación de la línea numérica y la fluidez computacional. La investigación se estructuró con base en un diseño cuasi-experimental. Se utilizó una muestra por conveniencia compuesta por dos grupos de 25 alumnos. El grupo de control estaba formado por 11 chicos y 14 chicas, mientras que el grupo experimental tenía 9 chicos y 14 chicas. Se llevaron a cabo 15 sesiones de intervención de CM. La fluidez computacional se evaluó a través del *test de eficacia del cálculo aritmético*, el cálculo de dos dígitos se implementó mediante una adaptación de la versión chilena de la *prueba para la evaluación de la competencia matemática dos*. La estimación de la línea numérica se evaluó mediante la subprueba del test argentino pro-cálculo. En los resultados no hubo diferencias estadísticamente significativas entre ambos grupos, independientemente del momento de la prueba. Los niños del grupo de tratamiento mejoraron significativamente su desempeño después de la intervención didáctica; no obstante, esta mejora no fue estadísticamente diferente de la lograda por el grupo de control. Sin embargo, es posible que una intervención similar de mayor duración pueda mostrar mejores resultados. En general, aunque parece razonable esperar que la enseñanza del CM se transfiera positivamente a otras habilidades matemáticas, no es fácil encontrar datos empíricos que apoyen esta idea. Así, los resultados no aportan evidencia de que la intervención de CM haya tenido impacto sobre las habilidades de fluidez computacional en la adición y la sustracción, las habilidades de cálculo de dos dígitos y las habilidades de estimación de líneas numéricas.

Watson et al. (2018) investigaron por qué algunos niños de primaria tienen dificultades para dominar las tareas de cálculo de sumas y restas. Se examinaron los tipos de errores cometidos por 697 alumnos de 42 aulas de siete escuelas primarias de Portugal. Cada estudiante completó una evaluación escrita de conocimientos matemáticos (Lospes y Bueno, 2014). Se produjeron 424 errores de adición y 854 de sustracción, siendo el tipo de error más común el de cálculo erróneo, tanto para la suma como para la resta. El segundo tipo de error más común se relaciona con la falta de reagrupación en la suma y en la resta (lo que puede indicar que los alumnos no entienden el valor posicional). Los errores de omisión y de procedimiento juntos, fueron los terceros tipos de error más comunes.

Gómez-Rosales y Mireles-Medina (2019) realizaron una investigación enfocada a implementar el CM como estrategia didáctica para el aprendizaje y a incrementar el nivel del desempeño académico en niños de tercer grado de primaria. Participaron 23 alumnos de un centro educativo del estado de Zacatecas, México. La metodología de la investigación fue cuantitativa. Se aplicó un examen de diagnóstico y, posteriormente, durante tres semanas, los estudiantes abordaron ejercicios de entrenamiento en CM. Por último, se realizó una evaluación para comparar los resultados, después de la instrucción, con los del examen diagnóstico. Se observó un incremento en el desempeño académico de 15 alumnos (65%); es decir, se obtuvo evidencia de que los ejercicios contribuyeron en el desarrollo cognitivo de los niños. Así, se obtuvo evidencia de que el entrenamiento en CM los llevó a mejorar su desempeño.

Rodríguez-Quintero et al. (2019) realizaron un estudio para analizar las estrategias de CM para resolver ejercicios de suma y resta con números naturales utilizadas por una alumna de segundo grado de primaria en México. Para obtener la información se realizó una entrevista clínica, en donde se le indicó una operación aritmética y se le solicitaba explicará el procedimiento que debía efectuar. Se observó que la alumna no demostró tener un fuerte apego hacia los métodos enseñados en la escuela para resolver sumas y restas. La estrategia más utilizada en las sumas fue el conteo desde el sumando mayor y en las restas utilizó el conteo a partir de uno de los sumandos, en el cual está implicado el principio de cardinalidad al tener en cuenta que el cardinal final será equivalente al total de elementos del conjunto, de esta manera ahorró tiempo y a su vez evadió realizar las restas.

Stauffer et al. (2020) realizaron un estudio sobre la enseñanza del cálculo estimativo para la multiplicación y la división. Participaron alumnos de quinto año de primaria de un colegio bilingüe en Querétaro, México. El estudio se centró en los conocimientos de los alumnos. Se implementaron 14 clases de 45 minutos. Entre los marcos teóricos de referencia para el diseño y el análisis de las clases se destacan la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007) y la metodología de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1998). Como conclusiones se obtuvo que les resultó más fácil establecer relaciones en problemas donde solamente era diferente el dividendo o el divisor, aunque en ocasiones hubo confusión respecto a las relaciones válidas para las multiplicaciones y para las divisiones. Causaron más dificultad aquellos problemas en los que eran diferentes el dividendo y el divisor. Se confundieron con los efectos que estas diferencias tenían sobre el resultado, así como también que durante la secuencia hubo alumnos que tenían dificultades con las relaciones enseñadas, a pesar de haberlas revisado varias veces, y a pesar de haber analizado que las relaciones entre multiplicaciones y entre divisiones no son iguales.

Pourdavood et al. (2020) investigaron la actividad de CM en un aula de tercer grado y su relación con el pensamiento y el razonamiento algebraico. Las fuentes de datos incluyen observaciones en el aula, notas de campo, comunicaciones verbales y escritas de los estudiantes y entrevistas. Los supuestos filosóficos y teóricos de este estudio se basan en la Autopoiesis y en la Epistemología Social Constructivista. Los participantes en este estudio de investigación asisten a una escuela urbana del Medio Oeste en EUA, los 34 participantes son estudiantes de tercer grado; 18 niños y 16 niñas. Obteniendo como principales resultados los siguientes: (i) los estudiantes se sintieron más cómodos discutiendo sus ideas matemáticas, verbalizando sus estrategias matemáticas y proporcionándose mutuamente apoyos matemáticos cuando tenían dificultades para entender varias estrategias durante las discusiones en el aula, (ii) las estrategias de CM ayudan a los niños a desarrollar un pensamiento de orden superior, a razonar, a criticar y a dar sentido a los números y a las operaciones numéricas, (iii) los estudiantes que dominan las estrategias de CM descubrirán que la estrategia les ayuda en muchas situaciones, (iv) los alumnos participantes desarrollaron una sólida comprensión de los patrones numéricos y de las relaciones numéricas, (v) los niveles de razonamiento y argumentación de los estudiantes aumentaron significativamente a medida que se involucraban más en las actividades matemáticas y adquirían más experiencia.

Berticelli y Zancan (2021) relatan la experiencia de planificación y desarrollo del curso CalMe Pro cuyo objetivo fue enseñar estrategias de CM a profesores de Brasil para que como protagonistas del aula pudieran enseñárselas a los estudiantes. El cual se llevó a cabo con 20 profesores aproximadamente, completamente virtual debido a la pandemia, con una duración de tres meses con encuentros semanales de 90 minutos. El curso demostró que los profesores que tienen confianza en el CM, conocen las estrategias, como utilizarlas y cómo enseñarlas, se sienten motivados para incluir las estrategias de CM en su práctica y dar a los alumnos la oportunidad de beneficiarse de ellas.

Osana et al. (2021) realizaron un estudio para explorar el impacto de una intervención de CM en el pensamiento relacional y el conocimiento de equivalencia de los estudiantes. El estudio es de tipo cuantitativo y participaron 66 estudiantes de séptimo grado de una secundaria de Canadá. Utilizaron un diseño de línea de base múltiple basándose de Levin et al (2018). La intervención tuvo una duración de 15 clases, y les realizaron a los estudiantes un total de 4 pruebas (una prueba diagnóstica, una prueba de CM, una prueba de resolución de problemas de equivalencia y una prueba de pensamiento relacional).

Un hallazgo del presente estudio fue que el uso del pensamiento relacional por parte de los estudiantes aumentó después de la intervención lo que apunta al poder del CM en el desarrollo prealgebraico en los años de la escuela media. Sus resultados sugieren que los estudiantes pueden beneficiarse de la práctica regular del CM como parte de su actividad matemática en el aula y que esto aporte beneficios a largo plazo para el éxito matemático de los estudiantes.

Pérez et al. (2023) realizaron un estudio para comparar la influencia del método abierto basado en números (ABN) respecto a la metodología tradicional en la enseñanza de las matemáticas respecto al CM. El estudio tiene un enfoque cuantitativo. Los participantes fueron 80 estudiantes del primer año de primaria en Chile. Se diseñó y aplicó una prueba de CM de ejercicios aditivos con dos y tres sumandos, con la cual se midieron habilidades de rapidez y precisión. Los resultados evidenciaron la efectividad de la metodología ABN por encima de la tradicional.

Diaz et al (2024) realizaron un estudio con 23 alumnos de sexto grado de educación general básica de Ecuador, para investigar el impacto de una intervención didáctica en el desarrollo de la habilidad de CM. El estudio tuvo un enfoque cuantitativo y experimental pre-test/ post-test, con una duración de 12 semanas con sesiones de 45 minutos, tres días por semana. La estrategia fue a través de una variedad de actividades prácticas, proyectos, aprendizaje colaborativo, gamificación y resolución de problemas. Los resultados dieron evidencia de mejoras significativas en la precisión y velocidad del CM lo que sugiere que la estrategia implementada fue efectiva en la mejora de habilidades de CM. La investigación enfatiza la importancia de adoptar enfoques innovadores y centrados en los estudiantes.

A modo de resumen, luego de la revisión de literatura efectuada, en la **Tabla 1,** se muestra un concentrado ordenado de manera cronológica de los principales hallazgos encontrados. En ella se muestran datos generales de las investigaciones como el año, el país y el nivel escolar, así como el objetivo y los resultados obtenidos de dichas investigaciones.

Tabla 1.- Concentrado de la revisión de la literatura.

Autores	**Año**	**País**	**Nivel escolar**	**Objetivo**	**Principales hallazgos**
Mochón y Vázquez	1995	México	Primaria y secundaria	Investigar sobre las habilidades del cálculo mental y las estrategias utilizadas por los alumnos	Se identificó un desempeño pobre, los estudiantes en general no tienen a su disposición estrategias variadas de cálculo. Sugieren contextualizar los cálculos con situaciones monetarias
Reys et al.	1995	Japón	Primaria y secundaria	Evaluar la actitud preferencial del cálculo y rendimiento de CM	Existe una amplia gama del rendimiento del CM. La representación visual produjo resultados más altos. El rendimiento aumentó en medida en que aumentaban los años de escolarización
Blöte et al.	2000	Holanda	Primaria	Evaluar la flexibilidad estratégica en CM	Mostraron que la preferencia por ciertos procedimientos depende de las características numéricas de los problemas, indicando que tenían una buena comprensión conceptual de los números y procedimientos. Así mismo tuvieron mayor flexibilidad con los problemas de contexto que con los de expresión numérica
Cortes-Flores et al.	2004	México	Secundaria	Conocer el nivel de habilidad para resolver problemas de estimación e identificar estrategias mentales	En general la prueba resultó difícil para los estudiantes y estos poseían bajas habilidades para resolver problemas mentales
Ortega et al.	2006	España	Secundaria	Analizar las dificultades asociadas a estrategias de CM aditivo	La mayor dificultad presentada por los estudiantes fue en las estrategias de hacer composiciones para restas con llevadas, descomponer y cambiar el signo para restar de un número mayor a otro menor, descomponer reagrupando datos para sumar sin llevadas y con llevadas y hacer una descomposición doble para restas con llevadas
Gálvez et al.	2011	Chile	Primaria	Detectar las estrategias cognitivas de los estudiantes e investigar la correlación entre el desempeño del CM y el rendimiento escolar en matemáticas	Los estudiantes tuvieron diversas estrategias de CM, habiendo ausencia casi total de representaciones, visualizaciones o metáforas. Los estudiantes mostraron mucha facilidad cuando los cálculos se trataban de *dobles* o *mitades*
Sengül	2013	Turquía	Profesores en	Identificar el uso de estrategias de SN	El SN de los profesores en formación es muy bajo y prefirieron utilizar métodos basados en reglas

			formación de primaria		
Valencia	2013	Chile	Primaria	Determinar la influencia del programa REOPERA en el desarrollo del CM	Hubo mejoras significativas en el CM de los estudiantes sugiriendo que el programa es una estrategia de gran utilidad para la mejora del CM en estudiantes de este ciclo escolar
Almeida et al.	2014	España	Futuros profesores de matemáticas de secundaria	Analizar las estrategias que permiten hacer uso de componentes del SN	Los participantes no usaron el SN para abordar las actividades propuestas
Barrera-Mora et al.	2018	México	Secundaria	Identificar estrategias de CM al realizar sumas y restas en contexto de compra-venta	Los alumnos inventaron las estrategias y el contexto del juego y competencia promovió apoyo por parte de los alumnos más expertos
Ruiz y Balbi	2018	Uruguay	Primaria	Diseñar e implementar un programa de intervención para la enseñanza del CM	Los resultados no aportaron evidencia de que la intervención del CM haya tenido impacto sobre las habilidades del CM
Watson et al.	2018	Portugal	Primaria	Investigar sobre las dificultades para dominar las tareas de cálculo de sumas y restas	El tipo de error más común fue el del cálculo erróneo, el segundo más común fue la falta de reagrupación en suma y resta y otro fue los errores de omisión y procedimiento
Gómez-Rosales y Mireles-Medina	2019	México	Primaria	Implementar el CM como estrategia didáctica para el aprendizaje	Se obtuvo evidencia de que el entrenamiento en CM los llevó a mejorar
Rodríguez-Quintero et al.	2019	México	Primaria	Analizar las estrategias del CM en sumas y restas	La alumna no demostró tener un fuerte apego hacia los métodos enseñados en la escuela
Stauffer et al	2020	México	Primaria	Implementar la enseñanza del cálculo estimativo para la multiplicación y división	Les resultó más fácil establecer relaciones en problemas donde solo era diferente el divisor o el dividendo, hubo confusión respecto a las relaciones válidas para las multiplicaciones y las divisiones

Pourdavood et al	2020	EUA	Primaria	Investigar la actividad del CM y su relación con el pensamiento y el razonamiento algebraico	Los estudiantes se sintieron cómodos discutiendo sus ideas matemáticas verbalizando sus estrategias y proporcionándose apoyo cuando tenían dificultad. Las estrategias de CM ayudan a desarrollar un pensamiento de orden superior, a razonar, a criticar y a dar sentido a los números y a las operaciones numéricas
Berticelli y Zancan	2021	Brasil	Profesores	Desarrollaron un curso con el objetivo de enseñar estrategias de CM	El curso demostró que los profesores que tienen confianza en el CM, conocen las estrategias como utilizarlas y cómo enseñarlas se sienten motivados para incluirlas en su práctica y que los estudiantes puedan beneficiarse de ellas
Osana et al	2021	Canadá	Secundaria	Explorar el impacto de una intervención de CM en el pensamiento relacional y el conocimiento de equivalencia	El pensamiento relacional por parte de los estudiantes aumentó después de la intervención. Sugieren que los estudiantes pueden beneficiarse de la práctica regular del CM como parte de su actividad matemática y que esto aporte beneficios a largo plazo para su éxito matemático
Pérez et al	2023	Chile	Primaria	Comparar la influencia del método abierto basado en números respecto a la metodología tradicional en la enseñanza de las matemáticas respecto al CM	Los resultados evidenciaron la efectividad de la metodología ABN por encima de la tradicional
Díaz et al	2024	Ecuador	Primaria	Investigar el impacto de una intervención didáctica en el desarrollo de la habilidad de CM	Los resultados dieron evidencia de mejoras significativas en la precisión y velocidad del CM lo que sugiere que la estrategia fue efectiva en la mejora de habilidades de CM. La investigación enfatiza adoptar enfoques innovadores y centrados en los estudiantes

Fuente. -Elaboración propia con información de literatura revisada.

De lo anterior se considera pertinente resaltar el hallazgo de que, en las publicaciones revisadas, los estudiantes tanto de primaria como secundaria y futuros docentes, prefieren usar métodos algorítmicos para resolver situaciones de cálculo en lugar de hacer uso del SN. Por otro lado, las investigaciones de países como Holanda y Japón sugieren, que los estudiantes tienen buena comprensión conceptual tanto de números como de operaciones y que tienen una amplia gama de estrategias de CM, lo contrario de resultados en estudios de países como España, México y Uruguay. El grueso de los estudios revisados es acerca de identificar estrategias de CM y de implementación de estrategias para explorar el impacto sobre las habilidades de CM, en este segundo caso, la mayoría de estudios arrojan resultados favorables sobre las estrategias implementadas, es decir, se ven mejoras significativas. También resulta oportuno señalar que algunos estudios sugieren que los problemas dados a los estudiantes sean contextuales o de situaciones monetarias ya que resultan más interesantes y les dan sentido.

1.3 Planteamiento del Problema

A partir de la revisión de la literatura, se reconoció que la mayoría de los trabajos se han enfocado en investigaciones sobre la identificación de estrategias utilizadas por alumnos de primaria y en una minoría en alumnos de secundaria y futuros docentes al realizar tareas de CM o cálculo estimativo, así como también en los mismos niveles educativos la implementación de la enseñanza del cálculo como estrategia didáctica para la mejora de habilidades relacionadas con el CM.

No se identificaron numerosos documentos sobre el análisis de errores en problemas de cálculo en el siglo XXI (Watson et al.,2018). Fue así como, identificando estas dos áreas de oportunidad en la revisión de la literatura, permitió el planteamiento del objetivo general de esta investigación, así como los objetivos específicos, que en el subsecuente apartado se detallan.

1.4 Preguntas de investigación

Las preguntas centrales que guía esta investigación son:

- ¿Cuáles son las dificultades que presentan estudiantes de tercero de secundaria al resolver problemas de cálculo mental?
- ¿Cómo se clasifican las dificultades que presentan los estudiantes de tercero de secundaria al resolver problemas de cálculo mental?

Las preguntas de investigación son relevantes, porque los resultados obtenidos pueden servir como guía para el diseño de estrategias de intervención en el aula, que favorezcan el desarrollo de la habilidad del CM y a su vez la del SN y con ello evitar lo que afirman algunos autores (Riccomini, 2005) que, si los estudiantes no obtienen aptitud en las habilidades de cálculo, tendrán dificultades en otras áreas de las matemáticas.

1.5 Objetivos de la investigación

1.5.1 Objetivo general

- Analizar las dificultades que presentan los estudiantes de tercero de secundaria al resolver problemas de cálculo mental.

1.5.2 Objetivos específicos

- Identificar las dificultades que presentan los estudiantes al resolver problemas de cálculo mental.
- Clasificar las dificultades que presentan los estudiantes al resolver problemas de cálculo mental.

2. MARCO DE INVESTIGACIÓN

2.1 Introducción

Para Lester (2005), un marco de investigación es un sistema de ideas que se usan de base para un fenómeno que se desea investigar y que permite dar sentido a un conjunto de datos. Así como también, aporta una estructura para definir y bosquejar estudios de investigación. En concreto, para Lester (2005) un marco de investigación permite establecer: (i) la naturaleza y el modo de formular las preguntas, (ii) la manera en la que se puntualizan los constructos y procesos de la investigación, (iii) los elementos de innovación para instaurar nuevos conocimientos sobre el tema estudiado, refiriéndose a los métodos de investigación.

Por su parte, Cervantes (2017) señala que el marco de investigación o marco referencial, no es más que la exposición de lo decidido en cuanto a la perspectiva teórica considerada para llevar a cabo el trabajo investigativo. Mientras que, para Rojas (2012) el marco de investigación es una fase que no culmina definitivamente en un periodo de tiempo, puesto que en el transcurso de la investigación es viable el mejoramiento de los datos y la exposición de los mismos. En este sentido, se considera necesario explicitar el marco sobre el que se fundamenta esta investigación con el fin que el lector comprenda la razón de ser de las tareas llevadas a cabo y la relación de éstas con el tema de investigación. Cabe mencionar que, como todo proceso investigativo es susceptible a mejorar.

2.2 Tipos y características de los marcos de investigación

Eisenhart (1991) cita tres tipos de marcos de investigación: teóricos, prácticos y conceptuales. Un marco teórico, encauza a la investigación apoyándose en una teoría formal; es decir, se orienta en una explicación establecida y coherente de algunos fenómenos y sus relaciones, para esto el investigador debe ajustarse a las convenciones aceptadas de argumentación y experimentación ligadas a la teoría. Por su parte, Daros (2002) considera que el marco teórico proporciona unidad por completo a la investigación y orienta el diseño metodológico.

En contraste, los marcos prácticos no se basan en una teoría formal, más bien en los conocimientos prácticos desarrollados por los profesionales, así como resultados de investigaciones anteriores, incluso de algunos puntos de vista que ofrece la opinión pública y políticos. Y, por último, están los marcos conceptuales, estos son una premisa según la cual los constructos seleccionados para la investigación, y las relaciones entre ellos, serán adecuados y funcionales dado el problema de investigación que se está desarrollando (Eisenhart, 1991).

Eisenhart (1991), menciona que análogamente a los marcos teóricos, los marcos conceptuales se sustentan en investigaciones anteriores, sin embargo, estos últimos se construyen a partir de ciertas fuentes actuales y potencialmente de gran alcance. El marco utilizado puede guiarse de diferentes teorías y diversos aspectos del conocimiento de los profesionales, en medida de lo que el investigador pueda validar que será relevante e indispensable abordar sobre el problema de investigación. Así como también, permiten que la investigación se lleve más a fondo.

2.3 Elementos que integran el marco conceptual

Por tratarse de una investigación didáctica y de tipo cualitativa, el marco que la sustenta es de tipo conceptual. Estos son más convenientes que los teóricos o prácticos para las investigaciones educativas, en virtud que permiten enfoques inclusivos, comprensivos, pertinentes y convenientes a los problemas investigativos resultantes. (Eisenhart, 1991).

El presente marco fue estructurado en tres dimensiones: ontológica, epistemológica y didáctica. Esto debido a que se consideró oportuno, por un lado, manifestar la postura que se adopta en esta investigación respecto de la pregunta ¿qué son las matemáticas?, ya que la respuesta, desde una perspectiva más práctica que filosófica, que se pueda dar, guiará las tareas planteadas y el quehacer docente. En este aspecto, Pourdavood et al. (2020) señalan que existe una correlación entre la epistemología de los profesores sobre cómo aprenden la disciplina los estudiantes y la manera en que las enseñan. Por otro lado, el tener una concepción clara sobre la forma en cómo se construye el conocimiento matemático y las acepciones consideradas para los constructos del SN y CM, los cuáles son de gran relevancia en el presente trabajo. Finalmente, y no menos importante, manifestar las consideraciones sobre la resolución de problemas aproximación adoptada en esta investigación, como un camino eficiente para enseñar y aprender matemáticas. En este orden de ideas, a continuación, se detalla cada una de ellas.

2.3.1 Dimensión ontológica

En esta dimensión se precisa la conceptualización que adopta este trabajo sobre las matemáticas.

Las matemáticas como disciplina científica adquieren diversos significados de acuerdo a la bibliografía que el lector revise. La RAE (2014) la define como una ciencia deductiva que estudia las características de entes abstractos, como números, representaciones geométricas, símbolos y sus correlaciones. Para la SEP (2017) son un conjunto de conceptos, métodos y técnicas que dan paso al análisis de fenómenos y situaciones en diversos contextos. Los individuos a través del uso de las matemáticas interpretan y procesan información e identifican patrones y regularidades. Por su parte, Steen (1988) refiere que las matemáticas son la ciencia de los patrones, en donde el matemático busca patrones en los números, en los datos, en el espacio, en la ciencia. Y las aplicaciones de las matemáticas utilizan estos patrones, para explicar y predecir fenómenos que a ellas se ajustan. En este sentido, se consideró oportuno adoptar esta perspectiva para la presente investigación, ya que, al enfrentar a un resolutor con problemas de cálculo mental, se hace presente el uso de patrones para generar resultados. Patrones que a través de la práctica los estudiantes irán descubriendo y utilizando.

El principal quehacer del matemático es la resolución de problemas (Halmos, 1980), es aquí donde se buscan patrones para llegar a generalizaciones abstractas que sirvan de respuesta a situaciones concretas. Resulta importante en el trabajo docente, tener clara una perspectiva respecto a qué son las matemáticas, debido a que su actuar estará dado en función de esta concepción, al respecto, Hofer y Pintrich (1997) aseveran que las creencias sobre el aprendizaje y la enseñanza se relacionan con la manera en la que se construye el conocimiento. A su vez, Álvarez (2006) señala que hay una preponderancia a la memorización y a la repetición como método de estudio, y el docente usualmente emplea el monólogo y el dictado en sus clases.

2.3.2 Dimensión Epistemológica

En lo que respecta a esta dimensión, la postura adoptada para esta investigación, es de corte constructivista. En esta teoría el proceso de aprendizaje se basa en la actividad propia del estudiante. A lo largo del trabajo de los estudiantes en el problema propuesto, se promueven procesos como la observación, la experimentación, la comparación y la formulación de hipótesis. Consiste en que el estudiante afronte ciertos procesos y prácticas propias de la disciplina para que construya aprendizaje por sí mismo (acorde a su nivel), promoviendo el desarrollo de heurísticas y estrategias metacognitivas. (Arce et al. 2019), lo que permite eliminar el aprendizaje memorístico y tradicional (Cuevas et al. 2015).

Dentro de los principales expositores de esta corriente está, David Paul Ausubel. Quien sustentó sus estudios en las teorías de Piaget, siendo una de sus contribuciones más considerable la del aprendizaje significativo. (Cuevas et al, 2015).

Ausubel hace referencia a dos tipos de aprendizaje significativo: (i) aprendizaje significativo por recepción y (ii) aprendizaje significativo por descubrimiento. En esta investigación contemplamos utilizar el segundo tipo de aprendizaje, esto debido a que se considera de gran relevancia el descubrimiento por parte del estudiante. La principal característica del aprendizaje significativo por descubrimiento radica en que el contenido que se va a aprender no está dado, por lo contrario, debe ser descubierto por el estudiante para después ser interiorizado. El aprendizaje significativo se logra si la nueva tarea de aprendizaje se relaciona de forma no arbitraria ni textual con la experiencia y estructura de conocimientos ya existente en el estudiante. Esto supone (i) que el estudiante manifiesta una disposición a relacionar la nueva tarea de forma no arbitraria con lo que ya sabe y (ii) que la tarea de aprendizaje sea potencialmente significativa, es decir, que sea relacionable con la estructura de sus conocimientos. En contraste el aprendizaje por repetición también es relacionable con la estructura cognoscitiva pero únicamente de modo arbitrario y al pie de la letra, como consecuencia no se obtiene la adquisición de ningún significado. (Ausubel, 1980).

Para Ausubel (1980), el significado es consecuencia del proceso del aprendizaje significativo, es decir, se refiere al contenido cognoscitivo diferenciado que rememora en un estudiante dado un símbolo o grupo de estos. Después esta expresión es relacionada de manera sustancial con las ideas de su estructura cognoscitiva e interactúa con esta, cuanta mayor sea la generación de asociaciones entre los conocimientos previos y los nuevos conocimientos, el aprendizaje resultará más significativo y de mayor durabilidad al formar parte de una estructura mental y de la memoria a largo plazo. Al finalizar este proceso de aprendizaje, se tiene que el producto de esta interacción constituye el significado de la expresión recién aprendida.

> … para que ocurra realmente el aprendizaje significativo no basta con que el material nuevo sea intencionado y relacionable sustancialmente con las ideas correspondientes y pertinentes en el sentido abstracto del término (a ideas correspondientes pertinentes que algunos seres humanos podrían aprender en circunstancias apropiadas). Es necesario también que tal contenido ideativo pertinente exista en la estructura cognoscitiva del alumno en particular. De ahí que la significatividad potencial del material de aprendizaje varíe no sólo con los antecedentes educativos, sino con factores como la edad, el CI, la ocupación y pertenencia a una clase social y cultura determinadas. (Ausubel, 1980, p. 57)

Por otro lado, resulta necesario precisar las acepciones consideradas para los constructos SN y CM, que forman parte fundamental del presente trabajo.

Al respecto, Almeida et al. (2014) refieren que el SN no se conceptualiza de una manera única y acotada, por lo contrario, existen diferencias cuando su conceptualización proviene de la psicología cognitiva o de la educación matemática. García (2014) puntualiza que la exploración del SN provee de significado a los conocimientos que los estudiantes elaboran. En este aspecto, Mon-Kyaw (2018) menciona que la enseñanza de matemáticas enfocada en el SN alienta a los estudiantes a transformarse en resolutores de problemas en una amplia gama de situaciones. En la misma línea de ideas, Maghfirah y Mahmudi (2018) señalan que el SN afecta en los resultados de aprendizaje de los estudiantes y que si éste es basado en algoritmos se obtiene un aprendizaje sin sentido.

Para efectos de esta investigación se considera SN como mencionan McIntosh et al. (1992):

> ... Se refiere a la comprensión general que una persona tiene de los números y las operaciones, junto con la capacidad y la inclinación a utilizar esta comprensión de forma flexible para hacer juicios matemáticos y desarrollar estrategias útiles para manejar los números y las operaciones… (p.3)

El SN incluye diferentes elementos de los números, las operaciones y sus relaciones, lo cual ha propiciado diferentes investigaciones y debates entre profesores matemáticos, investigadores y creadores de currículos de la disciplina (Sengül, 2013). Al respecto, Almeida et al. (2014) señalan que la clasificación de componentes del SN en la educación matemática con mayor influencia es la propuesta por la NCTM (1989) y que posteriormente McIntosh et al. (1992) propusieron un marco más extenso desglosando algunos componentes propuestos por la NCTM y agregando otros. Al respecto, el marco del SN (Tabla 2), utilizado en esta investigación es el propuesto por Almeida et al. (2014)

que señalan los siete componentes corresponden a los esenciales de las propuestas de la NCTM (1989) y la de McIntosh et al. (1992).

Tabla 2. Componentes del sentido numérico.

Componente	Descripción
1.- Comprender el significado de los números	Implica la comprensión de la organización del sistema de numeración decimal y las numerosas relaciones existentes entre los números
2. Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números	Se refiere a reconocer y estimar el tamaño absoluto o relativo de un número, de una cantidad o de una medida en comparación con otro número, cantidad o medida. Incluye la comparación y el orden de los números y la identificación de números entre otros dos dados
3. Usar puntos de referencia	Estos puntos son valores que le resultan cómodos de manejar a un individuo en la realización de cálculos o comparaciones. Este componente incluye la habilidad para usar referentes mentales (matemáticos o reales) para usar números en la resolución de problemas
4. Utilizar la composición y descomposición de los números	Se refiere a la habilidad de composición y descomposición de los números, de manera equivalente, con el propósito de realizar operaciones con mayor fluidez
5. Usar múltiples representaciones de los números y las operaciones	Este componente se manifiesta al utilizar diversas representaciones en la resolución de problemas numéricos de forma práctica y flexible
6. Comprender el efecto relativo de las operaciones	Es la habilidad para identificar cómo las operaciones afectan al resultado final de problemas numéricos, normalmente se le nombra *como comprender el efecto relativo de las operaciones* y *saber relacionar las operaciones*. Incluye el empleo de propiedades aritméticas (conmutatividad-asociatividad-distributividad) para simplificar expresiones y desarrollar estrategias de solución
7. Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta	Implica la selección de estrategias apropiadas en función de la tarea (método gráfico, cálculo escrito, estimación, cálculo mental, etc.), así mismo incluye la habilidad para valorar lo razonable de un resultado

Fuente. Elaboración propia con información de Almeida et al. (2014)

La relación entre el SN y el CM no es sencilla, ya que algunos autores consideran que el CM forma parte del SN, mientras que otros sugieren que están relacionados pero separados. Por otro lado, otros autores apoyan una relación bidireccional, sugiriendo que las habilidades de SN influyen en las habilidades de CM, pero, al mismo tiempo, la práctica del CM también fomenta el desarrollo del SN (Ruiz y Balbi 2018). Para efectos de este trabajo consideramos al CM como parte del SN como lo refieren diversos estudios (Almeida et al. 2014; McIntosh et al. 1992; NCTM, 1989).

En esta línea de ideas, resulta conveniente puntualizar el concepto de CM que para fines del presente trabajo será considerado. Parra (1994) lo define como "... el conjunto de procedimientos que, analizando los datos por tratar, se articulan sin recurrir a un algoritmo preestablecido, para obtener resultados exactos o aproximados" (p. 222).

2.3.3 Dimensión Didáctica

En esta dimensión se puntualiza la postura que se adopta en este trabajo sobre la forma de enseñar y aprender matemáticas. El enfoque basado en resolución de problemas se considera propicio para que el estudiante desarrolle estrategias y habilidades propias del quehacer matemático

En este sentido, la resolución de problemas como aproximación didáctica, es adoptada en la presente investigación, como una forma pertinente de aprender y apoyar el aprendizaje de esta ciencia. Por su parte, Santos-Trigo (2014), señala que la resolución de problemas ha quedado reconocida durante las últimas tres décadas, como una actividad significativa en el aprendizaje de la disciplina.

En este punto, resulta conveniente señalar las diferencias existentes entre problema y ejercicio. En un problema, el estudiante tiene que resolverlo, haciendo uso de todos sus conocimientos y recursos que tiene a su alcance con base en un amplio entendimiento de la propia situación, aplicando estrategias que desencadenan de sus propios conocimientos, por lo contrario, en la resolución de ejercicios rutinarios, los estudiantes disponen de ciertos algoritmos y solo basta con su aplicación para llegar a la solución (Álvarez, 2006).

La NCTM refiere a la resolución de problemas como tareas matemáticas que provocan desafíos intelectuales que coadyuvan a la comprensión y el desarrollo matemático de los estudiantes. Al respecto, Santos-Trigo (2014) refiere que en un problema están presentes los siguientes componentes: (i) que no exista una solución inmediata, (ii) que tenga distintos caminos o métodos de solución y (iii) el interés de una persona o grupo de personas para efectuar distintas acciones que lleven a resolver esta tarea. Situación que es compatible con el tema de la presente investigación, donde se pretende que a través de la solución de situaciones utilizando cálculo mental el alumno se vea convencido de emplear estrategias útiles y adecuadas para su solución, en lugar de querer aplicar algoritmos previamente adquiridos y utilizados en el transcurso de su vida escolar y de esta manera identificar las dificultades que presentan, cuando son enfrentados a situaciones de esta índole. En relación con las actividades de aprendizaje resulta apremiante enfocar la atención en las ideas y recursos que los estudiantes traen al salón de clase, para que de esta manera se promueva una participación activa de los estudiantes en los procesos de solución y construcción del conocimiento matemático, de caso contrario no funcionaría (Santos-Trigo, 2014; Shoenfeld, 1985).

De acuerdo con Shoenfeld (1994) es indispensable que, en el proceso de aprendizaje de la disciplina, el estudiante se desenvuelva en un medio similar al de los matemáticos. Ya que este medio propicia que el estudiante desarrolle estrategias y habilidades propias del quehacer matemático. En otras palabras, aprender matemáticas significa que el estudiante identifique, seleccione y use estrategias comúnmente usadas por los matemáticos al resolver problemas (experimentar, identificar patrones, formular conjeturas, justificar resultados y plantear preguntas, validar estrategias, comunicar ideas).

Al respecto, a modo de una presentación visual, se presenta la **Figura 1,** donde se observa la integración de los elementos del marco conceptual.

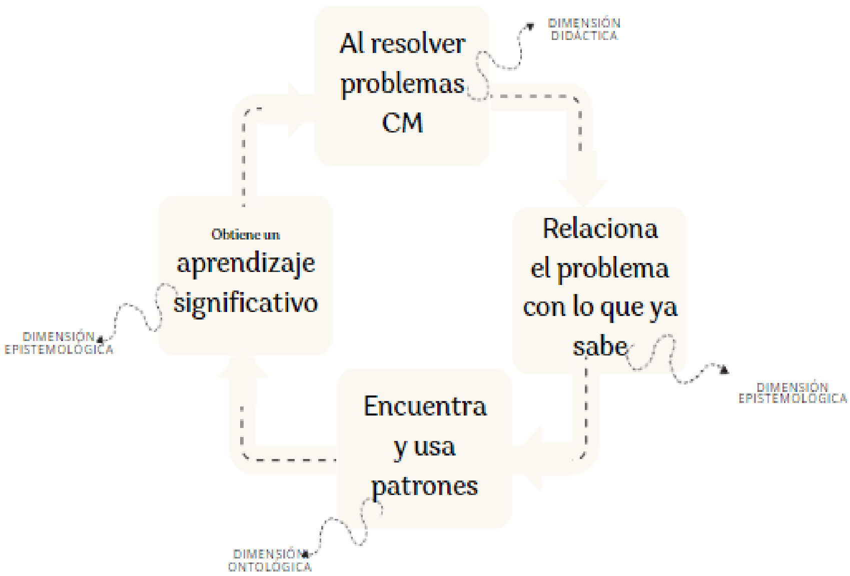

Figura 1.- Representación gráfica del marco conceptual.

Fuente. -Elaboración propia**.**

Del diagrama anterior, se considera oportuno resaltar que la relación descrita puede considerarse iterativa, esto debido a que cada que los alumnos logren aprendizajes significativos están en la condición de resolver una mayor cantidad de problemas. Al respecto Almeida et al. (2014) expresan que mientras más grande sea la formación matemática el bagaje de estrategias será superior. Por su parte, Santos-Trigo (2014) refiere que, al dirigir la atención de los estudiantes a la resolución de problemas, les permite comprender nociones matemáticas, construir estrategias, métodos y formas de pensar que convergen con el quehacer de la disciplina.

3. METODOLOGÍA

3.1. Introducción

La elección de un diseño de investigación involucra la toma de decisiones sobre diversos aspectos, tales como los procedimientos o estrategias de investigación, los métodos de recopilación, análisis e interpretación de datos, del mismo modo, su esbozo se fundamenta en la propia naturaleza del tema de investigación (Creswell, 2009). De acuerdo con Strauss y Corbin (2002), la metodología es una forma de entender y estudiar la realidad social.

Creswell, (2009) distingue 3 enfoques para realizar una investigación: (i) enfoque cualitativo, permite estudiar y entender el significado que le da un sujeto o grupo social a un fenómeno determinado, utiliza palabras, preguntas abiertas, e implica la recolección de datos a través de la observación del entorno del participante. El análisis de datos se va construyendo de manera inductiva desde lo particular a lo general. Ciertos datos se podrían cuantificar, sin embargo, la mayor parte del análisis es interpretativo (Strauss y Corbin, 2002). Por su parte, Stake (1999) menciona que en la investigación cualitativa los investigadores obtienen sus conclusiones con base en sus observaciones y de datos adicionales, (ii) enfoque cuantitativo, posibilita la demostración de teorías objetivas analizando la correspondencia entre variables, utiliza números, preguntas cerradas y recopila datos cuantitativos en instrumentos, de modo que los datos numéricos pueden ser analizados a través de procedimientos estadísticos; y (iii) mixto, involucra ambas formas cualitativas y cuantitativas con la intención que la robustez del estudio sea mayor que en las anteriores. Se recomienda su uso en ciertos contextos, cuando se trata de resolver temas de investigación complicados o responder interrogantes densas. Su finalidad es mejorar la comprensión y confianza en los datos, así como el enriquecimiento y profundidad de la propia investigación (Mendizábal, 2018).

Dankhe (citado en Hernández-Samperi, 1991) clasifica en cuatro, los tipos de investigación: (i) exploratoria, se interesa básicamente en descubrir y se utiliza cuando el análisis del problema de investigación ha sido escaso o no ha sido investigado con anterioridad, su metodología es más flexible en comparación con los otras clasificaciones, (ii) descriptiva, su objetivo se centra en especificar con la mayor exactitud posible, las propiedades más importantes del fenómeno sometido a análisis, (iii) correlacional, su propósito principal es valorar el grado de relación entre dos variables involucradas con el sujeto de estudio y (iv) explicativa, su intención se enfoca en detallar por qué y cómo ocurre un suceso o por qué dos o más variables están relacionadas. Son más estructuradas que el resto de los estudios.

En este sentido, en este capítulo se puntualiza el tipo de investigación efectuada, así como también se concentran las actividades que se llevaron a cabo con el objetivo de responder las preguntas de investigación. El enfoque adoptado en el presente trabajo es de tipo cualitativo, porque el interés del mismo es analizar en voz de un grupo de estudiantes las dificultades que presentan al enfrentarse a problemas de cálculo mental.

3.2 Métodos de investigación cualitativa

Strauss y Corbin (2002) señalan tres componentes primordiales en la investigación cualitativa: (i) los datos, que se pueden obtener a través de distintas fuentes, como entrevistas, observaciones, registros, documentos y películas, (ii) los procedimientos, usados para descifrar y ordenar los datos, algunos de ellos son conceptualizar, reducir y relacionar los datos, y categorizar, a todo lo anterior se le suele llamar codificar y (iii) los informes escritos y verbales que pueden ser artículos, libros o charlas.

Creswell (2009) señala algunos métodos para hacer investigación cualitativa:

(i) la etnografía, en este método se estudia a un grupo cultural en su hábitat natural por un periodo prolongado, los datos se obtienen a través de observaciones y entrevistas.

(ii) teoría fundamentada, su principal característica es la comparación sistemática constante de información con otras categorías para maximizar las semejanzas y discrepancias de datos.

(iii) estudios de caso, es un método donde se analiza con mayor detalle un fenómeno, un sujeto o un grupo de estos, se obtiene información detallada a través de distintas fuentes.

(iv) investigación fenomenológica, se diferencia por ser un método donde el investigador reconoce las particularidades de las experiencias de los participantes sobre un fenómeno, enfatizando estas antes que las propias; y

(v) investigación narrativa, es un método donde se analiza las vidas de los participantes solicitando que estos rememoren sus vidas, para posteriormente restaurar la información en una cronología narrativa. En esta se combinan los puntos de vista del investigador y el participante.

3.3 Diseño de la investigación

Proyectar una investigación implica toma de decisiones, entre otras cosas sobre los medios y estrategias para lograr los objetivos de la misma, los cuales deberán ser acordes a las preguntas de investigación, las hipótesis y objetivos (SEMAR s.f.). En relación a lo anterior, el presente trabajo se efectuó desde un enfoque cualitativo, en virtud de la naturaleza de las preguntas de investigación, y de esta manera estar en condiciones de poder darles respuesta.

Por otro lado, es de tipo exploratoria, debido a que intrínsecamente el objetivo es descubrir y explorar, además que, la línea de investigación sobre los errores que cometen los estudiantes en actividades de CM ha sido poco estudiada. Así mismo se debe a que este trabajo es producto de tesis de maestría y la autora está en proceso de adquirir las bases para llevar a cabo una investigación.

En otro orden de ideas, el método seleccionado para llevar a cabo la investigación fue el estudio de caso, dado que permitirá analizar con más detalle a un grupo de estudiantes sobre las dificultades que presentan en la solución de problemas de cálculo mental.

Al respecto del diseño de una investigación, en 1999, Stake afirma lo siguiente:

> El diseño de toda investigación requiere una organización conceptual, ideas que expresen la comprensión que se necesita, puentes conceptuales que arranquen de lo que ya se conoce, estructuras cognitivas que guíen la recogida de datos, y esquemas para presentar las interpretaciones a otras personas… (p. 25)

La información obtenida de esta investigación se recolectó mediante la aplicación de una prueba de cálculo mental, así mismo a través de entrevistas semi-estructuradas realizadas a los participantes las cuales fueron videograbadas con el objetivo de obtener información más puntual, así como también de observaciones que se realizaron en el transcurso de la aplicación del test y de las entrevistas.

3.4 Participantes

La investigación se realizó con nueve estudiantes de tercer grado de secundaria, cuyas edades oscilaban entre los 14-15 años de edad, de una secundaria técnica en el estado de Hidalgo. Se llevó a cabo en el ciclo escolar 2023-2024. Los participantes se seleccionaron de forma intencionada, se eligió la misma cantidad de estudiantes por nivel de resultado con base en las aplicaciones anteriores de la prueba SisAT, es decir, tres alumnos en nivel esperado, tres en nivel en desarrollo y tres en nivel de requieren apoyo, esto con la finalidad de tener una visión más amplia de los resultados obtenidos debido a que son alumnos con diferente nivel de resultado en una prueba precedente. Así mismo, también se consideró en la elección, los resultados obtenidos en ciclos pasados, es decir los tres alumnos elegidos en cada nivel, en todos sus resultados anteriores (considerando las tres aplicaciones de los dos ciclos anteriores) obtuvieron como resultado el mismo nivel. Otra característica de la elección de la muestra es que fueron elegidos de los diferentes grupos de tercer grado, con el objetivo de que existiera una mayor diversidad de características entre ellos.

De manera anticipada a la aplicación de la actividad, se notificó a los participantes y padres de familia, que los resultados de esta tarea formarán parte de un proyecto de tesis de maestría, razón por la cual se solicitó a los tutores de los estudiantes su autorización por escrito para videograbar la actividad que se realizaría con ellos. En donde para proteger su identidad, no serían grabados sus rostros y que sumado a esta acción se les asignaría un seudónimo, los cuales fueron E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8 y E9 respectivamente.

3.5 Técnicas e instrumentos de recolección de la información

Las técnicas e instrumentos utilizadas en la recogida de datos fueron**:**

1.- Aplicación de una prueba de CM. El instrumento fue el test **[APÉNDICE A]** y las hojas de anotación de respuesta de los estudiantes **[APÉNDICE B]**. La aplicación de esta prueba fue videograbada y posteriormente transcrita **[APÉNDICE G]** para el análisis de la información obtenida.

2.- Observación. El instrumento fue una guía de observación **[APÉNDICE C]** donde contenía datos que le permitieron al investigador centrar la atención en datos relevantes para la investigación.

3.-Entrevistas. El instrumento fue una guía semiestructurada de preguntas **[APÉNDICE D]** que permitieron conocer el porqué de las respuestas dadas a las situaciones de CM, las cuales fueron videograbadas con la finalidad de recabar información más precisa. Solo en el caso de que el alumno se le dificulte expresar de manera verbal los procedimientos que llevó a cabo para dar respuesta a las situaciones planteadas, el alumno realizará sus procedimientos a lápiz y papel.

3.6 Diseño de la actividad a implementar

De acuerdo al documento de orientaciones para el establecimiento del sistema de alerta temprana en escuelas de educación básica, de la SEP (2018):

> El Sistema de Alerta Temprana (SisAT) es un conjunto de indicadores, herramientas y procedimientos que permite a los colectivos docentes, a los supervisores y a la autoridad educativa local contar con información sistemática y oportuna acerca de los alumnos que están en riesgo de no alcanzar los aprendizajes clave o incluso de abandonar sus estudios (p. 6).

Cuyo propósito es coadyuvar a la prevención de rezago y la deserción escolar, identificando a los alumnos en riesgo. Dentro de los siete indicadores del SisAT, se localiza el de CM, denominado como un indicador de las habilidades básicas para el aprendizaje. Para obtener dicha información se cuenta con procedimientos, materiales (que corresponden con el nivel esperado para cada grado) y listas para el registro, así como también una aplicación digital para la exploración de los resultados. La aplicación de los instrumentos se realiza en tres momentos (al inicio, a la mitad y al final) del ciclo escolar. Con base en estos resultados como la de los otros dos componentes que conforman las habilidades básicas para el aprendizaje (lectura y producción de textos escritos) se toman decisiones y acuerdos en los consejos técnicos escolares para subsanar las debilidades encontradas y de esta manera contrarrestar el rezago y el abandono escolar.

Cada una de las pruebas de CM para secundaria consta de 2 ejemplos y 10 ítems. La prueba correspondiente al tercer grado de secundaria se muestra en la tabla 3.

Tabla 3. Prueba SisAT tercer grado.

No.	Pregunta	Respuesta
Ej. 1	20 más 18	38
Ej. 2	¿Qué número multiplicado por 5 da 40?	8
1	864 más 36	900
2	700 menos 89	611
3	60 por 500	30000
4	42 entre 6 por 5	35
5	5 al cubo, menos 5	120
6	¿Cuál es el valor de x en $2x$ menos $4 = 0$?	2
7	$\frac{1}{2}$ más $\frac{3}{4}$ menos $\frac{2}{8}$	$\frac{8}{8}$; $\frac{4}{4}$; $\frac{2}{2}$; 1
8	.5 más $\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$; $1\frac{1}{4}$; 1.25
9	¿Qué fracciones siguen en esta serie: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{12}$, ____, ____?	$\frac{8}{24}$ y $\frac{16}{48}$
10	Dos de los ángulos interiores de un triángulo miden 40° y 60° respectivamente, ¿cuánto mide el tercer ángulo?	80°

Fuente. Manual exploración de habilidades básicas en lectura, producción de textos escritos y cálculo mental. Herramienta para la escuela, de la SEP (2018).

De acuerdo con el manual exploración de habilidades básicas en lectura, producción de textos escritos y cálculo mental. Herramienta para la escuela, de la SEP (2018), la prueba se aplica a un estudiante a la vez, se plantea cada pregunta en el orden establecido, iniciando con los ejemplos, si el estudiante lo requiere se le repite una vez más la pregunta. Se muestra la tarjeta de apoyo visual (cada pregunta está escrita en una tarjeta) en caso que el estudiante dé una respuesta equivocada o se tarde más de 20 segundos en responder, en caso de que aun así no haya respuesta por parte del estudiante se debe pasar a la siguiente pregunta y así sucesivamente hasta culminar los 10 reactivos. En ningún caso se le permite al estudiante hacer uso de algún apoyo externo y solo se detiene la aplicación en caso de que el estudiante cometa seis errores consecutivos. Las preguntas se evalúan con 1 en caso de ser correcta, con 1v cuando se le presenta el apoyo visual y con 0 cuando la respuesta es incorrecta o no hay respuesta. Al finalizar la aplicación, a cada estudiante se le debe asignar un nivel correspondiente con el puntaje obtenido: (i) nivel esperado: de 8 a 10 puntos, (ii) en desarrollo: de 5 a 7 puntos y (iii) requiere apoyo: de 0 a 4 puntos.

Dado que esta prueba es la base de la presente investigación, en la **tabla 4** se muestra la relación de cada ítem de la prueba SisAT con el marco utilizado de los componentes del sentido numérico (**Tabla 2.** componentes del sentido numérico, p.28)

Tabla 4. Relación entre ítem y los componentes del sentido numérico.

Ítem	Componente del SN	Ítem	Componente del SN
1	3,4	6	5,6
2	3,4	7	4,5
3	2,3,4	8	4,5
4	3,4,6	9	2,4,5,6
5	5,6	10	1,4

Fuente. Elaboración propia.

De la tabla anterior, resulta oportuno señalar que en la mayoría de los casos está más de un componente involucrado, así como también el componente que menos apareció fue el que se relaciona con reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números.
Con efectos de poder comprender aún más la composición de la prueba SisAT, en el mismo sentido, en la **tabla 5** se relacionó la estructura de las preguntas con una clasificación elaborada por Jiménez (2010) en un material denominado: las tablas de cálculo: un método para trabajar el cálculo mental.

1.- Cálculo directo (CD): están presentes distintas operaciones y hay que operar con ellas (sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y potencias)

2.- Completar (COM): en estas, los estudiantes tienen que completar los espacios vacíos para que sea válida la expresión.

3.- Interpretar (INT): aquí es necesario que los estudiantes identifiquen elementos, sustituyan un valor en una expresión, interpreten un texto o un símbolo, etc.

Tabla 5. Relación entre ítem y estructura de las preguntas.

Ítem	**Tipo de pregunta**	**Ítem**	**Tipo de pregunta**
1	CD	6	INT
2	CD	7	CD
3	CD	8	CD
4	CD	9	COM
5	CD	10	COM

Fuente. Elaboración propia con información de Jiménez (2010).

De la tabla anterior, se destaca que, en la estructura de las preguntas, la más común es la de cálculo directo que involucra una o más operaciones (suma, resta, multiplicación, división y potencia).

Así mismo, en función de los contenidos matemáticos de la prueba, se clasificó en siete bloques temáticos, los cuales se presentan en la **Tabla 6**. Utilizando la clasificación elaborada por Jiménez (2010).

a. Bloque I: Números naturales.

b. Bloque II: Números enteros.

c. Bloque III: Números decimales y fracciones.

d. Bloque IV: Potencias y raíces.

e. Bloque V: Álgebra.

f. Bloque VI: Geometría y medida

g. Bloque VII: Funciones y sucesiones.

Tabla 6. Relación de ítem con bloque temático.

Ítem	**Bloque temático**	**Ítem**	**Bloque temático**
1	I	6	V
2	I	7	III
3	I	8	III
4	I	9	VII
5	IV	10	VI

Fuente. Elaboración propia con información de Jiménez (2010).

De lo anterior, podemos destacar que el contenido temático más abordado dentro de la estructura de la prueba es el relacionado con los números naturales, el cual está presente en cuatro de las diez preguntas.

Para poder identificar las dificultades que presentaron en cada uno de los ítems en la prueba aplicada, se llevó a cabo un análisis en conjunto sobre las características del ítem y los componentes del sentido numérico relacionados con él. Para este punto, se utilizó el marco de los componentes del SN presentados en la tabla 2 del capítulo 2, y que para efectos de llevar a cabo la identificación de dificultades cada componente se desglosa en subcomponentes derivados de la descripción de cada uno de ellos. (**Tabla 7**)

Tabla 7. Componentes del SN para el análisis de la aplicación de la prueba.

	Componente	**sub-componente**
1	Comprender el significado de los números	Comprensión de la organización del sistema de numeración decimal
		Comprensión de las relaciones existentes entre los números
2	Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números	Reconocer y estimar el tamaño absoluto o relativo de un número
		Comparar y ordenar números

		Identificación de números entre otros dos dados
3	Usar puntos de referencia	Usar referentes mentales (matemáticos o reales) para usar números en la resolución de problemas
4	Utilizar la composición y descomposición de los números	Composición y descomposición de los números de manera equivalente
5	Usar múltiples representaciones de los números y las operaciones	Utilizar diversas representaciones numéricas
6	Comprender el efecto relativo de las operaciones	Comprensión del significado y el efecto de una operación
		Emplear propiedades aritméticas (conmutativa-asociativa-distributiva)
7	Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta	Selección de estrategias apropiadas (método gráfico, cálculo escrito, estimación, cálculo mental, etc.)
		Valorar lo razonable de un resultado

Fuente. Elaboración propia con información de Almeida et al. (2014)

Para dar respuesta a las preguntas de la presente investigación, se elaboró una prueba de CM **[APÉNDICE A]** de 10 ítems de autoría propia basada en la estructura de la prueba SisAT correspondiente al tercer grado. Es decir, los ítems propuestos corresponden en la misma cantidad al mismo componente del SN, al tipo de estructura de pregunta y al bloque temático de la prueba referida. De la misma manera, la aplicación se basó en la estructura de aplicación de la prueba SisAT (la autora llevó a cabo una adaptación en la forma de registro cuando no existe respuesta, este fue a través de una diagonal). Todo esto a que es de interés de la autora, investigar las dificultades que los alumnos presentan en esta prueba debido a los bajos resultados que ha observado en distintos ciclos escolares, es por eso que se decidió realizar una prueba similar en estructura, no se consideró oportuno aplicar la prueba SisAT debido a que cuando se llevó a campo esta investigación, la prueba SisAT ya habría sido aplicada en dos ocasiones y se estimó que los resultados pudieran carecer de credibilidad debido a que los estudiantes ya conocían los ítems.

3.6.1 Implementación de la actividad

El proceso de implementación de la actividad se llevó a cabo en cuatro momentos, los cuales se describen a continuación:

Primer momento Elección de los participantes	Con base en las listas existentes sobre los resultados de la prueba SisAT y considerando las características antes descritas se eligieron a los nueve estudiantes para llevar a cabo el presente trabajo. Se establecieron días y horarios de aplicación de la prueba
Segundo momento Preparación	Se les explicó a los estudiantes las actividades que se llevarían a cabo y se les entregó el permiso de autorización que deberían firmar los padres de familia para videograbar las actividades **[APÉNDICE D]**. Se comunicaron días y horarios de aplicación de la prueba
Tercer momento Aplicación	Se aplicó la prueba de CM a un estudiante a la vez Las preguntas se implementaron en el orden en el que está establecido en la prueba, se fue registrando los resultados en la hoja de respuestas **[APÉNDICE B].** Si el alumno no daba respuesta se les presentaba el apoyo visual **[APÉNDICE F]** y si aun con el apoyo no había respuesta, se pasaba a la siguiente pregunta y así sucesivamente hasta culminar con los diez reactivos. Cuando la respuesta fue correcta se registró con un 1, si requirió de apoyo visual se registró con 1v, si la respuesta fue incorrecta se registró con 0 y si no hubo respuesta se registró con una diagonal (esto no se registra en la prueba SisAT, fue una adaptación que realizó la autora, para facilitar el análisis). Así mismo se consideró un tiempo aproximado de 20 segundos para dar respuesta a cada reactivo La aplicación fue videograbada
Cuarto momento Entrevista	Se realizó la entrevista semiestructurada a los estudiantes sobre las preguntas de la prueba que respondieron de manera errónea, no hubo respuesta o que necesitaron de apoyo visual para poder dar respuesta. Cuando a algún estudiante se le dificultó expresar de manera verbal el procedimiento que llevó a cabo se le solicitó utilizar lápiz y papel para ejemplificar La actividad fue videograbada

3.6.2 Análisis de la información

En este apartado se detalla el procedimiento para analizar la información empírica. Como se mencionó anteriormente, cada ítem de la prueba aplicada está relacionado con 2 o más componentes del SN, debido a que su estructura se basó en la prueba SisAT (tabla 4, pág. 38), esto a su vez se relacionó con las respuestas dadas por los estudiantes en las entrevistas realizadas.

En primer momento en la aplicación de la prueba se llevó a cabo un registro por estudiante sobre la respuesta dada. **Tabla 8**.

Tabla 8. Registro de resultados de la prueba.

Estudiante	Número de pregunta										Total de aciertos	Nivel Obtenido	Líneas transcritas
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
1	1	1	0	1	1v	1	1	1v	1v	0	8	NE	1 - 109
2	1	0	0	0	/	/	/	/	0	1	3	RA	110 - 275
3	1	1	0	1	1	1	1	/	0	1	7	NE	276 - 388
4	0	0	0	1	1	0	/	/	0	0	2	RA	389 - 527
5	1	1v	0	0	/	/	/	/	0	0	2	RA	528 - 642
6	1	1	1v	1	1	1v	1v	1v	/	1	9	NE	643 - 748
7	1	1v	/	1	1	1	1	1	0	1	8	NE	749 - 848
8	1	1v	0	0	0	/	0	0	0	/	2	RA	849 - 997
9	1	1v	0	0	/	/	0	/	0	/	2	RA	998 - 1118

1 respuesta correcta
1v respuesta correcta con apoyo visual
0 respuesta incorrecta
/ sin respuesta
NE nivel esperado
ED en desarrollo (en esta prueba ningún estudiante obtuvo este nivel)
RA requiere apoyo

Fuente. Adaptado de ficha de registro en manual exploración de habilidades básicas en lectura, producción de textos escritos y cálculo mental. Herramienta para la escuela, de la SEP (2018).

Como se mencionó anteriormente esta prueba fue aplicada y evaluada de acuerdo a los lineamientos de la prueba SisAT. En esta tabla se agregó el total de aciertos y nivel obtenido por cada estudiante, sólo como un punto a observar ya que no es motivo de esta investigación analizar a los estudiantes de acuerdo a sus resultados. Para el análisis de la información solo se contempló como dato estadístico el número de aciertos y desaciertos en la totalidad de las pruebas. Sin embargo, la autora se guió en respuestas correctas e incorrectas para el análisis de cada ítem. Así mismo, en esta tabla se agregó el número de líneas transcritas de las videograbaciones por cada estudiante para la consideración del lector.

Posteriormente, se relaciona cada ítem con el tipo de razonamiento que llevó a cabo cada estudiante para dar solución a la prueba, como puede observarse en la Tabla 11. Pág. 48. Así mismo, se relaciona cada ítem con la respuesta dada por los estudiantes, pero señalando los componentes del SN utilizados ya sea de manera correcta o incorrecta, con el propósito de obtener ciertas conclusiones o dar por válidos algunos hechos.

Tabla 9. Registro de resultados de la prueba.

Ítem	**Componentes del SN**													
	Correctos							**Incorrectos**						
	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
1			1	6			1			1	1			2
2			2	4						1	2			
3	1	1	1	1		1		1	4	1	2		1	
4	1		2	4		2	1	1		1	1		2	1
5	1				2	6		1				1	4	
6				1	2	5						1	5	
7				3	5							3	1	
8	1			3	4			1			1	2		
9		3		2	2	2			5		4	1	1	
10	1			1				1			4		2	
Frecuencia	5	4	6	25	15	16	2	5	9	4	15	8	16	3

Fuente. Elaboración propia

Para elaborar esta tabla se consideraron los componentes desglosados del SN en la tabla 8 de la pág. 43, se fue realizando un análisis sobre los procesos llevados a cabo por cada estudiante, relacionándolos con los componentes del SN, cabe destacar que cuando un alumno hizo uso de más de un componente ya sea de manera exitosa o no, este hecho fue marcado en cada componente utilizado. Se analizaron todas las respuestas dadas por los estudiantes incluso aquellos que no daban respuesta al ítem, sin embargo, en el momento de la entrevista hicieron alusión de algunos componentes del SN que intentaron usar o que desconocían de acuerdo a lo que respondían. Para este momento se da por hecho que si los estudiantes no estuvieron en la posibilidad de dar respuesta con éxito a un determinado ítem es por la carencia que tienen sobre los componentes del SN que conforman dicha pregunta, debido a esto se consideró en la tabla anterior agregar un conteo a los componentes de manera incorrecta que conformaba a cada ítem respectivamente. Así mismo se consideró también agregar un conteo a cada componente de manera correcta que conformaba a cada ítem respectivamente ya que todas las preguntas tuvieron mínimo un acierto. Al finalizar se contabilizó los componentes del SN utilizados de manera incorrecta con mayor frecuencia para de esta manera dar respuesta a las preguntas de investigación.

3.6.3 Criterios de validez

Los métodos de triangulación son una estrategia que generan convergencia en los distintos hallazgos, que dan valor a los resultados propiciando confiabilidad y credibilidad investigativa. (Santa-Cruz et al., 2022)

De acuerdo con Arias (2000) hay cuatro tipos básicos de triangulación: i.-Triangulación de datos; ii.- Triangulación de investigador; iii.- Triangulación teórica y iv.-Triangulación metodológica. La autora también señala a una triangulación múltiple si se usa más de un tipo de triangulación.

Para este estudio y con la finalidad de garantizar la validez y credibilidad de los datos se llevó a cabo una triangulación múltiple, por un lado, se llevó a cabo la triangulación metodológica dentro de métodos, esto debido a que se comparó las respuestas dadas por los estudiantes en la aplicación de la prueba con sus explicaciones dadas en las entrevistas semiestructuradas. Por otro lado, la triangulación metodológica entre métodos, ya que se realizó una comparación con las explicaciones dadas en las entrevistas semiestructuradas dadas por los estudiantes con los componentes del SN.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1. Introducción

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos de la aplicación de los instrumentos de recogida de datos, es decir de la prueba de cálculo mental, de las observaciones y de las entrevistas semiestructuradas. La implementación de estas actividades tuvo la finalidad de identificar las dificultades que presentan los estudiantes al momento de resolver problemas de CM, así como también el de realizar una clasificación de estas dificultades, todo esto desde la perspectiva del sentido numérico.

El test de CM y las entrevistas fueron aplicados en dos diferentes momentos con dos diferentes grupos de estudiantes, la primera aplicación se consideró un piloteo que permitió identificar las dificultades que el investigador podría tener al aplicar los instrumentos y para obtener datos que permitieran dar respuesta a la pregunta de investigación, una vez realizada la primera aplicación, se realizaron algunos ajustes (se llevó a cabo una prueba piloto para prever algunos contratiempos, en la primera aplicación, inicialmente se llevó a cabo la aplicación de la prueba a los nueve estudiantes y posteriormente se les realizó la entrevista, pero la autora se percató que esto no permitía a los estudiantes responder, debido a que ya no recordaban lo que habían realizado para dar respuesta a cada ítem, es por eso que se decidió realizar una segunda aplicación con otros nueve estudiantes realizando estos ajustes, es decir, primero se les realizaba la prueba y al termino de ésta, la entrevista) que permitieron, en una segunda aplicación, poder recabar los datos que se reportan en el presente capítulo, sin embargo, ocasionalmente se hará mención de algunos datos relevantes de forma cuantitativa que se obtuvieron en la primera aplicación, esto a debido a las características de las respuestas dadas.

4.2 Resultados y análisis de los ítems del 1 al 10

Para dar inicio a este capítulo es necesario puntualizar que para hacer referencia a cada una de las preguntas que compone la prueba aplicada se usarán los términos ítem y reactivo de manera indistinta.

Se llevó a cabo el análisis de los resultados de los estudiantes por ítem. En la **tabla 10**, se presenta la clasificación sobre el tipo de respuesta dada.

Tabla 10. Tipos de razonamiento utilizados en las respuestas.

Tipo de razonamiento	**Descripción**	**Código**
Sentido numérico	Utiliza algún(os) componente(s) del marco del SN	SN
Basado en reglas	Hacen uso exclusivamente de reglas o algoritmos	BR
Otros	Utilizan argumentos matemáticamente incorrectos No proporcionan suficientes argumentos para identificar qué razones los llevan a su respuesta Responden el ítem pero no presentan justificación	OT
Sin respuesta	En blanco	SR

Fuente. Adaptado de Almeida et al. 2014.

Aunque no es el objetivo del presente estudio el identificar las estrategias utilizadas por los resolutores para resolver situaciones de CM, se lograron identificar qué ítems fueron contestados usando componentes del SN y cuales tuvieron otro tipo de razonamiento, esto con la intención de llevar a cabo un análisis más detallado y sistemático sobre las respuestas dadas.

En el primer grupo de estudiantes donde se llevó a cabo la aplicación de los instrumentos los resultados cuantitativos arrojados son los siguientes:

- De los nueve estudiantes, tres obtuvieron la categoría *nivel esperado*, dos se situaron en la categoría *en desarrollo* y cuatro fueron situados en la categoría *requiere apoyo*.
- El menor número de aciertos por alumno fue una respuesta correcta, que fue obtenido por dos estudiantes.
- El máximo de respuestas correctas fue la prueba en su totalidad, la cual lo llevaron a cabo dos estudiantes.
- La totalidad de los estudiantes en al menos una ocasión hicieron uso del apoyo visual, es decir, pidieron que la investigadora les mostrara la tarjeta con la operación escrita.
- La pregunta con mayor aciertos fue la primera, en donde se les solicitaba realizar una suma en el orden de las centenas.
- La pregunta con menor número de aciertos fue la tercera, en donde tenían que realizar una multiplicación, en donde un factor estaba en el orden de las decenas y el otro en las centenas.

Estos resultados se presentan con la finalidad de darlos a conocer y poder realizar una comparación con los resultados del segundo grupo en términos cuantitativos y de esta manera poder encontrar similitudes y diferencias en cuanto a los ítems con mayor número de aciertos y de errores, para estar así en condiciones de poder asumir ciertos hechos en referencia al ítem analizado.

Para dar inicio al análisis de las respuestas, en la **tabla 11**, se presentan los resultados de cada ítem y el tipo de razonamiento llevado a cabo para dar solución a la prueba por parte del segundo grupo de estudiantes, como se mencionó previamente, en el análisis cualitativo de las respuestas, sólo se va a considerar a este grupo.

Tabla 11. Resultados de éxito y estrategias de los ítems.

Ítem	**Éxito**	**Tipo de razonamiento**						
		SN		**BR**		**OT**		**SR**
		C	I	C	I	C	I	I
1	8/9	5	0	0	1	3	0	0
2	7/9	4	1	0	1	3	0	0
3	1/9	0	3	1	5	0	0	0
4	5/9	3	0	1	2	1	2	0
5	5/9	5	0	0	0	0	1	3
6	4/9	4	0	0	0	0	1	4
7	4/9	4	0	0	0	0	2	3
8	3/9	3	0	0	0	0		6
9	1/9	1	1	0	3	0	3	1
10	4/9	4	2	0	0	0	1	2

C: correcto; I: incorrecto
SN: sentido numérico; BR: basado en reglas; OT: otros: incorrectos, incompletos, sin justificación; SR: sin respuesta

Fuente. Adaptado de Almeida et al. (2014)

En relación con la tabla anterior se puede asumir que el éxito cambia en función de los ítems. El hecho de evaluar como correctos o incorrectos los ítems permite mostrar cuántos estudiantes contestaron de manera correcta a un determinado ítem lo que pudiera permitir también llegar a ciertas conclusiones o dar por cierto algunos hechos.

Otro hecho que vale la pena resaltar es que, en el segundo grupo, a diferencia del primero, ningún estudiante contestó de manera correcta la prueba en su totalidad, así como también el mínimo de aciertos obtenidos fue uno.

En el análisis de cada ítem, se presentan algunos diálogos mostrados en cuadros que se consideraron de interés los cuales fueron transcritos a partir de las videograbaciones de las entrevistas semiestructuradas (se agregó entre paréntesis el número de línea de la transcripción correspondiente), realizadas después de la aplicación de la prueba, de modo que permiten al lector un entendimiento más claro sobre lo acontecido en la aplicación de los instrumentos de recogida de datos. En donde, la letra **P** representa al investigador y la letra **E** con subíndices del 1 al 9, representan respectivamente a los nueve estudiantes.

4.2.1 Ítem 1

800 + 409

Es un ítem en el cual se debe realizar una suma en el orden de las centenas en ambos sumandos y donde se espera que utilicen la descomposición del segundo sumando para realizar el cálculo de manera más sencilla y rápida o bien cualquier otra descomposición que les facilite el cálculo asimismo pueden utilizar el punto de referencia de la suma de los dígitos ocho y cuatro y agregar los ceros correspondientes más la unidad nueve.

Este ítem es el de mayor éxito para los estudiantes, ocho de los nueve respondieron de manera correcta. De los cuales ninguno hizo consulta del apoyo visual.

De los cinco estudiantes cuya respuesta está clasificada en SN, su respuesta fue basada en la composición y descomposición de los números. (**Cuadro 1)**

E1: ah pues lo primero que hice fue sumar 800+400 y luego le sume el 9 (48)

E3: pues, bueno primero este pues solo es algo básico no, de 800 + 400 se suman 1200 y luego sumé 9 (317-318)

E6: primero sumé los números enteros (refiriéndose al 8 y 4) y luego agregué el número, el número como se llama el dígito unitario que es el 9 (684-685)

Cuadro 1. Respuestas de estudiantes

De los tres alumnos cuya respuesta está en la clasificación de otros, no dieron elementos suficientes para conocer los procedimientos efectuados, como se puede ver en la respuesta del E8 al interrogarlo sobre la estrategia empleada. (**Cuadro 2)**

E8: sumar (908)

Cuadro 2. Respuesta de estudiante

La respuesta basada en reglas fue la incorrecta, la estudiante manifestó tener dificultad porque se trataba de cantidades grandes y más porque era de forma mental así mismo expresó que si hubiera sido la actividad a lápiz y papel sin dificultad podría haberlo hecho. (**Cuadro 3**)

E4: mmm los números poco a poco los fui sumando como haciendo una imagen mental como si tuviera la libreta (436-437)

Cuadro 3. Respuesta de estudiante

Analizando los diferentes resultados obtenidos de este ítem, se puede asumir que para este grupo de estudiantes realizar sumas con estas características lo pueden realizar exitosamente. *Y que las dificultades presentadas por la estudiante se pueden deber a la falta de comprensión de los componentes: composición y descomposición de los números de manera equivalente; usar referentes mentales (matemáticos o reales) para usar números en la resolución de problemas y análogamente al sub-componente valorar lo razonable de un resultado, este último debido a la respuesta dada por la estudiante*. (**Cuadro 4**)

E4: 800 +409 es 129 (391)

Cuadro 4. Respuesta de estudiante.

De la misma manera en el primer grupo, este ítem fue el de mayor éxito con el mismo número de aciertos, sin embargo, no se cuentan con elementos para poder analizar el caso incorrecto. Tampoco ningún integrante de este grupo necesitó del apoyo visual para dar respuesta. Este hecho pudiera confirmar el supuesto aceptado con anterioridad.

4.2.2 Ítem 2

220 - 60

Este ítem corresponde a una resta en el orden de las centenas por parte del minuendo y en el orden de las decenas en el sustraendo. En esta operación los estudiantes al intentar resolverla pueden recurrir a la descomposición del 220 en 200 y 20 o en la descomposición del 60 en 40 y 20 o cualquier otra que le pueda facilitar el cálculo al estudiante. Así como también pueden usar la referencia que el doble de 60 es 120 y que 220 es igual a 100 más 120.

Este ítem fue el segundo con mayor éxito al ser contestado correctamente por siete de los nueve participantes. Seis estudiantes hicieron uso del apoyo visual, incluidas las dos respuestas incorrectas. Este hecho pudiera interpretarse cómo que esta operación al momento de querer dar respuesta causó mayor dificultad en comparación con la del primer ítem, que bien pudiera tratarse por la naturaleza de la operación o de los números involucrados.

De las cuatro respuestas clasificadas en SN, en tres de estas, su proceso fue basado en la composición y descomposición de las cantidades y el restante se basó en puntos de referencia. (**Cuadro 5**)

E1: eh al 220 le quité 60 pero este pues 160+ 60 son 220 y eso fue lo que hice (52)

E3: primero fue restar a los 200, 20 y ya después restar los 40 para que sea un poquito más el resultado bueno el cómo se dice el cálculo un poquito más fácil (322-323)

E7: ahí primero le quite los 20 y me confundí porque pensé que eran 40, entonces vi que bueno quite los 20 y le reste 20 y entonces serían 40 al 200 le quitas 40 y serían 160 (799-800)

Cuadro 5. Respuestas de estudiantes.

De los tres alumnos cuya respuesta está en la clasificación de otros de manera exitosa, no dieron elementos suficientes para conocer los procedimientos efectuados. (**Cuadro 6)**

E8: emm pues le quite 60 al 220 y dio ciento…, ciento que, 160 (920)

E9: que por ejemplo la primera cifra es un número mayor que el 60 y después como que se me dificulta restar número más bajos que la primera cifra (1052-1053)

Cuadro 6. Respuestas de estudiantes.

Mientras que las respuestas incorrectas están dentro de las clasificaciones de SN y BR. En el caso de la utilización del SN (E2), se puede notar que este está presente sin embargo la estudiante tiene dificultades para llevar a cabo el proceso con éxito, al querer realizar composiciones y descomposiciones de los números de manera equivalente. Por otro lado, la respuesta BR (E4), la estudiante intentó llevar a cabo el algoritmo de la resta de manera mental sin éxito. (**Cuadro 7**)

E2: ah pues este primero haga de cuenta este conté cuanto era de 20 al 60 y ya después este por ejemplo se lo reste al 260 y me dio 140 y pues según yo eso está bien, y eso fue lo que hice este del 20 conté cuanto era para 60 y eso se lo resté a 260 (164-166) E4: una resta esté empezando por este lado (señalando el lado izquierdo) o sea, si era un número mayor arriba bueno se le sumaba y este bueno, pero este cuando el número era mayor y el número de abajo era menor le prestaba al otro y este hasta que me diera como resultado todo eso y bueno así más o menos lo hice (450-453)

Cuadro 7. Respuestas de estudiantes.

Las dos respuestas incorrectas fueron dadas por las estudiantes 2 y 4 las cuales fueron respectivamente 140 y 180. La estudiante de la respuesta BR manifestó durante la entrevista semiestructurada que si la operación la hubiera hecho en papel y lápiz sin ninguna dificultad podía haberla resuelto ya que en el proceso se le fueron perdiendo los números en su mente porque es visual, lo que permite interpretar que los algoritmos los maneja de manera adecuada con instrumentos de apoyo. *Con base a los hechos antes mencionados, las dificultades presentadas se pueden deber a la falta de comprensión de los componentes del SN como: composición y descomposición de los números de manera equivalente; y el de usar referentes mentales (matemáticos o reales) para usar números en la resolución de problemas.*

4.2.3 Ítem 3

31 x 400

Este ítem corresponde a la realización de una multiplicación donde uno de los factores está en el orden de las decenas mientras el otro factor en el orden de las centenas y es múltiplo de 10. Los estudiantes pudieron hacer uso de algunos componentes del SN para darle respuesta, una forma es considerar el 3 y el 4 para realizar la multiplicación y tener en consideración el valor posicional de los números, e incluir la unidad. Otra forma es considerar el punto de referencia de tres por 100, e ir sumando o multiplicando las veces necesarias y nuevamente considerar el valor relativo o posicional de los números y la unidad. Otra alternativa de solución es descomponer el 31 en 10 más 10 más 10 más uno o en cualquier otra que pueda facilitarles el cálculo y utilizar la propiedad distributiva. Así mismo pueden hacer uso de más de uno de estos componentes en conjunto por ejemplo descomponer al 31 en 30 y 1 y solo considerar el valor absoluto del 4 para llevar a cabo la multiplicación utilizado la propiedad distributiva para que posteriormente considerar el valor posicional del mismo, es decir agregar los ceros correspondientes. O cualquier otra mezcla de estos componentes que les permitan llevar a cabo la operación de manera mental.

Este reactivo es uno de los que tienen menor número de respuestas correctas, solo uno de los nueve estudiantes (E6) lo respondió con éxito. Este hecho se repite en el primer grupo de estudiantes al cual le fue aplicado la prueba. La totalidad de los estudiantes de ambos grupos hicieron uso del apoyo visual. Estos hechos pueden asumirse como, que el realizar multiplicaciones mentales con las características propias de este ítem causaron mayor dificultad a estos grupos de estudiantes.

La respuesta correcta dada por el estudiante E6 está dentro de la clasificación de BR, aquí el estudiante refirió que una de las dificultades que tuvo para realizar el algoritmo mentalmente fue el espacio que se deja entre el resultado del primer producto y el segundo para realizar la suma. (**Cuadro 8**)

> E6: estaba acomodando los números porque eso era lo que se me dificultaba la multiplicación, en sí nada más la manera de acomodarlos porque es más fácil escribirlo en papel porque ahí no se te olvida tienes los dígitos ordenados y mentalmente como que se me dificulta acomodar los números para que se sumen al final de la multiplicación (698-701)

Cuadro 8. Explicación del estudiante que dio la respuesta correcta.

Dentro de las respuestas incorrectas, tres están en la clasificación del uso del SN, donde permiten ver que los estudiantes hacen uso de éste, es decir no está ausente, sin embargo, presentan dificultades para terminar el proceso con éxito. Los cuales hicieron uso del valor absoluto de un dígito de uno de los factores (es decir, del factor 400 solo utilizaron el 4) para facilitar el cálculo, sin embargo, la dificultad consiste en reconocer el valor relativo del mismo factor y estimar el resultado, este hecho se puede sustentar considerando los resultados dados. (**Cuadro 9**)

E1: pues primeramente fue porque como son mentales y son, no sé y es un número algo grande ¿no?, y púes la cantidad o resultado iba hacer como que medio no muy complicado, pero si iba a estar algo complicado hacer el resultado y para yo poderlo resolver lo que hice fue multiplicar 31 x 4 y luego le sume los dos ceros y fue el resultado que me dio (54-57)

E3: pues primero multiplique 31 x 4 y ya después le agregue los ceros (330)

E7: primero quería multiplicar 40 por 3 y el resultado, bueno 400 x 3 y al resultado se le agrega el otro cero del 30 y después sumarle la multiplicación del 400 x 1 pero si se me dificultó poquito (807-808)

Cuadro 9. Explicaciones de algunos estudiantes que dieron la respuesta incorrecta.

La respuesta que el E1 dio para este ítem, fue 1240, aunque durante la entrevista semiestructurada, al explicar el proceso que llevó a cabo para dar respuesta, dio el resultado correcto, éste ya no fue válido porque fue fuera de la aplicación de la prueba, este hecho nos permite deducir que el E1 tiene desarrollado en buena medida el SN, esto se puede corroborar con el resto de sus resultados de la prueba, sin embargo también se puede inferir que bajo tiempo limitado y en situaciones similares a este ítem puede verse conflictuado.

Por otro lado, las respuestas clasificadas en BR, los estudiantes explican el algoritmo que intentaron resolver sin éxito para dar solución al reactivo. Con estos hechos se puede suponer que estos estudiantes tienen carencia de algunos componentes del SN, como el uno y el cuatro que dicen respectivamente: *comprender el significado de los números; composición y descomposición de los números de manera equivalente y de alguno subcomponentes como: reconocer y estimar el tamaño absoluto o relativo de un número, usar referentes mentales (matemáticos o reales) para usar números en la resolución de problemas y el de emplear propiedades de las operaciones aritméticas (conmutativa-asociativa-distributiva).* (**Cuadro 10**)

E2: Amm si primero este, multipliqué 400 por 1 son 400 los acomodé en mi mente y después este según yo multipliqué 400 x 3 que eran 1200 y ya después ahí me puse nerviosa y al momento de sumarlos como que se me fue lo que ya había hecho y ya no supe responderla (186-188)

E4: para saber resolverla mmm multipliqué 31 x 400 como va primero multipliqué 1 x 400 y el resultado lo ponía abajo y el 3 lo multiplicaba también por el 400 y también el resultado lo ponía abajo y esos dos resultados los sumaba para que me diera el resultado de una multiplicación (458-460)

E5: número por número. 1 x 0 y 1 x 4 y era 400 y después 0 y después 0 y luego 4 x 3, 12 y con eso lo sume y el resultado me dio 1200 (572, 576-577)

E9: ah ok este pues primero me imaginé como si fuera una multiplicación igual y pues este multipliqué 1 x 4 y después por los otros ceros y después repetí el mismo procedimiento, pero con el 3, 3 x 4 y 3 por ceros y los iba a sumar (1059-1061,1063)

Cuadro 10. Respuestas de estudiantes.

En esta operación llamó la atención la respuesta del E8 *(hee… cinco mil o cinco mil… mmm… no esa no)*, la cual hace suponer que el estudiante no le da sentido a la operación ni a los números involucrados y que el desarrollo de su SN es muy escaso o nulo, hecho que también puede corroborarse con los demás resultados que dio en el resto de la prueba.

4.2.4 Ítem 4

5 x 12 ÷ 2

Este es el primer ítem de la prueba el cual involucra dos operaciones para su solución. Por un lado, un producto de dos factores uno de ellos en el orden de las unidades y el otro factor en el orden de las decenas y después un cociente. Por su parte, los estudiantes en este ítem, pudieron hacer uso de componentes del SN como: usar puntos de referencia, por ejemplo, el resultado de diez por cinco y el de cinco por dos; utilizar la composición y descomposición de los números, una forma es descomponer al 12 en diez más dos, otra forma es descomponerlo en seis más seis o cualquier otra que al estudiante pudiera facilitarle el cálculo. Otro componente que entra en juego en este ítem es el de comprender el efecto de las operaciones, en este caso la comprensión del cociente que puede interpretarse como, obtener la mitad de la cantidad involucrada, así como también el uso de propiedades aritméticas como la propiedad distributiva.

Este ítem tuvo éxito con seis de los nueve participantes, al ser contestado de manera correcta. Tuvo una notoriedad considerada por parte de los estudiantes. Hecho que se repite en el primer grupo de aplicación. Muy pocos estudiantes solicitaron el apoyo visual para dar respuesta. Hechos que se pudieran resumir que estas operaciones con las características de las cantidades involucradas son operaciones que no causaron mayor dificultad a estos grupos de estudiantes.

Las respuestas correctas están dentro de las tres clasificaciones. Por una parte, los tres estudiantes que hicieron uso del SN para dar solución se puede observar que hacen uso de los componentes: usar puntos de referencia; utilizan la composición y descomposición de los números; y el de comprender el efecto relativo de las operaciones. (**Cuadro 11)**

E1: bueno sabemos que 5 x 10 son 50 y 5 x 2 son 10 y luego pues este, bueno sume 50 + 10 y me dio 60 y la mitad de 60 son 30 (66-67) E3: pues primero multiplique 5 x 10 y ya después x 2 y ya lo sume y lo dividí (342) E7: primero multipliqué 5 x 10 y los 2 pues serían otros 5 x 2 entonces serían 50 + 10 y serían 60 y ya nada más lo divide entre 2 y dio 30 (810-811)

Cuadro 11. Respuestas de estudiantes.

Por otro lado, el E4 no dio elementos suficientes para conocer lo que realizó en su proceso, sin embargo, lo que haya realizado lo llevó a cabo con éxito. Mientras que el E6 su proceso fue la utilización del algoritmo del producto. (**Cuadro 12)**

E4: lo primero que hice fue hacer la multiplicación mmm y ya del resultado que me saliera de la multiplicación lo dividía por el número que esté bueno, por el divisor (465-466) E6: 5 x 12 entre 2 ah primero hice la multiplicación 5 x 12, 5x 2, 10, 0 y llevamos 1, 5 x 1, 5 y 1, 6, 60 y lo divides entre 2 da igual a 30 (704-705)

Cuadro 12. Respuestas de estudiantes.

Mientras que las respuestas incorrectas están dentro de las clasificaciones BR y en OT. En ambos casos se puede asumir que estos estudiantes tienen dificultad en la comprensión de componentes del SN como: *usar puntos de referencia, utilizar composición y descomposición de los números; y comprender el efecto relativo de las operaciones.*

Un punto importante a destacar en este ítem es que dadas las respuestas de los estudiantes cuyas respuestas están en la clasificación OT, se puede asumir que carecen de manera significativa de diferentes componentes del SN, como los antes mencionados y también de algunos subcomponentes como: *comprensión de las relaciones existentes entre los números; y el de valorar lo razonable de un resultado*, estos hechos se pueden justificar debido a las respuestas dadas. (**Cuadro 13)**

E8: 5 x 12 son mmm son 56 y dividiéndole seria y darían 116 (941) E9: que, mm por ejemplo ósea 5 x 12 como que, si lo puedo multiplicar, pero después él entre 2 como que ahí se me dificulta también las cosas (1065-1066) (P: a ver cuánto es 5 x 12) mmm 110 (1068) (P: ok y entre 2) es cuando se me dificultan las cosas (1070)

Cuadro 13. Respuestas incorrectas de algunos estudiantes en el ítem 4.

4.2.5 Ítem 5

$10^2 - 9$

Este reactivo es el primero de la prueba el cual tiene involucrado un exponente y también implica dos operaciones en su solución. Para este punto los estudiantes ya resolvieron sumas, restas productos y cocientes. Para dar respuesta a este reactivo se espera que los estudiantes transiten de la representación del 10^2 al 100 y viceversa, al mismo tiempo que comprendan el efecto relativo de las operaciones, es decir, que cobre sentido en ellos.

Este ítem fue contestado de manera correcta por cinco de los nueve estudiantes. Los mismos cinco estudiantes que dieron respuesta al ítem anterior de manera exitosa. De los cuales cuatro no requirieron hacer uso del apoyo visual, por el contrario, el resto sí lo requirió, incluidos los estudiantes que respondieron de manera errónea. El número de respuestas correctas e incorrectas en este ítem, coincide con las dadas por los estudiantes del primer grupo al que se le aplicó la prueba.

Dentro de las respuestas correctas, la totalidad de ellas, están en la clasificación de SN, en este reactivo los estudiantes hicieron uso de componentes como: usar múltiples representaciones de los números, al comprender que 10^2 es igual a 100; y comprender el efecto relativo de las operaciones, al resolver de manera correcta la operación 10^2. (**Cuadro 14)**

E3: 10 al cuadrado menos 9, pues lo primero es ahora sí multiplicar diez x diez porque es 10 al cuadrado son 100 y ya 100 pues ya resté (345-346) E6: ahí primero al cuadrado significa que se multiplica por ese mismo número así que 10 x 10 es igual a 100 menos 9, 91 (708-709) E4. Multipliqué este 10 por este por 10 ya que es al cuadrado se multiplica dos veces el mismo número, y esteeee. Bueno después del resultado que me saliera que era 100 lo reste por el 9 (468-469, 471)

Cuadro 14. Respuestas de algunos estudiantes.

Dentro de las respuestas incorrectas, tres están dentro de la clasificación de SR, es el primer reactivo de la prueba con el hecho de que un estudiante no da una respuesta o intenta realizar cálculos. Y en los tres casos la argumentación fue la misma, no sabían cómo operar el exponente. (**Cuadro 15)**

E2: no, ahí si no tengo ni idea no puedo decir me puse nerviosa, ahí no tenía ni idea de qué hacer (211) E5: emm bueno no recuerdo bien como hacerla del cuadrado (593) E9: mmm qué pues no, bueno por ejemplo en esas operaciones no sé elevar las cosas al cuadrado y así y entonces por eso se me dificultan las cosas (1075-1076)

Cuadro 15. Explicaciones de estudiantes con respuesta incorrecta.

Por su parte, el estudiante (E8) que su respuesta está en la clasificación OT, dentro de la aplicación como en la entrevista sus respuestas fueron basadas en restar la base de la potencia con el sustraendo de distintas maneras. Dentro de las respuestas que dio el estudiante están, 8^2, 9^2 y 1^2. Al momento de solicitarle que repitiera de nuevo su respuesta, ésta la iba modificando, la última que dio, explicó que restó 10 menos 9 y dejó el exponente. También manifestó que la dificultad estuvo en resolver el exponente.

Con base en los hechos arriba descritos, se puede asumir que 3 de los 4 estudiantes que no respondieron el ítem, presentan una carencia muy puntual en el componente 5 del sentido numérico, que se describe cómo utilizar diversas representaciones de los números, así como también en el componente 6 que se refiere a   comprender el efecto relativo de las operaciones.

Sin embargo, para el E8, con base en las respuestas dadas también se puede asumir una carencia en el componente 1, referido a comprender el significado de los números, así como también en los componentes arriba mencionados.

4.2.6 Ítem 6

¿Cuánto es $9x^2$ más $12x^2$?

Hasta este momento de la aplicación, los estudiantes ya resolvieron diferentes operaciones entre ellas potencias. Este ítem para su solución implica sólo una suma de coeficientes puesto que se trata de términos semejantes. Lo interesante aquí es ver cómo para los alumnos esto cobra sentido. Para ello, se espera que tengan comprensión de los componentes del SN como: comprender el significado de los números y usar múltiples representaciones de los números y de las operaciones.

Este ítem tuvo éxito por cuatro de los nueve participantes, lo que significa que prácticamente la mitad del grupo lo pudo resolver y la otra mitad no fue así.

De las respuestas correctas se puede observar que para los estudiantes tiene sentido la literal (x) elevada al cuadrado y saben cómo operar con ella al menos en casos como este. (**Cuadro 16)**

E1: 9 + 12 verdad pues nada más que nada sabemos que x al cuadrado es digamos sería lo mismo, entonces pues no tiene caso como que sumarlos no, entonces lo que hice solo fue nadamas sumar 9 + 12 dándome un resultado de 21 y como tienen las dos están elevadas al cuadrado nada más sería 21 equis al cuadrado (73-76)

E3: pues solo sume 9 más 12 y ya lo pasé equis al cuadrado (350)

E6. Nada, es que como namas se suma 9x y 12 x y el cuadrado no se toca se deja igual en total daría 21 equis al cuadrado (712-713)

Cuadro 16. Respuestas de estudiantes.

Nuevamente en este ítem se repite el hecho de que algunos estudiantes no pudieron dar una respuesta al mismo, los argumentos fueron en dirección al no saber cómo operar la literal equis(x) al cuadrado. (**Cuadro 17)**

E2: pues o sea no, no encuentro cómo no tengo idea de cómo multiplicar 9 equis al cuadrado más 12 equis al cuadrado no sé si tenga que ver la, no sé qué tenga que ver la x y lo del cuadrado fue lo que le dije que no, que me cuesta trabajo elevar al cuadrado o sea no entiendo (220-222)

E5: emm pues por el procedimiento igual no recuerdo cómo, cómo se llama, elevar al cuadrado (600)

E8: se me dificulta el 2 al cuadrado y nada más que eso se me dificulta al cuadrado (952)

Cuadro 17. Respuestas de estudiantes.

Por su parte, el E4 intentó dar respuesta, pero no tuvo éxito en su proceso, para lo cual quiso elevar al cuadrado tanto el doce como al nueve para al final sumar los resultados. (**Cuadro 18)**

E4: mmm se me dificultó porque este bueno por la ecuación de este 12 equis al cuadrado porque esté intentando se tendría que multiplicar 2 veces el 12 e intentando sacar el resultado de cuánto era 12 x 12 eso se me dificultó se me revolvieron los números (474-476)

Cuadro 18. Explicación del estudiante.

En este reactivo de los cinco alumnos que no la respondieron de manera correcta, cuatro incluso ni siquiera pudieron dar una respuesta, estos hechos nos permiten suponer que carecen de los componentes del SN 1 y 5, que dicen respectivamente comprender el significado de los números; y usar múltiples representaciones de los números y las operaciones.

4.2.7 Ítem 7

Dos enteros menos 1/5

Este es el primer ítem de la prueba que involucra números no enteros, por un lado, una fracción y por otro una cantidad entera, y en su solución implica la realización de una resta. Para ello se espera que los estudiantes puedan hacer uso de componentes del SN como: utilizar la composición y descomposición de los números; y usar múltiples representaciones de los números y sus operaciones.

Este ítem tuvo poca notoriedad por parte de los estudiantes ya que fue respondido correctamente solo por cuatro de los nueve estudiantes, de los cuales sólo uno hizo uso del apoyo visual, y cinco de los que respondieron de forma incorrecta o no dieron respuesta también hicieron uso del apoyo visual, lo cual puede representar que no fue de utilidad para realizar el proceso de solución ya que los estudiantes carecen puntualmente de componentes del SN antes mencionados. Este hecho se repitió también en el primer grupo de aplicación con el mismo éxito en el reactivo.

Dentro de las cuatro respuestas dadas de manera correcta ubicadas en la categoría de SN se puede observar que estos estudiantes tienen cierto nivel de desarrollo de estos componentes del SN. (**Cuadro 19)**

E1: 2 enteros menos $\frac{1}{5}$, bueno pues dos enteros menos un quinto, lo que hice fue quitar un entero y quitar el quinto pero para poderlo resolverlo pues el entero lo dividí en cinco y le quité un quinto dándome un resultado de un entero $\frac{4}{5}$ (79-81)

E3: pues un entero lo dividí en quintos y a esos son cinco quintos le quité 1 y ya un entero y 4 quintos (352)

E7: primero los dos enteros se podrían representar como 5 a la 5 más 5 a la 5 noo, $\frac{5}{5}$ más $\frac{5}{5}$ y ya nadamas les quitas a esos $\frac{1}{5}$ y serían 5 y al otro cinco quintos le quitas 1 son 4 y entonces quedarían como $\frac{9}{5}$ (821-823)

Cuadro 19. Explicación de las respuestas correctas de algunos estudiantes.

Dentro de las cinco respuestas consideradas incorrectas, dos están en la clasificación de SR y tres en la de OT. En ambos casos es notoria la carencia de ciertos componentes del SN. Puesto que los estudiantes pudieron hacer uso de la composición y descomposición de cantidades, por ejemplo, descomponer los dos enteros en uno más uno o en cualquier otra que les pudiera facilitar el cálculo; o bien también pudieron hacer uso de múltiples representaciones de los números, una forma es transitar de los dos enteros a $\frac{10}{5}$ o en cualquier otra forma de representar a los dos enteros que les permitiera darle respuesta al ítem, así mismo hacer una combinación de ambos componentes.

Los dos estudiantes (E2 y E5) que no dieron respuesta, manifestaron que su confusión está en la realización de la conversión de la fracción a número decimal, es decir no comprendieron otra forma de darle solución más que el realizar esa conversión de la cual no tuvieron éxito. (**Cuadro 20)**

E2: dos enteros menos $\frac{1}{5}$, mmm pues podría decir que se me dificultó este, pues se me olvidó más bien este, osea la representación de a cuánto equivale un quinto, osea, no recuerdo cómo representar el quinto, o sea a número decimal (225-227) E5: porque no recuerdo, se supone que al convertir en decimal y no supe cómo hacerlo (609)

Cuadro 20. Explicación de estudiantes que no dieron respuesta.

De acuerdo con las respuestas anteriores, pudiera interpretarse que no del todo está ausente el componente del SN, usar múltiples representaciones de los números y las operaciones, puesto que sí percibieron otra forma de representar a la fracción sin embargo no tuvieron los elementos suficientes para poder continuar con el proceso.

Dentro de las tres respuestas clasificadas en OT llama la atención que dos estudiantes tuvieron el mismo razonamiento al querer restar los dos enteros menos el denominador. Y aunque el estudiante E9, dio una respuesta casi de manera inmediata, al final comentó que no sabía cómo hacerlo, retractándose de su respuesta. (**Cuadro 21)**

E4: mm… como que restar el número, bueno el número entero por el más grande de la fracción (487) E8: emm se me dificulta restarle los dos enteros se me dificulta restarle al 2, un quinto (957) E9: mmm que por ejemplo los enteros pues no se podría decir que nos los ubico bien entonces pues no sabría cómo que sería 2 enteros entre ⅕ (1091-1092)

Cuadro 21. Respuestas de estudiantes.

4.2.8 Ítem 8

3.75 más ¼

Para su solución, este ítem implica una suma de números racionales en diferentes representaciones, por un lado, una fracción y por otro un número decimal. Para este momento los estudiantes ya fueron enfrentados a un ítem similar. En este caso se espera que los estudiantes al darle solución usen componentes del SN como: utilizar composición y descomposición de los números, una forma sería separar al entero tres de la parte fraccionaria; y el de usar múltiples representaciones de los números y las operaciones, en este caso se podría representar a al número decimal como fracción o viceversa, para que de esta forma se tenga un mismo tipo de número y se pueda operar. O bien hacer una combinación de ambos componentes.

Este ítem es uno de tres, con menos éxito en toda la prueba, contestado por sólo 3 de los 9 estudiantes de manera correcta. Hecho que se repitió en el primer grupo al que aplicó. En este ítem, la totalidad de estudiantes de ambos grupos requirieron hacer uso del apoyo visual.

Dentro de las tres respuestas correctas clasificadas en SN, se puede observar que los estudiantes hicieron uso de múltiples representaciones de los números al transitar del número decimal a la fracción y viceversa. (**Cuadro 22)**

E1: pues más que nada bueno vemos que no se suman digamos 2 fracciones entonces tuve que hacer la conversión de 3.75 a fracción que más que nada, este 3.75 es 3 enteros $\frac{4}{4}$ bueno no ¾ porque 75 es como digamos 25 +25+25 da 100 entonces son 3 x 25 da 75 y luego me di cuenta que eran 3 enteros ¾ y ya 3 enteros ¾ le sume ¼ (84-87)

E6: amm lo que quise especificar es que en teoría un cuarto en esas fracciones podría ser igual a 25 bueno 25 milésimas 0.25 para así decir y ya sumado le simplifiqué quitando el cuarto, dándole entender cómo 0.25 y sumándolo a 3.75 dan el 4 (725-727)

E7: primero convertí ¼ a punto decimal que sería .25 y ya al .75 le sume el punto 25 y serían los 4 enteros, 4 cerrados (826-827)

Cuadro 22. Explicaciones de respuestas correctas de los estudiantes.

Hasta el momento, este ítem es el que tiene un mayor número de estudiantes que no dieron una respuesta. Al ser cinco de los nueve estudiantes al hacerlo. Dentro de las entrevistas realizadas los estudiantes explicaron que su dificultad está en la realización de las conversiones. Por otra parte, la respuesta clasificada en OT el estudiante (E8), para dar su respuesta sumó la parte entera del número decimal con el denominador de la fracción. Lo que este hecho se puede asumir como una carencia muy acentuada en la comprensión del significado de los números. (**Cuadro 23)**

E3: pues que no supe, bueno en qué fracción podía convertirlo (363)

E4: mm sinceramente no hice nada, una operación como tal simplemente no pude (501)

E5: mmm bueno más o menos se me dificulta lo de sumar la fracción con decimal, el ¼ (612)

E8: se me dificulta si es sumar o restar, digo sumar al cuatro, 3.75 o sumarle al 1 y poner 4.75 (968)

Cuadro 23. Explicaciones de estudiantes que no respondieron el ítem 8.

Para ambos casos, tanto para los estudiantes que no dieron respuesta como para el estudiante que dio una respuesta incorrecta, con base en las respuestas dadas como por las características propias del ítem, *se puede concluir que existen dificultades en la comprensión de componentes como: utilizar la composición y descomposición de los números; y usar múltiples representaciones de los números y las operaciones*.

4.2.9 Ítem 9

¿Qué fracciones siguen en esta serie: 1/2, 3/2, 9/2, _____, _____?

Este ítem es único por sus características dentro de la prueba. Se trata de una sucesión geométrica Se espera que puedan identificar el patrón de la serie para poder así dar los dos términos faltantes, para esto se necesita que los estudiantes tengan el desarrollo de subcomponentes del SN como: comparar y ordenar números; emplear propiedades de las operaciones aritméticas (conmutatividad-asociatividad-distributividad); y valorar lo razonable de un resultado. Así mismo de componentes como la composición y descomposición de los números.

Y al igual que el reactivo tres, este es otro ítem que causó mayor dificultad al ser un reactivo con menos respuestas correctas, al ser un solo alumno que lo contestó con éxito. Aquí la totalidad de estudiantes de ambos grupos necesitaron el apoyo visual para dar respuesta, incluso aquel que lo resolvió correctamente.

La respuesta correcta cae dentro de la clasificación de SN, el estudiante utilizó la comparación de las cantidades involucradas; composición y descomposición de números para poder realizar las multiplicaciones necesarias de una forma más fácil y al mismo tiempo el uso de la propiedad distributiva. (**Cuadro 24)**

E1: es que más que nada me dijo un medio, tres medios y nueve medios, pero como me pongo nervioso ehh no las pude digamos contener bien en mi mente entonces lo que hice fue verlas para poder ver que o porque se multiplicaban para poder seguir la sucesión vi que 3 x 1 era 3, 3x 3 eran 9 y entonces así seguía la sucesión lo que iba a multiplicar 9 x 3 igual a 27 y luego 27 x 3 igual a 81 y ya así supe cómo iba la sucesión (90-94)

Cuadro 24. Explicación del estudiante que dio la respuesta correcta.

Las respuestas incorrectas, tres están dentro de la clasificación de BR; cuatro en OT y una en SR. En todos los casos se puede asumir que las dificultades que se tuvieron para poder dar la respuesta correcta es la carencia de subcomponentes del SN tales como: *comparar y ordenar números; emplear propiedades aritméticas (conmutatividad-asociatividad-distributividad); y valorar lo razonable de un resultado. Así mismo de componentes como la composición y descomposición de los números.*

Se puede notar con base en sus explicaciones mediante la entrevista semiestructurada, que una de las dificultades más acentuada fue el no poder llevar a cabo un producto de dos factores, es decir manifiestan una dificultad más acentuada en el componente de composición y descomposición de los números y el uso de la propiedad distributiva puesto que si estos componentes del SN los tuvieran desarrollados hubieran estado en la posibilidad de dar respuesta a este ítem. (**Cuadro 25)**

E2. Según yo esté lo que se tenía que hacer era multiplicar 3 este ósea era todo multiplicado por 3 por ejemplo 3 x 1 daba 3 que era lo que según yo era $\frac{3}{2}$y luego 3 x 3 que era 9 que daba $\frac{9}{2}$ y ya después multipliqué 9 x 3 que era $\frac{27}{2}$ pero este, ya al momento de multiplicar 27 x 3 fue lo que me costó trabajo la multiplicación (247-250)
E3: se me dificultó porque pues lo que yo pienso que era una sucesión de multiplicando por 3 y se me dificultó así multiplicar el 9 x 3 (370-371) (P: ¿Y luego?) eso me dificulto 27 x 3 (375)
E7: porque pensaba que primero se eran al doble y no, en realidad era al triple entonces 9x3 eran $\frac{27}{2}$ pero ahí se me dificultó el 27 porque tuve ahí como una dificultad para multiplicar 27 x 3 y se me olvida la cantidad (829-831)

Cuadro 25. Respuestas de estudiantes.

Sin embargo, intentaron llevar a cabo el algoritmo de la multiplicación mentalmente, pero no tuvieron éxito.

4.2.10 Ítem 10

Tengo dos ángulos, uno de 89° y otro de 42°, ¿cuánto tendría que medir un tercer ángulo para que su suma sea 180°?

Este es el último ítem de la prueba e implica dos operaciones para su solución. Por un lado, una suma y por otro una resta. Para llevar a cabo este reactivo se espera que los estudiantes puedan hacer uso de componentes del SN como: composición y descomposición de los números, por ejemplo, al descomponer la cantidad de 89 lo pueden hacer en (80 +9) o bien en (90-1) y la cantidad de 42 en (40 +2) o en cualquier otra que les pudiera facilitar el cálculo a los estudiantes, para después llevar a cabo la resta de 180 menos 131 que también lo pueden hacer a través de la composición y descomposición de los números.

Este ítem fue contestado de manera exitosa por cuatro de los nueve participantes. De los cuales ninguno hizo uso del apoyo visual, mientras que el resto de los estudiantes que respondieron sin éxito sí requirieron del apoyo visual. Esta pregunta tuvo un éxito muy similar en el primer grupo de aplicación, siendo respondido por tres de los nueve estudiantes de manera correcta.

Dentro de las cuatro respuestas correctas que están en la clasificación de SN los estudiantes hicieron uso de la composición y descomposición de los números para llevar a cabo las operaciones de una manera más conveniente para ellos. (**Cuadro 26)**

E2: 89 y 42 primero multiplique, no, sumé los 80 más los 40 ya después este 80, 90, 100, fueron dan 120 y ya después esos, a esos 120 les sumé los 9 y eran 129 y ya después le sumé los otros dos que era 131, entonces si eran 131 pues yo encontré un número que al sumarlo me diera 180 el cual fue 49 (268-271) E3: primero los al 89 lo convertí en 90 y así ya luego le sume 42 y ya al resultado le reste 1 y ya (386-387) E7: le sumé al 80, le sumé los 40 que daban 120 y luego 9 + 2 eran 11 y entonces 120 + 11 eran 131, nada más ese valor restarle los 180 (841-842)

Cuadro 26. Respuestas correctas de estudiantes.

Mientras que, para las otras dos respuestas erróneas, que también caen en la misma clasificación de SN, se puede suponer que el componente de composición y descomposición de los números, está presente en los estudiantes sin embargo, no lo suficientemente consolidado para poder llevar a cabo con éxito todo el proceso. (**Cuadro 27)**

E1: bueno primero sumé 80 + 40 dándome 120 más 9 + 2 me daba 131 y ese fue, bueno, fue el resultado de la suma y luego a 131 le quité bueno, a 180 le quite 131 y bueno, 80 le quite 31 dándome el resultado de 59 no digo 49, 49 y ya luego le sumé el 100 (106-108) E5: mm 9 más 2 son 11 y 8 más 4 son 12 y 1 son 13 daba 130 tenías que buscar de 130 para 180 ese resultado para que te diera el 180 (640-641)

Cuadro 27. Explicación de respuestas incorrectas de estudiantes.

Aunque el E1, cuando explica el proceso que llevó a cabo para darle solución a este ítem, lo hace de manera correcta, esta respuesta ya no fue considerada debido a que en la aplicación de la prueba su respuesta fue 29° lo que es errónea.

El resto de respuestas erróneas caen en las otras clasificaciones, uno en OT y dos más en SR. El caso del estudiante E4 está en la clasificación OT no da elementos suficientes para conocer qué realizó en su proceso de solución. Mientras que los estudiantes que su respuesta está en la clasificación SR, durante la entrevista semiestructurada explicaron que su dificultad estuvo en la palabra ángulos ya que no saben cómo medirlos u operarlos. Para ambos casos se puede deducir que no tienen desarrollado el componente de composición y descomposición de los números, así como también una carencia en la comprensión de las relaciones existentes entre los números. (**Cuadro 28)**

E4: mm sumé el número mayor que era el 89 más el 42 y el resultado que me dio fue 121 y traté de como que ese resultado traté de que este sumarlo con un número que se relacionara para que pudiera dar el número que da 180 y bueno que me diera y no se pasará y en este caso fue 69 (523-525) E8: se me dificulta los ángulos, sumarlos o medirlos (985) E9: ok pues es que, por ejemplo, en los ángulos no tengo esa bueno tampoco sé las cómo le puedo decir, o sea, no me sé los ángulos pues ni sumarlos ni restarlos porque pues se me complican (1110-1111)

Cuadro 28. Explicación de estudiantes.

Resulta conveniente poder rescatar que, de acuerdo con los resultados anteriores, en varias ocasiones se pudo observar que componentes del SN como la composición y descomposición de números está presente en los estudiantes e intentan llevarlo a cabo sin embargo no pueden culminar con éxito. Así mismo se pudo observar que en más de una ocasión ya en la entrevista estructurada los estudiantes dieron la respuesta correcta explicando su procedimiento utilizando exitosamente este componente. Además, es uno de los más utilizados por los estudiantes al intentar resolver la prueba aplicada.

En cuanto al nivel alcanzado por los estudiantes tomando como referencia la prueba SisAT seis de los nueve estudiantes ratificaron el nivel que ostentaban en las ocho aplicaciones precedentes, cabe recordar que la prueba SisAT es aplicada tres veces por ciclo escolar, y para cuando se les aplicó esta prueba ya llevaban dos aplicaciones en este ciclo escolar. Mientras que tres de los estudiantes, cambiaron de nivel, de los cuales dos de ellos alcanzaron un nivel inferior al que tenían y por su parte un estudiante subió de nivel. Estos hechos pudieran asumirse como que los estudiantes respondieron esta prueba con compromiso y responsabilidad independientemente que no conocían a la investigadora y que sabían que sus resultados no serían tomados en cuenta para sus evaluaciones parciales. Por otro lado, los estudiantes que lograron un nivel inferior en casi toda la prueba se les notó demasiado nerviosos e inseguros e incluso en la entrevista semiestructura externaron que por causa del nerviosismo y por tratarse de operaciones mentales no podían dar repuesta pero que si fueran a lápiz y papel sin problema podrían resolverlo, lo que hace pensar que tienen buen manejo de los algoritmos, pero no tienen desarrollado en buena medida el SN.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

5.1 Introducción

En este capítulo se presentan los principales hallazgos de la presente investigación. Primeramente, se lleva a cabo la discusión de los resultados, realizando una comparación con los principales resultados aquí obtenidos y los de algunas investigaciones contempladas en la revisión de la literatura, así como también con algunos referentes teóricos considerados en el presente trabajo. Posteriormente, se da respuesta a las preguntas de investigación plasmadas en el capítulo 1, considerando los principales sucesos identificados. En tercer lugar, se reconocen los alcances, las limitaciones y algunas posibles líneas de investigación que podrían abordarse tomando como base este trabajo. Por último, se concluye este capítulo con algunas reflexiones finales.

5.2 Discusión de los resultados

El cálculo mental ha sido una actividad que se ha evaluado en México en educación básica desde el año 2013 y que también se ha incluido en los planes y programas del año 2017 como un propósito en educación secundaria, García (2014) menciona que existen insuficiencias significativas en la comprensión, el uso y manejo de los números en educación básica. Cabe recordar que para efectos de esta investigación se consideró el CM como parte del SN. Como resultados finales de esta investigación y con base en la forma de evaluarlos, se obtuvo que cinco de los nueve estudiantes a los que se les aplicó el test están en el nivel de requiere apoyo, es decir, que no cuentan con elementos suficientes para llevar a cabo actividades de CM, esto a su vez podría considerarse que el desarrollo del SN de estos estudiantes es deficiente.

En la literatura se identificó que al realizar preguntas de cálculo mental, la presentación visual de los ítems (mostrar el ítem produjo resultados más altos en estudios similares al realizado), como el de Reys et al (1995), sin embargo en esta investigación se obtuvieron resultados opuestos, en ítems como el tres, ocho y nueve a pesar de mostrar el apoyo visual en la totalidad de los estudiantes fueron ítems con menor número de respuestas correctas, aunque el apoyo visual en pocas ocasiones resultó de beneficio para que los estudiantes pudieran dar el resultado correcto se puede concluir que no fue de manera significativa.

Por otro lado, dos estudiantes en dos ocasiones distintas, fuera de la aplicación de la prueba, es decir, en la entrevista semiestructurada al explicar el proceso que llevaron a cabo para responder un ítem determinado el cual habían respondido de manera errónea, dieron la respuesta correcta, este hecho lo podemos entender en dos sentidos, por un lado que el tiempo que tuvieron para dar la respuesta influye en los resultados, cabe recordar que para cada ítem se tuvo un aproximado de 20 segundos, en otros estudios similares como el de Reys et al. (1995) mencionan que sus pruebas pilotos demostraron que 20 segundos eran suficientes para que casi todos los estudiantes llevarán a cabo los procesos mentales para dar respuesta, sin embargo, este hecho da elementos para suponer que si el tiempo hubiera sido mayor, estos estudiantes hubieran estado en posibilidades de responder acertadamente desde el principio. Y, por otro lado, este hecho se puede entender cómo, que el nivel del SN que poseen estos estudiantes está en proceso de desarrollo.

Otro punto importante a resaltar es que hubo un mayor número de reactivos que fueron respondidos con base en los componentes del SN ya sea de manera correcta o incorrecta esto en comparación únicamente con los reactivos que fueron respondidos basados en algoritmos, este hallazgo se podría explicar al considerar que estos estudiantes tienen dentro de su bagaje de conocimientos matemáticos componentes del SN que aplicaron en situaciones de CM, que en una minoría se podrían valorar que están consolidados y en otros que el SN es deficiente o nulo. En este orden de ideas, estos resultados son opuestos a los obtenidos en investigaciones como la de Almeida et al (2014) que mencionan que los estudiantes prefieren el uso de procedimientos estándares de cálculo en actividades que podrían resolverse a través del SN. Por otro lado, también resulta interesante rescatar que se está en posición de asumir que estos estudiantes comprenden que los algoritmos no son la única forma de dar respuesta a operaciones aritméticas mentales. Sin embargo, si se considera únicamente las respuestas incorrectas en la clasificación de SN y las comparamos con las de las clasificaciones de OT y SR estas están muy por debajo, es decir que hubo mayoría de estudiantes que no pudieron dar respuesta a la pregunta o bien no dieron elementos para conocer lo que realizaron para responder. Este hecho ayuda a reafirmar lo antes mencionado que el SN de estos estudiantes es deficiente o nulo. Dentro de los componentes que los estudiantes hicieron uso de manera exitosa está el de utilizar la composición y descomposición de los números.

Esta investigación reafirma lo que investigadores como García (2014) señalan, de que si la enseñanza aritmética que reciben los estudiantes es algorítmica carece de sentido y los estudiantes tendrán déficit significativo en el manejo de los números y sus operaciones. En este sentido la investigación de Almeida et al. (2014) exhorta a la reflexión sobre la enseñanza aritmética que reciben los estudiantes en la educación obligatoria. Por su parte, Pourdavood et al (2020) señalan la importancia de que los estudiantes tengan oportunidades de trabajar las habilidades y estrategias relacionadas al CM.

5.3 Respuesta a las preguntas de investigación

Respecto a la primera pregunta, ¿cuáles son las dificultades que presentan estudiantes de secundaria al resolver problemas de cálculo mental?, con base en las evidencias obtenidas derivadas del capítulo 4, la respuesta que se puede dar está en torno a los componentes del SN, siendo los siguientes con los que los estudiantes se vieron mayormente conflictuados en la realización de la prueba esto con base en dos situaciones; una en el análisis de la naturaleza de cada pregunta y la otra en los procedimientos realizados de manera errónea (algunas evidencias empíricas que sustentan esta afirmación están en los siguientes renglones de transcripciones: 247, 375, 640, 641, 829, 985, 1110, 1111, etc.)

a) Comprender el efecto relativo de las operaciones
b) Utilizar la composición y descomposición de los números
c) Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números
d) Usar múltiples representaciones de los números y las operaciones

Mientras que, para la segunda pregunta, ¿cómo se clasifican las dificultades que presentan los estudiantes de secundaria al resolver problemas de cálculo mental? con base en los resultados obtenidos se podría definir dos clasificaciones:

1.- Carencias del SN. A pesar de ser una habilidad que se diagnostica tres veces por año. Por otro lado, se presume que esto pudiera ser originado porque los estudiantes están habituados al trabajo con lápiz y papel y al uso de algunas herramientas tecnológicas.

2.- Rezago educativo. Esto debido a los tres casos de estudiantes que han obtenido el nivel de requiere apoyo, es decir muestran insuficiencia en sus resultados en la totalidad de las aplicaciones que hasta el momento de la prueba tenían, esto es un total de ocho aplicaciones. De este modo se puede suponer que la instrucción aritmética recibida por estos estudiantes no les ha permitido tener un avance relevante en la construcción de aprendizajes matemáticos requeridos para resolver preguntas de CM, en este punto, es importante enfatizar la importancia que tiene el construir aprendizajes, en este caso matemáticos, a partir de los elementos con los que cuenta cada estudiante, es decir, de sus saberes previos, para que de esta forma se construyan aprendizajes significativos que les permitan a los estudiantes hacer uso de ellos y a su vez generar nuevos aprendizajes. Entre mayor sea la producción de asociaciones entre los conocimientos previos y los nuevos conocimientos, el aprendizaje será más significativo y con mayor durabilidad al ser parte de una estructura mental y de la memoria a largo plazo (Ausubel, 1980)

Otro punto considerado de interés, es la importancia que los estudiantes tengan un espacio en el aula para la socialización de estrategias utilizadas, ya que esto puede permitir que estudiantes con deficiencias matemáticas o no, conozcan y pongan en práctica otras estrategias usadas por sus pares e incluso por el docente. En este sentido, García (2014) menciona que las confrontaciones o puestas en común que se proponen hacer a posteriori de que los estudiantes resuelvan un problema, es un atributo del enfoque de resolución de problemas que fomenta el desarrollo del SN. En esta línea de ideas, trabajar en el desarrollo del SN puede repercutir en las habilidades que el estudiante desarrolle para la resolución de problemas, y viceversa, trabajando en la solución de problemas se beneficia en el desarrollo del SN. Por su parte, Parra (1994) menciona que la capacidad gradual de resolución de problemas requiere de un progresivo dominio de recursos de cálculo.

Por su parte la investigadora a través del planteamiento del capítulo dos, está convencida de que la resolución de problemas como perspectiva didáctica permite crear y fortalecer aprendizajes matemáticos. Y que trabajar de esta manera en el aula pudiera coadyuvar en el esfuerzo de abatir el rezago educativo.

5.4 Alcances, limitaciones y propuestas a futuro

Por la naturaleza de esta investigación los resultados no pueden ser generalizados a grandes escalas, sin embargo, permite que profesionales de educación en el ámbito matemático tengan un panorama acerca de las dificultades a las que se enfrentan estudiantes del nivel educativo en el que se llevó a cabo el presente trabajo cuando son enfrentados a situaciones de CM. Y esto a su vez da pautas e ideas, acerca de elementos indispensables para trabajar en el aula que permitan a los estudiantes tener un desarrollo del SN consolidado.

Una posible línea de investigación que pudiera derivarse de los resultados aquí obtenidos es la sugerencia de diseñar y aplicar estrategias para trabajar en el aula que permitan abatir las dificultades aquí encontradas, es decir, que permitan el fortalecimiento del desarrollo del SN a través de actividades que permitan: la comprensión de la organización del sistema de numeración decimal y las diferentes relaciones existentes entre los números; el reconocimiento y estimación del valor absoluto y relativo de los números; fortalecer la composición y descomposición de los números; representar a los números de maneras diversas de acuerdo al contexto que se esté abordando; identificar el efecto de una operación así como el uso de propiedades aritméticas como la conmutatividad, la asociatividad y la distributividad.

Por otro lado, otra posible línea es llevar a cabo pruebas similares en los otros dos grados de secundaria para encontrar similitudes o diferencias en las dificultades encontradas si es que existieran, debido a la diferencia del grado escolar. Así como también se sugiere trabajar con más estudiantes para que los resultados aporten más datos y los hallazgos sean más robustos.

En este sentido, un aporte de esta investigación, es el análisis detallado que se llevó a cabo de las dificultades encontradas respecto a los componentes del SN propuestos por Almeida et al. (2014), así como también aquellos componentes que hicieron uso los estudiantes de manera correcta.

Por otro lado, una limitante que se tuvo fue el diseño de las preguntas en la entrevista semiestructurada ya que no permitieron del todo saber el proceso que algunos estudiantes llevaron a cabo para dar solución a cada ítem y al mismo tiempo que ellos pudieran expresar con detalle y exactitud sus dificultades presentadas y cuando estos daban una respuesta en ese momento la investigadora lo consideró suficiente sin embargo al momento del análisis esto no fue así. Aunque este suceso no fue con la totalidad de los estudiantes ya que para una minoría les resultó sencillo y cómodo explicar los procesos que llevaron a cabo e identificaron y explicitaron las situaciones que les causaron conflicto.

Aunado a lo anterior otra limitante que se encontró en la realización de este trabajo de investigación fue la propia edad de los estudiantes, si bien las preguntas de la entrevista semiestructurada en algunos casos no permitieron rescatar en su totalidad información relevante, los estudiantes carecen de elementos que les permitan identificar y expresar sus ideas con claridad.

5.5 Reflexiones finales

La aplicación de la prueba permitió a los estudiantes poner en práctica el sentido que le dan a los números y las operaciones realizando los cálculos de forma flexible y en diversas ocasiones fuera de los algoritmos convencionales. Además, que se trató de una prueba que no conocían y la investigadora fue totalmente ajena a ellos, lo que con base en los resultados obtenidos permite concluir que en su totalidad los estudiantes tomaron con responsabilidad y compromiso la realización de esta actividad.

Por otro lado, este trabajo permitió conocer a la investigadora los procesos que llevan a cabo los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones de CM y tener un panorama sobre lo que se puede trabajar en el aula de manera transversal como lo sugieren algunas investigaciones (Almeida et al 2014; García 2014), para abatir la ausencia del desarrollo del SN y coadyuvar en el abatimiento del rezago educativo.

En otro sentido, resulta relevante citar la importancia que tiene el generar espacios en el aula para que los estudiantes puedan poner en práctica sus habilidades de comunicación sobre los procesos que llevan a cabo en la solución de problemas matemáticos y que a través de la práctica estas se vayan fortaleciendo.

En otra línea de ideas, es significativo mencionar la trascendencia que tiene el docente de matemáticas en el aula. En relación a lo anterior, Álvarez (2006) como producto de su investigación concluye que las matemáticas se siguen trabajando de forma rutinaria dominada por reglas con numerosos ejercicios alejados de la realidad. Por su parte, Rodríguez (2010) hace mención que una de las cualidades del quehacer docente gira en torno a despertar anhelo y gozo por aprender en el estudiante, así mismo señala la necesidad por parte de los docentes para adquirir nuevas estrategias que le permitan afrontar y abatir la predisposición que tienen los estudiantes ante el estudio de las matemáticas. En resumen, para la investigadora le resulta de suma importancia generar conciencia y actuar en consecuencia, sobre el papel que tiene en el aula para que los estudiantes puedan generar aprendizajes matemáticos significativos.

REFERENCIAS

Almeida, R., Bruno, A., Perdomo-Díaz, J. (2014). Estrategias de sentido numérico en estudiantes del Grado en Matemáticas. Enseñanza de las Ciencias, 32 (2), 9-34.

Álvarez, Y. (2006). ¡Auxilio. No Puedo Con la Matemática! Revista Iberoamericana de Educación Matemática Equisangulo, 2 (1), 4-16.

Arce-Sánchez et al. (2019). Ideas generales sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (pp. 27-47). España: editorial Síntesis, S, A.

Arias, M. (2000). La triangulación metodológica: sus principios, alcances y limitaciones. *Investigación y Educación en Enfermería*, XVIII (1), 13-26.

Ausubel, D. (1980). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Trillas.

Barrera-Mora, F., Reyes-Rodríguez, A., Mendoza-Hernández, J. (2018). Estrategias de cálculo mental para sumas y restas desarrolladas por estudiantes de secundaria. Educación Matemática, 30(3), 122-150.

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense. Journal of Learning Disabilities, 38(4), 333–339.

Berticelli, D y Zancan, S. (2021). Cálculo mental para profesores. *Revista de enseñanza de las ciencias y las matemáticas*,12 (4),1-21.

Blöte, A., Klein, A., Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and instruction*, 10(3), 221-247.

Cervantes, D. (2017). La construcción del marco teórico en la investigación científica. Investigación en Ciencias Militares. Claves Metodológicas, 55-71.

Cortés-Flores, J., Backhoff-Escudero, E., Organista-Sandoval, J. (2004). Estrategias de cálculo mental utilizadas por estudiantes del nivel secundaria de Baja California. Educación Matemática, 16(1), 149-168.

Cuevas, R., Feliciano, A., Miranda, A., y Catalán, A. (2015). Corrientes teóricas sobre aprendizaje combinado en la educación. Revista Iberoamericana de Ciencias, 2(1), 2334-2501.

Creswell, J. (2009). Research design. Sage

Daros, W. R., (2002). ¿Qué es un marco teórico? *Enfoques*, XIV (1), 73-112.

De Marinis, S (2008). Cálculo mental con números naturales para docente. Material Auxiliar para la Enseñanza. 1a ed. Buenos Aires: Ministerio de Educación.

DFE (2010). Teaching children to calculate mentally. U.K: Department for Education.

Diaz, M., Llivisaca, M., Ortiz, G. (2024). Estrategia metodológica para mejorar las habilidades de cálculo mental en estudiantes de sexto grado. *Sinergia académica*, 7 (4), 255-276.

Eisenhart, M. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991: ideas from a cultural anthropologist; implications for mathematics education researchers. En R. G. Underhill (Ed.), Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 201-220.

Gálvez G, Cosmelli D, Cubillos L, Leger P, Mena A, Tanter E, Flores X, Luci G, Montoya S, y Soto-Andrade J. (2011). Estrategias cognitivas para el cálculo mental. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 14 (1), 9-40.

García, S. (2014). *Sentido numérico. Materiales para Apoyar la Práctica Educativa. México:* INEE.

Gómez, B. (1989). Cap.3. Cálculo mental. Cálculo pensado. Numeración y cálculo. (65-102). Madrid, España. Ed. Síntesis.

Gómez-Rosales, M., Mireles-Medina, A (2019). Cálculo mental como estrategia para el aprendizaje de los contenidos matemáticos en la educación primaria. Revista de Ciencias de la Educación, 3(10), 8-19.

Halmos, P.R. (1980). El corazón de las matemáticas. The American Mathematical Monthly, 87 (7), 519-524.

Heirdsfield, A. (2002). Mental methods moving along. *APMC*, 7(1), 4–8.

Hernández, S., et al. (1994). Definición del tipo de investigación a realizar: básicamente exploratoria, descriptiva, correlacional o explicativa. Metodología de la investigación. México. Mc Graw Hill.

Hofer, B.K., y Pintrich, P.R. (1997). The development of epistemological theories: Beliefs about knowledge and knowing and their relation to learning. Review of Educational Research, 67(1), 88-140.

Jiménez, J. (2010). Las tablas de cálculo: un método para trabajar el cálculo mental. Sigma: Revista de Matemáticas, 11-21.

Lembre, E.S., Hampton, D. and Beyers, S.J. (2012). Response to intervention in mathematics: Critical elements, Psychology in the Schools, 49 (3), 257-272.

Lemonidis, C. (2016). Mental computation and estimation: Implications for mathematics, education research, teaching and learning. Oxon: Routledge.

Lester, J.F. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. ZDM Mathematics Education, 37 (6), 457-461.

Maghfirah, M. y Mahmudi, A. (2018). Number sense: the result of mathematical experience. Journal of Physics, 1097.

McIntosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. For the Learning of Mathematics, 12(3), 2-8.

Mendizábal, N. (2018). La osadía en la investigación: el uso de los Métodos Mixtos en las ciencias sociales. Espacio abierto, 27(2), 5-20.

Mochón, S. Vázquez-Román, J. (1995). Cálculo mental y estimación: Métodos, resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza. Educación Matemática, 7(3), 93-105.

Mon-Kyaw, A., Naing-Thein, N (2018) A study of the relationship between the number sense and problem solving skills in mathematics of middle school students. *J. Myanmar acd. ciencias de las artes*, XVI (9A), 435-464.

NCTM. (1989). Curriculum and evaluation standards. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (2024). Definition of problem solving. NCTM

OCDE (2016), Panorama de la educación 2016: Indicadores de la OCDE, Publicaciones de la OCDE.

Ortega, T y Ortiz, M. (2006). Jerarquía holística de las dificultades asociadas a las estrategias aditivas de cálculo mental. *Enseñanza de las ciencias*, 24 (1), 99-110.

Osana, H y Kindrat, A. (2021). Examining the impact of a mental computation classroom intervention on the relational thinking of seventh-grade students. *Journal of mathematics education*, 14 (1), 47-70.

Parra, C. (1994). Cálculo mental en la escuela primaria. En C. Parra y I. Saiz (comps.), Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones. Buenos Aires: Ed. Paidos.

Pérez, C., González, I., Aravena, M., Cerda, G. (2023). Estudio exploratorio sobre la efectividad del método abierto basado en números (ABN) en las habilidades de cálculo mental en educación primaria. *Perfiles educativos*, 45 (180), 54-70.

Pourdavood, R., McCarthy, K., McCafferty, T (2020). The Impact of Mental Computation on Children’s Mathematical Communication, Problem Solving, Reasoning, and Algebraic Thinking. Athens Journal of Education, 7(3), 241-254.

RAE. (2014). Diccionario de la lengua española. (23ª ed.). Real Academia Española. Consultado en https://dle.rae.es/matem%C3%A1tico

Reys, R., Reys, B., Nohda, N., Emori, H. (1995). Mental Computation Performance and Strategy Use of Japanese Students in Grades 2, 4, 6, and 8. Journal for Research in Mathematics Education, 26 (4), 304-326.

Riccomini, P.J. (2005). Identification and remediation of systematic error patterns in subtraction, Learning Disability Quarterly, 28 (3), 233-242.

Rodríguez, M. E., (2010). El perfil del docente de matemática: visión desde la tríada matemática-cotidianidad y pedagogía integral. Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación", 10(3), 1-19.

Rodríguez-Quintero, T y Juárez-López, J. (2019). Estrategias de cálculo mental empleadas por una alumna de segundo grado de primaria: El caso de Luisa, Números, 102, 67-81.

Rojas, R. (2012). Construcción del marco teórico y conceptual. En P y V (Eds.), Métodos para la investigación social. Una proposición dialéctica (18. ed).

Ruiz, C y Balbi, A (2018). The effects of teaching mental calculation in the development of mathematical abilities, The Journal of Educational Research, 2-12.

Sánchez-Lujan, B (2017). Aprender y enseñar matemáticas: desafío de la educación. IE revista de investigación educativa de la Rediech, 8(15), 7-10.

Santa Cruz, F., Obando, E., Reyes, G., Rodríguez, S. (2022). Investigación cualitativa: una mirada a su validación desde la perspectiva de los métodos de triangulación. *Revista de Filosofía*, 39 (101), 59 – 72.

Santos-Trigo, L. M. (2014). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. Editorial Trillas.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. En A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem Solving* (pp.53-70). Routledge.

SEMAR, Universidad Naval (s/f) [Metodología de la investigación] En: https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/133491/METODOLOGIA_DE_INVESTIGACION.pdf

Sengül, S (2013). Identification of Number Sense Strategies used by Pre-service Elementary Teachers. Educational Sciences: Theory & Practice, 13(3), 1965-1974.

SEP (2017). Plan y programas de estudio de educación básica. Educación básica. México: Secretaría de educación pública.

SEP (s/f). Orientaciones para el establecimiento del sistema de alerta temprana en escuelas de educación básica. Secretaria de Educación Pública. Consultado el 20 de febrero de 2024. https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/263956/Manual_Orientaciones_SisAT.pdf

SEP (2018). Manual exploración de habilidades básicas en lectura, producción de textos escritos y calculo mental. Herramienta para la escuela. Educación secundaria. Secretaria de Educación Pública. Consultado el 20 de febrero de 2024. https://www.educacionbc.edu.mx/materialdeapoyo/public/site/pdf/educacionbasica/secundaria/documentosgenerales2/Manualdeexploraciondehabilidadesbasicas.pdf

Stake, R. (1999). Investigación con estudio de casos. España. Ediciones Morata.

Stauffer, S., Solares, D. Broitman C. (2020). Cálculo estimativo: un estudio con alumnos de 5to año de primaria. Educación Matemática, 32(2), 151-171.

Steen, L. A. (1988). The Science of Patterns. Science, 240(4852), 611-616.

Strauss, A. y Corbin, J. (2002). Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada. Editorial Universidad de Antioquia. Colombia.

Valencia, E. (2013). Desarrollo del cálculo mental a partir de entrenamiento en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo. *Números,* 84, 5-23.

Watson, S., Lopes, J., Oliveira, C., Judge, S. (2018). Error patterns in Portuguese students' addition and subtraction calculation tasks: Implications for teaching, Journal for Multicultural Education, 12 (1), 67-82.

APÉNDICE A. [PRUEBA DE CM]

De la presente prueba, en su totalidad, se presentó tal cual a los estudiantes.

Ítem	componente del SN	Tipo de pregunta	Bloque temático
1. 800 más 409	1,3,4	CD	I
2. 220 menos 60	1,4	CD	I
3. 31 por 400	1,3	CD	I
4. 5 por 12 entre 2	6	CD	I
5. 10 al cuadrado menos 9	6	CD	IV
6. ¿Cuánto es $9x^2$ más $12x^2$?	5	INT	V
7. Dos enteros menos 1/5	4,5	CD	III
8. 3.75 más ¼	4,5	CD	III
9. ¿Qué fracciones siguen en esta serie: 1/2, 3/2, 9/2,_____,_____?	2,5,7	COM	VII
10. Tengo dos ángulos, uno de 89° y otro de 42°, ¿cuánto tendría que medir un tercer ángulo para que su suma sea 180°?	5,7	COM	VI

APÉNDICE B. [HOJA DE RESPUESTAS]

	Preguntas										Total de aciertos por alumno	Nivel obtenido
ALUMNO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
A												
B												
C												
D												
E												
F												
G												
H												
I												
Total de aciertos por pregunta												

APÉNDICE C. [GUÍA DE OBSERVACIÓN]

GUÍA DE OBSERVACIÓN

Alumno: ____

Durante la aplicación de la prueba	siempre	A veces	Nunca	Observaciones
El estudiante muestra interés por la actividad				
El estudiante regularmente responde en el tiempo previsto				
Durante la entrevista	siempre	A veces	Nunca	Observaciones
El estudiante expresa con claridad los procesos mentales que llevó a cabo				
El estudiante requirió de lápiz y papel para expresar sus procesos				

APÉNDICE D. [ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA]

Alumno: __________

1.- ¿Qué realizaste para poder responder la pregunta ____?

2.- ¿Qué se te dificultó?

3.- ¿Por qué requeriste de apoyo visual en la pregunta ____?

4.- ¿Qué pregunta te causó mayor dificultad?

5.- ¿Qué pregunta no se te complicó?

APÉNDICE E. [PERMISO DE AUTORIZACIÓN]

Tulancingo de Bravo, Hidalgo a ___ de ______ de 202 _.

ESTIMADOS PADRES DE FAMILIA
DE LA ESCUELA SECUNDARIA ________________
PRESENTES.

La que suscribe Profesora. Yesica Liliana Islas Arias, adscrita a esta Escuela Secundaria Técnica ________________ con C.C.T. _____________; titular de la asignatura de matemáticas II y III, les informa que está cursando la maestría en ciencias en matemáticas y su didáctica y que, como parte de la realización de su tesis, requiere hacer un proyecto de investigación en el que debe grabar en video algunas actividades que realizará con sus hijos.

Por este motivo se dirige a ustedes con el propósito de requerir su autorización y, para tal efecto se les solicita respetuosamente llenar y devolver el día __________ el talón que aparece al final del presente aviso.

Es importante mencionar que estos videos se utilizarán exclusivamente para fines de investigación y serán revisados únicamente por la profesora y los directores de tesis de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, respetando íntegramente la identidad de sus hijos, asignándoles un seudónimo.

Sin más por el momento, quedo de ustedes.

Profa. Yesica Liliana Islas Arias

____

Titular de matemáticas.

Vo.Bo. Vo.Bo.

_____________________________ _____________________________

Ing. _____________________ Mtro. ________________________
Coordinador de actividades académicas. Director del plantel.

Autorizo a mi hijo (a) ____ del tercer grado, grupo: ____, para que participe en el proyecto de investigación de la Profesora Yesica Liliana Islas Arias.

Nombre del Padre: _____________________________________

Firma: ______________

800 + 409

220 - 60

31×400

$5 \times 12 \div 2$

$$10^2 - 9$$

$$9x^2 + 12\ x^2$$

$$2 - \frac{1}{5}$$

$$3.75 + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \_\_\_, \_\_\_ \ldots$$

Se tienen dos ángulos, uno de 89° y otro de 42°, ¿cuánto tendría que medir un tercer ángulo para que la suma de los tres sea 180°?

APÉNDICE G. [TRANSCRIPCIONES DE VIDEOGRABACIONES]

Atendiendo a las políticas de la UAEH en relación con el cuidado del medio ambiente se dispuso de una liga de drive donde se colocaron las transcripciones de dichas videograbaciones.

https://drive.google.com/file/d/1HyreXl4xWdZVoHiGyKohCECOHG4qS7_J/view?usp=sharing