UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE HIDALGO

ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

TAREAS CON PATRONES QUE PROMUEVEN EL ENTENDIMIENTO DE LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

PRESENTA

Javier Triana Bernal

Director

Dr. Fernando Barrera Mora

Codirector

Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez

Comité tutorial

Dr. Carlos Arturo Soto Campos
Dr. Marcos Campos Nava
Dr. Fernando Barrera Mora
Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez

Mineral de la Reforma, Hgo., México., marzo 2025

Oficio de autorización de impresión

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
School of Engineering and Basic Sciences
Área Académica de Matemáticas y Física
Department of Physics and Mathematics

Mineral de la Reforma, Hgo., a 27 de marzo de 2025

Número de control: ICBI-AAMyF/279/2025
Asunto: Autorización de impresión de tesis.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

El Comité Tutorial de la tesis titulada **"Tareas con patrones que promueven el entendimiento de la propiedad distributiva en estudiantes de bachillerato"**, realizada por el sustentante Javier Triana Bernal, con número de cuenta 168549, perteneciente a la **Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica**, una vez que ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el Artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente:

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

El Comité Tutorial

Dr. José Félix Fernando Barrera Mora
Director

Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez
Codirector

Dr. Carlos Arturo Soto Campos
Miembro del comité

Dr. Marcos Campos Nava
Miembro del comité

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P. 42184
Teléfono: 52 (771) 71 720 00 Ext. 40124, 40119
aamyf_icbi@uaeh.edu.mx, ravila@uaeh.edu.mx

Agradecimientos

✝ A mi hijo ✝ :

A la memoria de Rodrigo de Jesús, que siempre permanecerá en nuestros corazones.

A mi esposa:

Nereida, por motivarme durante el arduo tiempo de estudio y elaboración de la tesis.

A mis directores de tesis:

Los doctores Fernando Barrera Mora y Aarón Víctor Reyes Rodríguez, mi reconocimiento, admiración, agradecimiento y respeto por su paciencia y guía en el descubrimiento y entendimiento de esta parte del conocimiento matemático.

A mis revisores:

Agradezco a los revisores de mi trabajo, Dr. Marcos Campos Nava y Dr. Carlos Arturo Soto Campos, por las observaciones que realizaron, las cuales me ayudaron a precisar las ideas y mejorar el trabajo.

A mis estudiantes:

Que día a día me incentivan a buscar ser un mejor profesor.

Resumen

Se analiza el impacto de tareas de instrucción, basadas en la identificación y generalización de patrones, sobre el entendimiento de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, en estudiantes de segundo semestre de un bachillerato público en el estado de Hidalgo, México. Las tareas se diseñaron con base en el marco de resolución de problemas y el concepto de entendimiento en términos de conexiones, propuesto por Hiebert y colaboradores. Se diseñaron e implementaron seis tareas de instrucción, basadas en la identificación y generalización de patrones en secuencias figurales. Los participantes fueron cuatro estudiantes voluntarios, quienes trabajaron durante tres sesiones de dos horas cada una. Las fuentes de información fueron las producciones escritas de los estudiantes, así como grabaciones de video de las sesiones, las cuales posteriormente se transcribieron. El análisis del trabajo de los estudiantes se llevó a cabo considerando la caracterización de pensamiento algebraico propuesta por Luis Radford. El proceso de análisis incluyó la identificación de lo que es variable e invariante al analizar secuencias figurales, las cuales fueron las situaciones problemáticas en cada una de las tareas. Los resultados incluyen una descripción de aspectos tales como la identificación de regularidades en las secuencias; así como las formas de expresar la generalidad de forma verbal y simbólica.

.

Abstract

This study examines the impact of pattern identification and generalization tasks on tenth-grade students’ understanding of the distributive property. The participants were students from a public high school in Hidalgo, Mexico. Grounded in Hiebert and colleagues' framework of understanding as making connections, six instructional tasks involving figural sequences were designed and implemented. The study involved four volunteer students who participated in three two-hour sessions. Data were collected through students’ written work and video recordings of the sessions, which were later transcribed. The analysis followed Luis Radford’s characterization of algebraic thinking, focusing on identifying variable and invariant elements in the figural sequences presented in each task. Key findings highlight students’ processes in recognizing regularities within sequences and their strategies for expressing generality—both verbally and symbolically. The results contribute to understanding how pattern-based tasks can support the development of algebraic reasoning, particularly regarding the distributive property.

Contenido **Página**

1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Introducción

El entendimiento del lenguaje algebraico es básico para la aplicación de las matemáticas y la modelación de diversos fenómenos tanto naturales como sociales (Eccius-Wellmann, 2012). El álgebra es una de las principales ramas de la matemática, y tiene relación con muchas otras áreas de la disciplina. El álgebra se orienta al estudio de estructuras abstractas, a la representación de patrones numéricos y la realización de operaciones aritméticas generales, mediante representaciones simbólicas. Es un área del saber que tiene aplicaciones en la propia matemática, en la ciencia, y otras áreas del conocimiento tales como administración, finanzas, epidemiología, demografía, entre otras (Eccius-Wellmann 2012). Lo anterior da pauta para que el álgebra sea considerada como una herramienta básica para abordar y comprender una amplia diversidad de problemáticas.

Uno de los principales retos que enfrentan los docentes que imparten álgebra, en secundaria y bachillerato, se refiere a las dificultades que muestran los estudiantes para operar con símbolos que representan cantidades indeterminadas (Eccius-Wellmann, 2012); principalmente para factorizar y simplificar expresiones simbólicas. Las habilidades anteriores son la base para la solución de ecuaciones y el desarrollo de otros procedimientos matemáticos, de modo que constituye un conocimiento procedimental fundamental (Schueler-Meyer, 2016).

La propiedad distributiva del producto sobre la suma (en lo subsecuente abreviada como PD) es la base de los procesos de expansión y factorización de expresiones algebraicas, y por ello es un conocimiento básico para el aprendizaje de matemáticas más avanzadas, incluyendo el cálculo o el álgebra lineal (Ding y Li, 2010; Mok, 2010). A pesar de la relevancia de la PD en el aprendizaje matemático, la investigación recién se ha interesado en este concepto y, por ello, se desconoce cómo introducir efectiva y sistemáticamente tales ideas en primaria y secundaria. Particularmente, se desconoce con precisión cómo se genera este conocimiento en el contexto aritmético y aún no se sabe cómo transferirlos al contexto algebraico (Ding y Li, 2010).

Se considera que las dificultades relacionadas con el entendimiento de la propiedad distributiva pueden deberse a que no es una propiedad referida a una operación, sino que es una propiedad que relaciona dos operaciones, el producto y la suma (Maffia y Mariotti, 2017). Las dificultades de entendimiento de la propiedad distributiva no se restringen a los estudiantes ya que, incluso, futuros profesores de matemáticas de primaria muestran dificultades para aplicar la PD. Un error frecuente que cometen los profesores en formación consiste en realizar transformaciones del estilo 18×26=10×20+8×6 (Lo et al., 2008), lo cual es falso.

Algunas propuestas instruccionales han intentado abordar la problemática del entendimiento de la PD mediante la integración e interrelación de representaciones algebraicas y geométricas (Figura 1), o a través del uso de estrategias mnemotécnicas (Figura 2). Una de tales estrategias consiste en utilizar modelos de área y conectarlos con las correspondientes expresiones simbólicas, donde se resalta la relevancia de conectar áreas de figuras geométricas y el concepto de multiplicación como ruta para el desarrollo de un pensamiento algebraico (CCSSI, 2010; Kinzer y Stanford, 2014).

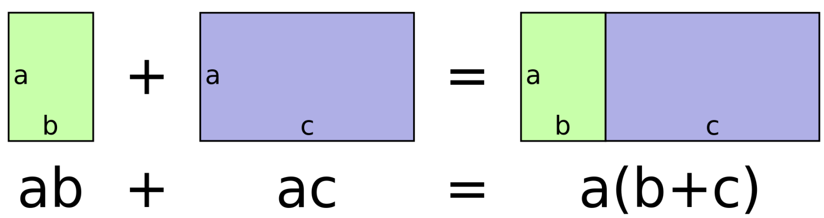


Figura 1. Integración de representaciones algebraicas y geométricas.

Fuente: Wikipedia (https://es.wikipedia.org/wiki/Distributividad)

Figura 2. Estrategias mnemotécnicas para recordar la propiedad distributiva

Fuente: YouTube (https://www.youtube.com/watch?v=WzW4vki-UuE)

1.2. Revisión de la Literatura

En esta sección se lleva a cabo una revisión de artículos de investigación que abordan el desarrollo del pensamiento algebraico. Particularmente, se destacan los estudios orientados al entendimiento de la PD, con la finalidad de identificar las principales preguntas de investigación, las aproximaciones teóricas y metodológicas; así como los resultados más relevantes y, de esta forma, enmarcar la problemática de este trabajo en el cuerpo de conocimientos científicos existentes sobre el tema.

Vermeulen et al. (1996) llevaron a cabo un estudio con la finalidad de comparar el papel de la PD cuando los estudiantes realizan cálculos aritméticos y cuando realizan operaciones algebraicas. Los autores proponen un modelo que describe cinco niveles de entendimiento. El nivel 1 se refiere a la utilización espontánea de la PD, el nivel 2 el estudiante reconoce la propiedad, en el nivel 3 la utiliza intencionalmente, en el nivel 4 se generaliza la propiedad y en el nivel 5 se explica la propiedad. En el artículo se describe un experimento de enseñanza, con estudiantes de sexto y séptimo grado, orientado a facilitar un incremento en el nivel de comprensión de la PD. Se diseñaron actividades de aprendizaje que incluyen: (a) problemas concretos, (b) problemas descontextualizados, (c) equivalencia de expresiones numéricas, (d) tareas que involucran la aplicación intencional de la PD. La investigación incluyó un diseño experimental con pre-test y pos-test. Los resultados indican que los participantes experimentaron un incremento sustancial en su nivel de comprensión de la propiedad distributiva, lo cual es indicativo del éxito de la estrategia de enseñanza.

Mok (2010) elaboró una investigación cuyo objetivo fue comprender la falta de apreciación de la estructura algebraica subyacente en la PD en estudiantes de secundaria. El diseño de la investigación fue transversal. La información se recolectó mediante entrevistas basadas en tareas. Participaron 203 estudiantes de una escuela en Hong Kong, de los cuales se entrevistó a 33. Las entrevistas se realizaron cuando los estudiantes abordaron seis tareas basadas en errores comunes que se cometen al aplicar la propiedad distributiva. Las entrevistas se grabaron y posteriormente se transcribieron. Los datos se analizaron mediante una aproximación de teoría fundamentada (grounded theory) y la taxonomía SOLO. La investigación obtuvo evidencia de que algunos estudiantes realizaron progresos en el entendimiento y aplicación de la PD, pero otros no pudieron dar sentido a los símbolos y a las operaciones algebraicas, limitando su pensamiento a la aplicación de reglas.

Ding y Li (2010) llevaron a cabo un estudio con la finalidad de examinar cómo se presenta la PD en libros de texto de primaria de Estados Unidos, en comparación con libros de texto chinos. El análisis se llevó a cabo con base en tres dimensiones: (a) contexto de los problemas (cálculos, problemas de palabras u otro), (b) problemas típicos dentro de cada contexto (problemas de un paso o múltiples pasos) y (c) variabilidad en el uso de la PD (tipo de números y dirección de la propiedad distributiva). Se identificó que los textos estadounidenses son muy similares entre sí, pero difieren considerablemente de los textos chinos. Los libros americanos se enfocan en los cálculos y ejemplifican diversas estrategias que limitan el uso de la PD al dominio de los números enteros y al proceso de expansión de expresiones simbólicas. Por otra parte, los textos chinos se enfocan en los principios algebraicos subyacentes y están alineados con sugerencias derivadas de la investigación cognitiva. Los textos chinos incluyen problemas de palabras que requieren múltiples pasos, en los que subyace una estructura particular que se aborda de manera sistemática y jerárquica a través de los diferentes grados, involucrando diversos tipos de números (enteros, decimales, fracciones y porcentajes). En los problemas de los libros chinos se favorece la aplicación de la PD en ambas direcciones (expandir y factorizar).

Ding y Li (2014) realizaron un estudio para examinar cómo se aborda la PD en libros chinos de primaria y explorar cómo pueden organizarse las representaciones en el currículo, de tal forma que se favorezca una transición del conocimiento concreto al conocimiento abstracto. Se identificaron 319 ítems que involucran la PD. La transición entre representaciones se analizó a partir de tres niveles: (a) dentro de un ejercicio resuelto, (b) de un ejercicio resuelto a un ejercicio propuesto dentro de un tópico, y (c) a través de múltiples tópicos en los diferentes grados. Cuatro son las características que facilitan la transición concreto-abstracto: (i) situar el aprendizaje inicial en un problema de palabras, el cual sirve como punto inicial del proceso de transición; (ii) establecer el desarrollo de representaciones abstractas como objetivo del proceso de transición multiniveles; (iii) incorporar variaciones en los problemas con conexiones en tareas cuidadosamente diseñadas, y (iv) promover que consistentemente los estudiantes den sentido al proceso de transición mediante diversos apoyos pedagógicos.

Denham (2015) analizó cómo ciertos juegos digitales pueden apoyar el entendimiento de la propiedad asociativa y distributiva al abordar actividades de multiplicación. En la investigación se considera que los juegos digitales fortalecen el aprendizaje a partir de los altos niveles de involucramiento y motivación de los jugadores. Se llevó a cabo un estudio experimental en el que participaron 111 estudiantes de tercer y cuarto grado, inscritos en escuelas públicas de los Estados Unidos. En primer lugar, los estudiantes completaron una evaluación para determinar su nivel de entendimiento de la propiedad asociativa y distributiva. Se diseñaron tres versiones de un juego digital para determinar cuál de ellas tiene mayor impacto sobre el entendimiento conceptual de las propiedades antes mencionadas. Las versiones del juego se clasificaron en intrínsecas y extrínsecas. En una versión intrínseca hay una relación integral y continua entre el contexto de fantasía y el contenido instruccional; mientras que en las versiones extrínsecas la fantasía depende de las habilidades que se están aprendiendo, pero no recíprocamente. Posteriormente, cada participante se asignó aleatoriamente a uno de los siguientes grupos, intrínseco, extrínseco y control. Los participantes jugaron durante 50 minutos cada versión del juego y fueron evaluados después de jugar. Las actividades se llevaron a cabo en un laboratorio de cómputo. Los datos se analizaron mediante un análisis de varianza de una vía. Se identificó que los estudiantes que jugaron la versión intrínseca del juego tuvieron mejor desempeño en el postest, en comparación con los que jugaron la versión extrínseca.

Hackenberg y Lee (2016), llevaron a cabo un estudio para entender la relación entre el razonamiento cuantitativo con fracciones y el razonamiento algebraico que involucra a la PD, al cual denominaron *razonamiento distributivo*. El fundamento teórico del estudio incluye los conceptos de *operación y esquema de partición distributiva* (Steffe y Olive, 2010). Los participantes en la investigación fueron 18 estudiantes de secundaria y bachillerato: siete estudiantes de grado siete, diez estudiantes de grado ocho y un estudiante de grado 10. La selección de los participantes se llevó a cabo después de realizar observaciones en clase, consultar a los profesores de los estudiantes y realizar una entrevista de selección. Se organizaron tres grupos, cada uno con seis estudiantes. Cada grupo abordó un concepto multiplicativo diferente. Los estudiantes participaron en dos entrevistas semiestructuradas (una sobre fracciones y una sobre álgebra), con una duración de 45 minutos cada una, y completaron una prueba escrita sobre fracciones. El tiempo entre la realización de cada entrevista fue de tres o cuatro semanas. Las entrevistas se grabaron en video. Se reporta la forma en que 12 estudiantes operaron con el segundo y tercer concepto multiplicativo, demostrando un razonamiento distributivo en problemas que involucran reparto equitativo y al operar con expresiones que incluyen cocientes de expresiones algebraicas.

Schueler-Meyer (2016) realizó una investigación cuya finalidad fue determinar si estudiantes de octavo grado desarrollan flexibilidad para aplicar la PD; es decir, capacidad para transferir su conocimiento sobre la PD al operar con expresiones algebraicas no familiares, después de revisar ejemplos resueltos. El marco teórico incluye el concepto de *flexibilidad en profundidad* (flexibility in-depth), la cual se define como la habilidad para aplicar una estrategia a un amplio rango de expresiones simbólicas no familiares. Otro elemento del marco conceptual es el supuesto de que el uso de estrategias es una actividad interpretativa. La investigación se basó en un diseño de experimentos con cuatro grupos de estudiantes, quienes fueron seleccionados después de la aplicación de un pre-test. Los estudiantes que mostraron un sólido conocimiento de la sintaxis (paréntesis, signos, jerarquía de operaciones) y la semántica (significado de las variables) algebraica participaron en una intervención didáctica con una duración de 90 minutos, en la que abordaron tres tareas y, posteriormente, fueron entrevistados. Las entrevistas y las sesiones de intervención se grabaron en video y se transcribieron las grabaciones. Los datos se analizaron cualitativamente a través del método de análisis de contenido, mediante códigos descriptivos e inductivos. La unidad de análisis fueron segmentos de las transcripciones en los cuales los estudiantes interpretaron o transformaron una expresión o negociaron transformaciones de expresiones algebraicas. Los resultados sugieren que la flexibilidad en profundidad está relacionada con las formas en las cuales los estudiantes perciben alguna estructura en las expresiones algebraicas. Los estudiantes que lograron transferir la propiedad distributiva también fueron capaces de percibir propiedades o estructuras en una forma cualitativamente diferente del resto de los participantes.

Maffia y Mariotti (2017) investigaron cómo el desarrollo del sentido de estructura puede apoyar el entendimiento de la PD. El marco conceptual de la investigación se basa en el concepto de *sentido de estructura en aritmética*, el cual se describe mediante un conjunto de seis competencias. El trabajo es parte de una investigación más amplia, cuyo diseño incluyó experimentos longitudinales de enseñanza con estudiantes de segundo grado. Se diseñaron e implementaron actividades con el objetivo de que los estudiantes interpretaran a la PD como una transformación sobre expresiones numéricas, a partir de modelos de área para la multiplicación. Los datos se obtuvieron mediante entrevistas realizadas un año después de los experimentos de enseñanza, es decir se entrevistó a un estudiante de tercer grado de primaria. Las entrevistas se grabaron en video y se transcribieron. El estudiante mostró todas las competencias que caracterizan en sentido de estructura en aritmética pero para evaluar la corrección de una igualdad adoptó una manipulación sintáctica de operaciones que no es matemáticamente consistente: una expresión como $a\times b+a\times c$ se transformó en $(a+a)\times(b+c)$.

Olteanu (2017) llevó a cabo un estudio en el cual se reporta cómo el uso de tareas directas e inversas permite a los estudiantes discernir la estructura de la PD, la cual se puede utilizar para expandir o factorizar expresiones algebraicas. Se diseñó una investigación longitudinal, la cual se llevó a cabo en Suecia. Se implementó una secuencia didáctica en un curso de álgebra, con una duración de 40 minutos, con estudiantes de octavo grado. Dos profesores de matemáticas diseñaron e implementaron una lección basada en la teoría de la variación (Marton, 2015). Uno de los docentes implementó la tarea en su salón de clases, mientras el otro docente grabó en video la sesión de trabajo. La lección se enfocó en el uso de tareas inversas como un medio para complementar las interpretaciones de la PD. El entendimiento de los estudiantes se evaluó mediante la formulación de preguntas. Los resultados sugieren que el uso de tareas directas e inversas apoyó el entendimiento de la estructura de la PD. Así, se determinó que los maestros pueden favorecer el desarrollo de nuevos conocimientos y mejorar la comunicación en el salón de clases a través de los procesos de transformación y variación. También se identificaron diversas dificultades de los estudiantes para aplicar la PD para factorizar expresiones algebraicas.

Ardiansari y Wahyudin (2020), llevaron a cabo un estudio para determinar cómo el entendimiento de la PD puede utilizarse para que los estudiantes puedan darse cuenta de que una ecuación indica una equivalencia entre expresiones algebraicas. El marco teórico de la investigación se basó en la taxonomía SOLO. Participaron 53 estudiantes indonesios de secundaria (12-15 años), los cuales respondieron a un cuestionario, integrado por cinco afirmaciones respecto de la PD, una pregunta de verdadero o falso, y tres preguntas de opción múltiple. Los resultados indican que el entendimiento de los estudiantes respecto de la PD se puede agrupar en tres niveles: (1) preestructural, (2) una combinación del uniestructural y multiestructural y (3) una combinación del nivel relacional y abstracto expandido. Se indicó que incluso los estudiantes quienes mostraron proficiencia al utilizar la PD en el contexto numérico tuvieron dificultad para aplicarla al realizar operaciones algebraicas, debido a una falta de comprensión del signo igual, como un signo de equivalencia.

Chen y Cai (2020) elaboraron un estudio para determinar cómo un maestro de matemáticas experimentado aprende a enseñar la PD a estudiantes de cuarto grado, usando formulación de problemas (problem posing). En la investigación participó un profesor graduado de una escuela normal en China, con una experiencia profesional de 20 años. En 2005 el participante fue reconocido con la más alta distinción para los docentes de su país. El docente implementó dos lecciones sobre el tema, una de ellas usando la formulación de problemas como estrategia didáctica. Las fuentes de información fueron tres: (i) transcripciones de las grabaciones en video correspondientes a las dos lecciones; (ii) comunicaciones electrónicas que sostuvieron el investigador y el docente durante un periodo de tres meses, durante sus intentos para rediseñar la lección basada en formulación de problemas; y (iii) entrevista al docente, después de que implementó la lección basada en formulación de problemas. En primer lugar, se analizaron las diferencias entre las dos lecciones, resaltando las ventajas de enseñar mediante la formulación de problemas; así como los retos enfrentados por el docente durante el proceso de diseñar e implementar la lección; así como las estrategias utilizadas para enfrentarlos. Se destaca la relevancia de las interacciones entre el contexto, práctica de enseñanza y acompañamiento de un investigador para el proceso de formación docente.

A continuación se presenta una tabla donde se concentra la información de mayor relevancia obtenida a partir de la revisión de la literatura, la cual es de utilidad para enmarcar la temática de la tesis dentro del cuerpo de conocimientos existentes sobre el tema.

Tabla 1. Concentrado de literatura sobre el entendimiento de la propiedad distributiva.

Autores	Pregunta de investigación	Marco teórico/ conceptual	Metodología	Resultados
Vermeulen et al. (1996)	Comparar el papel de la PD al realizar cálculos aritméticos vs. operaciones algebraicas.	Cinco niveles de entendimiento de la PD.	Experimento de enseñanza (grado 6 y 7). Diseño experimental pre-test y post-test.	Los participantes incrementaron su nivel de entendimiento de la PD.
Mok (2010)	¿Cómo los estudiantes dan sentido a la PD?	La SOLO Taxonomy (Structure of Observed Learning Outcomes)	203 estudiantes de secundaria. Examen diagnóstico de matemáticas de Chelsea para álgebra.	Los estudiantes reconocen la PD en forma simbólica y su precisión en la mejora gradual de su aplicación.
Ding - Li (2010)	Análisis comparativo de la PD en libros de matemáticas de primaria de U.S. y China.	Espaciar el aprendizaje en el tiempo, utilizar ejemplos resueltos, conectar representaciones concretas y abstractas.	Libros Chinos (JSEP) y de EUA (HM). Análisis de contenido fue usado para cifrar y analizar los materiales curriculares.	Los libros de EUA se asemejan. Los libros Chinos son cualitativamente diferentes, incluyendo contextos y variabilidad del uso de PD.
Denham (2015)	¿Efecto del juego endógeno en el entendimiento conceptual de la PD? ¿Cuáles son las actitudes hacía el juego en ambientes de aprendizaje?	Entendimiento conceptual de las PA y PD a través de juegos digitales.	54 hombres y 45 mujeres de cuarto y quinto grado de escuela primaria pública. Evaluación de entendimiento conceptual de la PD	No hubo diferencias significativas entre las condiciones endógenas, exógenas y control. La versión endógena promovió una ganancia en el entendimiento conceptual.
Schueler-Meyer (2015)	¿Cómo los estudiantes aplican flexiblemente y con profundidad la PD?	Concepto de flexibilidad en profundidad.	Experimento analizado cualitativamente. Análisis de contenido. Ocho participantes de octavo grado en 4 grupos.	La habilidad de los estudiantes para transferir la PD se refleja en sus habilidades para reconstruir la PD dentro de las expresiones.
Olteanu (2017)	¿Cómo el uso de tareas directas e inversas dan a los estudiantes, oportunidad de discernir la estructura de PD en la factorización expresiones algebraicas?	Teoría de la variación.	Metodología basada en la investigación de diseño educacional. Estudio de aprendizaje. Tres años, 22 docentes desde preescolar hasta 8vo grado.	Uso de tareas directas e inversas dan a los estudiantes entendimiento de PD para aplicar a la factorización expresiones algebraicas.
Hackenberg - Lee (2016)	¿Cómo los estudiantes demuestran su razonamiento distributivo, en problemas con fracciones? ¿Qué diferencias hay en el RD de los estudiantes?	Razonamiento distributivo.	18 estudiantes de escuela secundaria y media. Entrevista clínica.	Doce estudiantes operaron con el segundo y tercer concepto multiplicativo demostrado en RD igual en problemas de división y fracciones desconocidas.
Maffia-Mariotti (2017)	¿Cuáles dificultades enfrentan los estudiantes cuando introducen el pensamiento estructurado?	El sentido estructural en aritmética.	Un grupo de segundo grado. Investigación enseñanza-aprendizaje de las propiedades de la multiplicación en escuela primaria. Diseño experimental con	Fomentar el pensamiento estructural requiere el desarrollo de garantizar el control semántico de que alguna transformación sintáctica tiene una consistente interpretación aritmética.

			experimentos de enseñanza a largo plazo.	
Ardiansari-Wahyudin (2019)	Comprensión de PD para facilitar conocimiento de cada ecuación que puede reemplazarse por una ecuación equivalente.	Taxonomía SOLO	Cuestionario a 53 estudiantes de secundaria indonesios. 45% hombres. Diseño de investigación descriptiva y tipo de cruce de medición seccional.	El Entendimiento de la PD para estudiantes se agrupa en tres niveles: (1) preestructural, (2) uniestructural y multiestructural y (3) relacional y abstracto expandido.
Chen-Cai (2020)	¿Qué instrucción usa en el acercamiento en el planteamiento de problemas y cómo ésta es diferente de la instrucción que no usa este acercamiento? ¿Qué desafíos encontró el docente mientras aprendía a enseñar y cómo los superó?	Planteamiento o formulación de problemas (problem posing).	Análisis cualitativo. Dos lecciones que involucran el mismo tema, la PD. Cuarto grado.	Interpreta y discute los desafíos del docente en transformar su acercamiento instruccional y cómo intenta superar estos desafíos así como el conocimiento ganado en el diseño de la lección usando planteamiento de problemas.

Fuente: elaboración propia

1.3. Planteamiento del problema

Con base en la revisión de la literatura, se identificó que las investigaciones en torno al entendimiento de la PD son diversas, destacando que los estudiantes no logran avances en el entendimiento de la propiedad. Una línea de investigación relevante se enfoca en el entendimiento conceptual de la PD (Ardiansari y Wahyudin, 2020; Maffia y Mariotti, 2017); principalmente en lo que se refiere al desarrollo de sentido estructural en álgebra (Mok, 2010). Otra línea de investigación está centrada en el nivel de flexibilidad que muestran los estudiantes al aplicar la propiedad distributiva (Schueler-Meyer, 2016).

Por otro lado, hay interés en comparar la forma en que se aborda la propiedad distributiva en libros de texto usados en diferentes países, principalmente de EU y China (Ding y Li, 2010; 2014). También se han llevado a cabo experimentos de enseñanza (Vermeulen et al., 1996), incluyendo el uso de juegos de video (Denham, 2015), con la finalidad de identificar su impacto en el desarrollo de entendimiento de la PD. Entre los principales resultados se destaca la identificación de diferentes niveles de entendimiento de la PD. Además, se reconoce la relevancia de tareas directas e inversas en el proceso de desarrollo de entendimiento (Oltenau, 2017); así como el éxito de algunas propuestas de enseñanza, las cuales aportan evidencia de mejora en el entendimiento de la PD (Vermeulen et al., 1996).

En la literatura revisada se identificó una falta de propuestas para dar sentido a la propiedad distributiva a partir del uso de tareas basadas en la identificación y generalización de patrones, actividades que constituyen elementos centrales del pensamiento matemático. Así, la pregunta de investigación de este trabajo es: ¿Cómo el uso de tareas sobre identificación y generalización de patrones en secuencias figurales apoya el entendimiento de la propiedad distributiva en estudiantes de segundo semestre de bachillerato? La importancia de la pregunta radica en documentar alternativas instruccionales para promover el entendimiento de la propiedad distributiva, incluyendo el diseño e implementación de tareas basadas en la identificación y generalización de patrones, ya que esto no ha sido reportado en la literatura de investigación que se revisó.

2. MARCO DE INVESTIGACIÓN

2.1 Introducción

Un marco de investigación es una estructura básica de ideas, principios, acuerdos o reglas que proporcionan las bases y lineamientos para orientar el proceso de investigación (Lester, 2005). Un marco conceptual está compuesto por elementos básicos: teóricos, conceptuales y conocimiento empírico (Ander-Egg, 2011). Lo anterior sugiere establecer un bosquejo de ideas relacionadas con el objeto de estudio para explicar la conceptualización, aprendizaje e instrucción de las matemáticas. Al describir y explicar los elementos que integran el marco sobre el cual se fundamenta esta tesis, el lector podrá comprender la razón de las acciones o decisiones del autor durante el proceso de investigación.

2.2 Tipos de marcos de investigación

Eisenhart (1991) y Lester (2005) proponen tres tipos de marcos de investigación: (a) teóricos, (b) prácticos y (c) conceptuales. Estos marcos son utilizados para realizar investigación por sociólogos, antropólogos, etnógrafos e investigadores en educación matemática. Usar un marco teórico requiere que el investigador siga al pie de la letra los principios y lineamientos de una teoría formal; como la Epistemología Genética de Piaget, la Teoría Sociocultural de Vigotsky, la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau, o la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard. Este tipo de marco limita la actividad del investigador, ya que debe alinearse estrictamente con los supuestos y metodologías indicados por la teoría.

Un marco práctico toma como base los conocimientos y experiencias profesionales de un investigador, este tipo de marco tiene limitaciones referidas a que el contexto de la investigación es local y difícilmente generalizable. Por otra parte, un marco conceptual es un conjunto de conceptos y relaciones entre estos conceptos que son útiles para comprender un fenómeno.

2.3. Elementos que integran el marco conceptual

El marco conceptual de este trabajo está integrado por dos elementos, el primero orientado al análisis de las tareas basado en un marco de resolución de problemas con tres dimensiones: ontológica, epistemológica y didáctica. El segundo de los elementos tiene la finalidad de apoyar el análisis de los datos y está integrado por los elementos básicos del pensamiento algebraico. Sus elementos se dirigen a objetos matemáticos como son incógnitas, variables y parámetros. También en ecuaciones para obtener las condiciones que satisfacen una solución; representar y resolver un problema. El pensamiento algebraico se fundamenta en la observación de la generalización, identificación y representación de patrones de manera simbólica.

2.3.1. Marco para el diseño e implementación de las tareas: resolución de problemas

En el marco de investigación es importante hacer explícito cómo se conceptualizan las matemáticas (ontología), qué es el conocimiento (epistemología), así como cuáles son los objetivos y fines del proceso de enseñanza-aprendizaje (didáctica). Todo lo anterior tiene la finalidad de que el lector de un reporte de investigación, una tesis o un artículo comprenda el porqué el investigador o grupo de investigación hace lo que hace y por qué se toman ciertas decisiones metodológicas durante la realización del proceso investigativo.

La ontología es una rama de la filosofía orientada al estudio del *ser* (Ortega y Fernandez, 2014). En la dimensión ontológica de este trabajo se toma una posición respecto a cómo se conceptualiza a las matemáticas. La pregunta acerca de qué son las matemáticas no tiene una respuesta única. En un extremo de la gama de posibles respuestas, las matemáticas se perciben como una disciplina estática con un sistema de reglas, hechos y fórmulas acabadas, desarrolladas de forma abstracta mediante razonamientos deductivos (Geisler y Rolka, 2020). Desde esta perspectiva el conocimiento matemático está constituido por hechos y procedimientos establecidos y el aprendizaje de la disciplina consiste en la memorización y aplicación de tales hechos y procedimientos. En el otro extremo, las matemáticas se conciben como un área de estudio en constante desarrollo y, por tanto, incompleta y falible (Hersh, 1986), caracterizada por su interés en la búsqueda de patrones sobre la base de evidencia empírica (Schoenfeld, 1992). Desde esta posición, aprender matemática consiste en desarrollar una forma de pensar que va más allá de la aplicación de reglas y procedimientos y se identifica con la formación de hábitos de pensamiento y actitudes que permiten examinar relaciones entre objetos matemáticos desde diversas perspectivas, plantear conjeturas, utilizar diversos sistemas de representación, establecer conexiones, utilizar diversos tipos de argumentos y comunicar resultados; es decir, poner en práctica los elementos esenciales del pensamiento matemático (Barrera et al, 2021; Santos-Trigo y Vargas, 2003).

Para el desarrollo de este trabajo se considera que las matemáticas son la *ciencia de los patrone*s (Steen, 1988) y que el conocimiento matemático cambia constantemente, con base en los nuevos descubrimientos que llevan a cabo los matemáticos profesionales. Por otra parte, consideramos que el aprendizaje de las matemáticas parte del descubrimiento de patrones, relaciones, invariantes, etcétera (Polya, 1963), proceso durante el cual se procede empíricamente en la exploración de relaciones entre objetos matemáticos; lo que hace que matemáticas sea una disciplina de ensayo y error, esto es porque las matemáticas son principalmente abstractas y la teoría matemática raramente se comprueba directamente en la práctica (Hirsch, 1996). Posteriormente esas relaciones se estructuran en un sistema que justifica sus resultados a partir de un conjunto de hechos o axiomas y postulados. Es importante hacer notar que algunos investigadores proponen que las matemáticas sean una disciplina experimental (Barrera et al., 2021). Un elemento importante en el aprendizaje, desde esta aproximación, es la adquisición y la práctica sistemática de una actitud inquisitiva, que consiste en conceptualizar el aprendizaje de las matemáticas en términos de la formulación constante de preguntas o dilemas que se analizan y discuten colectivamente, mediante la utilización de recursos matemáticos (Santos-Trigo, 2008).

Al adoptar la visión de las matemáticas como la ciencia de los patrones se acepta que los cambios cognitivos se favorecen cuando los estudiantes interactúan dentro de una comunidad de aprendizaje que valora la participación abierta de todos sus integrantes (Santos-Trigo, 2008). Además, las tareas de instrucción se orientan al desarrollo de procesos del pensamiento matemático (Santos-Trigo y Vargas, 2003), congruentes con el quehacer de la disciplina (uso de distintos sistemas de representación y de estrategias de resolución de problemas; búsqueda de patrones, formulación de conjeturas, uso de diversos tipos de razonamiento y prueba; comunicación de resultados, etcétera) .

La epistemología es la rama de la filosofía que trata con la diversidad, las bases y la validez del conocimiento, es decir, cómo se llega a conocer algo, y cuáles son los medios apropiados para validar el conocimiento (Brown, citado en Cunningham y Fitzgerald, 1996). En lo que respecta a esta dimensión, adoptamos una perspectiva socioconstructivista (Simon, 1993), por lo cual suponemos, por un lado, que cada persona construye, de forma activa, su propio conocimiento al enfrentar problemas que desequilibran sus estructuras cognitivas, independientemente del contexto o la presencia y naturaleza del proceso de enseñanza. Por otro lado, consideramos que el aprendizaje es un proceso continuo que se lleva a cabo en una comunidad de práctica, en donde se construyen significados o entendimientos considerados-como-compartidos (Cobb et al., 1992), ya que cada estudiante interpreta una experiencia y organiza cierto conjunto de ideas en términos de su propia estructura cognitiva, la cual está estructurada con base en las experiencias propias y, por ello, es diferente de la del resto de las personas. Debido a lo anterior, aprender es un proceso social, en donde el medio cultural y sus producciones, determinan las características del conocimiento que se construye (Wertsch, 1993). Así, las oportunidades para aprender, es decir, las situaciones que desequilibran las estructuras cognitivas, surgen de los intentos que llevan a cabo las personas para conciliar puntos de vista dentro de una comunidad de aprendizaje, al comunicar ideas matemáticas y al lograr consensos sobre el significado de las palabras (Jones, 2003).

En la dimensión epistemológica se adopta la teoría constructivista, caracterizada por considerar que el conocimiento es el producto de la interacción entre el sujeto y el objeto del conocimiento. En este contexto, mediante la acción sobre los objetos del conocimiento es que se modifican las estructuras cognitivas del individuo, generando así nuevo conocimiento. Por otra parte, el aspecto social se refiere al hecho de que la generación de conocimiento está mediada por diversas producciones culturales, tales como el lenguaje y los diferentes sistemas semióticos de representación. Además, el aprendizaje se lleva a cabo dentro de una comunidad de aprendizaje dentro de la que se constituyen significados *taken-as-shared* (considerados como compartidos).

La dimensión didáctica se refiere a las características del conocimiento que se consideran como deseables, y las condiciones que favorecen la adquisición de tales características. Al respecto, estamos interesados en que los estudiantes entiendan ideas matemáticas, lo cual implica la construcción de conexiones robustas entre un conocimiento nuevo y los recursos que se poseen, y que tienen lugar a partir de los procesos de reflexión y comunicación de ideas llevados a cabo durante la resolución de problemas (Hiebert et al. 1997). Además, argumentamos que entender una idea o concepto requiere necesariamente de usar esa idea o concepto para crear nuevas ideas o resolver problemas (Zull, 2002). La construcción de entendimiento o comprensión matemática requiere que los alumnos desarrollen sucesivamente ciclos de acción, observación, formulación de conjeturas y justificación de resultados (Barrera y Reyes, 2016; Zull, 2002). Cada ciclo básico para la construcción de entendimiento matemático (Figura 3) se robustece con la información y las relaciones de los anteriores.

Figura 3. Ciclo básico para el desarrollo de entendimiento matemático (Barrera y Reyes, citados en Téllez, 2020)

En la fase de acción, los estudiantes interactúan con los datos e identifican aquellos que son relevantes de los que no lo son; también representan la información, cuantifican atributos de algunos objetos o agregan elementos auxiliares para ampliar la información del planteamiento. Esta fase es importante porque el conocimiento tiene su origen en las experiencias físicas (ver, tocar, escuchar, etcétera) y en las imágenes mentales formadas a partir de estas experiencias (Zull, 2002). Sin referencia a eventos u objetos tangibles las ideas matemáticas no pueden tener un significado.

La acción no es suficiente para entender algo, es necesario llevar a cabo un proceso de reflexión. Por lo anterior, en la fase de observación resulta relevante identificar relaciones entre datos e incógnitas, así como patrones y regularidades. En la fase de acción, es donde el estudiante interactúa con los objetos matemáticos e identifica características importantes de estos. Además, representa la información de diferentes formas y le agrega atributos que le parecen importantes, es decir, representa la información. En la fase de observación, implica que se trabaje con la información que se obtuvo de interactuar con el objeto, es decir, el estudiante reflexiona y detecta si existen regularidades resultado de haber manipulado un objeto matemático, y si es posible detectar algún patrón. Pudiera interpretarse que estas etapas son en realidad una sola, sin embargo, no es posible obtener información y encontrar conjeturas si no se interactúa con el objeto.

Las fases de acción y de observación incluyen flechas en ambas direcciones (Figura 3), debido a que la identificación de relaciones y patrones puede requerir de regresar a interactuar con los objetos físicos, a partir de los cuales se ha abstraído cierta propiedad o relación matemática. En la fase de formulación de conjeturas, los estudiantes generalizan los resultados observados en la fase previa y formalizan sus observaciones en términos matemáticos. Finalmente, en la fase de justificación es importante comunicar al resto de los integrantes de la comunidad de práctica (el salón de clase), las razones de por qué cierta conjetura es cierta, expresando argumentos de diferentes tipos: visuales, empíricos y formales. Aunado a lo anterior, en esta última etapa del ciclo se extienden resultados o se formulan nuevas preguntas y problemas que conducirán a una nueva fase de acción.

Cuando el estudiante hace una abstracción, es porque ha identificado características esenciales del objeto de estudio, después de haber transitado por la etapa anterior, ha iniciado la etapa de formulación de conjeturas, las generalizaciones que produce se enuncian en términos matemáticos. Finalmente, en la etapa de justificación de resultados el estudiante argumenta sus resultados y los comunica a otros. El ciclo del entendimiento no necesariamente puede concluir en esta fase, es posible que al justificar resultados surjan nuevas preguntas que generen una nueva problemática. A través del diseño de un ambiente de instrucción orientado a la resolución de problemas, la implementación del ciclo de aprendizaje y la promoción del entendimiento, se podrá lograr el objetivo didáctico, el cual es, moldear las características del conocimiento mediante una tarea de instrucción y la actividad que el docente lleva a cabo para apoyar el aprendizaje de los estudiantes.

Tabla 2. Elementos del marco conceptual.

Dimensión	**Elementos teóricos**	**Uso en el diseño de tareas**
Ontológica	La matemática como ciencia de los patrones.	Identificar elementos variantes e invariantes en secuencias figurales. Aprendizaje basado en la resolución de problemas.
Epistemológica	Socio-constructivismo. El estudiante genera su propio conocimiento bajo la influencia de producciones culturales.	Trabajo colaborativo, efecto de las herramientas en las características del conocimiento que los estudiantes construyen.
Didáctica	Aprendizaje por descubrimiento, resolución de problemas e implementación del ciclo básico para aprender matemáticas con entendimiento.	A través de la observación, la experimentación con objetos matemáticos, la formulación de conjeturas, así como la justificación de resultados y la formulación de nuevos problemas, en caso de ser posible.

Fuente: elaboración propia

2.3.2. Marco para el análisis de los datos: elementos del pensamiento algebraico

Los componentes esenciales del pensamiento algebraico son tres: (i) capacidad para pensar en términos de cantidades indeterminadas como incógnitas, variables y parámetros (generalizar ideas matemáticas); (ii) capacidad para operar analíticamente con objetos que representan cantidades indeterminadas, lo cual significa que se trabaja con los símbolos como si se conociera la solución de un problema, con la finalidad de obtener las condiciones que debe satisfacer dicha solución, en caso de existir; y (iii) representar simbólicamente a las cantidades indeterminadas y resolver problemas utilizando tales representaciones (Radford, 2006, 2010, 2012). Es decir, que la habilidad de generalizar a partir de las observaciones sobre los números y operaciones es la base del pensamiento algebraico e identificación y representación de patrones de manera simbólica. A pesar de que la generalización es el eje central del pensamiento algebraico, los casos particulares suponen una primera instancia para comprender el comportamiento de los números y sus relaciones. El análisis de casos particulares puede permitir a los estudiantes identificar regularidades y generalizarlas.

El pensamiento algebraico supone una manera particular de pensar acerca de los objetos matemáticos y las relaciones entre ellos (Butto y Rojano, 2010). Es común, que en la educación escolarizada se inicie el aprendizaje del álgebra a partir de actividades de naturaleza algorítmica, donde se introduce simbología y reglas operacionales de las representaciones algebraicas, las cuales parecen distintas de aquellas que se aplican a los números. Es decir, se hace una distinción entre la aritmética y álgebra, lo cual provoca una separación artificial entre estas disciplinas, omitiendo el hecho de que en ambos casos se aplican las mismas reglas para operar con números específicos o números indeterminados representados por literales (Barrera y Reyes, 2016; Molina, 2009). En este sentido, el pensamiento algebraico constituye una forma particular de entender las matemáticas y de extender su conocimiento hacia la generalidad (Schoenfeld, 1992; Windsor, 2010). De acuerdo con el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos (NCTM, 2010) el pensamiento algebraico involucra identificar patrones y relaciones; así como el uso de funciones. Todas las ideas anteriores proporcionan la base para el desarrollo de habilidades que permitan a los estudiantes entender, analizar y describir fenómenos de su entorno.

Una amplia mayoría de los docentes de matemáticas y estudiantes en los niveles preuniversitarios sostienen una concepción en la que entender álgebra consiste en operar con variables o expresiones simbólicas. Un docente que sostiene esta concepción desconoce que este tipo de instrucción fomentará un estudio descontextualizado, abrupto, disfuncional, tardío, y superficial del álgebra escolar. Es por esto que se necesita entender que el desarrollo del pensamiento algebraico requiere tiempo para desarrollarse y sobre todo que se propongan tareas que fomenten la observación de las relaciones numéricas, justificar procedimientos, modelar problemas, describir patrones y representar simbólicamente la generalidad (Kaput, 2000).

2.4. Desarrollo de entendimiento de la propiedad distributiva

En los niveles básicos la propiedad distributiva se introduce mediante diversas representaciones y contextos sin mencionar el nombre de la propiedad (Mok, 2010). Un ejemplo de tales problemas es el siguiente: Hay ocho soldados de juguete en cada equipo del ejército A. Hay 14 soldados de juguete en cada equipo del ejército B. Hay tres equipos en cada ejército. ¿Cuántos soldados hay en total? (Yung et al., 2003, p. 21). En el texto se presenta una imagen que representa los datos del problema.

Posteriormente, la aplicación de la propiedad distributiva se resalta durante el estudio de la aritmética, por ejemplo, para llevar a cabo procedimientos alternativos para obtener el resultado de expresiones tales como $23 \times 15 + 23 \times 5$. Mediante la propiedad distributiva, la expresión anterior se transforma en $23 \times (15 + 5)$. Se considera que la exposición de los estudiantes a tales ejemplos les permitirá ser conscientes de la estructura superficial del orden de las operaciones, es decir, que los paréntesis tienen prioridad sobre las otras operaciones en la expresión y que la secuencia alternativa de cálculos conduce al mismo resultado numérico. En la escuela secundaria la propiedad distributiva se representa simbólicamente en términos de las identidades $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ y $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$. Para apoyar a que los estudiantes adquieran cierto grado de familiarización con la propiedad distributiva se les asignan varios ejercicios de práctica tales como (2x + 3) (x + 5). Sin embargo, puede ocurrir que los estudiantes apliquen correctamente la propiedad distributiva sin que realmente hayan desarrollado un entendimiento de dicha propiedad (Mok, 2010).

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

3.1. Introducción

Este trabajo se abordó desde un enfoque cualitativo, el cual se caracteriza, por un lado, por el tipo de información que se recolecta, la cual consiste principalmente en palabras que expresan ideas o significados, aunque puede ser información en forma de imágenes, dibujos, gestos, diagramas, entre otros. La característica esencial de la información cualitativa es su finalidad de transmitir o comunicar ideas y significados.

La investigación cualitativa busca entender, describir y, algunas veces, explicar la realidad mediante el análisis de las experiencias de los individuos o de los grupos, así como las interacciones entre estos mientras se producen, mediante técnicas como la observación, los cuestionarios, las entrevistas o el análisis documental (Flick, 2015).

Una característica distintiva de la investigación cualitativa es que estudia los fenómenos en sus contextos o ambientes naturales. Además, es interpretativa, pues intenta encontrar sentido o significado a la información que proviene de un fenómeno, desde el punto de vista de los propios actores (Flick, 2015; Hernández et al., 2006). En una investigación cualitativa, el objetivo es identificar patrones de significado. De acuerdo con Flick (2009), la investigación cualitativa se orienta hacia el análisis de casos concretos, enmarcados en particularidades temporales, espaciales y culturales. El punto de partida de la investigación cualitativa consiste en la observación de las actividades y expresiones que las personas llevan a cabo en sus contextos locales.

La realización de un estudio cualitativo requiere de la explicitación de supuestos que sostiene el investigador, respecto de su visión del mundo. También incluye la adopción de un soporte teórico y mecanismos de indagación respecto de los significados que las personas le atribuyen a sus experiencias. Los procedimientos para la obtención de información son los principales factores que influyen en la calidad y confiabilidad de la investigación. También se requiere que el investigador informe por escrito sobre sus reflexiones e interpretaciones del fenómeno, para comunicar a la comunidad científica sobre cómo se ha incrementado el conocimiento sobre el tema y someter los resultados a una evaluación y crítica de la sociedad (Creswell y Poth, 2007). Entre los principales supuestos que es necesario explicitar en una investigación cualitativa destacan los supuestos ontológicos, epistemológicos y metodológicos.

1. Fundamentos o supuestos ontológicos. Se refieren a la visión de mundo que sostiene el investigador, el concepto de realidad-realidades, a su dinámica y complejidad, en la que subyace el proceso de investigación y del que dependerá el tipo de problemas que se plantean, la perspectiva desde la cual se les aborda y la forma en que se trata de buscar respuestas.
2. Fundamentos o supuestos epistemológicos. Se refiere al modelo de relación que seleccione el investigador para relacionarse con lo investigado. Es decir, la forma en que sobre la base de determinados principios se adquiere el conocimiento. Desde la investigación cualitativa se busca minimizar la distancia o separación objetiva entre el investigador y aquellos a quienes estudia para lo cual quien investiga interactúa con las personas observándolas por un período prolongado, viviendo o colaborando con ellas.
3. Fundamentos o supuestos metodológicos. Se refieren a la forma en que enfocamos los problemas, interrogantes o situaciones y buscamos las respuestas. También comprende el procedimiento, la identificación y selección de las fuentes de donde se obtiene la información, las técnicas e instrumentos de recolección y de análisis de los datos. Es el modo en que se llega a conocer la realidad que es investigada (Duran, 2015).

En resumen, la investigación cualitativa se caracteriza porque:

A. Supone que hay múltiples realidades y que todas las partes de la realidad están interrelacionadas por lo que se afectan mutuamente (naturaleza de la realidad).
B. El investigador y las personas investigadas están interrelacionados, cada uno influye sobre el otro. El investigador no puede mantener una postura neutral respecto del objeto investigado y por lo tanto es parte importante del fenómeno estudiado (naturaleza de la relación investigador-objeto).
C. Las generalizaciones no son posibles. Lo máximo que se puede lograr son hipótesis de trabajo referidas a un contexto particular. Se propone desarrollar un

conocimiento ideográfico centrado en las diferencias entre los objetos, tanto como en las similitudes (naturaleza de los enunciados legales). (Guba, 1989)

3.2. Tipo de investigación

Esta tesis constituye una investigación descriptiva basada en el estudio de casos. Se caracteriza por enfocarse en el registro, descripción, interpretación y análisis de los fenómenos, con la finalidad de establecer cómo una persona, grupo o cosa se conduce o funciona (Tamayo, 2004). De acuerdo con Ander-Egg (2011), las preguntas que busca responder la investigación descriptiva se relacionan con las preguntas ¿qué es?, ¿cómo es?, ¿dónde está?, ¿de qué está hecho?, ¿cómo están relacionadas sus partes?, etcétera.

Para García y Castro (2017) la investigación descriptiva se fundamenta en métodos descriptivos, los cuales son inductivos y pretenden describir un fenómeno analizando su estructura y explorando las asociaciones relativamente estables de las características que lo definen. En este contexto, la investigación descriptiva busca llegar a conocer situaciones, costumbres y actitudes predominantes, mediante la descripción de actividades, objetos, procesos y personas utilizando, para ello, técnicas de recolección de información basadas en la observación o la encuesta.

Un tipo de diseño básico de investigación descriptiva se enfoca en el estudio de casos. El diseño basado en estudio de casos busca indagar a profundidad e intensivamente características básicas, situación actual e interacciones entre un individuo y su contexto, o la interacciones entre pocos individuos, grupos, instituciones o comunidades, cada uno de los cuales constituye un caso. Este tipo de diseño de investigación es útil porque permite conocer variables, interacciones y procesos importantes que pueden requerir de una investigación más extensiva (Tamayo, 2004). Un estudio de caso involucra un examen profundo de una o algunas pocas personas o unidades, con el fin de proporcionar una descripción completa y precisa de la unidad que constituye el caso. El beneficio principal de un estudio de caso es que este describe detalladamente el fenómeno de interés de forma contextual. Una característica de este tipo de estudios es que requieren de un volumen considerable de información para sustentar las conclusiones (Marczyk et al., 2005).

De acuerdo con Kazdin (1982) las principales características de una investigación basada en estudios de caso son que:

- Involucra el estudio intensivo de un individuo, familia, grupo, institución, o cualquier otra cosa que pueda concebirse como una unidad.
- La información es muy detallada, completa y, por lo general, los resultados se expresan de forma narrativa.
- Se detalla información que incluye contextos específicos donde se desenvuelve el caso, influencias externas y detalles idiosincrásicos especiales.
- La información puede ser retrospectiva o histórica (de archivo).

Cuando se decide diseñar una investigación con base en estudios de caso, se está tomando una decisión con respecto *a qué estudiar*, no sobre cómo estudiarlo, por lo que puede haber estudios de caso tanto cuantitativos como cualitativos (Stake, 2005). Un médico estudia a un niño porque el niño está enfermo. Los síntomas del niño pueden ser cuantitativos (temperatura, presión arterial) o cualitativos (coloración de la lengua, tipo de malestares). Los registros del médico respecto del estado de salud del niño son más cuantitativos que cualitativos. Un trabajador social estudia al niño porque padece negligencia parental. Los "síntomas" de la negligencia parental tienen un carácter cuantitativo (grado de desnutrición) y cualitativo (signos o señales de maltrato). Los registros del trabajador social son más cualitativos que cuantitativos. Los estudios de caso se diseñan de forma que se optimice el entendimiento del caso o los casos, más que la generalización de los resultados.

Un caso puede ser un niño, un salón de clases, una escuela, una actividad académica (festival, competencia, congreso, etcétera), incluso una secretaría de estado como la SEP. Es importante aclarar que no cualquier cosa puede ser un caso, una característica distintiva del caso es su especificidad. Por ejemplo, un profesor de matemáticas puede ser un caso, pero no la actividad docente, ya que a esta última le falta la especificidad y acotamiento para considerarse un caso. Un caso constituye una unidad específica y un sistema acotado. Un estudio de caso tiene una naturaleza dual, por una parte es un proceso de búsqueda acerca del caso y el producto de esa búsqueda (Stake, 2005).

Algunos autores como Stake (2005) consideran que hay tres tipos diferentes de casos, dependiendo en dónde se centra la atención. El primer tipo de caso se denomina *estudio de caso intrínseco*. Aquí el estudio se lleva a cabo con la intención exclusiva de entender *ese caso en específico*. No se estudia el caso porque sea representativo de otros, ni porque ilustra un rasgo o problema, sino porque sus particularidades y ordinariedad son de interés en sí mismos. El propósito de un estudio de caso intrínseco no es entender algún constructo o fenómeno genérico, ni la construcción de teoría, sino en la unidad específica que se estudia, ya sea un niño, una conferencia, una clínica, un currículo, etcétera. El segundo tipo de caso se denomina *estudio de caso instrumental*, el cual se caracteriza porque nos permite profundizar en un tema o reformular una generalización. Aquí el interés en el caso es secundaria, y se estudia con la finalidad de fundamentar o facilitar el entendimiento de algo más. Las actividades que lleva a cabo el caso se analizan con profundidad en relación con el contexto en que se desarrollan, pero con el interés de comprender algo más. El caso puede considerarse como típico de otros casos o no. Cuando hay aún menos interés en el caso por sí mismo, generalmente se estudian conjuntamente varios casos para investigar un fenómeno, población o condición general. A este tipo de estudios se les denomina *estudio de casos múltiples* o *estudio colectivo de casos*. Este último tipo de estudio también es de naturaleza instrumental. Los casos en la colección pueden o no tener, previamente, una característica distintiva, pueden ser similares o diferentes, puede existir redundancia o variedad en los casos.

Existen otras tipologías de casos; por ejemplo, Bassey (1999) agrupa a los casos en tres categorías: (a) estudio de caso orientado a la búsqueda y validación de teoría, (b) estudio de caso narrativo y panorámico y (c) estudio de caso evaluativo. Por otra parte, White (1992) categoriza los estudios de caso en función de tres propósitos: (i) identidad, (ii) explicación o (iii) control. Cuando el propósito es la identidad se determina cuáles son las características o variables que distinguen el caso. Si el objetivo es encontrar una explicación, el caso se analiza con la finalidad de conocer por qué se comporta o funciona como lo hace. Por otra parte, si la finalidad es el control, se analiza el ambiente en el que se desenvuelve el caso para determinar cómo dicho ambiente o medio lo afecta y modifica.

Específicamente, esta tesis constituye un estudio de caso narrativo y panorámico, además de ser un estudio colectivo de casos, ya que interesa identificar el efecto de las tareas sobre la comprensión de la propiedad distributiva a partir del análisis del efecto de las tareas en cada uno de los estudiantes que participaron y la investigación y quienes se conceptualizan como un caso.

3.3. Participantes

En esta investigación inicialmente participaron cuatro estudiantes voluntarios; sin embargo, una estudiante solo acudió a la primera sesión de trabajo y ya no volvió a asistir, por esa razón solo se considera la participación de los tres estudiantes que asistieron a todas las sesiones. Los participantes son parte de un grupo que estaba conformado por 32 estudiantes y que en ese momento habían terminado de cursar el segundo semestre de bachillerato. La invitación a participar en la investigación fue dirigida a varios estudiantes que siempre mostraron interés por aprender matemáticas. Después de conocer su decisión de participar, se habló con sus padres para exponer el propósito de las actividades que abordaron sus hijos. La autorización verbal de los padres se complementa con la autorización por escrito de ellos. Los estudiantes se eligieron por conveniencia, ya que el autor de la tesis fue profesor de los estudiantes durante el primer y segundo semestre, impartiendo cursos de matemáticas. La selección por conveniencia es un tipo de selección que no está basada en métodos o procedimientos aleatorios, permite seleccionar aquellos casos accesibles que aceptan participar en la investigación, dada la proximidad de las personas con el investigador (Otzen y Manterola, 2017).

Los participantes son originarios del municipio de Santiago de Anaya, Hidalgo, en la región conocida como el Valle del Mezquital, que se encuentra aproximadamente a 60 km de la ciudad de México y se caracteriza por su actividad preponderantemente agrícola y ganadera, basada en el riego con aguas residuales provenientes de la *Zona Metropolitana del Valle de México* (García-Salazar, 2019). El Valle del Mezquital incluye 32 municipios, de los 84 que integran el estado de Hidalgo (Vite Vega, et al., 2023). Es una zona semi árida, con escasa precipitación pluvial.

El Valle del Mezquital se divide, a su vez, en tres subregiones: (a) Ixmiquilpan, (b) Tula y (c) Actopan. El municipio de Santiago de Anaya se encuentra en la subregión de Actopan (Vite Vega, et al., 2023), ubicado al norte de Actopan y al este de Ixmiquilpan. En Santiago de Anaya el porcentaje de la población que se encontraba en una situación de pobreza moderada, durante el año 2020, fue de 43.2% (Secretaría de Economía, s.f.). El municipio cuenta con un grado de marginación media (García-Salazar, 2019). Durante el año 2020, el 65.2% de la población de 15 años o más contaba únicamente con estudios de primaria o secundaria. Únicamente el 22.6% de las viviendas tienen acceso a internet y sólo el 17.9% tienen una computadora. La tasa de analfabetismo es de 5.37% destacando, marcadamente, el analfabetismo femenino (Secretaría de Economía, s.f.).

Al momento de realizar la investigación los participantes tenían una edad promedio de 16 años y habían concluido el segundo semestre de un programa de bachillerato público, en un plantel ubicado en el mismo municipio. Dado que los estudiantes eran menores de edad, al momento de la implementación de las tareas, previamente se llevó a cabo una reunión con sus padres o tutores, para informarles por escrito el porqué de la investigación y para que, en su caso, autorizará la participación de sus hijos o tutorados en estudio (Apéndice A). Lo anterior se realizó para satisfacer principios éticos básicos de la investigación cualitativa referidos al consentimiento informado y a la participación voluntaria (APA, 2020; Flick, 2009). Además, para resguardar la identidad de los participantes, no se utilizaron sus nombres verdaderos, sino que se les identificó mediante un seudónimo (APA, 2020).

3.4. Las tareas

Se diseñaron seis tareas basadas en el reconocimiento e identificación de patrones, cuyo objetivo es que los estudiantes identifiquen y generalicen patrones numéricos, obtenidos a partir del análisis de secuencias figurales, en las cuales subyacen casos particulares de la PD.

Para el diseño de las tareas se tomaron en cuenta aspectos de la perspectiva de resolución de problemas. En primer lugar, y con base en la consideración de que las matemáticas son la ciencia de los patrones, las tareas permiten que los estudiantes identifiquen, generalicen y representen, en diversos registros, patrones numéricos subyacentes en secuencias figurales. Las hojas de trabajo se pueden revisar en el Apéndice B.

Para el diseño de las tareas se consideró que los conocimientos previos de los estudiantes consisten en aritmética básica y fórmulas para calcular áreas de rectángulos. En las tareas se busca que los estudiantes identifiquen, en primer término, patrones numéricos y, posteriormente, que generalicen y representen dichos patrones en diferentes registros (verbal, escrito, simbólico, gráfico). Es decir, se pretende que los estudiantes, a partir de abordar las tareas, se vean en la necesidad de utilizar y representar cantidades indeterminadas para comunicar ideas sobre regularidades numéricas generales. También se busca que usen y relacionan diferentes registros de representación con la finalidad de desarrollar un entendimiento matemático (Hiebert y colaboradores, 1997).

Las hojas de trabajo que se entregaron a los estudiantes están integradas por cuatro secciones, las cuales se muestran a continuación:

1. Encabezado. Incluye un título con el número de la tarea, espacio para la fecha, el nombre del estudiante; así como las instrucciones para realizar la tarea.

Tarea 3

Fecha: ______________________

Nombre del alumno: ____

Instrucciones. Completa la información faltante y responde a las preguntas. La figura coloreada de azul es un cuadrado

2. Secuencia figural. Constituye una secuencia de cuatro figuras numeradas consecutivamente. Se buscó que las secuencias figurales fueran aumentado su complejidad, en relación con las fuentes de variabilidad, así como en el uso de números específicos a generales, representados de primero de forma verbal, y después de forma simbólica. Por ejemplo, en las figuras de las primeras tareas solo hay una fuente de variabilidad, y solo se usan números concretos. A partir de la quinta tarea se incluyen números indeterminados representados por una literal.

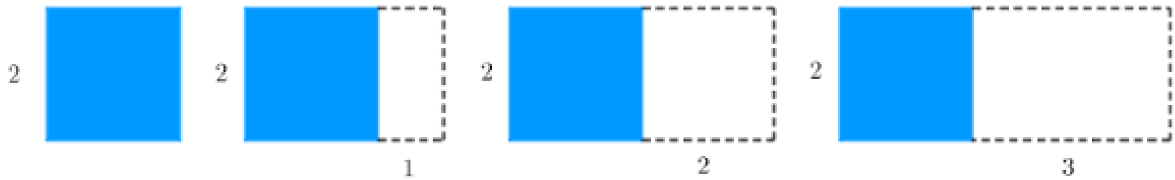


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

3. Tabla. Su finalidad es organizar la información numérica que el estudiante obtiene del análisis de la secuencia figural. En dicha tabla se proponen ejemplos para que el estudiante represente a las cantidades de formas que no son comunes durante el estudio de la aritmética, enfocada más en la obtención de resultados, que en la transformación y representación de las cantidades de formas distintas. Estas formas de representar a los números se eligieron de forma que hagan referencia a la PD.

Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo	
			Expresada como producto	Expresada como producto+potencia
1	1+1	1	(1+1)(1)	$(1)(1)+ 1^2$
2	1+2	2	(1+2)(2)	$(1)(2)+ 2^2$
3				
4				

4. Preguntas que le permitan al estudiante centrar la atención, y reflexionar, acerca de patrones y regularidades inmersos en las figuras y en las expresiones numéricas registradas en la tabla. Este componente tiene la finalidad de que el estudiante lleve a cabo los dos procesos básicos que promueven el entendimiento matemático, que son la reflexión y la comunicación de ideas (Hiebert et al., 1997). La secuencia de preguntas tiene la función de que el estudiante transite, paulatinamente, de las ideas concretas a las abstractas.

Si se continúa con la secuencia de figuras, cuáles son las dimensiones y el área del cuadrado que se encuentra en la posición x, donde x es un número natural. Dibuja en el recuadro la figura que corresponde y a continuación completa la tabla.

Número de figura	Base del cuadrado	Altura del cuadrado	Área del cuadrado	
			Expresada como producto	Expresada como potencia
x				

Explica detalladamente el porqué de tu respuesta:

____

____

____

____

____

____

3.5. Instrumentos de recolección de la información

Las fuentes de recolección de la información fueron las producciones escritas que los estudiantes realizaron en las hojas de trabajo (Apéndice B), así como grabaciones en video de las sesiones. La grabación de las sesiones la realizó un profesional dedicado a este tipo de trabajo, mediante una cámara fija y una móvil. La cámara fija tuvo la función de captar la actividad general del grupo, mientras que con la cámara móvil se buscó capturar acciones individuales relevantes de los participantes que dieran cuenta de un entendimiento de la PD. El autor de la tesis también elaboró notas de campo, durante y después del trabajo con los estudiantes. Las grabaciones en video se transcribieron y dichas transcripciones integran la información básica a partir de la cuál se obtuvieron los resultados y las conclusiones de la tesis.

3.6. Implementación de las tareas

Se llevaron a cabo tres sesiones de trabajo, entre el 28 y el 30 de junio de 2023, con una duración de dos horas cada una. Estas sesiones se desarrollaron en un aula del plantel de bachillerato en el que están inscritos los participantes, dentro de su horario habitual de clases. El autor de la tesis fue quien implementó las tareas; con el propósito de que los estudiantes las abordarán con dedicación y empeño. Las seis tareas sugeridas se aplicaron a los estudiantes participantes durante tres días seguidos, lo que permitió aplicar dos por día, considerando un tiempo de sesenta minutos por tarea, distribuido de la siguiente forma: cuarenta minutos para que los estudiantes abordaran cada tarea, diez minutos para el análisis y discusión de cómo las abordarón y diez minutos para receso. El tiempo promedio utilizado por los participantes para abordar cada tarea fue de 29 minutos. Al inicio de cada sesión se les explicó el tiempo sugerido para abordar las tareas y la sugerencia de dar lectura cuidadosa a cada apartado de estas para resolver. El análisis y discusión de cómo las abordaron se llevó a cabo al término de cada una, para ello se realizó la siguiente pregunta: ¿Cuál fue la forma en que abordó las tareas?

3.7. Procesamiento y análisis de la información

Las videograbaciones de las sesiones se transcribieron y las producciones escritas de los estudiantes se digitalizaron, con la finalidad de que todo investigador tenga acceso a dicha información. Las transcripciones de los videos y las producciones escritas de los estudiantes, en su versión digital, fueron la base para el análisis. La unidad de análisis fue el párrafo de texto. La primera fase de análisis consistió en la identificación de secciones de texto que aportan evidencia de los procesos de reconocimiento de regularidades y patrones, de generalización, abstracción y representación de tales regularidades o patrones. Además, se trató de localizar indicadores de entendimiento de la PD.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

4.1. Introducción

En este capítulo se describe el proceso de solución de las tareas, abordadas por cada uno de los participantes y centrando la atención en los procesos de identificación de lo variable y lo constante, la atención de lo que cambia en las figuras y su relación con la posición, así como con la generalización verbal y simbólica. Las referencias a las transcripciones de las videograbaciones se indican con notas del estilo F1-3 (3:47-4:44), lo cual significa que el texto corresponde al intervalo de tiempo entre el minuto 3:47 y 4:44, de la tercera parte del video de la sesión 1, obtenido con la cámara fija. En el caso de una nomenclatura del estilo M3-1 (3:47-4:44) corresponde al intervalo de tiempo entre el minuto 3:47 y 4:44, de la primera parte del video de la sesión 3, obtenido con la cámara móvil. Por otra parte, el texto que se encuentre entre corchetes, indica observaciones que hace el investigador para apoyar el entendimiento del contexto en el que los estudiantes realizan algún comentario o afirmación. En el caso de que se haga referencia a comentarios que los estudiantes realizaron en las hojas de trabajo se utilizará nomenclatura del tipo (HT2-M), la cual indica que el extracto o comentario se tomó de la hoja de trabajo 2 del participante Moises.

4.2. Resultados de las respuestas verbales

Al término de cada tarea, se les pidió a los estudiantes, que expresarán verbalmente como habían abordado las tareas y desarrollado cada uno de los ejercicios planteados. En seguida se muestran las tareas con la secuencia figural y secuencia numeral con las que inician cada una de ellas. También se muestran las conjeturas verbales planteadas por los estudiantes.

4.2.1. Tarea 1

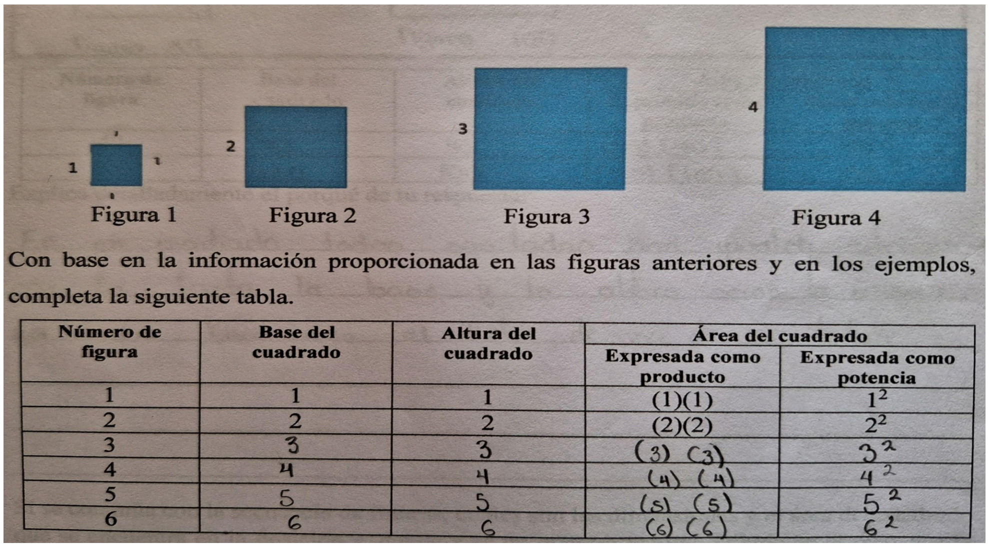
A continuación se muestran los comentarios que hicieron dos de los tres estudiantes que participaron en la primera sesión. Es importante mencionar que Moises no quiso participar.

> **Profesor-investigador:** ¿Cuál fue la forma en que abordó la tarea 1?
>
> **Ester:** Creo que nos pedía la altura y la base de cada, este, cuadrado y pues según yo, el valor de un lado nos decía que era uno, entonces según, todos sus lados de un cuadrado son iguales entonces, por

eso les di esos valores y ya nada más nos pedía que pusiéramos la potencia y que lo pusiéramos, ¿cómo se dice, para separar los números? F1-3 (3:47-4:40)

Moisés: [mueve la cabeza negativamente, porque no quiere participar]

Sara: Las figuras nos mostraban diferentes cuadrados en una posición diferente y yo tomé la posición como lo mostraba como la altura de cada uno de los cuadrados y como son cuadrados, todos sus lados son iguales y puse la base con la misma cantidad de la altura. F1-3 (5:13-5:33)

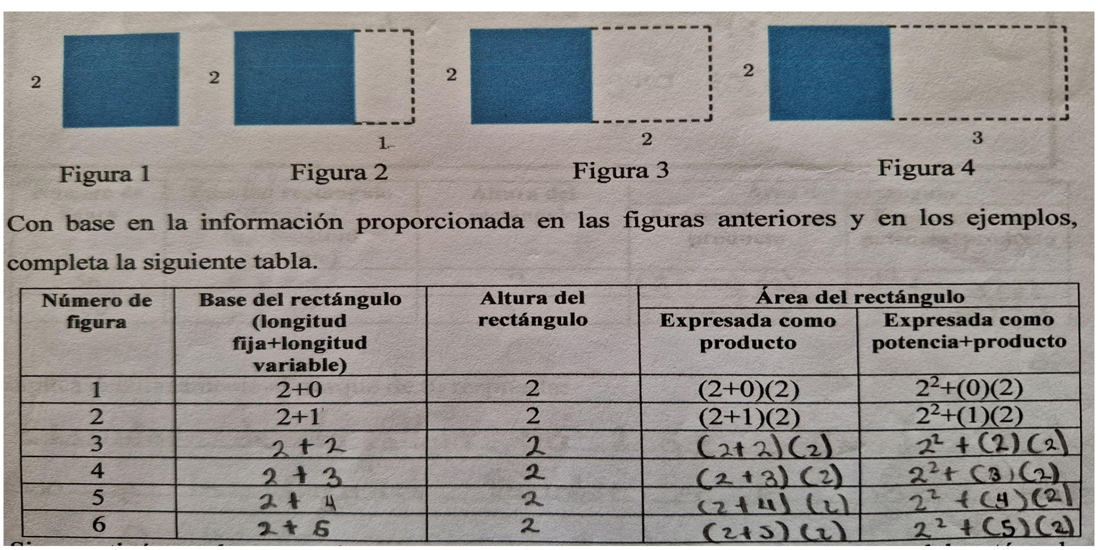


Con base en la información proporcionada en las figuras anteriores y en los ejemplos, completa la siguiente tabla.

Número de figura	Base del cuadrado	Altura del cuadrado	Área del cuadrado: Expresada como producto	Área del cuadrado: Expresada como potencia
1	1	1	(1)(1)	1^2
2	2	2	(2)(2)	2^2
3	3	3	(3) (3)	3^2
4	4	4	(4) (4)	4^2
5	5	5	(5) (5)	5^2
6	6	6	(6) (6)	6^2

Figura 4. Tarea 1, secuencia figural y secuencia numérica.

4.2.2. Tarea 2



Con base en la información proporcionada en las figuras anteriores y en los ejemplos, completa la siguiente tabla.

Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo: Expresada como producto	Área del rectángulo: Expresada como potencia+producto
1	2+0	2	(2+0)(2)	2^2+(0)(2)
2	2+1	2	(2+1)(2)	2^2+(1)(2)
3	2 + 2	2	(2+2)(2)	2^2 + (2)(2)
4	2 + 3	2	(2 + 3) (2)	2^2+ (3)(2)
5	2 + 4	2	(2+4) (2)	2^2 + (4)(2)
6	2 + 5	2	(2+5) (2)	2^2 + (5)(2)

Figura 5. Tarea 2, secuencia figural y secuencia numérica.

Profesor-investigador: ¿Cuál fue la forma en que abordó la tarea 2?

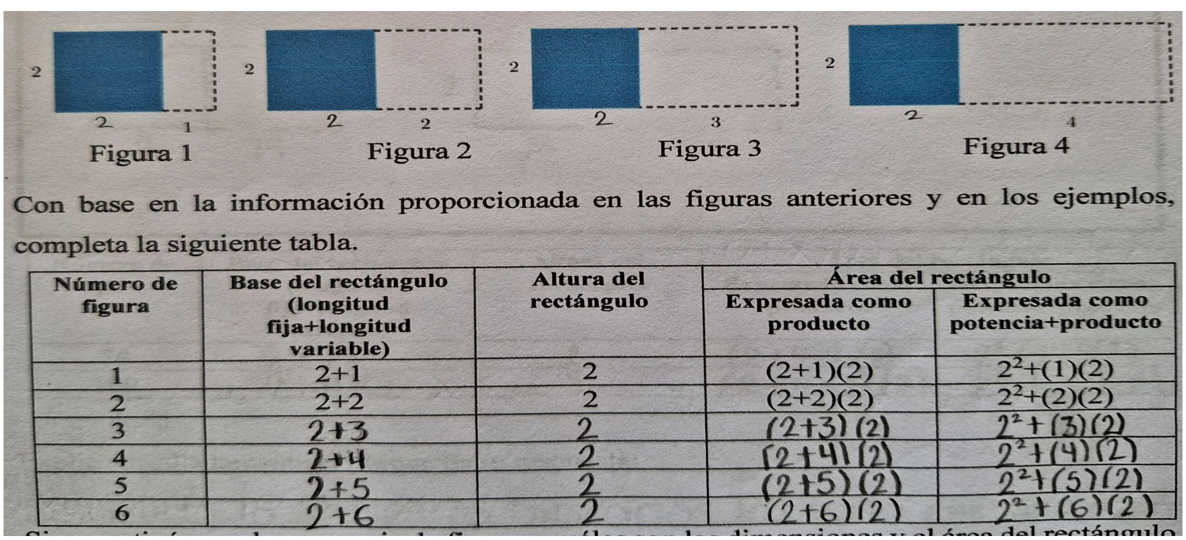
Ester: Pues, primero había un cuadrado con su altura que el valor era dos y después venían unos rectángulos y en la figura uno decía que la altura era dos más cero, entonces no se empezó a contar desde ahí, se empezó a contar desde el siguiente rectángulo que la figura dos, entonces por lo tanto su base valía dos igual que la altura y en el triángulo tres nos decía que la altura siempre iba a ser la misma que era dos pero la base iba a ser, ahora creo tres y así sucesivamente, de dos, la base cuatro y nada más nos decía igual sacáramos la altura y sumáramos y sacáramos la potencia. F1-3(6:58-8:00)

Sara: Mostraba los rectángulos y en la primera figura 1 nos muestra ya la altura en todos los rectángulos que es de 2 *y para sacar la base yo vi* que *era una unidad menos que en la posición que estaba* y así fue entre la figura 2 era la base de 1 y en 3 la de 2 y así sucesivamente. F1-3(8:13-8:39)

Moisés: Primero multiplicaba la base, la altura; la base sumaba 2 más lo que nos estaban dando, por ejemplo, la figura dos, valor de la base de 2 más 1 y así sucesivamente. Por ejemplo, en el segundo ejercicio me decía 56, el 56, la figura 56 se le tenía que restar uno ya que la figura número uno no se le sumaba nada, entonces sería 2+55 y la otra que vendría siendo sería 2+99. F1-3(8:52-9:27)

En este extracto del video se identifica que Sara es capaz de pensar en cantidades indeterminadas, es un elemento fundamental del pensamiento algebraico, cuando expresa que “y para sacar la base, yo vi que era una una unidad menos que en la posición”.

4.2.3 Tarea 3



Con base en la información proporcionada en las figuras anteriores y en los ejemplos, completa la siguiente tabla.

Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo: Expresada como producto	Área del rectángulo: Expresada como potencia+producto
1	2+1	2	(2+1)(2)	2^2+(1)(2)
2	2+2	2	(2+2)(2)	2^2+(2)(2)
3	2+3	2	(2+3) (2)	2^2+(3)(2)
4	2+4	2	(2+4) (2)	2^2+(4)(2)
5	2+5	2	(2+5) (2)	2^2+(5)(2)
6	2+6	2	(2+6) (2)	2^2+(6)(2)

Figura 6. Tarea 3, secuencia figural y secuencia numérica.

Profesor-investigador: ¿Cuál fue la forma en que abordó la tarea 3?

Ester: Aparecía un rectángulo y lo que cambiaba era la altura, no en aparecía un rectángulo y la altura era 2 y cambiaba la base conforme al número de figura y así sucesivamente, si era la figura 10 pues la altura iba a ser 2 y luego así iba a ser 10 para poder contestar la tabla. F2-2(7:21-7:56)

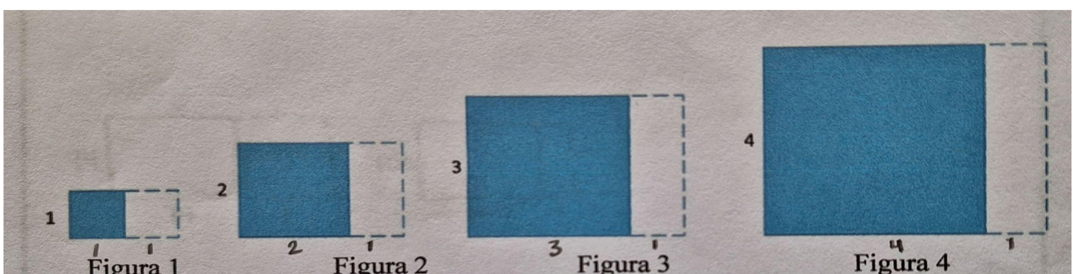
Sara: Pues en las figuras nos mostraba que la altura era de 2, pero *la longitud iba cambiando según la posición*. F2-2(8:01-8:09)

Moisés: Como en todas las figuras ya nos dan la altura que es de 2 pues nadamas ubicamos la longitud y *cambiamos lo que se va a sumar por x*. F2-2(8:37-8:46)

Sara: Yo, he, pues cambié, la longitud ya nos la da, que es la altura la que nos dá de 2 y la longitud la puse como la incógnita. F2-2(8:50-9:05)

En el comentario que realiza Moises es posible observar que este estudiante es capaz de pensar en cantidades indeterminadas y representar simbólicamente esas cantidades mediante la literal x; es decir, se tiene evidencia de que este estudiante ha desarrollado dos elementos esenciales del pensamiento algebraico. En el caso de Sara se identifica capacidad para identificar cómo varían de forma conjunta dos cantidades, en este caso la posición de la figura y la base de cada rectángulo.

4.2.4. Tarea 4



Con base en la información proporcionada en las figuras anteriores y en los ejemplos, completa la siguiente tabla.

Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo: Expresada como producto	Área del rectángulo: Expresada como producto+potencia
1	1+1	1	(1+1)(1)	$(1)(1)+1^2$
2	1+2	2	(1+2)(2)	$(1)(2)+2^2$
3	1+3	3	(1+3)(3)	$(1)(3)+3^2$
4	1+4	4	(1+4)(4)	$(1)(4)+4^2$
5	1+5	5	(1+5)(5)	$(1)(5)+5^2$
6	1+6	6	(1+6)(6)	$(1)(6)+6^2$

Figura 7. Tarea 4, secuencia figural y secuencia numérica.

Profesor-investigador: ¿Cuál fue la forma en que abordó la tarea 4?

Moisés: Pues dependiendo de la posición de la figura es la determinación de la altura y la base y ya nada más le teníamos que sumar 1 por lo que se le agrega. F2-2(10:22-10:32)

Sara: *Tomé la x como la incógnita* y la coloqué donde, en la altura que nos daba y la longitud era la que nos daba creo que era 1. F2-2(10:48-11:03)

Ester: Pues la altura cambiaba conforme al número de figura, si era la figura 2 pues la altura iba a ser 2, si era figura 3 la altura iba a ser 3 y la longitud sería 1 para por contestarlo. F2-2(11:12-11:28)

Profesor-investigador: ¿Qué semejanza encontró entre las tareas 1, 2, 3 y 4?

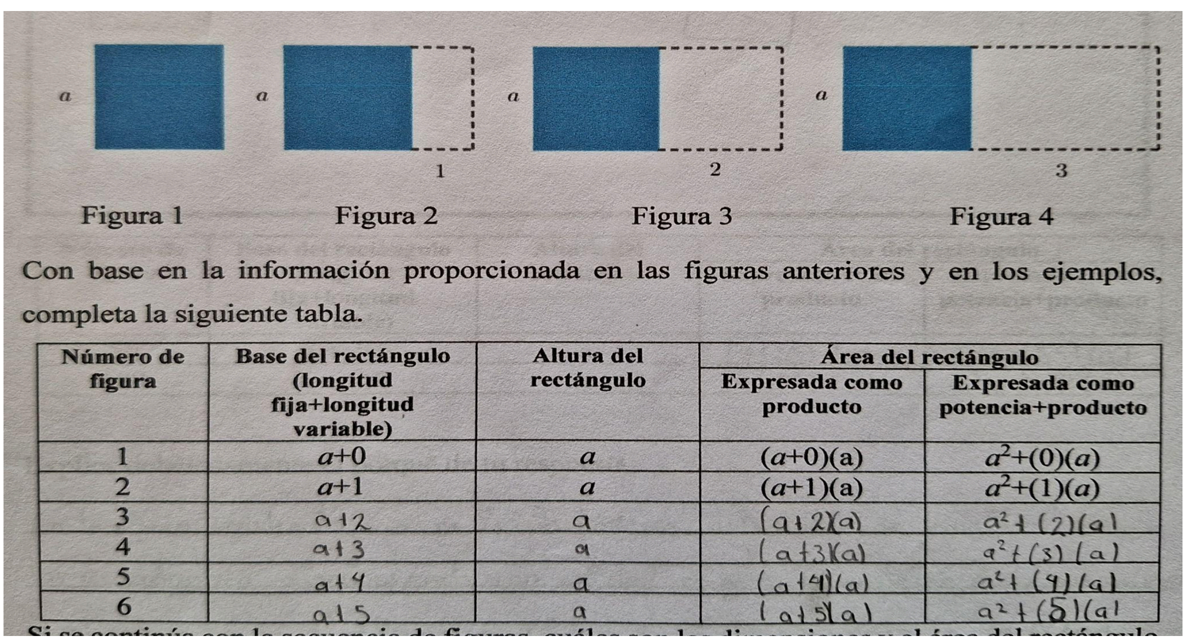
Ester: Pues que nos dan las mismas figuras, pero con diferentes valores. F2-2(11:54-11:57)

Sara: Todas son iguales menos los valores son diferentes. F2-2(12:02-12:06)

Moisés: Pues, todas las figuras tienen valores y hay algunas que se le tienen que sumar otro valor. F2-2(12:10-12:24)

En este extracto del video de la segunda sesión es posible identificar que Sara es capaz de pensar en cantidades indeterminadas y de expresarlas simbólicamente, los cuales son dos elementos que Radford (2006, 2010, 2012) considera característicos del pensamiento algebraico.

4.2.5. Tarea 5



Con base en la información proporcionada en las figuras anteriores y en los ejemplos, completa la siguiente tabla.

Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo: Expresada como producto	Área del rectángulo: Expresada como potencia+producto
1	a+0	a	(a+0)(a)	a^2+(0)(a)
2	a+1	a	(a+1)(a)	a^2+(1)(a)
3	a+2	a	(a+2)(a)	a^2+(2)(a)
4	a+3	a	(a+3)(a)	a^2+(3)(a)
5	a+4	a	(a+4)(a)	a^2+(4)(a)
6	a+5	a	(a+5)(a)	a^2+(5)(a)

Figura 8. Tarea 5, secuencia figural y secuencia numérica.

Profesor-investigador: ¿Cuál fue la forma en que abordó la tarea 5?

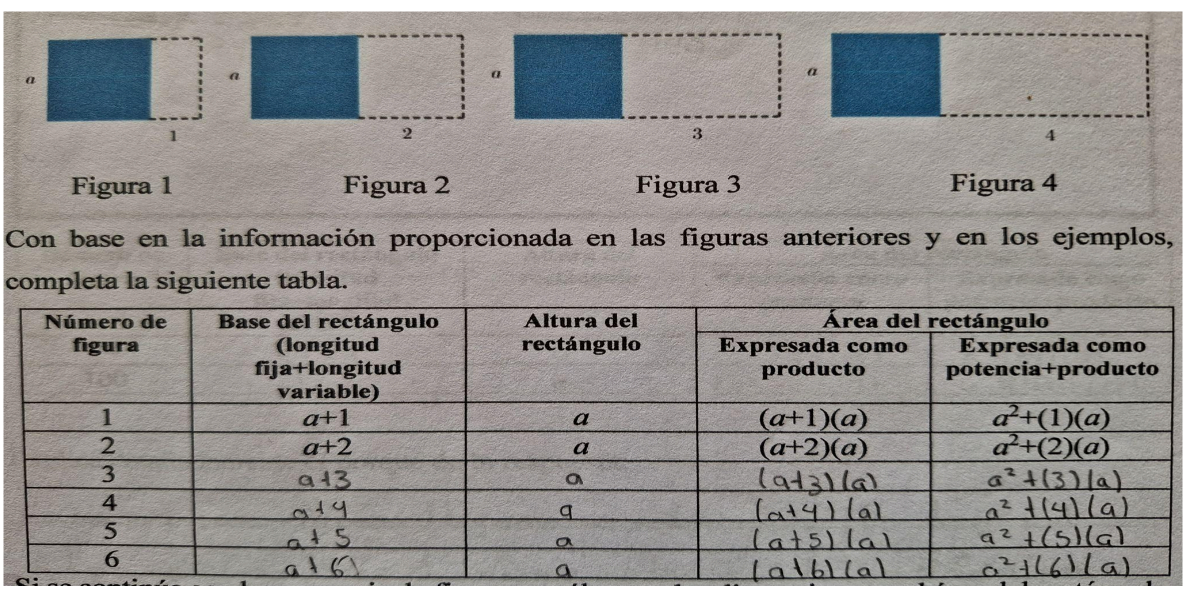
Ester: En la tarea 5, nos daba, creo que la altura de a, y empezaba en la figura 1 y nos daba longitud de cero y para la figura 2, nos daba la longitud de uno, entonces *se iba a restar en cada figura dependiendo del número en que estaba la figura*, si la figura estaba en el número 10, su longitud iba a ser nueve y así. F3-3(15:41-16:26)

Sara: En la tarea 5, nos daba las figuras, su altura la demostraba como a, y en las posiciones , *según la posición, se le iba restando una para sacar la longitud y así le seguí con las demás*. F3-3(16:32-16:51)

Moises: [moviendo la cabeza negativamente, porque no quiere participar]

En el anterior extracto del video, correspondiente a la tercera sesión, nuevamente se identifica que Sara es capaz de pensar en cantidades indeterminadas, a las cuales denomina "la posición" y puede saber cómo obtener el área de cada posición indeterminada. También se aprecia la capacidad de Ester para pensar en términos de cantidades indeterminadas.

4.2.6. Tarea 6



Con base en la información proporcionada en las figuras anteriores y en los ejemplos, completa la siguiente tabla.

Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo: Expresada como producto	Área del rectángulo: Expresada como potencia+producto
1	$a+1$	a	$(a+1)(a)$	$a^2+(1)(a)$
2	$a+2$	a	$(a+2)(a)$	$a^2+(2)(a)$
3	a+3	a	(a+3)(a)	a^2+(3)(a)
4	a+4	a	(a+4)(a)	a^2+(4)(a)
5	a+5	a	(a+5)(a)	a^2+(5)(a)
6	a+6)	a	(a+6)(a)	a^2+(6)(a)

Figura 9. Tarea 6, secuencia figural y secuencia numérica.

Profesor-investigador: ¿Cuál fue la forma en que abordó la tarea 6?

Sara: En la tarea 6, nos daba igual la altura que era a y la longitud que, bueno yo lo vi como la misma posición que nos daba. F3-3(16:51-17:00)

Ester: [no quiere participar]

Moisés: *No, porque es como una incógnita, no tiene un valor como tal se le tiene que sustituir.* F3-3(18:01-18:08)

En la viñeta previa se aprecia nuevamente la capacidad de Moises de pensar en cantidades indeterminadas, aunque él menciona que es "como una incógnita" más bien quiere expresar que es como una variable, la cual puede tomar cualquier valor de un conjunto de cantidades.

4.3. Categorización de la información

Los estudiantes utilizaron dos estrategias para resolver cada una de las seis tareas. La identificación y generalización de los patrones fue a través de las estrategias visuales y las estrategias numéricas. En cada una de las tres fases, de cada una de las tareas, inicia con una secuencia figural para después pasar a la secuencia numérica.

La combinación de las estrategias visuales y numéricas para llegar al descubrimiento o construcción de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, se afirma en el proceso que sigue el participante Moisés, en la fase 1 de la tarea 2 , en la cual, primero observa las secuencias figurales con los valores que le presentan y después inicia las operaciones a partir de la multiplicación de la base por la altura y expresar el área del rectángulo como producto (2+5)(2). De aquí, aplicó la propiedad distributiva para realizar la siguiente transformación sintáctica, $(2+5)(2) = 2^2+(5)(2)$. En la fase 3 de la misma tarea, usa el mismo patrón para aplicar de nuevo la propiedad distributiva y se hace visible en la siguiente expresión $(2+x)(2)= 2^2+(x)(2)$. En las tareas subsecuentes el estudiante aplica la propiedad distributiva a partir de la multiplicación y siguiendo el orden de las operaciones, y considerando los valores que le establecen las secuencias figurales. En las tareas 3, 4, 5 y 6, abordadas por él, en las expresiones que se muestran enseguida, utiliza la propiedad distributiva en cada transformación sintáctica: $(1+x)(x)=(1)(x)+x^2$; $(a+99)(a)= a^2 + (99)(a)$; $(a+x)(a)= a^2 +(x)(a)$.

4.4 Identificación de patrones, regularidades, tendencias o discordancias

En esta sección se presenta un análisis de las respuestas que aportaron los participantes cuando abordaron las tareas, las cuales tienen por finalidad identificar regularidades que ayudarán a dar respuesta a la pregunta de investigación.

4.4.1. Respuestas de los estudiantes a la tarea 1

La tarea 1, como las demás, son divididas en tres fases para su análisis. En la fase 1, los estudiantes abordaron una secuencia figural en la cual se les presentan 6 cuadrados que incrementan su base y su altura en una unidad, consecutivamente. Debajo de las figuras se presenta la tabla para realizar los planteamientos numéricos de las áreas de cada figura. Los estudiantes detectaron las regularidades que les permitió expresar las áreas de cada cuadrado como producto y como potencia.

La fase 2 continúa con la secuencia de las figuras ubicadas en las posiciones 10, 40 y 100. La información sobre regularidades observadas por los estudiantes en la fase 1, les permite repetir esos patrones en estas figuras para expresar sus áreas como producto y como potencia. La justificación del porqué de sus resultados para esta fase son los siguientes:

Ester: "En un cuadrado todos sus lados son iguales entonces o por lo tanto la base y la altura serán la misma ya que conocemos el valor de una de sus lados." (HT1-E)

Moisés: "Se nos da la altura y como es un cuadrado sus lados son iguales, por lo que el valor de la altura es la misma que su base." (HT1-M)

Sara: "Al ser un cuadrado todos sus lados son iguales y en los ejemplos mostrados nos da a conocer el número de figura y también su altura, la altura se va elevando según el número de la figura asignada, con esto nos llega a demostrar que la figura asignada va a ser el mismo valor que la altura, al igual que la base de nuestro cuadrado." (HT1-S)

En la fase 3 se hace el planteamiento de determinar el área de un cuadrado cuya posición es x y es número natural. Haber identificado los patrones en la secuencia figural y determinar numéricamente su área en las fases 1 y 2, permitió a los estudiantes determinar y expresar el área como producto y como potencia para este cuadrado. Así, la conjetura formulada por los estudiantes en la determinación del área y expresada como producto es (x) (x) y como potencia 2^2.

La justificación del porqué de sus resultados para esta fase son los siguientes por cada estudiante:

Ester: “pues **x** puede ser un número cualquiera por lo tanto se queda en **x** y como bien mencione con un sólo valor podemos determinar los demás lados ya que son iguales.” (HT1-E)

Moisés: “Lo mismo que lo anterior x no tiene un valor como tal sin embargo la altura y la base tienen un valor de **x** al menos que se nos otorgue otro valor por el cual sustituir, por lo que se mantiene como **x**.” (HT1-M)

Sara: “**x** podría ser cualquier número natural pero no da el número por lo cual al colocar **x** ya sea en su base o en su altura tendrá el mismo valor, al igual la posición **x** no la llegamos a encontrar ya asignado pero si nos muestra que es un número natural puede ser cualquier número ya sea natural y al sacar la base podemos llegar a colocar **(x)(x)** o de igual manera $\mathbf{x^2}$, ya sea de estas dos formas nos dará el resultado igual.” (HT1-S)

A partir de las respuestas de los estudiantes, es posible identificar que todos son capaces de pensar en cantidades indeterminadas y representarlas simbólicamente. En el caso de Sara existe evidencia de que ella es también capaz de operar analíticamente las cantidades indeterminadas cuando menciona que “al sacar la base podemos llegar a colocar (x)(x) o de igual manera x^2, ya sea de estas dos formas nos dará el resultado igual”.

4.4.2 Respuestas de los estudiantes a la tarea 2

La Fase 1 presenta un cuadrado como primera figura geométrica, cuya base y altura es la misma. A partir de la segunda figura inicia un incremento de una unidad en la base y el tercer cuadrado conserva la unidad aumentada más una más y así sucesivamente. Los estudiantes interactúan con los objetos geométricos para determinar el área de cada uno de ellos y expresarlas a través de las construcciones numéricas en la tabla. Identifican las cantidades variables y las invariantes. El área de cada rectángulo es expresada como producto, ejemplo figura 6, (2+5) (2). Uno de los aspectos observables en la construcción numérica es la habilidad de los estudiantes para aplicar la propiedad distributiva en la expresión del área como potencia más producto, 2^2+(5)(2).

Fase 2, los estudiantes abordan las figuras ubicadas en las posiciones 10, 56 y 100, las tareas se encuentran en el Apéndice B, que se localiza en las páginas 81 a 83 de esta tesis. Siguiendo la forma de interactuar e identificar las características importantes observadas en las figuras de la Fase 1; inician con dibujar cada una de las figuras con sus datos numéricos en los recuadros para posteriormente determinar las áreas de cada figura. Los estudiantes detectan que el valor numérico se aumenta en la longitud variable de la base de la figura geométrica y debe ser una unidad menos que el valor numérico de la posición de ubicación del rectángulo, ver figura 10. Las áreas expresadas como producto para las tres figuras son: (2+9)(2), (2+55)(2) y (2+99)(2). Las áreas expresadas como potencia más producto, respectivamente son: 2^2 +(9)(2), 2^2+(55)(2) y 2^2+(99)(2). Se percibe que los estudiantes identifican las cantidades variables y los invariantes, así como relaciones entre la posición y la forma de calcular las áreas de las figuras. Los estudiantes también son capaces de identificar las operaciones que deben realizar en cada una de las figuras de la secuencia. En todos los casos, los estudiantes fueron capaces de identificar que deben restar una unidad a la posición para obtener la longitud variable del rectángulo, como se muestra en los extractos retomados de sus hojas de trabajo que se resaltan en cursiva.

Ester: **"**El valor de la altura era 2 que sería la longitud fija y la longitud variable en la figura y empieza con 0 y se empieza a dar valor hasta la figura 2 e*ntonces al 56 le reste 1 igual que al 100*". (HT2-E)

Moisés: **"**porque en la posición 1 no se le agrega nada a la figura, a la figura 2 sólo se le agrega 1 y así sucesivamente *en la posición 56 y 100 tendrían una suma de 2+55 y 2+99* y ya sólo acomodaremos los valores en la tabla" (HT2-M)

Sara: **"**En las primeras figuras mostradas podemos ver que en la altura del rectángulo en todas son 2 pero al igual se muestra otra parte más en esta yo puedo llegar a notar que en la posición mostrada, *la parte de una llega a medir 1 unidad menos que la posición mostrada* *en nuestra figura*, con base a esta me fui guiando para colocar las bases de los próximos rectángulos" (HT2-S)

En la Fase 3, se propone una figura geométrica que se ubica en la posición x y es un número natural, las tareas se encuentran en el apéndice B, que se localiza en las páginas 75 a 77 de esta tesis. La información que obtuvieron los estudiantes al interactuar con los objetos y las construcciones numéricas de las Fases 1 y 2, les permite detectar patrones determinados que son utilizados en esta tercera fase. Identifican a x como el valor variable que se aumenta en la longitud de la base. Las conjeturas que los estudiantes construyeron para expresar el área del rectángulo como producto es (2+x)(2) y como potencia más producto es 2^2+(x)(2). Estas, no consideran que x es disminuida en una unidad, representada como x-1. En estas conjeturas construidas por los estudiantes se observa la aplicación de la propiedad distributiva con respecto de la suma y la multiplicación. La justificación de los resultados por los estudiantes, son los siguientes:

Ester: "pues la altura seguirá siendo 2 y para *la longitud variable le di el valor de **x**, aunque le pude dar cualquier otro valor*" (HT2-E)

Moisés: "Ubica los datos ya dados como altura y base solo se sustituye el valor a sumar que es x así se continúa con los valores restantes que ubicamos en la tabla agregando x**"** (HT2-M)

Sara: "En la instrucción pide un número natural, pero este lo llegamos a usar como x ya que será la incógnita para esto se coloca en dónde estaría el número natural una x pero esta va a continuar siendo 2 su altura dada a entender en el caso como en los otros" (HT2-S)

En el caso de Ester se puede identificar que es capaz de pensar en términos de cantidades generales y representarlas simbólicamente, también es capaz de identificar que al utilizar una literal como variable, esta puede tomar cualquier valor dentro de un conjunto de valores. En el caso de Sara también puede pensar en términos de cantidades indeterminadas y representarlas simbólicamente, pero en ella se identifica una confusión entre el concepto de variable y el de incógnita. Cuando Sara se refiere a una incógnita, en realidad está pensando en el concepto de variable. Ya que una incógnita es un número que no se conoce pero que ya está determinado por las relaciones numéricas establecidas en una ecuación.

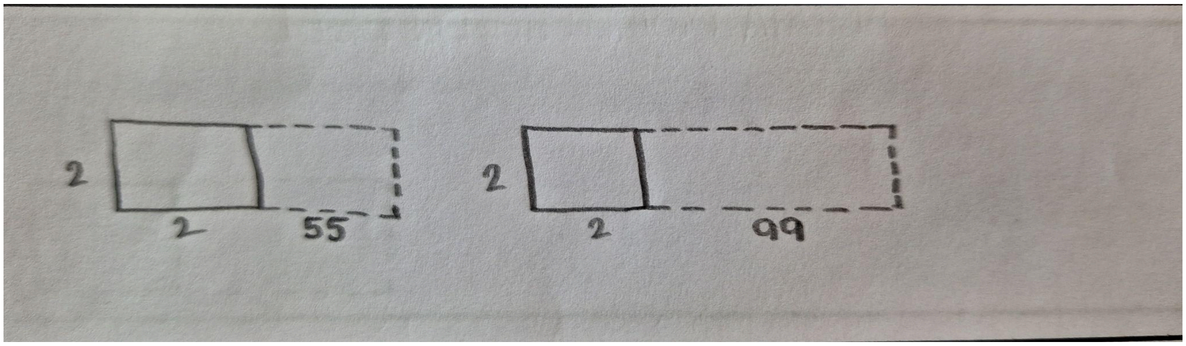


Figura 10. Moisés identifica en sus dibujos los valores invariantes y variables.

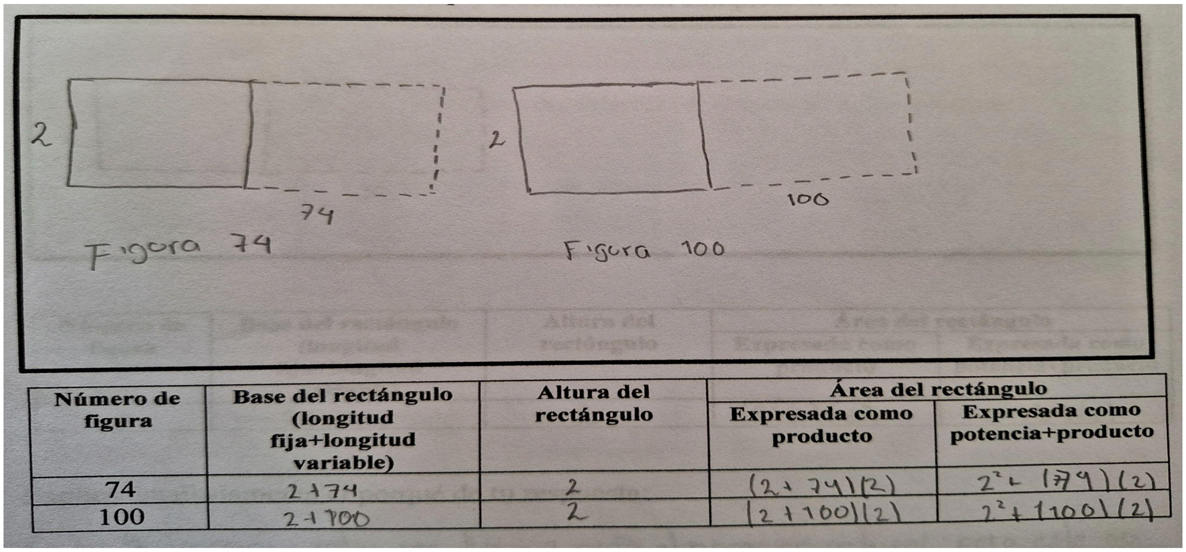
4.4.3 Respuestas de los estudiantes a la tarea 3

La Fase 1 presenta una secuencia figural caracterizada por cuadrados cuya base y altura es un valor invariable y a partir del primer cuadro se incrementa y acumula una unidad en las siguientes figuras. Los estudiantes interactúan con los objetos geométricos y les permite identificar las características importantes de los mismos y establecen generalizaciones que les lleve a determinar las áreas de cada figura. Para la figura 6, la base es expresada por la suma de la longitud fija y la longitud variable como 2+6, la altura permanece invariable con el valor 2. En la determinación del área para el mismo rectángulo es expresada como la existencia de producto (2+6) (2) y expresada como potencia más producto 2^2+(6)(2), ver figura 11.

Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo	
			Expresada como producto	Expresada como potencia+producto
1	2+1	2	(2+1)(2)	2^2+(1)(2)
2	2+2	2	(2+2)(2)	2^2+(2)(2)
3	2+3	2	(2+3) (2)	2^2 + (3) (2)
4	2 +4	2	(2+4) (2)	2^2 + (4) (2)
5	2 +5	2	(2+5) (2)	2^2+ (5) (2)
6	2 + 6	2	(2+6) (2)	2^2 +(6) (2)

Figura 11. Ester identifica las generalizaciones y realiza sus conjeturas para el área de cada figura.

En la fase 2, los estudiantes continúan con la determinación de las áreas de los rectángulos ubicados en las posiciones 10, 74 y 100. En esta fase de la tarea 3, han detectado una conexión entre el área, la multiplicación y la propiedad distributiva, como se observa en la figura 12, para determinar el área de cada rectángulo.



Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo	
			Expresada como producto	Expresada como potencia+producto
74	2+74	2	(2+74)(2)	2^2+(74)(2)
100	2+100	2	(2+100)(2)	2^2+(100)(2)

Figura 12. Sara detecta la conexión entre la longitud variable del rectángulo y la posición de la figura.

Los estudiantes argumentan la forma en que abordaron esta segunda Fase de la Tarea 3:

Ester: "pues como primer dato en el rectángulo nos da la altura que es 2 después la base se da conforme cambie como figura 1, figura 2, etc. y así sucesivamente" (HT3-E)

Moisés: "siguiendo la secuencia, buscamos los valores que corresponde a la figura y agregando el valor a sumar o agregar y así poderlo ubicar en la tabla" (HT3-M)

Sara: "Las figuras mostradas al principio están posicionadas en diferente número, *yo pude notar que la posición del número era la longitud del rectángulo* con esto también note que la longitud fija se tendrá que colocar el 2, yo me guié con ello para contestar las siguientes figuras*"* (HT3-S)

En el comentario de Sara, específicamente en la parte resaltada en cursiva, se identifica la capacidad de la estudiante para relacionar la posición de la figura con la longitud variable del rectángulo, lo cual es de fundamental importancia en el proceso de generalización.

Fase 3, describe un rectángulo ubicado en la posición x, y x representa un número natural. Los estudiantes han comprendido la conexión existente entre área, multiplicación y la aplicación de la propiedad distributiva en forma intuitiva. La expresión general del área para este rectángulo es expresada como producto (2+x)(2) y como potencia más producto 2^2+(x)(2), ver figura 13. Sin embargo, para una estudiante participante su propuesta de expresión general implica dar un valor a ***x*** y elige el número natural 12. Así, las expresiones de área como producto es (2+12)(2) y de potencia más producto es 2^2+(12)(2), ver figura 14.

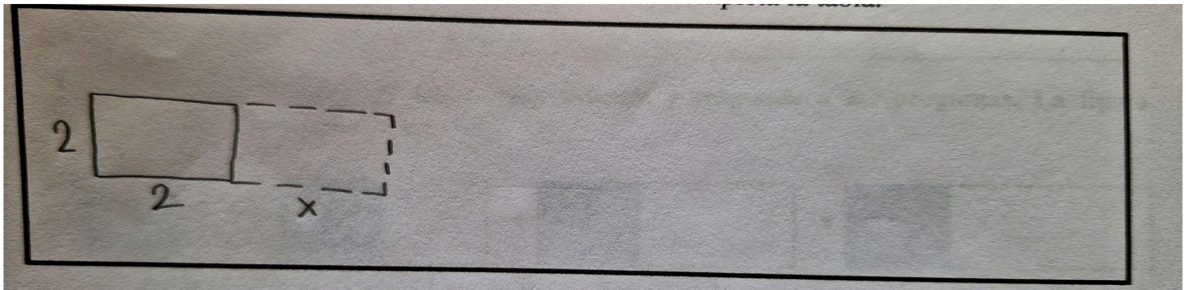
La justificación de los resultados, por los estudiantes, es la siguiente:

Ester: **"**pues sigue siendo la misma altura 2 y ***x*** *representa un número natural y en todo caso elegi 12 para poder contestar la tabla*" (HT3-E)

Moisés: **"***Primero ubicamos* ***x*** *y como no tiene un valor como tal se queda como* ***x*** y como en todas las figuras nos dan el valor de la altura y parte de la base que es 2 y ya solo ubicamos los datos en la tabla" (HT3-M)

Sara: **"**En la instrucción sólo nos llega a pedir el número natural, pero este no nos lo expresa por lo cual tomaremos como incógnita la, la altura sigue siendo 2 ya que en las demás figuras nos muestra una altura de dos, *ya que la incógnita sólo se sabe que es un número natural solo colocaremos la letra x*, está la tomaremos como un valor natural" (HT3-S)

En los extractos de las hojas de trabajo se tiene evidencia de que Ester puede pensar en cantidades generales y es capaz de simbolizarlas; sin embargo, en la viñeta previa se identifica una confusión en cuanto a que la *x* es una variable y puede tomar cualquier valor, pero en este caso asignó una cantidad determinada a *x*, cuando lo correcto era mantener la literal y la indeterminación de la cantidad. A diferencia de Ester los otros dos estudiantes si muestran un entendimiento claro de las cantidades indeterminadas y su uso.



Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo	
			Expresada como producto	Expresada como potencia+producto
x	2+x	2	(2+x)(2)	2^2+(x)(2)

Figura 13. Formulación de conjeturas, elaboración de expresión general del área.

Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo	
			Expresada como producto	Expresada como potencia+producto
x	2+12	2	(2+12)(2)	2^2+(12)(2)

Figura 14. Formulación de conjeturas, expresión general del área con ***x*=*12***.

4.4.4 Respuestas de los estudiantes a la tarea 4

Fase 1, presenta figuras geométricas que muestran un incremento igual, en la longitud de la base y la altura. Éste, es igual al número de unidades de la ubicación de cada figura, pero también, en todas las figuras la longitud de la base se aumenta en una unidad. Para los estudiantes, las tareas anteriores les permitieron interactuar y manejar los objetos para identificar características importantes, ello les da la oportunidad de definir los patrones en ésta tarea y pasar con facilidad de la multiplicación a la propiedad distributiva, ver figura 15.

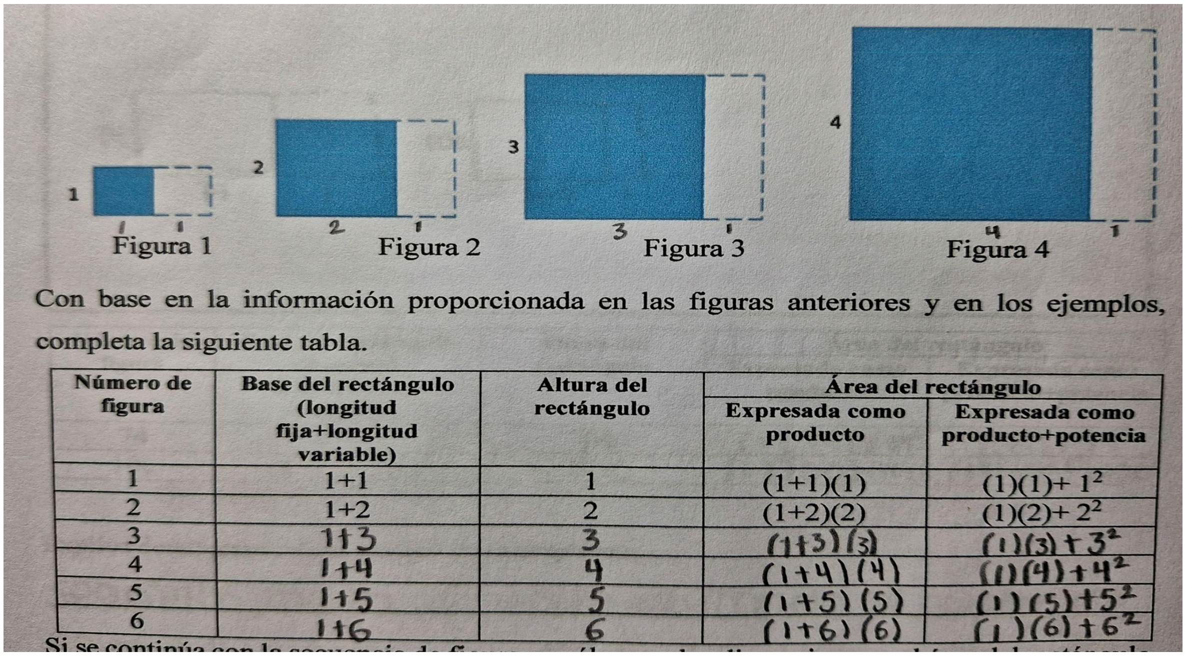


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Con base en la información proporcionada en las figuras anteriores y en los ejemplos, completa la siguiente tabla.

Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo: Expresada como producto	Área del rectángulo: Expresada como producto+potencia
1	1+1	1	(1+1)(1)	$(1)(1)+1^2$
2	1+2	2	(1+2)(2)	$(1)(2)+2^2$
3	1+3	3	(1+3)(3)	$(1)(3)+3^2$
4	1+4	4	(1+4)(4)	$(1)(4)+4^2$
5	1+5	5	(1+5)(5)	$(1)(5)+5^2$
6	1+6	6	(1+6)(6)	$(1)(6)+6^2$

Figura 15. Transformación después de aplicar la propiedad distributiva del producto, corresponde a la tarea 4.

Fase 2. Presenta figuras geométricas ubicadas en las posiciones 10, 74 y 100, con características semejantes a las ubicadas en las primeras posiciones, las tareas se encuentran en el apéndice B, que se localiza en las páginas 75 a 77 de esta tesis. Moisés lo comprende de la siguiente forma: "seguimos con la secuencia ubicando el número de figura y el valor que va a tomar la altura y parte de la base y ya lo único que se le va a sumar es el 1 y con eso podemos ubicar los datos en la tabla". Los estudiantes son capaces de visualizar la presencia de dos estructuras para expresar el área. Ésta, está compuesta por un producto y un producto más una potencia, en esta última se ha aplicado la propiedad distributiva, ver figura 16. La base de cada rectángulo es la suma de la longitud invariante y la longitud variable y la operación de la suma permanece en diversos momentos como es en la expresión del área como producto y al aplicar la propiedad distributiva. Para Ester, expresar el área como producto y producto más potencia, lo interpreta como la presencia únicamente de la multiplicación en ambas expresiones y suprimir las operaciones de suma, ver figura 17.

Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo	
			Expresada como producto	Expresada como producto+potencia
74	1+74	74	(1+74)(74)	(1)(74)+74²
100	1+100	100	(1+100)(100)	(1)(106)+100²

Figura 16. Sara expresa el área como producto más potencia, después de aplicar la propiedad distributiva.

Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo	
			Expresada como producto	Expresada como producto+potencia
74	1+ 74	74	(1) (74) (74)	(1) (74) 74²
100	1+100	100	(1) (100)(100)	(1) (100) 100²

Figura 17. Ester presenta la multiplicación en ambas expresiones del área.

Fase 3. La obtención de la expresión general para la figura que se encuentra en la posición x, donde x representa un número natural. Los estudiantes dibujan la figura para identificar las características importantes de la misma y poder trasladarlas a las expresiones numéricas. Las estructuras presentadas, por los estudiantes, para mostrar la expresión general del área, son: $(1)(x)+2^2$; $(1)(x)+2^2$; $(1)(15)+15^2$. En las tres expresiones aplicaron la propiedad distributiva. En la primera y segunda expresión, ***x*** permanece como valor variable y en la tercera expresión decide utilizar el número natural 15 como valor invariante. La explicación de cómo abordaron la fase de esta tarea, son expresados como sigue:

Ester: "pues x es un número normal y le dí el valor de 15 ya que puede ser un número cualquiera" (HT4-E)

Moisés: "Ubicamos el valor que nos dan que es 1 y ubicamos la posición de *x* como altura y base y con esos datos ya los podemos ubicar en la tabla" (HT4-M)

Sara: "En la figura que se realiza se colocara en una posición que tenga un número natural pero al no saber la posición se tomará como incógnita la cual mostraremos con la letra *x* que esta también será la altura de nuestra figura, mientras que la longitud se seguirá manteniendo en 1” (HT4-S)

4.4.5. Respuestas de los estudiantes a la tarea 5

Fase 1. La longitud de la base como de la altura de las figuras geométricas, es definida por un valor invariante *a,* las tareas se encuentran en el apéndice B, que se localiza en las páginas 69 a 86 de esta tesis. El valor variable está determinado por el incremento de una unidad a partir de la figura ubicada en el lugar número 2. El incremento es acumulativo. Los estudiantes muestran en sus tablas, que pasan del uso del simbolismo aritmético a la representación de la relación de la multiplicación y la suma, de ahí a la propiedad distributiva, ver figura 18.

Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo	
			Expresada como producto	Expresada como potencia+producto
1	$a+0$	a	$(a+0)$(a)	$a^2+(0)(a)$
2	$a+1$	a	$(a+1)$(a)	$a^2+(1)(a)$
3	a+ 2	a	(a+2) (a)	$a^2+(2)(a)$
4	a + 3	a	(a+ 3) (a)	$a^2+(3)(a)$
5	a + 4	a	(a+4) (a)	$a^2+(4)(a)$
6	a + 5	a	(a +5) (a)	$a^2+(5)(a)$

Figura 18. Ester pasa de la suma a la multiplicación y a la propiedad distributiva.

Fase 2. Para las figuras ubicadas en los lugares 10, 56 y 100; los estudiantes siguen el mismo proceso, de igual forma que interactuaron con los objetos de la Fase 1, de abordar esta tarea. Las generalizaciones identificadas les permiten establecer los patrones bajo los cuales aplicarán la propiedad distributiva. Sara lo explica de la siguiente forma: “En las figuras mostradas a un inicio podemos notar que su longitud en los recuadros va disminuyendo una unidad según la posición dada, por ejemplo, en la figura 56 se disminuye una unidad que sería 55 para la longitud mientras que la altura nos la da, ya que sería la letra a”. Moisés hace una argumentación semejante para justificar la formulación de sus conjeturas realizadas en la tabla, explica: “primero ubicamos la posición que nos pide, el cual se le restará 1 ya que en la figura inicial no se le suma nada, y con eso ya solo tenemos que ubicar los datos en la tabla". Los estudiantes, considerando los patrones que detectaron, aplican la propiedad distributiva para expresar el área de los rectángulos.

Fase 3. La figura geométrica de esta Fase es un cuadrado cuya longitud de la base y de la altura es identificada respectivamente como ***a*** y su base se incrementa en un número natural representado por ***x***, que a su vez representa también la ubicación de la figura geométrica. Los estudiantes aplican la propiedad distributiva a la estructura $(a+\mathrm{x})\ (a)$ para expresar el área como $a^2 + (\mathrm{x})(a)$. En esta Fase, se observó que los estudiantes fueron capaces de pensar en términos de cantidades generales y de representarlas mediante literales, aunque confunden los significados del término incógnita y variable, también fueron capaces de operar analíticamente las expresiones simbólicas expresadas mediante literales al identificar paralelismos entre las expresiones que operan con números concretos y aquellas que contienen cantidades indeterminadas expresadas por literales. Todo lo anterior incluye los tres elementos que Radford (2006, 2010, 2012) considera relevantes para determinar si un estudiante es capaz de pensar algebraicamente. A pesar de que los estudiantes pudieron aplicar la propiedad distributiva, hace falta evidencia de que puedan transferir este conocimiento a situaciones en las cuales no exista un modelo el cual ellos puedan replicar para la aplicación de la propiedad. Sin embargo, existe evidencia que los estudiantes pudieron identificar lo variable y lo constante en las secuencias figurales, y fueron capaces de generalizar resultados, lo cual es uno de los primeros pasos en la construcción de significado para las expresiones simbólicas. Las expresiones no muestran que x es disminuida en una unidad, representada como ***x-1***. Los estudiantes justifican sus conjeturas:

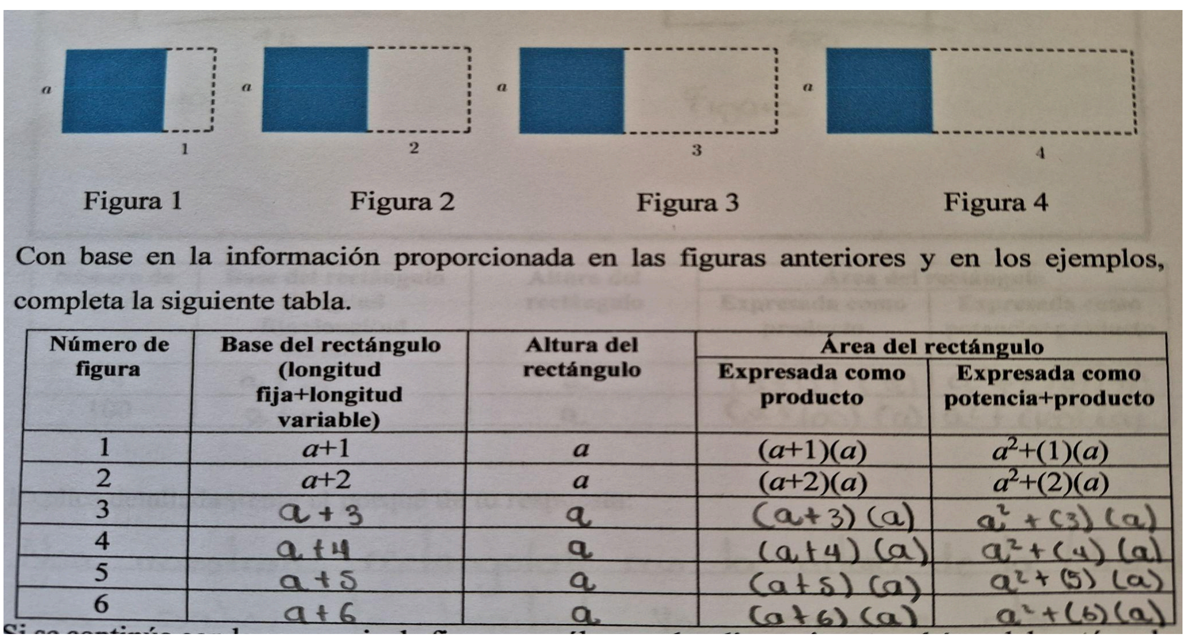
Ester: "Sería la misma altura **(a)** y la longitud sería **(x)** ya que representa un número natural" (HT5-E)

Moisés: "La posición **x** no tiene un valor como tal entonces el lado **a** sumar será **x** y con eso podemos ubicar los datos en la tabla y con las figuras anteriores podemos determinar que la altura es **a** y parte de la longitud es **a**" (HT5-M)

Sara: "En la indicación dada nos muestra que **x** será el valor natural del ejercicio ya que será una incógnita para la cantidad mientras que en la altura llegamos a notar que seguirá siendo **a**" (HT5-S)

4.4.6. Respuestas de los estudiantes a la tarea 6

Fase 1. La tarea presenta cuadrados con la longitud de la altura y la base igual a ***a***. Su base se incrementa una unidad y se acumula de acuerdo a la ubicación de cada figura. Los estudiantes interactúan con mayor facilidad con los objetos y detectan las características importantes y los patrones existentes. Identifican la conexión entre suma, multiplicación y la propiedad distributiva, ver figura 19. El área expresada como producto es igual al área expresada como potencia más producto, $(a+6)(a)=a^2+(6)(a)$. En el segundo miembro de la igualdad, aplicaron la propiedad distributiva en forma fácil.



Con base en la información proporcionada en las figuras anteriores y en los ejemplos, completa la siguiente tabla.

Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo: Expresada como producto	Área del rectángulo: Expresada como potencia+producto
1	$a+1$	a	$(a+1)(a)$	$a^2+(1)(a)$
2	$a+2$	a	$(a+2)(a)$	$a^2+(2)(a)$
3	$a+3$	a	$(a+3)(a)$	$a^2+(3)(a)$
4	$a+4$	a	$(a+4)(a)$	$a^2+(4)(a)$
5	$a+5$	a	$(a+5)(a)$	$a^2+(5)(a)$
6	$a+6$	a	$(a+6)(a)$	$a^2+(6)(a)$

Figura 19. Conexión entre suma, multiplicación y la propiedad distributiva, esta figura corresponde a la tarea número 6.

Fase 2. Para los rectángulos ubicados en las posiciones 10, 74 y 100, los estudiantes abordan de igual forma que en Fase 1, los objetos matemáticos para detectar características que les lleven a identificar patrones. Moisés lo expresa por escrito de la siguiente forma: "como al principio de las figuras ubicamos que la altura tiene un valor de **a** y parte de la longitud vale **a** solo ubicamos la posición de la figura para obtener el resto de la longitud y ya solo ubicamos los datos en la tabla" (HT6-M). Las tareas permitieron a los estudiantes desarrollar sus propias formas de entender y de llegar a la estructura de la propiedad distributiva, al determinar las áreas de los diferentes rectángulos. Una evidencia de lo anterior, es que los estudiantes, a partir de los modelos en las secciones iniciales de las hojas de trabajo, fueron capaces de transferir a las operaciones con números generales, las regularidades que ellos observaron en la estructura aritmética de las expresiones con números específicos, lo cual es un indicador relevante del pensamiento algebraico. Aunque los estudiantes no utilizan un lenguaje institucionalizado adecuado, ya que confunden las ideas de incógnita y de variable, son capaces de identificar regularidades y generalizarlas, lo cual es un primer paso para dar sentido a las cantidades indeterminadas y a las operaciones que se realizan con ellas, de forma que se dan cuenta de las similitudes entre las operaciones con números concretos y números indeterminados.

Para esta Fase 3, la figura geométrica está ubicada en la posición x, y x representa un número natural. Para los estudiantes, su experiencia de haber observado la presencia de patrones en las tareas anteriores, les permite abordar con mucha facilidad los ejercicios propuestos en esta tarea. El área expresada como producto es $(a+\mathrm{x})\ (a)$ y aplicando la propiedad distributiva la expresan como $a^2+(\mathrm{x})(a)$. Sara argumenta y comunica el proceso para llegar al resultado como: "En la indicación solo nos da a entender que **x** será un número natural al igual que la posición ubicada con esta, *la longitud al no saberla será **x** que se tomará como una incógnita*, mientras que la altura seguirá siendo el mismo valor y se demostrará con la letra **a**" (HT6-S).

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones de la investigación, haciendo énfasis en las respuestas que aportaron los participantes, con lo cual se tienen elementos para dar respuesta a la pregunta de investigación. También se comparan los resultados obtenidos en este trabajo con los de algunas de las investigaciones revisadas en el primer capítulo de la tesis, con la finalidad de resaltar las posibles contribuciones. Finalmente, se expresan algunos comentarios y reflexiones finales, encaminados a comunicar qué fue lo que aprendió el autor del trabajo durante el proceso de elaboración del trabajo de tesis.

5.1. Discusión de resultados

En este apartado se presentan los resultados de un estudio sobre el uso de tareas a través de las cuales los participantes visualizaron la identificación y generalización de patrones en secuencias figurales para dar sentido a la propiedad distributiva del producto respecto de la suma. Los datos empíricos permiten afirmar que los estudiantes, en mayor o menor medida, son capaces de pensar algebraicamente, ya que pueden pensar en cantidades generales, expresarlas simbólicamente y operar tales expresiones simbólicas (Radford, 2006, 2010, 2012). Mediante las secuencias figurales, los estudiantes lograron extender las propiedades aritméticas de las operaciones con números concretos, cuando tuvieron que operar con cantidades indeterminadas. Fueron capaces de aplicar la propiedad distributiva siguiendo los modelos expresados en las hojas de trabajo; sin embargo, no se cuenta con evidencia que permita afirmar su capacidad para transferir ese conocimiento a situaciones en las cuales no haya presente un modelo que puedan reproducir. En esta sección, los resultados son comparados con los resultados de otros investigadores que han analizado la aplicación de la propiedad distributiva.

Los resultados de las tareas aportan evidencia de que los participantes son capaces de visualizar e identificar los elementos variables e invariantes en una secuencia figural, así como de generalizar patrones en dichas secuencias, así como de aplicar la propiedad distributiva cuando tienen un ejemplo que replicar. Se reitera que existe evidencia para afirmar que los estudiantes fueron capaces de transferir la estructura aritmética de las operaciones con números concretos a operaciones análogas con cantidades indeterminadas representadas mediante literales. Se compara con los resultados de Olteanu (2017) en el uso de tareas como una oportunidad para que los participantes lleguen a discernir sobre la propiedad distributiva.

Las estructuras que los participantes visualizan en la identificación y generalización de los patrones sobre las secuencias figurales y en las secuencias numéricas de las tareas, son estructuras que ellos repiten en las transformaciones sintácticas, con diferentes variables al aplicar la propiedad distributiva sobre el producto. Esto se compara con los resultados de la investigación de Maffia y Mariotti (2017), sobre el desarrollo del sentido de estructura como apoyo al entendimiento de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

En los participantes, se observó que la aplicación de la propiedad distributiva se presenta como un ciclo de observación, reflexión y comunicación escrita, el cual fue promovido por la estructura de las hojas de trabajo. En primer lugar los estudiantes observaron las cantidades variables e invariantes al operar con números concretos, con la finalidad de que reflexionaran sobre el comportamiento de las secuencias figurales. El proceso de comunicación de ideas, cuando ellos tuvieron que completar la información en los recuadros referentes a términos no consecutivos de la secuencia, les facilitó el proceso de generalización para considerar la estructura del término genérico representado mediante la literal x. Se compara y reafirma con (Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez, 2016) que explican este ciclo, en forma más amplia, para el desarrollo del aprendizaje matemático con entendimiento y que lo describen en cuatro fases: acción, observación, formulación y justificación de resultados.

5.2. Respuesta a la pregunta de investigación

La pregunta de investigación propuesta al final del primer capítulo de este trabajo es: ¿Cómo el uso de tareas sobre identificación y generalización de patrones en secuencias figurales apoya el entendimiento de la propiedad distributiva en estudiantes de segundo semestre de bachillerato? Para dar respuesta a esta pregunta de investigación se elaboró la tabla 3 que describe los resultados identificados en las tareas abordadas por los participantes.

Tabla 3. Datos obtenidos de las tareas abordadas por los participantes.

Tarea	Datos obtenidos
2	● Identifican patrones en secuencias figurales. ● Identifican generalizaciones en secuencias numéricas en la primera tabla y las repiten en las siguientes tablas de la tarea. ● Realizan las transformaciones sintácticas de áreas aplicando la propiedad distributiva (PD). ● Aplican correctamente la PD sobre el área expresada como producto. ● Comunican en forma escrita sus conjeturas de cómo identificaron los patrones en las secuencias numéricas.
4	● Identifican los patrones de las secuencias figurales y secuencias numéricas e interactúan con ellas para realizar las transformaciones sintácticas y aplicar la PD. ● Los patrones identificados en las primeras secuencias figurales, son consideradas por los participantes en los dibujos de las siguientes figuras de la secuencia figural. ● En las secuencias numéricas aplican correctamente la PD en las áreas expresadas como producto. ● En las secuencias figurales y secuencias numéricas insertan una variable **x** y aplican correctamente la PD sobre el área expresada como producto. ● Comunican en forma escrita como abordaron las secuencias numéricas haciendo énfasis en la identificación y repetición de los patrones en el desarrollo de las transformaciones sintácticas y la aplicación de la PD del producto.
6	● Identifican las generalizaciones de patrones en la primera secuencia figural, en la cual se insertó una variable. ● Identifican los patrones en las primeras secuencias figurales para repetirlas en las subsiguientes figuras, dibujadas por los participantes, y aplica correctamente la PD en el área expresada como producto en las secuencias numéricas. ● En las últimas figuras con las variables ***a*** y ***x*** ; aplica correctamente la PD en el área expresada como producto respecto de la suma. ● Comunican en forma escrita y verbal sus conjeturas, explicando cómo identificaron las generalizaciones y el uso de ellas para aplicar la PD sobre el producto respecto de la suma.

Fuente: Elaboración propia.

Se observa que los participantes realizan procesos en cada una de las tareas que abordaron y se perciben tres aspectos importantes: (i) Identifican las generalizaciones de los patrones en las secuencias figurales y secuencias numéricas, (ii) Aplican correctamente la propiedad distributiva del producto y (iii) Comunican sus conjeturas de las transformaciones desarrolladas.

Es necesario hacer notar que los participantes, a través de ir desarrollando las tareas, también van desarrollando su capacidad para identificar patrones y ser generalizados, así como para aplicar la propiedad distributiva con base en los modelos señalados en las hojas de trabajo; mostrando capacidad para transferir las propiedades aritméticas empleadas al trabajar con cantidades concretas a las operaciones con cantidades indeterminadas representadas mediante literales. Una vez realizadas la identificación y generalización de los patrones en las secuencias figurales como en las secuencias numéricas, realizan las transformaciones sintácticas, en las cuales aplican en forma correcta la propiedad distributiva sobre el producto.

Se observa una capacidad para aplicar la propiedad distributiva del producto mediante la visualización de los modelos propuestos en las hojas de trabajo, por los participantes, aunque hace falta evidencia de que pueden transferir este conocimiento a situaciones donde no exista un modelo. Los procesos de comunicación de ideas, verbalmente y por escrito, permitieron identificar algunas confusiones presenten en estudiantes como Ester, quien confunde la idea de incógnita como la de variable, y quien tiene una confusión respecto a cuándo mantener las cantidades indeterminadas y en qué situaciones se les tiene que asignar algún valor específico.

5.3. Alcances, limitaciones y propuestas a futuro

Uno de los propósitos de esta investigación, ha sido documentar cómo estudiantes de segundo semestre de bachillerato abordan la propiedad distributiva del producto respecto de la suma a través de tareas con patrones figurales y patrones numerales. Los participantes en la investigación fueron tres estudiantes de nivel bachillerato. Los resultados obtenidos, si bien aportan elementos interesantes en cuanto al entendimiento de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, no pueden ser extrapolados para llevar a cabo el diseño de una propuesta para ser aplicada ampliamente; sin embargo, se debiera continuar la exploración, aplicando tareas similares, para obtener elementos más robustos que permitan fundamentar sólidamente la elaboración de una propuesta de aprendizaje de la propiedad distributiva. Este trabajo podría ser uno de los puntos de partida para continuar trabajos que documentan ampliamente el impacto de ciertas tareas para lograr un aprendizaje de la propiedad distributiva con entendimiento. Por lo que también es importante considerar realizar el estudio a un número más amplio de estudiantes de bachillerato.

5.4. Reflexiones y conclusiones finales

Los resultados de este trabajo evidencian que las tareas que combinan representaciones geométricas y numéricas permiten a los estudiantes identificar patrones y entender la construcción de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma. Las respuestas de los participantes en cada una de las 6 tareas abordadas por ellos, dan evidencia de cómo percibieron la propiedad distributiva y de cómo realizaron su aplicación en el producto a través de identificar los patrones en las secuencias figurales y llevar a cabo las transformaciones en las secuencias numéricas, ver figura 15.

Los participantes siguieron las cuatro fases del proceso de aprendizaje con entendimiento de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma (Barrera y Reyes, 2016). En la primera fase de acción, los participantes interactúan con las secuencias figurales y secuencias numéricas identificando las características importantes. En la segunda fase de observación, trabajan con los patrones identificados a través de repetirlos en las siguientes figuras que dibujan como en la construcción de las estructuras numéricas que desarrollan. Con las abstracciones que han realizado, identificando los patrones, inician con la tercera fase, consistente de la formulación del planteamiento de sus conjeturas, construyendo transformaciones sintácticas, en las cuales aplican correctamente la propiedad distributiva en el producto respecto de la suma. En la cuarta fase de justificación, argumentan y comunican, por escrito y verbal, sus resultados de las tareas abordadas por los participantes.

Otro aspecto observado en los resultados de las tareas, es que los participantes aplican correctamente la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, tanto con valores numéricos como con diversas variables, mostrando con ello, un entendimiento y manejo de la propiedad distributiva.

Durante el desarrollo del presente trabajo de tesis me permitió aprender y descubrir: (i) La importancia de la propiedad distributiva en aritmética como en álgebra, (ii) Entender que la propiedad distributiva se relaciona con las operaciones básicas de la multiplicación y la suma, (iii) Observar que los estudiantes abordan tareas dirigidas a hacerlos reflexionar sobre lo que están construyendo y que les permite comunicar los procesos por escrito y verbal, (iv) El diseño de las tareas son una herramienta importante para que los estudiantes aborden diversos temas matemáticos, (v) El uso de patrones matemáticos en el diseño de las tareas permite a los estudiantes entender estructuras matemáticas sobre las cuales reflexionan, desarrollan y comunican, y (vi) La utilización de la metodología de investigación para abordar un tema matemático con un enfoque cualitativo. Estos elementos me han permitido analizar un cambio paulatino en la mejora de mi práctica docente en: (i) Elaboración de tareas con diversos temas matemáticos dirigidos a hacer reflexionar a los estudiantes para que encuentren una oportunidad que les permita utilizar sus habilidades y conocimientos que poseen, (ii) Dar énfasis en la enseñanza de los patrones matemáticos en las diversas tareas que aborden los estudiantes de bachillerato en la asignatura de matemáticas que les permita el entendimiento de ella, (iii) Tomando como ejemplo las tareas que apliqué a los estudiantes, diseñe para la asignatura de pensamiento matemático I, cuyo contenido se enfoca a probabilidad y estadística, la tarea que permite utilizar patrones para abordar la medida de tendencia central: media, ver apéndice C.

REFERENCIAS

American Psychological Association [APA] (2020). *Publication manual of the American Psychological Association*. Washington, DC: American Psychological Association.

Ander-Egg, E. (2011). *Aprender a investigar: nociones básicas para la investigación social*. Córdoba: Editorial Brujas.

Arcavi, A. (2003) The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies of mathematics, 52*(3), 215-241. doi: https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Ardiansari, L., & Wahyudin (2020). Operation sense in algebra of junior high school students through an understanding of distributive law. *Journal of Physics: Conference Series, 1521*. doi: http://doi.org/10.1088/1742-6596/1521/3/032003

Barrera-Mora, F., & Reyes-Rodriguez, A. (2016). Designing technology-based tasks for enhancing mathematical understanding through problem solving. In L. Uden, D. Liberona and B. Feldmann (Eds.), *Learning Technology for Education in Cloud: The Changing Face of Education. Communications in Computer and Information Science 620* (pp. 183-192). Cham: Springer. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-42147-6_16

Barrera-Mora, F., Reyes-Rodriguez, A., Campos-Nava, M., y Rodriguez-Alvarez, C. (2021). Resolución de problemas en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. *PADI Boletín Científico de Ciencias e Ingenierías del ICBI, 9* (especial), 10-17. doi: https://doi.org/10.29057/icbi.v9iEspecial.7051

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham: Open University Press.

Butto, Z.C., & Rojano, C.T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. Educación matemática. 22(3). 55-86. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516678004

Chen, T., & Cai, J. (2020). An elementary mathematics teacher learning to teach using problem posing: A case of the distributive property of multiplication over addition. *International Journal of Educational Research, 102*. doi: https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.03.004

Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1992). Interaction and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 99–122. doi: https://doi.org/10.1007/BF00302315

Common Core State Standards Initiative [CCSSI] (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, D.C.: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. https://bit.ly/3AGUE8j

Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2007). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches*. SAGE.

Cunningham, J., & Fitzgerald, J. (1996). Epistemology and reading. *Reading Research Quarterly*, 31(1), 36-60. https://www.jstor.org/stable/748239

Denham, A. R. (2015). Supporting conceptual understanding of the associative and distributive properties through digital gameplay. *Journal of Computer Assisted Learning, 31*, 706-721. doi: https://doi.org/10.1111/jcal.12113

Ding, M., & Li, X. (2010). A comparative analysis of the distributive property in U.S. and Chinese elementary mathematics textbooks. *Cognition and Instruction, 28*(2), 146-180. doi: https://doi.org/10.1080/07370001006385553

Ding, M., & Li, X. (2014). Transition to concrete to abstract representations: The distributive property in a Chinese textbook series. *Educational Studies in Mathematics, 87*, 103-121. doi: https://doi.org/10.1007/s10649-014-9558-y

Duran, M. M. (2015). El estudio de caso en la investigación cualitativa. *Revista Nacional de Administración, 3*, 121-134. https://doi.org/10.22458/rna.v3i1.477

Eccius-Wellmann, C. (2012). The need to know algebra skills, misconceptions, misapplications and weaknesses of students. *China-USA Bussiness Review, 11*(9), 1256-1266. doi: https://doi.org/10.17265/1537-1514/2012.09.008

Eisenhart, M.A. (1991) Conceptual Frameworks for Research Circa 1991: Ideas from a Cultural Anthropologist; Implications for Mathematics Education Researchers. *Proceedings of the 13th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 202-219). https://bit.ly/4hSuvDt

Flick, U. (2009). *An introduction to qualitative research* (4th edition). London: Sage.

Flick, U. (2015). *El diseño de investigación cualitativa*. Madrid: Ediciones Morata.

García, M. J. M., & Castro, A.M.P. (2017). La investigación en educación. In L. P. Mororó, M.E.S. Couto, & R.A.M. Assis (eds.), *Notas teórico-metodológicas de pesquisas em educação: concepções e trajetórias* (pp. 13-40). Ilhéus: Editus. doi: https://doi.org/10.7476/9788574554938

García-Salazar, E. M. (2019). El agua residual como generadora del espacio de la actividad agrícola en el Valle del Mezquital, Hidalgo, México. *Estudios Sociales, 29*(54), 1-34. doi: https://dx.doi.org/10.24836/es.v29i54.741

Geisler, S., & Rolka, K. (2020). "That wasn't the math I wanted to do!" - Student' beliefs during the transition from school to university mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 19, 599-618. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10072-y

Guba, E. (1989). Criterios de credibilidad en la investigación naturalista. In J. Gimeno Sacristán y A. Pérez Gómez (eds.), *La enseñanza: su teoría y su práctica* (pp. 148-165). Madrid: Akal. https://bit.ly/4lcl58j

Hackenberg, A.J., & Lee, M.Y. (2016). Students' distributive reasoning with fractions and unknowns. *Educational Studies in Mathematics, 93*, 245–263. doi: https://doi.org/10.1007/s10649-016-9704-9

Hernández, S. R., et al. (2006). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill Interamericana.

Hersh, R. (1986). Some proposals for reviving the philosophy of mathematics. In T. Tymoczko (Ed.), *New Direction in the Philosophy of Mathematics: An Anthology*. (pp.). Boston: Birkhauser. doi: https://doi.org/10.1016/0001-8708(79)90018-5

Hiebert, J., Carpenter, T., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Murray, H., Oliver, A. & Human, P. (1997). *Making Sense: Teaching and learning Mathematics with Understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann..

Jones, T. et al. (2003). Defining Learning Communities. Centre for Research & Learning Communities Australia. CRLRA, Discussion Paper Series ISSN 1440 - 480X. University of Tasmania. https://bit.ly/3QYahg3

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by algebrafying the K-12 curriculum*. Dartmouth: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED441664.pdf

Kazdin, A. E. (1982). *Single-case designs: Methods for clinical and applied settings*. New York: Oxford University Press.

Kazdin, A. E. (2016). *Research design in clinical psychology*. Boston, MA: Pearson.

Kinzer, C. J., & Stanford, T. (2014). The distributive property: The core of multiplication. *Teaching Children Mathematics, 20*(5), 302-309. https://www.jstor.org/stable/10.5951/teacchilmath.20.5.0302

Lee, Y., & Heid, M. K. (2018). Developing a structural perspective and its role in connecting school algebra and abstract algebra: A factorization example. In N. H. Wasserman (Ed.), *Connecting abstract algebra to secondary mathematics, for secondary mathematics teachers* (pp. 291-318). Cham: Springer. do.: https://doi.org/10.1007/978-3-319-99214-3_14

Lester, F.K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundation for research in mathematics education. ZDM: *the international journal on mathematics education*, 37(6), 457-467. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2_8

Lima-Badillo, F. (2018). *Entendimiento de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma: tareas con patrones*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. https://bit.ly/4i1sMvg

Lo, J. J., Grant, T. J., & Flowers, J. (2008). Challenges in deepening prospective teachers' understanding of multiplication through justification. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(1), 5–22. doi: https://doi.org/10.1007/s10857-007-9056-6

Marczyk, G., DeMatteo, D., & Festinger, D. (2005). *Essentials of research design methodology*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Maffia, A., & Mariotti, M. A. (2017). Seeking symmetry in distributive property: Children developing structure sense in arithmetic. *CERME 10*. Dublin, Ireland. https://bit.ly/4cetwvv

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Oxford: Routledge.

Mok, I. A. C. (2010). Students' algebra sense via their understanding of the distributive law. *Pedagogies: An International Journal, 5*(3), 251-263. doi: https://doi.org/10.1080/1554480X.2010.486156

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156. https://doi.org/10.30827/pna.v3i3.6186

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Olteanu, L. (2017). Distributive law as object of learning through direct and inverse tasks. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 6*(1), 56 - 65. doi: https://doi.org/10.1108/IJLLS-05-2016-0014

Ortega, R. & Fernández, J. (2014). La ontología de la educación como un referente para la comprensión de sí mismo y del mundo. *Sophia: colección de Filosofía de la Educación, 17*(2),37-57. doi: http://doi.org/10.17163.soph.n17.2014.15

Otzen, T., y Manterola, C. (2017). Técnicas de muestreo sobre una población a estudio. *International Journal of Morphology, 35* (1), 227-232. doi: https://dx.doi.org/10.4067/50717-95022017000100037

Piaget, J. (1977). *Epistemología genética*. Buenos Aires: Solpus.

Polya, G. (1963). On learning, teaching and learning teaching. *The American Mathematical Monthly*, 70, 605-619. doi: https://doi.org/10.2307/2311629

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. *PNA, 1*, 1-21. doi: https://www.researchgate.net/publication/239933692

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4* (2), 37-62. doi: https://doi.org/10.30827/pna.v4i2.6169

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA, 6*(4), 117 - 133. doi: https://doi.org/10.30827/pna.v6i4.6139

Santos - Trigo, M. Vargas - Jarillo, C. (2003). Más allá del uso de exámenes estandarizados. *Avance y Perspectiva, 22*, 9 - 22.

Santos-Trigo, M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. Cinvestav - IPN. 27. https://bit.ly/3XChE0v

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan. https://doi.org/10.1177/00220574161960

Schueler-Meyer, A. (2016). Flexibility applying the distributive law - students' individual ways of perceiving the distributive property. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12*(10), 2719-2732. doi: https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1307a

Secretaría de Economía [SE] (s.f.). *Santiago de Anaya*. Recuperado el 27 de septiembre de 2024 de https://bit.ly/4eqFdjm

Simon, M. & Schifter, D. (1993). Toward a constructivist perspective: the impact of a mathematics teacher inservice program on students. *Educational Studies in Mathematics, 25*, 331 - 340. doi: https://doi.org/10.1007/BF01273905

Stake, R. E. (2005). Qualitative case studies. In N. K. Denzin, & Y. Lincoln (Eds.), *The SAGE handbook of qualitative research, 3rd edition* (pp. 443-466). Thousand Oaks, CA: SAGE.

Steen, L. A. (1988). The science of patterns. *Science*, 240, 611-616. doi: https://doi.org/10.1126/science.240.4852.611

Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. New York: Springer.

Tamayo, M. (2004). *El proceso de la investigación científica* (4a. edición). México: Limusa.

Vermeulen, N., Olivier, A., & Human, P. (1996). Students' awareness of the distributive property. In L. Puig, & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (pp. 379-386). Valencia: PME. https://academic.sun.ac.za/mathed/malati/files/spanje.pdf

Vite Vega, Arlette, Cortez Yacila, H. M., y Gutiérrez Martínez, Y. U. (2023). Estructura económica del sector manufacturero de la subregión Actopan, Valle del Mezquital, Hidalgo, 2004-2019. In J. E. Isaac Egurrola (coord.), *Nuevas territorialidades-economía sectorial y reconfiguración territorial* (pp. 13-32). México: UNAM-AMECIDER. https://bit.ly/41S7j1A

Wertsch, J. V.(1993). *Voces de la mente: un enfoque sociocultural de la acción mediada*. Visor distribuciones.

White, H. C. (1992). Cases are for identity, for explanation, or for control. In C. C. Ragin, & H. S. Becker (eds.), *What is a case? Exploring the foundations of social inquiry* (pp. 83-104). Cambridge: Cambridge University Press.

Windsor, W. (2010). Algebraic thinking: A problem solving approach. L. Sparrow, B., Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 665-672). MERGA. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED521033.pdf

Yung, Y. C., Leung, Y. T., Lau, Y. C., & Yu, W. S. (2003). *Primary mathematics, 3C*. Hong Kong: Longman Hong Kong Education.

Zull, J.E. (2002). *The art of changing the brain*. Virginia: Stylus Publishing.

APÉNDICE A. Oficio de autorización para la participación de estudiantes en la investigación.

Oficio de autorización para la participación de los estudiantes

Santiago de Anaya, Hidalgo a los 27 días del mes de junio de 2023.

Oficio dirigido a padres (madres) o tutores(as) de estudiantes para solicitar permiso de que sus hijos(as) o tutorados(as) participen en proyecto de investigación.

Estimado C. ______________________________, padre (madre) o tutor(a) del estudiante ____________________________________. El que suscribe, Profr. Javier Triana Bernal, docente de Matemáticas del Colegio de Bachilleres del Estado de Hidalgo plantel Santiago de Anaya, solicito autorización para que su hijo(a) participe en la realización de una actividad diseñada para el aprendizaje del álgebra.

Los datos derivados de dicha actividad (grabaciones en video y hojas de trabajo), se utilizarán en la realización de una tesis, a través de la cual pretendo obtener el grado de Maestro en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica, por la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Dicha tesis se enmarca dentro del proyecto de investigación "Diseño de tareas de aprendizaje enfocadas al desarrollo del pensamiento algebraico", el cual está coordinado por los Doctores Fernando Barrera Mora y Aarón Víctor Reyes Rodríguez, profesores investigadores del Área Académica de Matemáticas y Física de la UAEH, quienes fungen como director y codirector del trabajo de tesis.

Es importante mencionar que durante y después del proceso de recolección de la información, nos ceñiremos a las normas éticas y de confidencialidad establecidas en la séptima edición del Manual de Estilo de la American Psychological Association. Lo anterior significa que en durante la grabación de video no se harán tomas del rostro de sus menores hijos(as) y que, en la redacción de la tesis o posibles artículos de investigación derivados, se asignará un seudónimo a los participantes, con el fin de que no se pueda identificar de qué escuela o persona se trata. También nos comprometemos a que los vídeos únicamente serán revisados por el Profr. Triana y por el director y el codirector de tesis. Los videos originales no se harán públicos por medio alguno y permanecerán bajo el resguardo de los coordinadores del proyecto en las instalaciones de la UAEH.

Con la finalidad de que puedan ustedes verificar el cumplimiento de los compromisos anteriores, les haremos llegar por escrito, las ligas electrónicas o copias de los documentos que se publiquen ya sea formato digital o impreso, respectivamente.

El que usted proporcione el permiso o no, para que su hijo participe en la actividad referida no afectará negativamente su evaluación en el curso, ya que la participación es completamente libre y voluntaria, y usted tiene derecho a suspender el permiso en el momento que lo desee, sin tener que dar explicación alguna. Es importante mencionar que la realización de la actividad no implica ningún riesgo de daño físico o psicológico para el participante.

Agradecemos sinceramente la atención prestada al presente comunicado. Saludos cordiales.

Una vez leída la comunicación, proporcionó autorización para que mi hijo participe en la realización de la actividad para el aprendizaje del álgebra

____

C. Nombre del padre (madre) o tutor(a)

Nota. Se muestra únicamente el machote del oficio que firmó cada uno de los padres de familia o tutores de los estudiantes. Los oficios firmados se encuentran bajo resguardo de los responsables del proyecto de investigación, y no se muestran en este trabajo para mantener confidencial la información personal de los participantes y de sus familiares.

APÉNDICE B. Hojas de trabajo de las tareas.

Tarea 1

Fecha: ______________________

Nombre del alumno: ____

Instrucciones. Completa la información faltante y responde a las preguntas. La figura azul es un cuadrado.

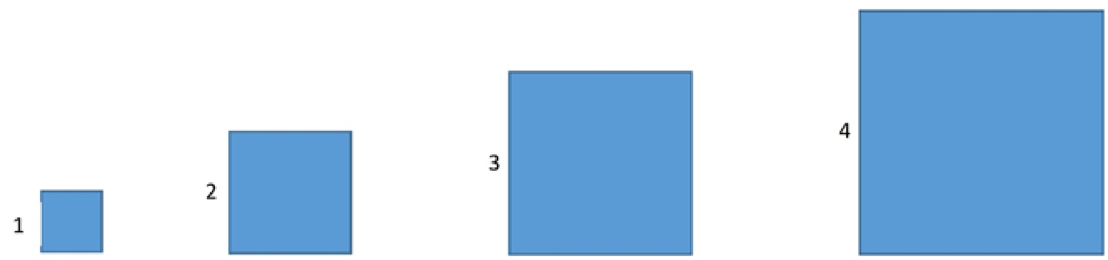


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Con base en la información proporcionada en las figuras anteriores y en los ejemplos, completa la siguiente tabla Provisional.

Número de figura	**Base del cuadrado**	**Altura del cuadrado**	**Área del cuadrado**	
			Expresada como producto	**Expresada como potencia**
1	1	1	(1)(1)	1^2
2	2	2	(2)(2)	2^2
3				
4				
5				
6				

Si se continúa con la secuencia de figuras, cuáles son las dimensiones y el área del cuadrado que se encuentra en la posición 10. Dibuja en el recuadro la figura que corresponde y a continuación completa la tabla.

Número de figura	Base del cuadrado	Altura del cuadrado	Área del cuadrado	
			Expresada como producto	Expresada como potencia
10				

Si se continúa con la secuencia de figuras, cuáles son las dimensiones y el área los cuadrados que se encuentran en las posiciones 40 y 100. Dibuja en el recuadro las figuras que corresponde y a continuación completa la tabla.

Número de figura	Base del cuadrado	Altura del cuadrado	Área del cuadrado	
			Expresada como producto	Expresada como potencia
40				
100				

Explica detalladamente el porqué de tu respuesta:

Si se continúa con la secuencia de figuras, cuáles son las dimensiones y el área del cuadrado que se encuentra en la posición x, donde x es un número natural. Dibuja en el recuadro la figura que corresponde y a continuación completa la tabla.

<table>
<tr><th rowspan="2">Número de figura</th><th rowspan="2">Base del cuadrado</th><th rowspan="2">Altura del cuadrado</th><th colspan="2">Área del cuadrado</th></tr>
<tr><th>Expresada como producto</th><th>Expresada como potencia</th></tr>
<tr><td>x</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Explica detalladamente el porqué de tu respuesta:

Tarea 2

Fecha: ______________________

Nombre del alumno: ____

Instrucciones. Completa la información faltante y responde a las preguntas. La figura coloreada de azul es un cuadrado

Figura 1　　Figura 2　　Figura 3　　Figura 4

Con base en la información proporcionada en las figuras anteriores y en los ejemplos, completa la siguiente tabla.

Número de figura	**Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)**	**Altura del rectángulo**	**Área del rectángulo**	
			Expresada como producto	**Expresada como potencia+producto**
1	2+0	2	(2+0)(2)	2^2+(0)(2)
2	2+1	2	(2+1)(2)	2^2+(1)(2)
3				
4				
5				
6				

Si se continúa con la secuencia de figuras, cuáles son las dimensiones y el área del rectángulo que se encuentra en la posición 10. Dibuja en el recuadro la figura que corresponde y a continuación completa la tabla.

Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo	
			Expresada como producto	Expresada como potencia+producto
10				

Si se continúa con la secuencia de figuras, cuáles son las dimensiones y el área de los rectángulos que se encuentran en la posición 56 y 100. Dibuja en el recuadro las figuras que corresponde y a continuación completa la tabla.

Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo	
			Expresada como producto	Expresada como potencia+producto
56				
100				

Explica detalladamente el porqué de tu respuesta:

Si se continúa con la secuencia de figuras, cuáles son las dimensiones y el área del rectángulo que se encuentra en la posición x, donde x representa un número natural. Dibuja en el recuadro la figura que corresponde y a continuación completa la tabla.

Número de figura	**Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)**	**Altura del rectángulo**	**Área del rectángulo**	
			Expresada como producto	**Expresada como potencia+producto**
x				

Explica detalladamente el porqué de tu respuesta:

Tarea 3

Fecha: ______________________

Nombre del alumno: ____

Instrucciones. Completa la información faltante y responde a las preguntas. La figura coloreada de azul es un cuadrado

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Con base en la información proporcionada en las figuras anteriores y en los ejemplos, completa la siguiente tabla.

Número de figura	**Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)**	**Altura del rectángulo**	**Área del rectángulo**	
			Expresada como producto	**Expresada como potencia+producto**
1	2+1	2	(2+1)(2)	2^2+(1)(2)
2	2+2	2	(2+2)(2)	2^2+(2)(2)
3				
4				
5				
6				

Si se continúa con la secuencia de figuras, cuáles son las dimensiones y el área del rectángulo que se encuentra en la posición 10. Dibuja en el recuadro la figura que corresponde y a continuación completa la tabla.

Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo	
			Expresada como producto	Expresada como potencia+producto
10				

Si se continúa con la secuencia de figuras, cuáles son las dimensiones y el área de los rectángulos que se encuentran en la posición 74 y 100. Dibuja en el recuadro las figuras que corresponde y a continuación completa la tabla.

Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo	
			Expresada como producto	Expresada como potencia+producto
74				
100				

Explica detalladamente el porqué de tu respuesta:

Si se continúa con la secuencia de figuras, cuáles son las dimensiones y el área del rectángulo que se encuentra en la posición x, donde x representa un número natural. Dibuja en el recuadro la figura que corresponde y a continuación completa la tabla.

Número de figura	**Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)**	**Altura del rectángulo**	**Área del rectángulo**	
			Expresada como producto	**Expresada como potencia+producto**
x				

Explica detalladamente el porqué de tu respuesta:

Tarea 4

Fecha: ____________________

Nombre del alumno: ____

Instrucciones. Completa la información faltante y responde a las preguntas. La figura coloreada de azul es un cuadrado

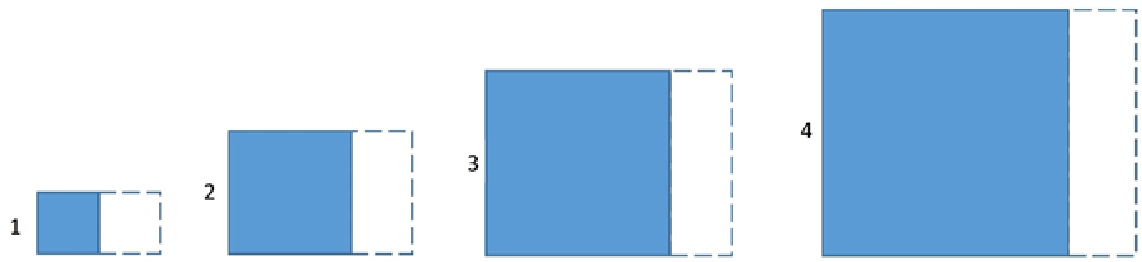


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Con base en la información proporcionada en las figuras anteriores y en los ejemplos, completa la siguiente tabla.

Número de figura	**Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)**	**Altura del rectángulo**	**Área del rectángulo**	
			Expresada como producto	**Expresada como producto+potencia**
1	1+1	1	(1+1)(1)	$(1)(1)+1^2$
2	1+2	2	(1+2)(2)	$(1)(2)+2^2$
3				
4				
5				
6				

Si se continúa con la secuencia de figuras, cuáles son las dimensiones y el área del rectángulo que se encuentra en la posición 10. Dibuja en el recuadro la figura que corresponde y a continuación completa la tabla.

Número de figura	**Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)**	**Altura del cuadrado**	**Área del rectángulo**	
			Expresada como producto	**Expresada como producto+potencia**
10				

Si se continúa con la secuencia de figuras, cuáles son las dimensiones y el área de los rectángulos que se encuentran en la posición 74 y 100. Dibuja en el recuadro las figuras que corresponde y a continuación completa la tabla.

Número de figura	**Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)**	**Altura del rectángulo**	**Área del rectángulo**	
			Expresada como producto	**Expresada como producto+potencia**
74				
100				

Explica detalladamente el porqué de tu respuesta:

Si se continúa con la secuencia de figuras, cuáles son las dimensiones y el área del rectángulo que se encuentra en la posición x, donde x representa un número natural. Dibuja en el recuadro la figura que corresponde y a continuación completa la tabla.

Número de figura	**Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)**	**Altura del rectángulo**	**Área del rectángulo**	
			Expresada como producto	**Expresada como producto+potencia**
x				

Explica detalladamente el porqué de tu respuesta:

Tarea 5

Fecha: ____________________

Nombre del alumno: ____

Instrucciones. Completa la información faltante y responde a las preguntas. La figura coloreada de azul es un cuadrado

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Con base en la información proporcionada en las figuras anteriores y en los ejemplos, completa la siguiente tabla.

Número de figura	**Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)**	**Altura del rectángulo**	**Área del rectángulo**	
			Expresada como producto	**Expresada como potencia+producto**
1	a+0	a	(a+0)(a)	a^2+(0)(a)
2	a+1	a	(a+1)(a)	a^2+(1)(a)
3				
4				
5				
6				

Si se continúa con la secuencia de figuras, cuáles son las dimensiones y el área del rectángulo que se encuentra en la posición 10. Dibuja en el recuadro la figura que corresponde y a continuación completa la tabla.

Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo	
			Expresada como producto	Expresada como potencia+producto
10				

Si se continúa con la secuencia de figuras, cuáles son las dimensiones y el área de los rectángulos que se encuentran en la posición 56 y 100. Dibuja en el recuadro las figuras que corresponde y a continuación completa la tabla.

Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo	
			Expresada como producto	Expresada como potencia+producto
56				
100				

Explica detalladamente el porqué de tu respuesta:

Si se continúa con la secuencia de figuras, cuáles son las dimensiones y el área del rectángulo que se encuentra en la posición *x*, donde *x* representa un número natural. Dibuja en el recuadro la figura que corresponde y a continuación completa la tabla.

Número de figura	**Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)**	**Altura del rectángulo**	**Área del rectángulo**	
			Expresada como producto	**Expresada como potencia+producto**
x				

Explica detalladamente el porqué de tu respuesta:

Tarea 6

Fecha: ____________________

Nombre del alumno: ____

Instrucciones. Completa la información faltante y responde a las preguntas. La figura coloreada de azul es un cuadrado

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Con base en la información proporcionada en las figuras anteriores y en los ejemplos, completa la siguiente tabla.

Número de figura	**Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)**	**Altura del rectángulo**	**Área del rectángulo**	
			Expresada como producto	**Expresada como potencia+producto**
1	$a+1$	a	$(a+1)(a)$	$a^2+(1)(a)$
2	$a+2$	a	$(a+2)(a)$	$a^2+(2)(a)$
3				
4				
5				
6				

Si se continúa con la secuencia de figuras, cuáles son las dimensiones y el área del rectángulo que se encuentra en la posición 10. Dibuja en el recuadro la figura que corresponde y a continuación completa la tabla.

Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo	
			Expresada como producto	Expresada como potencia+producto
10				

Si se continúa con la secuencia de figuras, cuáles son las dimensiones y el área de los rectángulos que se encuentran en la posición 74 y 100. Dibuja en el recuadro la figura que corresponde y a continuación completa la tabla.

Número de figura	Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)	Altura del rectángulo	Área del rectángulo	
			Expresada como producto	Expresada como potencia+producto
74				
100				

Explica detalladamente el porqué de tu respuesta:

Si se continúa con la secuencia de figuras, cuáles son las dimensiones y el área del rectángulo que se encuentra en la posición x, donde x representa un número natural. Dibuja en el recuadro la figura que corresponde y a continuación completa la tabla.

Número de figura	**Base del rectángulo (longitud fija+longitud variable)**	**Altura del cuadrado**	**Área del cuadrado**	
			Expresada como producto	**Expresada como potencia+producto**
x				

Explica detalladamente el porqué de tu respuesta:

APÉNDICE C. Hoja de trabajo de la tarea para abordar la medida de tendencia central: media. Esta tarea no se usó en la tesis.

Tarea 1

Nombre del estudiante:__________________________________ Fecha: ___________________

Instrucciones. Completa la información faltante y responde a las preguntas.

Figura $X_1=1$ Figura $X_2=2$ Figura $X_3=3$ Figura $X_4=4$

Con base en la información proporcionada en las figuras anteriores y en los ejemplos, complete la siguiente tabla.

Figuras	Suma de rectángulos	Total de rectángulos (n)	Media expresada	
			División	Cociente
X_1+X_2	1+2	3	$\frac{n}{X2}=\frac{3}{2}$	1.5
$X_1+X_2+X_3$	1+2+3	6	$\frac{n}{X3}=\frac{6}{3}$	2
$X_1+X_2+X_3+X_4$	1+2+3+4	10	$\frac{n}{X4}=\frac{10}{4}$	2.5
$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$				
$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6$				
$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7$				
$X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6+X_7+X_8$				

Si continuas con la secuencia de figuras, cuál es la media expresada como división y cociente en la figura que se ubica en la posición 11. Dibuja en el recuadro la figura que corresponde y en seguida completa la tabla.

Figuras	Suma de rectángulos	Total de rectángulos (n)	Media expresada	
			División	Cociente

Explica detalladamente el porqué de tu respuesta: