UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE HIDALGO

ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

TESIS

Procesos cognitivos que involucran creatividad al resolver problemas geométricos usando tecnologías digitales

PRESENTA

Eduardo Pérez Olvera

Director

Dr. Fernando Barrera Mora

Codirector

Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez

Comité tutorial

Dr. Carlos Arturo Soto Campos
Dr. Cutberto Rodríguez Álvarez
Dr. Fernando Barrera Mora
Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez

Mineral de la Reforma, Hgo., México., marzo de 2025

Mineral de la Reforma, Hgo., a 7 de marzo de 2025

Número de control: ICBI-AAMyF/187/2025
Asunto: Autorización de impresión de tesis.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

El Comité Tutorial de la tesis titulada **"Procesos cognitivos que involucran creatividad al resolver problemas geométricos usando tecnologías digitales"**, realizada por el sustentante **Eduardo Pérez Olvera,** con número de cuenta **378359,** perteneciente a la **Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica**, una vez que ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el Artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente:

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

El Comité Tutorial

Dr. José Félix Fernando Barreta Mora
Director

Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez
Codirector

Dr. Carlos Arturo Soto Campos
Miembro del comité

Dr. Cutberto Rodríguez Álvarez
Miembro del comité

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Agradecimientos

A CONAHCYT

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por la beca CONACYT de Posgrado en México (No. CVU: 1270949) brindada durante la realización de este proyecto.

A mis directores de tesis

Expreso mi más profundo agradecimiento a mis directores de tesis, por su orientación, paciencia y valiosas enseñanzas a lo largo de este proceso. Sus comentarios, sugerencias y constante apoyo fueron esenciales para el desarrollo de esta investigación. Su compromiso su pasión por el conocimiento han sido una gran fuente de inspiración para mí.

A mis profesores de la maestría

Agradezco a mis profesores de la maestría, quienes con sus enseñanzas, discusiones y consejos contribuyeron a mi formación. Cada curso y cada conversación me permitieron ampliar mi perspectiva sobre la educación matemática y la investigación, ayudándome a construir un marco sólido para este trabajo.

A mi familia y amigos

Finalmente, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi familia y amigos, quienes me han apoyado a lo largo de mi formación. En especial, a mi mamá, quien ha estado a mi lado toda mi vida y ha sido fundamental en mi desarrollo, forjando en mí los valores y principios que hoy me definen. Al señor Andrés, quien fue como un padre para mí y me enseñó el valor del trabajo, así como a apreciar la belleza de la vida. A mis tíos, Gregorio y Guadalupe, por todo el apoyo que me han brindado en este camino. Y a mi amiga Frida, cuyo apoyo incondicional fue invaluable durante la maestría.

Resumen

En este trabajo se describe cómo la incorporación de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) al resolver problemas geométricos modifica las cuatro etapas del proceso creativo propuestas por Hadamard. Dentro del marco teórico, se consideran principalmente las fases del Proceso Creativo Matemático (PCM en lo subsecuente) propuestas por Hadamard, cuya estructura se refinó con las aportaciones de Polya en la resolución de problemas. Además, se toman en cuenta el uso de tecnologías digitales en resolución de problemas, así como el protocolo de resolución de problemas de Schoenfeld.

La recolección de la información se llevó a cabo asignando un par de problemas-reto a un estudiante inscrito en un posgrado en educación matemática, con un perfil de licenciado en Matemáticas Aplicadas, quien elaboró una bitácora digital (Santos-Trigo, 2020) en la cual describió detalladamente sus pensamientos y acciones. El análisis de los datos se basó en las etapas del Proceso Creativo Matemático: (i) preparación, (ii) incubación, (iii) iluminación y (iv) verificación (Hadamard, 1945). Además, se consideró el trabajo de Polya (1945), que proporciona elementos para refinar las etapas de preparación y verificación al incluir acciones realizadas en el trabajo consciente. También se tuvieron en cuenta algunas de las estrategias de resolución de problemas identificadas por Santos-Trigo et al. (2021) al emplear tecnologías digitales. Asimismo, se analizaron las ideas que el resolutor obtuvo de manera súbita mientras realizaba otras actividades (iluminación), o mientras reflexionaba o analizaba las ideas obtenidas durante el trabajo consciente, relacionadas con exploraciones previas.

Los mayores cambios se identificaron en la etapa de preparación. Específicamente, el uso de GeoGebra ayudó a: (a) la formulación de conjeturas que contribuyeron a resolver el problema; (b) explorar a mayor profundidad las relaciones entre los elementos de un problema (datos, incógnitas, hipótesis y conclusiones); (c) explorar y extender el análisis a otros problemas, lo que contribuyó a lograr un entendimiento más profundo de las diversas soluciones; (d) identificar elementos en el proceso de justificación de resultados, a través de diversas rutas de prueba, dependiendo de valores específicos de algunas variables del problema. Los resultados respecto a la obtención de ideas, estimuladas por el trabajo inconsciente, sugieren que, además de surgir de manera súbita, también pueden ocurrir

durante procesos reflexivos y periodos de trabajo activo. Por último, se observó que las interacciones sociales tienen un alto impacto en la generación de ideas clave para avanzar en la solución del problema, sobre todo las interacciones con el mentor.

Abstract

In this work, we describe how the incorporation of a Dynamic Geometry System (SGD) in solving geometric problems modifies the four stages of the creative process proposed by Hadamard (1945). The theoretical framework primarily focuses on the phases of the Mathematical Creative Process (PCM) proposed by Hadamard, refined through Polya's contributions to problem-solving. It also considers the use of digital technologies in problem-solving and Schoenfeld's problem-solving protocol. The information was collected by assigning a pair of challenge problems to a graduate student in mathematics education, with a background in Applied Mathematics, who kept a digital notebook (Santos-Trigo, 2020) detailing their thoughts and actions. The data analysis was based on the stages of the Mathematical Creative Process: (i) preparation, (ii) incubation, (iii) illumination, and (iv) verification (Hadamard, 1945). Additionally, Polya's (1945) work, which provides elements to refine the preparation and verification stages by including actions performed during conscious work, was considered. Some of the problem-solving strategies identified by Santos-Trigo et al. (2021) when employing digital tools were also taken into account. Furthermore, the ideas that the solver obtained suddenly while performing other activities (illumination) or while reflecting on or analyzing the ideas obtained during conscious work related to previous explorations were analyzed.

The stage in which the greatest changes were identified was preparation. Specifically, it was observed that using a DGS helped: (a) in formulating conjectures that contributed to solving the problem; (b) in exploring in greater depth the relationships between the elements of a problem (data, unknowns, hypotheses, and conclusions); (c) in exploring and extending the analysis to other problems, which contributed to achieving a deeper understanding of various solutions; (d) in identifying elements in the process of justifying results through various proof routes, depending on specific values of some variables in the problem. The results regarding the generation of ideas stimulated by unconscious work suggest that, in addition to emerging suddenly, they can also occur during reflective processes and periods of active work. Finally, it was observed that social interactions have a significant impact on problem exploration, especially those occurring with the ment.

Contenido

1. Revisión de la literatura y el problema de investigación

En este capítulo se realiza una revisión de la literatura que aborda aspectos cognitivos relacionados con el Proceso Creativo Matemático (PCM). Entre otros fines, el propósito es identificar las líneas de investigación y metodologías más comunes para analizar la creatividad matemática. La revisión de literatura tiene la finalidad de enmarcar la pregunta de investigación de la tesis en el cuerpo de conocimiento científico existente y de identificar el posible aporte del trabajo. Adicionalmente, la revisión de literatura ayudará a justificar la relevancia y pertinencia de la pregunta de investigación. El capítulo culmina con el planteamiento del problema y la pregunta de investigación que orientó el desarrollo de la tesis.

1.1. Introducción

Es ampliamente aceptado que el desarrollo y aprendizaje matemático están estrechamente relacionados, ya que ambos procesos ocurren al resolver problemas (Polya, 1945; Shoenfeld, 1985, Halmos 1980). Un aspecto clave del aprendizaje matemático es el desarrollo de habilidades para construir soluciones innovadoras, identificar propiedades nuevas o inesperadas, y establecer conexiones entre diferentes áreas de la disciplina. Según de Vink et al. (2022) y Sriraman (2009), estas habilidades están estrechamente vinculadas a la creatividad matemática.

Estas capacidades no solo son esenciales para la resolución de problemas, sino que también permiten a los estudiantes abordar un problema desde diversas perspectivas. Por lo tanto, la creatividad matemática no se limita a encontrar respuestas correctas; en su lugar, promueve un aprendizaje estructurado, en el cual los estudiantes generan conexiones entre distintos conceptos matemáticos y los aplican a nuevos problemas (Beghetto & Schreiber, 2017). Esto ha motivado que las investigaciones sobre la creatividad matemática se hayan incrementado notablemente en los últimos años (Haavold et al., 2018; Joklitschke et al., 2022b; Kozlowski & Chamberlin, 2022; Leikin & Pitta-Pantazi, 2013).

El incremento de investigaciones sobre creatividad matemática ha permitido que el concepto de creatividad, en el ámbito matemático, pueda analizarse desde diversas perspectivas (Sriraman, 2009). De entre todas ellas, el modelo del *Proceso Creativo Matemático* (PCM), conformado por las etapas de preparación, incubación, iluminación y verificación (Hadamard, 1945; Poincaré, 1952; Wallas, 1926) surge específicamente del estudio de la creatividad en matemáticas, a diferencia de otras perspectivas que son adaptadas de otras disciplinas (Joklitschke et al., 2022a). Este modelo proporciona un marco estructurado para entender cómo se desarrolla la creatividad en la resolución de problemas matemáticos, subrayando la importancia de cada etapa en el PCM.

Estas etapas fueron inicialmente concebidas en un ambiente de lápiz y papel. Sin embargo, como señala Santos-Trigo (2019), los avances tecnológicos han transformado significativamente nuestros estilos de vida y, por ende, la manera en que abordamos el aprendizaje matemático. La integración de tecnologías digitales en la educación ha tenido un impacto profundo en diversos aspectos del aprendizaje y la resolución de problemas matemáticos. En particular, la incorporación de tecnologías como los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD), los programas de álgebra computacional y, recientemente, sistemas como ChatGPT pueden proporcionar una nueva dimensión al estudio del PCM, ampliando y enriqueciendo el proceso creativo al ofrecer nuevas formas de exploración y solución de problemas.

1.2. Revisión de literatura

En esta sección se analizan los trabajos enfocados en el PCM, de acuerdo con las fases que Hadamard propuso en 1945. El análisis se divide en dos partes: en la primera se abordan algunas de las ideas que permitieron la formulación de las etapas del PCM, y en la segunda, se presta atención a los trabajos de investigación sobre el PCM que los educadores matemáticos han desarrollado.

1.2.1. Antecedentes

En esta sección se analizan trabajos que han influido en la gestación y desarrollo del PCM. El propósito central es conocer las ideas que dieron origen a este proceso. A través de la revisión se identifican no sólo los fundamentos, sino también cómo se generaron tales fundamentos, las metodologías que se emplearon y las dificultades a las que se enfrentaron.

En el primer volumen de la revista francesa L'Enseignement Mathématique, Henri Poincaré (1899) describe cómo las matemáticas atravesaron un proceso de formalización. En este proceso, se cuestionaron muchas suposiciones que se daban por evidentes, utilizando cada vez más la lógica a la vez que se reducía el uso de la intuición. No obstante, Poincaré pide prestar atención al papel que juega la intuición en la educación matemática, sin desestimar la relevancia de la lógica. Como bien señala: "It is by logic that one proves, but it is by intuition that one invents" [es por lógica como se demuestra, pero es por intuición cómo se inventa] (citado en Kilpatrick, 1992, p. 7). Así, Poincaré enfatiza la dualidad entre la lógica y la intuición, resalta la importancia de ambas facetas en la actividad matemática, lo cual se revela como un tema central que merece mayor exploración y comprensión en el ámbito de la educación matemática.

Tres años después, en 1902, los matemáticos y editores de L'Enseignement Mathématique, Henri Fehr y Charles-Ange Laisant publicaron una serie de 28 preguntas, con la finalidad de explorar los procesos cognitivos involucrados, así como la influencia de las actividades cotidianas en la resolución de problemas matemáticos. En 1904, expandieron el cuestionario con dos preguntas más y agregaron incisos a algunas preguntas del cuestionario original, lo que culminó en el primer estudio empírico dedicado a recopilar información detallada acerca del proceso de solución de problemas de alto nivel. Los resultados fueron publicados en L'Enseignement Mathématique desde 1905 hasta 1908, en colaboración con los psicólogos suizos Théodore Flournoy y Edouard Claparéde, en estos resultados remarcaron que la metodología empleada complicó el análisis ya que solo contaban con la información recibida por correo, por lo que no podían indagar más en las respuestas, concluyendo que este tipo de cuestionamiento deben realizarse en persona. Las preguntas eran ambiguas, por lo que algunas respuestas no brindaban la información buscada. Además, al ser una gran cantidad de preguntas, algunos participantes no profundizaron en ninguna de ellas. Los resultados respecto de la resolución de problemas enfatizaron que las ideas para solucionar un problema sólo ocurrían tras haber explorado el problema arduamente, además de que redescubrir un resultado, aunque no sea beneficioso para la sociedad, lo es para el investigador.

En 1905, Edmond Maillet publicó los resultados de un par de preguntas que había realizado en 1902, sobre los procesos cognitivos en la actividad matemática y los sueños matemáticos. Recibiendo cerca de 80 respuestas de matemáticos, con al menos diez años realizando matemáticas, 60 de los 80 matemáticos promediaban más de 29 años de experiencia en matemáticas. Los resultados exhibieron que únicamente 4 de los 80 matemáticos habían tenido sueños que condujeron a una solución, 8 de los 80 matemáticos habían obtenido los inicios de la solución en sueños y sin importar el caso, este suceso solo ocurre una o dos veces en la vida, sobre todo entre los 25 y 30 años de edad. Los sueños estaban estrechamente relacionados con cuestiones recién trabajadas. La evidencia permite asumir la existencia de inspiración matemática y que las ideas pueden ser iniciales, útiles, intermedias, de transformación, fundamentales o finales y que solo ocurren tras haber explorado ampliamente el tema.

Por su parte, en 1908 Poincaré (1952), simultáneamente con la publicación de los resultados de los análisis de respuestas a cuestionarios en L’Enseignement Mathématique, relata su experiencia personal en el PCM, reforzando sus argumentos con los resultados del trabajo de Henri Fehr y Charles-Ange Laisant. En este artículo describe cómo a través de un laborioso trabajo consciente, seguido de un período de procesamiento inconsciente, logró obtener ideas esclarecedoras que resolvieron problemas en los que había estado trabajando sin resultados. Aunque no presenta explícitamente el modelo de etapas del PCM, su trabajo inspiró trabajos posteriores al establecer la conexión entre los periodos de trabajo consciente e inconsciente para la generación de ideas en la resolución de problemas.

El impacto del trabajo de Poincaré fue de gran relevancia para el desarrollo de un modelo estructurado de cuatro etapas para el proceso creativo, propuesto por Wallas (1926). Este modelo se fundamentó de manera significativa en los aportes ofrecidos previamente por

Poincaré en su exploración sobre la resolución de problemas y la creatividad matemática, e incluye las fases de (i) preparación, (ii) incubación, (iii) iluminación y (iv) verificación.

Años más tarde, Hadamard (1945) retomó el trabajo de Poincaré, expandiendo la investigación sobre las etapas del proceso creativo definidas por Wallas (1926) y adaptándolas al campo específico de las matemáticas, utilizando un método introspectivo. Para profundizar en estas ideas, Hadamard llevó a cabo una investigación informal que incluyó entrevistas a destacadas figuras científicas de la época como George Pólya, Albert Einstein, entre otros (Hadamard, 1945). Estas interacciones proporcionaron valiosas perspectivas sobre cómo estos expertos experimentaban y atravesaban las diversas etapas del PCM en sus trabajos matemáticos. Tales aportaciones, que se explicarán más detalladamente en el marco conceptual de este trabajo, han sentado las bases para investigaciones posteriores en el estudio del PCM.

1.2.2. Investigaciones sobre el PCM

En esta sección se exploran diversos aportes de investigación sobre el PCM y las posibles consideraciones que se han hecho respecto del uso de tecnologías digitales. El objetivo de la sección es revisar cómo el modelo inicial del PCM ha sido enriquecido o modificado, con lo que se espera observar la aplicación del modelo en investigaciones recientes, identificar preguntas de investigación que puedan analizarse con mayor profundidad para enriquecer las perspectivas actuales en el campo de la Educación Matemática.

Luego de una investigación amplia sobre la naturaleza de la creatividad, Rhodes (1961) propuso el modelo de las 4P's (*Person, Product, Process & Press*) que ha sido retomado en distintas investigaciones, particularmente en Educación Matemática (Chamberlin et. al., 2022; Joklitschke et al., 2022a; Joklitschke et al., 2022b). Este modelo, concebido para comprender la creatividad en múltiples dimensiones, ha sido crucial para explorar y analizar la creatividad específicamente en el contexto de las matemáticas. Sus cuatro categorías proporcionan un marco que permite examinar aspectos individuales, productos creativos, procesos involucrados e influencias externas que moldean el pensamiento y la generación creativa.

Kilpatrick (1992) y Rott et al. (2022) llevaron a cabo un análisis histórico del PCM con el fin de identificar las ideas preexistentes que han ejercido influencia en esta línea de investigación y para esclarecer su desarrollo en el tiempo. En sus investigaciones, abordan los orígenes del PCM y como la consideración del trabajo inconsciente permitió establecer las cuatro etapas de este proceso como una herramienta para analizar la creatividad. Sin embargo, en el trabajo de Rott et al., se realiza una discusión sobre la creatividad en los estudiantes. Hadamard (1945) también abordó esta cuestión afirmando que la diferencia entre el trabajo de un profesional y un estudiante es solo una cuestión de nivel, esta afirmación es complicada de validar, ya que como afirman Rott et al., las metodologías típicas empleadas en los estudios de creatividad no han permitido que las etapas de incubación o iluminación se manifiesten debido al período limitado durante el cual se realizan estas investigaciones.

Sriraman (2009) analiza la creatividad matemática y sus implicaciones en la educación, centrándose en la dificultad de definir y entender este concepto en matemáticas. Su estudio, basado en entrevistas a cinco matemáticos experimentados, utiliza un cuestionario diseñado para identificar y comprender el PCM. En el análisis se presentan las etapas del PCM junto con una breve explicación de cómo las respuestas de los participantes evidencian cada fase. Se destacan elementos como la interacción social, el uso de heurísticas (Polya, 1945), el tiempo dedicado a un problema (Hadamard, 1945), y las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas, todo esto en relación con la etapa de preparación. En la etapa de verificación se observa que los matemáticos sólo realizaban pruebas formales cuando el resultado concordaba con otros resultados en el área.

Hitt et al. (2010) ilustran mediante un caso la forma en que un matemático aborda problemas matemáticos, buscando comprender y contrastar la forma en que un profesional resuelve los problemas matemáticos, en comparación con los estudiantes. Su análisis identifica elementos en los procesos de razonamientos al resolver problemas de tipo escolar, efectuados por un matemático, que contribuyan al diseño de tareas que fomenten el aprendizaje con un entendimiento más amplio. Para la exploración el matemático abordó 16 problemas del tipo escolar no rutinarios en tres sesiones de una hora, utilizando únicamente lápiz y papel. Se colocó una grabadora para que el matemático pudiese hablar fuerte y describir su proceso de resolución. Los autores identificaron patrones de razonamiento, confianza al realizar demostraciones y construir contraejemplos y el rápido avance a representaciones algebraicas que le permiten escoger la más adecuada. Una propuesta de los autores para que los estudiantes experimenten periodos de incubación, es involucrarlos en proyectos de investigación asociados a problemas cuyo plazo de resolución sea extenso y promover la discusión hasta que la solución sea encontrada, además de pedir a los estudiantes que resuelvan de distinta manera un problema ya resuelto en clase o buscar algún tipo de generalización.

En 2013, Liljedahl realizó una investigación para identificar la naturaleza de la iluminación en matemáticas, aplicando inducción analítica a relatos de 73 de los 112 estudiantes de licenciatura de la Universidad Simon Fraser inscritos en un curso de matemáticas para maestros. Entre los principales hallazgos, el autor identificó que la iluminación no solo es un proceso cognitivo, sino que está profundamente influenciada por la respuesta afectiva del individuo. Además, señaló que el azar juega un papel clave en su aparición, distinguiéndose dos tipos: azar intrínseco, cuando la combinación correcta de ideas surge espontáneamente en la mente, y azar extrínseco, cuando una lectura o encuentro fortuito contribuye a la resolución de un problema. En este sentido, la iluminación no ocurre de manera completamente controlada, sino que emerge de una combinación entre esfuerzo previo, circunstancias imprevistas y la emoción que genera el hallazgo.

Los análisis de la literatura realizados por Joklitschke et al. (2022a, 2022b), Leinkin y Pitta-Pantazi (2013), y Pitta-Pantazi et al. (2018) abordan diferentes aspectos de la creatividad matemática, desde su manifestación en estudiantes de secundaria hasta su relación con el modelo de las 4P´s de Rhodes (1961) y su impacto en la Educación Matemática. Estos trabajos comparten el objetivo de comprender la dirección que han tomado las investigaciones sobre la creatividad matemática en el ámbito educativo. Destacan los fundamentos teóricos que respaldan estas investigaciones y señalan las dificultades y vacíos existentes en estas áreas de estudio.

Particularmente, Pitta-Pantazi et al. (2018) enfatiza la complejidad en la comprensión e investigación del PCM así como la ausencia de estudios que vinculan la creatividad con el uso de nuevas tecnologías. En contraste, la revisión de Joklitschke et al. (2022b) resalta las dificultades inherentes a la investigación en el PCM. En su análisis, identifican la tendencia predominante de correlacionar la creatividad matemática en estudiantes de secundaria con otros constructos psicométricos. Estos estudios brindan una visión integral de los esfuerzos por entender la creatividad matemática en el contexto educativo, al tiempo que revelan áreas de investigación por explorar y desafíos pendientes que requieren mayor atención en el futuro.

Al realizar una revisión de la literatura sobre la creatividad en matemáticas en primaria, Kozlowski y Chamberlin (2022) recuperan investigaciones que evidencian cómo el uso de tecnologías favorece la aparición de ideas creativas en alumnos de primaria. Estas tecnologías permiten la creación de objetos matemáticos e identificación de sus propiedades. Los autores resaltan la importancia de incluir el uso de tecnologías en las investigaciones sobre la creatividad matemática al resolver diferentes tipos de problemas.

Chamberlin, Liljedahl y Savić (2022) establecen un marco fundamental para el libro *Mathematical Creativity A Developmental Perspective*, ofreciendo una definición operativa exhaustiva de la creatividad matemática. En esta obra, construyen una estructura conceptual basada en el modelo de los "Cuatro C's" de Kaufman y Beghetto (2009) para clasificar los niveles de creatividad. Además, retoman el modelo de las 4P's de Rhodes, agregando definiciones operativas esenciales para comprender la dinámica creativa. Destacan algunas de las dificultades existentes en la investigación sobre la creatividad matemática. Se adentran en aspectos que van desde los desafíos a nivel docente, incluyendo características y conocimientos necesarios, hasta los obstáculos inherentes a los programas de estudio, como la cobertura exhaustiva de temas en periodos de tiempo limitados. También examinan las complejidades ligadas a los principios de la psicología matemática, en un esfuerzo por señalar áreas críticas para la mejora y el enriquecimiento de la investigación en este campo.

Monahan y Munakata (2022) llevaron a cabo una investigación durante la pandemia de COVID-19, declarada por la OMS en marzo de 2020, para identificar cómo las clases en línea pueden fomentar la creatividad matemática y qué aspectos pueden ajustarse al trasladar un curso centrado en la creatividad matemática de un entorno presencial a uno virtual. La investigación, realizada en 2020 contó con la participación de siete instructores del curso MATH 106, el cual es un curso centrado en el pensamiento creativo a través de las matemáticas, durante ocho sesiones, dos de las cuales fueron híbridas, permitiendo la asistencia presencial de manera opcional. La información se recopiló a través de entrevistas realizadas por Zoom a los instructores al finalizar el curso. Los resultados aportan evidencia de que este enfoque favorece el PCM al abordar errores en la resolución de problemas y al recibir retroalimentación sobre los mismos. Este método de trabajo también permite un proceso de incubación, ya que los estudiantes pueden reflexionar sobre los problemas en cualquier momento del día y disponer de más tiempo para resolverlos fuera del aula. Asimismo, al reflexionar sobre los problemas, los estudiantes pueden abordarlos de manera independiente, en contraposición al entorno presencial donde suelen recurrir al profesor u otros estudiantes para confirmar la corrección de los resultados.

En 2022, de Vink et al. llevaron a cabo una investigación remarcando la dificultad de analizar el PCM a través de etapas específicas. Para evitar las dificultades inherentes al tema, propusieron examinar el PCM utilizando los periodos de pensamiento convergente, que se centra en la selección y evaluación de ideas para llegar a la mejor solución posible; pensamiento divergente, que implica la generación de ideas, como la definición de problemas, estrategias o soluciones a partir de un punto de inicio específico; y la combinación de ambos. El estudio se realizó con alumnos de quinto grado, divididos en dos grupos: aquellos con bajos y altos logros en matemáticas. Para el análisis, se emplearon dos tipos de tareas: una tarea de generación de problemas (problem-posing task) y una tarea de soluciones múltiples (multiple-solutions task). Los resultados coincidieron con investigaciones anteriores al revelar que los alumnos con alto rendimiento en matemáticas tienden a generar más ideas creativas. Además, se identificó que estos alumnos utilizan con mayor frecuencia el pensamiento convergente o la combinación de pensamiento divergente y convergente en comparación con el pensamiento divergente. En cuanto al tipo de problemas, no se observaron diferencias significativas entre los dos grupos de alumnos. Sin embargo, se destacó que los alumnos utilizaron más el pensamiento divergente en la tarea de generación de problemas en comparación con la tarea de soluciones múltiples. Por último, se subraya la falta de estudios similares, lo que dificulta la comparación de resultados y la obtención de conclusiones más significativas.

La **Tabla 1** sintetiza los resultados de las investigaciones revisadas en esta sección. En ella, se reporta los objetivos de cada estudio, las temáticas tratadas, las metodologías empleadas, y los principales hallazgos relacionados con la creatividad matemática y su proceso. Los elementos incluidos en la tabla están organizados siguiendo el mismo orden en el que fueron discutidos a lo largo de esta sección.

Tabla 1. Concentrado de la revisión de la literatura

Autores	Objetivo	Tema	Metodología	Resultados
Henri Poincaré (1899)	Explorar la relación entre la lógica y la intuición en las matemáticas y su papel en la enseñanza de las matemáticas	Intuición, lógica y enseñanza de las matemáticas.	Análisis filosófico de la intuición y lógica en la matemática	Tanto la lógica como la intuición son necesarias para las matemáticas, y que la enseñanza de las matemáticas debería equilibrar el énfasis en ambas. Poincaré también discute cómo los estudiantes pueden desarrollar su intuición matemática a través de ejemplos concretos y visualizaciones.
Henri Fehr, et al. (1902) & (1904)	Indagar en el método y hábitos de trabajo e investigación de los matemáticos que facilite el trabajo intelectual	Método y hábitos de trabajo e investigación de los matemáticos	Cualitativa, elaboración de cuestionario, exploratorio	Primer cuestionario empírico sobre métodos y hábitos de trabajo de matemáticos
Maillet, Edmond (1905)	Investigar la relación entre los sueños y la creatividad matemática, analizando su tipología, condiciones de ocurrencia y valor heurístico.	Sueños matemáticos	Encuesta por cuestionario. Análisis de las respuestas utilizando métodos cualitativos y cuantitativos	El 55 % de los matemáticos encuestados ha tenido sueños matemáticos, más frecuentes en jóvenes y en quienes trabajan en dominios abstractos. Estos sueños, vinculados a problemas en los que se trabaja intensamente o a situaciones de bloqueo, suelen ser cortos, claros y precisos, a veces acompañados de imágenes, sonidos o palabras.
Henri Fehr, et al. (1905-1908)	Indagar en el método y hábitos de trabajo e investigación de los matemáticos que facilite el trabajo intelectual	Método y hábitos de trabajo e investigación de los matemáticos	Cualitativa. Encuesta por cuestionario	Las ideas espontáneas solo ocurren tras un largo periodo de trabajo duro. El redescubrimiento de resultados es un beneficio para el investigador. La metodología no fue adecuada tanto por la extensión del cuestionario, las ambigüedades en las preguntas y la falta de profundidad en las respuestas.
Henri Poincaré	Estudiar el proceso de pensamiento geométrico	Creatividad matemática	Análisis filosófico y psicológico de la	Una descripción del mecanismo psicológico del descubrimiento matemático, basado en la combinación de dos procesos: el

Tabla 1. Concentrado de la revisión de la literatura

(1908)	y el origen de la creación matemática, entender lo que es más esencial para la mente humana		creatividad matemática	inconsciente, que genera asociaciones e intuiciones; y el consciente, que verifica y ordena las ideas
Graham Wallas (1926)	Presentar la creatividad como una habilidad que puede ser desarrollada por cualquier persona	PCM	Estudios de caso	Desarrolló un modelo estructurado de cuatro etapas para el proceso creativo. Este modelo, que abarca las fases de (i) Preparación, (ii) Incubación, (iii) Iluminación y (iv) Verificación, se fundamentó de manera significativa en los aportes ofrecidos previamente por Poincaré en su exploración sobre la resolución de problemas y la creatividad matemática.
Hadamard (1945)	Explorar los procesos mentales que subyacen a la actividad matemática	Creatividad matemática	investigación informal que incluyó entrevistas a destacadas figuras de su campo	Proporcionó una valiosa perspectiva sobre cómo estos expertos experimentaban y atravesaban las diversas etapas del PCM en sus trabajos matemáticos. Se estableció un marco teórico para el análisis del PCM.
Rhodes (1961)	Comprender la creatividad en múltiples dimensiones,	Creatividad	Análisis filosófico	Concibió un modelo para comprender la creatividad de múltiples dimensiones. Sus cuatro categorías proporcionaron un marco integral que permite examinar en profundidad los aspectos individuales de los productos creativos y los procesos involucrados y la influencia externa que moldean el pensamiento y la generación creativa.
Kilpatrick (1992)	Dar una revisión de las líneas de investigación en educación matemática y su desarrollo histórico	Educación matemática.	Análisis histórico	Identifico las ideas preexistentes que desarrollaron las ideas principales del PCM que formuló Hadamard. Identificó como el auge del conductismo inhibió el estudio del pensamiento matemático Remarcó el uso de métodos subjetivos para la indagación del PCM debido a sus propias características
Rott et al. (2022)	Proporcionar una visión general de las diferentes	Resolución de problemas,	Análisis histórico de las investigaciones sobre	La mayoría de las investigaciones no profundizan en el concepto de creatividad. Los estudios breves (20-40 minutos) no se ajustan

Tabla 1. Concentrado de la revisión de la literatura

	corrientes de investigación sobre la creatividad que han influido en la educación matemática.	pensamiento convergente y divergente, 4P's de creatividad	creatividad matemática	al análisis del PCM. Se han utilizado tareas de resolución de problemas múltiples, problemas abiertos y actividades de planteamiento para estudiar la creatividad, manteniéndose las categorías de Rhodes como referencia clave.
Sriraman (2009)	Analizar atributos comunes del PCM, para identificar temas subyacentes que caracterizan la creatividad matemática	PCM	Inducción analitica Entrevistas a cinco matemáticos con una extensa trayectoria profesional, empleando cuestionarios diseñados para identificar y comprender el PCM	La interacción social, directa e indirecta, es clave en el PCM. Los matemáticos usan heurísticas con enfoques iterativos y cambian de problema al enfrentar bloqueos. Formalizan resultados solo si son coherentes con hallazgos previos, y sus creencias sobre la naturaleza de las matemáticas influyen en su enfoque y metodología.
Hitt et al. (2010)	Comprender la creatividad matemática y su papel en el aprendizaje para diseñar tareas que promuevan conocimientos matemáticos significativos.	Resolución de problemas y creatividad matemática	Estudio cualitativo donde un matemático resolvió 16 actividades no rutinarias con lápiz y papel en tres sesiones de una hora, todas grabadas.	El matemático prioriza representaciones algebraicas, elige las más adecuadas y construye demostraciones y contraejemplos con confianza. Los procesos cognitivos muestran patrones de razonamiento conectados con la creatividad matemática, vinculada a la resolución de problemas.
Liljedahl (2013)	Identificar que distingue a la iluminación de otras experiencias matemáticas	Descubrimiento, creatividad e invención en matemática	Inducción analítica combinada con teorías históricas y contemporáneas sobre descubrimiento, creatividad, invención y afecto.	Las experiencias ¡AHA! dependen del azar, ya sea intrínseco o extrínseco, por lo que solo se pueden crear condiciones para su ocurrencia, no garantizarla. El estudio resalta la importancia de la discusión, la recreación, el tiempo, la perseverancia y el enfoque en ideas generales sobre detalles
Leinkin & Pitta-Pantazi	Dar una revisión de las investigaciones sobre la	Creatividad matemática	Revisión de la literatura de invetigaciones sobre la	Aunque carece de una definición funcional, la creatividad matemática se aborda mediante el modelo de las 4 P's de Rhodes.

Tabla 1. Concentrado de la revisión de la literatura

(2013)	creatividad en la educación matemática		creatividad hechas en el campo de la educación matemática	Las investigaciones, con enfoques cualitativos, cuantitativos y mixtos, generan nuevas preguntas y reflejan un creciente interés en la educación matemática.
Pitta-Pantazi et al. (2018)	Dar una revisión de investigaciones en creatividad que puedan adaptarse en educación matemática	Creatividad y creatividad matemática, modelo de las 4P's de creatividad	Revisión de la literatura sobre investigaciones de la creatividad en general que pudiesen adaptarse para investigar la creatividad matemática	Las investigaciones se centran en características cognitivas, etapas del PCM, productos creativos y entornos que fomentan la creatividad. Se requieren más estudios sobre el perfil estudiantil, el impacto de los entornos de aprendizaje y la relación entre creatividad y tecnología. La interacción social es clave en la creatividad matemática.
Joklitschke et al. (2022a)	Ofrecer una visión sistemática de las nociones de creatividad exploradas en investigaciones empíricas recientes en educación matemática.	Modelo de las 4P's de creatividad	Revisión sistemática de la literatura sobre las nociones de creatividad matemáticas utilizadas en investigaciones en educación matemática	El PCM de Hadamard es clave en la investigación de creatividad matemática, aunque menos estudiado debido a dificultades metodológicas. Este modelo, originado en las matemáticas, no se relaciona con tres de las cinco nociones de creatividad, pero está vinculado a tareas con múltiples soluciones.
Joklitschke et al. (2022b)	Proporcionar una revisión sistemática de las investigaciones empíricas sobre la creatividad en educación matemática entre estudiantes de secundaria.	Modelo de las 4P's de creatividad	Revisión sistemática de la literatura de investigaciones empíricas sobre la creatividad en educación matemática entre estudiantes de secundaria	Predominan los estudios cuantitativos, mientras que los cualitativos se enfocan en el producto creativo, usándolo a veces para inferir sobre el proceso o la persona. En secundaria, las investigaciones priorizan el producto y constructos psicométricos. Se sugiere analizar directamente el producto o el PCM para medir creatividad, prestando mayor atención al trabajo colaborativo, el proceso y el ambiente creativo dentro del marco de las 4 P's.
Kozlowski & Chamberlin (2022)	Proporcionar una revisión de literatura sobre la creatividad matemática en educación primaria	Creatividad matemática	Revisión de la literatura de aspectos teóricos e investigaciones empíricas sobre la creatividad matemática en educación matemática.	Se identificó el uso tareas con múltiples soluciones y problemas abiertos para favorecer la creatividad en salones de primaria. Algunas investigaciones mostraron evidencia sobre cómo el uso de tecnología puede fomentar la creatividad matemática en primaria. Las características afectivas, como la motivación, tienen alta

Tabla 1. Concentrado de la revisión de la literatura

				probabilidad de favorecer la creatividad matemática.
Chamberlin et al. (2022)	Proporcionar aspectos teóricos utilizados en investigaciones de la creatividad matemática	Resolución de problemas, pensamiento convergente y divergente,4P's de creatividad	Metaanálisis sobre las teorías e investigaciones empíricas sobre la creatividad matemática	La carencia de conocimientos pedagógicos, matemáticos o psicológicos limita la creatividad matemática y el PCM. Además, los periodos cortos para cubrir muchos conceptos dificultan su desarrollo, mientras que las características afectivas promueven el pensamiento divergente.
Monahan & Munakata (2022)	Determinar la manera en que se fomenta la creatividad matemática en un entorno en línea.	Modelo de las 4P's de creatividad	La investigación incluyó a siete instructores de MATH 106 en 2020, con ocho sesiones (dos híbridas). La información se recopiló mediante entrevistas por Zoom al finalizar el curso.	El enfoque en línea favorece el PCM al abordar errores y recibir retroalimentación, destacando las matemáticas como un proceso. Además, fomenta la incubación al permitir reflexionar y resolver problemas fuera del aula, promoviendo la independencia del estudiante frente a la dependencia del entorno presencial.
de Vink et al. (2022)	Explorar el uso del pensamiento creativo, especialmente divergente y convergente, en la resolución de diversos problemas matemáticos.	Pensamiento divergente y convergente, PCM.	28 alumnos de quinto grado de ocho escuelas primarias holandesas, se utilizaron tareas con múltiples soluciones y tareas de planteamiento de problemas.	Los alumnos con alto rendimiento matemático generan más ideas creativas, usando principalmente pensamiento convergente o combinado. Aunque no hubo diferencias significativas entre grupos según el tipo de problema, el pensamiento divergente fue más común en tareas de generación de problemas que en soluciones múltiples. La escasez de estudios similares limita comparaciones y conclusiones.

La mayoría de las investigaciones centran la atención en aspectos poco prácticos, es decir, se desarrollan en un contexto histórico planteando aspectos de una posible fundamentación, por ejemplo, Rhodes (1961) desarrolla el modelo de las 4P's para clasificar los aspectos desde los cuales se puede abordar la creatividad, o Rott et al. (2022) quienes realizan un análisis histórico de la creatividad matemática, si bien aportan conocimiento valioso para comprender el proceso de la creatividad matemática y las dificultades enfrentadas por autores en el pasado y presente, también evidencian la complejidad de su estudio. Los autores coinciden en que estudiar el PCM presenta desafíos debido a su naturaleza, que implica largos periodos de trabajo consciente, duraciones inciertas en cada investigación y las limitaciones de los instrumentos y las metodologías para el análisis de sus etapas (Pitta-Pantazi et al., 2018; Rott et al., 2022) .

Se destaca la importancia del PCM, tal como lo establece Hadamard (1945), tanto por su origen matemático, a diferencia de otros constructos adaptados desde la creatividad en el campo de la psicología, como por su relevancia al brindar información sobre la actividad matemática. Un aspecto que merece especial atención es que las investigaciones empíricas revisadas se han desarrollado principalmente en contextos tradicionales de lápiz y papel, mientras que la literatura señala la escasez de estudios que exploren el PCM en entornos que integren tecnologías digitales.

1.3. Planteamiento del Problema

El PCM es un tema complejo y desafiante para la investigación (Pitta-Pantazi et al., 2018). Existen diversos trabajos sobre su historia, características y etapas (Kilpatrick, 1992; Rott et al., 2022; Joklitschke et al., 2022, 2021; Leinkin & Pitta-Pantazi, 2013). Sin embargo, son escasas las investigaciones que profundizan en el análisis de lo que ocurre al interior de cada etapa (Sriraman, 2009). Algunos trabajos sugieren que se debe estudiar el PCM para el diseño de actividades o cursos y entender sus implicaciones en el aprendizaje matemático (Hitt et al., 2010; Monahan & Munakata, 2022), mientras que Pitta-Pantazi et al. (2018) señalan la falta de investigaciones que aborden la relación entre la creatividad y las nuevas tecnologías.

Las metodologías existentes para estudiar el PCM presentan limitaciones, por ejemplo, los cuestionarios proporcionan información general sobre el proceso, pero no permiten explorar en detalle las etapas del PCM. Los trabajos de autores como Poincaré (1952) y Hadamard (1945) han proporcionado información valiosa que ha abierto rutas significativas a nuestra comprensión del PCM. Sin embargo, a pesar de estos aportes, aún falta información específica sobre los procesos involucrados en el PCM. Esto es comprensible, ya que los resolutores de problemas pueden hacer aportaciones para un mejor entendimiento de los procesos que tienen lugar en el PCM. Sin embargo, hay pocos trabajos en donde los resolutores exponen de forma directa sus experiencias en estos procesos.

Pitta-Pantazi et al. (2018) señalan que existe una brecha notable en las investigaciones que abordan la relación entre la creatividad matemática y el uso de nuevas tecnologías. En el pasado, cuando las ideas precursoras del PCM surgieron, la mayoría de las actividades se llevaban a cabo con herramientas tradicionales como lápiz y papel, limitando así las posibilidades. Sin embargo, actualmente se dispone de tecnologías digitales que no solo amplían, sino que también transforman el trabajo matemático (Pea, 1987; Santos-Trigo, 2019). La introducción de estas tecnologías ha evidenciado cambios significativos en los procesos cognitivos relacionados con el planteamiento y resolución de problemas.

La escasez de metodologías para analizar el PCM, así como de investigaciones que exploren la influencia de las tecnologías digitales en este proceso justifican la realización de esta tesis. Así, el propósito de este trabajo es documentar algunos elementos sobre el PCM y la influencia de las tecnologías digitales en sus etapas. Se utilizará GeoGebra para la exploración y formulación de problemas geométricos. En este contexto se formula la pregunta de investigación: ¿De qué manera el uso de una tecnología digital como GeoGebra (SGD) modifica los procesos cognitivos al resolver problemas que involucran elementos del PCM? Se plantea como hipótesis que el uso de un SGD aporta elementos que refinan las etapas de trabajo consciente, preparación y verificación. Además, el registro sistemático de información, durante el proceso de solución de un problema, permite identificar características de las etapas del PCM.

2. MARCO DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se explica qué es un marco de investigación y se describen los componentes del marco que sustenta teóricamente este trabajo, proporcionando una base para entender los conceptos y enfoques que guiarán el estudio. Se presentarán y discutirán las etapas del proceso creativo en la resolución de problemas matemáticos, integrando perspectivas clásicas y aportes contemporáneos para ofrecer una visión integral de cómo los resolutores interactúan con los problemas y la influencia de las tecnologías digitales en este proceso. Este marco no sólo contextualiza el estudio, sino que también proporciona las bases para el análisis y la interpretación de los datos que se presentarán en los capítulos posteriores.

2.1. Introducción

Eisenhart (1991) y Lester (2005) coinciden en que un marco de investigación, compuesto por abstracciones y relaciones definidas por la perspectiva adoptada, guía la selección de métodos y herramientas para la recolección y análisis de datos, y sustenta las decisiones y resultados del estudio. Además, un marco bien estructurado otorga coherencia a los datos, impulsa el desarrollo teórico y facilita una comprensión más profunda del tema investigado.

Estos autores identifican tres marcos en la investigación en educación matemática: teórico, práctico y conceptual. El marco teórico utiliza teorías ya establecidas, proporcionando una estructura sólida y facilitando la comparabilidad de resultados, pero limita la investigación a los confines de la teoría elegida. El marco práctico está centrado en resolver problemas específicos con soluciones basadas en la experiencia, lo que permite una aplicación inmediata, aunque carece de una base teórica sólida. Por último, el marco conceptual combina conceptos y justificaciones de diferentes teorías y conocimientos previos, permitiendo una mayor flexibilidad y adaptabilidad al contexto de la investigación. Este último es el más adecuado para nuestra investigación, ya que nos permite integrar las etapas del PCM, conceptos de resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales para abordar nuestra pregunta de investigación de manera efectiva.

2.2. Elementos que integran el marco conceptual

El marco conceptual, especialmente en el ámbito de la educación matemática, debe abarcar tres dimensiones fundamentales. En primer lugar, la dimensión epistemológica, la cual se centra en comprender cómo se construye el conocimiento matemático. En segundo lugar, la dimensión ontológica, que permite asumir una postura sobre la naturaleza de las entidades matemáticas y su esencia. Por último, la dimensión didáctica, enfocada en los procesos, enfoques y estrategias que favorecen la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Explicitar la concepción que el investigador tiene sobre estas dimensiones facilita al lector comprender el razonamiento que sustenta la propuesta investigativa, además de justificar la selección de determinados conceptos y relaciones en lugar de otros, con lo cual se fundamenta el enfoque adoptado (Lester, 2005).

Adicionalmente, este trabajo se interesa en el aprendizaje matemático, a través del planteamiento y la resolución de problemas, con apoyo de herramientas digitales. De manera paralela, se busca indagar en la creatividad matemática, analizando sus implicaciones tanto en la resolución de problemas como en el proceso de aprendizaje de la disciplina.

2.2.1. Dimensión epistemológica

La epistemología, entendida como el estudio de la naturaleza y el alcance del conocimiento, desempeña un papel central en la educación matemática, particularmente en la integración de tecnologías digitales. En esta sección se asume un posicionamiento respecto a la construcción del conocimiento y su interacción con el uso de tecnologías digitales.

Esta investigación se enmarca en una perspectiva socio-constructivista, donde el conocimiento matemático se construye activamente por el resolutor mediante su interacción con el entorno y con herramientas mediadoras, como GeoGebra. Estas herramientas cumplen una función crucial en el desarrollo cognitivo, en consonancia con el concepto de mediación planteado por Vygotsky (1981) y retomado por diversos autores (Moreno-Armella y Sriraman, 2010). Según esta perspectiva, las herramientas —tanto materiales como simbólicas— actúan como intermediarias entre el individuo y el mundo, facilitando la internalización de saberes y habilidades.

En el contexto de esta tesis, GeoGebra se concibe como una herramienta de mediación que permite al resolutor manipular activamente conceptos matemáticos, explorar propiedades y establecer relaciones de manera dinámica. La interacción, que incluye actividades de manipulación y exploración, resulta esencial para la construcción de un conocimiento matemático estructurado. El uso de GeoGebra en este trabajo expande las oportunidades de participación activa en las tareas matemáticas. Dichas tareas fomentan la experimentación directa con los objetos de estudio, la formulación de conjeturas y la obtención de evidencias a través de la experimentación dinámica, lo que fortalece el aprendizaje matemático y la comprensión conceptual.

2.2.2. Dimensión ontológica

La ontología, rama de la filosofía que estudia el "ser" y la naturaleza de la realidad, plantea preguntas fundamentales acerca de la esencia misma de las matemáticas. Entre estas surge una interrogante central: "¿Qué son las matemáticas?" Dado que no existe una respuesta única, es necesario adoptar una postura específica. Para esta investigación, las matemáticas se conciben como la ciencia de los patrones formales (Steen, 1988; Thurston, 1994), resaltando así su carácter exploratorio, una faceta que se vuelve más evidente con la incorporación de nuevas tecnologías (Lesh y Doerr, 2003; Polya, 1945; Steen, 1988). Con esto en mente, en este trabajo se asume la postura de que la matemática es una disciplina completamente experimental, tomando en cuenta que los objetos de estudio no tienen un carácter material, sino que se trata de objetos que adquieren significado en la mente de los que la practican. Debe notarse que esta concepción de la matemática cobra suma importancia al revisar el aprendizaje matemático, y a partir de esto se deben diseñar tareas que ofrezcan oportunidades de aprendizaje. La adopción de esta perspectiva experimental permite el uso de tecnologías digitales en el aprendizaje de la geometría, como un proceso basado en la representación, identificación y transformación de información. Asimismo, contribuye a comprender cómo se implementan estrategias heurísticas como considerar casos particulares, identificar patrones, formular conjeturas, justificar resultados y comunicarlos (Barrera y Reyes, 2018). De este modo, se trasciende la mera ejecución de operaciones o la aplicación mecánica de métodos, promoviendo una visión más integral, dinámica y conectada con la naturaleza misma de las matemáticas.

2.2.3. Dimensión didáctica

Este trabajo se elaboró desde la perspectiva del *aprendizaje matemático con entendimiento* (Hiebert & Carpenter 1992; Hiebert et al., 1997), concebido como la capacidad de establecer conexiones entre nuevos conocimientos y saberes previos, distinguiendo entre aquellas relaciones que resultan más esclarecedoras y las que son triviales. De acuerdo con Hiebert et al. (1997), este proceso se concreta mediante dos componentes fundamentales: la reflexión y la comunicación.

La reflexión implica un análisis consciente de las acciones realizadas, considerando diferentes perspectivas, revisando lo hecho y comprendiendo el porqué de cada paso. Esto promueve una actuación informada y deliberada por parte del estudiante. La comunicación, por su parte, se refiere al intercambio de ideas a través de diversas modalidades (escrita, oral, demostraciones, observación) y fomenta una reflexión más profunda sobre las propias concepciones, al clasificarlas, explicarlas y justificarlas. Al compartir y recibir críticas, el estudiante desarrolla una comprensión más sólida y articulada de los conceptos matemáticos.

Reflexionar resulta fundamental para que el estudiante analice y comprenda sus propios procesos de pensamiento, lo que se vuelve especialmente relevante cuando las tecnologías digitales intervienen en las diferentes etapas del proceso de resolución de problemas. La comunicación facilita el intercambio de ideas y fomenta el proceso inquisitivo, elemento central en la resolución de problemas, contribuyendo a una comprensión más profunda. Por tanto, estos conceptos son vitales para el análisis de cómo los estudiantes abordan problemas a lo largo de varios días, reflexionando y comunicando sus avances.

2.2.4. Proceso Creativo Matemático

El eje central de este trabajo es el PCM, cuyas etapas fueron descritas por Wallas (1926) y Hadamard (1945). Estas etapas proporcionan un marco teórico para analizar cómo se manifiesta la creatividad durante la resolución de problemas matemáticos. La primera etapa es la preparación, considerada como el trabajo consciente realizado desde que se aborda el problema (Hadamard, 1945; Wallas, 1926). Aquí se exploran diferentes enfoques, se ensayan estrategias y suelen producirse errores o intentos fallidos. Es común alcanzar un punto de estancamiento en el que la solución parece inalcanzable. Aunque estos intentos pudieran parecer infructuosos, son valiosos, ya que permiten ampliar la comprensión del problema, revelar aspectos no evidentes y establecer conexiones que más adelante pueden resultar útiles. Como señala Hadamard (1945), tanto estudiantes como profesionales cometen errores en esta fase; la diferencia radica en la habilidad del profesional para reconocer y corregirlos con mayor facilidad. Además, influyen factores subjetivos que pueden llevar a pasar por alto resultados evidentes o conocimientos previos relevantes. Estos aspectos, profundamente individuales, afectan la percepción y el abordaje del problema.

La segunda etapa, llamada incubación, el problema deja de abordarse de manera consciente. Aunque se interrumpe el trabajo deliberado, se considera que el inconsciente continúa procesando la información. Wallas (1926) y Hadamard (1945) no especifican la duración de la incubación. Aquí la mente reorganiza las ideas, y el resolutor se aleja temporalmente del problema, evitando la presión directa que impone el esfuerzo consciente.

La tercera etapa, iluminación, ocurre de manera repentina y espontánea. Una idea surge sin haber reiniciado el trabajo consciente del problema, ofreciendo una perspectiva antes no alcanzada.

Algunos casos históricos sobre la iluminacion son los vividos por Poincaré (1952):

> En ese momento dejé Caen, donde vivía en ese entonces, para tomar parte en una conferencia geológica organizada por la Escuela de Minas. Los incidentes del viaje me hicieron olvidar mi trabajo matemático. Cuando llegamos a Coutances, tomamos un descanso para ir a dar una vuelta y, tan pronto como puse mi pie en el escalón, me vino la idea, aunque nada en mis pensamientos anteriores me había preparado para ella, que las transformaciones que había utilizado para definir las funciones fuchsianas eran idénticas a las de la geometría no euclidiana. No hice verificación, y no tenía tiempo para hacerlo, ya que retomé de nuevo la conversación tan pronto como me senté en el descanso, pero sentí una certeza absoluta a la vez. Cuando regresé a Caen, verifiqué el resultado en mi tiempo libre para satisfacer mi consciencia (Poincaré, 1952, p. 53, traducción propia)

El segundo relato de Poincare es:

> Entonces empecé a estudiar cuestiones aritméticas sin conseguir un gran resultado aparente, y sin sospechar que pudieran tener la menor conexión con mis investigaciones previas. Disgustado por mi falta de éxito, me retiré para pasar unos días en la playa, y para pensar en cosas totalmente distintas. Un día, mientras caminaba sobre el acantilado, vino a mí la idea, de nuevo con las mismas características de concisión, brusquedad, y certeza inmediata, de que las transformaciones aritméticas de formas cuadráticas ternarias indefinidas son idénticas que las de la geometría no euclidiana (Poincaré, 1952, pp. 53-54, traducción propia).

Por último, relata su experiencia de iluminación al cumplir con sus deberes en el ejército, sin dar detalles de las otras etapas:

> Luego partí hacia Mont-Valérien, donde tenía que cumplir mi tiempo en el ejército, y por lo tanto mi mente está preocupada con cosas muy diferentes, Un día, mientras cruzaba la calle, la solución de la dificultad que me había parado vino a mí de repente. No traté de desentrañar la idea inmediatamente y solo hasta después de que mi servicio terminó fue que regresé a la cuestión (Poincaré, 1952, p. 54, traducción propia).

Otro caso es recuperado por Hadamard (1945), de una carta de Gauss:

> Así, Gauss, refiriéndose a un teorema aritmético que había intentado demostrar sin éxito durante años, escribe: "Finalmente, hace dos días, lo logré, no a causa de mis dolorosos esfuerzos, sino por la gracia de Dios. Como un repentino destello de relámpago, el enigma quedó resuelto, yo mismo no puedo decir cuál fue el hilo conductor que unió lo que sabía anteriormente con lo que hizo posible mi éxito. (Hadamard, 1945, p. 15, traducción propia)

El sueño de August Kekulé que expuso en un importante discurso sobre los orígenes y el nacimiento de la teoría estructural en 1890:

> Estaba sentado escribiendo en mi libro de texto, pero el trabajo no progresaba, mis pensamientos estaban en otra parte. Giré mi silla al fuego y dormite. De nuevo los

> átomos retozaban ante mis ojos. Esta vez los grupos más pequeños se mantenían modestamente en el fondo. Mi ojo mental, siendo más agudo por las visiones repetidas de este tipo, ahora podía distinguir estructuras grandes de conformación múltiple: largas filas, a veces más juntas, todas entrelazadas y retorcidas en un movimiento de serpiente. ¡Pero mira! ¿Qué fue eso? Una de las serpientes se había agarrado a su propia cola, y la forma giró burlonamente ante mis ojos. Como por un relámpago me desperté; y esta vez también pasé el resto de la noche trabajando en las consecuencias de la hipótesis (Benfey, 1958, p. 22, traducción propia).

Un caso más reciente de iluminación es el de Andrew Wiles, relatado en el documental *BBC Horizon Fermat's Last Theorem*, quien narra cómo, estando sentado en su escritorio el 19 de septiembre, intentaba comprender por qué su prueba no funcionaba, tratando de identificar exactamente cuál era el problema. Fue en este momento, de manera totalmente inesperada, que experimentó una increíble revelación. De repente, comprendió tanto el problema que lo detenía como la forma de enfrentarlo, describiendo este instante como el más crucial de su vida profesional. Llegar a este punto implicó un intenso trabajo prolongado en el problema (NOVA, 1997).

Estos relatos sugieren que la resolución de problemas que involucran creatividad no es un proceso metódico, sino que también involucra elementos de intuición, visión repentina y pensamiento inconsciente, también destacan la importancia de tener un entorno propicio para la resolución de problemas, donde se fomente la exploración, la curiosidad y la creatividad, la relevancia de brindar tiempo suficiente para la reflexión y el pensamiento en profundidad después de un arduo tiempo de trabajo consciente, ya que estos momentos de iluminación suelen ocurrir cuando la mente no está trabajando conscientemente en el problema o sometida a una presión excesiva.

La etapa final del PCM es la verificación, en la cual las ideas generadas durante la iluminación se someten al escrutinio consciente. Se evalúan las inferencias, se realizan cálculos precisos, se justifican las conclusiones y se formalizan los resultados. De acuerdo con Hadamard (1945), esta etapa cumple al menos tres funciones: a) confirmación de la validez de la idea generada. A pesar de la certeza asociada a las ideas surgidas durante la etapa de incubación, es vital verificar su autenticidad, dado que existe la posibilidad de errores o malinterpretaciones, b) formalización de los resultados mediante cálculos precisos o argumentos formales y c) identificar nuevas aplicaciones o implicaciones, ampliando el horizonte del conocimiento obtenido. La verificación asegura no solo la solidez de la solución, sino también su relevancia y aplicabilidad futura.

Más recientemente, Sriraman (2009) destaca la importancia de la dimensión social de la creatividad matemática. Esta interacción puede darse a nivel individual (consultando textos, videos o material en línea), entre pares (con mentores o colegas), o en grupos más amplios (seminarios, congresos), contribuyendo a la consolidación del conocimiento y a la difusión de ideas innovadoras.

La definición original de las etapas del PCM es demasiado general para su aplicación analítica directa. Etapas como la incubación e iluminación son procesos cognitivos inconscientes, difíciles de abordar empíricamente. Por ello, es importante reconocer el valor de todas las ideas, incluso las erróneas y aquellas que no conducen directamente a la solución. Así, el análisis del PCM debe considerar las circunstancias y estrategias que rodean la obtención de ideas.

2.2.5. Resolución de problemas

Respecto a las etapas de preparación y verificación correspondientes al trabajo consciente, tal como lo identificó Sriraman (2009), se pueden identificar algunas similitudes con el trabajo de Polya (1945) sobre las fases que transita un estudiante al momento de resolver un problema.

En la primera fase, comprender el problema, Polya (1945) insta a los resolutores a leer cuidadosamente el enunciado del problema para entender su contexto. Esto incluye la identificación de hipótesis, conclusiones, variables y sus relaciones. Es esencial formular preguntas y transformar la información, seleccionando signos y notaciones adecuados para evitar confusiones.

Avanzando a la segunda fase, diseñar un plan, Polya describe este proceso como uno que se desarrolla gradualmente, a menudo después de múltiples intentos fallidos y periodos de reflexión. El resolutor debe conocer detalladamente, o al menos tener un bosquejo preliminar, de los procedimientos necesarios para abordar el problema.

La tercera fase, ejecutar el plan, implica llevar a cabo los procedimientos organizadamente y con atención meticulosa. Polya hace hincapié en la importancia de documentar cada paso del proceso, desde cálculos hasta representaciones gráficas, para asegurar que cada acción no solo se entienda intuitivamente, sino que también se valide formalmente. El resolutor debe tener la seguridad de que la manera en que procede es correcta en cada resultado obtenido, considerando la diferencia entre identificar los procedimientos correctos y justificar la validez de los mismos

La cuarta fase, mirar hacia atrás, asegura que la solución no solo sea válida sino también relevante y transferible a otros contextos. En esta etapa, se revisa el trabajo completo para detectar posibles errores y para considerar soluciones alternativas. Esta revisión retrospectiva también facilita la conexión del problema actual con otros problemas resueltos anteriormente, ampliando la base de conocimiento del resolutor y fomentando un enfoque más completo hacia la resolución de problemas futuros.

Estas fases de Polya aportan información para proponer un refinamiento a las etapas conscientes del PCM, proporcionando criterios más concretos para analizar el trabajo matemático del resolutor.

Inspirado en el trabajo de Polya, Schoenfeld propone un protocolo para examinar las acciones del resolutor, considerando cuatro componentes:

El primer componente, los *recursos*, aborda los conocimientos, habilidades y estrategias previas (conceptos, teoremas, algoritmos) que el individuo posee y aplica durante la resolución. En la actualidad, el concepto de recursos debe ser ampliado debido a la aparición de sistemas digitales tales como ChatGPT, AlphaGeoemtry, entre otros.

Las *heurísticas*, el segundo componente que propone basado en el trabajo de Polya (1945) , se refieren a estrategias o reglas prácticas que las personas utilizan para guiar su pensamiento y toma de decisiones cuando se enfrentan a problemas matemáticos. Estas estrategias no necesariamente siguen un enfoque formal o algorítmico, sino que pueden manifestarse como atajos mentales o enfoques heurísticos.

El componente denominado *control* se ocupa de la capacidad de supervisar, evaluar y regular el propio proceso de resolución, decidiendo cuándo cambiar de estrategia, revisar el trabajo o persistir. Esta parte se puede enmarcar en lo que se le denomina procesos metacognitivos.

El último componente, denominado *creencias*, se relaciona con las opiniones y actitudes hacia las matemáticas y la propia capacidad para resolver problemas, factores que influyen en la confianza y en el enfoque adoptado ante el desafío. En esta parte juega un rol decisivo la concepción que se tenga de las matemáticas y su aprendizaje. Por ejemplo, un resolutor que conciba a las matemáticas como una colección de principios, algoritmos y fórmulas para resolver tareas o problemas, tendrá un desempeño distinto de aquel que las considere como una disciplina dinámica cuya esencia es resolver problemas.

La integración de las perspectivas de Polya (1945) y Schoenfeld (1985) ofrece un marco robusto y detallado para analizar el proceso de resolución de problemas. Mientras Polya aporta una secuencia lógica de fases, Schoenfeld complementa con un análisis más fino de las acciones, decisiones y actitudes que intervienen a lo largo del proceso.

2.2.6. Tecnologías digitales

Otro aspecto importante que fue considerado es el uso de tecnologías digitales, en esta línea de ideas Pea (1987) sostiene que tales herramientas pueden amplificar y reorganizar el pensamiento. El efecto *amplificador* de una herramienta consiste en potenciar nuestras capacidades existentes, permitiendo poner nuestra atención en actividades más complejas, mientras que el efecto *reorganizador* transforma nuestro pensamiento y proceso de resolución de problemas. La incorporación de tecnologías digitales permite a los estudiantes delegar tareas rutinarias y, en su lugar, dedicar sus esfuerzos mentales a la resolución de problemas (Pea, 1987).

En la línea de las tecnologías digitales, Santos-Trigo et al. (2021) identifican estrategias clave al emplear un SGD en la resolución de problemas:

(i) Obtención de información, utilizar plataformas en línea y enciclopedias electrónicas para obtener datos pertinentes y específicos del problema.

(ii) Construir un modelo dinámico del problema, mediante el SGD, crear y modificar sistemáticamente el modelo del problema, permite identificar propiedades y relaciones entre los objetos matemáticos. Esta fase implica explorar casos particulares y familias de construcciones para identificar invariantes y patrones relevantes.

(iii) Buscar relaciones al emplear un modelo de geometría dinámica permite al resolutor identificar patrones, formular conjeturas basadas en las relaciones observadas y registrarlas mediante el establecimiento de funciones, relaciones, o tablas para organizar los datos al interactuar con los elementos del modelo

(iv) Formular conjeturas conlleva expresar en un lenguaje formal las observaciones derivadas del uso de un modelo de geometría dinámica. Esto implica identificar objetos del modelo y relacionarlos con elementos o propiedades de geometría, tales como cuadriláteros cíclicos, bisectrices, puntos medios, directrices, entre otros.

(v) Pasar de la aproximación empírica y visual al uso de argumentos geométricos o algebraicos, el modelo de geometría dinámica a través de la evidencia empírica permite evidenciar la validez de las conjetura, además permite realizar transformaciones que ayuden a justificar resultados.Por ejemplo, validar la congruencia de ángulos o distancias utilizando propiedades geométricas como la circunferencia o la congruencia de triángulos.

En conjunto estas estrategias permiten aportar elementos para resolver un problema, donde el SGD sirve como una herramienta integradora para explorar, formular conjeturas y fundamentar conclusiones con bases sólidas.

2.3. Integración de los elementos del marco conceptual

Tomando en cuenta las fases de Polya (1945) y las estrategias identificadas por Santos-Trigo et al. (2021) se propone un refinamiento de las etapas del PCM, el cuál oriente el análisis de datos de esta investigación. La **Tabla 2** muestra este refinamiento, incluyendo acciones asociadas a las subetapas identificadas. Este refinamiento del PCM orienta el análisis de los datos hacia aspectos específicos de la resolución de problemas, considerando tanto el trabajo consciente (preparación y verificación) como las fases inconscientes (incubación e iluminación).

Tabla 2: Refinamiento de las etapas del PCM.

Etapas del PCM	**Subetapas**	**Acciones Asociadas**
Preparación	Explorar el problema	Identificar, representar y transformar la información.
		Realizar casos particulares
		Explorar Patrones
	Comprender el problema	Extender los recursos
		Relacionar datos e incógnitas
	Elaborar un plan	Formular conjeturas
		Formular problemas auxiliares
		Obtener problemas equivalentes
	Ejecutar el plan	Éxito
		Fallo
Incubación		
Iluminación		
Verificación	Validez de la idea y revisar la solución	Comprobar la idea
		Comprobar el argumento

		Comprobar cada paso de la solución
	Formalización de la solución	Realizar cálculos numéricos o algebraicos
		Escribir una demostración o justificación
		Obtener soluciones diferentes
	Continuación del problema	Obtener problemas derivados del proceso
		Vincular con otros problemas
		Buscar utilizar el resultado
		Buscar utilizar el método

La implementación de este marco conceptual requiere que los elementos de diseño de la investigación, problemas, instrumentos y perfil de los participantes, respondan a necesidades específicas. En particular, la naturaleza del PCM exige problemas que presenten un desafío significativo, implicando una exploración profunda. Sin embargo, los problemas abiertos de gran complejidad, que pueden requerir años para su resolución, no son adecuados para una investigación de esta naturaleza. Por lo anterior, se introduce el concepto de *problemas-reto*, el cual es una situación problemática que requiere una amplia exploración, a diferencia de los problemas rutinarios, su solución no es inmediata ni evidente, pero se debe conocer al menos una solución. Estos problemas obligan al resolutor a explorar desde diferentes perspectivas, emplear diversas estrategias, enfrentar posibles fracasos y aplicar heurísticas. Al demandar tiempo y esfuerzo, permiten observar las distintas etapas del PCM sin exceder la duración del estudio.

La recolección de información debe ser sistemática y detallada a lo largo de todo el proceso, capturando decisiones, momentos de incertidumbre, retrocesos, ideas generadas y las circunstancias en que surgen. Este seguimiento posibilitará analizar no sólo la influencia de las tecnologías digitales en la resolución de problemas, sino también la manera en que las distintas etapas del PCM interactúan en la solución del problema.

Finalmente, la selección de los participantes y su perfil se basa en los elementos propuestos por Schoenfeld (1985). Es decir, se considera la variedad y profundidad de sus recursos matemáticos, sus heurísticas, su capacidad de control sobre el proceso de resolución y sus creencias hacia las matemáticas, ya que estos aspectos pueden influir significativamente en cómo afrontan las tareas propuestas.

En síntesis, estos lineamientos y consideraciones establecen las bases para el diseño e implementación de la investigación, garantizando que los datos recolectados sean pertinentes y útiles para el análisis. De este modo, se logra una coherencia entre los objetivos planteados, la naturaleza de los problemas, las herramientas empleadas en la recopilación de información, las características de los participantes y el marco conceptual adoptado. Esta coherencia facilitará un análisis más riguroso y profundo, permitiendo comprender con mayor precisión el desarrollo creativo en la resolución de problemas matemáticos.

3. METODOLOGÍA

3.1. Introducción

En esta sección se describen los métodos y procedimientos utilizados para recolectar la información empírica que fundamenta la respuesta a la pregunta de investigación. La elección del enfoque metodológico está orientada por la naturaleza del estudio, que se centra en el análisis del PCM en la resolución de problemas geométricos, específicamente bajo la influencia de tecnologías digitales.

Las características de este trabajo sugieren considerar un enfoque cualitativo, en el cual la información recolectada está compuesta principalmente por palabras que expresan ideas o significados. Sin embargo, también es válida la información en forma de imágenes, dibujos, fórmulas, gestos, entre otros. La intención principal de esta información es que las ideas y significados sean transmitidos para su interpretación. La investigación cualitativa se centra en estudiar los fenómenos en su contexto, busca entender y dar significado a los datos que provienen del fenómeno observado, lo que la convierte en un enfoque tanto naturalista como interpretativo (Sampieri et al., 2006). En una investigación cualitativa, un objetivo general consiste en identificar patrones de significado.

La revisión de la literatura evidencia que hay pocas investigaciones que abordan el PCM, como las de Sriraman (2009), Hitt et al. (2010) y Liljedahl (2013), lo que sugiere que esta investigación es exploratoria, una metodología empleada cuando se conoce poco sobre un tema (Sampieri et al., 2006; Swedberg, 2020). Además, este trabajo busca identificar y describir algunos cambios en las etapas del PCM, por lo que también es una investigación descriptiva, cuya finalidad es dar una descripción detallada de los datos recopilados.

En esta misma línea, se realizó un *estudio de caso único*, que busca comprender principalmente este caso. Esta elección se debe a la búsqueda de profundizar en la comprensión de un fenómeno específico en su contexto natural, permitiendo un análisis detallado (Stake, 1995). El estudio de caso único, aunque brinda una comprensión profunda del caso particular, sus hallazgos no pueden generalizarse a todos los contextos. A pesar de esto, los resultados obtenidos pueden ser de utilidad para generar hipótesis y orientar investigaciones futuras.

En este estudio, se seleccionó un caso específico que utiliza tecnologías digitales en la resolución de problemas geométricos, registrando sus acciones y pensamientos en una *bitácora digital* (Santos-Trigo, 2020) durante el proceso de solución. El contexto de este caso incluye la implementación de un SGD y su influencia en las etapas del PCM. Este enfoque cualitativo permite capturar las experiencias, percepciones y estrategias del participante de manera detallada y contextualizada.

3.2. Participantes

El perfil del participante es un egresado de una licenciatura en Matemáticas Aplicadas, actualmente inscrito en un posgrado en educación matemática. La selección se basó en diversos factores. En primer lugar, dada la naturaleza de esta investigación, que requiere de un registro sistemático de las acciones realizadas por el participante a lo largo de varios meses, el participante debe contar con disponibilidad y disposición para recolectar información de manera sistemática durante los procesos de resolución de los problemas planteados. Además, se consideró esencial que el participante conociera y hubiese utilizado los elementos que propone Shoenfeld (1985) en su protocolo de resolución de problemas (recursos, heurísticas, creencias y control). Esto se deriva de la naturaleza de este trabajo, que sugiere que los participantes deben contar con recursos y heurísticas que les permitan explorar ampliamente y desde múltiples perspectivas los problemas. Deben ser capaces de adaptar sus estrategias de resolución según lo requiera la situación y mostrar disposición para perseverar frente a las dificultades, lo cual corresponde a su sistema de control.

Además, es esencial que el participante comprenda que la resolución de problemas puede requerir una exploración exhaustiva y multifacética, aceptando que las soluciones pueden surgir tras largos periodos de exploración o incluso de manera indirecta, deben tener la convicción de que los conceptos matemáticos no existen de manera aislada, sino que están interconectados, deben comprender que la resolución de problemas es más que simplemente aplicar métodos, más bien deben experimentar con diferentes enfoques, formular conjeturas, y estar dispuestos a enfrentar la incertidumbre y la complejidad del problema, dado que se trabajará con un SGD, el resolutor debe ser consciente de que la solución de los problemas se basa en argumentos matemáticos, y no en la evidencia empírica proporcionada por representaciones visuales. Estos aspectos forman parte de su sistema de creencias.

En segundo lugar, en investigaciones en el campo de la educación matemática, es común que los investigadores busquen interpretar los procesos que ocurren en los participantes de la investigación. Sin embargo, existen detalles intrincados y sutilezas que sólo el resolutor de un problema puede exponer con alguna objetividad requerida para entender procesos que tienen lugar al resolver problemas, y que el investigador podría pasar por alto. Para abordar esta limitación, se decidió que el participante colaborara activamente en el análisis de los datos recopilados. Esta elección permitió una descripción más precisa y enriquecedora de los procesos que se desarrollaron durante la resolución de los problemas de geometría euclidiana.

3.3 Elección de los problemas

La selección de los problemas de geometría euclidiana fue realizada por el mentor del participante. El primer problema se eligió debido a su naturaleza no rutinaria, la limitada exploración previa por otros autores y la necesidad de un trabajo arduo y tiempo para abordarlo; lo cual permitió identificar los momentos clave del PCM. El primer problema fue asignado el 18 de marzo y fue resuelto por el participante tras aproximadamente 3 meses de trabajo, el 14 de junio, cuando se escribió la demostración final del resultado matemático.

Este problema fue denominado tipo Napoleón, por su similitud con el teorema de Napoleón. El enunciado del problema es el siguiente: “Sobre los lados del triángulo ABC se construyen triángulos equiláteros ACD, ABE, y BCF; los puntos K y H son puntos medios de EF y DF respectivamente. Demostrar que el triángulo AKH es equilátero”.

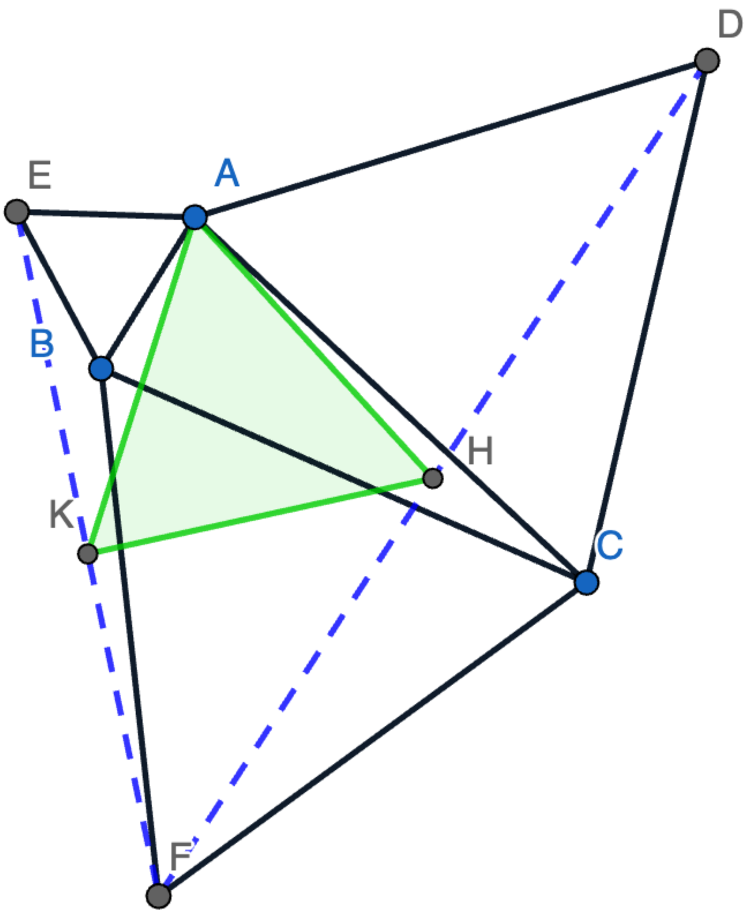

Figura 1. Problema 1: tipo Napoleón

El segundo problema, conocido como un *problema desafiante* (killer problem), llamó la atención del mentor debido a su reputación como un problema difícil de resolver, el cual fue retomado del canal de YouTube *MindYourDecisions* (https://bit.ly/45BrzpZ), cuyo creador es Presh Talwalkar. A pesar de que se resolvió en un período relativamente corto (2 días), se incluyó en la investigación debido a los resultados intrigantes que ofreció. Su enunciado es: “Dentro de un triángulo equilátero ABC se coloca un punto D, determinándose los segmentos AD, BD y CD con los que se construye el triángulo EFG; se dan por conocidos los ángulos x e y. ¿Cuál es la medida de los ángulos del triángulo EFG en términos de x e y?”.

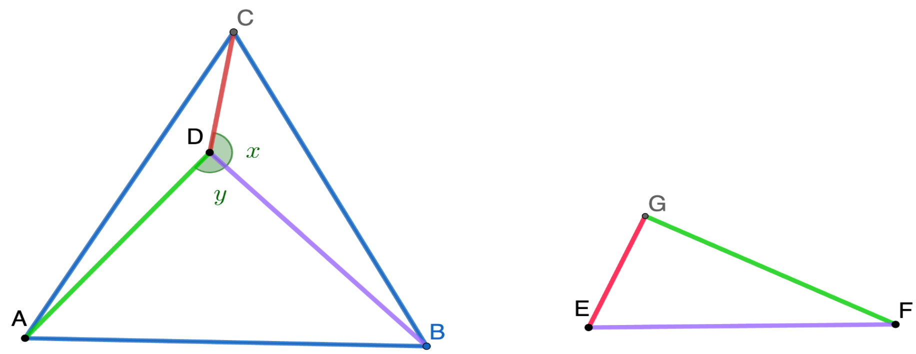

Figura 2. Problema 2: “killer problem”

En cuanto al tiempo de resolución de los problemas, es importante aclarar que no se asignó un tiempo específico, sino que se registró el tiempo real que el participante tardó en resolverlos. Esta elección permitió el seguimiento detallado de las acciones diarias y el proceso, lo que, a su vez, abrió la puerta para identificar los momentos de creatividad matemática.

3.4. Instrumentos de recolección de la información

El PCM propuesto por Hadamard (1945) demanda un arduo trabajo consciente y períodos de trabajo inconsciente. Por lo tanto, se consideró esencial registrar sistemáticamente las acciones llevadas a cabo en el proceso de resolución mediante una bitácora digital (Santos-Trigo, 2020). En esta bitácora, se registraron las fechas desde que inició el proceso de solución hasta el momento de verificación de las soluciones y la escritura de la demostración del resultado de manera clara, ordenada y en un lenguaje formal. El registro escrito comprendió el proceso de resolución, incluyendo imágenes relacionadas con el mismo, así como los lugares y períodos de tiempo dedicados al trabajo consciente e inconsciente. Además, se incluyen comentarios del mentor y el resolutor sobre el proceso de resolución y observaciones que este último consideró pertinentes en la resolución.

Para complementar la recolección de la información, los archivos de GeoGebra se guardaron localmente y en la nube, facilitando la comunicación resolutor-mentor y el registro de la evolución del problema. Durante la verificación, se redactó una solución formal detallada que permitió validar claramente la solución y conectar las ideas registradas con los objetos matemáticos.

3.5. Análisis de la información

El proceso de análisis de la información empírica se estructuró en tres fases. La primera fase implicó una revisión detallada de la bitácora digital del participante para identificar acciones que llevó a cabo vinculadas con el refinamiento del PCM (**Tabla 2**), las cuales se subrayaron en la bitácora digital para, posteriormente, analizar su impacto en el proceso de solución y para identificar el impacto de utilizar una tecnología digital.

En la segunda fase, se revisaron y analizaron las interacciones sociales del participante registradas en la bitácora digital, diferenciando entre interacciones directas e indirectas. Estas interacciones fueron clasificadas en cuatro grupos: (a) Académicas: Incluyen todas las interacciones durante clases y seminarios del posgrado en educación matemática que proporcionaron información relevante al resolutor para el problema en cuestión, (b) Extracurriculares: Comprenden las interacciones derivadas de actividades adicionales al posgrado, en este caso especificó actividades relacionadas con la olimpiada de matemáticas en su fase estatal (Hidalgo, México), (c) Con el mentor: Reúne las interacciones que el resolutor tuvo con su mentor en relación con los problemas que estaba resolviendo y (d) De consulta: Agrupa las interacciones indirectas del resolutor a través de la revisión de libros, artículos y material audiovisual.

La tercera fase del análisis se centró en identificar las ideas que emergieron de manera espontánea (iluminación) mientras el participante realizaba otras actividades, así como durante procesos de reflexión o análisis de ideas derivadas de exploraciones previas. El foco de este análisis fue entender las circunstancias que propiciaron la aparición de estas ideas, independientemente de su impacto final en la resolución del problema. La participación del resolutor en la revisión y análisis de sus producciones escritas fue fundamental, ya que permitió aclarar ambigüedades y aportar detalles cruciales sobre el PCM.

4. RESULTADOS

En este capítulo se exponen los resultados obtenidos del análisis de la información recopilada. Para llevar a cabo dicho análisis, se enumeraron las líneas de texto e imágenes registradas en la bitácora digital del participante, asignando un color a aquellas que correspondían a las acciones descritas en el refinamiento del PCM (véase Tabla 2). Adicionalmente, se identificaron y clasificaron las interacciones sociales, determinando el contexto en el que se presentaron y evaluando su impacto en el proceso de solución. Asimismo, se analizaron los momentos en que surgieron nuevas ideas, describiendo sus características, el contexto en que se generaron y su relación con las etapas de la resolución del problema. Durante este proceso, la colaboración del participante permitió aclarar y validar la información recopilada.

Una vez organizada la información, se determinó el rol que desempeñó el SGD en las acciones del resolutor, así como la cantidad e impacto de las interacciones sociales y las circunstancias en las que se originaron las ideas. Para ello, se presentan extractos de la bitácora del participante que ilustran momentos en los que se emplearon las diversas acciones del refinamiento, se produjeron interacciones sociales o emergieron nuevas ideas a lo largo del proceso de resolución. En estos extractos se resalta el papel del SGD, identificándolos con el código B1LXX para referirse a la línea XX del primer problema, y B2LXX para la línea XX del segundo problema.

4.1 Resultados de las acciones del refinamiento

En este apartado, se presentan los resultados del análisis de las acciones observadas en las bitácoras digitales del participante. El objetivo es comprender cómo el uso del SGD influye tanto en las acciones descritas en el refinamiento propuesto en la **Tabla 2**, como en las etapas del PCM. Para el análisis, se retoman los constructos de *amplificación* y *reorganización cognitiva*. La *amplificación* se refiere a situaciones en las que una acción es potenciada por la incorporación de una tecnología digital, permitiendo que el resolutor se enfoque en tareas más complejas. Por otro lado, la *reorganización* implica que la tecnología digital transforma fundamentalmente la forma en que se abordan los problemas, posibilitando exploraciones y estrategias que no serían factibles sin el uso de la herramienta. A través de este análisis, se busca evidenciar de qué manera el SGD impacta en la ejecución de acciones específicas durante la resolución de *problemas-reto*, ya sea potenciando habilidades existentes o modificando la manera en que el participante realiza ciertas acciones. Esto permitirá comprender mejor el papel de las tecnologías digitales en el aprendizaje y enseñanza de la geometría, así como su influencia en el desarrollo de competencias matemáticas.

4.1.1 Identificar, representar y transformar la información

La habilidad para identificar, representar y transformar información es fundamental en la resolución de problemas geométricos. Esta acción implica comprender el enunciado del problema, extraer los datos relevantes y construir representaciones geométricas que permitan visualizar y manipular los elementos involucrados. En este apartado, se analiza cómo el participante utiliza el SGD para identificar, representar y transformar la información durante la resolución de los problemas propuestos. En ambos problemas, el resolutor inició identificando la información contenida en el enunciado del problema, con el objetivo de realizar un modelo dinámico (B1L10-11; B2L19-20). Además, continúa identificando información conforme se realizan modificaciones en el modelo (B1L252-256). En esta parte, el resolutor únicamente utilizó las herramientas geométricas del SGD para realizar las construcciones, lo que corresponde a una amplificación de la acción.

> Problema 1
> 10 …con esta información trace
> 11 la figura lo más parecido posible a la recibida en la aplicación de GeoGebra…
> 252 …se me
> 253 ocurre unir los puntos medios a ver si ocurre algo, se forman cuatro triángulos semejantes
> 254 y además la base del triángulo equilátero a demostrar es la mitad del segmento de arriba,
> 255 lo que igual me lleva a pensar que las otras coincidencias pertenecen a otros triángulos
> 256 equiláteros lo cual verificó…
> Problema 2
> 19 …utilicé el software de geogebra para realizar la
> 20 representación gráfica del problema…

Por otro lado, las características del SGD permitieron modificar el modelo dinámico de acuerdo con la información identificada, manteniendo las características esenciales y evitando problemas de representación. Estas acciones se observaron en varias instancias, donde el resolutor elimina elementos o ajusta la construcción para mejorar su comprensión

(B1L26-28, B1L244-245, B1L136-137 y B1L179-180). Estas modificaciones dinámicas corresponden a una reorganización de la acción.

> Problema 1
> 26 …para evitar caer en el
> 27 mismo falso supuesto modifique la construcción de tal manera que el triángulo no pareciera
> 28 rectángulo pero que fuese parecida a la imagen original…
> 136 …al no ver nada claro y sentir que no está conectado al
> 137 triángulo original terminó por borrarlos y volver a plantearme el problema…
> 179 …a lo cual decidó eliminar los
> 180 ejes y cuadrícula…
> 244 … la imagen no
> 245 ayuda mucho, así que la modificó de tal manera que se vea mejor…

Además, se utilizaron las características del SGD para representar con colores la información del problema. En las **figuras 3.1, 3.2 y 3.3** se muestran ejemplos de esta acción. Aunque el uso de colores no es exclusivo del trabajo con el SGD, este proporciona herramientas que ayudan al resolutor a enfocarse en procesos más complejos. Por lo tanto, esto se considera una amplificación de la acción, ya que el SGD potencia la capacidad del usuario para representar y manipular información

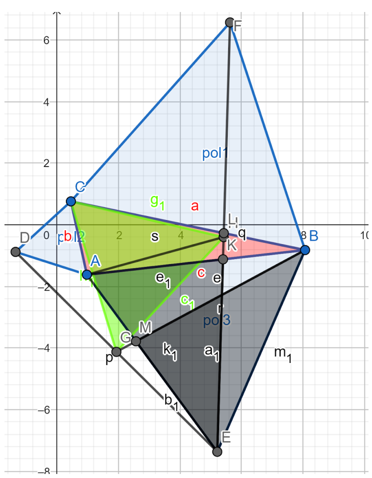

Figura 3.1 Identificación de triángulos congruentes con colores

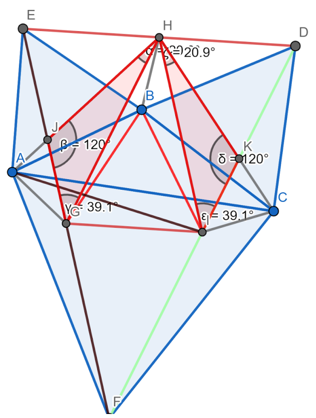

Figura 3.2 Identificación de triángulos congruentes con colores

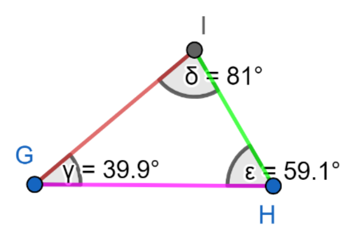

Figura 3.3 Identificación de los elementos del problema con colores

Por último, se identificó que el resolutor modificó el modelo inicial del problema a lo largo del proceso de resolución, eliminando y agregando elementos de manera permanente. Estas modificaciones se llevaron a cabo mediante las herramientas geométricas y la característica dinámica del SGD, lo que implica tanto amplificación como reorganización de la acción. Las **figuras 4.1, 4.2 y 4.3** ilustran algunos ejemplos de los cambios realizados en el modelo dinámico.

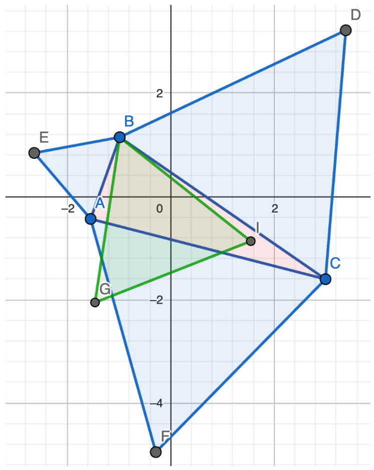

Figura 4.1 Modelo dinámico inicial

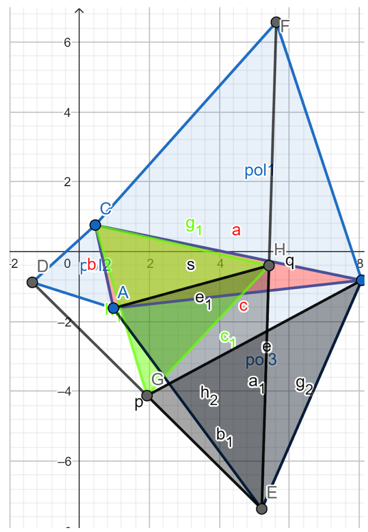

Figura 4.2 Modelo dinámico modificado

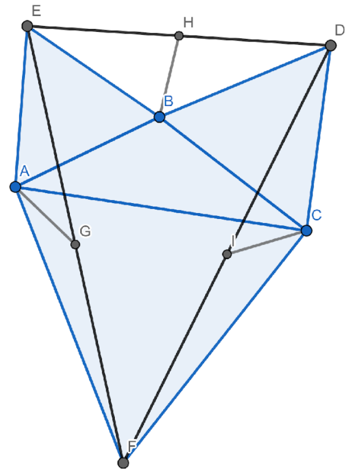

Figura 4.3 Modelo dinámico modificado

Del análisis anterior se concluye que la acción de identificar, representar y transformar la información se ve tanto amplificada como reorganizada gracias a la intervención del SGD.

4.1.2 Explorar casos particulares

En la resolución de problemas geométricos, la generación de casos particulares es una estrategia fundamental que permite al resolutor explorar situaciones específicas para identificar propiedades y patrones que puedan conducir a una solución general. En este apartado, se analiza cómo el participante emplea el SGD para realizar casos particulares durante la resolución de los problemas propuestos. Se examina cómo las funcionalidades del SGD, como la manipulación dinámica de figuras y la capacidad de ajustar parámetros en tiempo real, influyen en su proceso de realización de casos particulares.

Al analizar la acción de generar casos particulares, se observa explícitamente el uso del SGD para crear una familia de casos particulares mediante la manipulación dinámica del modelo (B1L24, B2L24 y B2L41). Adicionalmente, el participante aclara que las afirmaciones formuladas se basan en la evidencia proporcionada por el SGD, la cual se obtuvo al generar múltiples casos particulares moviendo dinámicamente los elementos involucrados en el problema (B1L72, B1L101, B1L151-B1L153, B1L202, B1L267, B1L28, B1L524-B1L525 y B1L539-B1L540). Esta capacidad del SGD para la generación dinámica de casos particulares indica una reorganización en la ejecución de esta acción, atribuible al uso de esta tecnología digital.

> Problema 1
>
> 24 …moví el triángulo original para verificar si el resultado solo se cumplía para triángulos rectángulos…
> 72 …durante esta exploración obtuve distintas distancias que coinciden.
> 101 …de los cuales encuentro que uno de ellos siempre es de 60°…
> 151 …resulta que forman un ángulo de
> 152 60° lo que me lleva a pensar que la otra mediana debería intersecar igual en el mismo
> 153 punto y formar el mismo ángulo,...
> 194 … compruebo con geogebra que no son semejante así que descarto la idea…
> 202 …geogrebra me demuestra que no…
> 267 …lo compruebo con GeoGebra…
> 281 …resulta que uno de ellos vale 120°
> 524 …lo cual hago mientras escribo la prueba voy
> 525 checando en GeoGebra que lo que digo sea cierto, …
> 539 …durante la redacción veo que hay dos intersecciones o bien una
> 540 cuando el ángulo de triángulo mide 60…
>
> Problema 2
>
> 24 … después de experimentar con distintas posiciones del punto D…
> 41 …busque la validación con GeoGebra para distintos puntos D…

Por otro lado, se observa cómo el resolutor ajustó dinámicamente el modelo hasta cumplir con las características deseadas, generando casos particulares específicos (B1L29-B1L32, B1L174) A diferencia del ambiente de lápiz y papel, donde cada caso se desarrolla de manera independiente, el uso del SGD evidencia una reorganización del proceso de generación de casos particulares. El SGD transforma la estrategia, permitiendo manipular y explorar casos de forma continua e interconectada, lo que modifica fundamentalmente la conceptualización y ejecución de la tarea. En conclusión, el uso del SGD reorganiza la forma en que el resolutor concibe y ejecuta esta estrategia.

> Problema 1
>
> 29 …tuve la idea de hacer los casos particulares más sencillos. Por ejemplo, el triángulo equilátero,
> 30 el cual resulta extremadamente sencillo y no da información del caso general. El siguiente caso particular
> 31 que realicé es el de triángulo isósceles, pero el caso en que se unen los lados congruentes resulta

32 sencillo y el otro caso no brinda información relevante…
174 …hacer casos especiales, como triángulos rectángulos, entre ellos el del ángulos 30,60,90

4.1.3 Identificar patrones

En el proceso de resolución de problemas geométricos, la búsqueda de patrones juega un papel fundamental al permitir al resolutor identificar regularidades y propiedades que facilitan la comprensión y solución del problema. En este apartado, se analiza cómo el participante emplea el SGD para buscar patrones durante la resolución del problema propuesto. Se examina de qué manera el uso de las funcionalidades del software, como la construcción y manipulación dinámica de objetos geométricos, influye en su proceso de descubrimiento y comprensión de relaciones geométricas.

El participante utilizó el SGD para explorar y descubrir relaciones geométricas mediante la manipulación del modelo. Las siguientes líneas de la bitácora evidencian cómo el resolutor emplea el SGD para trazar circunferencias, alturas, mediatrices, bisectrices y cuadriláteros, entre otros elementos, con el objetivo de identificar patrones y propiedades que le ayuden a resolver el problema.

15 Una vez creado el problema tracé circunferencias …
56 …primero que intento, es con las alturas de los segmentos donde están los puntos medios
58 …después intente con las mediatrices…
59 …pruebo con las bisectrices…
71 …decido empezar a trazar circunferencias y colocarlas en los distintos puntos para ver si algunas
72 distancias coincidían, durante esta exploración obtuve distintas distancias que coinciden.
73 Al observar estas coincidencias decido seguir explorando para ver si encontraba más.
77 …reanudó la exploración realizó dos circunferencias con centro en los puntos …
89 …decido buscar los triángulos congruentes,...
97 … Empiezo a explorar los ángulos de los triángulos..
107 …exploró los ángulos de los nuevos triángulos…
146 …se me ocurre tomar el punto medio de entre las puntas de los triángulos
147 equilátero que me faltaba y ver si la mediana análoga a las otras dos era igual también lo
148 que resulto cierto…
148 …trazo los cuadriláteros que se forman de unir estos segmentos esperando encontrar algo…
150 …borro los segmentos de las medianas por error, al volver a colocarlas decido
151 hacerlo con rectas para ver si la intersección forma algo y resulta que forman un ángulo de
152 60° …
197 …decido intentar con cuadriláteros así que trazó el cuadrilátero …
201 …decido ver si el cuadrilátero que trace lo era y geogrebra me demuestra que no …
214 …lo que hago es trazar las diagonales y lo primero que
215 noto es que forman triángulos semejantes…
224 ...Decido buscar más cuadriláteros cíclicos esperando que alguno de ellos sirva…
244 …Tracé la mediana que me hace falta para ver si observo algo…
259 …empiezo a explorar los ángulos

> 260 que se forman por si tienen alguna relación con los ángulos originales, con ayuda de
> 261 GeoGebra verificó que no,…
> 500 …empiezo a revisar algunos ángulos,...

En este caso, podemos afirmar que el uso del SGD amplifica y reorganiza la búsqueda de patrones. La amplificación se deriva de que el SGD proporciona herramientas para realizar construcciones geométricas y realizar exploraciones en el modelo, por ejemplo, el resolutor trazó circunferencias, alturas, mediatrices, bisectrices y cuadriláteros con las herramientas geométricas del SGD, y obtuvó medidas de segmentos y ángulos con las herramientas aritméticas del SGD. Esto permitió al resolutor centrarse en la búsqueda de patrones en lugar de en los procesos de medición y construcción.

La reorganización se observa en que el SGD cambió fundamentalmente la forma en que el participante aborda la tarea de buscar patrones. En lugar de construir y analizar cada figura de manera independiente, puede manipular dinámicamente el modelo y explorar múltiples casos de forma continua al interactuar con el modelo ajustando parámetros del problema y observando cómo emergen patrones y relaciones geométricas, lo que reorganiza esta actividad. Las siguientes líneas muestran los momentos en los que se usó la característica dinámica del SGD para buscar patrones, recordando que el resolutor solo realizaba las afirmaciones tras mover dinámicamente el modelo y obtener evidencia a favor.

> 71 …decido empezar a trazar circunferencias y colocarlas en los distintos puntos para ver si algunas
> 72 distancias coincidían, durante esta exploración obtuve distintas distancias que coinciden.
> 146 …se me ocurre tomar el punto medio de entre las puntas de los triángulos
> 147 equilátero que me faltaba y ver si la mediana análoga a las otras dos era igual también lo
> 148 que resulto cierto…
> 150 …borro los segmentos de las medianas por error, al volver a colocarlas decido
> 151 hacerlo con rectas para ver si la intersección forma algo y resulta que forman un ángulo de
> 152 60° …
> 201 …decido ver si el cuadrilátero que trace lo era y geogrebra me demuestra que no …
> 259 …empiezo a explorar los ángulos
> 260 que se forman por si tienen alguna relación con los ángulos originales, con ayuda de
> 261 GeoGebra verificó que no,…
>
> Problema 2
>
> 24 … después de experimentar con distintas posiciones del punto D…

En síntesis, el uso del SGD en la búsqueda de patrones permite afirmar que nos encontramos ante una acción que experimenta tanto amplificación como reorganización. De este modo, el participante logra concentrarse en el aspecto conceptual de la búsqueda de patrones, apoyándose en las evidencias y relaciones que surgen de la interacción con el entorno dinámico.

4.1.4 Relacionar datos e incógnitas

La habilidad de relacionar los datos proporcionados con las incógnitas a resolver es esencial en la resolución de problemas geométricos. Este proceso implica no solo identificar y organizar la información disponible, sino también establecer conexiones lógicas que conduzcan a una solución efectiva.

Al analizar la acción de relacionar datos e incógnitas, se observó que el uso de colores permitió al resolutor encontrar relaciones entre la información del problema. Por ejemplo, en el Problema 1, se evidencia este uso en B1L254 y B1L265-267, así como en las **Figuras 5.1 y 5.2** , mientras que en el Problema 2 ocurre algo similar en B2L40-41, B2L57-60 y las **Figuras 6.1 y 6.2** En estos casos, representar la información con colores resultó ser la clave para establecer la relación entre los datos y las incógnitas, a diferencia de lo presentado en el apartado sobre representación de la información, donde los colores se empleaban con fines meramente descriptivos sin necesariamente conectar aspectos del problema entre sí.

> Problema 1
> 254 …la base del triángulo equilátero a demostrar es la mitad del segmento de arriba, …
> 265 …si supongo que ya demostré que las medianas son iguales y que el
> 266 equilátero está formado por la mitad del lado “de arriba” entonces deberían ser
> 267 congruentes HBD y BIC

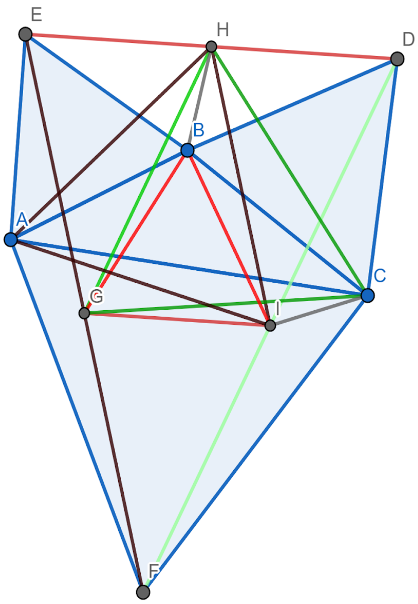

Figura 5.1 Relación de datos con incógnitas a través de colores, basada en la comparación de medidas.

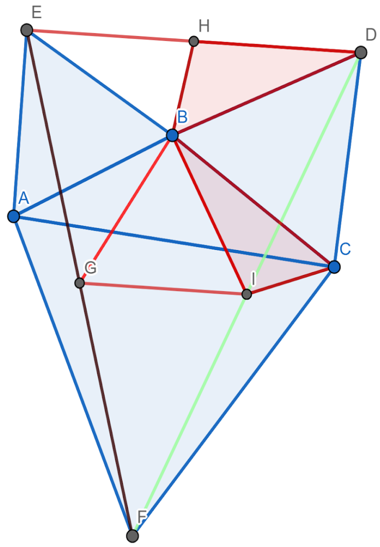

Figura 5.2 Relación de datos con incógnitas a través de colores, utilizando triángulos congruentes

Problema 2
40 …Con esta construcción y la conjetura, el ángulo B-γ tendría que ser de 60° es decir CDE
41 formarían un triángulo equilátero…
57 …durante la exploración con este software consideré modificar
58 la construcción, por construcción DE era igual a DC y se deseaba mostrar que esos eran iguales a
59 EC, por lo cual hice la nueva construcción de manera que EC sea igual a CD desconociendo DE,
60 al hacer esto queda que el triángulo ACE es congruente con BCD.

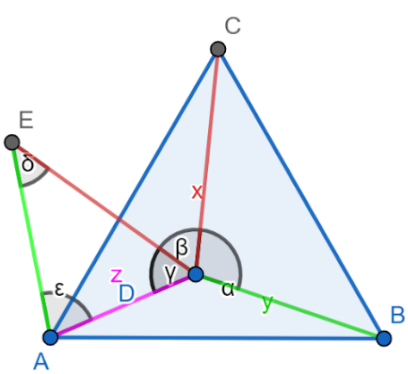

Figura 6.1 Relación de datos con la incógnita a través de colores

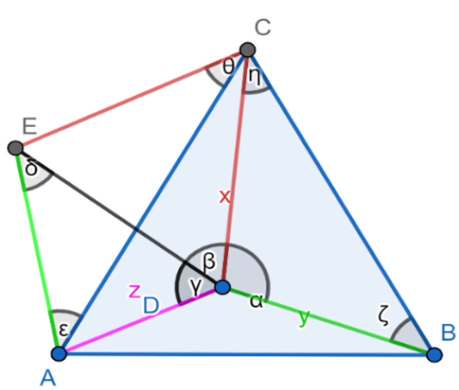

Figura 6.2 Relación equivalente de datos con la incógnita a través de colores

En el Problema 2 se observa además cómo el resolutor relaciona los datos y la incógnita del problema al usar colores, conjuntamente con las herramientas aritméticas y las características dinámicas del SGD (B2L24-26 y la **Figura 7**). Al utilizar las características dinámicas del SGD para relacionar los datos e incógnitas el SGD reorganiza la acción. Por lo tanto, la acción de relacionar los datos e incógnitas del problema se vió tanto amplificada como reorganizada por la incorporación del SGD.

Problema 2
24 después de experimentar con distintas posiciones del punto D, observé que los ángulos del nuevo
25 triángulo entre 2 segmentos era el ángulo comprendido entre esos mismos 2 segmentos en el
26 triángulo equilátero menos 60 grados…

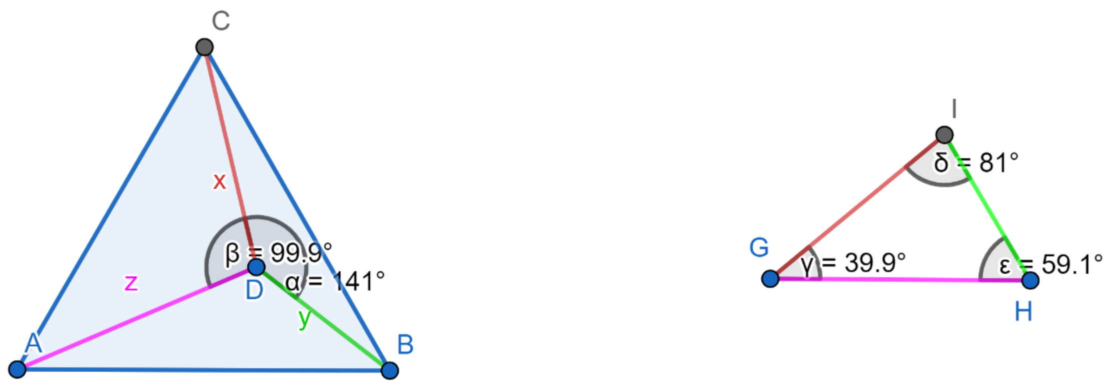

Figura 7. Relación de datos e incógnitas en el Problema 2 mediante el uso de colores, herramientas aritméticas y características dinámicas del SGD

4.1.5 Formular conjeturas

La formulación de conjeturas es una acción esencial en la resolución de problemas geométricos, ya que permite al resolutor establecer hipótesis basadas en patrones y relaciones observadas, las cuales pueden conducir a soluciones o a la comprensión más profunda del problema. En este apartado, se analiza cómo el participante formula conjeturas durante la resolución de los problemas propuestos y cómo el uso del SGD influye en este proceso.

Se observó que en ambos problemas la formulación de conjeturas suele coincidir con la generación de casos particulares. Cuando el resolutor, con ayuda de las herramientas del SGD, identificaba un posible indicio que pudiera constituir una conjetura, ponía a prueba dicha idea moviendo dinámicamente los elementos del problema. Si la evidencia obtenida respaldaba el indicio, formulaba la conjetura; de lo contrario, la descartaba. Esta dependencia de la característica dinámica del SGD para verificar y refinar las hipótesis sugiere que el SGD no solo amplifica, sino también reorganiza la acción de formular conjeturas.

> Problema 1
> 24 …moví el triángulo original para verificar si el resultado solo se cumplía para triángulos rectángulos…
> 72 …durante esta exploración obtuve distintas distancias que coinciden.
> 101 …de los cuales encuentro que uno de ellos siempre es de 60°…
> 151 …resulta que forman un ángulo de
> 152 60° lo que me lleva a pensar que la otra mediana debería intersecar igual en el mismo
> 153 punto y formar el mismo ángulo,...
> 194 … compruebo con geogebra que no son semejante así que descarto la idea…
> 202 …geogebra me demuestra que no…
> 281 …resulta que uno de ellos vale 120°
> Problema 2
> 24 … después de experimentar con distintas posiciones del punto D…

4.1.6 Utilizar problemas auxiliares

La acción de recurrir a problemas auxiliares, teoremas previos o conocimientos ya adquiridos se considera una estrategia habitual en la resolución de problemas matemáticos. Esta estrategia puede servir para reducir la complejidad del problema actual, al recordar resultados previos, el resolutor intenta descomponer el problema o reinterpretarlo en función de algo conocido, transferir conocimiento y técnicas empleados con éxito en otros problemas, esperando que resulten útiles en el problema actual.

Al momento de utilizar problemas auxiliares se puede apreciar que el resolutor recordó resultados previos, el resolutor intenta descomponer el problema o reinterpretarlo en función de algo conocido. Por ejemplo, el participante menciona el Teorema de Apolonio, el Teorema de Stewart y el Teorema de Euclides, así como la Ley de Cosenos, con la intención de conectar el problema con herramientas más familiares que podrían simplificar el abordaje (B1L299-301). Sin embargo por involucrar cálculos esta acción se realizó en un ambiente de lápiz y papel (B1L308-311).

> Problema 1
> 299 … vuelvo a ver el del teorema de Apolonio o de la
> 300 Mediana, que me lleva a ver el de stewart que a su vez me lleva a ver el video del teorema
> 301 de euclides y ley de cosenos, lo que a su vez me lleva a reconsiderar usar la ley de cosenos…
> 308 … el plantear estas ecuaciones me hacen sentir seguro de que funcionaran ya
> 309 que relacionan los segmentos con los lados del triángulo original, y durante todo el análisis
> 310 anterior había tenido el pensamiento de no poder resolver el problema porque no

311 conectaba las conjeturas

Por otro lado, al utilizar problemas auxiliares de geometría (B1L377-380, B1L434-439, y B2L51-54), el resolutor empleó el SGD para explorar dichos problemas en el modelo dinámico. Esta exploración le permitió adaptar y probar las ideas tomadas de contextos previos en el entorno del problema actual. Al realizar las construcciones con el SGD, el resolutor se enfocó en obtener información que le permitiera resolver el problema, llegando incluso a formular una conjetura (B1L438). Esta evidencia sugiere que el SGD actuó como un amplificador de esta acción.

Problema 1
377 …retomo la idea del problema de
378 la olimpiada y lo compruebo, en efecto es cierto pero después de estar como una hora
379 tratando de probarlo abandonó la idea al darme cuenta que no conozco datos de j, es
380 decir, porque es ese punto porque está ahí.

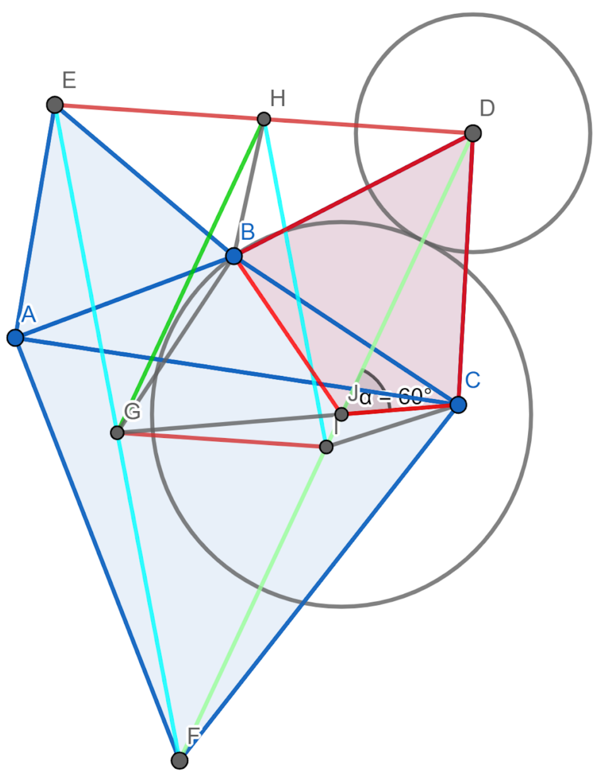

Figura 8. El participante usa como problema auxiliar un problema de olimpiada

434 …caigo en cuenta que eso se parece al segundo problema que
435 resolví, entonces si trazó un triángulo equilátero con vértices E y G, AK tendría que ser lo
436 mismo que CG pero no veo cómo relacionarlo, trazar el triángulo equilátero EGL ya que son

437 los lados donde estoy trabajando, con eso CL seria igual a AG lo que me lleva a que si
438 muestro que icl es de 60 o bien un equilátero entonces ya acabe. Después de 10 minutos
439 tratando de mostrar lo de antes resisto ya que no veo cómo se conecta con el triángulo original.

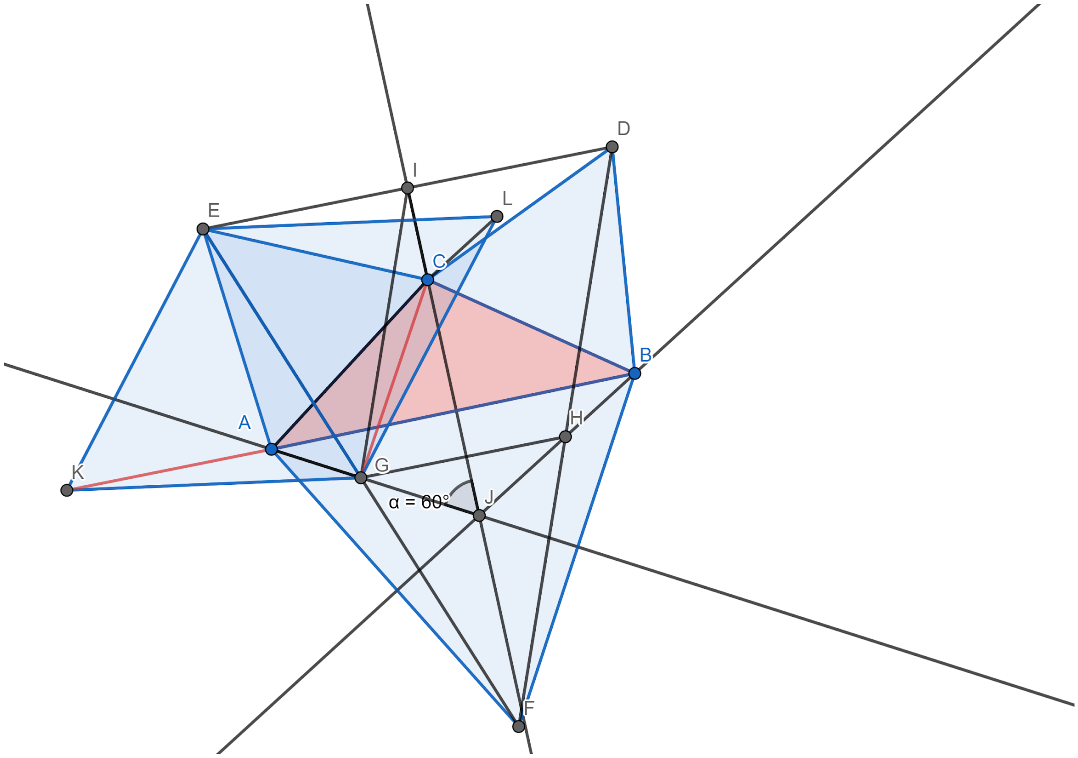

Figura 9. El participante utiliza el segundo problema como problema auxiliar

Problema 2
51 …recordé un ejercicio que se había realizado el día anterior durante el
52 entrenamiento, donde la demostración involucra construir triángulos equiláteros, entonces busqué
53 incorporar esta idea al problema trazando paralelas y reduciendo el problema a mostrar que el
54 ángulo ε era igual a η, en lo cual no tuve éxito.

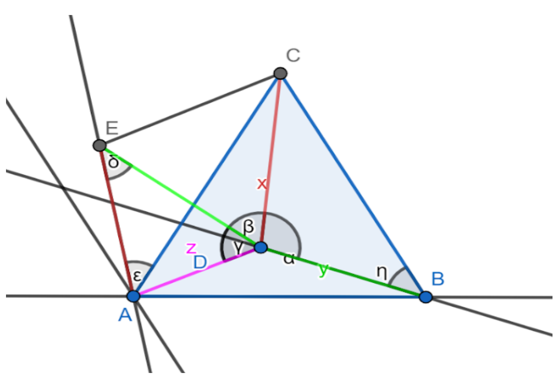

Figura 10. El participante utiliza un problema de olimpiada como problema auxiliar

4.1.7 Formular problemas equivalentes

La formulación de problemas equivalentes es una estrategia que permite reconfigurar la situación original en términos más sencillos o accesibles. Esta acción implica identificar elementos clave del problema, reinterpretarlos y crear un enunciado alternativo cuyo resultado o método de solución conserve la esencia de la situación original.

En el caso del Problema 1, se produjeron dos reformulaciones propuestas por el mentor del resolutor (B1L490-491). Estas reformulaciones surgieron a partir de la interacción del mentor con la información que el resolutor había destacado utilizando las características dinámicas del modelo. El resolutor mostraba puntos cruciales y relaciones geométricas en el entorno digital, lo cual permitió al mentor detectar aspectos relevantes que podrían modificarse hacia otro problema.

> Problema 1
> 490 …me propone dos reformulaciones para el problema,
> 491 el resto del día solo pienso en las reformulaciones y como están conectadas al problema original.

En el Problema 2, fue el propio resolutor quien transformó el problema original en problemas equivalentes. Mediante la manipulación y modificación del modelo dinámico, así como la introducción de construcciones auxiliares (por ejemplo, trazado de paralelas), el resolutor consiguió nuevas versiones del problema, equivalentes en su resultado pero con hipótesis diferentes. Incluso una de estas modificaciones soluciona el problema, aunque el resolutor lo pasó por alto hasta más adelante en la exploración.

> Problema 2
> 41 como el triángulo CDE es equilátero el problema está resuelto, pero surge el nuevo problema de probar que dicho triángulo es equilátero.
> 53 …busqué incorporar esta idea al problema trazando paralelas y reduciendo el problema a mostrar que el ángulo ε era igual a η
> 62 …la modificación en la construcción modificó al problema,...
> 68 …lo cual ya había mostrado pero lo había ignorado…

En cuanto al uso del SGD en esta acción, la tecnología jugó un papel clave al permitir la exploración dinámica de relaciones geométricas. El resolutor y el mentor pudieron manipular el modelo para resaltar ciertas propiedades, descomponer el problema original o agregar construcciones que revelaran nuevas perspectivas. Esta interacción, mediada por el SGD, posibilitó la identificación y formulación de problemas equivalentes.

Así, el SGD amplifica la habilidad de reformular problemas al apoyar las tareas de exploración y verificación. De igual modo, se aprecia una reorganización de la acción, pues la dinámica del software permite que el proceso de reformulación sea más interactivo, iterativo y flexible, adaptándose a las modificaciones que el resolutor o el mentor introducen en el modelo.

4.1.8 Comprobar ideas

La acción de comprobar una idea resulta fundamental en la resolución de problemas matemáticos, ya que permite determinar si una hipótesis tiene potencial para contribuir a la solución o si debe descartarse. El resolutor hace uso del SGD para verificar si una idea tiene respaldo empírico, comprobando propiedades como congruencias, ángulos específicos o relaciones entre segmentos. Esta evaluación ayuda a descartar planteamientos infundados y a concentrar la atención en aquellos que se muestran prometedores. Como se ha mencionado anteriormente cuando el resolutor hace referencia a verificar con el SGD está implícito el uso de la característica dinámica del SGD.

> Problema 1
> 101 …de los cuales encuentro que uno de ellos siempre es de 60°…
> 194 … compruebo con geogebra que no son semejante así que descarto la idea…
> 202 …geogrebra me demuestra que no…
> 260 …con ayuda de GeoGebra verificó que no, y decido dejar el problema…
> 267 …lo compruebo con GeoGebra…
> 524 …lo cual hago mientras escribo la prueba voy
> 525 checando en GeoGebra que lo que digo sea cierto, …
> Problema 2
> 41 …busque la validación con GeoGebra para distintos puntos D…

En todos estos casos, el SGD no solo amplifica la acción de comprobar ideas al proveer herramientas de medición, construcción, sino que también reorganiza el proceso al brindar características dinámicas. En lugar de requerir un análisis exclusivamente deductivo sobre cada posible idea, el resolutor puede combinar la intuición con la evidencia experimental que brinda el SGD. De esta forma, el proceso de prueba y descarte ayuda a la toma de decisiones del resolutor, orientando el camino hacia la solución, sin malgastar tiempo en rutas que no ofrecen avance.

4.1.9 Justifiar argumentos y escribir una demostración o justificación

La revisión de argumentos es una acción clave en el proceso de resolución de problemas matemáticos, ya que implica evaluar la coherencia, validez y alcance de las justificaciones empleadas. Los datos indican que el SGD complementa esta acción, puesto que el resolutor, al redactar o ajustar sus argumentos, utilizó el modelo dinámico para verificar la certeza de sus afirmaciones. Asimismo, el resolutor descubrió que, aunque algunas ideas fueran válidas, los argumentos podían requerir ajustes dependiendo de los valores específicos que tomaban ciertas variables en el problema. De esta manera, el SGD no solo ayuda a la verificación empírica de los argumentos, sino que además promueve la reflexión sobre los casos que se deben considerar.

El modelo dinámico apoyó al resolutor en la elaboración de justificaciones, porque le permitió identificar situaciones en las que debía contemplar diferentes escenarios para asegurar la solidez del razonamiento.

> Problema 1
> 524 …mientras escribo la prueba voy checando en GeoGebra que lo que digo sea cierto,...
> 539 …durante la redacción veo que hay dos intersecciones o bien una
> 540 cuando el ángulo del triángulo mide 60…
> 547 …lo redactó y mientras exploró esos argumentos encuentro que también necesito hacer casos.
> 551 …reviso de rápido los argumentos y me parece que solo tendría que ajustar los argumentos…
> 565 …empiezo a redactar la que ya
> 566 tenía, pero en eso me doy cuenta que con mis argumentos tendría que considerar casos.
> 574 …la validó con geogebra y viendo que no dependa de casos y que los argumentos sean correcto

Al utilizar el SGD durante la revisión de argumentos, la herramienta no solo amplifica el proceso (al brindar mediciones y representaciones), sino que también lo reorganiza, al fomentar la exploración dinámica del problema y provocar la reflexión sobre la información del problema.

4.1.10 Realizar cálculos numéricos o algebraicos

Los resultados indican que el SGD proporciona herramientas aritméticas que permiten al resolutor efectuar mediciones y cálculos básicos directamente sobre el modelo dinámico. Esta capacidad libera al resolutor de tareas operativas simples, fomentando la búsqueda de patrones y reduciendo el tiempo invertido en operaciones mecánicas. Sin embargo, cuando los cálculos requieren una secuencia larga de pasos o involucran manipulación algebraica , el resolutor recurre al entorno de lápiz y papel. En estas situaciones, el SGD queda limitado a un rol de apoyo en mediciones.

Problema 1

313 …recuerdo que el coseno es periodico y par asi que hago los calculos…
395 …estoy realizando los cálculos y para eso hice trabajo previo
402 …para la demostración la realizó a "fuerza bruta" con cálculos…
414.. al momento de justificar esos cálculos caigo en cuenta
415 que esa "rotación" la puedo hacer con el seno y aplicar la identidad de la suma de ángulos …
457 …continuo con los cálculos..
461 …empiezo a tener problemas con los cálculos pero estoy seguro que tiene que salir…
487 …Los cálculos son correctos, ahora me pongo a pensar en cómo lo redactare….

En suma, el SGD contribuye amplifica esta acción con la obtención de datos y mediciones, permitiendo al resolutor concentrarse en el entendimiento de las relaciones geométricas

4.1.11 Obtener soluciones diferentes

La capacidad de obtener distintas soluciones a un mismo problema es un indicador de la riqueza del proceso de resolución. Esta acción implica que el resolutor, a partir de su exploración, las herramientas disponibles y el conocimiento adquirido, sea capaz de abordar el problema desde diversos enfoques. En el caso del Problema 1, se obtuvieron tres soluciones distintas: una solución trigonométrica, una a través de un problema equivalente y otra geométrica. Cada una de estas soluciones aprovechó información y resultados obtenidos durante el trabajo previo, evidenciando la profundidad y flexibilidad alcanzadas en el proceso.

Problema 1
487 Los cálculos son correctos, ahora me pongo a pensar en cómo lo redactare.
512 …después de trabajar un rato descubro que en
513 esta reformulación puede demostrar muchas cosas que vi antes pero no pude demostrar
514 en el problema original, finalmente encuentro la solución de la reformulación y me pongo
515 a pensar en cómo formular la equivalencia.
624 …llego a mi mente la idea que daría solución además era algo que ya había probado antes, esta nueva solución es puramente geométrica.

El SGD ayudó a la obtención de estas soluciones múltiples al permitir la exploración dinámica del problema: el resolutor manipuló el modelo para verificar conjeturas. De esta manera, el uso del SGD no solo amplifica la capacidad de encontrar distintas respuestas (al ayudar con las mediciones y verificaciones), sino que también reorganiza el proceso, al involucrar procesos dinámicos en el la obtención de las distintas soluciones.

4.1.12 Obtener problemas derivados

A partir del problema inicial, el resolutor identificó nuevos subproblemas o situaciones no previstas sin haberlas buscado deliberadamente. El entorno dinámico del SGD, al permitir modificaciones sistemáticas del modelo y la observación directa de sus repercusiones, ayudó el surgimiento de patrones y relaciones adicionales que, si bien no pertenecen ni al problema original ni a su solución, podrían dar lugar a nuevas indagaciones.

> 101 …de los cuales encuentro que uno de ellos siempre es de 60°…
> 151 …resulta que forman un ángulo de
> 152 60° lo que me lleva a pensar que la otra mediana debería intersecar igual en el mismo
> 153 punto y formar el mismo ángulo,...
> 281 …resulta que uno de ellos vale 120°
> 539 …durante la redacción veo que hay dos intersecciones o bien una
> 540 cuando el ángulo de triángulo mide 60…

4.1.13 Vincular con otros problemas, buscar utilizar el método o el resultado

En este caso, dado que el Problema 2 fue resuelto durante el proceso de resolución del Problema 1, el resolutor intenta integrar la información obtenida en el segundo problema para avanzar en el primero. Esto se observa cuando, tras identificar semejanzas entre ambas situaciones, intenta replicar la construcción del problema 2 en el modelo del problema 1 buscando utilizar el resultado o el método.

> Problema 1
> 434 …caigo en cuenta que eso se parece al segundo problema que
> 435 resolví, entonces si trazó un triángulo equilátero con vértices E y G, AK tendría que ser lo
> 436 mismo que CG pero no veo cómo relacionarlo, trazar el triángulo equilátero EGL ya que son
> 437 los lados donde estoy trabajando, con eso CL seria igual a AG lo que me lleva a que si
> 438 muestro que icl es de 60 o bien un equilátero entonces ya acabe. Después de 10 minutos
> 439 tratando de mostrar lo de antes resisto ya que no veo cómo se conecta con el triángulo original.

En este sentido, el SGD contribuye a la amplificación de la acción, al ayudar en la construcción y exploración entre los modelos de ambos problemas.

Tabla 3: Resultados del análisis del refinamiento.

Acciones Asociadas	Amplificación	Reorganización
Identificar, representar y transformar la información.	X	X

Realizar casos particulares		X
Explorar Patrones	X	X
Extender los recursos		
Relacionar datos e incógnitas	X	X
Formular conjeturas		X
Utilizar problemas auxiliares	X	
Obtener problemas equivalentes	X	X
Comprobar la idea	X	X
Comprobar el argumento	X	X
Comprobar cada paso de la solución	X	X
Realizar cálculos numéricos o algebraicos	X	
Escribir una demostración o justificación	X	X
Obtener soluciones diferentes	X	X
Obtener problemas derivados del proceso		X
Vincular con otros problemas	X	
Buscar utilizar el resultado	X	
Buscar utilizar el método	X	

Fuente: Elaboración propia

4.2 Resultados del análisis de las interacciones sociales

Como se mencionó anteriormente, para el análisis de las interacciones sociales se consideraron cuatro categorías: a) académicas, b) extracurriculares, c) con el mentor y d) de consulta. Posteriormente, se identificaron aquellas interacciones que impactaron significativamente en el proceso de solución. Debido a la corta duración del segundo problema, 2 días, no hubo oportunidad de observar el impacto de las interacciones sociales. Para el primer problema se identificaron dos interacciones sociales Académicas, ninguna de ellas tuvo un impacto significativo en el problema.

La primera interacción, líneas 162-163, brindó al resolutor una fuente de información, que no impactó significativamente en la solución del problema.

> 162 Este día vemos en clase los elementos de Euclides y dedico el tiempo a estudiarlo, con la
> 163 intención de mejorar mis habilidades en geometría.

La segunda interacción de esta categoría no fue registrada en la bitácora, debido a que no fue relevante para el resolutor en su momento, ya que consiste que a finales del semestre empezó a ver temas de geometría en una de sus materias de posgrado, sin embargo, la mayoría de temas ya los había explorado, por lo que solo le servían para recapitular si ya los había utilizado en su exploración del problema, o bien, no encontró manera en que los temas estuviesen relacionados con el problema.

Respecto a las interacciones sociales extracurriculares se identificaron tres de las cuales una fue significativa, líneas 199-202, al proporcionar una definición que si bien no fue relevante para la solución si permitió realizar múltiples exploraciones a lo largo del proceso de solución.

> 199 …durante esta exploración
> 200 recuerdo que en una plática de ese mismo día con mi mentor y dos compañeras sobre un
> 201 problema de la olimpiada se usó el término de cuadrilátero cíclico, por lo cual decido ver si
> 202 el cuadrilátero que trace lo era…

> 336 …eso me lleva a recordar un ejercicio de la
> 337 olimpiada parecido pero con cuadrados en vez de triángulos…

> 350 El día de mañana acompañaré a mi mentor en los entrenamientos de los participantes de
> 351 la olimpiada por lo que me había mandado la lista de ejercicios para revisarlos, entre unos de ellos hubo uno
> 352 que me llamó la atención y creo puede ser de utilidad…

Se identificaron siete interacciones con el mentor, las cuales todas impactaron en el proceso de solución, debido a que en estas interacciones el resolutor exponía sus exploraciones a su mentor, a lo cual el mentor proporcionaba comentarios y sugerencias que posteriormente el resolutor evaluaba y decidía su pertinencia.

En la primera interacción que el resolutor tiene con su mentor, este último le aconseja buscar triángulos congruentes (líneas 81-83), idea que el resolutor había pospuesto anteriormente por falta de información (líneas 37-40). Posteriormente a la sugerencia, el resolutor encuentra evidencia para identificar triángulos congruentes.

> 37 Durante mi exploración me lleva a creer que el problema se resuelve por semejanza y congruencia
> 38 de triángulos…
> 39 Dado que estaba por llegar a mi
> 40 destino, decidí dejar esa idea para explorar en otra ocasión y mi siguiente pensamiento fue…
> 81 …al exponerle las ideas a mi mentor es claro que no había mostrado nada,
> 82 durante la conversación me sugiere que "Demuestre que dos triángulos son congruentes y uno es
> 83 rotación de otro"...

En la segunda interacción, líneas 167-168, el mentor le recomienda al resolutor eliminar los ejes y cuadrícula, línea 171, tras evaluar la sugerencia, línea 174, el resolutor eliminó dichos elementos, lo cual impactó debido a que antes de eliminarlos el resolutor utilizaba la cuadrícula para mover los vértices del triángulo, además de permitirle visualizar los elementos del problema más claramente.

> 167 Tengo asesoría con mi mentor y le presento que estoy tratando de demostrar la última
> 168 congruencia que vi…
> 171 … (me recomienda que) quite los ejes y la cuadrícula a la imagen si no la estoy ocupando…
> 174 Antes de eliminar la cuadrícula y los ejes los utilizó para…

La tercera interacción social, línea 231, el resolutor realiza un comentario sobre el problema, líneas 235-237, lo que provoca que el resolutor le preste atención a un elemento del problema, que más adelante se vuelve fundamental en las distintas soluciones.

> 231 …tengo asesoría con mi mentor a las 10:30, le comento lo que he trabajado y observado…
> 235 …hay varias implicaciones como tipo "ciclos" y que hay que buscar la más frágil en
> 236 donde se rompa, en ese momento lo que a mí me pasó por la mente fueron las medianas
> 237 que había encontrado eran iguales ya que para mí sus ecuaciones forman un ciclo…

Las siguientes dos interacciones se dan con la primera solución, la cual se realizó a través de trigonometría, ante esto se reformuló el problema de dos maneras distintas, con la intención de buscar una demostración meramente geométrica.

472 …le comento la idea que tuve a mi
473 mentor y le digo que aunque aun no termino los cálculos estoy seguro de que es correcta…
490 … él me propone dos reformulaciones para el problema…

El resto de interacciones corresponden a dudas puntuales de una de las reformulaciones, al ser discutidas se logran aclarar y avanzar en la solución de la reformulación.

517 …Le presento a mi mentor las ideas para demostrar la reformulación…
546 …Mi mentor me comenta cómo arreglar lo de que hay dos intersecciones y eso a
547 su vez me da una idea para la reformulación,...

Las iteraciones de consulta fueron las más frecuentes, con nueve interacciones registradas, lo cual se debe a que atendían a dudas o intereses que surgieron durante la exploración, sin embargo solo dos impactaron el proceso de solución, lineas 138 y 298, estas dos proporcionaron información que fue crucial para proporcionar una primera solución del problema, mientras que de las restantes siete interacciones que no impactaron significativamente en el proceso de solución, algunas de ellas permitieron formular conjeturas que se pueden convertir en problemas derivados del proceso de solución.

42 …eso me hizo que buscara pruebas del teorema (de pitágoras,)…
51…utilizar los breves momentos que tenga en el día para buscar propiedades de triángulos…
127 …decido descargar una app llamada euclídea sobre construcciones geométricas,...
129…esperando que me ayude a comprender mejor geometría.
138 …busco en youtube “problemas de geometría no rutinarios”...
198 …lo que me lleva a buscar propiedades de los cuadriláteros en Google…
211 …No conozco mucho de cuadriláteros cíclicos por lo que este día lo dedico a buscar
212 propiedades y teoremas durante el día.
293 …busco propiedades de cuadriláteros con diagonales iguales
298 …visite de nuevo el canal de YouTube Math in Black …

A continuación se presenta una gráfica de la cantidad de interacciones sociales asociadas con el problema 1.

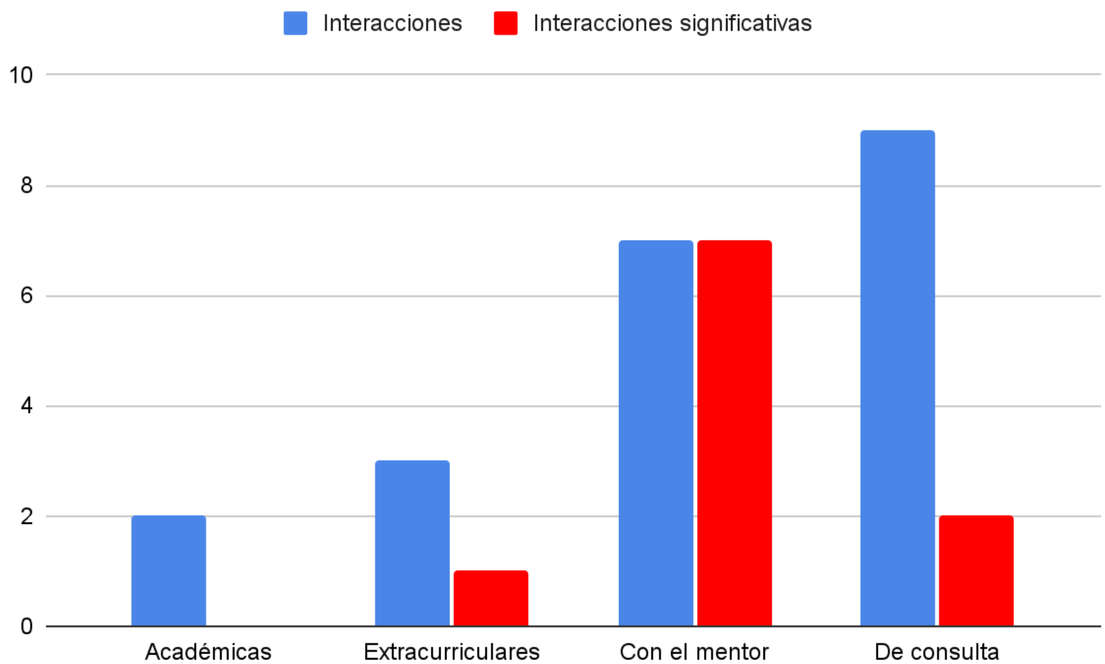

Figura 11. Cantidad de interacciones sociales.

Los resultados de las dos primeras categorías eran previsibles, dado que las clases del resolutor no estaban enfocadas en geometría, pero aun así influyeron en la exploración del problema. Las actividades extracurriculares del resolutor, como su participación en las sesiones de entrenamiento de la olimpiada matemática, en el estado de Hidalgo, proporcionaron vías para explorar el problema. El resolutor explicó que su participación en esta actividad le permitió conocer resultados y métodos que ha utilizado en la solución de problemas, aunque en este caso solo se registraron tres aportaciones.

Las interacciones con el mentor, además de ser la segunda categoría más frecuente, fueron las que generaron avances más significativos. Esto era esperado, ya que estas interacciones consistían en discusiones específicas sobre el problema, destacando la importancia de este tipo de interacciones. El resolutor menciona que, en la mayoría de estas interacciones, lograba superar los puntos en los que se encontraba estancado. Por último, las consultas fueron la categoría que promovió más exploraciones. Esto se debe a que, cuando el resolutor notaba ciertas peculiaridades que podrían ser útiles para la solución, buscaba profundizar en ellas. El bajo impacto en la solución se debe a que estas exploraciones generalmente no proporcionaban información significativa para la solución; sin embargo, las dos interacciones significativas identificadas fueron cruciales para la primera solución del primer problema.

4.3 Resultados del análisis de las ideas obtenidas

A continuación se presentan los resultados derivados del análisis de las ideas obtenidas durante el proceso, para el análisis no se consideraron las ideas que se derivan directamente del trabajo consciente.

Para el primer problema se identificaron las siguientes ideas, la primera de ellas se obtuvo durante un periodo de trabajo consciente, pero al indagar más en la idea se puede identificar el cómo esta idea se fue construyendo a lo largo de varios días. Inicialmente, se identificó como una conjetura a través de la exploración con el modelo dinámico, línea 72, 17 días después durante una consulta el resultado que podría utilizar, sin embargo al querer explorar en el modelo, identifica que desconoce algunos datos, por lo que termina descartando la idea.

> 72 durante esta exploración obtuve distintas distancias que coinciden.
> 138… busco en youtube “problemas de geometría no rutinarios” …,
> 140… entre los videos me llamó la atención el de “Demostración del Teorema de Apolonio o Teorema de la
> 141 mediana”, lo observe ya que involucra puntos medios y observe algunos otros por si alguno
> 142 me servían, al regresar a GeoGebra veo si puedo aplicar el teorema que vi pero antes de
> 143 eso me digo “No conozco la distancia que hay entre E y F ya que no encontré relación con
> 144 los lados originales” lo que me hace descartar esa idea…

Posteriormente, 12 días después, tras una interacción social con el mentor el resolutor término utilizó el resultado encontrado anteriormente, línea 140, asignando incógnitas a los datos que desconocía, línea 235-237, al día siguiente se hace el trazó correspondiente y a partir de ahí se vuelve un elemento fijo del modelo.

> 235 …hay que buscar la más frágil en
> 236 …donde se rompa, en ese momento lo que a mí me pasó por la mente fueron las medianas
> 237 …que había encontrado eran iguales ya que para mí sus ecuaciones forman un ciclo
> 244 Tracé la mediana que me hace falta para ver si observo algo, sin embargo; la imagen no
> 245 ayuda mucho, así que la modificó de tal manera que se vea mejor…

Después de transcurrir otros 12 días, durante otra consulta el resolutor utilizó un método de la fuente consultada para adaptarla al problema y así obtener las incógnitas de las ecuaciones que había planteado, trabajó más sobre esta idea hasta estancarse.

> 298 …visite de nuevo el canal de YouTube Math in Black después de

299 revisar unos videos que llaman mi atención vuelvo a ver el del teorema de Apolonio o de la
300 Mediana, que me lleva a ver el de stewart que a su vez me lleva a ver el video del teorema de
301 euclides y ley de cosenos, lo que a su vez me lleva a reconsiderar usar la ley de cosenos,
302 anteriormente la descarte porque no pensé que fuera de utilidad pero esta vez sí

Finalmente, una vez transcurridos 9 días más, el resolutor llegó a la solución, mientras trabajaba en la idea, y pensando en abandonarla una vez más, el resolutor obtuvo una idea en forma de imagen mental sobre el modelo dinámico, lo que le ayudó a obtener la demostración. Si bien con esta demostración no se resuelve el problema original, fue importante para la primera solución.

408 A las 19:00 hrs aproximadamente, pensando en como desaserme de esos senos y cosenos
409 algo desesperado pensando en abandonar de nuevo la idea analizó la situación y no se
410 como describirlo pero veo como que el lado que une las puntas de los vértices lo escribí en
411 término de los otros dos lados y el ángulo, pero esos lados son los mismos del triángulo y
412 el ángulo es como una ampliación del original, entonces veo como si pudiese doblar el
413 ángulo para que coincida con el triángulo original, estando en ese triángulo lo "roto" y
414 luego lo desdobló donde quiero, al momento de justificar esos cálculos caigo en cuenta
415 que esa "rotación" la puedo hacer con el seno y aplicar la identidad de la suma de ángulos
416 del coseno de "regreso" el ver eso me hizo sentirme seguro de la prueba y de que nada
417 más tenía que hacer los cálculos correctos

La segunda idea ocurrió tras dejar de abordar el problema, sin embargo no cuenta con las características de la incubación e iluminación, ya que el problema no fue dejado de lado en su totalidad, el resolutor estaba en procesos reflexivos. Esta idea brindó la primer solución del problema

445…a las 18:00 hrs un poco fastidiado de no saber que hacer aun cuando ya había mostrado algo,
446 me había dado hambre así que fui a comprar algo de comer, al llegar de regreso a mi lugar de 447
trabajo mientras veía la pantalla de la computadora preguntándome como demostrar la
448 distancia del vértice al punto medio era justo la mitad de las distancia de entre dos "puntas" de
449 los triángulos equiláteros, y cuando ya me iba a dar por vencido vi como si el triángulo
450 que quería mostrar que era congruente "a uno de arriba" como si se fuese desdoblando y
451 doblando hasta llegar al otro triángulo…

La siguiente idea se obtuvo mientras el resolutor dormitaba, es decir, en esta idea hubo un periodo de incubación y se obtuvo la iluminación. Esta idea brindó la solución de la reformulación.

569 …me encontraba dormitando a una hora
570 distinta a la usual, 7:30, en eso llegó a mi mente el problema en que me encontraba que
571 necesitaba hacer casos, llegó a mi mente como construcción…

Mientras el resolutor se encontraba escribiendo el resultado de la reformulación del problema empezó a tener distintas ideas, ninguna de las cuales solucionaba el problema pero presentaban alternativas que no se habían explorado con anterioridad. Inicialmente, el resolutor trató de ignorarlas y continuar con la redacción, sin embargo las ideas permanecían en su mente, por lo que decidió abordar una de ellas, sin que llegara a algo concluyente. Por cuestiones de horario el resolutor buscaba dormir, sin embargo las ideas continuaban hasta que llegó una idea que soluciono el problema original con puros argumentos geométricos.

Para el segundo problema, la primera idea aparece después de iniciar un proceso reflexivo sobre lo que mantenía atascado al resolutor, esta idea no resuelve el problema directamente pero permite transformar el problema original en un problema más sencillo.

> 36 …me surgió el pensamiento de que no había tenido avances ya que no conectaba el
> 37 triángulo nuevo con el equilátero, lo que a su vez llevó al pensamiento de construir el triángulo
> 38 nuevo sobre el original.

La segunda idea ocurre nuevamente durante un proceso reflexivo, en el cual el resolutor estaba repasando el problema, es decir repasando lo que sabía y lo que quería demostrar, con lo que logró obtener una idea que llevó a reducir el problema a una sola igualdad, que el SGD verificó empíricamente como cierta. Sin embargo, a pesar de lograr transformar el problema a una sola igualdad, el resolutor no logró solucionar el problema.

> 49 …reflexioné de la siguiente manera …
> 51 …al tener presente esta idea recordé un ejercicio…
> 53 …reduciendo el problema a mostrar que el ángulo ε era igual a η, en lo cual no tuve éxito.

La última idea se obtuvo mientras el resolutor se encontraba explorando el modelo, esta idea reúne la conjetura formulada, la construcción de la primera idea y la igualdad que se buscaba demostrar en la segunda idea. Aunque con esta idea se soluciona el problema inmediatamente el resolutor no se dio cuenta hasta después.

> 57 …durante la exploración con este software consideré modificar
> 58 la construcción, por construcción DE era igual a DC y se deseaba mostrar que esos eran iguales a
> 59 EC, por lo cual hice la nueva construcción de manera que EC sea igual a CD desconociendo DE,
> 60 al hacer esto queda que el triángulo ACE es congruente con BCD.
> 62 Anteriormente se deseaba mostrar que $\zeta=\varepsilon$, sin embargo, con la modificación en la construcción,
> 63 resulta irrelevante que $\zeta=\varepsilon$…

Únicamente una solución fue obtenida como se describe en las etapas del PCM, el resto de las ideas se obtuvieron mientras el resolutor se encontraba inmerso en procesos reflexivos o durante el trabajo consciente, con la peculiaridad de que estas ideas juntaban información obtenida en exploraciones previas.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

5.1 Introducción

En este capítulo se discuten los hallazgos derivados del análisis presentado en los apartados previos y se exponen las conclusiones alcanzadas a partir de ellos. Este proceso involucra confrontar los resultados obtenidos con la literatura, identificar coincidencias y divergencias, y extraer las implicaciones teóricas, metodológicas y prácticas que se desprenden de la investigación. Asimismo, se señalan las limitaciones del estudio y se proponen posibles líneas de investigación futura, con el fin de enriquecer el campo de la educación matemática y el uso de tecnologías digitales en la resolución de problemas geométricos y el PCM.

5.2 Respuesta a las preguntas de investigación

La pregunta que guio este trabajo es: ¿De qué manera el uso de una tecnología digital como GeoGebra, un software de geometría dinámica (SGD), modifica los procesos cognitivos al resolver problemas que involucran elementos del PCM? Para obtener una respuesta se propuso un marco conceptual que refinó las etapas del PCM. Los procesos identificados en este refinamiento fueron analizados para encontrar información relevante que ayudó a contestar la pregunta planteada. El análisis de datos reveló cambios significativos, principalmente en las etapas de preparación y verificación. Estos cambios se evidenciaron tanto en la manera en que se llevaron a cabo las acciones como en las posibilidades que dichas acciones ofrecieron al incorporar una SGD en la resolución, en comparación con un entorno tradicional de lápiz y papel., lo cual era de esperarse, dado que las tecnologías digitales actúan como mediadores que reorganizan y amplifican los procesos cognitivos (Moreno-Armella y Sriraman, 2009; Pea, 1987; Vygotsky, 1981).

Adicionalmente, el análisis de datos mostró que al utilizar un SGD, el resolutor transitó por múltiples ciclos de modelación (Lesh, 2000), desencadenados a medida que exploraba el problema utilizando elementos del pensamiento matemático y adquirió nuevos recursos. Este proceso se observó tanto en la etapa de preparación, permitiendo una comprensión más profunda del problema y reflejándose en la evolución del modelo, como en la etapa de verificación, donde la validez de las ideas se ponía a prueba de manera dinámica, generando nuevos ciclos de modelación adaptados a los huecos argumentales identificados.

En concordancia con Sriraman (2009), la interacción social fue fundamental en el proceso de solución, aportando recursos explorados con las herramientas y características del SGD. Algunos de estos recursos proporcionan información relevante para la solución del problema y también influyeron en el sistema de control, permitiendo decisiones basadas en la interacción con el mentor y en los recursos adquiridos, resaltando la importancia de la comunicación en los procesos de resolución y el aprendizaje con entendimiento.

Por otro lado, las etapas de incubación e iluminación no ocurrieron tal como las definieron Wallas (1926) y Hadamard (1945). Exceptuando una idea que surgió mientras el resolutor dormitaba, el resto de las ideas aparecieron durante periodos de reflexión o trabajo consciente. Es decir, aunque el resolutor no trabajaba activamente en el problema, estaba inmerso en pensamientos relacionados con su exploración, o bien, durante el trabajo consciente, usando información obtenida en periodos de trabajo previo que habían sido interrumpidos por falta de información.

En suma, la incorporación del SGD en la resolución de problemas vinculados al PCM permitió observar una reorganización y amplificación de las acciones cognitivas, la emergencia de ciclos de modelación más complejos y la importancia de la interacción social en la toma de decisiones, aportando nuevos matices a la comprensión del PCM.

5.3 Discusión de resultados

Los resultados evidenciaron que la incorporación de un SGD en el PCM amplifica y reorganiza las acciones realizadas durante las etapas de preparación y verificación (Tabla 3). Debido a la escasez de trabajos similares, no es posible comparar directamente estos hallazgos; sin embargo, como señala Hadamard (1945), durante la etapa de preparación resulta fundamental profundizar en los conceptos matemáticos y explorar desde distintas perspectivas. Esta profundización se ve favorecida por la función de amplificación del SGD, que simplifica tareas operativas y libera recursos cognitivos del resolutor, permitiéndole enfocar su atención en aspectos conceptuales. A su vez, la reorganización propiciada por el

SGD posibilita exploraciones desde múltiples perspectivas, abriendo rutas de exploración que no son posibles en un entorno tradicional de lápiz y papel.

Además, al incorporar el SGD, se observó que el resolutor llevó a cabo múltiples ciclos de modelación (Lesh y Doerr, 2003). Dado que no se dispone de investigaciones equivalentes en un ambiente exclusivamente de lápiz y papel, no puede afirmarse que este fenómeno sea exclusivo del uso de herramientas digitales. Sin embargo, la presencia del SGD en el proceso de resolución evidenció con mayor claridad esta dinámica de modelación y refinamiento del modelo, lo que sugiere un impacto significativo de la herramienta en la forma en que el participante aborda y comprende el problema.

Tal como identificó Sriraman (2009) la interacción social fue crucial en el PCM, más aún los resultados evidencian la importancia de la comunicación en los procesos de solución, lo que coincide con lo expuesto por Hiebert et al (1997) en que el aprendizaje con entendimiento se da a través de la *reflexión* y la *comunicación.*

Por otro lado, los resultados obtenidos en esta investigación desafían las concepciones tradicionales propuestas por Wallas (1926) y Hadamard (1945), que sugieren que las ideas cruciales emergen exclusivamente de manera inesperada (iluminación). Las observaciones realizadas en este trabajo indican que dichas ideas pueden también surgir durante sesiones de reflexión o mientras se trabaja activamente en el problema, frecuentemente vinculadas a la información recopilada en sesiones previas. Este hallazgo sugiere una revisión de los conceptos de incubación e iluminación, ampliando así los escenarios reconocidos dentro del PCM.

Trabajar en un problema durante varios días sin lograr avances significativos puede parecer poco productivo. Sin embargo, de acuerdo con Hadamard (1945), este período permite que el inconsciente procese la información. Basándonos en esta consideración y en la evidencia empírica, proponemos el término "incubación-iluminación progresiva" para describir el proceso en el cual la información obtenida en exploraciones previas, relegada al inconsciente, se sintetiza y se manifiesta en ideas durante procesos reflexivos o de trabajo consciente. Este concepto, junto con el refinamiento de las etapas del PCM, se propone para su discusión y análisis con el fin de desarrollar herramientas que faciliten una comprensión más profunda del PCM.

El análisis de las ideas que condujeron a avances significativos en el proceso de solución, así como de las que fracasaron, permitió identificar algunos de los procesos mentales involucrados en la obtención de estas ideas. Además, se observó que las aproximaciones erróneas desempeñan un papel crucial en el proceso de solución, ya que generan procesos reflexivos e incitan a abordar el problema desde nuevas perspectivas.

5.4 Alcances, limitaciones y propuestas a futuro

En este trabajo, se han identificado y analizado las etapas del PCM cuando se incorporan tecnologías digitales en la resolución de problemas geométricos. Los resultados indican que el uso de un SGD amplifica y reorganiza las etapas de preparación y verificación, elementos fundamentales en el PCM. Además, se constató que la disponibilidad de un modelo dinámico, gracias al SGD, llevó al resolutor a involucrarse en múltiples ciclos de modelación, en los cuales el modelo evolucionó conforme cambiaba su percepción del problema. Asimismo, se reconoció la interacción social como un componente relevante del proceso, y se observaron periodos de incubación-iluminación progresiva que influenciaron significativamente la obtención de la solución. Por último, se propuso el concepto de *problema-reto* y se resaltó su utilidad en la indagación del PCM.

A pesar de estos hallazgos, la investigación presenta ciertas limitaciones. En primer lugar, se trata de un estudio de caso con un solo participante, lo que restringe la generalización de los resultados. Asimismo, la falta de investigaciones similares dificulta la comparación directa de la influencia de las tecnologías digitales frente a un entorno exclusivamente de lápiz y papel. De cara a futuras investigaciones, se recomienda ampliar el número de casos analizados para validar los resultados obtenidos y favorecer su generalización. También resultaría valioso llevar a cabo estudios comparativos en un ambiente de lápiz y papel, lo que permitiría contraponer las experiencias y logros obtenidos con el uso de tecnologías digitales. Por otra parte, sería interesante explorar el impacto de otros tipos de tecnologías digitales más allá del SGD, con el propósito de brindar una visión más amplia y detallada sobre cómo estas herramientas pueden influir en las distintas etapas del PCM.

La viabilidad de continuar esta línea de investigación es, en principio, factible, aunque se deben considerar importantes dificultades. Por ejemplo, ampliar la muestra implica enfrentar retos en la selección y reclutamiento de participantes que sean representativos y permitan garantizar la homogeneidad de los grupos. Asimismo, diseñar estudios comparativos entre entornos digitales y de lápiz y papel exige la elaboración de instrumentos de medición equivalentes y adaptados al entorno. Finalmente, la exploración de otras tecnologías digitales demanda un análisis detallado de cada herramienta y de su impacto en las distintas etapas del PCM, siendo necesario superar la escasez de investigaciones previas que puedan servir como referencia para una comparación directa.

6. REFERENCIAS

Barrera-Mora, F., & Reyes-Rodríguez, A. (2018). El rol de la tecnología en el desarrollo de entendimiento matemático vía la resolución de problemas. *Educatio Siglo XXI*, *36(3)*, 41–72. https://doi.org/10.6018/j/349461

Beghetto, R. A., & Schreiber, J. B. (2017). Creativity in doubt: Toward understanding what drives creativity in learning. In R. Leikin & B. Sriraman (Eds.), *Creativity and Giftedness: Interdisciplinary perspectives from mathematics and beyond* (pp. 147–162). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-38840-3_10

Benfey, O. T. (1958). August Kekule and the birth of the structural theory of organic chemistry in 1858. *Journal Of Chemical Education, 35(1),* 21. https://doi.org/10.1021/ed035p21

Chamberlin, S. A., Liljedahl, P., & Savić, M. (2022). Organizational framework for book and conceptions of mathematical creativity. In S. A. Chamberlin, P. Liljedahl, & M. Savić (Eds.), *Mathematical Creativity: A Developmental Perspective* (pp. 41–54). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14474-5_4

de Vink, I. C., Lazonder, A. W., Willemsen, R. H., Schoevers, E. M., & Kroesbergen, E. H. (2022). The creative mathematical thinking process. In S. A. Chamberlin, P. Liljedahl, & M. Savić (Eds.), *Mathematical Creativity: A Developmental Perspective* (pp. 147–172). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14474-5_11

Eisenhart, M.A. (1991) Conceptual frameworks for research circa 1991: Ideas from a cultural anthropologist; implications for mathematics education researchers. In R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol 1, (pp. 202-219).

Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens [Inquiry into working methods of mathematicians]. (1902). *L'Enseignement Mathématique*, 4, 208–211.

Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens: Additions au questionnaire publié en 1902 [Inquiry into working methods of mathematicians: Additions to the questionnaire published in 1902]. (1904). *L'Enseignement Mathématique*, 6, 376–378.

Fehr, H. (1905). L'enquête de "L'Enseignement Mathématique" sur la méthode de travail des mathématiciens [L'Enseignement Mathématique's inquiry into the working methods of mathematicians]. In A. Krazer (Ed.), Verhandlungen des Dritten *Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom* 8(13). (pp. 603–607).. B. G. Taubner.

Fehr, H., Flournoy, I., & Claparède, E. (1908). Enquête de "L'Enseignement Mathématique" sur la méthode de travail des mathématiciens [L'Enseignement Mathématique's inquiry into the working methods of mathematicians]. Georg & Cie.

Haavold, P., Sriraman, B., & Lee, K.-H. (2018). Creativity in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 1–10). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_33-7

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton University Press.

Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87(7), pp. 519-524.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 65–97). Macmillan Publishing.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Murray, H., Wearne, D., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*. Heinemann.

Hitt, F., Barrera-Mora, F., & Camacho-Machín, M. (2010). Mathematical thinking, conceptual frameworks: a review of structures for analyzing problem-solving protocols. *Far East Journal of Mathematical Education,* 4(2), 93–115.

Joklitschke, J., Baumanns, L., Rott, B., Schindler, M., & Liljedahl, P. (2022a). Literature review on empirical findings on creativity in mathematics among secondary school students. In Chamberlin, S.A., Liljedahl, P., Savić, M. (eds) *Mathematical Creativity: A Developmental Perspective*, pp. 81-103 https://doi.org/10.1007/978-3-031-14474-5_7

Joklitschke, J., Rott, B., & Schindler, M. (2022b). Notions of creativity in mathematics education research: A systematic literature review. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20, 1161–1181. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10192-z

Kaufman, J. C., & Beghetto, R. A. (2009). Beyond big and little: The four C model of creativity. *Review of General Psychology*, 13(1), 1–12. https://doi.org/10.1037/a0013688

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. In Grouws, D. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 3–38). Macmillan.

Kozlowski, J.S. & Chamberlin, S.A. (2022). Mathematical creativity research in the elementary grades. In Chamberlin, S.A., Liljedahl, P., Savić, M. (Eds) *Mathematical Creativity: A Developmental Perspective*, (pp. 65–80). https://doi.org/10.1007/978-3-031-14474-5_6

Leikin, R. & Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: the state of the art. *ZDM Mathematics Education*, 45, 159–166 . https://doi.org/10.1007/s11858-012-0459-1

Lesh, R. E., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers. https://doi.org/10.4324/9781410607713

Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *ZDM*, 37(6), 457–467. https://doi.org/10.1007/BF02655854

Liljedahl, P. (2013). Illumination: An affective experience? *ZDM – Mathematics Education*, 45(2), 253–265.

Maillet, E. (1905). Les rêves et l'inspiration mathématiques : (enquête et résultats). *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, 7(1), 19–62. https://www.sudoc.fr/185722296

Monahan, C., Munakata, M. (2022). The Role of Creativity in Teaching Mathematics Online. In Chamberlin, S.A., Liljedahl, P., Savić, M. (eds) *Mathematical Creativity*. Research in Mathematics Education. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14474-5_14

Moreno-Armella, L. & Sriraman, B. (2010). Symbols and mediation in mathematics education. In Sriraman, B., English, L. (eds) *Theories of Mathematics Education. Advances in Mathematics Education* (pp. 213–232). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2_22

NOVA. (1997). *The Proof*. http://www.pbs.org/wgbh/nova/transcripts/2414proof.html

Pea, R. D. (1987). Cognitive technologies for mathematics education. In Schoenfeld, A. (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 89–122). Lawrence Erlbaum.

Pitta-Pantazi, D., Kattou, M., & Christou, C. (2018). Mathematical creativity: Product, person, process and press. In Singer, F. (eds) *Mathematical Creativity and Mathematical Giftedness: Enhancing Creative Capacities in Mathematically Promising Students* (pp. 27-53). https://doi.org/10.1007/978-3-319-73156-8_2

Poincaré, H. (1899). La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement. *L'Enseignement Mathématique,* 1, 157–162. https://doi.org/10.5169/seals-1226

Poincare, H. (1952). *Science and method*. Dover.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.

Rhodes, M. (1961). An analysis of creativity. *The Phi Delta Kappan*, 42(7), 305–310. http://www.jstor.org/stable/20342603

Rott, B., Schindler, M., Baumanns, L., Joklitschke, J., & Liljedahl, P. (2022). Creativity in mathematics: An overview of more than 100 years of research. In S. A. Chamberlin, P. Liljedahl, & M. Savić (Eds.), *Mathematical Creativity : A Developmental Perspective* (pp. 15–26). https://doi.org/10.1007/978-3-031-14474-5_2

Sampiere, R., Fernandez, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. Mc Graw- Hill interamericana

Santos-Trigo, M. (2019). Mathematical problem solving and the use of digital technologies. In Liljedahl, P., Santos-Trigo, M. (eds) *Mathematical Problem Solving* (pp. 63–89). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_4

Santos-Trigo., L. M. (2020). Bitácora digital y oportunidades de aprendizaje. *Revista ciencia y cultura,1*(1),1-3.

Santos-Trigo, M., Barrera-Mora, F., & Camacho-Machín, M. (2021). Teachers' use of technology affordances to contextualize and dynamically enrich and extend mathematical problem-solving strategies. *Mathematics*, 9(8), 793. https://doi.org/10.3390/math9080793

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 29(3), https://doi.org/10.1007/s11858-997-0003-x

Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM Mathematics Education*, 41, 13–27. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0114-z

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos* (2da ed.). Ediciones Morata.

Steen L. A. (1988). The science of patterns. *Science*, 240(4852), 611–616. https://doi.org/10.1126/science.240.4852.611

Swedberg, R. (2020). Exploratory research. In C. Elman, J. Guerring, & J. Mahoney (Eds.), *The production of knowledge. Enhancing progress in social science* (pp. 17–41). Cambridge University Press.https://doi.org/10.1017/9781108762519.002

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30, 161–177. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1994-00502-6

Vygotsky, L. S. (1981). The instrumental method in psychology. In J. Wertsch (Ed.), *The Concept of Activity in Soviet Psychology* (pp. 135–143). *Sharpe.*.

Wallas, G. (1926). *The art of thought*. J. Cape.