Mineral de la Reforma, Hgo., a 21 de febrero de 2025

Número de control: ICBI-D/249/2025
Asunto: Autorización de impresión.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

Con fundamento en lo dispuesto en el Título Tercero, Capítulo I, Artículo 18 Fracción IV; Título Quinto, Capítulo II, Capítulo V, Artículo 51 Fracción IX del Estatuto General de nuestra Institución, por este medio le comunico que el Jurado asignado a la Egresada de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas **María Guadalupe Escobedo Pérez,** quien presenta el trabajo de titulación **"Análisis de soluciones a problemas de olimpiada de matemáticas a través de una descomposición genética",** después de revisar el trabajo en reunión de Sinodales ha decidido autorizar la impresión del mismo, hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación, firman de conformidad los integrantes del Jurado:

Presidente: Dr. Ricardo Cruz Castillo

Secretario: Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez

Vocal: Dra. María Guadalupe Simón Ramos Guadalupe S.

Suplente: Dr. Rafael Villarroel Flores R. Villarroel F.

Sin otro particular por el momento, reciba un cordial saludo.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
ICBI
DIRECCIÓN

Mtro. Gabriel Vergara Rodríguez
Director del ICBI

GVR/YCC

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

Análisis de soluciones a problemas de olimpiada de matemáticas a través de una descomposición genética

Tesis

Que presenta

María Guadalupe Escobedo Pérez

Para obtener el grado de

Licenciada en Matemáticas Aplicadas

Directora de tesis

Dra. María Guadalupe Simón Ramos

Mineral de la Reforma, Hidalgo
Noviembre 2024

Resumen

La baja participación de niñas en las Olimpiadas de Matemáticas, así como los estereotipos de género que las rodean han impulsado el motivo de este trabajo, cuyo objetivo es analizar las soluciones de las tres niñas que lograron mayor puntaje en una prueba correspondiente a una fase de selección para ser parte de un equipo estatal, tomando como referencia a una teoría de la didáctica de la matemática llamada APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema). Con dicho análisis se pretende distinguir el proceso de construcción de lo que desarrollan en sus respuestas de acuerdo a lo que indica la teoría. Asimismo, como apoyo al análisis se propone un modelo como indicador de una posible ruta de solución para cada problema correspondiente en dicha prueba. También, se da a conocer el procedimiento seguido para llevar acabo su construcción. De igual manera, se resaltan aquellos elementos y estrategias que implementan las estudiantes mujeres en estudio.

Palabras clave: descomposición genética, teoría APOE, mecanismos mentales, niñas, construcciones.

Índice

1 Introducción

La presencia de las mujeres en campos de las ciencias exactas como matemáticas y física a lo largo del tiempo ha sido muy reducida (González, 2016). Incluso en la actualidad cuando las mujeres representan casi el 52% de la matrícula a nivel superior (ANUIES, 2024). Tal es el caso de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, que en la generación 2023-2024 tuvo una matrícula de aproximadamente 40% mujeres (ANUIES, 2024). Al comparar este dato con la media nacional del año 2020-2021 que fué de 35%, es una cifra bastante alentadora considerando que fue hasta la década de los 40 que en México se tuvo a la primera mujer graduada como matemática por la UNAM (Mujeres con ciencia, 2015). Sin embargo, como podemos ver en la gráfica, sigue existiendo una división profesional en la que las mujeres y los hombres suelen elegir carreras relacionadas con los roles tradicionales.

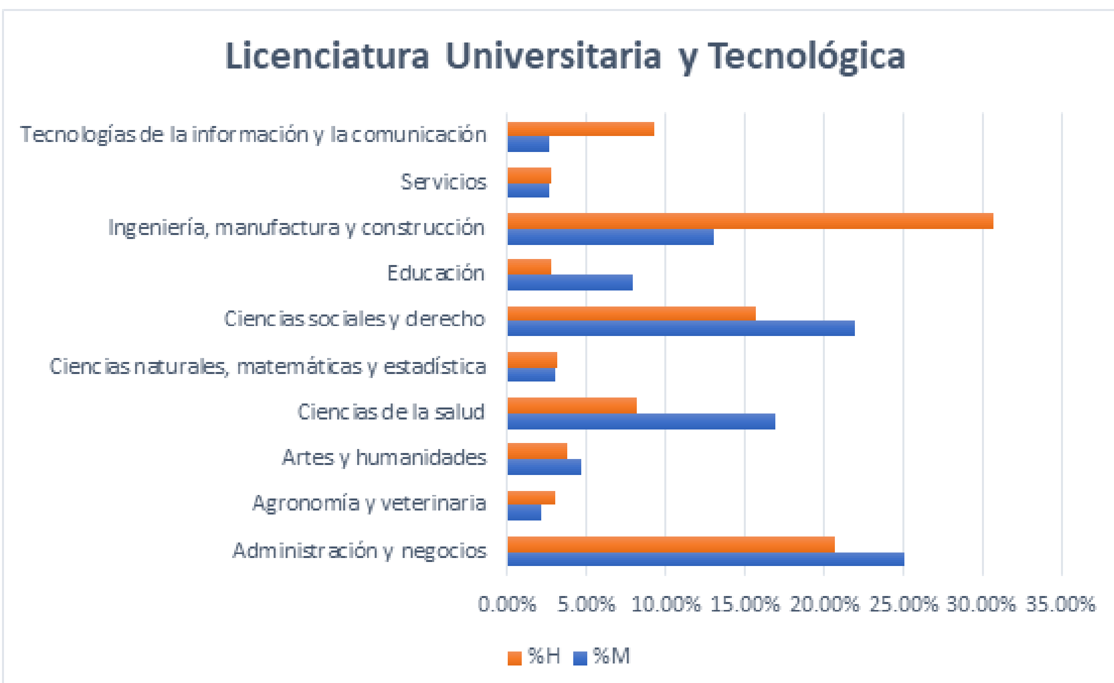


Figura 1: *Matrícula de mujeres y hombres en licenciaturas científicas y tecnológicas generación 2020-2021 (ANUIES, 2022).*

En la planta docente de la LIMA es posible constatar esta escasa presencia, pues de la planta docente de tiempo completo hasta 2023 sólo se contaba con tres o cuatro mujeres. El creciente número de estudiantes mujeres en la misma carrera puede ser un dato alentador pues necesitamos de la presencia de las mujeres (y de otros grupos) en todas las áreas del conocimiento.

Al vivir la situación anterior, durante toda la carrera resulta interesante el saber porqué es que esta situación se da en este tipo de áreas y en otras como la Licenciatura en Física y Tecnología Avanzada, que también se imparte en el área Académica de Matemáticas y Física. Además, esto no sucede solo en la UAEH, sino, también en las otras instituciones que imparten estas carreas.

El trabajo de (Guevara y Flores, 2018) muestra como el origen de esta tendencia se da desde edades tempranas, como el prescolar, contrario a lo que se había reportado en otros trabajos como el de (Lee y Sriraman, 2012), se acentúa al pasar a la adolescencia y finalmente pueden verse sus efectos en nivel medio superior y superior, esta última la etapa donde eligen una carrera o especializarse cada vez más en su área a través de una especialidad, maestría o doctorado.

Se ha identificado que esta baja presencia de las mujeres puede identificarse también en las olimpiadas de matemáticas en Estados Unidos (Ellison y Swanson, 2010). Los datos de los equipos mexicanos que han participado en la Olimpiada Internacional de Matemáticas dan evidencia de ello.

Año	**#Mujeres**	**#Hombres**
2015	0	6
2016	1	5
2017	0	6
2018	0	6
2019	1	5
2020	1	5
2021	0	6
2022	1	5
2023	0	6
2024	0	6

Cuadro 1: *Equipo Mexicano para la Olimpiada Internacional de Matemáticas.*

El trabajo de (Simón y Miguel, 2021) en Tamaulipas muestra que las mujeres, a pesar de presentarse casi en la misma proporción que los hombres en las etapas iniciales del concurso, son eliminadas al pasar las etapas y la mayoría de ellas optan por no presentarse en años posteriores.

La Olimpiada Mexicana de Matemáticas tiene entre sus requisitos que exista un comité estatal y proceso de selección que puede tomar de dos a tres etapas (OMM, 2024). Es a través de estas etapas que el número de niñas en el caso de Tamaulipas comienza a reducirse considerablemente, y dada la integración de equipos en las delegaciones, donde hay minoría mujeres, podríamos pensar que sucede lo mismo en los otros estados. En cada una de las etapas por supuesto se encuentra una prueba matemática. En algunos casos la primera etapa se suele hacer de opción múltiple y las siguientes de respuesta abierta. Esta segunda etapa, se considera permite observar de mejor manera todo el potencial de quienes participan. En la población con la que estamos trabajando (MaTeTaM, 2024) para la etapa estatal se suelen elegir durante la ultima etapa, entre 20 y 25 estudiantes que dadas las pruebas previas han alcanzado los puntajes más altos. Este grupo de estudiantes trabaja aproximadamente un mes para prepararse para la etapa nacional del evento. Es aquí donde nuevamente se vuelve a observar como escasa cantidad de estudiantes mujeres que hasta ese momento habían sido seleccionadas vuelve a reducirse hasta quedar una o ninguna. Pues al final del mes de entrenamiento solo llegarán los 6 estudiantes, quienes representarán al equipo estatal.

Al respecto, la primera pregunta que surge es, ¿por qué las jóvenes mujeres no pueden pasar exitosamente por estas pruebas? Las cuáles han sido diseñadas para evaluar la capacidad de quienes participan. ¿Esto significaría que las jóvenes no tienen la capacidad necesaria para este tipo de concursos? Por otro lado, (Gómez, 2010) y (Schukajlow, Rakoczy, y Pekrun, 2023) han mostrado que cuando se resuelve una prueba matemática, tarea matemática o de cualquier otra área del conocimiento, no solamente las habilidades intelectuales de las personas están en juego, sino también sus emociones, su auto concepto y su motivación.

Son diversos los fenómenos que se han reportado con varias poblaciones respecto a estos últimos resultados. Entre ellos se ha identificado lo siguiente:

Las pruebas de opción múltiple (Simental, Mendoza, y Márquez, 2011) permiten únicamente la selección de una respuesta correcta (herramienta usada en la primera eliminatoria con nuestra población), es por ello que no suelen beneficiar a las mujeres pues se ha reportado que en pruebas de este tipo las mujeres suelen tener puntajes más bajos y esto no necesariamente se debe a su capacidad o conocimientos. Es decir, pierden los posibles puntos que pueden obtener al responder al azar o dejando la respuesta en blanco.

La escasa presencia de las mujeres a lo largo de la historia de la matemática, en los textos escolares, entre las profesionales dedicadas a las ciencias exactas y entre sus profesoras mismas les hace pensar que no están siguiendo una ruta profesional posible. Por lo tanto, se sienten menos motivadas e interesadas por este tipo de actividades (Farfán y Simón, 2016).

Otro fenómeno altamente reportado, no en matemáticas o ciencias exactas, y del mismo modo, no sólo con mujeres, es el que Merton reportó como profecía "autocumplida". Esto significa que las mujeres al formar parte de un grupo minoritario, sobre el cual pesan estereotipos sobre su capacidad y las profesiones en las que deberían desempeñarse, no despliegan todo su potencial ante una prueba o durante su proceso de preparación (Farfán y Simón, 2018). Este fenómeno suele presentarse incluso a nivel superior cuando ya se ha hecho una elección profesional (Carranza, 2016).

A nivel internacional, además, se ha reportado que los espacios de formación para quienes presentan altas capacidades en matemáticas no resultan atractivos para las jóvenes mujeres. Pues las dinámicas de trabajo no despiertan sus intereses ni muestran todo el potencial de la matemática en sus vidas (Lee y Sriraman, 2012). Esto puede explicarse en parte debido a que muestran como en las aulas de ciencias exactas las estudiantes mujeres son ignoradas por el profesorado o se les sobre exige como lo han reportado (Ursini y Ramírez, 2017) para nivel secundaria y (Espinosa, 2009) para nivel superior. Todo esto dados los estereotipos de género en nuestra cultura sobre la capacidad de ellas, las profesiones a las que deberían dedicarse (las cuáles no tienen tanta carga hacia matemáticas) y la exigencia de perfección que pesa sobre ellas dados los mandatos socioculturales (García, 1994).

Pocos de estos estudios se han preocupado por las habilidades matemáticas que muestran estas jóvenes, tal vez debido a que no se ha considerado que sea su habilidad la que está en juego. Sin embargo, creemos que es importante analizar qué pasa en el desarrollo de sus habilidades en el tipo de tareas matemáticas que suele emplearse en las olimpiadas. Y constatar que no es su habilidad matemática lo que está en juego y hacer una pequeña contribución para que las propuestas que se desarrollen en el futuro les ayuden a desarrollar todo su potencial.

Es necesario para esta investigación emplear algún enfoque teórico mediante el cuál se pueda dar evidencia del proceso de construcción de las respuestas que estas jóvenes dan ante los problemas que se presentan en las olimpiadas de matemáticas. Por lo que la teoría nos es útil, algunas de las ventajas que menciona (Trigueros, 2020) sobre el uso de la teoría APOE son:

- Diseño fino y análisis detallado de instrumentos de enseñanza e investigación.
- Permite el diagnóstico y evaluación mediante la detección de las dificultades y aciertos de los estudiantes.
- Permite explicar, ayuda a resolver las dificultades y a promover el aprendizaje.

Pretendemos que un análisis fino y detallado de las respuestas de las jóvenes a los problemas de Olimpiada permitirá identificar las estrategias que utilizan, el proceso de construcción de la respuesta, así como los aciertos y dificultades que muestren.

Sumado a esto, Piaget consideraba que la enseñanza en la escuela tradicional puede llegar a tener un efecto negativo en dicho transcurso de aprendizaje, es decir, que las estrategias implementadas no permiten del todo que un sujeto construya propiamente su compresión del objeto en cuestión (Piaget, 1976). Además, la retención de aquello que aprenden tiende a durar poco tiempo e incluso más adelante provocar un retroceso en su conocimiento.

A partir de las aportaciones de Piaget, Dubinsky destaca que hay un ritmo óptimo de desarrollo cognitivo, también, que este no consiste sólo en adquirir porciones de conocimiento, sino, en el surgimiento de herramientas útiles que incrementen las habilidades de un individuo ante situaciones más avanzadas (Piaget y García, 1983 citado en Dubinsky, 1996).

Uno de los enfoques teóricos que, desde su constitución, y siguiendo las ideas de Piaget se ha preocupado por cómo se construyen las ideas matemáticas es la teoría APOE, la cual, se concentra en analizar como se construyen los conocimientos lógico-matemáticos a través de la abstracción reflexiva.

La teoría parte de entender como un concepto matemático puede ser construido por un sujeto y se ocupa principalmente de construir modelos cognitivos que describen las construcciones mentales que se podrían seguir. En este sentido, nos interesa como una respuesta ante un problema matemático puede ser construida por nuestros sujetos de estudio y tener un modelo cognitivo a seguir nos indicaría que tan cercano al modelo está el proceso de construcción que han seguido las jóvenes.

Por lo tanto, para este trabajo se ha propuesto la pregunta de investigación ¿en qué parte de ciclo de construcción de una idea matemática, siguiendo la teoría APOE, es que se encuentra la respuesta a los problemas matemáticos que dan las jovenes en estudio?

Esto con el objetivo de identificar el por qué las soluciones que proponen no las llevan a avanzar a través de las pruebas que las llevan a ocupar las primeras posiciones en las olimpiadas y además les brinda la posibilidad de participar del proceso de formación especial que se ofrece a quienes alcanzan las mejores puntuaciones. Es decir, se da evidencia de lo que ocurre con lo que ellas desarrollan durante su participación desde el enfoque de la teoría APOE.

2 Marco teórico

El matemático Ed Dubinsky desarrolla una teoría acerca de cómo aprender y cómo enseñar las matemáticas, es una teoría de la didáctica de la matemática llamada APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema), la cual, usa una herramienta metodológica definida como descomposición genética de un objeto matemático.

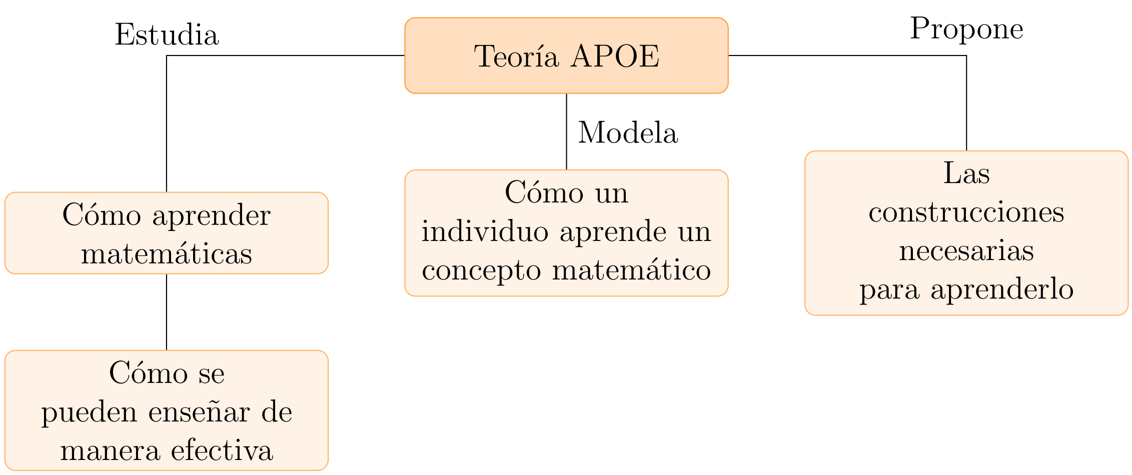
La teoría APOE, es una teoría cognitiva basada en la epistemologia constructivista de Piaget, dónde más allá del cómo se construye el conocimiento hace hincapié en cómo se pasa de un nivel de conocimiento a otro.
En APOE

”*El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas a fin* *de manejar las situaciones (Dubinsky, 1996).*"

La tendencia a responder hace referencia a que para determinar un estado del saber de un individuo, no es suficiente considerar su respuesta a una pregunta en particular, sino, a su desempeño con preguntas que se relacionan. El estado del saber en un momento dado, no necesariamente indica todo lo que sabe el sujeto, ya que puede que en esa circunstancia haya cosas que vengan a su mente y otras que no recuerde del todo. El proceso de aprendizaje es continuo, además, constantemente se pasa de una fase a otra.

Gracias a esta teoría es posible describir las estructuras y los mecanismos mentales que le permiten a un individuo logar construir una noción o un concepto de un objeto matemático. Se entiende por estructura mental a aquello que se construye o desarrolla en la mente de un sujeto para dar sentido a la situación matemática en la que se encuentre. Mientras que los mecanismos mentales son el medio por el cual las estructuras se pueden desarrollar.

Objetivo de la teoría APOE



Fuente: *¿Qué es la teoría APOE?, (Trigueros, 2020)*

2.1 Estructuras cognitivas

De acuerdo con (Dubinsky, 1996; Trigueros, 2014, 2020, 2005; Roa-Fuentes y Oktaç, 2010; Iglesias, 2019), las estructuras cognitivas (así como los mecanismos mentales) que logra un individuo son las siguientes. Además se agregan como ejemplos ilustrativos el concepto de función (Dubinsky, 1996) y transformación lineal (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010)

2.1.1 Acción

Son transformaciones sobre objetos que se han construido previamente. Las transformaciones surgen como una reacción ante una indicación que proporciona datos útiles sobre los pasos que continuan. Puede ser el memorizar procedimientos, se hacen paso a paso y se responden de manera concreta. Las acciones son cruciales para el entendimiento de un concepto, de acuerdo a Dubinsky la etapa más básica de entendimiento de un concepto matemático se basa en la conceptualización del concepto como acción, ya que, a partir de ellas se da paso al comienzo de la construcción del conocimiento. Se dice que un individuo está en nivel acción si sólo resuelve problemas empleando este tipo de transformaciones. En otras palabras, se limita a hacer únicamente acciones.

Función	Se restringe a una fórmula, evalua en puntos específicos.
Transformación lineal	Sólo puede verificar el cumplimiento de las propiedades de linealidad para casos específicos del espacio vectorial de salida y un escalar en particular.

2.1.2 Proceso

Conforme se repite una acción y el individuo reflexiona sobre ella, esta puede ser interiorizada en un proceso. El proceso es percibido como una construcción interna, es aquello que se puede producir o describir sin necesidad de tener que realizar la transformación físicamente, inclusive, tiene control sobre ella, se da el caso donde logra invertir los pasos involucrados. En este caso, se da la omisión de pasos. Por lo tanto, si un individuo al resolver problemas muestra indicios del uso de transformaciones de tipo proceso, desde luego si es necesario en el problema por abordar, se considera que tiene una concepción proceso.

Función

Le permite al sujeto pensar en una función como algo que recibe uno o más valores de las variables independientes (entradas), que realiza una o más operaciones sobre las entradas y que regresa los valores de las variables dependientes (salidas) como resultado. El individuo puede ligar dos o más procesos para construir una composición o invertir el proceso para obtener funciones inversas.

Transformación lineal

Puede pensar si para todos los vectores del espacio vectorial de salida se cumple o no la propiedad y la manera en cómo la transformación actúa sobre ellos, sin tener que realizar los cálculos. Es decir, si piensa de forma general y ya no considera casos particulares se dice que las acciones se han interiorizado y el estudiante posee una concepción proceso de la propiedad.

2.1.3 Objeto

Tan pronto como un individuo reflexiona sobre el proceso, es más, toma conciencia en su totalidad y es capaz de operar sobre él con transformaciones ya sean de tipo acción o proceso, se dice que el individuo tiene una concepción objeto, en otras palabras, el proceso ha sido encapsulado en un objeto.

Función

La encapsulación de procesos en objetos y la desencapsulación de objetos de regreso a procesos aparece cuando piensa en la manipulación de funciones como encontrar la suma, el producto o cuando se forman conjuntos de funciones.

Transformación lineal	Una vez que logra una concepción proceso de ambas propiedades deben coordinarse. La encapsulación ocurre cuando tiene la necesidad de aplicar acciones sobre el proceso. Entonces, piensa en la transformación lineal como un todo y lo modifica de manera consciente. Genera transformaciones lineales mediante las operaciones suma, producto o composición definidas para estos objetos.

2.1.4 Esquema

Los esquemas son colecciones de acciones, procesos, objetos y nuevos esquemas que se generan. Evolucionan dinámicamente en cuanto se construyen relaciones entre cada uno de sus componentes, ya que, de manera constante se construyen y reconstruyen.

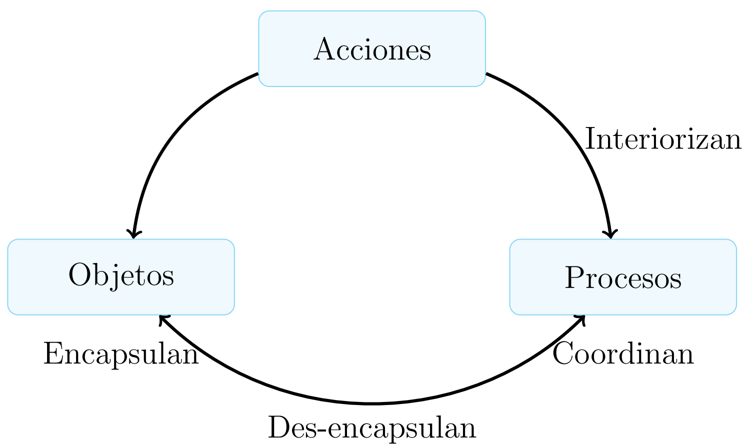
2.2 Mecanismos mentales

La abstracción reflexiva según Piaget implica una reflexión en el sentido de consciencia y pensamiento contemplativo sobre lo que llamó contenido y operaciones, consiste en la reconstrucción y reorganización del contenido y operaciones. Donde el término operación significa acción mental que sigue reglas lógicas y puede ser reversible. Además considera la abstracción reflexiva como el mecanismo mediante el cual se construyen todas las estructuras en el desarrollo de pensamiento (Arnon y et al, 2014). Por lo que es uno de los elementos principales involucrados en la teoría APOE para describir el pensamiento lógico matemático. En su teoría, Dubinsky considera cinco tipos de abstracción reflexiva:

Interiorización	Se da principalmente mediante la reflexión interna.
Coordinación	Le permite al individuo establecer relaciones entre procesos para generar un proceso nuevo.

Encapsulación	Convierte las construcciones dinámicas (acción y proceso) en objetos, aunque se considera que puede llegar a ser un mecanismo difícil de lograr.
Des-Encapsulación	Consiste en regresar sobre el proceso que determinó un objeto, esto permite que se coordinen otros procesos que van a generar nuevos procesos para ser encapsulados en nuevos objetos.
Reversión	Le permite al individuo revertir un proceso existente, y así, dar origen a uno nuevo.

Relación entre estructuras y mecanismos



Fuente: *Artículo, (Villabona Millán y Roa Fuentes, 2016)*

2.3 Descomposición genética

Una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar construir para aprender un concepto matemático específico (Arnon y et al, 2014). En cuanto al diseño, no es único, las variantes se deben a que la construcción de conocimiento tiene una relación estrecha con la experiencia y las estructuras previas (Trigueros, 2014).

Con el paso del tiempo, investigadores han implementado la teoría APOE en distintos conceptos matemáticos y con distintas poblaciones, especialmente con aquellas que presentan habilidades por encima de la media o talento matemático, como es el caso del trabajo de Villabona y Roa (2016), mostrando así una guía que da paso a la comprensión de los mismos desde esta perspectiva. Por ejemplo, (Kú, Trigueros, y Oktaç, 2008) presentan mediante un modelo de descomposición genética un conjunto de construcciones mentales de igual manera, los mecanismos involucrados, que puede desarrollar un estudiante para la comprensión del concepto de base de un espacio vectorial, tras considerar que además de ser una pieza importante en el estudio de espacios vectoriales, es un concepto arduo de adquirir para un estudiante. Se añade entre los resultados que, el hecho de memorizar una definición no garantiza su comprendimiento.

El modelo que proponen (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010) está orientado al concepto de transformación lineal, determinan un camino factible, de tal manera que, pueda ser construido exitosamente por un estudiante.

Cada uno de estos diseños fue puesto a prueba en una población determinada, permitiendo externar aquellos problemas que presentan los estudiantes bajo una serie de preguntas ligadas al concepto a tratar, y esto a su vez, con la información que se obtiene, da oportunidad de que los modelos sean refinados, principalmente, para su uso en material didáctico en cuestión de enseñanza.

Desde dos contextos particulares: la paradoja de Aquiles y la tortuga y el triángulo de Sierpinski, (Villabona Millán y Roa Fuentes, 2016), analizan las estructuras mentales que un individuo puede desarrollar al construir el concepto de infinito. Mediante entrevistas didácticas muestran evidencia de individuos pensando sobre el infinito, se menciona que en el caso de concepciones primarias los individuos se ven orientados a solucionar las situaciones sin llegar a utilizar un razonamiento matemático, más bien a través de argumentos respaldados por sus creencias o intuiciones y estas soluciones surgen a partir de procesos que no se coordinan. Estos análisis se plantean como herramientas potentes en la construcción de diseños de clase e instrumentos de evaluación

La construcción de este camino hipotético permitirá por lo tanto considerar los caminos adecuados o infrutuosos que toman los estudiantes al resolver este tipo de problemas. Para su construcción las descomposiciones genéticas pueden fundamentarse en análisis de tipo histórico-epistemológico, antecedentes del concepto en cuestión desde la matemática y también desde la matemática educativa, es posible incluir también el análisis de libros de texto o incluso resultados empíricos de la experiencia en aula.

En este trabajo tomando como modelo la construcción de las descomposiciones genéticas, el diseño de los modelos de solución propuestos se obtuvo siguiendo los siguientes pasos: análisis teórico, diseño y análisis de las respuestas de las tres estudiantes mujeres. Se recopilaron datos sobre las estrategias que son trabajadas en los entrenamientos de olimpiada de matemáticas ante este tipo de problemas (OMM, 2003), algunos resultados de investigaciones realizadas con este tipo de población, así como un análisis de las respuestas propuestas por los diseñadores de las pruebas. La finalidad del modelo que se propone en este trabajo es mostrar un posible camino de solución a los problemas correspondientes a este examen.

En cuanto al análisis de las respuestas, se busca principalmente por medio de los elementos que propone la teoría APOE identificar el tipo de estructuras sobre los conceptos que han construido y utilizado las estudiantes en estudio en sus soluciones para cada problema en el examen selectivo 1 (2019), de igual manera se resaltan las estrategias propias de las tres estudiantes mujeres. La exploración de sus respuestas nos llevan a formular las siguientes preguntas de apoyo para dar respuesta a la pregunta de investigación: ¿qué conceptos están utilizando? y ¿cómo los estructuran? Sin olvidar que a partir de ello también es posible observar los tipos de errores que se presentan. Es importante mencionar que estas jóvenes ya han pasado por el proceso de selección estatal y en esta fase selectiva se encuentran compitiendo por ser parte del equipo de 6 que representará a su estado en la olimpiada nacional.

En este sentido, ¿qué elementos previos debe poseer un estudiante para abordar de manera exitosa el problema?, ¿qué construcciones y mecanismos mentales están asociados a el concepto matemático base para resolver el problema? Se hace mención de estas últimas dos preguntas ya que consideramos que en trabajos futuros donde se implemente la teoría se pueda llevar a cabo el diseño de descomposiciones genéticas para conceptos útiles en la solución de este tipo de problemas.

3 Problemas y soluciones del primer examen selectivo 2019 Tamaulipas

33 Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Tamaulipas

Primer Examen Selectivo. 29 de Septiembre de 2019

Problema 1. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir los números enteros del 0 al 9 para hacer una lista de 5 números en orden de menor a mayor, si cada uno de los números es múltiplo de 3 y consta de dos dígitos? (Por ejemplo, una lista posible es $(21, 30, 48, 75, 96)$).

Solución 1. Para que un número entero sea múltiplo de 3 la suma de sus dígitos debe ser múltiplo de 3. Así que veamos los residuos de cada uno de los dígitos al ser divididos entre 3:

- Dejan residuo 0: $A = \{0, 3, 6, 9\}$.
- Dejan residuo 1: $B = \{1, 4, 7\}$.
- Dejan residuo 2: $C = \{2, 5, 8\}$.

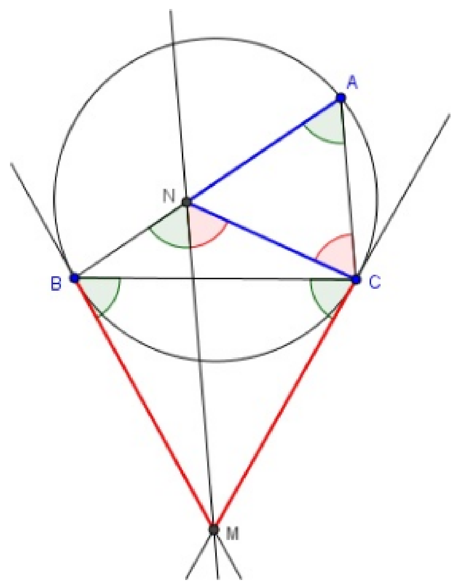
Así, para formar los números tenemos que tomar dos dígitos de A, o tomar un dígito de B y uno de C.
Con los dígitos de A tenemos que formar dos números. El 0 tiene que estár en las unidades y hay 3 opciones para el dígito que lo acompañará. Los otros dos dígitos irán juntos y hay dos maneras de formar un número de dos dígitos con ellos. Por lo tanto, tenemos $3 \times 2 = 6$ maneras de formar los números de A.
Para B y C, tenemos 3 opciones para elegir quién acompañará al 1, 2 opciones para el que acomopañará a 4 y 1 opción para el que acompañará a 7. Como para cada una de estas tres parejas resultantes tenemos dos opciones para formar un número de dos dígitos, tenemos que el total de números que se pueden formar con B y C es $3 \times 2 \times 2^3 = 48$.
Una vez que tenemos los 5 números, hay una sola manera de ponerlos en orden, así que el número buscado es $6 \times 48 = 288$.

Problema 2. Un *cuadrado mágico* de $n \times n$ consiste en acomodar n^2 números, uno en cada casilla de la cuadrícula, de manera que todas las sumas de los números colocados en cada casilla y las sumas de los números colocados en cada fila sean iguales. ¿Es posible hacer un *cuadrado mágico* de 6×6 con los primeros 36 números primos?

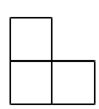
Solución 2. Recordemos que todos los primos mayores a 2 son impares. Si queremos sumar los primeros 36 primos, entonces estaremos sumando un par y 35 impares. Como la suma de una cantidad impar de impares es impar y además, un impar más un impar también es impar, la suma de los primeros 36 primos es impar. Para un cuadrado mágico necesitamos que la suma en cada columna debe ser igual, digamos x, entonces, la suma de todos los números de la cuadrícula debe ser igual a $6x$, pero esto no puede ser impar, así que no es posible.

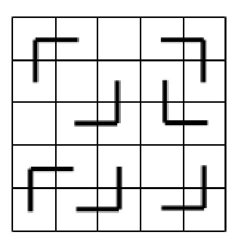
Problema 3. Un triángulo ABC está inscrito en un círculo. Sea M la intersección de las rectas tangentes al círculo en B y C. Por el punto M se traza la recta paralela a AC, la cual corta a AB en N. Demuestra que $BNCM$ es un cuadrilátero cíclico y que $AN = CN$.

Solución 3. Como MB y MC son tangentes, entonces $MB = MC$ y por lo tanto $\angle CBM = \angle BCM = \alpha$. Además, $\angle BAC = \angle BCM = \alpha$ por ser ángulos inscrito y semi-inscrito que abren el mismo arco. Sea $\angle NCA = \beta$ y ya que $NM||AC$, $\angle MNC = \angle NCA = \beta$ por ser alternos interno. En el triángulo ANC, tenemos que $\alpha + \beta + \angle ANC = 180°$, además, en la recta A, N, B, tenemos que $\angle ANC + \angle CNM + \angle BNM = 180°$, así que $\angle BNM = \alpha$ y por lo tanto, como $\angle BNM = \angle BCM$, entonces $BNCM$ es cíclico. Ahora bien, debido a este cíclico, tenemos que $\angle MBC = \angle MNC$, es decir, $\alpha = \beta$, lo que implica que $\triangle CNA$ es isósceles y por lo tanto $CN = NA$.

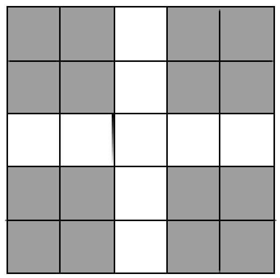


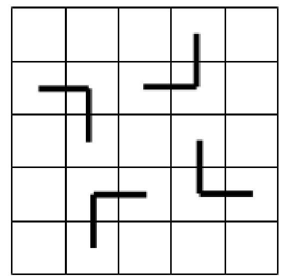
Problema 4. En una cuadrícula de 5×5 se quieren tapar algunos cuadritos usando fichas en forma de L's de 3 cuadritos como la que se muestra abajo a la izquierda, de manera que ya no quepa una sola más. ¿Cuál es el mínimo número de L's que deben usarse? (En la figura de la derecha se muestra un acomodo con 7 L's en la que ya no cabe ninguna otra.)





Solución 4. El mínimo es 4.
Para ver que 4 son necesarias, notemos que en cada una de las 4 regiones sombreadas en la figura de la izquierda debe haber al menos una L que cubra alguno de sus cuadritos, y ninguna L puede tocar simultáneamente 2 de las 4 regiones.
Para ver 4 son suficientes, consideramos el acomodo que se muestra a la derecha, en el cual ya no cabe ninguna otra L.





4 Elementos para la construcción del modelo de solución propuesto

4.1 Combinatoria

Cada rama de las matemáticas se caracteriza por estudiar un cierto tipo de objetos, o por contestar cierta clase de preguntas. La combinatoria busca responder las preguntas del tipo: ¿de cuántas formas...?. Por ejemplo: ¿Cuántos caminos hay para ir de A a B?, ¿cuántos números de 6 dígitos son tales que sus cifras suman 21?, etc.

En los problemas de olimpiadas de matemáticas se ha identificado que se abordan los siguientes tipos de problemas: conteo, principio multiplicativo, principio aditivo, permutaciones, separadores, principio de inclusión exclusión, problemas mezclados (Roa, Batanero, Godino, y Cañizares, 1997).

El manual para estudiantes de olimpiadas de matemáticas propuesto en la revista TZALOA en 2011, desgloza gran variedad de técnicas de conteo básicas que se promueven en estos concursos." Comienza por ver problemas de primeras etapas. En estos problemas se tiene la ventaja de que es posible hacer operaciones explícitas, es decir, como resultado basta dar un número, y también muchas veces basta con enlistar los objetos que tenemos que contar.

Después de esto introduciremos las dos reglas principales para contar: la regla de la suma y la regla del producto. A partir de estas dos reglas se hace la mayor parte del conteo. Tras ver algunos ejemplos de estas reglas, llegaremos a otras herramientas usadas frecuentemente, como las permutaciones y las combinaciones”(Martínez, 2011)

Al estudiar a resolutores de problemas de combinatoria Batanero y sus colaboradores (1997), identificaron características de los buenos resolutores.

Concluyeron que además de su importancia en el desarrollo de la idea de probabilidad, la capacidad combinatoria es un componente fundamental del pensamiento formal. El razonamiento combinatorio representa algo más que una simple parcela de las matemáticas, siendo un esquema tan general como la proporcionalidad y la correlación, que emergen simultáneamente a partir de la edad de 12 o 13 años.

En consecuencia, postularon que los problemas combinatorios pueden jugar un papel fundamental en el aprendizaje de técnicas generales de resolución de problemas. Además, identificaron las siguientes estrategias para la resolución de problemas de combinatoria:

- Identificar la fórmula de operación combinatoria.
- Enumeración. Son necesarios métodos de enumeración sistemáticos.
- Diagrama de árbol. Fischbein (1987) lo presenta como modelo figurativo que permite sugerir la generalización iterativa (extensión de un cierto procedimiento a cualquier número de elementos y la generalización constructiva (adaptación a nuevos problemas derivados que es característica del razonamiento recursivo).
- Fijar variable (para reducir el problema a uno más sencillo).
- Descomponer en partes (para aplicar una fórmula en cada caso y luego aplicar la regla del producto o de la suma).
- Generalizar. La dificultad de generalizar es una de las causas de los errores en combinatoria.
- Traducir a Problema equivalente.

- Regla del producto.
- Regla de la suma.

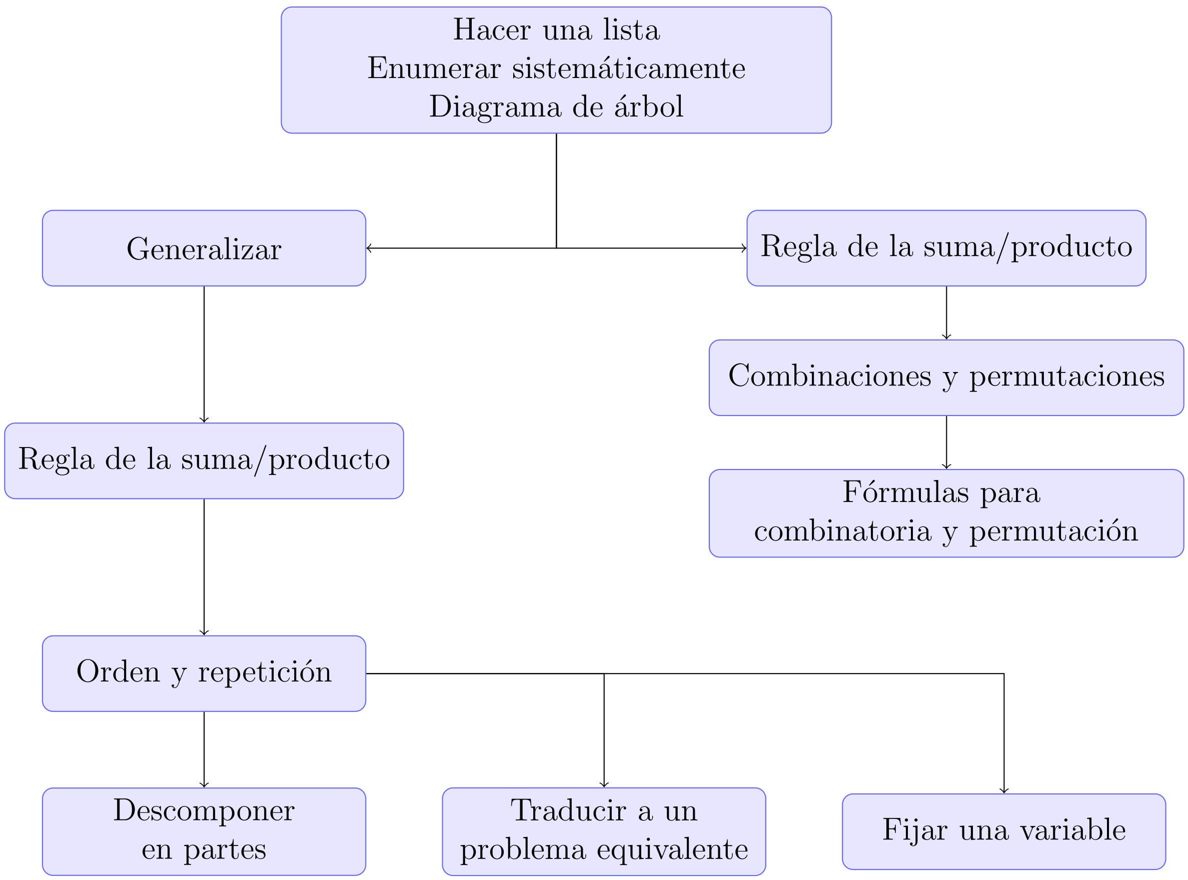
Consecuentemente, también hicieron notar la importancia de tener en cuenta este punto en la enseñanza y enfatizar en los alumnos la actividad de análisis de los problemas y traducción entre unos modelos y otros. Entre las dificultades identificadas en los estudiantes se encontró el uso incorrecto del diagrama de árbol, error en el uso de fórmulas o aplicación indebida de la regla del producto. La investigación de Batanero y su equipo nos llevan a proponer la siguiente estructura para el modelo de solución asociado a problemas de combinatoria.

Acciones	Enumeración, uso del diagrama de árbol (importantes para la generalización). Difícil cuando se trata de un número alto de casos.
Procesos	Hacer referencia a la necesidad de tener en cuenta el orden o la repetición, la combinatoria (como objeto) para solucionar un problema.
Objeto	Identificar la operación combinatoria que da solución al problema y si es necesario tener en cuenta el orden o la repetición para aplicar está definición en el contexto dado. Aplica la definición de las operaciones combinatorias.

Al respecto podemos enfatizar los siguientes aspectos sobre la estructura propuesta. La enumeración es básica para comprender los datos del problema o para comprobar la solución. La enumeración directa y sistemática en algunos casos ha resultado exitosa. Es decir, la fase de acción es indispensable. No hay una ventaja del uso de las fórmulas, respecto a la enumeración para asegurar la resolución de los problemas, ya que ambas estrategias se han encontrado en los buenos y malos resolutores.

Las estrategias generales en la resolución de problemas: fijar variables, reducir el tamaño del problema, traducir a otro problema semejante más sencillo, descomponer el problema en partes, generalizar las soluciones, se han mostrado también como elementos que separan a los buenos y malos resolutores. Estas estrategias, bien aplicadas se han mostrado fundamentales a la hora de resolver los problemas de un modo adecuado, especialmente combinadas con la enumeración sistemática.

Esta investigación además hace hincapié en el razonamiento recursivo y en los procedimientos sistemáticos de enumeración, en lugar de meramente centrarse en aspectos algorítmicos y en las definiciones de las operaciones combinatorias.



Esquema de solución propuesto para combinatoria

4.2 Cuadrados mágicos

Un cuadrado mágico de orden n es una distribución de los primeros n^2 números (aunque, de forma general, puede ser una colección cualquiera de n^2 números) sobre las casillas de un retículo cuadrado $n \times n$, de forma que la suma de los números de cada fila, cada columna y cada diagonal principal sea siempre la misma, la cual, se conoce con el nombre de constante mágica. Los cuadrados mágicos se distinguen por su número de orden n, que viene dado por el número de casillas por lado. Así, un cuadrado que contiene 3 casillas por lado será un cuadrado de orden 3, uno que contenga cuatro casillas será de orden 4, etc. Generalmente se emplean los primeros números enteros positivos (consecutivos) que corresponden a n^2, siendo la suma de estos números:

$$\frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

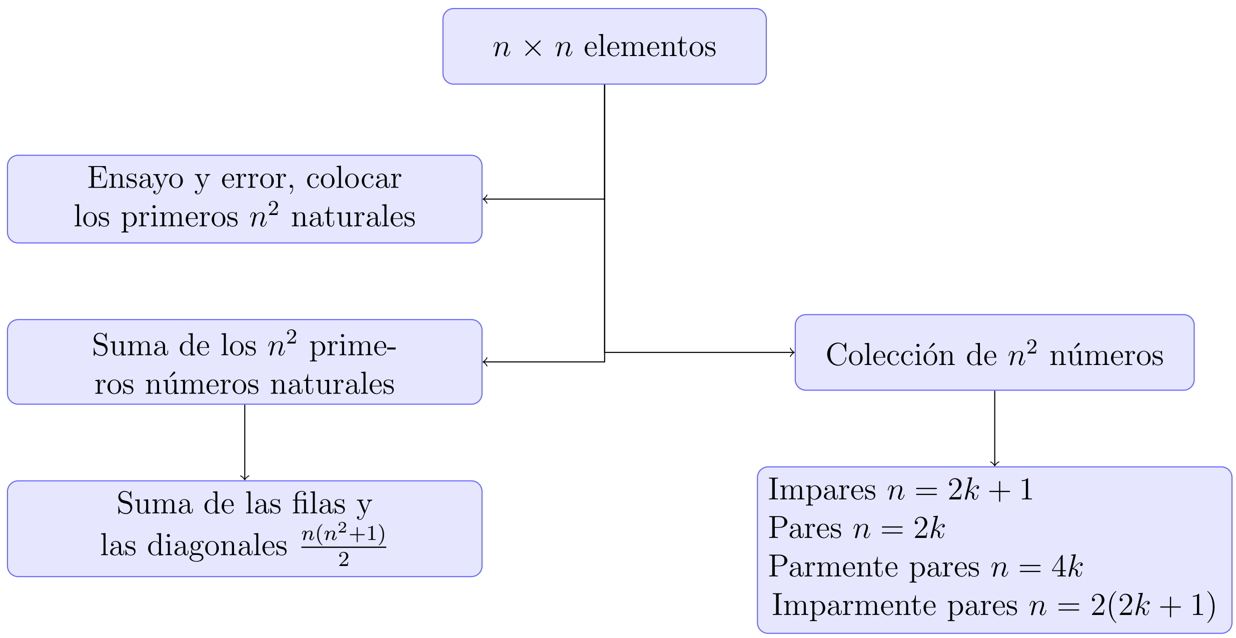
La suma de todas las filas, todas las columnas y las dos diagonales principales será:

$$M_n = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

(Comes y Comes, 2009).

Desde sus remotos orígenes, los llamados cuadrados mágicos han estado ligados con cuestiones religiosas según el texto emblemático de oculta philosophia, de Cornelius Agrippa (1533), uno de los magos naturales más connotados del siglo XVI. En dicho libro se afirma que la magia y las matemáticas poseen tal grado de conexión que nada se puede realizar con éxito en el ámbito del primer rubro sin un conocimiento profundo del segundo. Tal vez esto es lo que hace a los cuadrados mágicos tan famosos y usados constantemente para interesar a las personas en matemáticas (Martínez E., 2004). Según (Bulajich, 2011), los distintos tipos de cuadrados que se pueden hacer son:

- Cuadrados mágicos de orden impar. Son los cuadrados mágicos donde n es un número impar.
- Cuadrados mágicos de orden par. Llamados par sencillo, donde n es de la forma $2(2m+1)$, donde $m \geq 0$ los números pares que se generan en este caso son divisibles entre 2 pero no entre 4.
- Cuadrados mágicos cuyo orden es doblemente par, de la forma $2(2m)$ m un entero. El número de cuadraditos en cada uno de los lados de los cuadrados se puede dividir entre 2 y 4.



Esquema de solución propuesto para cuadrados mágicos

4.3 Geometría

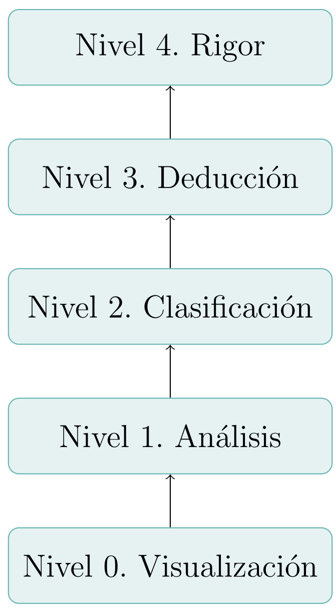
La geometría lleva al estudio de las formas y estructuras geométricas a través de sus cualidades y la forma en cómo se relacionan. Es vista como la ciencia del espacio y el medio ideal para el pensamiento y entendimiento. En este ámbito, la comprensión se amplia entre más diverso sea el tipo de problemas que se aborden. Sin embargo, la memorización de conceptos y su aplicación se destaca como una de las dificultades que se presentan en los estudiantes durante su aprendizaje en esta área (Vargas y Araya, 2013). Errores de tipo aritmético también son partícipes, un esquema cognitivo no adecuado, interpretación incorrecta, entre otros.

La construcción de la estructura que se propone en este caso está basada en la teoría propuesta por Pierre Van Hiele, así como estudios previos que han realizado otros investigadores acerca de las fases que resaltan en dicha teoría. La teoría de Van Hiele exhibe cinco niveles de pensamiento, los cuales, describen las fases presentes durante el aprendizaje en esta área.

Por ejemplo, (Barrera y Reyes, 2015), abordan estos niveles de pensamiento geométrico y el cómo esta teoría influye significativamente no sólo al estudio del desarrollo cognitivo de los estudiantes, sino, también desde la perspectiva de la matemática educativa la aportación de herramientas útiles para implementar diseños instruccionales que den paso al desarrollo de procesos cognitivos más avanzados. De igual manera, se muestra que dentro de las diferentes formas de razonamiento que ponen en marcha los estudiantes, estas van desde el razonamiento intuitivo hasta lo formal y abstracto.

Se añade que, en esta teoría cada nivel es progresivo y hay una jerarquía entre ellos, es decir, que para lograr un nivel se debe ir más allá de lo procedimental y para trascender a otro es indispensable completar el anterior.

Niveles de pensamiento geométrico



Fuente: *(Barrera y Reyes, 2015)*

4.3.1 Visualización o reconocimiento

En este nivel las figuras geométricas son reconocidas visualmente por su apariencia, sus propiedades y componentes no juegan un papel. El individuo reconoce las figuras y es posible que reproduzca otras, incluso es capaz de indentificar propiedades o características de las mismas, por ejemplo, la forma, el número de lados.

4.3.2 Análisis

Se identifican los componentes y atributos de las figuras para caracterizar integrantes de una clase o familia de objetos, considera estos aspectos independientes, es decir, no establece relaciones entre ellas.

4.3.3 Clasificación, ordenación o abstracción

Aquí el individuo es capaz de señalar las condiciones necesarias y suficientes que debe satisfacer una clase de figuras, hasta el cómo algunas propiedades se derivan de otras, proponen justificaciones informales.

4.3.4 Deducción formal

El individuo realiza deducciones, demostraciones de teoremas incluso establece relaciones entre los mismos. El grado de entendimiento tiende a la necesidad de justificar resultados matemáticos o proposiciones deductivamente, basandose en un sistema axiomático. Asimismo, tiene la capacidad para demostrar un resultado de diferentes maneras.

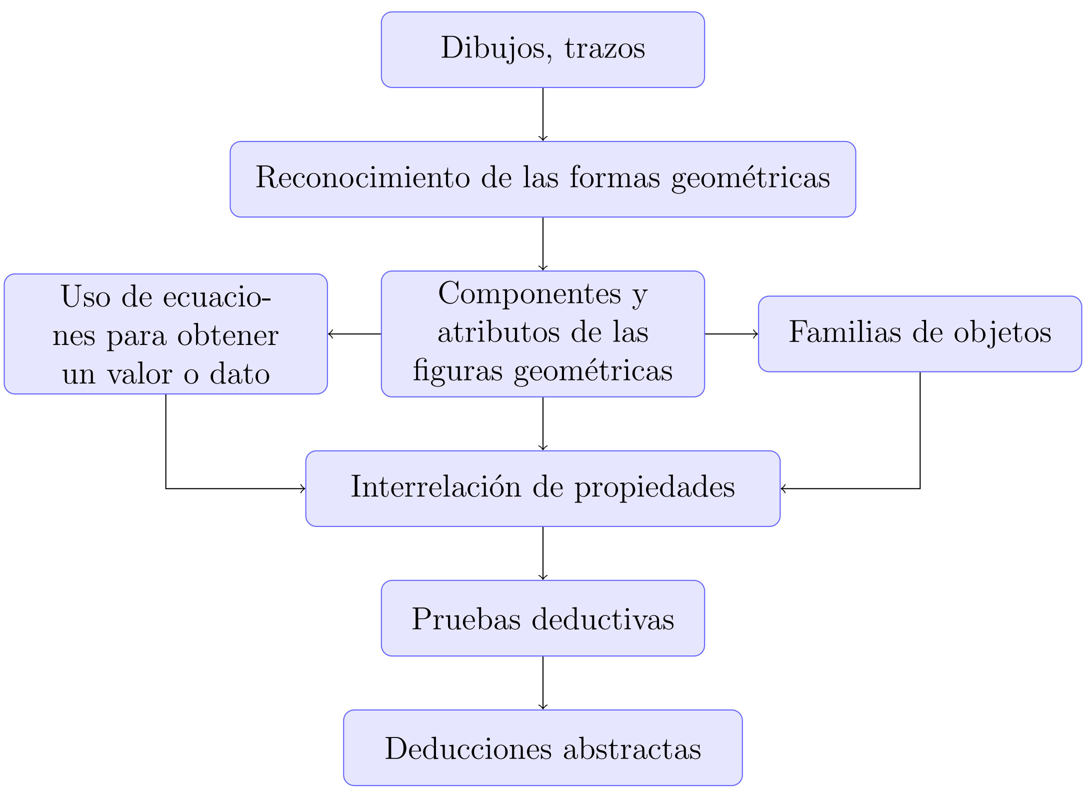
4.3.5 Rigor

En este último nivel, el individuo conoce la existencia de distintos sistemas axiomáticos, analiza y compara entre ellos. También realiza deducciones abstractas.

De acuerdo a estos datos a continuación se detalla un poco más la estructura para el modelo de solución asociado a problemas de geometría.

Acciones	Dibujos, trazos, reconocimiento (a partir de ellos se amplia el panorama sobre el cual van a trabajar, así como la identificación de cada elemento involucrado).
Procesos	Proporciona cualidades de las figuras resultantes.
Objeto	Aplica tanto definiciones como resultados importantes que le permitiran solucionar el problema. Identifica las características y la manera en como se interrelacionan los elementos que participan.

Como se mencionó anteriormente, este modelo está basado principalmente en los 5 niveles de pensamiento geométrico y desde la persepectiva de la teoría APOE las estructuras que se identifican en este caso.



Esquema de solución propuesto para geometría

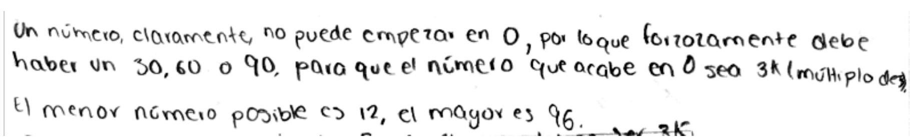
5 Análisis de las respuestas de las tres estudiantes mujeres que formaron parte del equipo estatal de la olimpiada.

En cada problema se adjuntan fragmentos de las redacciones que fundamentan las respuestas de las niñas

5.1 Problema 1

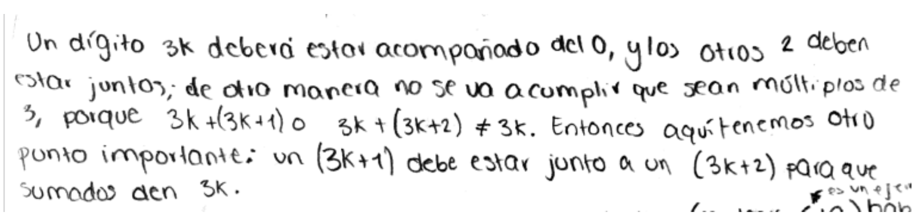
5.1.1 Participante A

Como esperábamos según el modelo propuesto, A comienza enumerando casos particulares (*hacer una lista*), desde los cuáles, es posible notar su análisis de las características de los objetos que debe contar.



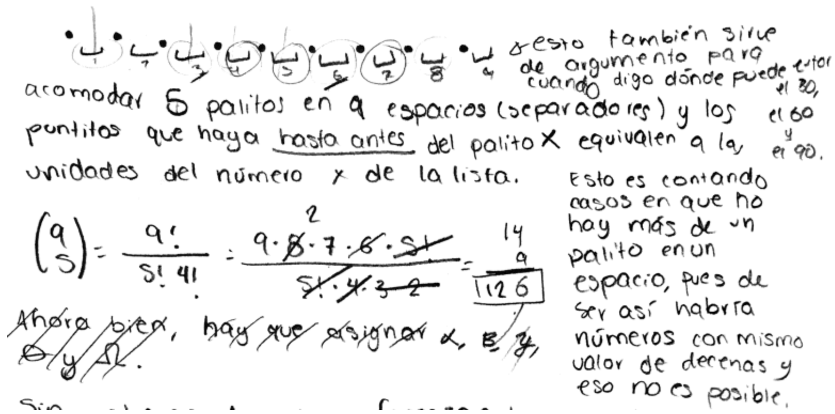
Un número, claramente, no puede empezar en 0, por lo que forzozamente debe haber un 30, 60 o 90, para que el número que acabe en 0 sea 3k (múltiplo de 3)
El menor número posible es 12, el mayor es 96.

Es importante mencionar que considera hacer un listado sistemático de todas y cada una de las posibles combinaciones que cumplen lo solicitado en el problema, sin embargo, decide, en sus palabras, que "esto va a estar muy lioso". A continuación, analiza las características generales (*generalizar*) que deben cumplir todas las parejas que puedan formar parte de la lista de 5 números.



Un dígito 3k deberá estar acompañado del 0, y los otros 2 deben estar juntos; de otro manera no se va a cumplir que sean múltiplos de 3, porque $3k+(3k+1)$ o $3k+(3k+2) \neq 3k$. Entonces aquí tenemos otro punto importante: un $(3k+1)$ debe estar junto a un $(3k+2)$ para que sumados den $3k$.

Ante la imposibilidad de contar todos los casos, decide a continuación utilizar una estrategia conocida en los entrenamientos de Olimpiada como el método de "separadores".


esto también sirve de argumento para cuando digo dónde puede estar el 30, el 60 y el 90.

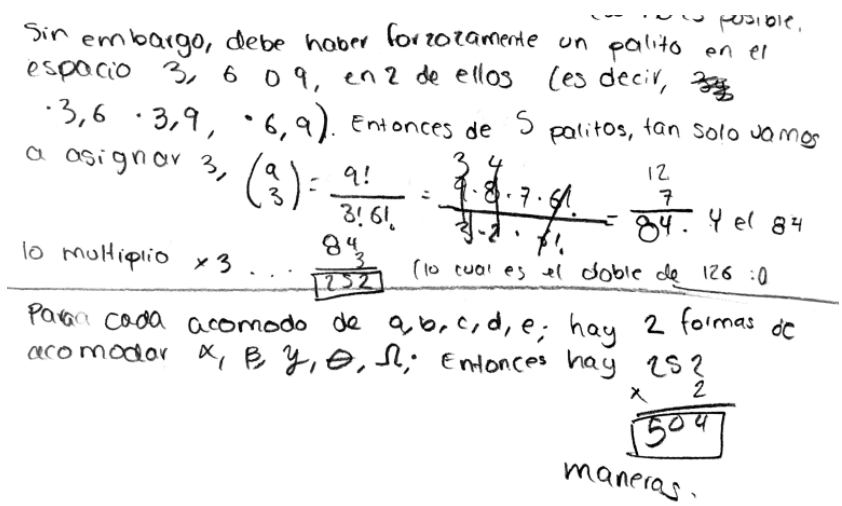
acomodar 5 palitos en 9 espacios (separadores) y los puntitos que haya hasta antes del palito x equivalen a la unidades del número x de la lista.

$\binom{9}{5} = \frac{9!}{5!\,4!} = \frac{9\cdot \cancel{8}\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3\cdot 2}} = \boxed{126}$

~~Ahora bien, hay que asignar~~ α, β, γ, θ y Ω.

Esto es contando casos en que no hay más de un palito en un espacio, pues de ser así habría números con mismo valor de decenas y eso no es posible.

Sin embargo, no considera que para usar esta estrategia el problema debe cumplir que sea posible repetir elementos y el orden de los resultados no importe. El problema tiene condiciones opuestas que se habían planteado desde un inicio. Además, olvida el planteamiento que había hecho anteriormente sobre las características generales que debe cumplir cada pareja de dígitos. Por lo tanto, la cantidad de elementos del conteo que obtiene es mucho mayor que la esperada.


Sin embargo, debe haber forzozamente un palito en el espacio 3, 6 o 9, en 2 de ellos (es decir, ·3,6 ·3,9, ·6,9). Entonces de 5 palitos, tan solo vamos a asignar 3, $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!\,6!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{3\cdot 2\cdot \cancel{6!}} = 84$. Y el 84 lo multiplico ×3 . . . $84 \times 3 = \boxed{252}$ (lo cual es el doble de 126 :0

Para cada acomodo de a, b, c, d, e, hay 2 formas de acomodar α, β, γ, θ, Ω. Entonces hay $252 \times 2 = \boxed{504}$ maneras.

Podemos concluir que esta participante estaba desarrollando correctamente una estrategia de solución para el problema, que, si bien no es la propuesta por los diseñadores de esta prueba, da evidencia de sus habilidades para utilizar estrategias que ya ha interiorizado. Observamos también que al recurrir a métodos que ha estudiado en los entrenamientos de olimpiadas (el de separadores) y al uso de fórmulas matemáticas, que en el contexto de este problema no eran tan necesarias, cae en el error de hacer un conteo que no considera los principios de partida. Situación que ya habíamos anticipado desde el modelo de solución propuesto, notando que el camino de razonamiento que sigue únicamente en la definición de reglas, conceptos y fórmulas no permitirá una comprensión profunda del tema en cuestión.

5.1.2 Participante B

De acuerdo al modelo de solución propuesto, al igual que la participante A, parte enunciando casos específicos. Considera primordial las posibilidades conforme a como debe empezar el número menor, para así, mediante las características que deben satisfacer, consecuentemente llevar a cabo su conteo reduciendo las opciones.

Para que el primer número de la lista sea el menor, primero veré que el
número empiece con 1. Para que un número que empiece con uno
sea multiplo de 3, tiene que ser 12, 15 ó 18.

Caso de 12:

12 __ __ __ __

Tendríamos 12 como el primer número, entonces para que el segundo
siga siendo pequeño, empezaría con el 3. Serían 30, 33, 36 y 39.

Suspende brevemente su idea inicial, se ve en la necesidad de buscar todos los candidatos, para ello, piensa en "extremos" que se pueden formar a partir de los números dados en el problema (número menor, número mayor). Ha notado que el orden importa y que los dígitos no se pueden repetir.

Veremos que del 10 (porque si son número de dos dígitos no pueden empe-
zar en cero) al 98 (porque es el mayor número que se puede formar con
los números del 0 al 9), hay 29 números que son múltiplos de 3.

Descartamos los que tienen sus dos cifras iguales, porque no se pueden repe-
tir números, y nos quedarían 27.

Números que terminan en:

1: 21, 51, 81   6: 36, 96
2: 12, 42, 72   7: 27, 57, 87
3: 63, 93   8: 18, 48, 78
4: 24, 54, 84   9: 39, 69
5: 15, 45, 75.   0: 30, 60, 90

Dada su lista, procede sistemáticamente, considerando de nuevo el papel que juega el orden. Una vez que ya ha fijado el primero, se apoya con estos elementos para determinar cualidades de los números que prosiguen en las posiciones restantes; se adentra en diferentes situaciones, exhibe sus propuestas y finaliza descartando. Por ejemplo, si ya ha utilizado el 1 y el 2, el número 24 queda inhabilitado.

Si queremos que el primer número de la lista empiece con 1, tendríamos 3 opciones para empezarlo y tendríamos que descartar los números que empiecen con 1 que no utilicemos y los números que terminen con 1, además de los que empiecen o terminen con la segunda cifra del primer número. Por ejemplo si elegimos el 12, tendríamos que descartar los demás que empiecen y terminen con 1, que son 5, y además los que empiecen y terminen con 2, que son 4 además del 12. Esto se repetirá para los demás números de la lista.

Es importante resaltar en esta parte que la participante manifiesta un proceso de reflexión e interiorización en cuanto al procedimiento que ella se ha postulado en la resolución del problema. Ha profundizado el hecho de que no son posibles las repeticiones de los dígitos, así como la secuencia que deben seguir. Además, menciona "esto se repetirá para los demás números de la lista", es decir, comienza ligeramente a generalizar comportamientos.

Con todo el razonamiento previo, ejecuta su plan de solución con los números más grandes, da indicios de las listas que empiezan con estos mismos, pareciera que trata de usar la regla del producto. Ve las posibilidades para cada caso y después las listas posibles que puede formar según su razonamiento.

Empezaré a buscar las listas con los números más grandes, porque hay menos casos con esos.

Con el 54:

54 _ _ _ _

Descartamos todos los números menores a 54. El segundo número tiene que estar en la decena de los 60 obligatoriamente, sino pasaría lo que ya habíamos dicho de que sólo tendríamos 4 números en vez de 5. Entonces, para el segundo número tendríamos 2 opciones, descartando el número 69 porque tiene de segundo dígito 9 y tenemos que ocupar el 9 en el futuro. El tercer número tiene que estar en la decena de los 70, descartaríamos el 75 porque ya utilizamos el 5 y el 78 porque tiene un 8, por lo que sólo tenemos una opción que es el 72. El cuarto número debe estar en los 80, descartamos el 84 porque ya usamos el 4, el 87 porque ya usamos el 7 y sólo nos quedaría una opción que es el 81. Para el último número descartamos el 96 porque ya usamos el 6, y tenemos los números 90 y 93, pero para el segundo número ya habíamos usado ya sea el dígito 0 o el dígito 3, por lo que independientemente del que hayamos utilizado sólo tenemos 1 opción. Por lo que $1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 = \boxed{2}$ listas que empiecen con el número 54.

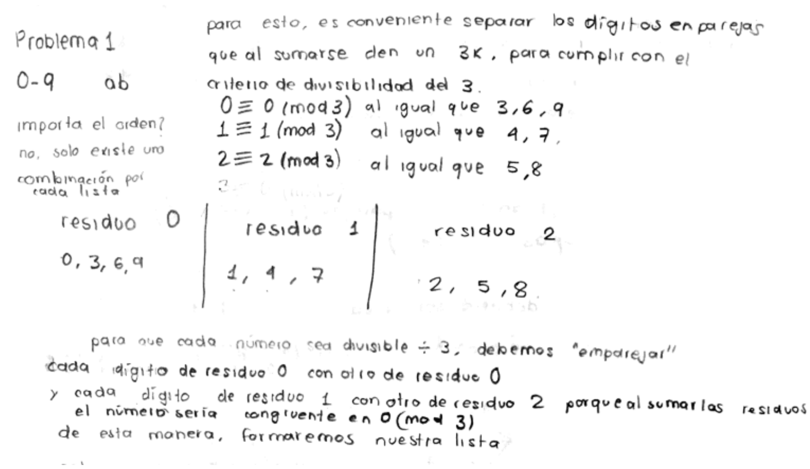
Prácticamente repetiremos el mismo proceso para el 57.

Desafortunadamente, no considera en su totalidad en el momento en que trabaja con los múltiplos más pequeños de acuerdo a la metodología que ella siguió, lo que la lleva a tener un resultado menor al esperado. Sólo el número de listas que logra para el 54 y el 51 es correcto.

Concluimos que, la participante B a pesar de involucrarse en un camino largo de mucha "talacha", muestra sus habilidades, así como los conocimientos requeridos para abordar el problema, no realiza ninguna operación extra para decir que esos números son múltiplos de 3, lo afirma y proporciona explicítamente cada uno. En teoría APOE, involucrarse en un camino de mucha talacha significa que aún se encuentra en una concepción acción (muy lejos del proceso o de interiorizarlo), lo que significa que es trabajo de los entrenadores ayudarla a interiorizar el proceso. En el número 42, olvida 2 listas que da antes de finalizar, por lo cual, la cantidad final indicada es menor a la real para ese caso, de hecho, aunque las olvida todavía le faltan listas. Después del 39, abandona el procedimiento que ha seguido, comienza a concluir con argumentos meramente intuitivos. Con todo lo que ella hace, podemos ver que está en una concepción Acción, si interioriza el orden y la no repetición pero no logra llegar a encapsular el objeto.

5.1.3 Participante C

C inicia haciendo uso del criterio de divisibilidad para el número 3 "la suma de sus dígitos es múltiplo de 3", además de la relación de congruencia módulo n, en este caso, $n = 3$. De acuerdo al modelo, C examina las características generales (*generalizar*) que deben cumplir los dígitos que conformarán las 5 parejas. Comenta "de esta manera formaremos nuestra lista", es decir, procesa los puntos clave que requiere para comenzar a contar. También, al principio de su redacción ya ha aclarado que es única cada combinación de las listas resultantes.



Problema 1

0-9 ab

importa el orden? no, solo existe una combinación por cada lista

para esto, es conveniente separar los dígitos en parejas que al sumarse den un 3K, para cumplir con el criterio de divisibilidad del 3.

$0 \equiv 0 \pmod 3$ al igual que 3, 6, 9

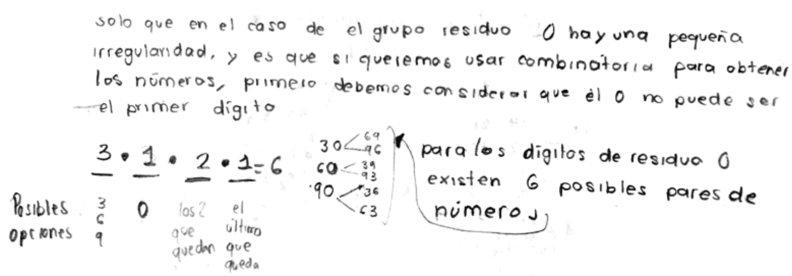
$1 \equiv 1 \pmod 3$ al igual que 4, 7,

$2 \equiv 2 \pmod 3$ al igual que 5, 8

residuo 0	residuo 1	residuo 2
0, 3, 6, 9	1, 4, 7	2, 5, 8

para que cada número sea divisible ÷ 3, debemos "emparejar" cada dígito de residuo 0 con otro de residuo 0 y cada dígito de residuo 1 con otro de residuo 2 porque al sumarlas los residuos el número sería congruente en $0 \pmod 3$ de esta manera, formaremos nuestra lista

Ya ha interiorizado la regla del producto, dados los elementos identifica las posibilidades para cada uno y aplica. Repite este procedimiento para ambas agrupaciones que enfatiza al inicio (aquellos cuyo residuo es 0, 1 y 2).



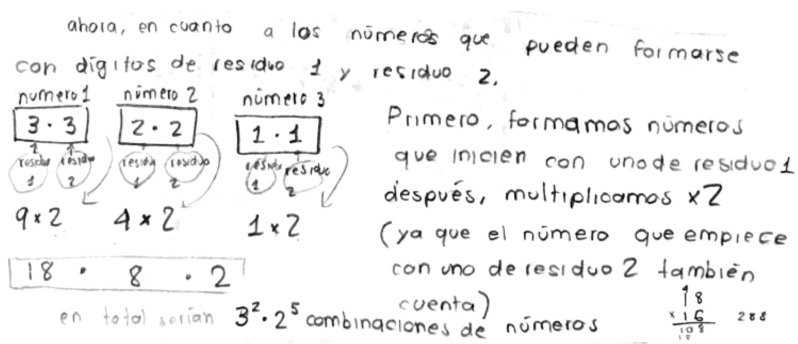
solo que en el caso de el grupo residuo 0 hay una pequeña irregularidad, y es que si queremos usar combinatoria para obtener los números, primero debemos considerar que el 0 no puede ser el primer dígito

$3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Posibles opciones: 3, 6, 9 | 0 | los 2 que quedan | el último que queda

30 < 69, 96
60 < 39, 93
90 < 36, 63

para los dígitos de residuo 0 existen 6 posibles pares de números



ahora, en cuanto a los números que pueden formarse con dígitos de residuo 1 y residuo 2.

número 1: $\boxed{3 \cdot 3}$ (residuo 1, residuo 2) — 9×2

número 2: $\boxed{2 \cdot 2}$ (residuo 1, residuo 2) — 4×2

número 3: $\boxed{1 \cdot 1}$ (residuo 1, residuo 2) — 1×2

$\boxed{18 \cdot 8 \cdot 2}$

Primero, formamos números que inicien con uno de residuo 1 después, multiplicamos ×2 (ya que el número que empiece con uno de residuo 2 también cuenta)

en total serían $3^2 \cdot 2^5$ combinaciones de números

18×16 = 108, 18, 288

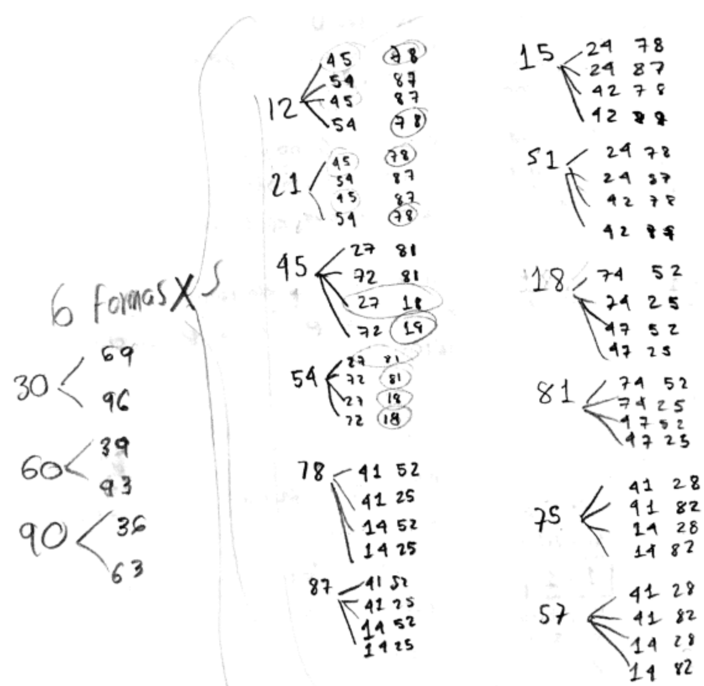
Puesto que, obtuvo todas las posibles combinaciones para el segundo "grupo", elimina repeticiones. Finaliza aplicando el mismo principio de conteo, construye las posibles distribuciones con los números proporcionados. Vease que simplifica los términos.

Por último, multiplicamos las parejas (que eran 6)
por los grupos (48)

6 · 48 debería ser la cantidad de listas posibles

Se pueden distribuir de 288 maneras distintas

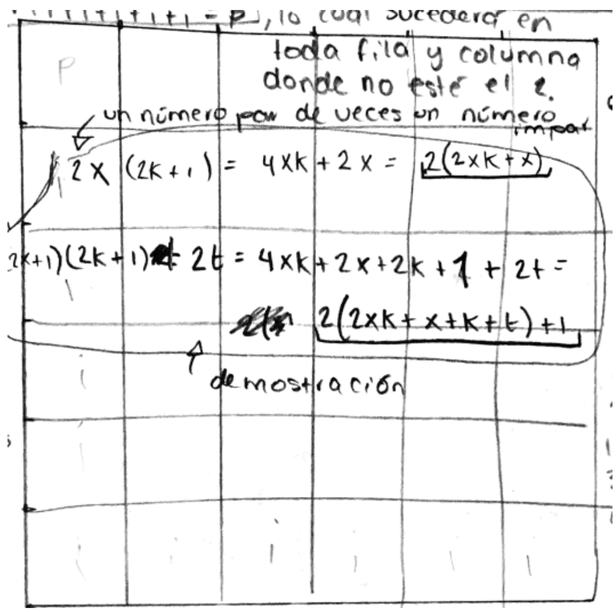
Deducimos que aborda una buena estrategia de solución en este problema. Provee una solución muy similar a la propuesta por los diseñadores. Esta participante claramente muestra mediante sus habilidades las estrategias que ya ha interiorizado, recurre al uso de herramientas con las cuales se ha involucrado durante su preparación en dichos entrenamientos, como lo es la relación de equivalencia congruencia módulo n, el principio fundamental del conteo. El hecho de que ella realiza una simplificación al hacer operaciones, se entiende que está presente la idea de ejecutar acciones que llevan a la simplicidad. Aunque tiene muy presente estos recursos, elabora una lista sistemática para las combinaciones, que exhibe al final. La cuestión en esta parte es que, si ya ha resuelto el problema, ¿por qué necesita elaborar una lista? En terminos de la teoría APOE aún no ha encapsulado al objeto, es decir, que la estrategia que parece haber aprendido en los entrenamientos no es del todo clara para ella. En algún sentido necesita reafirmar lo obtenido.



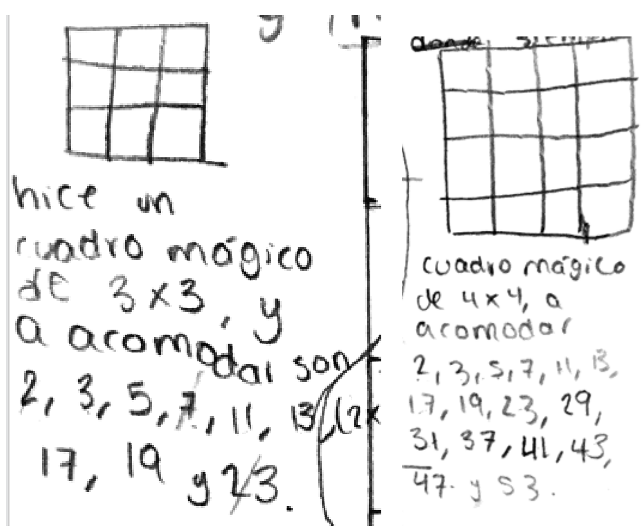
5.2 Problema 2

5.2.1 Participante A

Realiza su cuadrícula de 6×6, necesita (o muestra) conocer cómo se ve el panorama donde se ubicarán cada uno de estos $n \times n$ elementos, posiciona números de manera arbitraria en la primera columna y el último renglón con etiquetas que ha definido como, p:=par, i:=impar.

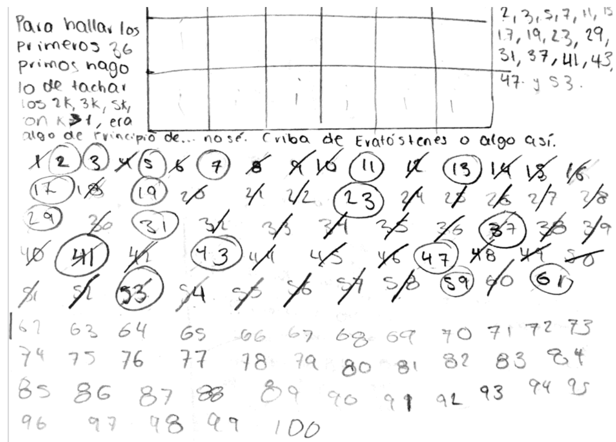


Haciendo referencia al esquema, colecciona los n^2 primos para el caso $n = 3$ y $n = 4$.

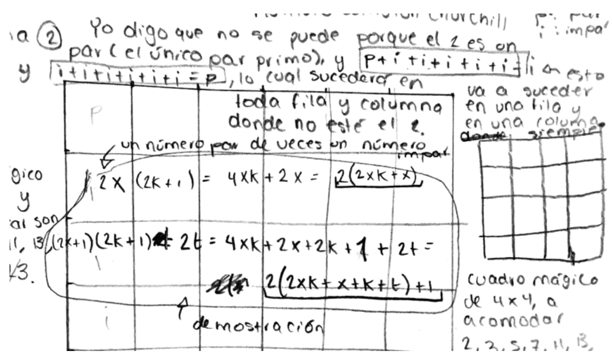


Después, utiliza un método llamado “la criba de Eratóstenes” para encontrar los primeros

36 primos, aunque no finaliza dicho procedimiento. El punto en esta parte es que el usar este método nos da indicios de sus conocimientos.



Por otro lado, al notar que el único primo par dentro de esa colección es el 2, justifica lo que sucede con las filas y columnas que contengan al 2, al igual que lo que ocurre con aquellas que no lo incluyan.



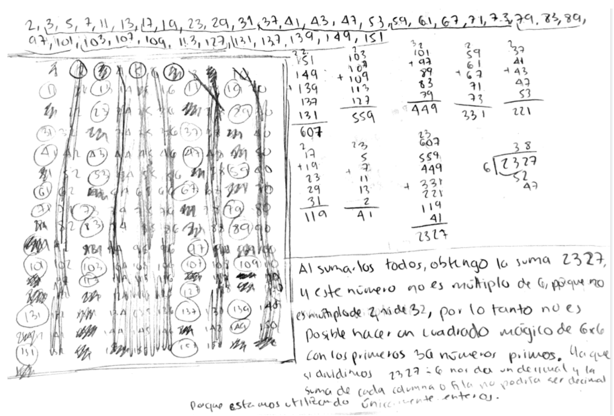
Aunque su solución no sea claramente como la propuesta por parte de los evaluadores, sus argumentos están cercanos a las conclusiones propuestas. En el momento donde ella comienza a visualizar los números en los casos pequeños, luego, en el conjunto que le pide el problema, acudiendo a un método que ha visto previamente para obtenerlos, comienza a deducir cosas, lo cual, la lleva a concluir "que no se puede".

5.2.2 Participante B

De igual manera, nos encontramos con esta peculiaridad de plasmar la cuadrícula de 6×6, aunque no realiza ninguna otra cosa adicional con ella. Comienza a interpretar la información del problema, de acuerdo a las características de los cuadrados mágicos, con ello, externa que es análogo si toma las filas o las columnas.

La suma de los números en cada fila y en cada columna deben ser iguales. Pero nos pidemos concentrar ya sea solamente en las filas o solamente en las columnas para decir que la suma de los primeros 36 primos entre 6 debe ser la suma de cada columna o cada fila. Entonces los sumaremos:

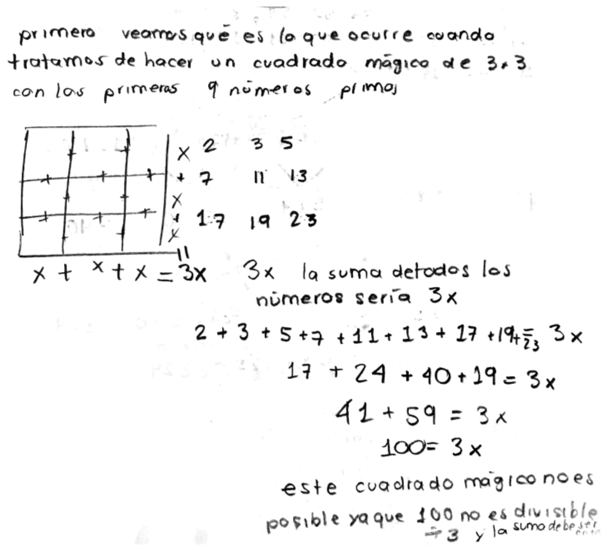
No menciona como lo hace, pero, escribe los primeros 36 primos y, como se indica en el modelo, procede a sumarlos para obtener a partir de ese valor, lo que equivale la suma en cada columna (o fila) al dividir entre 6. Tiene un fallo aritmético, cuando hace las operaciones.



Aún así, con el razonamiento que sigue, da un buen fundameto de una condición necesaria que no se cumple para formar el cuadrado con esos números. Ella sigue todo el camino esperado por el modelo propuesto, aunque muy apegado a las acciones, pues necesita hacer el listado de los números primos y la suma.

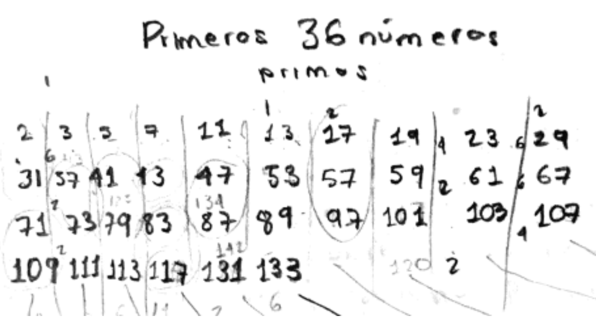
5.2.3 Participante C

Inicia con una muestra breve ensayo y error para el caso 3×3 y 5×5, sólo que coloca algunos números distintos que no aplican para este problema. De igual forma dibuja su espacio de 6×6. Luego, retoma la cuadrícula 3×3, para colocar los primeros 9 primos. Indica que, por un lado tanto en las columnas como en las filas deben sumar determinado valor que denota por x y que tiene que ser igual, es decir, indaga en esta situación particular conforme a lo que se requiere para formar dicho cuadrado mágico. Nota que la suma de todos los números es $3x$, entonces tiene por un lado que la suma es $3x$ y por el otro lado suma los números. Concluye que no es posible y justifica el por qué.

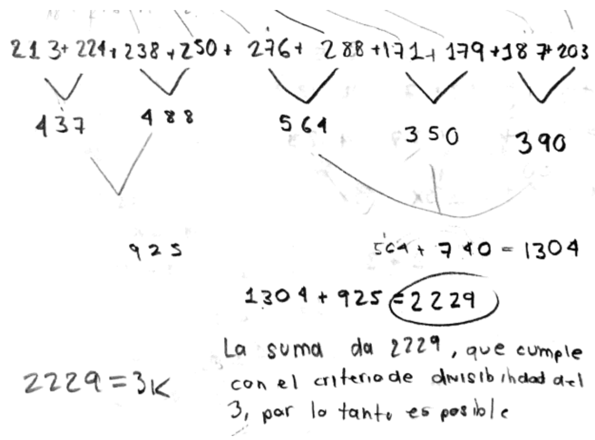


Sigue el mismo razonamiento para responder lo solicitado, sin embargo, afirma que si la suma es un valor de la forma $3k$ entonces es posible por el contrario no.

Enlista 36 números, dentro de los cuales 57, 111, 117 y 133 no son primos. Por lo tanto, la cantidad resultante es diferente a la que tendría que obtener realmente.



Al sumar los números la cifra resultante es divisible por 3 y eso hace que ella concluya que no es posible por la afirmación previa que ya había hecho.

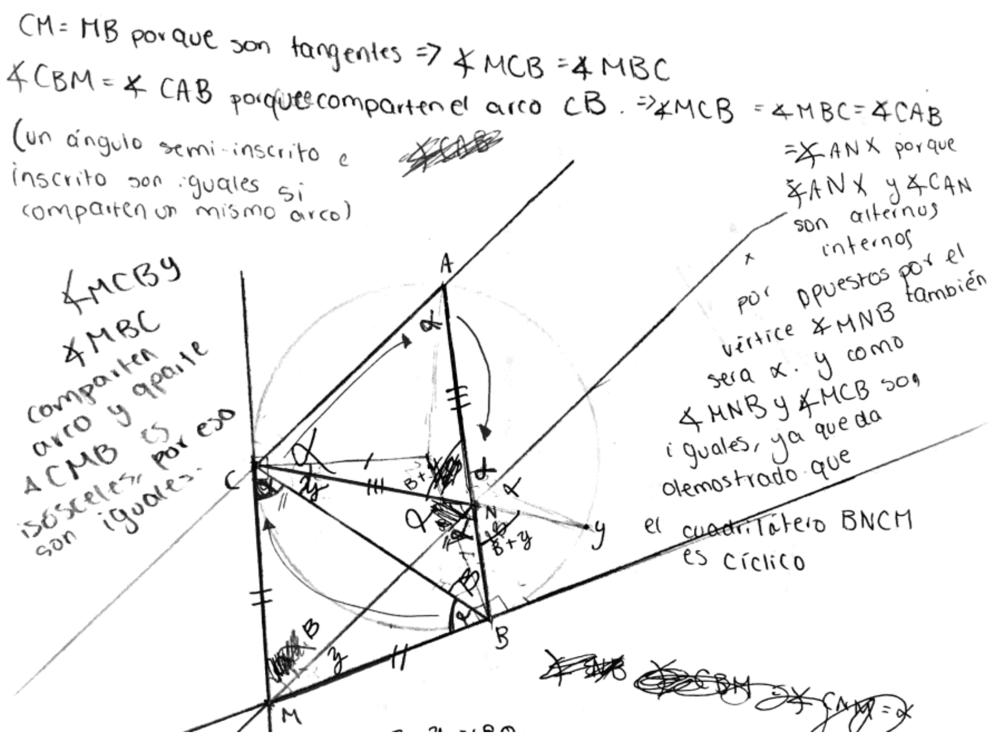


Sí, tiene un par de errores en el desenlace de su solución, pero la idea es buena, detrás de todos los elementos que evoca está en escencia el qué tengo y a dónde me dirijo con ello. Contiene aspectos que ya habiamos mencionado anteriormente en el modelo propuesto. El especular con una circunstancia similar, hace que ella proceda a realizar las mismas acciones además de saber si eso le permite adquirir algo relevante de ahí, que desde luego, sea significativo para el hecho real en cuestión. El hecho de tener que realizar el listado indica que sigue atada a las acciones y no ha interiorizado el proceso, de forma que lo pueda ver de manera general.

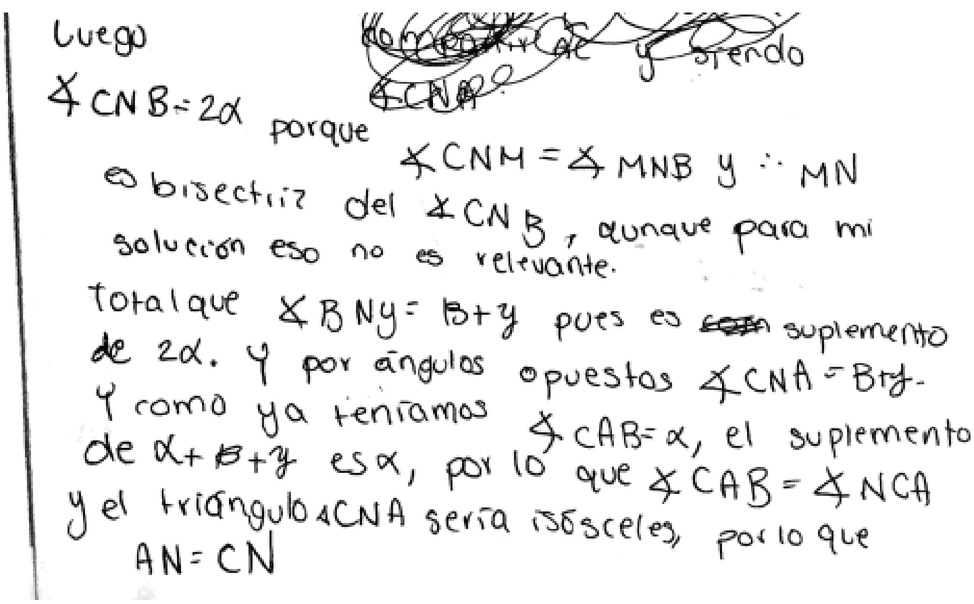
5.3 Problema 3

5.3.1 Participante A

Mediante su ilustración podemos observar que interpreta bien las indicaciones para obtener los trazos adecuados, hay toda una colección de marcas en su dibujo, de lo cual, se destaca que ha trazado una “ruta” en base a lo que ella necesita llegar a través del reconocimiento de las figuras. Es decir, marca las relaciones y las conecciones que hay entre lo que se encuentra dentro de su representación. Después procede a redactar, afirma un suceso y justifica haciendo presentes propiedades o características, inclusive las anota aparte. Para mostrar que el cuadrilátero es cíclico únicamente considera 3 cualidades y de ahí los argumentos consisten en seguir y enlazar las igualdades que obtiene de ellas.



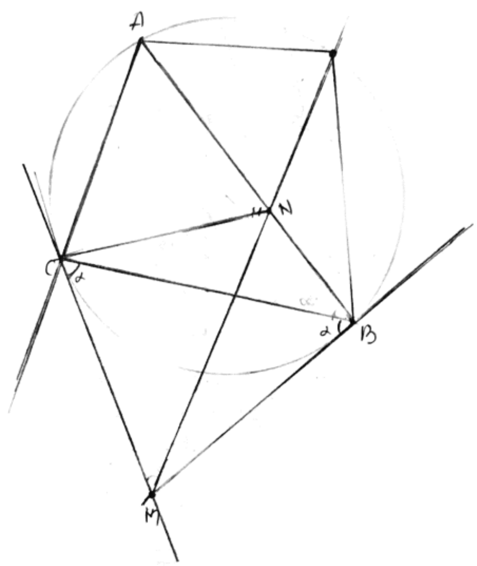
Para probar que $AN = CN$, hace uso de ángulos suplementarios, ángulos opuestos por el vértice, triángulo isósceles, están presentes y sabe cómo conectarlos para llegar a lo deseado.


Luego
∢CNB = 2α porque ∢CNM = ∢MNB y ∴ MN es bisectriz del ∢CNB, aunque para mi solución eso no es relevante.
Total que ∢BNy = β+y pues es suplemento de 2α. Y por ángulos opuestos ∢CNA = β+y.
Y como ya teníamos ∢CAB = α, el suplemento de α+β+y es α, por lo que ∢CAB = ∢NCA y el triángulo △CNA sería isósceles, por lo que AN = CN

Podemos decir que esta participante ha interiorizado los conceptos que utiliza, incluso logrado una concepción del objeto en este problema, su solución está muy ligada al modelo que se propone. La segunda parte es diferente a la propuesta por los diseñadores.

5.3.2 Participante B

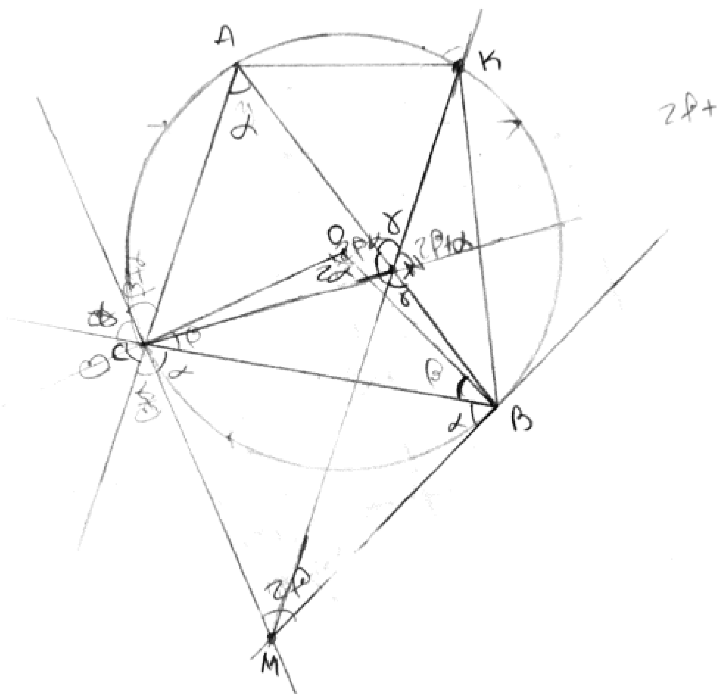
Como primera parte en el desenlace de su solución, está plasmado el dibujo resultante de los trazos que realizó, al seguir la descripción que da el problema.



A partir de ello, encontramos claramente en sus primeros argumentos, el reconocimiento de los elementos que están participando, los atributos de los mismos y como se relacionan, de hecho, identificado todo esto va determinando sus primeras conclusiones.

Si $\overline{BM}$ y $\overline{CM}$ son tangentes a B y C, entonces $\overline{BM} = \overline{CM}$, por lo que ΔBMC es un isósceles con $\Delta MBC = \Delta BCM$. $\overline{CB}$ y $\overline{MN}$ son diagonales del cuadrilátero BNCM, entonces suponiendo que fuera cíclico, como $\measuredangle MBC$ mide α, $\measuredangle MNC$ también debería medir α, y es lo que queremos demostrar. También debemos demostrar que, si $\overline{AN} = \overline{CN}$, entonces ΔANC es isósceles con $\measuredangle NCA = \measuredangle CAN$

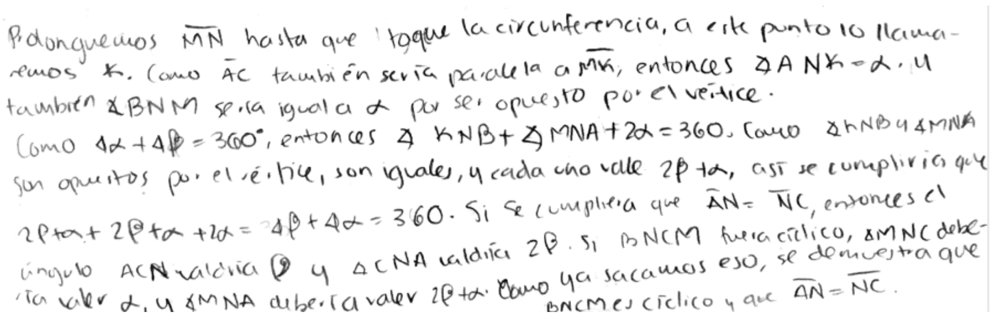
Una vez que tiene claro a donde se dirige, con las herramientas que ya ha acumulado introduce una especie de “familia de objetos”, por ejemplo, opta por ubicar el centro de la circunferencia e involucrar partes de ella para relacionar lo que lleva hasta ese momento con lo nuevo.



Al incluir 2 radios en la circunferencia vuelve a suceder este ciclo de observación e interrelación de propiedades.

Llamemos al centro de la circunferencia O. Si trazamos los radios desde O a B y C, obtendremos un ángulo de 90' grados en ∡M BO, también en ∡OCM. Llamemos a ∆CBO "β". Como el ∆ BOC está formado por dos radios, es isósceles, entonces ∡OCB también vale β.

Entonces, ∆ MBC + ∆ CBO = $\alpha+\beta=90°$, por lo que, si multiplicamos ambos lados por 2, tendríamos que $2\alpha+2\beta=120$. Entonces, en ∆ BOC tendríamos que ∡BOC = 2α. Como ∆ BAC es ángulo inscrito y abre el mismo arco que el ángulo central ∡BOC, entonces debe valer la mitad de este, es decir, debe valer α.

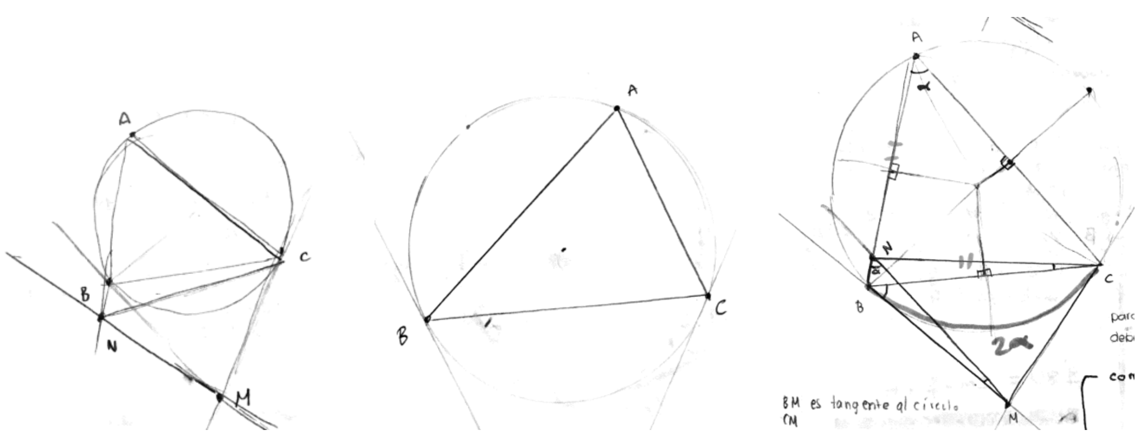

Prolonguemos $\overline{MN}$ hasta que toque la circunferencia, a este punto lo llamaremos K. Como $\overline{AC}$ también sería paralela a $\overline{MK}$, entonces $\measuredangle ANK = \alpha$. y también $\measuredangle BNM$ sería igual a α por ser opuesto por el vértice.
Como $4\alpha + 4\beta = 360°$, entonces $\measuredangle KNB + \measuredangle MNA + 2\alpha = 360$. Como $\measuredangle KNB$ y $\measuredangle MNA$ son opuestos por el vértice, son iguales, y cada uno vale $2\beta + \alpha$, así se cumpliría que $2\beta+\alpha + 2\beta+\alpha + 2\alpha = 4\beta + 4\alpha = 360$. Si se cumpliera que $\overline{AN} = \overline{NC}$, entonces el ángulo ACN valdría β y $\measuredangle CNA$ valdría 2β. Si $BNCM$ fuera cíclico, $\measuredangle MNC$ debería valer α, y $\measuredangle MNA$ debería valer $2\beta+\alpha$. Como ya sacamos eso, se demuestra que $BNCM$ es cíclico y que $\overline{AN} = \overline{NC}$.

Al finalizar, el segundo requisito por mostrar lo da muy directamente, no da ningún argumento extra.

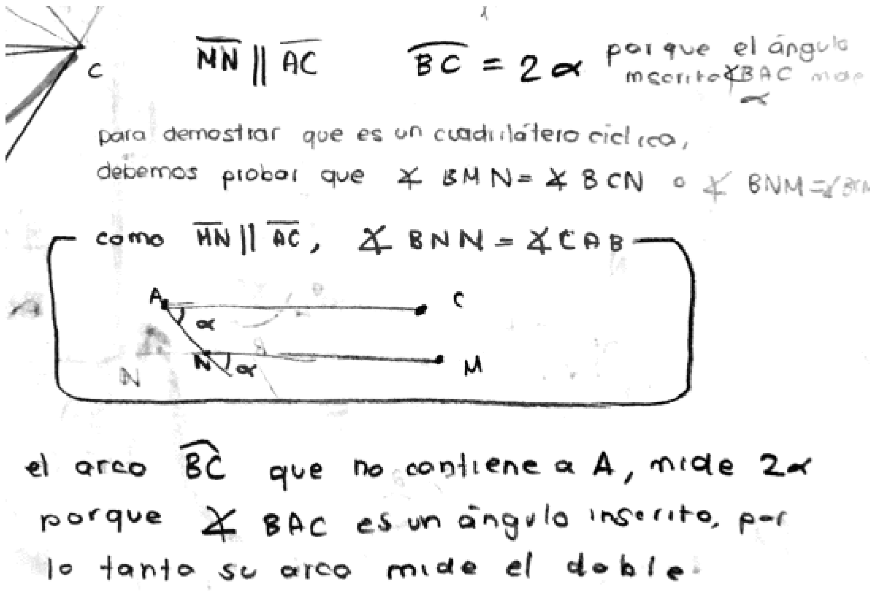
Resaltamos que esta participante, evoca recursos que son primordiales para dar solución a este problema, en cuanto a la estructura de su redacción y la manera en como lleva a cabo lo que hace, hay una relación muy estrecha con el modelo. Los argumentos al inicio son muy similares a los propuestos, pero el rumbo cambia considerablemente a partir de que decide incluir el centro de la circunferencia, haciendo que su respuesta sea más extensa.

5.3.3 Participante C

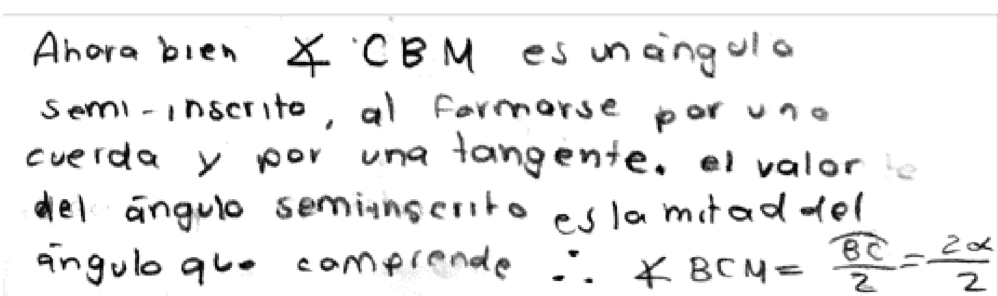
Tal como lo esperabamos nuevamente en este caso se presenta la fase de la parte visual a través de las representaciones de las figuras, se tienen 3 dibujos inicialmente, en uno de ellos podemos notar que hay una interpretación errónea ya que la paralela que ella marca no corta a AB como se indica, pero realiza la correción en la última ilustración.

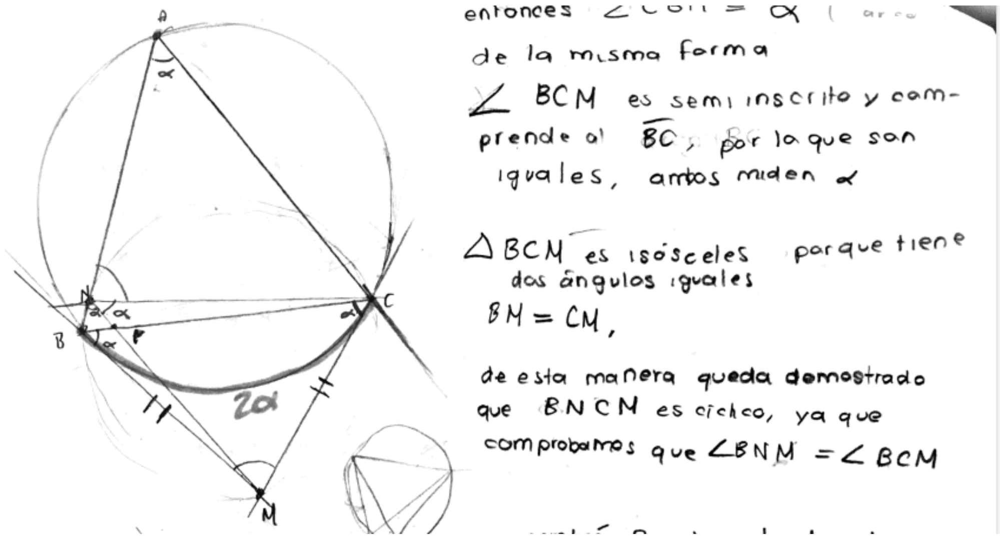


Ya definido su dibujo procede a indicar lo que debe ocurrir para solucionar el problema y lo describe en breve de manera explícita.

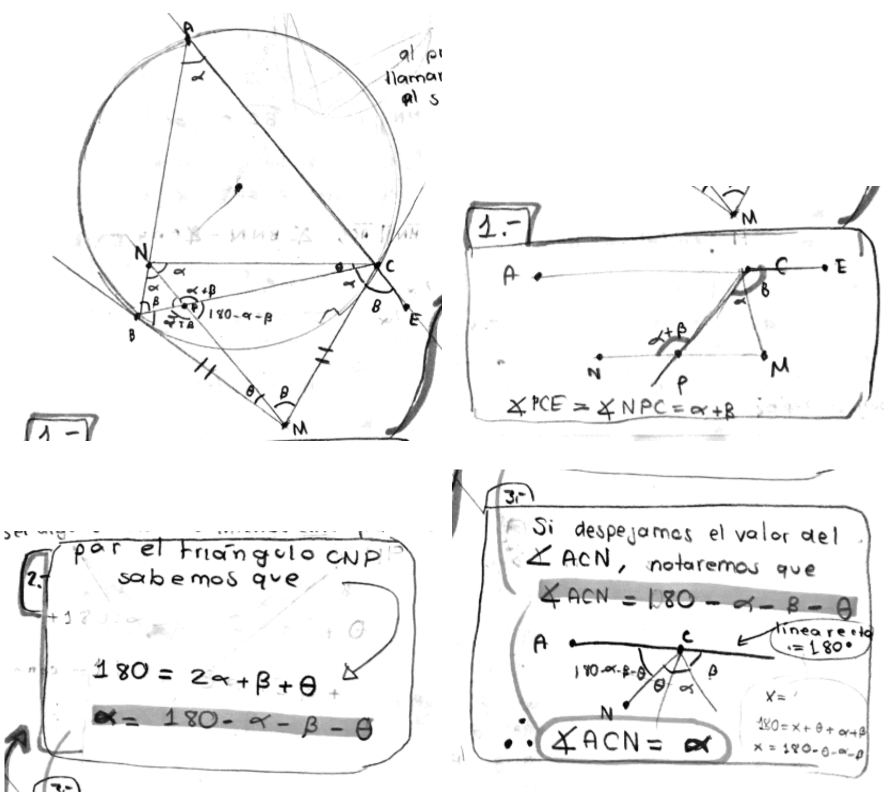


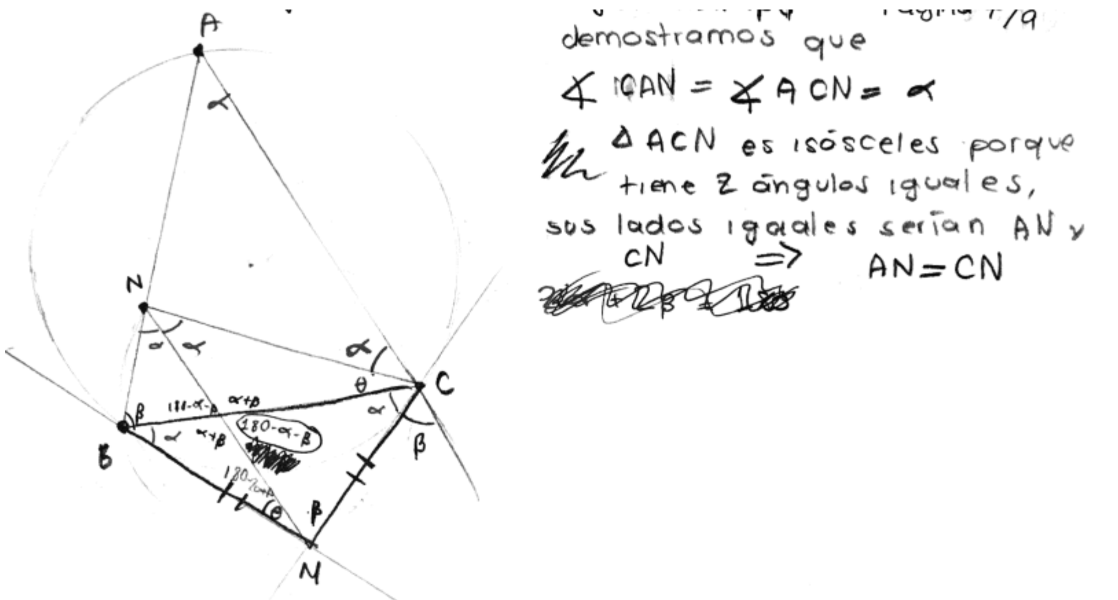
Sin duda está presente el reconocimiento de los componentes que están apareciendo en sus dibujos, así como sus características, de hecho las escribe, por ejemplo encierra una propiedad de ángulos entre paralelas y una transversal. No sólo eso, después de este fragmento vemos como trae una familia de objetos en la circunferencia, como los conecta para empezar a inferir más argumentos que la acerquen a lo deseado.





para el segundo requisito opta por trazar un camino detallado para mostrar que el triángulo ACN es isósceles y de ahí concluir lo que se busca. Nuevamente está la presencia de los dibujos, introduce nuevos elementos como el punto P, la prolongación de AC, el ángulo β, trabaja con la ecuación que plantea en el cuadro enumerado 2 y con ello vienen consecuentemente las pruebas deductivas.



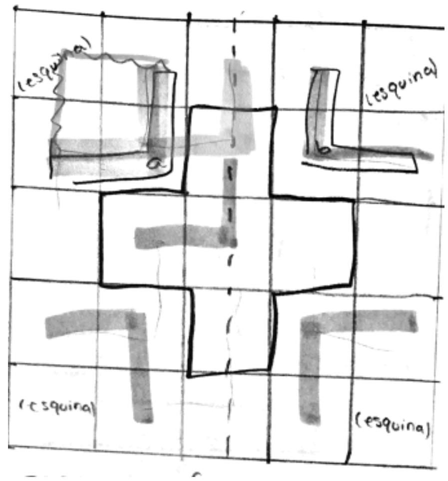


La trayectoria que sigue esta participante se ve reflejada en lo descrito en el modelo, están muy presentes elementos fundamentales así como sus propiedades, establece las relaciones entre ellas, entonces las ha interiorizado, a diferencia de la solución propuesta realiza más "labor", es decir, necesita tanto representarlo graficamente como justificarlo con la simbología dada. Podemos decir que tiene una concepción objeto. El manejo de la ecuación que está en los recuadros 2 y 3, nos indica su conocimiento algebraico.

5.4 Problema 4

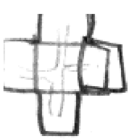
Se tomó la desición de omitir el problema 4 y el motivo viene de identificar que las respuestas de las 3 participantes mujeres se basan únicamente en acciones. En esa misma línea se ubican las justificaciones del resto de los participantes, estamos hablando de que no es algo que ocurre particularmente con la población que se está trabajando, sino, también algo que ocurre en los demás estudiantes que presentaron la prueba. Este suceso se evidencia con los fragmentos que se muestran a continuación, los cuales, fueron tomados de las respuestas de las participantes en estudio.

5.4.1 Participante A



...ilidad de poner otra ficha

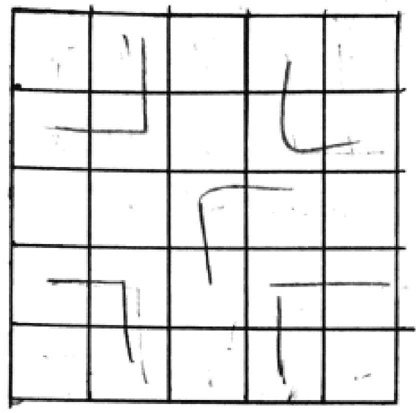
Entonces yo pongo las fichas así, habiendo 4 limitando las esquinas, y como el tablero es de un número impar de cuadritos, entre la ficha a y b (por poner un ejemplo de fichas que estén "inflexionadas") queda entre ellas una columna. Porque si el tablero fuera de 6x6 o en adelante, quedarían 2 o más casillas entre a y b, y podríamos poner más fichas. Aplico este truco, y al final queda una crucecita



así en la que puedo poner de 4 maneras diferentes otra ficha, y no importa cómo la ponga, pues poniéndola ocupo la ficha central que era la única que ~~quedaba~~ quedaba que unía en L 3 cuadritos. Entonces el mínimo número de L's a usarse son 5.

En su dibujo, obsérvese que la colocación de L que hace es única, las conclusiones que va dando se basan en esta forma. Debido a esto, la especie de cruz que le queda en el centro la lleva a un espacio más para colocar, resalta que “no importa cómo la ponga”, no deja de ser otra posibilidad al acomodar de esa manera. Llegando así a que el mínimo es 5.

5.4.2 Participante B

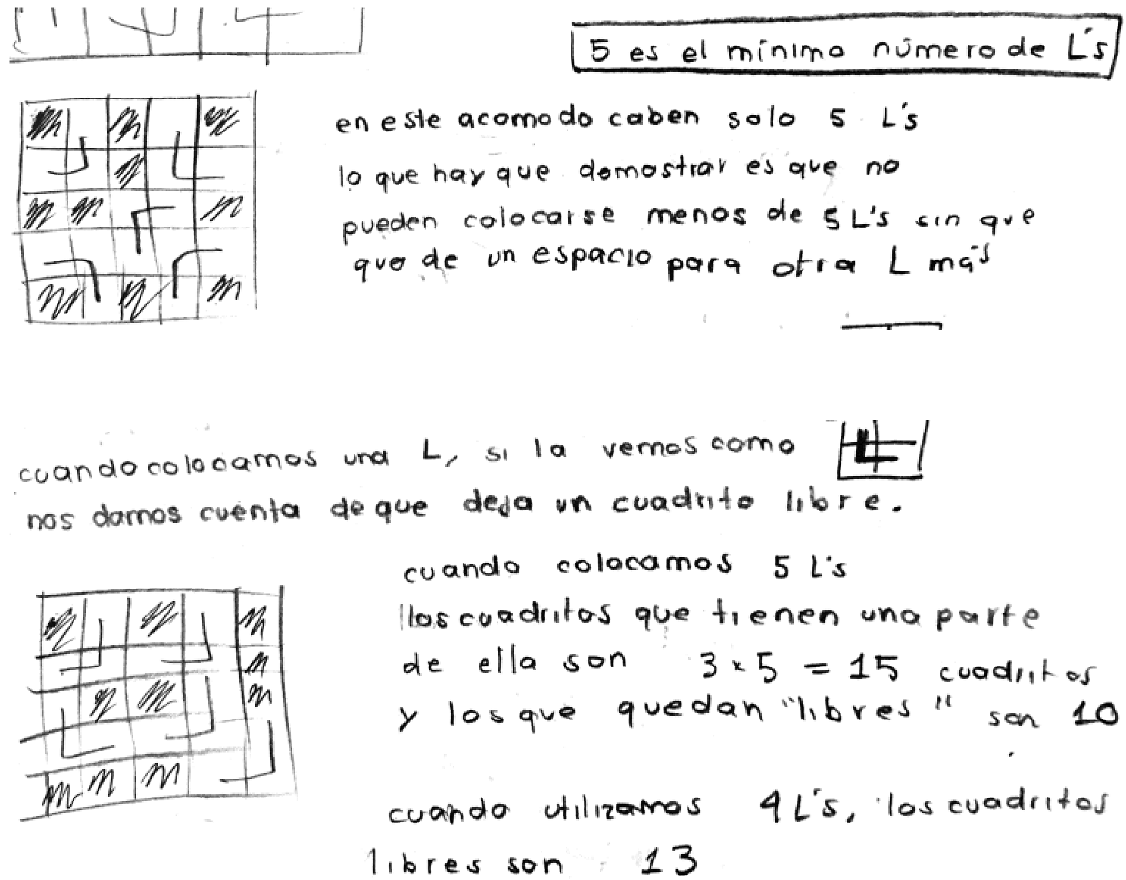


Entre cada L podemos dejar 1, o 2 cuadritos acomodados de forma vertical o horizontal, pero nunca juntos, porque si estuvieran juntos podría caber otra L ahí.
La mayor cantidad de L's que podrían caber en nuestra figura son 8 y nos sobraría un cuadrito.

Es conveniente que los cuadritos vacíos queden en las esquinas, para así dibujar una L a su alrededor, como en la figura. Nos quedaría una cruz en medio, y ahí se puede acomodar una sola L, de la forma que sea. En total, quedan 5 L's, que es el menor número, y nos sobran 10 cuadritos. No puede haber un número menor porque si lo hubiera, quedarían 13 cuadritos vacíos, y 12 rellenos, y no es posible que hayan más vacíos que rellenos porque en algún lugar tendría que poderse poner otra L.

Considera que es conveniente ocupar las esquinas, en su dibujo las coloca de tal manera que el cuadro que sobra no permita generar una L más. No obstante, queda el espacio en medio donde puede ubicar una más. De igual manera, la propuesta inicial para las L es una sola. De ahí concluye que el mínimo es 5.

5.4.3 Participante C



Primero dibuja un tablero de la dimensión indicada, en él se encuentran $8L$. Después, en los dos dibujos adicionales que genera hay $5L$. Afirma que el mínimo es 5. Nota que por cada L queda un cuadrito libre y esto influye en que si utiliza $4L$ quedan 13 cuadritos, es decir, esto la está llevando a determinar que podrá colocar una más en los cuadritos que sobran.

5.5 Valoración de las tres niñas

Dirigiéndonos al objetivo principal de estudio, las niñas, en la figura 2 se muestran los puntos que lograron cada una de ellas en los 4 problemas.

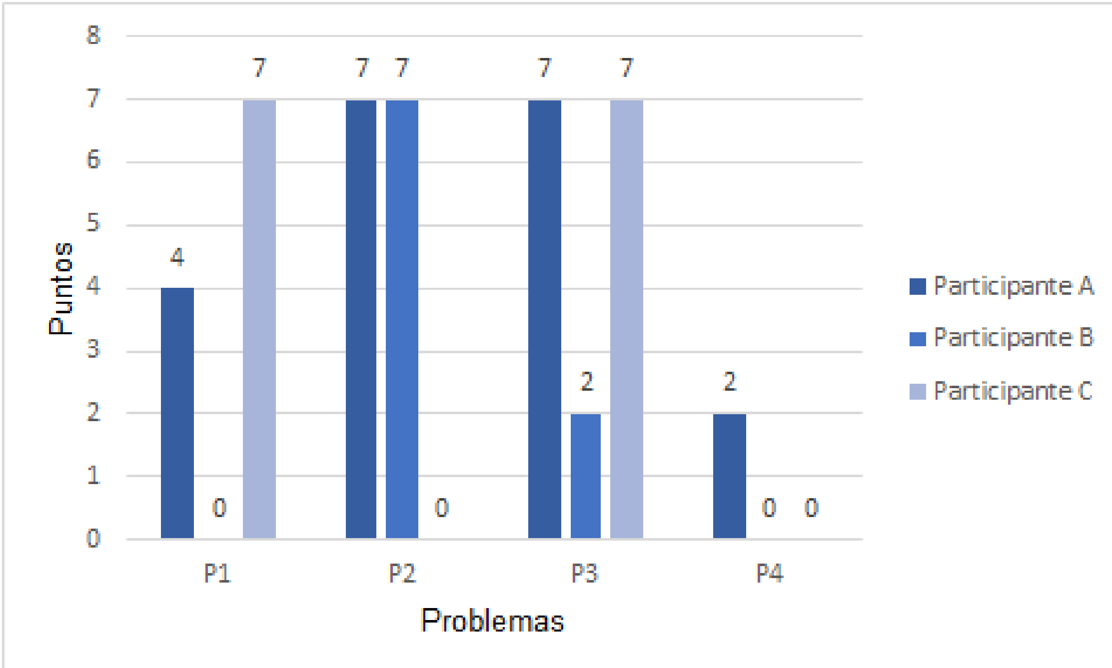


Figura 2: *Puntaje por problema de las 3 participantes mujeres*

Como podemos ver, los puntos que lograron en algunos casos para cada una de ellas son favorables a su participación, mientras que en otros no. En los casos donde no obtienen los 7 o nigún punto ¿qué es lo que sucede con la argumentación que sustenta su solución?, es decir, si no presenta un buen argumento significa que las estructuras que ha construido conforme a la experiencia previa no se han desarrollado adecuadamente para que tenga claridad en cuanto a los conceptos matemáticos que utiliza al trabajar con los problemas. Incluso, aunque la particpante C, problema uno, obtuviera los 7 puntos necesitó reafirmar su respuesta utilizando la lista como un último recurso.

6 Reflexiones finales

En gran parte de casos, en las respuestas generales en esta prueba, están plasmadas ya sean definiciones, resultados o algún otro recurso relevante para alguno de los cuatro problemas, sin embargo, esto muestra que posiblemente se han memorizado, es decir, puede llegar a estar presente pero no ha logrado construir de manera adecuada el concepto matemático, de tal manera que le sea posible usarlo adecuadamente. También soluciones que se estancaron en algún punto, no se intenta y otras donde se cambió el rumbo. Ahora bien, en las soluciones que proponen los estudiantes del selectivo 1 destacan los siguientes elementos que implementan:

Problema 1

- Saber si es relevante el orden o no.
- Casos particulares de múltiplos de 3.
- Cómo son los números con los que deben trabajar.
- Uso de símbolos matemáticos (pocos casos).
- Relación de congruencia módulo n (pocos casos).
- Dividen la situación en casos y van generando las listas.
- Coleccionar aquellos números de los dados, que forman un múltiplo de 3.
- Eligen trabajar principalmente con la primer o segunda cifra.
- Condiciones para que sea un número múltiplo de 3 (la más común es: la suma de sus dígitos debe ser múltiplo de 3).
- Criterios de divisibilidad.
- Formar una especie de casillas, algunos colocan únicamente números y otros usan letras arbitrarias.
- Uso de fórmulas.
- Generar lista por lista.

Problema 2

- Colocar los números en las casillas.
- Casos para cuadrados mágicos de orden menor.
- Suma de números pares e impares.
- Planteamiento de ecuaciones.

- Los números primos por ubicar en el cuadrado mágico son impares.
- Utilizar el hecho de que el número 2 es par.
- Escribir explicitamente, algunos o todos los números primos que aplican para este problema.
- Las sumas en filas y columnas.
- Método para obtener los números primos que necesita.
- Calcular el valor mágico.

Problema 3

- Dibujos y trazos (usualmente produce varias representaciones).
- Atributos del triángulo isósceles.
- Propiedades de arco.
- Ángulos entre paralelas.
- Planteamiento de ecuaciones.
- Ángulo central, inscrito y semi inscrito.
- Congruencia de triángulos.
- Ángulos opuestos por el vértice.

Problema 4

- Cantidad de cuadros necesarios para formar una L, de tal manera que no se pueda colocar una más.
- Operaciones como producto y cociente.
- Hacer variedad de representaciones (suceso frecuente).

Se revisaron las respuestas de los 35 estudiantes que presentaron esta prueba. En la siguiente gráfica se muestran los intentos generales de los estudiantes.

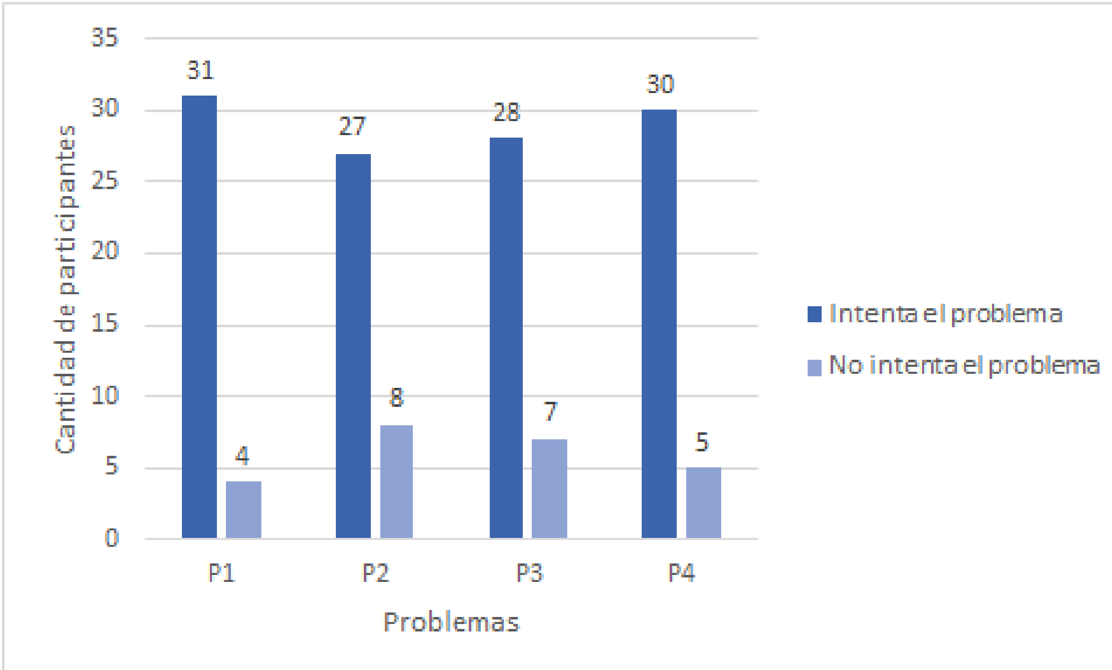


Figura 3: *Estudiantes que intentaron los problemas, selectivo 1.*

En la figura 3 se exhibe de manera general la cantidad de participantes que intentan o no los problemas. Desde luego, se tienen casos donde el estudiante intenta todos los problemas, algunos particularmente o ninguno. La palabra “intenta” hace referencia a que proporcionó al menos un argumento en su respuesta, por más mínimo que sea, pues esto permite identificar tanto las construcciones cognitivas que ha logrado y el conocimiento previo del individuo. En los cuatro problemas vemos que hay una cantidad considerable, en mayoría se adentran al problema, son muy pocos aquellos que no se involucran en alguno de ellos.

Dicha información lleva a cuestionarse ¿por qué no intenta el problema?, si están presentando en su respuesta al menos uno de los elementos de la lista que se menciona anteriormente (desde luego que se trate de un concepto matemático) ¿qué pasa en los problemas donde el número de estudiantes que no lo intentan es mayor? Luego, los puntos obtenidos son de 0 a 7 puntos, en la siguiente gráfica se exhibe cuántos estudiantes obtuvieron un puntaje entre ese rango para cada problema.

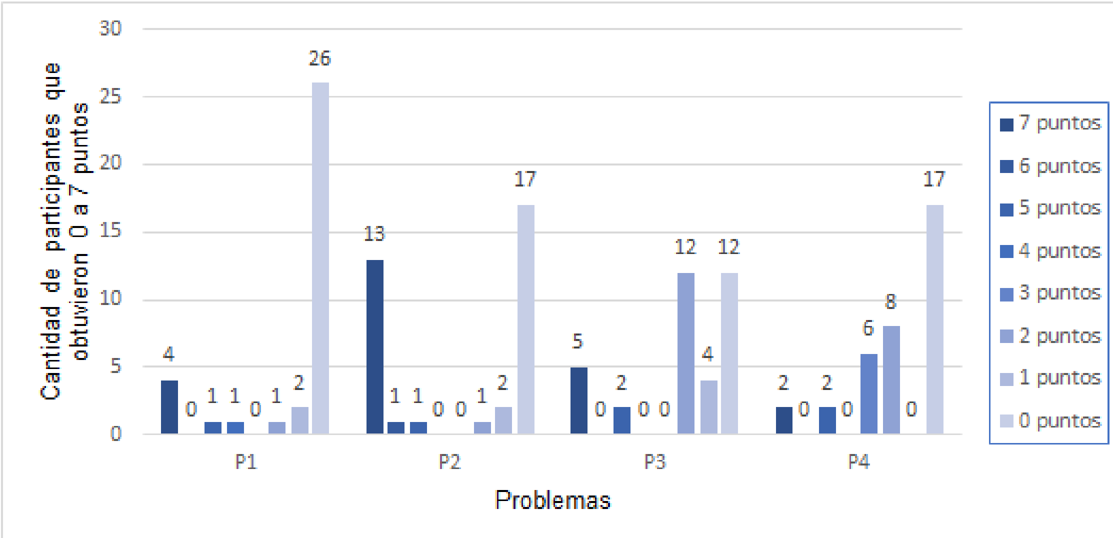


Figura 4: *Puntaje por problema de los participantes, selectivo 1.*

Al relacionar la figura 3 con la figura 4 obsérvese que el problema 1 fue abordado por más jóvenes, los puntos logrados son muy bajos.

Por tanto, volviendo a la gráfica anterior, si más de la mitad de participantes abordan los problemas propuestos en dicha evaluación, ¿qué factores son causa del bajo puntaje? Se incluyen estos datos con el único fin de mostrar que es una cuestión que ocurre en general, si bien, la participación de niñas es baja, mediante este trabajo se ha evidenciado lo que ocurre en sus soluciones. Es decir, en cuanto al resto de participantes, de acuerdo a los puntos obtenidos, probablemente las estructuras que poseen no son las adecuadas.

Recordando la pregunta de investigación ¿en qué parte de ciclo de construcción de una idea matemática, siguiendo la teoría APOE, es que se encuentra la respuesta a los problemas matemáticos que dan las jovenes en estudio? de acuerdo a lo que desarrollan las niñas vemos que las estructuras previas que han construido con base en su experiencia con las nociones matemáticas que utilizan en sus respuestas, en algunos casos, donde los puntos son bajos, sus concepciones son limitadas para un panorama de mejor entendimiento y eso las lleva en este caso a realizar únicamente acciones que no les permiten llevar a cabo una solución que sea exitosa. Por ejemplo, en el problema 1 que consiste en un problema de combinatoria, hay intentos de contar al tratar de hacer directamente las listas (aunque sepa que el orden importa y no se pueden repetir, el número de situaciones que se pueden dar le puede parecer confuso), usar un método que no se ajusta al caso en cuestión, usar una fórmula, es decir, están en su mente (puede que lo haya memorizado), pero, sólo actúa sobre él, en un determinado momento lo abandona. Entonces, el esquema que ya había construido de ese concepto no es del todo útil. Suceso que es notorio de igual manera en los problemas restantes donde los puntos no son tan favorables para su participación.

Las estructuras que ya se han desarrollado juegan un papel muy importante al momento de trabajar con este tipo de situaciones, en el problema 3 que consiste en un problema de geometría, respecto a las dos participantes que obtienen los 7 puntos se puede apreciar, aún cuando las soluciones son distintas, que logran tener una concepción objeto de los conceptos, no sólo relacionan los elementos que están en juego, también sus atributos y propiedades para llegar a lo deseado.

Con este trabajo mostramos evidencia de la importancia de las concepciones de los conceptos matemáticos que utilizan los estudiantes en sus respuestas ante problemas que se abordan en una Olimpiada de Matemáticas. Pues su desempeño dependerá en gran medida de ello.

Referencias

ANUIES. (2024). *Anuario educación superior-técnico superior, licenciatura y posgrado 2023-2024.* México: Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior (ANUIES). (`http://www.anuies.mx/informacion-y-servicios/informacion-estadistica-de-educacion-superior/anuario-estadistico-de-educacion-superior`)

Arnon, y et al. (2014). *Apos theory a framework for research and curriculum development in mathematics education.* Springer.

Barrera, M. F., y Reyes, R. A. (2015). La teoría de van hiele: Niveles de pensamiento geométrico. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, *3*(5).

Bulajich, R. (2011). Cuadrados mágicos. *TZALOA. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas*(1).

Carranza, B. (2016). *Caracterización de la relación entre género y desempeño académico en estudiantes de álgebra abstracta: Estudio de casos* (Tesis de licenciatura no publicada). Escuela Superior de Física y Matemáticas-IPN, México.

Comes, M., y Comes, R. (2009). Los cuadrados mágicos matemáticos en al-andalus. el tratado de azarquiel. *Al-Qanṭara*, *30*(1), 137–169.

Dubinsky, E. (1996). Aplicaciones de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, *8*(3), 24–41.

Ellison, G., y Swanson, A. (2010). The gender gap in secondary school mathematics at high achievement levels: Evidence from the american mathematics competitions. *Journal of Economic Perspectives*, *24*(2), 109–128.

Espinosa, G. C. G. (2009). Estudio de las interacciones en el aula desde una perspectiva de género. *Géneroos*, *16*(6), 71–86.

Farfán, M. R. M., y Simón, R. M. G. (2018). El desarrollo del talento de las mujeres en matemáticas desde la socioepistemología y la perspectiva de género: un estudio de biografías. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(62), 946–966.

Farfán, M. R. M., y Simón, R. M. G. (2016). *La construcción social del conocimiento. el caso de género y matemáticas.* Barcelona: Gedisa.

García, d. L. M. A. (1994). *Élites discriminadas: sobre el poder de las mujeres.* Anthropos Editorial.

Gómez, C. I. M. (2010). Tendencias actuales en investigación en matemáticas y afecto. En *Investigación en educación matemática xiv* (pp. 121–140).

González, J. R. M. (2016). Mujeres matemáticas: Análisis del caso de méxico. *Cuestiones de género de la igualdad y la diferencia*, *1*(1), 113–135.

Guevara, R. E. S., y Flores, C. M. G. (2018). Educación científica de las niñas, vocaciones científicas e identidades femeninas. experiencias de estudiantes universitarias. *Actualidades Investigativas en Educación*, *18*(2), 1–31.

Iglesias, H. C. S. (2019). Construcción del concepto de función desde la teoría apoe: La coordinación entre representaciones como apoyo. En *Xv conferencia interamericana de educación matemática.*

Kú, D., Trigueros, M., y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría apoe. *Educación matemática*, *20*(2), 65–89.

Lee, K. H., y Sriraman, B. (2012). Gifted girls and nonmathematical aspirations: A longitudinal case study of two gifted korean girls. *Gifted Child Quarterly*, *56*(1), 3–14.

Martínez E., J. R. (2004). Los cuadrados mágicos en el renacimiento. matemáticas y magia natural en el de occulta philosophia de agrippa. *Educación matemática*, *16*(2), 77–92.

Martínez, L. (2011). Estrategias básicas de conteo. *TZALOA. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas*, *2*(1), 1–14.

MaTeTaM. (2024). *Matemáticas en tamaulipas.* (`https://www.matetam.com/`)

Mujeres con ciencia. (2015). *Ecos del pasado… luces del presente. nuestras primeras matemáticas.* (`https://mujeresconciencia.com/2015/05/11/ecos-del-pasado-luces-del-presente-nuestras-primeras-matematicas/`)

OMM. (2024). *Concursos estatales.* (`https://www.ommenlinea.org/actividades/concursos/concursos-estatales/`)

OMM, G. (2003). *Compilación de problemas de olimpiada.* (`http://www.ommchiapas.unach.mx/attachments/article/24/Compilacion.pdf`)

Piaget, J. (1976). *To understand is to invent.* New York: Penguin Books.

Roa, R., Batanero, C., Godino, J. D., y Cañizares, M. J. (1997). Estrategias en la resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. *Epsilon*, *36*, 433–446.

Roa-Fuentes, S., y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *13*(1), 89–112.

Schukajlow, S., Rakoczy, K., y Pekrun, R. (2023). Emotions and motivation in mathematics education: Theoretical considerations and empirical contributions. *ZDM*, 249–267.

Simental, E. S., Mendoza, T. N. D., y Márquez, R. M. F. (2011). Logro educativo: Prueba enlace méxico 2008. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 79.

Simón, M. G., y Miguel, M. R. (2021). Un proyecto de intervención para el desarrollo del talento en matemáticas para niñas con edades entre 12 y 16 años. *Educação Matemática Debate*, *5*(11), 1–26.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación matemática*, *17*(1), 5–31.

Trigueros, M. (2014). Vínculo entre la modelación y el uso de representaciones en la comprensión de los conceptos de ecuación diferencial de primer orden y de solución. *Educación Matemática*, 207–226.

Trigueros, M. (2020). *¿qué es la teoría apoe?* (`https://www.youtube.com/watch?v=32eiqnh4edk&t=17s`)

Ursini, S., y Ramírez, M. (2017). Equidad, género y matemáticas en la escuela mexicana. *Revista Colombiana de Educación*(73), 213–234.

Vargas, G. V., y Araya, R. G. (2013). El modelo de van hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, *27*(1), 74–94.

Villabona Millán, D. P., y Roa Fuentes, S. (2016). Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría apoe. *Educación matemática*, *28*(2), 119–150.

Apéndice

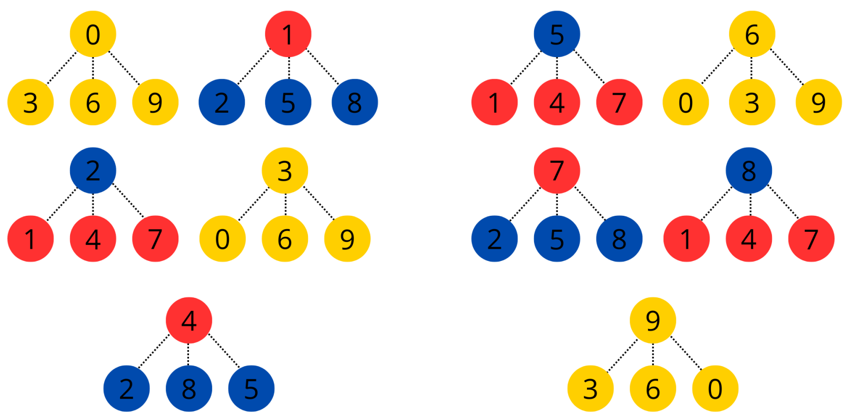
Soluciones propuestas a los problemas del primer examen selectivo 2019 Tamaulipas.

A Problema 1

¿De cuántas maneras se pueden distribuir los números enteros del 0 al 9 para hacer una lista de 5 números en orden de menor a mayor, si cada uno de los números es múltiplo de 3 y consta de dos dígitos?

Solución 1

Observe que se descartan las opciones para el 0 en las decenas. Para cada uno de los números por distribuir, veamos con cuáles se pueden relacionar en pareja para obtener un múltiplo de 3.



A partir de las relaciones posibles, note que los números en círculo amarillo $0, 3, 6, 9$ sólo se relacionan entre sí, mientras que los números en círculo rojo se pueden unir con los que están en círculo azul.
Como consta de dos dígitos, en el caso para los números en amarillo, hay 6 formas posibles para la lista. Luego, consideremos los números en rojo, si tomamos el número 1, hay 3 parejas distintas y puedo intercambiar sus dígitos de posición, entonces son $3 \cdot 2 = 6$ parejas, para el 4 únicamente tiene 2 posibles números para formar la pareja, de igual manera es posible cambiar los dígitos de posición, por lo cual hay $2 \cdot 2 = 4$ parejas, finalmente el número 7 sólo tiene una posibilidad, que puede cambiarse de posición, es decir, hay 2 parejas, entonces se tienen $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ números de 2 dígitos. Como la lista consta de 5 números en orden de menor a mayor, hay una única forma de colocarlos, por lo tanto hay $6 \cdot 48 = 288$ maneras.

Solución 2 (Buscar manualmente todas las listas posibles)

Dado que, cada uno de los números enteros a colocar en la lista debe ser múltiplo de 3 y consta de dos números, descartamos los casos donde el 0 se encuentra en las decenas. Luego, por el algoritmo de la división obtenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{ll} 0 = 3 \cdot 0 + 0 & 1 = 3 \cdot 0 + 1 \\ 2 = 3 \cdot 0 + 2 & 3 = 3 \cdot 1 + 0 \\ 4 = 3 \cdot 1 + 1 & 5 = 3 \cdot 1 + 2 \\ 6 = 3 \cdot 2 + 0 & 7 = 3 \cdot 2 + 1 \\ 8 = 3 \cdot 2 + 2 & 9 = 3 \cdot 3 + 0 \end{array}$$

por lo cual, de los 10 números por distribuir, 0, 3, 6, 9 son múltiplos de 3 pues el residuo es 0, de hecho, los números compuestos por dos de ellos será también múltiplo de 3.

$$\begin{array}{lll} 30 = 3 \cdot 10 + 0 & 69 = 3 \cdot 23 + 0 & 96 = 3 \cdot 32 + 0 \\ 39 = 3 \cdot 13 + 0 & 93 = 3 \cdot 31 + 0 & 90 = 3 \cdot 30 + 0 \\ 63 = 3 \cdot 21 + 0 & 36 = 3 \cdot 12 + 0 & 60 = 3 \cdot 20 + 0 \end{array}$$

Con 0, 3, 6, 9 obtenemos 2 candidatos para la lista, las posibles combinaciones son:

30	69
30	96
60	39
60	93
90	63
90	36

Luego, los números donde el residuo es 1 o 2, no es posible agruparlo con otro número que tenga el mismo residuo, porque el residuo del nuevo número formado por ambos dígitos no es 0, por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} 41 = 3 \cdot 13 + 2 & 17 = 3 \cdot 5 + 2 \\ 28 = 3 \cdot 9 + 1 & 85 = 3 \cdot 28 + 1 \end{array}$$

pero al agrupar los números con residuo distinto, si obtenemos múltiplos de 3

$$
\begin{array}{lll}
21 = 3 \cdot 7 + 0 & 24 = 3 \cdot 8 + 0 & 27 = 3 \cdot 9 + 0 \\
12 = 3 \cdot 6 + 0 & 42 = 3 \cdot 12 + 0 & 72 = 3 \cdot 24 + 0 \\
15 = 3 \cdot 5 + 0 & 54 = 3 \cdot 18 + 0 & 57 = 3 \cdot 9 + 0 \\
51 = 3 \cdot 17 + 0 & 45 = 3 \cdot 15 + 0 & 75 = 3 \cdot 25 + 0 \\
81 = 3 \cdot 27 + 0 & 84 = 3 \cdot 28 + 0 & 87 = 3 \cdot 29 + 0 \\
18 = 3 \cdot 6 + 0 & 48 = 3 \cdot 16 + 0 & 78 = 3 \cdot 26 + 0
\end{array}
$$

de esto, procederemos a encontrar las posibles diferentes ternas para completar el listado deseado. Considerando que se ordenan de menor a mayor, tomamos la cifra más pequeña obtenida y anotamos las variaciones para los 2 restantes en la terna. Repetimos el mismo procedimiento para los números 15, 18, 21, 24, 27, 42, 45, 48, 51 y 54.

12	54	87	15	48	72	18	45	72	21	45	78
12	45	87	15	42	78	18	42	75	21	45	87
12	45	78	15	27	84	18	54	72	21	75	84
12	48	75	15	42	87	18	42	57	21	75	48
12	75	84	15	24	87	18	27	45	21	78	54
12	48	57	15	24	78	18	27	54	21	54	87
12	57	84	15	72	84	18	24	75	21	57	84
12	54	78	15	27	48	18	24	57	21	48	57
24	75	81	27	51	84	42	75	81	45	72	81
24	57	81	27	54	81	42	51	78	48	51	72
24	51	87	27	51	48	42	57	81	51	72	84
24	51	78	27	45	81	42	51	87	54	72	81

48 ternas obtenidas. Finalmente, hay una única forma de ordenarlos, cada una de las 6 primeras combinaciones encontradas podemos asociarlas con cada una de las 48 combinaciones.

1	12	30	54	69	87	17	12	30	45	69	87	33	12	30	45	69	78
2	12	30	48	69	75	18	12	30	69	75	84	34	12	30	48	69	57
3	12	30	57	69	84	19	12	30	54	69	78	35	15	30	48	69	72
4	15	30	42	69	78	20	15	27	30	69	84	36	15	30	42	69	87
5	15	24	30	69	87	21	15	24	30	69	78	37	15	30	69	72	84
6	15	27	30	48	69	22	18	30	45	69	72	38	18	30	42	69	75
7	18	30	54	69	72	23	18	30	42	57	69	39	18	27	30	45	69
8	18	27	30	54	69	24	18	24	30	69	75	40	18	24	30	57	69
9	21	30	45	69	78	25	21	30	45	69	87	41	21	30	69	75	84
10	21	30	48	69	75	26	21	30	54	69	78	42	21	30	54	69	87
11	21	30	57	69	84	27	21	30	48	57	69	43	24	30	69	75	81
12	24	30	57	69	81	28	24	30	51	69	87	44	24	30	51	69	78
13	27	30	51	69	84	29	27	30	54	69	81	45	27	30	48	51	69
14	27	30	45	69	81	30	30	42	69	75	81	46	30	42	51	69	78
15	30	42	57	69	81	31	30	42	51	69	87	47	30	45	69	72	81
16	30	48	51	69	72	32	30	51	69	72	84	48	30	54	69	72	81

49	12	30	54	87	96	65	12	30	45	87	96	81	12	30	45	78	96
50	12	30	48	75	96	66	12	30	75	84	96	82	12	30	48	57	96
51	12	30	57	84	96	67	12	30	54	78	96	83	15	30	48	72	96
52	15	30	42	78	96	68	15	27	30	84	69	84	15	30	42	87	96
53	15	24	30	87	96	69	15	24	30	78	96	85	15	30	72	84	96
54	15	27	30	48	96	70	18	30	45	72	96	86	18	30	42	75	96
55	18	30	54	72	96	71	18	30	42	57	96	87	18	27	30	45	96
56	18	27	30	54	96	72	18	24	30	75	96	88	18	24	30	57	96
57	21	30	45	78	96	73	21	30	45	87	96	89	21	30	75	84	96
58	21	30	48	75	96	74	21	30	54	78	96	90	21	30	54	87	96
59	21	30	57	84	96	75	21	30	48	57	96	91	24	30	75	81	96
60	24	30	57	81	96	76	24	30	51	87	96	92	24	30	51	78	96
61	27	30	51	84	96	77	27	30	54	81	96	93	27	30	48	51	96
62	27	30	45	81	96	78	30	42	75	81	96	94	30	42	51	78	96
63	30	42	57	81	96	79	30	42	51	87	96	95	30	45	72	81	96
64	30	48	51	72	96	80	30	51	72	84	96	96	30	54	72	81	96

97	12	39	54	60	87	113	12	39	45	60	87	129	12	39	45	60	78
98	12	39	48	60	75	114	12	39	60	75	84	130	12	39	48	57	60
99	12	39	57	60	84	115	12	39	54	60	78	131	15	39	48	60	72
100	15	39	42	60	78	116	15	27	39	60	84	132	15	39	42	60	87
101	15	24	39	60	87	117	15	24	39	60	78	133	15	39	60	72	84
102	15	27	39	48	60	118	18	39	45	60	72	134	18	39	42	60	75
103	18	39	54	60	72	119	18	39	42	57	60	135	18	27	39	45	60
104	18	27	39	54	60	120	18	24	39	60	75	136	18	24	39	57	60
105	21	39	45	60	78	121	21	39	45	60	87	137	21	39	60	75	84
106	21	39	48	60	75	122	21	39	54	60	78	138	21	39	54	60	87
107	21	39	57	60	84	123	21	39	48	57	60	139	24	39	60	75	81
108	24	39	57	60	81	124	24	39	51	60	87	140	24	39	51	60	78
109	27	39	51	60	84	125	27	39	54	60	81	141	27	39	48	51	60
110	27	39	45	60	81	126	39	42	60	75	81	142	39	42	51	60	78
111	39	42	57	60	81	127	39	42	51	60	87	143	39	45	60	72	81
112	39	48	51	60	72	128	39	51	60	72	84	144	39	54	60	72	81

145	12	54	60	87	93	161	12	45	60	87	93	177	12	45	60	78	93
146	12	48	60	75	93	162	12	60	75	84	93	178	12	48	57	60	93
147	12	57	60	84	93	163	12	54	60	78	93	179	15	48	60	72	93
148	15	42	60	78	93	164	15	27	60	84	93	180	15	42	60	87	93
149	15	24	60	87	93	165	15	24	60	78	93	181	15	60	72	84	93
150	15	27	48	60	93	166	18	45	60	72	93	182	18	42	60	75	93
151	18	54	60	72	93	167	18	42	57	60	93	183	18	27	45	60	93
152	18	27	54	60	93	168	18	24	60	75	93	184	18	24	57	60	93
153	21	45	60	78	93	169	21	45	60	87	93	185	21	60	75	84	93
154	21	48	60	75	93	170	21	54	60	78	93	186	21	54	60	87	93
155	21	57	60	84	93	171	21	48	57	60	93	187	24	60	75	81	93
156	24	57	60	81	93	172	24	51	60	87	93	188	24	51	60	78	93
157	27	51	60	84	93	173	27	54	60	81	93	189	27	48	51	60	93
158	27	45	60	81	93	174	42	60	75	81	93	190	42	51	60	78	93
159	42	57	60	81	93	175	42	51	60	87	93	191	45	60	72	81	93
160	48	51	60	72	93	176	51	60	72	84	93	192	54	60	72	81	93

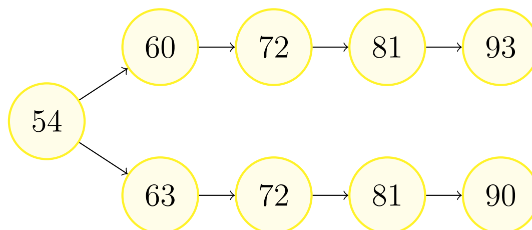
193	12	54	63	87	90	209	12	45	63	87	90	225	12	45	63	78	90
194	12	48	63	75	90	210	12	63	75	84	90	226	12	48	57	63	90
195	12	57	63	84	90	211	12	54	63	78	90	227	15	48	63	72	90
196	15	42	63	78	90	212	15	27	63	84	90	228	15	42	63	87	90
197	15	24	63	87	90	213	15	24	63	78	90	229	15	63	72	84	90
198	15	27	48	63	90	214	18	45	63	72	90	230	18	42	63	75	90
199	18	54	63	72	90	215	18	42	57	63	90	231	18	27	45	63	90
200	18	27	54	63	90	216	18	24	63	75	90	232	18	24	57	63	90
201	21	45	63	78	90	217	21	45	63	87	90	233	21	63	75	84	90
202	21	48	63	75	90	218	21	54	63	78	90	234	21	54	63	87	90
203	21	57	63	84	90	219	21	48	57	63	90	235	24	63	75	81	90
204	24	57	63	81	90	220	24	51	63	87	90	236	24	51	63	78	90
205	27	51	63	84	90	221	27	54	63	81	90	237	27	48	51	63	90
206	27	45	63	81	90	222	42	63	75	81	90	238	42	51	63	78	90
207	42	57	63	81	90	223	42	51	63	87	90	239	45	63	72	81	90
208	48	51	63	72	90	224	51	63	72	84	90	240	54	63	72	81	90

241	12	36	54	87	90	257	12	36	45	87	90	273	12	36	45	78	90
242	12	36	48	75	90	258	12	36	75	84	90	274	12	36	48	57	90
243	12	36	57	84	90	259	12	36	54	78	90	275	15	36	48	72	90
244	15	36	42	78	90	260	15	27	36	84	90	276	15	36	42	87	90
245	15	24	36	87	90	261	15	24	36	78	90	277	15	36	72	84	90
246	15	27	36	48	90	262	18	36	45	72	90	278	18	36	42	75	90
247	18	36	54	72	90	263	18	36	42	57	90	279	18	27	36	45	90
248	18	27	36	54	90	264	18	24	36	75	90	280	18	24	36	57	90
249	21	36	45	78	90	265	21	36	45	87	90	281	21	36	75	84	90
250	21	36	48	75	90	266	21	36	54	78	90	282	21	36	54	87	90
251	21	36	57	84	90	267	21	36	48	57	90	283	24	36	75	81	90
252	24	36	57	81	90	268	24	36	51	87	90	284	24	36	51	78	90
253	27	36	51	84	90	269	27	36	54	81	90	285	27	36	48	51	90
254	27	36	45	81	90	270	36	42	75	81	90	286	36	42	51	78	90
255	42	36	57	81	90	271	36	42	51	87	90	287	36	45	72	81	90
256	48	36	51	72	90	272	36	51	72	84	90	288	36	54	72	81	90

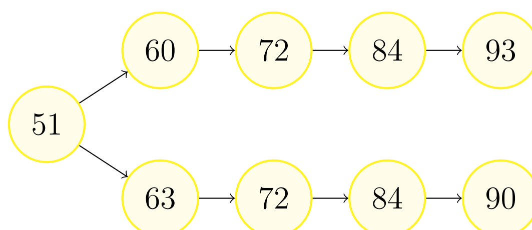
Solución 3 (Diagrama de árbol)

Se consideraron los múltiplos de 3 de dos cifras más grandes posibles, de tal manera que la lista de 5 números pudiese formarse, por ejemplo, el número 81 no es elegible para iniciar la lista porque en las posiciones restantes ya sólo estaría disponible uno de los siguientes números 90, 93, 96, por lo cual la lista no estaría completa. Sucesivamente hasta los números más pequeños que son candidatos en la primer posición como lo es el número 12. Entonces para los números : 54, 51, 48, ... , se obtuvo un diagrama de árbol, por lo tanto la solución es el resultado de la unión de las ramificaciones de cada caso. Cada rama fue determinada de acuerdo a las combinaciones posibles entre los candidatos sin perder de vista la importancia del orden en este problema.

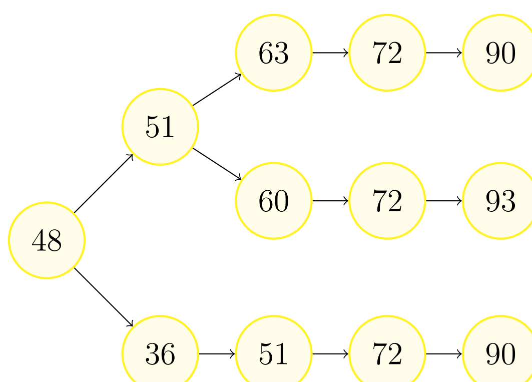
Al iniciar la lista con el número 54, resultan 2 caminos como se muestra en las ramificaciones del siguiente diagrama. Sea d_i el número de ramas que determinan una lista, $i = 1, 2, \ldots, 14$. Para los números menores que se pueden ubicar al inicio de la lista, se tienen más ramas. Se omitieron los diagramas correspondientes para estos números ya que el diseño es extenso.



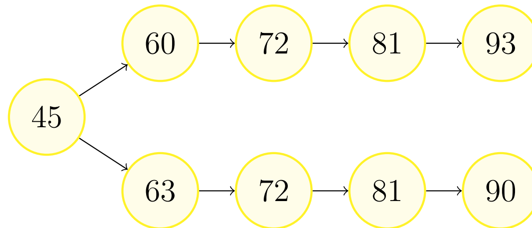
$d_1 = 2$



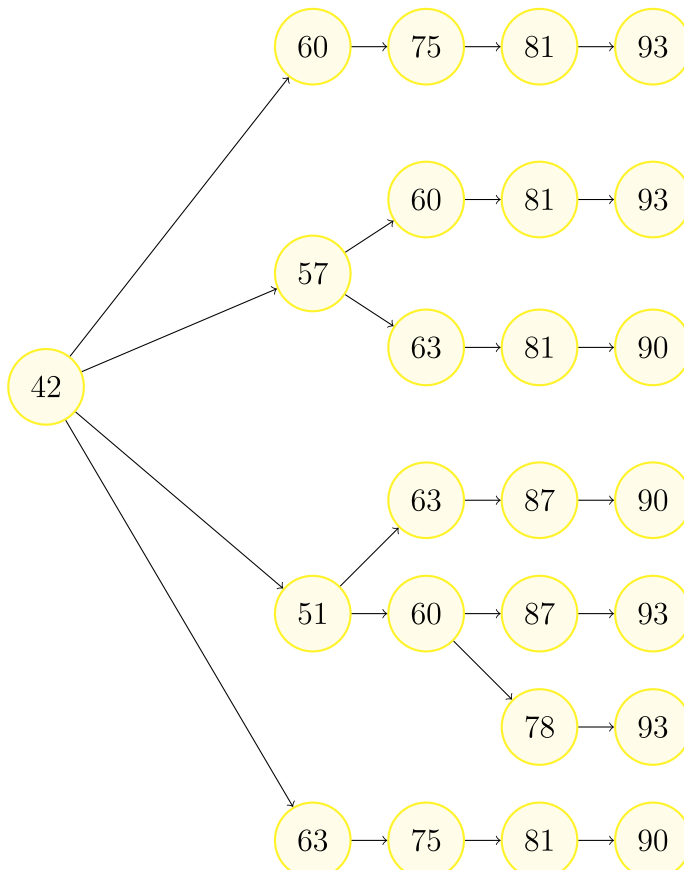
$d_2 = 2$



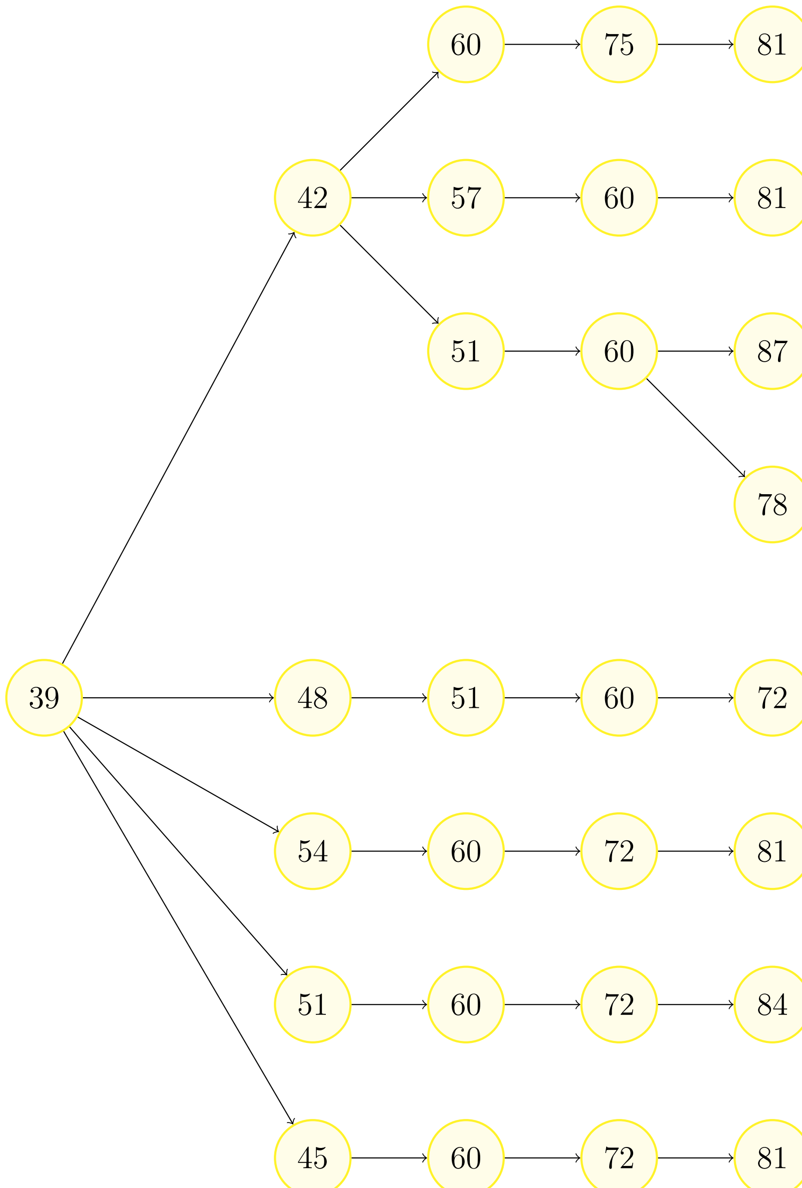
$d_3 = 3$


45
60
72
81
93
63
72
81
90

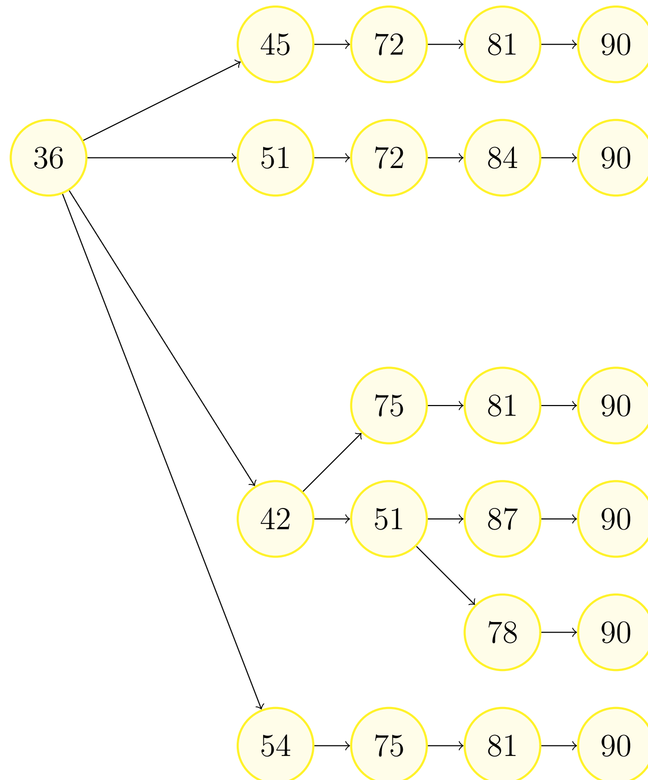
$d_4 = 2$


42
60
75
81
93
57
60
81
93
63
81
90
51
63
87
90
60
87
93
78
93
63
75
81
90

$d_5 = 9$


60
75
81
42
57
60
81
51
60
87
78
39
48
51
60
72
54
60
72
81
51
60
72
84
45
60
72
81

$d_6 = 8$



$$d_7 = 6$$

Los valores de d_i para los casos restantes se muestran en la siguiente tabla.

Número	Ramas obtenidas
30	$d_8 = 16$
27	$d_9 = 24$
24	$d_{10} = 24$
21	$d_{11} = 48$
18	$d_{12} = 48$
15	$d_{13} = 48$
12	$d_{14} = 48$

Entonces los números enteros del 0 al 9 con las condiciones correspondientes se pueden distribuir de

$$\sum_{n=1}^{14} d_i = 288 \text{ maneras.}$$

B Problema 2

Un cuadrado mágico de $n \times n$ consiste en acomodar n^2 números, uno en cada casilla de la cuadrícula, de manera que todas las sumas de los números colocados en cada casilla y las sumas de los números colocados en cada fila sean iguales. ¿Es posible hacer un cuadrado mágico de 6×6 con los primeros 36 números primos?

Solución

Supongamos que es posible hacer el cuadrado mágico. Por otro lado, nótese que la suma de una cantidad par de números impares es par y la suma de una cantidad impar de números impares es impar. Además

$$\begin{aligned} par + par &= par & (1)\\ impar + impar &= par & (2)\\ par + impar &= impar & (3) \end{aligned}$$

Entre los primeros 36 números primos, se tiene únicamente un número par, que es el número 2. La suma de los 35 primos impares es impar por lo ya mencionado al inicio, luego, por (3) tenemos que la suma de los 36 primos es impar. Dado que es posible hacer el cuadrado mágico, se tiene que todas las sumas de los números colocados en cada fila y en cada columna son iguales, sin perdida de la geralidad supongamos que para el caso de las filas f_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$ las sumas de los números colocados en esas casillas es

$$\begin{aligned} p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} + p_{15} + p_{16} &= x\\ p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24} + p_{25} + p_{26} &= x\\ p_{31} + p_{32} + p_{33} + p_{34} + p_{35} + p_{36} &= x\\ p_{41} + p_{42} + p_{43} + p_{44} + p_{45} + p_{46} &= x\\ p_{51} + p_{52} + p_{53} + p_{54} + p_{55} + p_{56} &= x\\ p_{61} + p_{62} + p_{63} + p_{64} + p_{65} + p_{66} &= x \end{aligned}$$

veamos que

$$\begin{aligned} x + x + x + x + x + x &= 6x \\ &= 2 \cdot 3x \end{aligned}$$

es decir, $6x$ es un número par, lo cual es una contradicción, ya que la suma de los 36 números primos es impar. La contradicción viene de suponer que se puede hacer el cuadrado mágico de 6×6. Por lo tanto, se concluye que no es posible.

C Problema 3

Un triángulo ABC está inscrito en un círculo. Sea M la intersección de las rectas tangentes al círculo en B y C. Por el punto M se traza la recta paralela a AC, la cual corta a AB en N. Demuestra que $BNCM$ es un cuadrilátero cíclico y que $AN = CN$.

Solución

Para mostrar que el cuadrilátero $BNCM$ es cíclico se usará la siguiente equivalencia: un cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, si el ángulo formado por un lado y una diagonal es igual al ángulo formado por el lado opuesto y la otra diagonal.

Dado que los puntos C y B son puntos de tangencia obtenemos que $CM = BM$, de ahí que $\angle MCB = \angle MBC$. Luego, como $\angle BAC$ es un ángulo inscrito en el círculo, $\angle BCM$ es un ángulo semi inscrito y comparten el mismo arco, obtenemos la siguiente igualdad $\angle BAC = \angle BCM$. Además, $\angle ACN = \angle CNM$ ya que son ángulos alternos internos. Para cualquier triángulo se cumple que la suma de sus ángulos internos es 180°, entonces

$$\angle ACN + \angle BAC + \angle ANC = 180^\circ \tag{4}$$

nótese también que

$$\angle ANC + \angle CNM + \angle MNB = 180^\circ \tag{5}$$

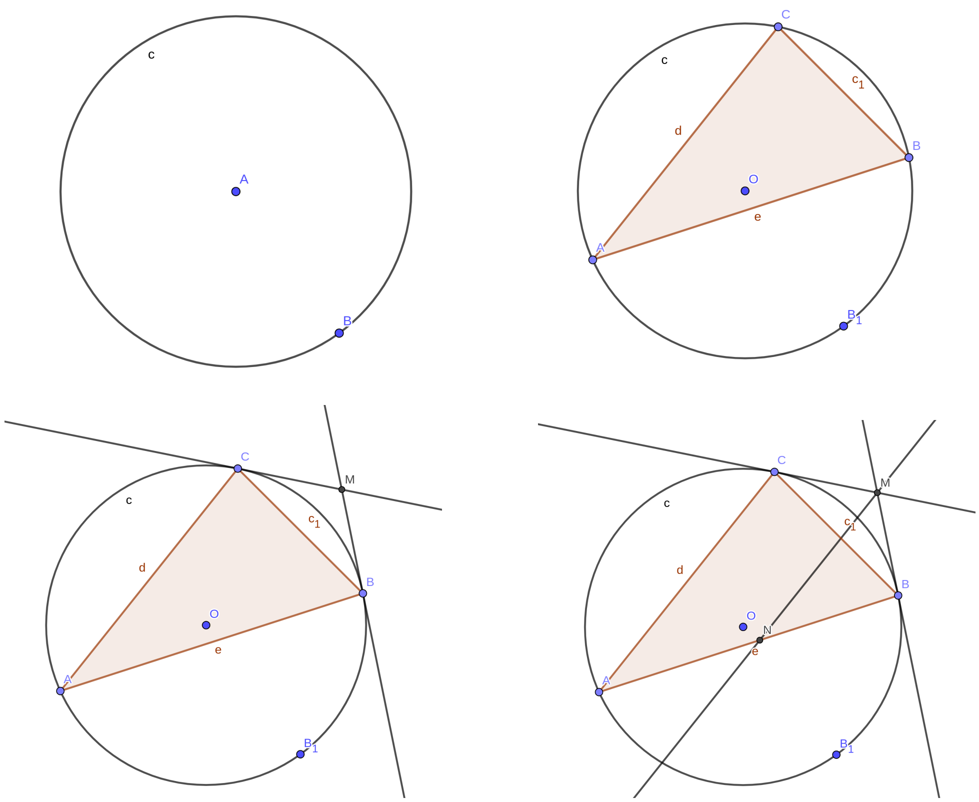
de (4) y (5) se tiene que

$$\angle MNB + \angle CNM + \angle ANC = \angle ACN + \angle BAC + \angle CNA$$
$$\angle MNB + \angle CNM = \angle ACN + \angle BAC$$
$$\angle MNB + \angle CNM = \angle CNM + \angle BAC$$
$$\angle MNB = \angle BAC$$
$$\angle MNB = \angle MCB$$

por lo tanto el cuadrilátero $BNCM$ es cíclico. Como es cíclico, $\angle CNM = \angle MBC$, llegando a que

$$\angle NCA = \angle NAC$$

esto a su vez implica que el $\triangle ACN$ es isósceles, se concluye que $AN = CN$.



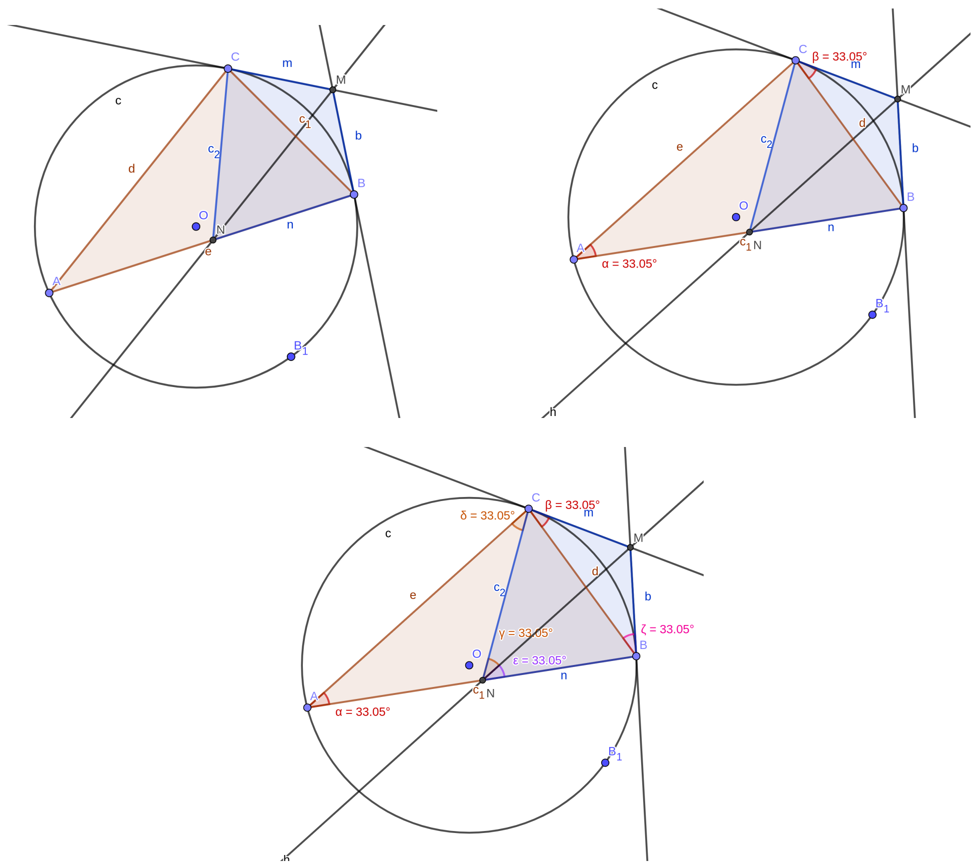


Figura 5: Se utilizó GeoGebra Clásico para las ilustraciones de este problema, de hecho, de ahí surge la idea de la solución propuesta.