UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

TESIS

Estrategias que implementan profesores de matemáticas al resolver tareas con múltiples soluciones usando GeoGebra

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica

PRESENTA

Eduardo Espinosa Ramírez

Director

Dr. Fernando Barrera Mora

Codirector

Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez

Comité tutorial

Dr. Marcos Campos Nava
Dr. Cutberto Rodríguez Álvarez
Dr. Fernando Barrera Mora
Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez

Mineral de la Reforma, Hgo., México., marzo 2025

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
School of Engineering and Basic Sciences
Área Académica de Matemáticas y Física
Department of Physics and Mathematics

Mineral de la Reforma, Hgo., a 7 de marzo de 2025

Número de control: ICBI-AAMyF/186/2025
Asunto: Autorización de impresión de tesis.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

El Comité Tutorial de la tesis titulada **"Estrategias que implementan profesores de matemáticas al resolver tareas con múltiples soluciones usando GeoGebra"**, realizada por el sustentante **Eduardo Espinosa Ramírez,** con número de cuenta **197147,** perteneciente a la **Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica**, una vez que ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el Artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente:

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

El Comité Tutorial

Dr. José Félix Fernando Barrera Mora
Director

Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez
Codirector

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Dr. Cutberto Rodríguez Álvarez
Miembro del comité

Dr. Marcos Campos Nava
Miembro del comité

Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P. 42184
Teléfono: 52 (771) 71 720 00 Ext. 40124, 40119
aamyf_icbi@uaeh.edu.mx, ravila@uaeh.edu.mx

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (Conahcyt) por el apoyo económico otorgado, para la realización de esta tesis, a través de la beca de posgrado con número de becario 1238480.

A mi madre, por motivarme con su cariño y comprensión a superar mis límites y acompañarme en este logro.

A PHG, por los momentos compartidos y las lecciones aprendidas, que también formaron parte de este camino.

A mi padre y hermanos, por darme ánimos para seguir adelante.

A mis directores de tesis, por enseñarme el significado de ser un profesor, el valor del estudio y del trabajo.

A mis sinodales, por las sugerencias y su compromiso en la mejora de este trabajo.

A mis estudiantes de las generaciones 2016-2024 por inspirarme con su entusiasmo y curiosidad a ser un mejor profesor.

Resumen

Se identifican las estrategias de resolución de problemas empleadas por ocho profesores, inscritos en un posgrado en educación matemática en una universidad pública de México, cuando abordan tareas con múltiples soluciones con GeoGebra. En el trabajo se reporta un análisis detallado de las estrategias utilizadas por los participantes, así cómo la forma en que GeoGebra apoyó el proceso de implementación de tales estrategias. El trabajo es relevante porque la mayoría de las investigaciones sobre tareas con múltiples soluciones se realizan en ambientes de papel y lápiz, y se presentan, únicamente, análisis globales de las estrategias utilizadas. La información se analizó con base en las heurísticas de resolución de problemas propuestas por Polya. Las actividades se implementaron en el marco de un curso semestral sobre uso de las tecnologías digitales en el aprendizaje. La primera tarea es un problema que consiste en maximizar el área de un triángulo. En la segunda tarea se solicita encontrar la longitud de un segmento que es parte de una configuración geométrica. La tercera tarea es el problema denominado *Tesoro del Pirata*. La primera y tercera tarea se abordaron individualmente, mientras que la segunda tarea se llevó a cabo en equipos de cuatro participantes. Después del trabajo individual o por equipo, se llevaron a cabo sesiones plenarias, donde se comunicaron las estrategias de solución. Las fuentes de información fueron los reportes escritos elaborados por los participantes, así como notas de campo elaboradas por los investigadores. En todas las tareas se reportaron como mínimo tres soluciones diferentes. Las principales estrategias utilizadas fueron el arrastre, el trazado de mediatrices y la medición de longitudes y de ángulos. Además, se identificó una mejora en las habilidades de resolución de problemas de los participantes, así como el desarrollo de un aprendizaje por descubrimiento, a partir del apoyo proporcionado por las diversas herramientas del software.

Abstract

The problem-solving strategies employed by eight mathematics teachers, enrolled in a postgraduate program in Mathematics Education at a public university in Mexico, are identified when they approach tasks with multiple solutions using GeoGebra. The study conducts a detailed analysis of the strategies used by the participants and how GeoGebra supports their implementation. The study is relevant because most research on multiple solutions tasks are developed in paper-and-pencil environments and only global analyses of the strategies used are presented . The information was analyzed based on Polya's Problem Solving heuristics. The activities were implemented as part of the tasks developed during an academic semester on the use of digital technologies in learning. The first task involves a problem where the objective is to maximize the area of a triangle. In the second, the goal is to find the length of a segment that is part of a geometric configuration. The third task is the Pirate's Treasure Problem. The first and third task are addressed individually by the participants, while the second task was approached by teams of four participants. After the individual or team´s work, plenary sessions were held, where the solution strategies were communicated to the other group members. The sources of information were the written reports prepared by the participants, as well as field notes taken by the researchers. In all the tasks, at least three different solutions were reported. The main strategies used by the participants were dragging, bisector tracing, and measuring lengths and angles. Additionally, an improvement in the participants' problem-solving skills was identified, as well as the development of discovery learning, supported by the various tools provided by the software.

Contenido **Página**

1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Introducción

La geometría euclidiana ocupa una posición de importancia en el bachillerato, ya que los conocimientos geométricos permiten a los estudiantes explorar propiedades del mundo físico. Por otro lado, las ideas geométricas también son útiles para estructurar otros conocimientos de los estudiantes (Camargo y Acosta, 2012). Además, el estudio de la geometría permite desarrollar habilidades entre las que destacan: resolución de problemas, la creatividad, el descubrimiento de patrones, la capacidad de formular conjeturas y utilizar los conocimientos previos para resolver problemas.

El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos de Norteamérica (NCTM, 2000) argumenta que algunas habilidades que los jóvenes desarrollan cuando estudian geometría, en el nivel básico y medio superior, incluyen el razonamiento geométrico, capacidad para justificar y realizar demostraciones matemáticas, así como habilidad para utilizar software en la exploración y construcción de modelos, lo cual posibilita que pueda formular conjeturas y encontrar relaciones con otros conceptos matemáticos. Entonces, resolver problemas de geometría puede ayudar a los estudiantes para que reconozcan a las matemáticas como una disciplina experimental, al incorporar una herramienta digital como GeoGebra en el proceso de resolver un problema. Tradicionalmente los filósofos de la ciencia, consideran que la matemática es una ciencia formal, mientras que la física o la química son ciencias factuales, basadas en el método experimental (Bunge, 1985; Davis & Hersh, 1981). Sin embargo, hoy en día, derivado de la aparición de tecnologías digitales como los sistemas de geometría dinámica, los sistemas de álgebra computacional, entre otros se ha empezado a conceptualizar a la matemáticas como una disciplina experimental (Baker, 2008).

Por otra parte, Santos-Trigo (2014) enfatiza que resolver problemas es fundamental para el aprendizaje de las matemáticas. Desde esta perspectiva el resolutor (estudiante o profesor) experimenta con los objetos de estudio, observa patrones, desarrolla estrategias y recursos, formula preguntas para comprender la tarea, comunica resultados y reflexiona sobre los procesos que llevó a cabo para abordar la tarea en cuestión (metacognición).

Para apoyar el aprendizaje de los estudiantes, desde una perspectiva de resolución de problemas, el profesor tendrá que contar con los conocimientos necesarios para plantear y resolver problemas, diseñar e implementar tareas, guiar y brindar las herramientas, así como apoyo al estudiante para encontrar la solución de un problema. Así, es importante que el profesor resuelva problemas de manera sistemática, para contar con mejores elementos que le permitan orientar y apoyar a sus estudiantes para que aprendan matemáticas con entendimiento (Hiebert et al., 1997). La capacitación de un docente como resolutor de problemas, le facilitará reconocer los obstáculos que pueden enfrentar los estudiantes, y de esta manera, poder orientarlo y evitar que se frustre al no avanzar en la solución de una tarea (Antunovic-Piton et al., 2022). El aprendizaje a través de resolución de problemas ofrece al resolutor una oportunidad para desarrollar habilidades y aplicar sus conocimientos, dotándolo de experiencias que incrementan sus habilidades, además de que refinan aquellos saberes con los que ya cuenta y obtiene algunos conocimientos nuevos conectados con lo que se sabe previamente (Antonovic-Piton et al., 2022).

Una herramienta útil en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas son las Tareas con Múltiples Soluciones (MSTs, por sus siglas en inglés), las cuales incluyen problemas matemáticos que cuentan con distintas rutas de solución. Es importante señalar que una tarea de aprendizaje matemático incluye diversos elementos, un objetivo de aprendizaje, elementos matemáticos estructurados en torno al objetivo, un escenario de instrucción y un proceso inquisitivo (Campos Nava, 2010).

De acuerdo con Leikin (2010), el profesor debe tener un conocimiento amplio y avanzado en matemáticas para proveer las diversas rutas de solución de un problema. Al respecto, el uso de un software como GeoGebra facilita al resolutor la aplicación de estrategias y el proceso de exploración y búsqueda de rutas de solución. Identificar múltiples rutas de solución a un problema permite conectar diferentes conceptos matemáticos y representaciones durante el proceso de exploración e identificación de atributos en una configuración dinámica. Por lo anterior, el uso de la tecnología al resolver problemas es importante tanto para el estudiante como para el profesor, quién puede rediseñar las metas que desea alcanzar en el aula y, de esta manera, robustecer y potenciar el aprendizaje matemático de los estudiantes (Santos-Trigo et al.,2021; Santos-Trigo, 2014) .

Con base en lo mencionado con anterioridad, el objetivo de esta tesis es analizar con detalle las estrategias que utilizan profesores de matemáticas cuando abordan Tareas con Múltiples Soluciones (TMS, de aquí en adelante), ya que antes de enseñar algo, el docente debe conocer, en primera instancia, las rutas y los obstáculos que puede enfrentar el estudiante al abordar una tarea. Para apoyar el aprendizaje de los estudiantes el docente debe ser un hábil resolutor de problemas, con amplios recursos matemáticos. Además, es importante que los profesores de matemáticas reconozcan las posibilidades de software como Geogebra para implementar heurísticas mientras se aborda una TMS. Hay que considerar que las tareas de instrucción deben ser cuidadosamente diseñadas para que el estudiante logre entender el problema, diseñar un plan, ejecutarlo y reflexionar sobre el proceso de solución (Antunovic-Piton et al., 2022; Piñeiro et al., 2021; Santos-Trigo,2014).

1.2. Revisión de la Literatura

En esta sección se revisan diversos artículos de investigación empírica relacionados con la utilidad de abordar tareas con múltiples soluciones como herramienta didáctica en la formación de docentes y estudiantes de matemáticas, lo cual se convierte en un antecedente de cómo es que las TMS influyen en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas apoyándose de un sistema de geometría dinámica como GeoGebra.

Leikin (2010) realizó una investigación con la finalidad de identificar cómo se aprende a través del uso de TMS. La metodología incluyó: (i) experimentos de múltiples casos de enseñanza y (ii) un estudio longitudinal. En los experimentos participaron 40 profesores de primaria con experiencia entre uno y 20 años. Los datos se recopilaron mediante grabaciones, las cuales se transcribieron y se analizaron por al menos dos personas. La atención fue enfocada en el caso de una profesora que diseñó tareas para profesores con múltiples soluciones, las cuales se implementaron posterior a un proceso de capacitación. Se obtuvo evidencia acerca de cómo la experiencia del profesor influye en la búsqueda de distintas alternativas para solucionar un problema de geometría. El estudio muestra principalmente cómo los docentes aplican la flexibilidad e improvisación en el salón de clase. Se concluye que el docente debe experimentar y afrontar situaciones similares a las que tendrían que enfrentar los estudiantes para comprender los procesos mentales involucrados en la solución de una tarea. Por otro lado, en el estudio longitudinal se revisó cómo el profesor aborda las tareas. La información se recabó mediante entrevistas al finalizar cada ciclo escolar. Abordar tareas con múltiples soluciones permite al profesor desarrollar diversas habilidades y el desarrollo de autonomía en el proceso de aprendizaje.

Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez (2017) buscaron identificar qué elementos puede aportar el uso de tareas con múltiples soluciones (TMS) en la formación y actualización docente. Se recolectó información proporcionada por 15 profesores en un curso de capacitación (12 semanas). Los docentes resolvieron un problema de aritmética básica con múltiples soluciones. Se buscó que mediante la tarea se establecieran conexiones entre conocimientos, experiencias y relaciones matemáticas haciendo uso de representaciones gráficas o numéricas al buscar distintas rutas de solución. Es importante que los docentes desarrollen este tipo de actividades, ya que les permitirá reflexionar sobre la forma en la que sus estudiantes pueden llegar a pensar y resolver esa tarea, y de esta forma conocer cómo los pueden apoyar en su avance en el proceso de solución.

En un estudio realizado por Piñeiro et al. (2021), se buscó conocer cuáles son los conocimientos matemáticos de nueve profesores de primaria en formación, sobre la resolución de problemas. Los datos se obtuvieron mediante una entrevista semiestructurada, grabada en audio. Se identificaron los conocimientos previos de los futuros profesores, así como sus habilidades y disposición para resolver problemas. Las grabaciones se transcribieron y los datos se organizaron en tablas. Se concluye que no hubo una capacitación completa en la resolución de problemas, lo cual señala una falta de articulación de conocimientos tanto del componente disciplinar como del didáctico.

Barrera-Mora y Reyes-Rodriguez (2018), abordan la utilidad de la tecnología en el entendimiento de resolución de problemas. Una de las ideas que enfatizan es que en el ambiente digital (GeoGebra) se pueden identificar elementos que podrían quedar ocultos cuando se trabaja con lápiz y papel. La investigación se enfocó en conocer cuáles son las características del conocimiento que se construye con GeoGebra, y qué formas de razonamiento emergen al usar la herramienta para resolver problemas. El análisis de la información se realizó con base en el marco de razonamiento covariacional. Participaron 18 estudiantes de primer semestre de una licenciatura en matemáticas aplicadas. Las actividades se desarrollaron durante un semestre, y se obtuvieron grabaciones en video del trabajo de los estudiantes. Se propusieron actividades de modelización para el desarrollo del pensamiento variacional, mediante el trabajo en pequeños grupos y debates guiados por el docente. Los resultados aportan evidencia de que el uso de la tecnología permite identificar el comportamiento gráfico del llenado de recipientes. Además, los procesos cognitivos al trabajar con tecnología son distintos al compararse con los de un ambiente de lápiz y papel, dado que ahora el estudiante tiene la posibilidad de visualizar y no solo de imaginar la variación. El uso de la tecnología aporta elementos útiles para trazar rutas de solución, lo que a la vez ayuda a una comprensión matemática más robusta.

Santos-Trigo, et al. (2021), realizaron una investigación para conocer el impacto de la tecnología en la mejora y la ampliación de estrategias de resolución de problemas. Los participantes fueron siete docentes de bachillerato inscritos en un programa de maestría en educación matemática. Se llevaron a cabo sesiones de tres horas, dos veces por semana durante un semestre académico. Los profesores abordaron una serie de tareas con la intención de que tuvieran un acercamiento con las ideas involucradas e investigar de manera autónoma los temas relacionados. Las tareas se abordaron en grupos de dos o tres participantes. Se observó que los profesores comparten sus ideas y cuestionan la de sus pares. Se trabajó con GeoGebra y se propuso resolver el Problema de Apolonio. Los profesores generaron ideas variadas en las que exponían sus rutas de solución con la ayuda de la herramienta. Se obtuvo evidencia de que el uso de herramientas digitales permite al docente ampliar las posibilidades para generar estrategias en la búsqueda de patrones en la resolución de problemas y además que se volvió importante de parte del docente la consulta previa de información sobre conceptos de la tarea planteada para generar temas de discusión en el aula.

Gridos et al. (2022), realizaron un estudio basado en la creatividad cuando se abordan TMS. Se evaluaron aspectos como comprensión de problemas y trazos de líneas auxiliares que permiten dar respuesta a los problemas con múltiples soluciones. Participaron 243 estudiantes entre los 15 y 16 años quienes respondieron dos cuestionarios, uno enfocado en TMS y otro para medir su habilidad de percepción geométrica. La metodología se basó en la propuesta de Leikin. Se identificaron las diversas maneras en las que los estudiantes perciben las figuras geométricas y su habilidad en la solución de problemas.

Hernández et al. (2019), indagaron sobre las aptitudes matemáticas de futuros profesores, las cuales son las necesarias para hacer frente a los posibles retos en el aula. Participaron tres docentes en su último año de formación profesional. Se describen los resultados de resolver una tarea con múltiples soluciones usando GeoGebra. La tarea consistió en calcular el área de un trapezoide isósceles circunscrito en una circunferencia de radio R. La metodología empleada se denomina MUST (Mathematical Understanding for Secondary Teaching) la cual se traduce en comprensión matemática para la enseñanza en secundaria; y consiste en describir cuál es el nivel requerido de comprensión para la enseñanza de matemáticas en secundaria, incluyendo competencias, contexto de enseñanza y la actividad matemática. Se concluye que las herramientas tecnológicas son clave para la construcción de demostraciones y alcanzar un mejor entendimiento de la solución de tareas geométricas.

Levav-Waynberg et al. (2012a) analizaron el rol de las TMS en el desarrollo del conocimiento y creatividad en geometría. Se llevó a cabo un estudio longitudinal. Participaron 303 estudiantes israelíes, quienes se clasificaron en dos grupos, uno de alto desempeño (229 estudiantes), que actuó como grupo experimental, y otros de desempeño promedio (74). En el grupo experimental se implementaron tareas con múltiples soluciones, mientras que no hubo intervención en el grupo regular. El objetivo fue comparar el desarrollo y la creatividad, con base en las respuestas de exámenes para medir su progreso. Se consideró la exactitud de la solución, comprensión y grado de conexión entre las ideas, pero los criterios principales fueron la flexibilidad, fluidez y originalidad. Se identificó que para que la creatividad aparezca es necesario disponer de recursos, que es una característica intrínseca del estudiante. Los participantes del grupo experimental lograron conectar su conocimiento geométrico, por lo que mostraron mayor fluidez al resolver problemas. Se obtuvo evidencia de que las tareas con múltiples soluciones son una herramienta útil para el desarrollo de habilidades en la solución de problemas.

Levav-Waynberg et al. (2012b) retomaron la idea del uso de tareas con múltiples soluciones para evaluar la creatividad y el desempeño en geometría, a través de la resolución de problemas. Las actividades se implementaron con dos grupos de estudiantes israelíes (sobresalientes y regulares). El primer grupo se integró con 185 participantes y el segundo con 82. El objetivo del estudio fue obtener evidencia de que la creatividad es un elemento importante para hacer matemáticas, combinado con otras habilidades como la fluidez, flexibilidad y originalidad en la resolución de tareas. Se resalta la idea de que la geometría promueve el razonamiento lógico, así como el entendimiento de las matemáticas. Los resultados señalan las diferencias entre estudiantes sobresalientes y regulares, a pesar de que se vieron expuestos a la misma metodología de TMS, desarrollan creatividad y hacen uso de sus conocimientos previos para resolver problemas de distintas maneras en relación con criterios como exactitud y articulación de sus conocimientos geométricos previos.

Santos-Trigo y Barrera-Mora (2011) destacan la importancia de evaluar el conocimiento matemático y didáctico en profesores de bachillerato a través de la metodología de resolución de problemas. Las preguntas de investigación son: ¿Cómo los profesores de nivel medio superior aumentan sus conocimientos en el área de las matemáticas y la didáctica?; ¿Qué tan eficientes son las herramientas computacionales para construir, desarrollar y articular sus conocimientos en matemáticas?; y ¿qué tipo de problemas son útiles para el desarrollo de un pensamiento matemático? En la investigación participaron 10 personas (dos educadores matemáticos, un matemático, un estudiante de doctorado y seis profesores de bachillerato), quienes trabajaron durante un semestre en sesiones de tres a cuatro horas por semana. Las tareas se enfocaron en contextos reales, hipotéticos y matemáticos, teniendo como propósito que los profesores identifiquen el potencial didáctico de cada tarea. Lo anterior es de utilidad cuando ellos diseñen tareas y las implementen con sus estudiantes. Durante la implementación de las tareas los participantes usaron herramientas digitales para discutir y compartir nuevas rutas de solución. Los investigadores concluyen que el correcto diseño y selección de problemas contribuyen para que se desarrollen formas matemáticas de pensar. De igual forma, el uso de un *Sistema de Geometría Dinámica* (SGD de aquí en adelante) permite hacer simulaciones, las cuales facilitaron a los profesores identificar distintas formas de representación.

In'am (2014), realizó un estudio en Indonesia con 85 estudiantes universitarios de segundo semestre. Las actividades incluyeron problemas de geometría Euclidiana. Se buscó determinar cómo los estudiantes entienden los problemas, de qué manera los estudiantes diseñan y ejecutan un plan para resolverlos, y si retoman los resultados para encontrar alguna ruta alterna. El componente cualitativo se centró en identificar las cuatro fases de Polya con un cuestionario de cuatro preguntas por cada una de las fases aplicado a todos los participantes. En el componente cuantitativo se describe la aplicación de dos problemas que solo se mencionan sin dar una descripción detallada de en qué consisten. En los resultados observaron que la mayor parte de los participantes lograron entender los problemas de geometría, pero son muy pocos los que realizan un diseño de un plan para la resolución de problemas.

En un estudio realizado por Antunovic-Piton y Baranovic (2022), se buscó conocer los factores que intervienen en el éxito al resolver problemas de geometría. Las preguntas de investigación fueron: ¿Qué factores influyen en el proceso de resolución de problemas independientes, ya sea como una ventaja o cómo obstáculos?; y ¿cómo el planteamiento del problema influye en el proceso de solución? La investigación fue cualitativa. Participaron estudiantes de secundaria (14 y 15 años) divididos de forma aleatoria en tres grupos. Se analizó el proceso completo de resolución de problemas mediante las cuatro fases de Polya. Se implementó una tarea, retomada de una prueba croata (National Secondary School Leaving Exam in Mathematics), para evaluar aplicación de propiedades de ángulos inscritos que cortan el arco y cuerda de una circunferencia. La tarea se planteó de tres formas distintas: (i) enunciado idéntico al del examen (planteamiento y cuatro posibles respuestas), (ii) planteamiento original sin opciones de respuesta, incluyendo una imagen que hace referencia al problema, pero muestra datos incompletos, y (iii) una tercera versión completamente distinta, contextualizada en el área de astronomía, usando los datos y la ilustración del problema original. Se concluye que los participantes debieran aplicar sus habilidades de entendimiento, diseño de plan, ejecución y retroalimentación del problema, además de la visualización para conectar sus conocimientos con la imagen que se les proporcionaba. En el caso de la versión que carecía de una imagen, debieron realizar dibujos de apoyo para resolver la tarea. Se identificó una pobre conexión entre el enunciado, la representación visual símbolos y cálculos ya que los participantes no lograron articular dichos elementos.

Stupel y Ben-Chaim (2017) revisaron las estrategias de aprendizaje, el pensamiento pedagógico y matemático, a través de resolver TMS, de 37 futuros profesores en su último año de formación como docentes de matemáticas y a 13 profesores de facultades de Israel. A los participantes se les propuso resolver dos problemas de geometría con el uso de un software. Se considera que exponer a los profesores a este tipo de tareas permitirá que adquieran las habilidades necesarias para solucionar problemas en cualquier área de las matemáticas. El marco teórico incluye una conceptualización de que pensar en términos matemáticos significa desarrollar capacidad de análisis, habilidad para usar reglas y teoremas para resolver un problema. Se considera que el conocimiento geométrico y creatividad de los estudiantes aumenta al abordar TMS, ya que dichas tareas permiten conectar sus ideas con otras áreas de las matemáticas distintas a la geometría. Se concluye que el pensamiento matemático de los estudiantes se enriqueció, además de que lograron conectar sus conocimientos geométricos con otros tópicos matemáticos, e incluso en comentarios hechos por los participantes destacan haber disfrutado y descubierto la belleza de las matemáticas.

Continuando la revisión de las ventajas que presentan las TMS, Kordaki (2015) realizó una investigación en la que se propusieron problemas de cálculo de áreas a dos grupos de veinte estudiantes de 14 años, de una secundaria en Grecia, quienes ya habían revisado el tema un mes antes. La implementación de las tareas incluyó sesiones con una duración de entre hora y media a dos horas y media, dependiendo del tipo de tarea asignada, fuera del horario de clase. Las tareas fueron de dos tipos, unas exigían solo una ruta de solución y en las otras se solicitaron soluciones múltiples. Se permitió a los participantes utilizar un software geométrico diseñado específicamente para estudiantes de primaria y secundaria. El uso de la herramienta permitió que los estudiantes experimentaran construyendo figuras con áreas iguales, midieran y pudieran rotar la figura, esto produjo que ellos encontraron una relación entre las propiedades del objeto y su representación simbólica con la fórmula de área. El estudio es exploratorio, cualitativo y comparativo, ya que se centra en conocer las diferentes estrategias utilizadas por los estudiantes con y sin el uso de la tecnología. Se destaca que la comunicación al compartir las diferentes rutas de solución, fueran correctas o no, produjo una mejora en las habilidades de resolución de problemas de los estudiantes, además de que ganaron confianza y tuvieron una mejor comprensión de los temas.

Guberman y Leikin (2012) realizaron un estudio con 27 futuros profesores de matemáticas de primaria. Los participantes se dividieron en dos grupos; el A, de alto rendimiento y el B, de bajo rendimiento. La investigación se desarrolló en tres etapas y tuvo una duración de 56 horas. Los participantes abordaron 35 tareas y cinco problemas cuyo objetivo es identificar el interés y las competencias de los participantes en la resolución de problemas ; así como la dificultad de las tareas. En la primera etapa, se analizaron los cambios sobre el concepto de TMS, por lo que aplicaron un test en el que pedían solucionar tres problemas de tantas maneras como fuera posible y escribir sus opiniones sobre si el problema resultaría complicado y de interés para sus alumnos. En la segunda etapa, los participantes entrevistaron a dos de sus alumnos sobre uno de los tres problemas, con el propósito de conocer si el profesor había cambiado su forma de enseñar. Finalmente, en la tercera fase, se aplicó un test que consiste en resolver los problemas cuatro y cinco de diversas formas. El estudio reveló cambios significativos en las competencias en resolución de problemas de ambos grupos, lo cual permitió corroborar la hipótesis sobre la efectividad de las TMS.

Con el propósito de sintetizar e identificar los resultados obtenidos en la literatura revisada en este trabajo, se ha concentrado en la **Tabla 1** dicha información. La tabla también muestra cuáles fueron los problemas investigados, los participantes con los que trabajaron, el marco teórico y/o conceptual utilizado, así como la metodología empleada para su desarrollo.

Autor(es) y año	Pregunta de investigación u objetivo	Marco Teórico/ conceptual	Metodología	Resultados
Leikin (2010)	Explicar el aprendizaje a través de la enseñanza (LTT), utilizando tareas con múltiples soluciones (TMS).	Aprendizaje a través de la enseñanza. Espacio de soluciones. Soluciones convencionales y no convencionales	Estudio cualitativo. Múltiples casos de experimentos de enseñanza (1-3 lecciones) y una investigación longitudinal (experimento de desarrollo docente). Protocolos escritos y videograbaciones. Triada de datos (pre-in-post entrevistas). Story-telling para presentación del caso	Las tareas con múltiples soluciones alientan al resolutor a desarrollar un aprendizaje autónomo. Las TMS apoyan el LTT de los docentes, ya que incluyen situaciones problemáticas no anticipadas. Además, la ampliación del espacio de soluciones de un profesor, mediante las ideas de los estudiantes, contribuye al fortalecimiento de los conocimientos del docente y de sus estudiantes.
Santos-Trigo & Barrera-Mora (2011)	¿En qué medida los docentes de bachillerato reflexionan sobre la necesidad de revisar y ampliar sus conocimientos matemáticos y didácticos al resolver problemas con tecnología?	Resolución de problemas. Comunidades de práctica (comunidad inquisitiva). Uso de la tecnología. Rutas potenciales de instrucción.	Seis profesores de bachillerato, dos educadores matemáticos, un matemático y un estudiante de doctorado. Sesiones semanales de trabajo (3h) un semestre. Modelado de un tráiler al pasar por un desnivel con Cabri Geometry y calculadoras TI. Unidad de análisis es el grupo. Discusiones grupales grabadas en video.	Las representaciones dinámicas de los problemas permiten dar sentido al enunciado, identificar y explorar relaciones matemáticas. El uso de calculadoras permite integrar las aproximaciones geométricas y visuales con las aproximaciones algebraicas. Las discusiones dentro de la comunidad inquisitiva favorecen la reflexión, y esta a su vez la ampliación de los conocimientos docentes. Las tareas son fundamentales para promover en los estudiantes un pensamiento matemático.
Levav-Waynberg & Leikin (2012 a)	¿Cómo el uso sistemático de TMS contribuye al conocimiento matemático y la creatividad de los estudiantes en el campo de la geometría?	Resolución de problemas: Tareas con múltiples soluciones	Estudio longitudinal comparativo. Uso del esquema de puntuación para la evaluación del desempeño en resolución de problemas de TMS de Leikin (2009), grupos de control y experimentales, aplicación de entrevistas.	La comparación con el grupo experimental y de control mostró que la implementación de TMS aumentó la conexión del conocimiento de geometría, y su flexibilidad para resolver problemas. Se mostró que el conocimiento es una condición necesaria para la creatividad.

Autor(es) y año	Pregunta de investigación u objetivo	Marco Teórico/ conceptual	Metodología	Resultados
Levav-Waynberg & Leikin (2012 b)	Examinar el uso sistemático de las TMS en la geometría escolar como un instrumento de investigación didáctica para el desarrollo del conocimiento y creatividad.	Resolución de problemas: Tareas con múltiples soluciones Enfoque pragmático y psicométrico de la creatividad.	Uso del esquema de puntuación para la evaluación del desempeño en resolución de problemas de TMS de Leikin (2009), aplicación de dos tareas. Participaron 267 estudiantes de décimo grado.	Se enfatiza el papel de la originalidad en la evaluación de la creatividad, existe una relación entre el conocimiento matemático y la creatividad. Lo anterior se relaciona con la flexibilidad del pensamiento y una profunda comprensión matemática de un problema.
Guberman y Leikin (2012)	¿Cómo evalúan los PMT la dificultad y el interés de las tareas matemáticas?¿Cómo se relacionan estas evaluaciones entre sí? ¿Cómo cambian estas evaluaciones a lo largo de la participación de los PMTs en el curso?	Resolución de problemas.	Uso de cinco problemas no convencionales, aplicación de entrevistas y cuestionarios (escala de likert) en tres fases. Participaron 27 profesores en preservicio.	Los maestros tuvieron éxito en la resolución de problemas y al resolver los problemas comenzaron a emplear estrategias de resolución más avanzadas. Desarrollaron la capacidad de producir varias soluciones a un problema y mejoran su flexibilidad mental.
In'am (2014)	1) ¿Cómo entienden los estudiantes los problemas de geometría Euclidiana? 2)¿Cómo idean un plan los estudiantes para los problemas de geometría Euclidiana? 3) ¿Cómo ejecutar ese plan? 4)¿Cómo ven los estudiantes las soluciones a los problemas de geometría Euclidiana?	Resolución de problemas.	Método de Polya, test con 2 problemas de geometría Euclidiana, aplicación de entrevistas (estudio cuantitativo y cualitativo). Participaron 85 profesores en preservicio.	1) Los estudiantes pueden comprender los problemas de geometría euclidiana en general antes de implementar el aspecto de problemas adicionales. 2) Algunos estudiantes no diseñan un plan para abordar el problema. 3) Los estudiantes no tenían un entendimiento completo del problema por lo cual no podían resolverlo correctamente. 4) La mayor parte de los estudiantes no lo hace ya que confían en que sus resultados son correctos.

Autor y año	Pregunta de investigación u objetivo	Marco Teórico/ conceptual	Metodología	Resultados
Kordaki (2015)	El papel que desempeñan dos tipos básicos de TMS en el desarrollo de perspectivas múltiples por parte los estudiantes sobre los conceptos de área.	Resolución de problemas; Tareas con múltiples soluciones: Tareas que demandan múltiples soluciones (AD-TMS) y tareas que permiten pero no demandan múltiples soluciones (A-TMS).	Estudio cualitativo y comparativo, con un enfoque fenomenográfico centrado en la identificación de estrategias ideadas por los estudiantes a través de la interacción dentro de C.AR.ME. Participaron dos grupos de segundo de secundaria, de 20 estudiantes de 14 años.	Los estudiantes se sintieron motivados a encontrar la mayor cantidad de estrategias para abordar las tareas usando un software y que no son comunes en el ambiente de lápiz y papel.
Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez (2017)	¿Qué elementos específicos puede aportar el uso de TMS para la formación y actualización docente?	Modelo de resolución de problemas. Aprendizaje matemático con entendimiento.	Tareas con lápiz y papel, grabaciones, reportes escritos y notas de campo. Los participantes fueron 15 profesores de matemáticas en servicio (secundaria, bachillerato, universidad), inscritos en un programa de maestría en educación matemática.	Las representaciones como un medio para activar los recursos de los participantes, la exploración de una situación matemática ayuda a reflexionar acerca de la relación general entre las representaciones y los procesos cognitivos.
Stupel y Ben-Chaim (2017)	¿Cómo el uso de los problemas con múltiples soluciones ayudan al crecimiento del pensamiento pedagógico y matemático de los futuros maestros?	Resolución de problemas.	Caso de estudio con profesores en preservicio, aplicación de entrevistas, problemas de geometría plana y de otros tópicos de matemáticas, uso de software, participaron 37 profesores en preservicio Y 13 profesores en activo.	Explorar problemas geométricos usando un software, les enseña a apreciar las conexiones entre diversas ramas de las matemáticas y les enseña cómo abordar un problema desde distintas perspectivas.
Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez (2018)	¿Qué elementos ayudan a desarrollar un aprendizaje con entendimiento del concepto función con el uso de Geogebra?	Resolución de problemas (aproximación inquisitiva). Perspectiva socio constructivista. Technology affordances. Uso integrado y sistemático de tecnologías.	Resolución de problemas en grupos pequeños, exposición plenaria de los resultados obtenidos, video, producciones escritas y archivos de geogebra. Participaron 18 estudiantes de la licenciatura en matemáticas del primer semestre.	El uso de la tecnología permite identificar el comportamiento gráfico del llenado de recipientes, los procesos cognitivos al trabajar con tecnología son distintos al compararse con los de un ambiente de lápiz y papel, porque ahora el estudiante tiene la posibilidad de visualizar y no solo de imaginar la variación.

Autor y año	Pregunta de investigación u objetivo	Marco Teórico/ conceptual	Metodología	Resultados
Hernández et al. (2019)	¿Cómo la enseñanza de las matemáticas está siendo influenciada por los recursos tecnológicos al resolver problemas?	Mathematical Understanding for Secondary Teaching (MUST)	Caso de estudio con tres profesores en preservicio.	El uso de la tecnología es esencial para exhibir habilidades de razonamiento, comprensión de conceptos matemáticos y fluidez en los procedimientos.
Piñeiro (2021)	Indagar sobre el conocimiento de futuros maestros de primaria sobre problemas matemáticos, su proceso de resolución y la disposición hacia ellos.	Marco Mathematical Problem-Solving Knowledge for Teaching (MPSKT).	Estudio casos múltiples. Entrevistas individuales, semiestructuradas (9 futuros docentes españoles), grabación de audio. Categorías de análisis: (a) caracterización del problema, (b) resolución de problemas y (c) disposición. Participaron 9 futuros maestros de primaria de último curso en la universidad.	Los profesores sostienen una caracterización de problema desconectada del resolutor y una conceptualización lineal del proceso de resolución, demostrando poca integración en sus conocimientos existentes. La comprensión del enunciado del problema se restringe a factores lingüísticos. Solo se considera como problema a aquel que tiene estructura similar a un problema aritmético verbal.
Gridos et al. (2022)	¿Cuál es la influencia de la percepción de la figura geométrica en la producción de soluciones múltiples?¿Cómo la necesidad de construir líneas auxiliares en la figura dada promueve la generación de soluciones múltiples y de las variables de la creatividad?	Resolución de tareas con múltiples soluciones y la teoría de Duval.	Aplicación de test sobre tareas con múltiples soluciones y de percepción de figuras geométricas. Participaron 243 estudiantes entre 15 y 16 años.	La forma en que los estudiantes perciben la figura geométrica y su capacidad para procesarla, es un factor importante para predecir su creatividad matemática.

Autor y año	Pregunta de investigación u objetivo	Marco Teórico/ conceptual	Metodología	Resultados
Santos-Trigo, Barrera-Mora y Camacho-Machín (2021)	¿En qué medida el uso de la tecnología mejora y amplía las estrategias de resolución de problemas de dos profesores de bachillerato?	Problematizar el aprendizaje. Technology affordances. Uso sistemático y coordinado de diversas tecnologías.	Curso de resolución de problemas, tarea (problema de Apolonio), cuestionarios, el uso de Geogebra. Producciones escritas y archivos digitales. Participaron 7 profesores de bachillerato.	Se amplió el dominio de varias estrategias de resolución de problemas (casos más simples, arrastre ordenado, medida de atributos y lugares geométricos). La construcción y exploración de un modelo dinámico brindó la oportunidad de discernir sobre los atributos de la tarea, las estrategias de movimiento o arrastre llegan a ser importantes para que el participante identifique qué propiedades y atributos cambian del objeto.
Antunovic-Piton & Baranovic (2022)	¿Qué factores contribuyen al proceso de resolución de problemas independientes, ya sea como un activo o como un obstáculo? ¿Cómo afecta el planteamiento del problema al éxito de su resolución?	Resolución de problemas: Tareas con múltiples soluciones. Participaron 182 estudiantes entre los 14 y 15 años de séptimo y octavo grado.	Método descriptivo, con análisis cualitativo a través de las cuatro fases de resolución de un problema de Pólya. Aplicación de una tarea en tres versiones diferentes.	Los factores en el éxito en la resolución de problemas se logran cuando el estudiante establece conexiones entre el problema verbal,la representación visual y la notación simbólica. El planteamiento del problema influyó en la resolución de la tarea 3 la cual se planteó en un contexto de un problema de astronomía, proporcionando soluciones más elegantes y variadas en comparación con la tarea 2.

Tabla 1. Síntesis de la literatura revisada

En las investigaciones revisadas se utilizó como marco conceptual principalmente a la resolución de problemas (Guberman y Leikin, 2012; In'am, 2014; Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez, 2018), por lo que en su fundamento didáctico se halla la aplicación de TMS relacionadas con problemas de geometría euclidiana, en las cuáles se utilizó algún software de geometría dinámica como Geogebra, Cabri o C.AR.ME micromundo (Santos-Trigo y Barrera Mora, 2011; Kordaki, 2015; Santos-Trigo et al., 2021) solo o de forma conjunta con ambientes de lápiz y papel. Las tareas se diseñaron con el propósito de identificar cómo el software amplifica y reorganiza (Pea, 1985) los procesos cognitivos del resolutor, cuando hace uso de las herramientas y de las heurísticas durante la resolución de problemas.

En cuanto a los participantes de las investigaciones se identifican profesores en preservicio, profesores en activo y estudiantes de educación básica (Kordaki, 2015; Levav-Waynberg & Leikin,2012a; Antunovic-Piton & Baranovic, 2022) y de licenciatura (Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez,2018). Las investigaciones concluyen que los profesores en preservicio han tenido una escasa experiencia en resolver TMS, además de que no logran utilizar sus recursos para resolver los problemas propuestos (Hernández et al., 2019; Piñeiro, 2021). En contraste, los profesores en servicio mostraron mejora en sus habilidades (Stupel y Ben-Chaim, 2017), y desarrollaron una actitud inquisitiva, aprendieron a realizar construcciones dinámicas, aplicaron estrategias de arrastre, trazos auxiliares, usaron herramientas de medición y emplearon casos particulares para poder generalizar y dar solución a la tarea. En las investigaciones se enfatiza el análisis de los procesos cognitivos, aplicación de estrategias y desarrollo de habilidades, más que en encontrar una respuesta correcta (Guberman y Leikin, 2012; Santos-Trigo et al.; 2021).

En cuanto a las investigaciones que trabajaron con estudiantes, su objetivo fue identificar los efectos que tienen las tareas con múltiples soluciones en un curso de matemáticas y cómo favorecen la resolución de problemas en su aprendizaje y en el entendimiento de algún tema usando un software. En estos casos, se analizó la información mediante los cuatro principios y las heurísticas propuestas por Polya (1965); sin embargo, el foco de algunas de estas investigaciones fue caracterizar los niveles de creatividad y pensamiento flexible (Gridos et al. 2021; Levav-Waynberg & Leikin,2012a), elementos que son secundarios para este trabajo, pero que se deben considerar pues hacen referencia a la importancia de uso de estrategías y del software para abordar TMS.

1.3 Planteamiento del Problema

Con base en la revisión de la literatura, se identificó que la mayoría de las investigaciones fueron cualitativas y transversales siguiendo la metodología de resolución de problemas, TMS y los cuatro pasos para resolver problemas de Polya. En mayor medida, los participantes fueron estudiantes de secundaria, licenciatura en matemáticas aplicadas y profesores de matemáticas en formación, en el último año de sus estudios. Los docentes en servicio que participaron en las investigaciones contaban con una experiencia profesional de entre uno y veinte años. Entre los resultados de las investigaciones revisadas se destaca que la experiencia de los docentes como resolutores de problemas se refleja en su flexibilidad docente y en su habilidad para diseñar escenarios retadores para los estudiantes (Leikin, 2010).

Adicionalmente, existen elementos y rasgos que son comunes en la literatura consultada, por ejemplo se destaca la importancia del desarrollo del pensamiento matemático a través de la resolución de problemas en los que el resolutor debe usar sus conocimientos de forma eficiente para hallar múltiples soluciones. Se notó una prevalencia de TMS en las que se utilizaron no solo conocimientos de geometría, sino otros saberes y representaciones matemáticos para hallar la respuesta. En los trabajos revisados se enfatiza el trabajo entre pares, ya que la comunicación de ideas y de resultados enriqueció las habilidades de los participantes. Por otra parte, el uso de herramientas tecnológicas, particularmente SGD permite darle sentido y significado a las tareas que se resuelven, promoviendo el desarrollo de la creatividad y articulación de conocimientos. También se identifica cómo los docentes conectan sus conocimientos al abordar TMS y cuáles son los procesos cognitivos implícitos. También se resalta cómo el construir un modelo dinámico en Geogebra u otro software les permitió hallar la solución al problema.

Por lo anterior, el objetivo principal de esta tesis es identificar cuáles son las estrategias que utilizan docentes inscritos en un programa de posgrado en educación matemática, al abordar TMS con GeoGebra; además de conocer cómo el uso del software determina y potencia el uso de tales estrategias. La definición de estrategias que utilizamos es la propuesta por Biddlecom y Carr (2011), quienes mencionan que una *estrategia* es una colección de acciones mentales o físicas que se diseñan para resolver un problema, misma que puede enseñarse o surgir espontáneamente como resultado de una reorganización de los esquemas mentales.

Tomando en cuenta los elementos anteriores, es necesario considerar que para enseñar matemáticas el profesor debe ser un hábil resolutor de problemas, tener un amplio conocimiento en matemáticas y en el uso y aplicación de estrategias que le permitan resolver problemas, por ende, podrá apoyar al estudiante de una mejor forma a enfrentar los obstáculos en su proceso de aprendizaje. Así, la pregunta de investigación de esta tesis es: ¿Qué estrategias muestran los profesores de bachillerato cuando resuelven tareas con múltiples soluciones usando Geogebra?

La hipótesis de este trabajo es que los profesores al resolver tareas con múltiples soluciones muestran estrategias de arrastre, trazado de mediatriz, y medición de atributos para abordar el problema usando GeoGebra.

2. MARCO DE INVESTIGACIÓN

2.1 Introducción

En este capítulo se describe la importancia y características de un marco de investigación, cuyo objetivo es orientar y sustentar la realización y los resultados en una investigación. De acuerdo con Lester (2005), un marco de investigación es una estructura básica de ideas, acuerdos, reglas y principios que proporcionan las bases y lineamientos para orientar y sustentar el proceso de investigación. Por otro lado, Eisenhart (1991) menciona que un marco de investigación está compuesto por ideas, conceptos o abstracciones, éstas últimas representan características importantes del problema de investigación, por lo que éste es definido como un soporte o estructura que se acopla al tipo de investigación que se lleva a cabo. Cabe mencionar que la elección del marco de investigación dependerá de las abstracciones e ideas y de los datos que dan sustento a la investigación.

De manera más puntual Lester (2005), menciona que un marco de investigación aporta cuatro elementos al proceso investigativo: (i) brinda una estructura para conceptualizar y diseñar la investigación; (ii) permite interpretar los datos empíricos, (iii) contribuye con elementos para conseguir un entendimiento profundo del problema y (iv) provee de elementos para sustentar teóricamente los resultados de una investigación.

2.2 Tipos y características de los marcos de investigación

Eisenhart (1991) menciona la existencia de tres tipos de marcos de investigación los cuáles son: marco teórico, marco práctico y marco conceptual. El marco teórico es una estructura que guía la investigación apoyada en una teoría formal, es decir una teoría que ha sido desarrollada y que brinda una explicación coherente del fenómeno de estudio, lo cual permite que de los datos recopilados se respalde, modifique o se revise la teoría (Lester, 2005). Un marco práctico guía a la investigación considerando aquello "que funciona" de acuerdo a la práctica o experiencia de los profesionales y no mediante una teoría formal. Se considera que tanto la hipótesis como la pregunta de investigación se apoyan de ese conocimiento y de los resultados obtenidos se puede considerar ampliar o revisar la práctica. Finalmente, un marco conceptual es "Una estructura esquelética de justificación, en lugar de una estructura esquelética de explicación", es decir es un argumento que incluye diferentes puntos de vista y en consecuencia una serie de razones por las que se adoptan dichas ideas que servirán como guía para desarrollar la investigación, misma que se sustenta en una previa revisión de la literatura relacionada al tema de investigación (Eisenhart, 1991).

2.3. Elementos que integran el marco conceptual

La importancia de un marco conceptual yace en la elección de algunos conceptos e ideas que servirán como guía para la recopilación de datos y en la forma en la que se analizarán los resultados obtenidos (Eisenhart, 1991). Así que, el marco conceptual de éste trabajo se integra por dos elementos: (i) elementos orientados al diseño de tareas con múltiples soluciones y (ii) elementos que permiten identificar y clasificar las estrategias implementadas por los profesores. En este sentido se adopta una aproximación didáctica basada en resolución de problemas para el diseño de las TMS, también se hace referencia a la dimensión ontológica en la cuál se explica cómo se concibe a la matemática, y a la dimensión epistemológica que se refiere a la forma en cómo se construye el conocimiento desde la perspectiva socio constructivista.

La elección del marco obedece a que los elementos que estructuran el marco juegan un rol central para describir características relacionadas con las tareas con múltiples soluciones, por ejemplo al resolver problemas es importante la concepción que se tenga sobre lo que son las matemáticas, su aprendizaje y los aspectos didácticos que ocurren.

2.3.1 Dimensión ontológica.

La Ontología es la rama de la filosofía que se ocupa de la naturaleza del ser (Posada-Ramírez, 2014), para lo cual en este apartado se plantea la pregunta ¿Qué son las matemáticas?. Esta pregunta al ser de carácter filosófico no tiene una única respuesta, sino toda una gama de respuestas posibles, de las cuales se muestran solo algunas de ellas y se indica cuál es la respuesta que se tomará como fundamento de este trabajo.

Algunos matemáticos como Halmos (1980), argumentan que elementos como los axiomas, teorías, demostraciones, fórmulas y definiciones son importantes en las matemáticas, más no son la esencia de la misma. Para Halmos los problemas son el corazón de las matemáticas y de su aprendizaje. Por otra parte, Steen (1988) define a las matemáticas como *la Ciencia de los Patrones*. Reflexionando para tratar de entender esta concepción de las matemáticas y aunado con las experiencias dentro y fuera del aula, sobre todo de quién hace matemáticas se llega a que, una parte central del quehacer matemático radica en resolver problemas, lo cual lleva a resolver casos particulares, identificar patrones, formular conjeturas, justificar resultados y promover un aprendizaje más consciente (Santos-Trigo, 2014). Dado lo anterior, lo más importante no radica en encontrar la respuesta correcta, sino en los procesos reflexivos y de significado que el resolutor establece durante la experimentación con los objetos matemáticos. Desde la perspectiva anterior, las matemáticas se conciben como una construcción humana, falible y corregible, es decir como un cuerpo de conocimientos que se encuentra en constante expansión (Ernest,1999; Santos-Trigo, 2014). Las ideas anteriores se contraponen a lo que establece Barbeau (citado en Santos-Trigo, 2014, p.34) quien concibe a las matemáticas como un conjunto fijo de conocimientos pulidos y acabados donde ya todo está hecho.

En este trabajo se adopta la concepción de las matemáticas como la ciencia de los patrones (Arnold, 2006; Bailey et al., 2006) dejando a un lado la idea de que para aprenderlas se necesita seguir un procedimiento algorítmico carente de significado.

2.3.2 Dimensión epistemológica

La palabra epistemología proviene del griego *episteme* que se traduce como conocimiento y *logos* que significa razón o estudio. La epistemología es una rama de la filosofía que se refiere al conocimiento y que plantea preguntas relevantes, tales como: ¿Qué es el conocimiento? ¿Cuáles son las fuentes de ese conocimiento? ¿Cómo es el proceso de construcción del conocimiento? y ¿Cuáles son los medios para su justificación (Ernest, 2012; Sierpinska & Lerman, 1996).

Sierpinska y Lerman (1996) concluyen que si la epistemología es la teoría del conocimiento, y la epistemología de las matemáticas es la teoría del conocimiento matemático, entonces la epistemología de la educación matemática tendría que considerar al mismo campo de estudio, pero con énfasis en los procesos del aprendizaje matemático, es decir, en los procesos de resolución de problemas.

En este trabajo de tesis se utilizan dos perspectivas epistemológicas, la constructivista cognitiva y la socio-constructivista. Para Al-Huneidi & Schreurs (2013), la teoría constructivista en un lenguaje simple es la creencia de que todo conocimiento es necesariamente el producto de nuestros propios actos cognitivos, su aplicación se opone a la enseñanza por transmisión, es decir, la teoría sostiene que el estudiante construye su conocimiento de manera activa por medio de una situación problemática que desequilibre sus estructuras mentales con el propósito de modificarlas (Radford, 2008; Sierpinska & Lerman, 1996; Cobb, 1994; Simon & Schifter, 1991), en lo que concierne al conocimiento matemático en este se avanza a través de resolver problemas (Halmos, 1980), creando un desequilibrio en sus estructuras mentales las cuales se ven modificadas cuanto construye nuevas conexiones como resultado de la resolución de un problema.

El proceso de la construcción del conocimiento existe de forma paralela entre el individuo y la influencia social (Giliberto, 2014; Taylor, 2014; Simon & Schifter, 1991; Confrey,1990). De acuerdo con Smith (1998), referirse al socio constructivismo es considerar el trabajo de Vigotsky, en el que tiende a ver al lenguaje y al contexto sociocultural como la fuerza principal reguladora de las construcciones realizadas por el individuo y aunque él no abordó cuestiones relativas a las matemáticas consideró al conocimiento “exactamente lo que es en cualquier momento y en cualquier lugar” (Sierpinska & Lerman, p.847) además de explicar que el objetivo principal de la educación es el de pasar el conocimiento a la siguiente generación (Sierpinska & Lerman, 1996).

Sierpinska y Lerman (1996) hacen también referencia a un concepto importante desarrollado por Vigotsky, al cual llama zona de desarrollo próximo, que es la diferencia entre lo que el individuo (un niño) podía hacer por su cuenta y lo que podría llegar a ser acompañado con ayuda de sus compañeros o adultos con más experiencia, es decir establece que el aprendizaje surge con la interacción social, motivando al individuo a realizarlo por su cuenta o acompañado. En el campo de la educación matemática se ve reflejado en las discusiones que se realizan en el aula donde los estudiantes interactúan y exploran con los objetos matemáticos, exponen y proponen rutas de solución a un problema, así como todas aquellas producciones culturales realizadas como reportes escritos, uso de tablas, construcciones geométricas, entre otras.

Dado lo anterior, al considerar en este trabajo ambas perspectivas se sostiene que la aplicación de tareas con múltiples soluciones y el uso de GeoGebra brinda a los participantes la oportunidad de explorar las propiedades y atributos de los objetos matemáticos con la intención de que puedan aplicar estrategias y construir nuevas a partir de los desequilibrios generados en sus estructuras mentales.

2.3.3 Dimensión didáctica

De acuerdo con Escribano-González (2004) la didáctica proviene del griego *didaskein* que significa enseñar, instruir, hacer saber y demostrar, en la actualidad ha conservado su significado original para cualquier área del conocimiento, en este trabajo cobra importancia la didáctica en relación con las características que debe de poseer el escenario en donde se llevará a cabo la aplicación de las tareas con la colaboración de los participantes en su proceso de construcción del conocimiento matemático.

Santos-Trigo (2014) menciona que para que el estudiante sea capaz de construir su conocimiento en matemáticas es necesario que entienda lo que hace, y sí logra comprenderlo esto le permitirá aprender cosas nuevas. Hiebert y colaboradores (1997) explican que entendemos algo cuando logramos ver cómo ese algo se relaciona o se conecta con otras cosas que conocemos previamente, siendo así que cuando el estudiante desempeña actividades como un razonamiento claro, se comunica de forma efectiva, vincula conocimientos de matemáticas con otros campos y resuelve problemas, queda de manifiesto la existencia del entendimiento.

Entonces, para aprender matemáticas con entendimiento, de acuerdo con Hiebert et al. (1997), una persona debe realizar conexiones mentales entre ideas al llevar a cabo dos procesos: la reflexión y la comunicación de ideas. La reflexión es un proceso interno que ocurre cuando de manera consciente y cuidadosa se piensa sobre las experiencias y sobre qué y porqué hacemos las cosas. Lo anterior deja al descubierto el potencial de este proceso mental en el que permite identificar y construir nuevas relaciones entre ideas, hechos y procedimientos. Por su parte la comunicación, es la participación en interacciones sociales en la que se intercambian o comparten ideas con otros, con el fin de recibir retroalimentación o de cuestionar a alguien para aclarar alguna idea, también dentro de este proceso se involucran acciones que no solo tiene que ver con expresarse de forma oral, también involucra escuchar, escribir, demostrar y observar (Hiebert et al., 1997). Al final ambos procesos se unen para que el estudiante construya nuevas relaciones y conexiones, en las que el medio en que se desenvuelven tiene mucho que ver.

Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez (2016) mencionan que el objetivo principal en la educación matemática es que el estudiante desarrolle distintas formas de pensamiento y que progrese gradualmente en niveles conceptuales de entendimiento, y para poder lograrlo es necesario que el entorno en el que se desenvuelve le ofrezca la oportunidad de experimentar, razonar y desarrollar un pensamiento crítico durante la resolución de problemas. En este sentido, ellos argumentan que para que el estudiante pueda construir un entendimiento matemático es necesario desarrollar ciclos sucesivos de acción, observación, formulación de conjeturas y justificación de resultados (Figura 1).

Figura 1. Ciclo para observar el desarrollo del entendimiento matemático

Fuente: (Tellez, 2020)

Dado lo anterior, las TMS juegan un papel fundamental en el desarrollo de habilidades de los estudiantes. En este trabajo se toma la perspectiva de resolución de problemas, la cúal sitúa a los problemas como el medio para aprender matemáticas, teniendo como característica que estas tareas con múltiples soluciones de acuerdo con Leikin (2010) son tareas que contienen el requisito explícito de resolver un problema de múltiples maneras. De acuerdo con Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez (2016), un elemento clave que promueve la construcción de relaciones entre ideas matemáticas es el uso de herramientas digitales que permiten explorar las propiedades básicas de los objetos matemáticos para formular conjeturas, justificar y comunicar resultados.

2.4 Marco para el análisis de datos

En esta sección se consideran los constructos utilizados para el análisis de la información empírica recabada a partir de la implementación de las tareas con profesores de matemáticas. En este sentido, se hace referencia a definir la utilidad de las tareas con múltiples soluciones como herramienta apropiada para que el estudiante implemente estrategias cuando se abordan tareas usando GeoGebra.

2.4.1 Tareas con múltiples soluciones (TMS).

Durante la elaboración de este trabajo se ha sostenido la premisa de que para aprender matemáticas se necesita hacer matemáticas, y una aproximación que se emplea para fundamentar este hecho es la de resolución de problemas. Santos-Trigo (2014) argumenta que aprender matemáticas requiere la participación activa del estudiante durante la construcción y desarrollo de resultados matemáticos, situando a la disciplina como un cuerpo de conocimientos en constante expansión.

Schroeder y Lester (1989) mencionan que en la perspectiva de resolución de problemas existen tres enfoques de enseñanza distintos y es importante diferenciar entre cada uno de estos: i) enseñar sobre la resolución de problemas, consisten en resaltar el modelo que establece Polya con sus cuatro fases (comprender el problema, diseñar un plan, ejecutar el plan y la retrospectiva) para abordar una tarea, es decir el estudiante aprende una serie de estrategias o heurística que usan los " expertos" resolutores de problemas; ii) enseñar para resolver problemas, su premisa fundamental expresa que sólo se aprende matemáticas para resolver problemas aplicando su conocimiento en tareas rutinarias o no convencionales; iii) enseñar matemáticas vía resolución de problemas, sitúa a los problemas como el medio para aprender matemáticas y, bajo este enfoque, las tareas no son rutinarias, y su objetivo de aprendizaje es transformar al problema, transitando de lo concreto a lo abstracto, debido a que demandan un proceso más complejo como la reflexión, planeación, la elección de estrategias, formular conjeturas, comunicar, discutir y verificar que la solución ha sido encontrada.

Los problemas que se plantean para este trabajo tienen la característica de ser problemas con múltiples soluciones, que de acuerdo con Leikin (2010) son tareas que contienen el requisito explícito de resolver un problema de formas diferentes. Tal como lo argumenta Santos-Trigo (2014), cuando el resolutor o grupo de resolutores al abordar el problema muestran aspectos relacionados con el análisis del problema, la toma de decisiones, el monitoreo y la evaluación de soluciones implica que el individuo comprenda lo que hizo y que sea capaz de explicar si sus acciones fueron correctas o no.

Por otra parte Leikin (2011), explica que las soluciones a un mismo problema se consideran diferentes cuando se basa en: (i) diferentes formas de representar algunos conceptos matemáticos involucrados en la tarea, (ii) diferentes propiedades (definiciones o teoremas) de los objetos matemáticos o (iii) o diferentes propiedades de un objeto matemático en diferentes campos.

Estas tareas desafiantes invitan a los estudiantes a explorar diversas vías para resolver un problema, lo que les permite desarrollar habilidades para enfrentar situaciones no convencionales y complejas, estimulando así su capacidad para pensar de manera flexible y encontrar soluciones innovadoras. Al presentar problemas con múltiples soluciones, se fomenta la diversidad de enfoques y se anima a los estudiantes y profesores a considerar distintas estrategias, promoviendo así la construcción de conexiones entre diferentes áreas matemáticas. Estas tareas promueven la participación y el intercambio de ideas entre los estudiantes, al generar un espacio en el que se valora un ambiente que promueve la participación inquisitiva de los estudiantes, el uso de estrategias en el proceso para hallar la solución así como para representar la información. Esta interacción entre pares no solo fortalece la comprensión individual, sino que también enriquece el proceso de aprendizaje al exponer a los estudiantes a diferentes métodos de resolución y estrategias que pueden no haber considerado por sí mismos.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

3.1. Introducción

Este trabajo se abordó desde un enfoque cualitativo, el cual se caracteriza porque la información que se recolecta consiste principalmente en palabras, aunque puede ser información en forma de imágenes, dibujos, fórmulas, gestos, entre otros. Pero la característica fundamental de la información cualitativa es que tiene la finalidad de transmitir o comunicar ideas y significados. La investigación cualitativa es naturalista, porque estudia los fenómenos en sus contextos o ambientes naturales; además es interpretativa, pues intenta encontrar sentido o significado a la información que proviene de un fenómeno (Hernández et al., 2014). En una investigación cualitativa, un objetivo general consiste en identificar patrones de significado.

La presente investigación es exploratoria. Los estudios exploratorios se llevan a cabo cuando se conoce poco del tema que se investiga, se caracteriza por ser flexible y abierto, este tipo de investigación no busca probar hipótesis más bien explorar y visualizar los posibles campos para realizar investigaciones futuras.

3.2 Procedimiento para la recolección de la información

La recolección de información en este trabajo tuvo una duración de diez semanas, dos sesiones por semana con una duración de dos horas cada una, durante un semestre académico.Los participantes de la investigación fueron ocho profesores de matemáticas (tres hombres y cinco mujeres), con edades entre 25 y 50 años. Su experiencia como docente en matemáticas varía desde un año hasta 20 años, y cuentan con formación en diversas áreas profesionales, como ingeniería, educación normalista y economía. seleccionados por conveniencia. Los participantes estaban inscritos en el curso denominado *Uso de la Tecnología en el Aprendizaje de las Matemáticas*, el cual es una asignatura obligatoria de un programa de posgrado en educación matemática, adscrito a una universidad pública de México.

El curso fue impartido por uno de los directores de esta tesis. Durante el curso se utilizó, de forma sistemática, el SGD Geogebra para resolver problemas. Para las Tareas 1 y 3. Los participantes reportaron sus resultados por medio de producciones escritas realizadas de manera individual y por equipos para la Tarea 2. Durante el desarrollo de las tareas, y al término de las mismas, los participantes reportaron sus hallazgos exponiendo frente al grupo sus propuestas de solución. Para abordar la tarea 2 se propuso a los profesores trabajar en equipos, con la finalidad de compartir estrategias y puntos de vista para dar solución al problema. En esta tarea se observó que los profesores tuvieron la posibilidad de discutir sus ideas y hallaron tres rutas de solución.

3.3 Las Tareas

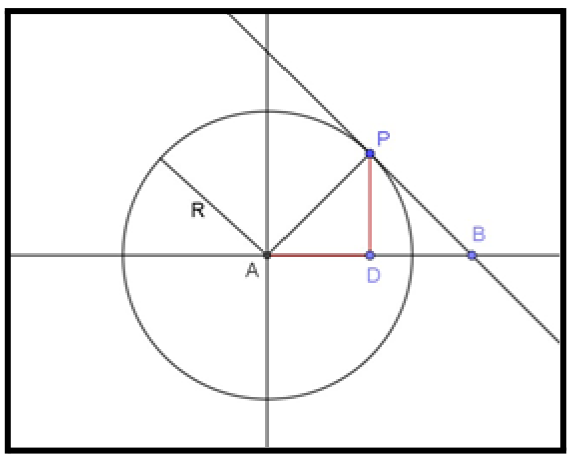
En esta sección se presentan las Tareas con Múltiples soluciones que se aplicaron durante el curso de Uso de las Tecnologías en el Aprendizaje de la Matemática y que se utilizaron para la realización de este trabajo.

3.3.1 Maximizar el área de un triángulo

La Tarea 1 fue revisada por uno de los directores de la tesis. Cabe señalar que esta tarea fue enviada al profesor investigador por uno de sus colegas investigadores, quien le envió un conjunto de problemas por correo electrónico para que los revisara y los resolviera. Uno de tales problemas se implementó en el curso de posgrado al que asistieron los participantes de la investigación. Los participantes entregaron reportes escritos, en los que describieron el proceso de solución de los problemas y que a su vez dieran sentido a las acciones efectuadas en su proceso para hallar la solución del problema.

Esta tarea se considera representativa para la obtención de los resultados preliminares en la identificación de estrategias aplicadas cuando los participantes hacen uso del SGD, debido a que es el primer acercamiento que ellos tienen en resolución de problemas con múltiples soluciones y con cuáles estrategias los profesores cuentan al momento de abordar la tarea. La Tarea 1, se entregó a los estudiantes en formato digital en un documento PDF en el cuál se lee el planteamiento de la siguiente manera:

En la Figura se muestra una circunferencia de radio R centrada en el origen de coordenadas. Sobre el eje horizontal se toma un punto B, móvil fuera del disco, y se traza una tangente por B que pasa por P, D es el pie de la perpendicular al eje horizontal desde P. A partir de P se traza el triángulo ADP que se muestra. ¿En qué posición de B, el triángulo tiene área máxima?



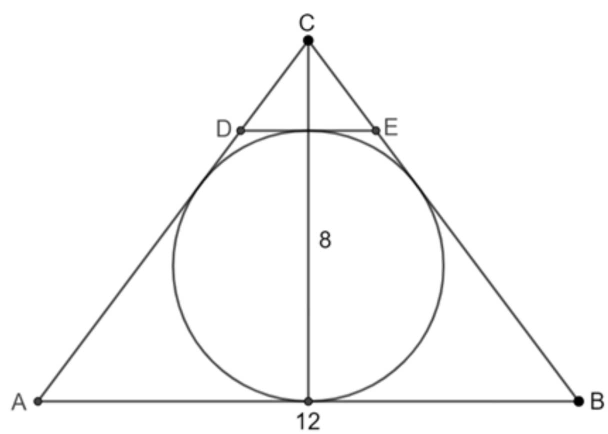
3.3.1.1 Implementación de la Tarea 1: "Maximizar el área de un triángulo"

Cada participante recibió el enunciado de la tarea en un documento PDF, así como el diagrama que se debería construir con GeoGebra y las indicaciones de escribir un documento con una extensión mínima de una cuartilla donde se describiera el proceso para abordar la tarea. Se solicitó a los participantes revisar la tarea durante el fin de semana previo a la sesión de clases. Además, se enfatizó que en el reporte explicaran el proceso de solución, así como la forma en que utilizaron GeoGebra para explorar las características de la construcción geométrica. La tarea se realizó de forma individual y en una sesión de clase (2 horas) se discutieron las rutas de solución; es decir, cada participante pasó al frente y explicó al resto de grupo la solución y el procedimiento utilizado para obtenerla. Cabe mencionar que en las exposiciones, al menos tres de los participantes abordaron la tarea a partir de casos particulares, es decir definieron la longitud del radio, el resto centró la atención en explicar procedimientos de tipo algorítmico y cómo el experimentar en GeoGebra, con el arrastre del punto B, les permitió identificar la posición en la que el triángulo alcanzaría el área máxima, tal y como lo muestran los reportes generados. Por otro lado, al recabar los reportes nos percatamos que tres participantes omitieron el uso del SGD así como de generar el reporte solicitado, ya que lo trabajaron usando papel y lápiz, efectuando sólo algoritmos para abordar la tarea.

3.3.2 Tarea 2: "Longitud del segmento DE en una configuración geométrica"

La segunda tarea consiste en encontrar la longitud de un segmento que forma parte de una configuración geométrica, la cual está integrada por una circunferencia inscrita en un triángulo isósceles de base 12 unidades y altura 8 unidades. Esta tarea fue compartida al instructor del curso por una estudiante del penúltimo semestre del posgrado que tuvo dificultades para abordarla. La tarea cuenta con características en las que se puede realizar la construcción en GeoGebra, así como el de contribuir en la aplicación de estrategias que permitan hallar más de una solución. El enunciado de la tarea se muestra a continuación.

Sea ABC un triángulo isósceles cuya base y altura miden 12 y 8 unidades respectivamente; el segmento DE es paralelo a AB y satisface que es tangente a la circunferencia inscrita en el triángulo. ¿ Cuál es la longitud del segmento DE? Determina la longitud del segmento DE si se sabe que la base del triángulo isósceles es de 12 unidades y su altura de 8 unidades.



Se solicitó utilizar el SGD GeoGebra para abordar la tarea y que en los reportes se detallaran las rutas de solución. A diferencia de la primera tarea, en está se pensó que los participantes deberían de trabajar en equipos con la finalidad de exponer y discutir sus ideas, así como las estrategias de solución. Por otro lado, se contempló que para el desarrollo de la actividad, los participantes deberían reportar al menos tres soluciones distintas y exponerlas a los demás integrantes del grupo, con la finalidad de comparar las rutas y resultados obtenidos.

La actividad se desarrolló en dos fases. En la primera fase, se pidió a los participantes bosquejar una ruta para poder encontrar la longitud del segmento dado y, posteriormente, exponer los resultados. En la segunda fase, se solicitó que construyeran la figura en GeoGebra y experimentaran con las herramientas para dar solución a la tarea. En esta fase a los participantes se les sugirió reunirse en dos equipos y realizar un reporte en el que detallaron los procesos y resultados obtenidos para la tarea.

3.3.2.1 Implementación de la Tarea 2: "Longitud del segmento DE en una configuración geométrica"

La Tarea 2 se aplicó a la semana siguiente de haber concluido con la cuarta solución de la tarea de "Maximizar el área de un triángulo". Para esta segunda tarea, el instructor del curso proyectó el enunciado y la figura del problema y solicitó a los participantes analizar y proponer al menos una manera de determinar la longitud del segmento DE. Se otorgó un tiempo de 15 minutos a los participantes, con la finalidad de que identificaran los elementos principales del problema y propusieran una ruta de solución. Los participantes utilizaron su cuaderno para realizar dibujos, anotaciones y desarrollar procedimiento algorítmicos para diseñar una solución; sin embargo, tuvieron dificultades para realizar la construcción debido a que no tenían las herramientas adecuadas, ya que una de las principales dificultades fue inscribir al círculo en el triángulo isósceles de modo que la circunferencia fuera tangente con cada uno de los lados del triángulo. Poco a poco los participantes comenzaron a utilizar su equipo de cómputo para realizar la construcción geométrica con GeoGebra y comenzaron a utilizar las herramientas del software para aplicar estrategias tales como inclusión de trazos auxiliares y la medición de atributos. Por lo anterior, el SGD fue para ellos de gran importancia en el proceso de experimentación y les auxilió para hallar experimental y empíricamente la longitud del segmento DE. Al finalizar la fase uno, cada participante realizó una exposición plenaria breve (5 minutos como máximo) en la que debían exponer sus propuestas.

Durante la exposición, los participantes no aportaron justificaciones para asegurar la validez de la solución, esto debido a que hicieron uso de la estrategia de medición de atributos para determinar la longitud del segmento. Solo un participante logró encontrar la solución al problema planteando una ecuación para determinar el radio de la circunferencia y usando semejanza de triángulos (Figura 2). Se obtuvo evidencia en una exposición oral no grabada basada en la experimentación realizada en GeoGebra para establecer una ruta para llegar a una solución.

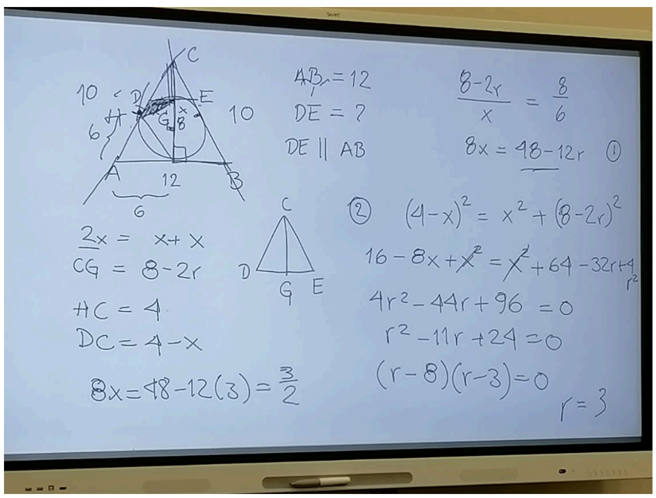


Figura 2. Solución para determinar la longitud del segmento DE en la fase 1.

Al término de las exposiciones, se solicitó a los participantes reunirse, por afinidad, en dos equipos para hallar al menos tres soluciones a la tarea y entregar un reporte detallado de las rutas de solución. El Equipo A se integró por tres miembros, mientras que el Equipo B se conformó por cinco miembros. Cada equipo se reunió fuera del horario de clase para trabajar la tarea por espacio de una semana. En la siguiente sesión de clases, los equipos presentaron sus conclusiones y hallazgos al problema (se definen con mayor precisión en el capítulo 4), obteniendo de parte del equipo A tres soluciones y del equipo B dos soluciones, las cuáles también fueron expuestas durante la sesión, entregando el reporte elaborado al profesor.

3.3.3 "El Tesoro del pirata"

La tarea denominada *Tesoro del Pirata* tiene una larga historia como herramienta didáctica, así como una amplia relación con resultados geométricos, que se describen en el apéndice A de esta tesis. La Tarea fue pensada para que los participantes la abordarán de manera individual en tres fases. La primera fase consistió en ubicar los objetos en el plano, como lo indica el planteamiento del problema; la segunda fase consiste en considerar la desaparición de la palmera y la factibilidad de hallar el tesoro sin ese punto de referencia; finalmente, la última fase consiste en hallar al menos tres soluciones al problema y realizar un reporte escrito detallando el proceso de solución.

3.3.3.1 Implementación de la tarea "El tesoro del pirata"

Cuando abordaron esta tarea, los participantes ya se encontraban familiarizados con las TMS y con el manejo de GeoGebra. Previo a la entrega del problema, el instructor del curso narró una breve historia de piratas y, después de una breve discusión con los estudiantes, repartió una hoja con el enunciado de la tarea y un dibujo que mostraba la palmera, la roca en forma de halcón, y la roca en forma de búho. Después, el instructor pidió que se diera lectura y, sin usar el software, preguntó si era posible hallar el tesoro. Se dió un tiempo de 15 minutos para que los participantes leyeran nuevamente el enunciado del problema para comprenderlo. Después, se comentó a los estudiantes que con el paso del tiempo la palmera cayó, y desapareció, quedando solamente las rocas en forma de aves. Se volvió a preguntar si era posible hallar el tesoro sin conocer la ubicación de la palmera.

Los participantes utilizaron su cuaderno y el dibujo impreso como referencia para realizar representaciones de los objetos. Uno de los participantes preguntó si la ubicación de la palmera era la que se mostraba en el dibujo, a lo que se respondió que no, que la palmera podía estar ubicada en cualquier punto ya que había desaparecido. Transcurridos los 15 minutos el instructor pidió a los participantes que usaran Geogebra para abordar el problema. Durante la primera sesión los participantes se limitaron a representar los objetos con puntos y a unir esos puntos con los segmentos de acuerdo a la instrucción dada en el enunciado de la tarea (Fase 1). El instructor solicitó a los participantes revisar el problema y mostrar sus observaciones en la siguiente sesión de clase.

En la siguiente sesión, el instructor hizo una breve recapitulación del problema y solicitó a tres participantes comentar sus observaciones, las cuáles se orientaron sobre el punto que representa a la palmera y cómo al arrastrar el punto se concluye que el tesoro es un punto fijo que no depende de la posición de la palmera. En la Fase 2, haciendo uso de GeoGebra, los participantes no sólo arrastraron el punto que representa a la palmera, sino que cambiaron de posición diversos objetos de la configuración dinámica, para ver el comportamiento de estos y la posición del tesoro.

Posteriormente, los participantes trabajaron la tarea de manera individual para buscar, al menos, tres soluciones con GeoGebra (Fase 3). En esta fase también realizaron anotaciones para elaborar sus respectivos reportes. En este momento, los participantes tenían un mejor manejo del software, así como mayor fluidez para expresar sus avances y hallazgos verbalmente al instructor, para que les orientará sobre cómo precisar o mejorar la ruta o rutas de solución.

3.4. Procesamiento y análisis de la información

El análisis de la información se llevó a cabo en dos etapas. La primera etapa consistió en la recopilación de los reportes escritos generados por los participantes al término del curso. La segunda etapa incluyó la reducción de la información y el análisis de esta, mediante la identificación de estrategias usadas por los participantes. Dichas estrategias fueron catalogadas como se indica en la Tabla 2. Las categorías iniciales incluyeron las heurísticas propuestas por Polya (1973), así como algunas estrategias relacionadas con el arrastre (Hollebrands, 2012; Hölzl, 1996). A cada estrategia se le asoció un color y se procedió a identificar los fragmentos de texto, en los reportes escritos o en las notas de campo, que correspondía con alguna de estas categorías.

Código	Heurísticas (Estrategías)
AN	Analogía.
RP	Relacionar un problema con el que se trata de resolver.
DR	Descomponer y recomponer el problema.
DF	Dibujar la figura.
EA	Elementos auxiliares.
EH	Examinar la hipótesis.
G	Generalización.
P	Casos particulares
EC	Plantear una ecuación.
PD	Enunciar el problema de forma diferente.
PA	Problema auxiliar.
TR	Trabajar en reversa.
MA	Medición de atributos
LG	Búsqueda de lugares geométricos
AG	Arrastre Guiado

Tabla 2. Categorización, a priori, de las estrategías de los participantes.

Posteriormente, una vez identificadas las estrategias usadas para resolver cada tarea, se elaboró una tabla en la cuál se concentra la información obtenida por participante; así como las estrategias esperadas y las empleadas. En cada sección del análisis de resultados se muestra una tabla con aquellas estrategias efectivamente utilizadas por los participantes. Se consideró como unidad de análisis a los párrafos de texto en los reportes escritos. En cada párrafo de los reportes se marcaron con un color diferente, las líneas de texto que hacían referencia, explícita o implícitamente, a heurísticas o estrategias empleadas por los participantes. Además, se trató de reconocer la posible contribución de GeoGebra al proceso de aplicación o implementación de tales estrategias.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

4.1. Introducción

En este capítulo se exponen los resultados derivados del análisis de la información empírica que se recolectó. Es importante recordar que para las tareas 1 y 3, la información se obtuvo de los reportes individuales de los participantes; mientras que para la tarea 2, se tiene un reporte por equipo. También se cuenta con notas de campo realizadas por el investigador.

4.2. Resultados

Para analizar los resultados de las tareas 1 y 3, los reportes se clasificaron en categorías que comparten estrategias, con la finalidad de reducir la extensión de los resultados y facilitar la identificación de patrones de significado. Para el análisis de los reportes concernientes a la tarea 2 no hubo necesidad de agrupar debido a que se trabajó en equipo. En la presentación de resultados se eligieron aquellos reportes que son representativos de las estrategias utilizadas.

4.2.1. Resultados de la tarea 1: Maximizar el área de un triángulo

En esta sección analizaremos los reportes de los participantes al abordar la Tarea 1, en donde se destaca que las principales estrategias que utilizaron son dibujar la figura, medición de atributos, planteamiento de la ecuación y arrastre. Se empleó el uso de un sistema de nomenclaturas que combina la inicial del nombre del participante y el número de línea en donde se encuentra la estrategia. Por ejemplo: La estrategia de dibujar la figura del reporte de Christian se identifica en la línea 5, por lo que el formato usado es C 5. Por otro lado, si la estrategia se encuentra en más de una línea se usará un guión medio para unirlo. Por ejemplo: La estrategia de dibujar la figura del reporte de Renata se identifica en las líneas 5 y 6, por lo que el formato usado es R 5-6.

4.2.1.1. El caso de Christian, Renata, Leonardo, Abril y Bárbara

Durante la revisión de los reportes, se identificó que la primera estrategia empleada fue la de dibujar la figura usando GeoGebra (C 5; R 1-5; A 6; B 8-10), así como algunas analogías en el proceso para abordar la tarea, por lo que se ha considerado pertinente reportar únicamente el trabajo de un participante, el cual es representativo del trabajo grupal. Además no se reportan aquellos trabajos en los que se identifican errores conceptuales que no permitieron a los participantes avanzar en la solución del problema (Bárbara), carecen de justificaciones (Abril), sus planteamientos son erróneos (Renata y Leonardo) o no realizaron el reporte ni usaron Geogebra (Víctor, Marcela e Isabel).

Para el caso de Christian, la configuración dinámica en GeoGebra le permitió conjeturar que para que el triángulo APD alcance área máxima, su hipotenusa debe tener pendiente igual a uno y que la tangente a la circunferencia en P tiene pendiente negativa de uno (C 6-8). Lo anterior se verificó mediante el empleó de las estrategias de medición de atributos y de arrastre; también utilizó la herramienta "Área" de GeoGebra con la cual pudo observar cómo va cambiando el área al mover el punto B, hasta obtener un valor máximo, que se logra cuando la pendiente vale uno (Figura 4.1).

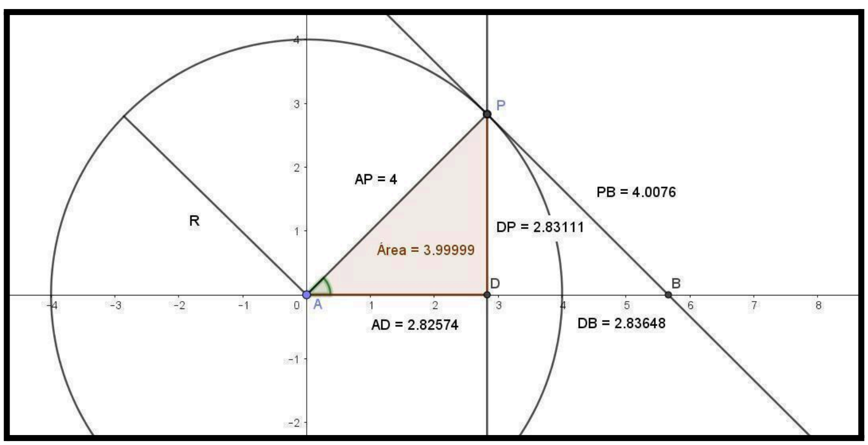


Figura 4.1. Estrategias de medición de atributos y arrastre.

Cabe señalar que junto con la medición de atributos también se observó el análisis de un caso particular, dado que el radio de la circunferencia y la hipotenusa del triángulo APD son iguales. Se consideró un caso particular donde el valor del radio es igual a 4 unidades lo que contribuyó a la generalización del caso realizando un cambio de variables con los segmentos AD, DP y PA, nombrados ahora “x”, “y” y “R” respectivamente (Figura 4.2).

Se observó que a partir del cambio de variables propuesto se aplicó la estrategia de planteamiento de una ecuación para que, por medio del teorema de Pitágoras, pudiera determinar la distancia del segmento AD y del resultado obtenido hallar la distancia de AB ($\sqrt{2}R$) la cuál indicaría la posición de B para determinar el área máxima.

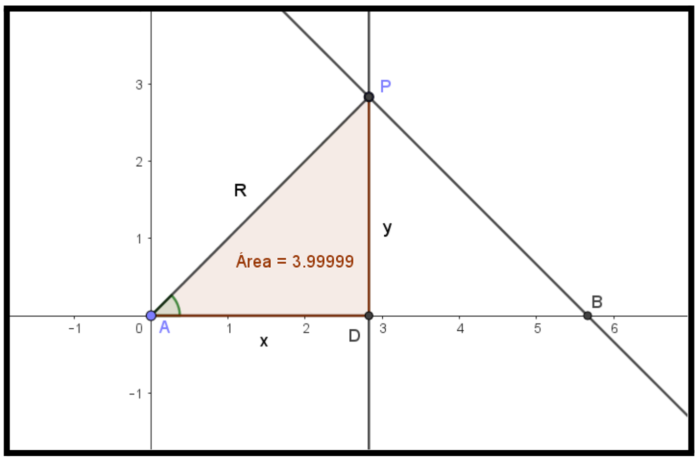


Figura 4.2. Distancia del segmento AB

En la Tabla 3 se muestran las estrategias que los participantes utilizaron

	Heurísticas (Estrategias)/ Participante	Christian	Bárbara	Leonardo	Renata	Abril	Isabel	Víctor	Marcela
1	Dibujar la figura.						NA	NA	NA
2	Generalización.						NA	NA	NA
3	Plantear una ecuación.						NA	NA	NA
4	Medición de atributos.						NA	NA	NA
5	Arrastre Guiado.						NA	NA	NA
6	Casos particulares						NA	NA	NA

Tabla 3. Estrategias exhibidas para la Tarea 1

Posterior a la aplicación de la Tarea 1, el instructor mostró a los participantes cuatro rutas de solución distintas. En una de las soluciones, se utilizó la derivación implícita; sin embargo, los participantes tuvieron dificultades para comprender esta ruta de solución ya que solo contaban con nociones básicas de cálculo diferencial o incluso no contaban con conocimientos previos sobre este tema.

4.2.2. Resultados de la Tarea 2: Encontrar la longitud del segmento DE si se sabe que $DE \parallel AB$

En esta sección se analizarán los reportes de la Tarea 2 para los equipos A y B. Se destaca que las principales estrategias utilizadas fueron dibujar la figura, trazo de elementos auxiliares, medición de atributos, planteamiento de una ecuación, casos particulares, descomponer el problema, generalización y examinar la hipótesis. El equipo A reportó tres soluciones, pero sólo se analizó la primera debido a que contiene más detalles sobre las estrategias utilizadas. Además, en las otras soluciones se repiten procedimientos y estrategias, a excepción de la generalización y descomposición del problema. Se empleó un sistema de nomenclaturas para identificar a los reportes de ambos equipos usando su identificador A o B y el número de línea en donde se encuentra la estrategia. Por ejemplo: La estrategia de dibujar la figura del reporte del equipo A se identifica en la línea 5, por lo que el formato usado es EA 5. Por otro lado, si la estrategia se encuentra en más de una línea se usará un guión medio para unirlo.

4.2.2.1. Equipo A (Christian, Bárbara y Leonardo): Solución 1

El equipo A reportó tres soluciones apoyándose del SGD y de lápiz y papel. La primera estrategia identificada fue la de dibujar la figura en Geogebra (EA 6-7, Figura 4.3). Después, se aplicó la estrategia de incluir trazos auxiliares como el punto K, para dividir al triángulo ACB en dos triángulos rectángulos semejantes, el AKC y BKC (EA 10). También se trazó el punto O, para señalar el centro de la circunferencia. Para determinar la longitud del segmento AC se aplicó el Teorema de Pitágoras.

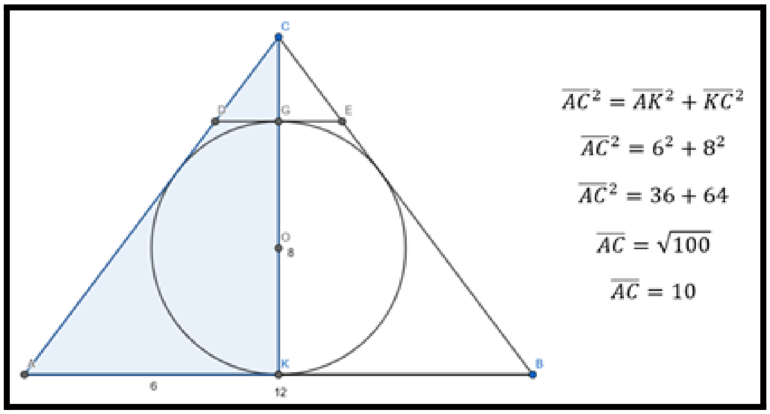


Figura 4.3. Trazo de elementos auxiliares.

Junto con la estrategia de elementos auxiliares, se etiquetó al punto H, y los participantes indicaron que: “Interseca sobre el segmento AC con la circunferencia O y podemos observar que la distancia del segmento AK es igual a segmento AH, por ser puntos de tangencia” (EA 12-13), por lo que conjeturan que el segmento HC=4, lo anterior se comprobó con la estrategia de medición de atributos (Figura 4.4, Reporte EA).

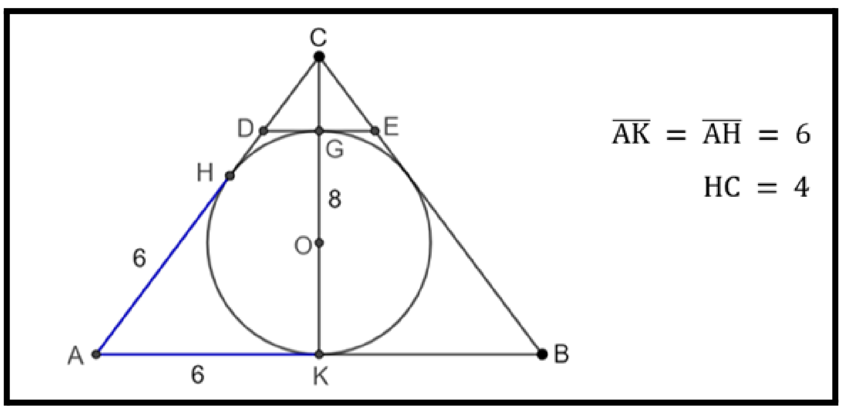


Figura 4.4. Medición del segmento AK y AH

Con la estrategia de trazos de elementos auxiliares, se construyó una perpendicular al segmento AC por el punto O que representa al radio de la circunferencia y uno de los lados del triángulo rectángulo HCO (Figura 4.5, Reporte EA).

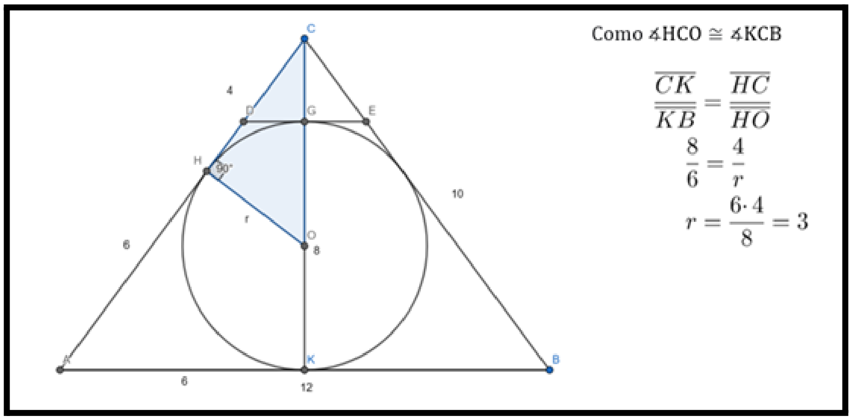


Figura 4.5. Trazado de elementos auxiliares.

Aplicando semejanza en los triángulos HCO y KCB, los participantes determinaron que la medida del radio es igual a 3, por lo que el diámetro de la circunferencia es de 6. Con el dato anterior, determinaron que la diferencia entre la altura del triángulo KCB y el diámetro de la circunferencia es igual al segmento CG=2.

El segmento DE vale el doble que el segmento DG por lo que se establece otra relación de semejanza entre los triángulos AKC y DGC para hallar la longitud del segmento DG (Figura 4.6, Reporte EA).

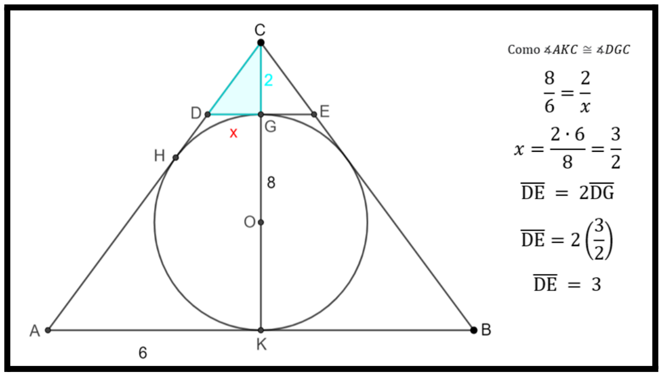


Figura 4.6. Longitud del segmento DE

De acuerdo con el reporte del Equipo A se realizó un diagrama (Figura 4.7) que muestra las estrategias aplicadas para hallar la solución de la Tarea 2. La estrategia de trazado de elementos auxiliares tuvo un rol importante en combinación con las estrategias de dibujar la figura, planteamiento de una ecuación y medición de atributos para hallar la solución.

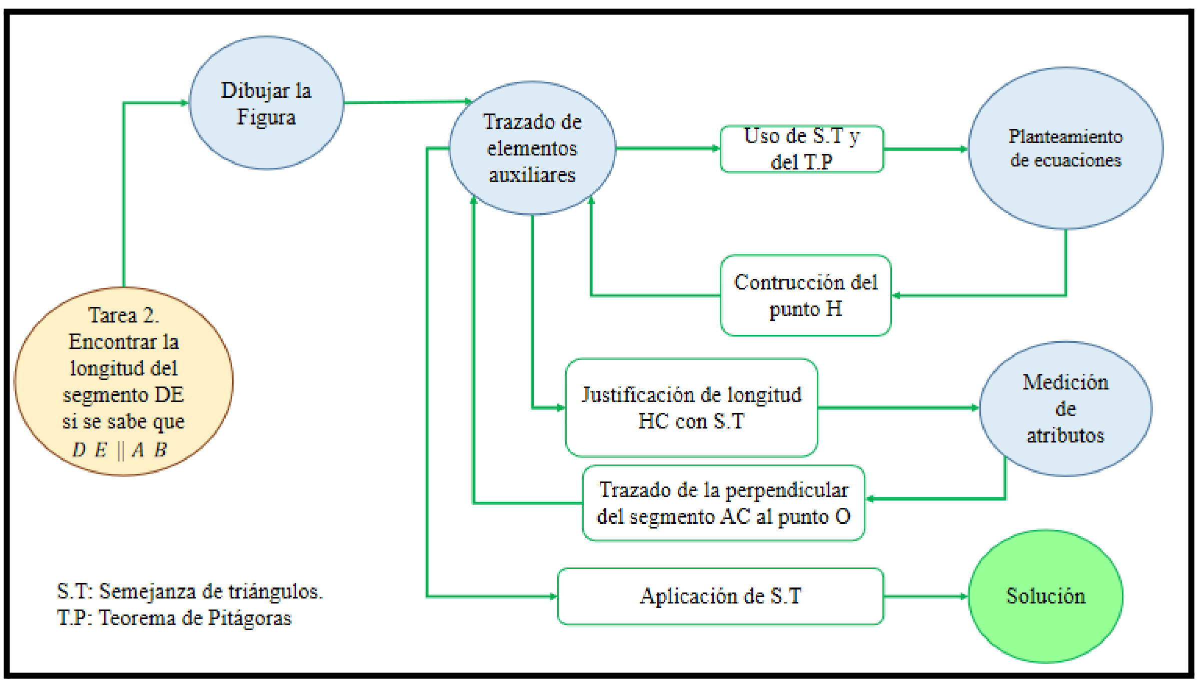
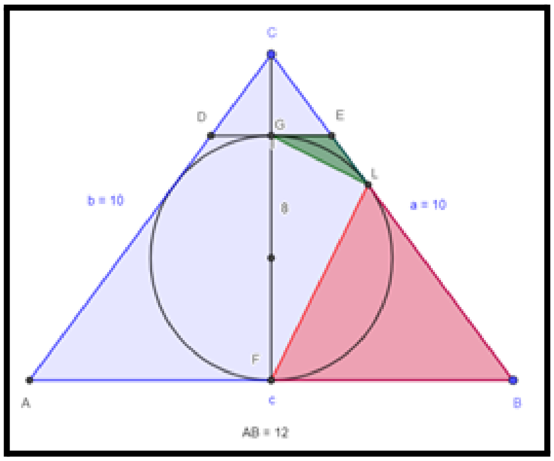


Figura 4.7. Ruta de solución de la Tarea 2

4.2.2.2 Equipo B (Renata, Abril, Isabel, Marcela y Víctor)

El equipo B utilizó estrategias semejantes a las del otro equipo, a excepción de las estrategias de examinar la hipótesis y casos particulares. Tales estrategias se aplicaron debido a que las medidas del triángulo FCB constituyen una terna pitagórica, por lo que examinan la hipótesis para triángulos con medidas de 28 ternas pitagóricas (Figura 4.8, Reporte EB).



CATETO 1	CATETO 2	HIPOTENUSA	*r*	SEGMENTO *DE*
3	4	5	1.5	1.5
5	12	13	3.33	4.44
6	8	10	3	3
7	24	25	5.25	7.88
8	15	17	4.8	5.76
9	40	41	7.2	11.52
11	60	61	9.17	15.28
12	35	37	8.57	12.24
13	84	85	11.14	19.1
15	112	113	13.13	22.97
16	63	65	12.44	19.36
17	144	145	15.11	26.86
19	180	181	17.1	30.78
20	99	101	16.36	26.78
28	195	197	24.27	42.06

Figura 4.8. Tabla de ternas pitagóricas

A partir de examinar la información de la tabla, y de realizar algunos cálculos, los participantes conjeturaron que es posible construir el triángulo FCB con circunferencia inscrita usando ternas pitagóricas, no obstante al tratar de generalizar el problema se dan cuenta que sólo funciona para ternas proporcionales a 3, 4 y 5 (Figura 4.9, Reporte EB).

CATETO 1	CATETO 2	HIPOTENUSA	r	SEGMENTO DE
3	4	5	1.5	1.5
6	8	10	3	3
9	12	15	4.5	4.5
12	16	20	6	6
15	20	25	7.5	7.5
18	24	30	9	9
21	28	35	10.5	10.5
24	32	40	12	12
27	36	45	13.5	13.5
30	40	50	15	15

Figura 4.9. Ternas pitagóricas proporcionales

Como se ha mencionado, los equipos emplearon estrategias análogas (Tabla 6) pero su aplicación fue diferente. Por ejemplo, cuando ambos equipos utilizaron la estrategia de trazado de elementos auxiliares, el Equipo A lo hace para construir el triángulo HCO y aplicar semejanza de triángulos con respecto al triángulo KCB para hallar la longitud del segmento DE, por su parte el equipo B construyó los triángulos isósceles GEL y FBL, con el triángulo rectángulo CGE utilizaron la estrategia de planteamiento de la ecuación para hallar el valor de dos incógnitas r y x, que surgen cuando aplican semejanza de triángulos para hallar el segmento dado (Figura 4.10).

	Heurísticas (Estrategías)/ Participante	EQUIPO A	EQUIPO B
1	Descomponer y recomponer el problema.		
2	Dibujar la figura.		
3	Elementos auxiliares.		
4	Examinar la hipótesis.		
5	Generalización.		
6	Casos particulares		
7	Plantear una ecuación.		
8	Medición de atributos.		

Tabla 4. Estrategias utilizadas por los equipos

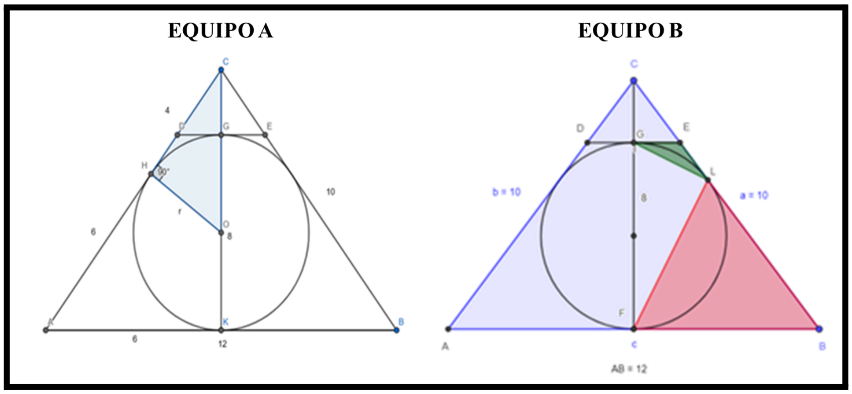


Figura 4.10. Comparativo de uso de estrategias

En la clase posterior a la implementación de la tarea 2, el instructor abordó una solución para la tarea en la cuál hizo uso de semejanza de triángulos y generalizó la solución del problema.

4.2.3. Resultados derivados de la tarea 3 "El tesoro del pirata"

En esta sección se analizarán los reportes de la Tarea 3. Las principales estrategias que se destacan son descomponer el problema, dibujar la figura, trazo de elementos auxiliares, generalización, casos particulares, planteamiento de una ecuación, medición de atributos y arrastre. El reporte que se presenta fue seleccionado debido a que aplicó una mayor cantidad de estrategias en comparación con los demás participantes.Se empleó un sistema de nomenclaturas que combina las iniciales del tesoro del pirata y la inicial del nombre del participante, así como el número de línea en donde se encuentra la estrategia.

4.2.3.1. El tesoro del pirata: El caso de Christian

La primera estrategia utilizada fue dibujar la figura en el SGD (TPC 51-52), los objetos se etiquetaron de la siguiente forma: Palmera (P); Piedra Halcón (A); Piedra Búho (B) , estaca 1 (E1); estaca 2 (E2) y tesoro (T). Usando la estrategia de trazos auxiliares se trazó un segmento para unir los puntos E1 y E2; A, E1 y P; A y B; P, B y E2 como se muestra en la Figura 4.11.

Con la estrategia de arrastre, exploró el problema moviendo los puntos P, A y B. También se identificó la estrategia de medición de atributos para medir los ángulos E1AP y PBE2, de lo anterior se aplicó la estrategia de arrastre en P para verificar si los ángulos rectos permanecían en la construcción..

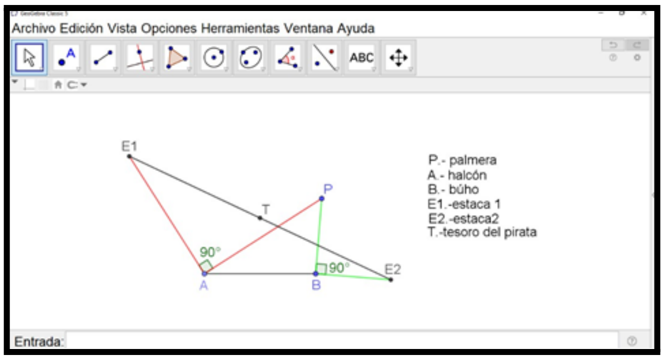


Figura 4.11. Elementos del mapa del tesoro usando GeoGebra

El participante realizó otra figura con nuevas etiquetas, y aplicando la estrategia de arrastre se movió a la Palmera de manera aleatoria, permitiendo conjeturar que la ubicación del tesoro no depende de la ubicación de la palmera (TPC 54, 56-57; Figura 4.12).

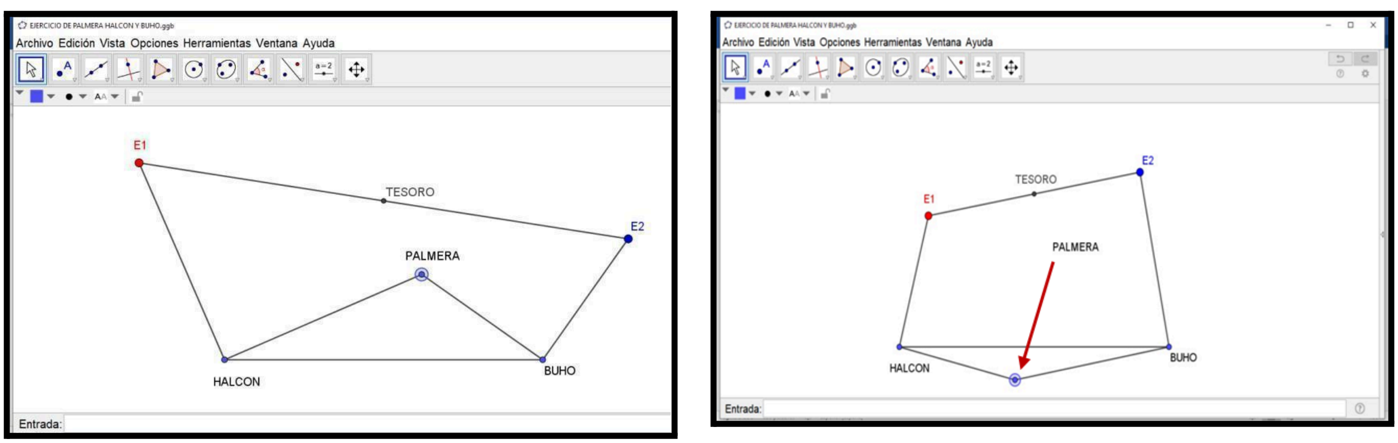


Figura 4.12. Arrastre del punto que representa a la palmera

A partir de las estrategias anteriores y del SGD, se identificó que el tesoro se encuentra "A una distancia igual a la mitad que existe entre las dos rocas" (TPC 59-60) es decir la ubicación del tesoro es perpendicular al punto medio del segmento halcón y búho (Figura 4.13).

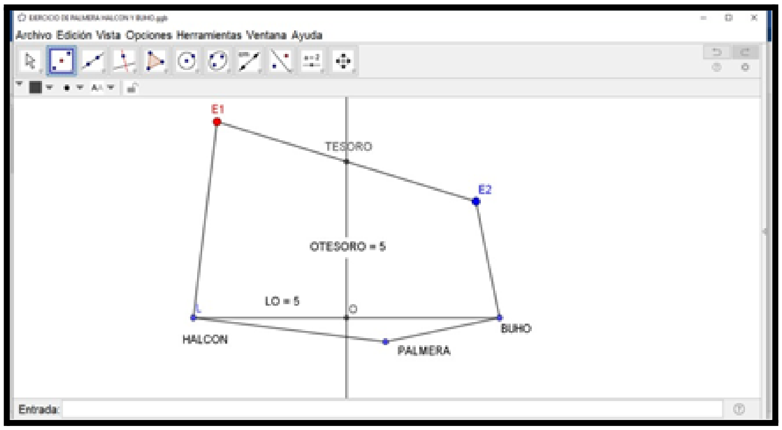


Figura 4.13. Posición del tesoro

Se construyó otra figura usando un plano coordenado e identificando los objetos como: palmera (P), piedra en forma de halcón (H), piedra en forma de búho (B), tesoro (T), estaca 1 (E1) y estaca 2 (E2). Después se aplicó la estrategia de casos particulares para analizar dos instancias.

El primer caso considera las coordenadas P (0,4), H (-4,0) , B (4,0), E1 (-4,4) y E2 (4,4), es decir, cuando P es el punto medio del segmento HB (Figura 4.14). Con la herramienta Rectas, trazó los segmentos para unir los puntos y se realizó una ecuación para obtener la coordenada de T y verificar que el tesoro se sitúa perpendicularmente al punto medio de HB (TPC 68-71).

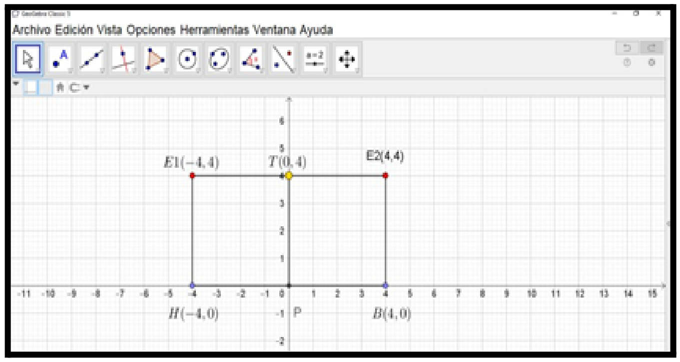


Figura 4.14. El tesoro del pirata en el plano coordenado.

En el segundo caso, se ubicó a P en (0,4), E1(-8,4) y E2 (8,4), se planteó una ecuación para determinar el punto medio de HB y verificar que coincida con la ubicación de T (0,4) de manera perpendicular (Figura 4.15).

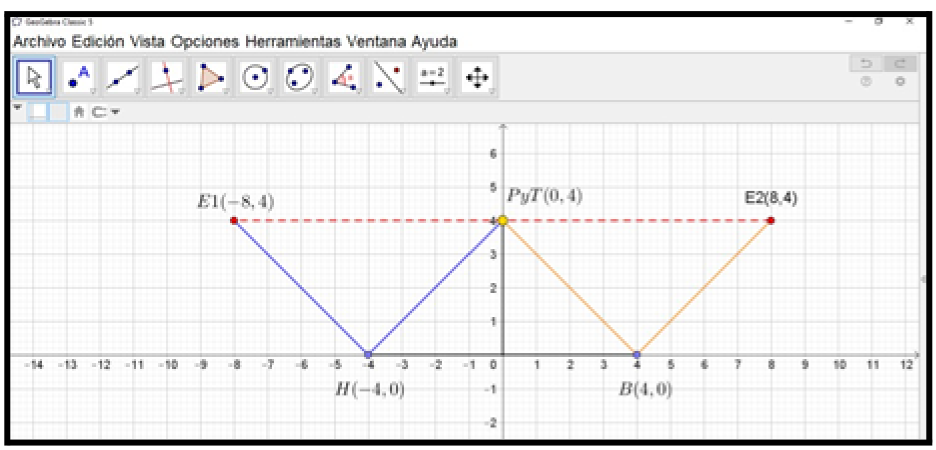


Figura 4.15. Segundo caso particular

De los casos particulares anteriores, el participante generalizó el problema considerando que el punto medio del segmento HB se encuentra en (0,0), mientras que E1(-2a, 0) y E2 (2a, 2a) dependen de P (-a, a). Usando la ecuación para hallar el punto medio del segmento E1E2 se ubicó a T en (0,a), de tal manera que justificó la conjetura realizada al comienzo (TPC 120, Figura 4.16).

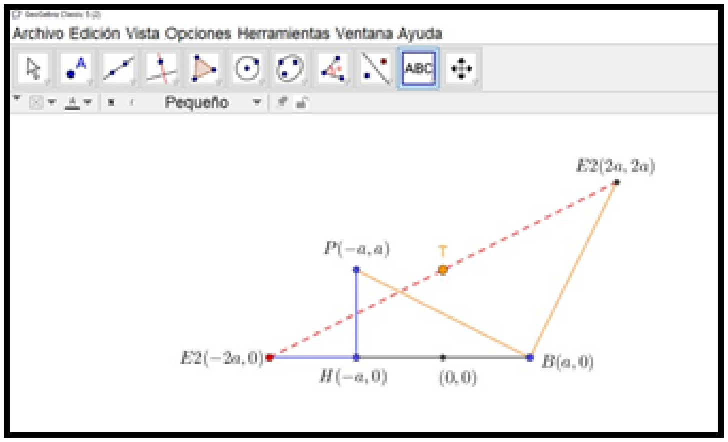


Figura 4.16. El caso general.

El participante construyó una segunda solución, aplicando la estrategia de examinar la hipótesis sosteniendo que T no depende de la ubicación de P, por lo que realiza una construcción similar a la Figura 4.14, ubicando a T de forma perpendicular a P, siendo éste último el punto medio del segmento HB (Figura 4.17).

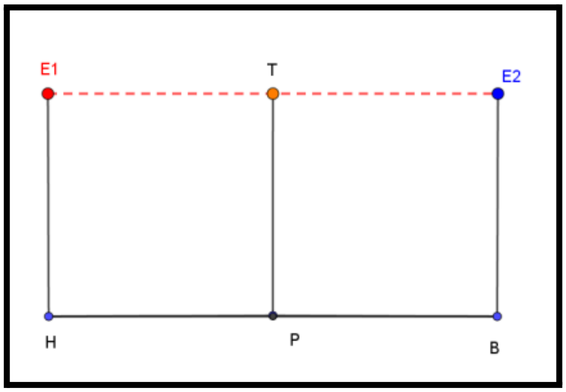


Figura 4.17. Estrategia de examinar la hipótesis

A partir de la figura anterior, se aplicaron las estrategias de arrastre y trazos auxiliares para mover a P y trazar paralelas, perpendiculares y puntos de intersección como se muestra en la Figura 4.18. Lo anterior le permite construir dos pares de triángulos congruentes PKB y BJE2; HKP y HFE1; los rectángulo FIQJ y FJRE1. Aplicando la estrategia de descomponer el problema establece relaciones de congruencia e igualdad de áreas.

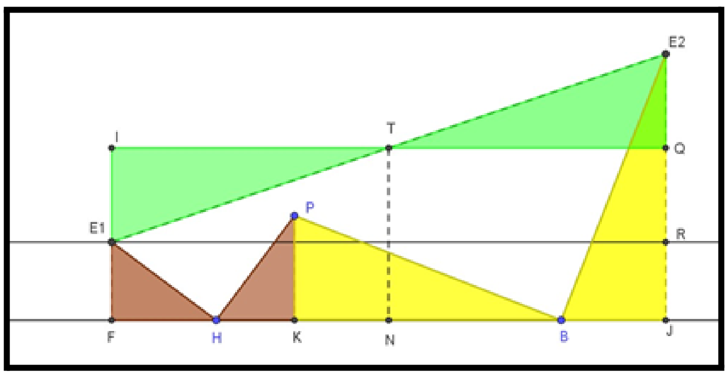


Figura 4.18. Trazo de elementos auxiliares

Lo anterior le ayuda a comprobar que "que T se encuentra en la línea perpendicular a una distancia de la mitad que existe entre ambas piedras o puntos H y B" (TPC 156-157).

En la Tabla 5 se muestra un resumen de las estrategias utilizadas. Se puede observar que las estrategias más utilizadas fueron dibujar la figura, trazar elementos auxiliares y el arrastre guiado. Por otro lado, las estrategias como generalización y revisión de casos particulares solo se utilizaron por Christian, quien fue uno de los participantes que utilizó una mayor cantidad de estrategias. Las estrategias de medición de atributos y planteamiento de ecuación fueron otras estrategias ampliamente utilizadas.

	Heurísticas (Estrategias)/ Participante	Christian	Renata	Leonardo	Abril	Bárbara	Victor	Isabel	Marcela
1	Descomponer y recomponer el problema.								
2	Dibujar la figura.								
3	Elementos auxiliares.								
4	Generalización.								
5	Casos particulares								
6	Plantear una ecuación.								
7	Medición de atributos.								
8	Arrastre Guiado.								

Tabla 5. Estrategias utilizadas para la Tarea del Tesoro del Pirata.

4.4. Identificación de patrones, regularidades, tendencias o discordancias

Las estrategias que tuvieron mayor presencia en las tareas fueron la de dibujar la figura, trazar elementos auxiliares, medición de atributos y el arrastre. En la tarea 1 se observa que la aplicación de estrategias es escasa así como las justificaciones de los resultados obtenidos. Para la tarea 2, se observó que los participantes realizaban justificaciones de las estrategias que implementan para abordar la tarea, así como un mejor manejo de las herramientas del SGD. En la tarea 3 se requirió una mayor demanda cognitiva, y estrategias como análisis de casos particulares, generalización y descomposición del problema eran necesarias para explorar soluciones más complejas. De acuerdo con Smith y Stein (2011) la demanda cognitiva se refiere al conjunto de esfuerzos que el estudiante requiere para abordar un problema y se categoriza como una tarea de alta demanda cognitiva cuando el resolutor logra conectar sus conocimientos para dar solución a la tarea (citado en Candela, 2016, p.315)

Posteriormente a la aplicación de la tarea 3, el profesor abordó la solución por medio del SGD, en la cuál realizó construcciones de elementos auxiliares para comprobar la hipótesis de la ubicación del Tesoro del Pirata.

Al concluir el curso, se solicitó a los participantes escribir un reporte en el cual reflexionaran sobre el rol de la tecnología cuando se resuelven tareas con múltiples soluciones, en este se observaron cuatro aspectos relacionados a el uso de un SGD, estrategias, Tareas con Múltiples Soluciones y trabajo en equipo. La nomenclatura que se emplea para identificar las producciones escritas es RF que significa reporte final y la inicial del nombre del participante, además como en los casos anteriores se identificaron las líneas en las que se identificaron los aspectos importantes ya antes mencionados. En el reporte final se logró identificar cómo el uso del SGD influyó en la solución de las Tareas, debido a que les facilitó manipular los objetos en lugar de imaginar cómo podrían moverse de forma adecuada (RFA 17-21), por otro lado las herramientas que ofrece el software ayudan a identificar propiedades de las construcciones geométricas y con ayuda de la estrategia de trazos auxiliares permite encontrar la ruta para justificar la solución obtenida (RFR 35-39).

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

5.1 Introducción

En esta sección se sintetizan los resultados obtenidos para responder a la pregunta de investigación que se planteó desde el capítulo primero, además se realiza un comparativo con las investigaciones revisadas con la finalidad de realizar algunas sugerencias útiles para investigaciones futuras. También se indican los alcances y limitaciones que se obtuvieron en el desarrollo de este trabajo de investigación.

5.2 Respuesta a la pregunta de investigación

En el capítulo primero se estableció que la pregunta de investigación es: ¿Qué estrategias muestran profesores de bachillerato cuando resuelven tareas con múltiples soluciones usando Geogebra? Las estrategias que los profesores emplearían en la resolución de tareas con múltiples soluciones por medio de GeoGebra serían el trazado de elementos auxiliares, medición de atributos y arrastre guiado. Sin embargo, después del análisis de los datos empíricos se identificó que la estrategia de arrastre no fue usada en una de las tareas (tarea 2) y emergieron otras estrategias no consideradas inicialmente tales como el uso de casos particulares, generalización, planteamiento de ecuaciones y dibujar la figura. Debido a que los problemas son de naturaleza geométrica, la estrategia más común que utilizaron los participantes fue dibujar una figura que satisficiera las condiciones expresadas en el enunciado de la tarea, dadas las facilidades que ofrece la herramienta en este aspecto. A partir de esta estrategia inicial se fueron incluyendo otras heurísticas como el trazado de elementos auxiliares (mediatrices, bisectrices, circunferencias y segmentos). Cabe mencionar que algunos de los participantes aplicaron ambas estrategias, pero al no encontrar relaciones entre ellas abandonaron la ruta.

5.3. Discusión de los resultados

La estrategia de incluir trazos auxiliares como mediatrices, perpendiculares y paralelas, en una configuración dinámica, permitió a algunos participantes diseñar una ruta de solución casi directa, pero para otros, constituye solo una estrategia para llevar a cabo una exploración inicial del problema, en la cuál construyen circunferencias, trazan segmentos o nuevas figuras con la finalidad de encontrar relaciones entre los objetos geométricos; sin embargo, en algunos casos no identifican tales relaciones lo cual puede tener varias causas una posible es no identificar visualmente trazos relevantes en el proceso de entendimiento y solución del problema **e**.

Por otra parte, estrategias como la medición de atributos (longitudes y ángulos), jugaron un rol importante en la formulación de conjeturas, debido a que los participantes realizaron cálculos con esta estrategia para verificar que sus conjeturas eran correctas y la estrategia les permitió aproximarse, sucesivamente a la solución del problema. Al igual que en el trabajo de Hollebrands (2007), en este trabajo se obtuvo evidencia de que las estrategias de arrastre y de medición de atributos, fueron indispensables para que los estudiantes lograran tener una comprensión más profunda de los problemas en los cuáles aplicaron dichas estrategias, y aunque en el estudio de Hollebrands (2007) fue aplicado a estudiantes de secundaria, se observan algunas similitudes en cuanto al uso de la estrategia de medición de atributos, debido a que en este trabajo los profesores la emplearon para comprobar que el cálculo de las longitudes que determinaban o que la distancia entre ciertos puntos (puntos medios) era la indicada. En cuanto a la estrategia de arrastre, fue una de las estrategias más utilizadas en dos de las tres tareas (1 y 3) debido a que se emplearon sus distintas modalidades, incluidos el arrastre errante, el arrastre guiado y la prueba de arrastre (ver apéndice F), este último sólo para verificar que la construcción geométrica era robusta (ver apéndice F).

Las estrategias anteriores, también fueron útiles para identificar relaciones entre los objetos que conforman una configuración dinámica. Como ejemplo se puede mencionar el caso de la tarea 1, ya que al realizar el arrastre guiado sobre el eje horizontal uno de los participantes pudo observar cómo las longitudes de los catetos del triángulo APD varían, así como el área. En el caso del Tesoro del Pirata, cuando los participantes realizaron el arrastre de tipo errante observaron que no importaba de qué manera movieran los puntos que representaban las estacas, el tesoro se encontraba en el punto medio de dicho segmento, el cual también midieron para verificar sus observaciones. Cuando se aplicó la estrategia de arrastre en cualquiera de sus modalidades en el problema 3, fue de gran apoyo para los resolutores establecer la conjetura sobre la ubicación del tesoro y brindar un acercamiento a la solución de la tarea (Arzarello, et al., 2002)

Entre otras de las características que se identificaron fue que los profesores tienen dificultades para justificar resultados, así como para expresar ideas claras de forma escrita (RFB 26-29; RFA 34-36; RFI 12-18), lo cuál lleva a pensar que esas mismas dificultades se ven reflejadas en los estudiantes, como se ha identificado en otras investigaciones (Carrión Miranda, 2007; Guimaraes et al., 2008).

Por otro lado, al tener un primer acercamiento a tareas con múltiples soluciones se observa que se encuentran en un conflicto al descubrir que una tarea puede tener distintas rutas de solución y que cada ruta dirigida por una misma estrategia puede generar rutas muy diferentes. En este trabajo se consideró que se deben identificar los procesos y estrategias empleadas cuando se usa GeoGebra al resolver tareas con múltiples soluciones, a diferencia de otros estudios interesados solo en la obtención del resultado y en las estrategias que involucran transformaciones geométricas (Levav-Waynberg (b), 2012; In'am, 2014; Kordaki, 2015). Por otro lado, coincidimos con ellos sobre que en el proceso de resolución de problemas es indispensable que el resolutor sea capaz de entender el problema, diseñar un plan, ejecutarlo y verificarlo.

Hiebert (1997) menciona que conocer sobre un tema es adentrarse en él y ver cómo las cosas funcionan, y para ello se necesita que el resolutor entienda la naturaleza del problema es decir que conecte un nuevo conocimiento con los conocimientos previos que posee. En la revisión de los reportes se buscó identificar si los participantes pasaron por el ciclo del entendimiento matemático (ver sección 2.3.3). Por ejemplo, en la tarea 2, el equipo A diseñó un plan a partir de la construcción geométrica original, y con el uso de la estrategia de trazos de elementos auxiliares los integrantes fueron capaces de establecer una hipótesis respecto de cómo hallar la longitud del segmento. Posteriormente, al verificar empíricamente el resultado con las herramientas de medición fueron capaces de conjeturar y generalizar el caso. En este caso, la elaboración del reporte permitió al equipo estructurar la justificación que se presentó durante la exposición de las rutas de solución. De lo anterior se destaca que el proceso de reflexión se ve ligado a cómo es que los participantes trazaron un plan para abordar la tarea y, a partir de ello, eligieron las estrategias más adecuadas, y a su vez lo comunicaron de forma escrita (reportes) y verbal (exposiciones) interactuando con sus demás compañeros sobre los hallazgos realizados. Considerando lo anterior, dentro de los resultados adicionales, se identificó que los profesores veían de utilidad el escuchar las exposiciones y discusiones que se llevaron a cabo en el aula después de revisar las tareas, debido a que observaban la manera en que sus demás compañeros aplicaban las estrategias en la resolución de problemas y que ellos considerarían como parte de sus recursos para cuando tuvieran que resolver problemas similares. Como se ha señalado anteriormente, el hecho de que el profesor se enfrente a éste tipo de problemas le permite crear conciencia de las dificultades que se presentan en el aula con sus estudiantes y que él debería tener los recursos suficientes para brindarle el apoyo necesario para poder saltar ese obstáculo.

5.4. Alcances y limitaciones del trabajo

El presente trabajo se realizó con un reducido número de profesores de matemáticas, que cursaron el segundo semestre de un posgrado, en una universidad pública del estado de Hidalgo. Por ello los resultados obtenidos no son generalizables a todos los profesores de matemáticas, debido a que los participantes de este estudio tienen una formación distinta entre ellos y diferentes años de experiencia, por lo que los resultados pudieran diferir de otro grupo de profesores con características diferentes.

Una alternativa para fortalecer las conclusiones de este trabajo podría considerar los siguientes aspectos:

I. Realizar grabaciones durante la sesión de clases sobre la manera en que los participantes abordan las tareas, así como solicitar los archivos de las construcciones geométricas, ya que para esta investigación no se contó con el equipo de grabación suficiente y en cuanto a las construcciones realizadas en GeoGebra, no se proporcionaron instrucciones claras sobre cómo compartir los archivos.
II. Formar equipos de trabajo más reducidos para que los participantes tengan una mejor interacción entre pares.
III. Identificar el rol que tiene el profesor sobre las formas de influir en la resolución de tareas de los estudiantes.

Lo anterior, sólo son algunas sugerencias que pudieran tomarse en consideración para investigaciones similares.

5.5. Reflexiones finales

Considero que una de las experiencias obtenidas durante la realización de esta investigación, es que se debe considerar que cada profesor de matemáticas, de cualquier nivel educativo, debiera tener una formación matemática sólida que involucra, entre otras cosas, una disposición permanente a plantear y resolver problemas, además de usar de manera sistemática diversas herramientas digitales para complementar nuestra práctica docente. De esta manera, la práctica como profesores de matemáticas debe contemplar disposición para guiar a los estudiantes en el proceso de aprendizaje. Otra enseñanza fue el considerar la importancia del uso de tecnología en el proceso de aprendizaje, debido a que un software como GeoGebra puede auxiliar al resolutor a representar la información de manera adecuada y que las herramientas con las que cuenta permiten explorar el problema para identificar patrones. Lo anterior se puede lograr cuando quien resuelve el problema cuente con los elementos necesarios para saber emplear de mejor manera dichas herramientas. Por otro lado, el tener la posibilidad de discutir un problema matemático con otros integrantes del grupo, permiten mejorar las formas de expresar las ideas de forma verbal o escrita, y además ayuda a identificar nuevas estrategias que se agregaran a nuestro repertorio para abordar problemas similares.

REFERENCIAS

Al-Huneidi, A., Schreurs, J. (2013). Constructivism Based Blended Learning in Higher Education. In: Lytras, M.D., Ruan, D., Tennyson, R.D., Ordonez De Pablos, P., García Peñalvo, F.J., Rusu, L. (eds) Information Systems, E-learning, and Knowledge Management Research. WSKS 2011. Communications in Computer and Information Science, vol 278. Springer, Berlin, Heidelberg. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-35879-1_74

Antunovic-Piton, B., & Baranovic, N. (2022). Factors affecting success in solving a stand-alone geometrical problem by students aged 14 to 15. *Center For Educational Policy Studies Journal.*, 55-79. Recuperado el 13 de noviembre de 2022 de https://cepsj.si/index.php/cepsj/article/view/889/572

Arnold, V. I. (2006). *Experimental mathematics*. Berkeley, CA: Mathematical Science Research Institute and American Mathematical Society.

Arzarello, F., et al. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri enviroments. ZDM, 34(3), 66-72. doi:https://doi.org/10.1007/BF02655708

Bailey, D. H., Borwein, J. M., Kapoor, V., & Weisstein, E. W. (2006). Ten Problems in Experimental Mathematics. The American Mathematical Monthly, 113(6), 481–509. https://doi.org/10.1080/00029890.2006.11920330

Baker, A. (2008). Experimental mathematics. *Erkenn, 68*, 331–344. https://doi.org/10.1007/s10670-008-9109-y

Barrera-Mora, F., y Reyes-Rodríguez, A. (2016). Designing technology-based tasks for enhancing mathematical understanding through problem solving. Springer, 620, 183-192. doi:https://doi.org/10.1007/978-3-319-42147-6_16

Barrera-Mora, F., y Reyes-Rodríguez, A. (2017). Tareas con diversas soluciones: estructura conceptual en profesores de matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 19*(1), 110-122. Recuperado el 28 de octubre de 2022 de https://redie.uabc.mx/redie/article/view/971

Barrera-Mora, F., y Reyes-Rodríguez, A. (2018). El rol de la tecnología en el desarrollo de entendimiento matemático vía la resolución de problemas. *Educatio Siglo XXI, 36*(3), 41-72. doi:https://doi.org/10.6018/j/349461

Biddlecom, B., & Carr, M. (2011). A longitudinal study of the development of mathematics strategies and underlying counting schemes. International Journal of Science and Mathematics Education, 9(1), 1-24. doi:10.1007/s10763-010-9202-y

Bunge, M. (1985). Formal Science from Logic to Mathematics. In: Epistemology & Methodology III: Philosophy of Science and Technology Part I: Formal and Physical Sciences. Treatise on Basic Philosophy, vol 7. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-5281-2_2

Camargo, L., & Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*(32), 4-8. doi:https://doi.org/10.17227/ted.num32-1865

Campos-Nava, M. (2010). *Principios para el diseño de actividades de aprendizaje matemático con tecnología. Tesis de maestría no publicada*. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

Candela, Amber. (2016). Mathematics Teachers' Perspectives on Professional Development Around Implementing High Cognitive Demand Tasks. doi: 10.4018/978-1-5225-1067-3.ch030.

Carrión Miranda, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. U*NIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 3*(11). https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/1242

Cobb, P. (1994). Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. Educational Researcher, 23(7), 13-20. doi:http://dx.doi.org/10.2307/1176934

Confrey, J. (1990). What constructivism implies for teaching. Journal for Research in Mathematics Education, 4, 107-210. doi:https://doi.org/10.2307/749916

Davis, P. & Hersh R. (1981). *The mathematical experience,* Boston: Birkhäuser.

Eisenhart, M. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991: Ideas from a cultural anthropologist: Implications for mathematics education researchers. Proceedings of the 13th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1, 202-219.

Ernest, P. (2012). What is our first philosophy in mathematics education? For the Learning of Mathematics, 32(3), 8-14. doi:http://www.jstor.org/stable/23391968

Escribano-González, A. (2004). *Aprender a enseñar: fundamentos de didáctica general* (Segunda ed.). España: Universidad de Castilla-La Mancha. De https://bit.ly/3B9mRnX

Gamow, G. (1961). *One two three... infinity: Facts & speculations of science*. New York: The viking press.

Giliberto, M. (2014). Constructivism, Overview. Encyclopedia of Critical Psychology, 311–315. doi:10.1007/978-1-4614-5583-7_350

Gridos, P., Avgerinos, E., Mamona-Downs, J., & Vlachou, R. (2022). Geometrical figure apprehension, construction of auxiliary lines, and multiple solutions in problem solving: aspects of mathematical creativity in school geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*, 619-636. doi:https://doi.org/10.1007/s10763-021-10155-4

Guberman, R., & Leikin, R. (2012). Interesting and difficult mathematical problems: changing teacher's views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 16, 33-56. doi: https://doi.org/10.1007/s10857-012-9210-7

Guimaraes, G., Gitirana, V.,Magina, S., Cazorla, I. Conceptions and misconceptions of average: a comparative study between teachers and students. In: International Congress on Mathematical Education, 2008, Monterrey - México

Halmos, P. (1980). *The heart of mathematics*. Mathematical Association of America, 87(7), 519-524. https://doi.org/10.1080/00029890.1980.11995081

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación* (Sexta ed.). México: Mc Graw Hill.

Hernández, A., Perdomo-Díaz, J., & Camacho-Machín, M. (2019). Mathematical understanding in problem solving with geogebra: a case study in initial teacher education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(2), 208-223. doi:https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1587022

Hiebert, J. et al. (1997). *Making sense. Teaching and learning mathematics with understanding*. United States: Heinemann.

Hollebrands, K. (2007). The role of a dynamic software program for geometry in the strategies high school mathematics students employ. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(2), 164-192. doi:https://doi.org/10.2307/30034955

Hölzl, R. (1996). How does 'dragging' affect the learning of Geometry? *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1*, 169-187. doi:https://doi.org/10.1007/BF00571077

In'am, A. (2014). The implementation of the Polya method in solving euclidean geometry problems. *International Education Studies, 7*(7), 149-158. doi:http://dx.doi.org/10.5539/ies.v7n7p149

Koetsier, T. (2007). Oene Bottema (1901–1992). In: Ceccarelli, M. (eds) *Distinguished Figures in Mechanism and Machine Science. History of Mechanism and Machine Science*, vol 1. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6366-4_3

Kordaki, M. (2015). The challenge of multiple perspectives: multiple solution tasks for students incorporating diverse tools and representation systems. *Technology, Pedagogy and Education*, 493-512. doi:https://doi.org/10.1080/1475939X.2014.919346

Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: Two sides of the use of dynamic geometry environments. In S. C. Chu, W. C. Yang, & H. C. Lew (Eds.), Proceedings of the 10th Asian technology Conference in mathematics (pp. 22–35). Advanced Technology Council in Mathematics

Leikin, R. (2010). Learning through teaching through the tens of multiple solution tasks. In: R. Leikin, and R. Zazkis (eds), *Learning Through Teaching Mathematics. Mathematics Teacher Education*, vol 5. Dordrecht: Springer. doi:https://doi.org/10.1007/978-90-481-3990-3_4

Lester, F. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *ZDM, 37*, 457-467. doi:https://doi.org/10.1007/BF02655854

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012a). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 73-90. doi:https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.11.001

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012b). Using multiple solution tasks for the evaluation of students' problem-solving performance in geometry. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 12*(4), 311-333. doi:https://doi.org/10.1080/14926156.2012.732191

Libeskind, S. (2008). *Euclidean and Transformational geometry: A deductive inquiry*. Massachusetts: Jones and Bartlett Publishers.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Pea, R. D. (1985). Beyond amplification: Using the computer to reorganize mental functioning. *Educational Psychologist, 20*(4), 167-182.

Piñeiro, J., Castro-Rodríguez, E., & Castro, E. (2021). Conocimiento sobre la resolución de problemas de matemáticas por estudiantes para profesor. *Boletim de Educaação Matemática*, 1416-1437. Recuperado el 21 de Octubre de 2022 de https://www.scielo.br/j/bolema/a/s7w6mzXRsRxXW8WxGJSKzgL/?format=pdf&lang=es

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Polya G. (1973). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press, Princeton

Posada-Ramírez, Jorge. (2014). Ontología y Lenguaje de la Realidad Social. Cinta de moebio, (50), 70-79. doi: https://dx.doi.org/10.4067/S0717-554X2014000200003

Radford, L. (2008). Theories in mathematics education: A Brief inquiry into their conceptual differences. The notion and role of theory in mathematics education research., 1-17. De https://www.researchgate.net/publication/253274896_Theories_in_Mathematics_Education_A_Brief_Inquiry_into_their_Conceptual_Differences

Ratliff, M. (2011). Preservice Secondary School Mathematics Teachers' Current Notions of Proof in Euclidean Geometry. Tennessee Research and Creative Exchange.

Santos-Trigo, M. (2014). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos* (2 ed.). México: Trillas.

Santos-Trigo, M., y Barrera-Mora, F. (2011). High school teachers' problem solving activities to review and extend their mathematical and didactical knowledge. *Primus, 21*(8), 699-718. doi:https://doi.org/10.1080/10511971003600965

Santos-Trigo, M., Barrera-Mora, F., y Camacho-Machin, M. (2021). Teachers' use of technology affordances to contextualize and dynamically enrich and extend mathematical problem-solving strategies. *Mathematics, 9*(8), 793. doi:https://doi.org/10.3390/math9080793

Schroeder, T., & Lester, F. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P. Trafton, & A. Shulte, New directions for elementary school mathematics (pp. 31-42). Virginia: NCTM. De https://archive.org/details/newdirectionsfor0000unse_i4w2/page/n5/mode/2up?view=theater

Shriki, A. (2011). Back to TREASURE ISLAND. The Mathematics Teacher, 104(9), 658–664. http://www.jstor.org/stable/20876991

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (eds.), International Handbook of Mathematics Education, vol. 4 (pp. 827-876). Dordrecht: Springer. doi:https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_23

Simon, M., & Schifter, D. (1991). Towards a constructivist perspective: An intervention study of mathematics teacher development. Educational Studies in Mathematics, 22, 309-331. doi:https://doi.org/10.1007/BF00369293

Smith, E. (1998). Social constructivism, individual constructivism and the role of computers in mathematics education. Journal of mathematical behavior, 17(4), 411-425. doi:https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00007-3

Steen, L. (1988). The Science of Patterns. Science, 240(4852), 611-616. doi:10.1126/science.240.4852.611

Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2017). Using multiple solutions to mathematical problems to develop pedagogical and mathematical thinking: A case study in a teacher education program. Investigations in Mathematics Learning, 86-108. doi: 10.1080/19477503.2017.1283179

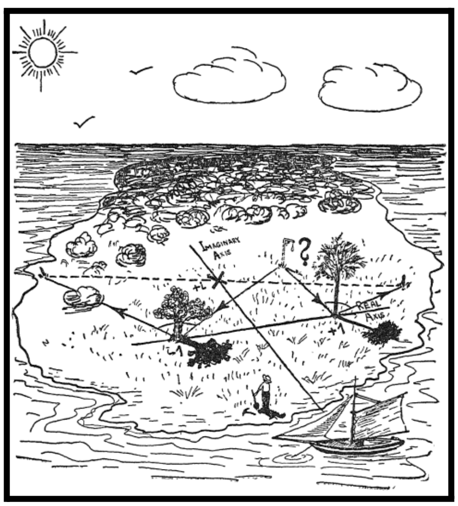
Taylor, P. C. (2014). Constructivism. Encyclopedia of Science Education, 1–7. doi:10.1007/978-94-007-6165-0_102-2

Tellez, L. (2020). Relación entre el sentido numérico y pensamiento algebraico en el bachillerato. (Tesis maestría). Pachuca, Hgo.: Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH)

APÉNDICE A. [Antecedentes de la Tarea 3]

El planteamiento para la Tarea 3 que fue aplicada al grupo de ocho participantes se describe de la siguiente manera:

La isla en donde enterré mi tesoro tiene una única palmera, una piedra en forma de halcón y otra en forma de búho. Encuentra la palmera, camina directo hacia la piedra en forma de halcón contando el número de pasos, cuando llegues a la piedra gira a tu derecha en cuarto de círculo y camina el mismo número de pasos, en ese lugar clava una estaca. Regresa a la palmera, camina derecho hacia la piedra que tiene forma de búho y cuenta el número de pasos, cuando llegues a la piedra gira a tu izquierda un cuarto de círculo y camina el mismo número de pasos, en ese lugar clava una segunda estaca; con una cuerda una las dos estacas. El tesoro se encuentra enterrado debajo del punto medio de esta cuerda.



"Sail to ______ North latitude and ______ West longitude[6] where thou wilt find a deserted island. There lieth a large meadow, not pent, on the north shore of the island where standeth a lonely oak and a lonely pine.[7] There thou wilt see also an old gallows on which we once were wont to hang traitors. Start thou from the gallows and walk to the oak counting thy steps. At the oak thou must turn *right* by a right angle and take the same number of steps. Put here a spike in the ground. Now must thou return to the gallows and walk to the pine counting thy steps. At the pine thou must turn *left* by a right angle and see that thou takest the same number of steps, and put another spike into the ground. Dig halfway between the spikes; the treasure is there."

Figura 3. El Tesoro del Pirata propuesto por Gamow (1961)

El problema del tesoro del pirata ha sido abordado desde distintas perspectivas, aunque en cada versión tiene variaciones mínimas relacionadas con los objetos principales como la palmera, las rocas en forma de halcón y de buho, pero conserva la esencia original de la construcción geométrica. Este problema fue mencionado por primera vez por Gamow (1961) con el propósito de ilustrar una aplicación práctica de los números imaginarios.

Por su parte Libeskind (2008) en su libro retoma el problema de Gamow (1961), mismo que descubrió durante su juventud y aunque la solución propuesta involucra el uso de números complejos, él decidió abordarlo en su libro desde tres fases, la experimental la cuál involucra el uso de un SGD como Geometer's Sketchpad, la deductiva por medio del uso de los tópicos del libro y por aproximaciones que lo aborda utilizando transformaciones geométricas. También existen trabajos de investigación en los cuáles toman de referencia el problema del Tesoro del Pirata, ya que tienen por objetivo identificar en los profesores en preservicio sus nociones con respecto a demostraciones utilizando geometría euclidiana (Scher 2003,citado en Ratliff, 2011).

Por su parte Shriki (2011), retoma el problema del Tesoro del Pirata debido a que le resulta atractivo e imposible de resolver a los estudiantes después de realizar algunos intentos. En su trabajo muestra seis rutas de solución en las que aplicó herramientas de geometría plana y analítica, combinación de vectores, números complejos y geometría transformacional. Cabe señalar que dentro de sus observaciones se puede abordar el problema representando los objetos con o sin el uso de un SGD. Además, considera que la riqueza didáctica del problema yace en el uso de lenguaje matemático, así como en el uso de diversos tópicos de matemáticas para lograr un cambio en la percepción del estudiante al resolver problemas.

El Teorema de Bottema, propuesto por el matemático Holándes Oene Bottema (Koetsier, 2007) es el fundamento geométrico del problema del Tesoro del Pirata. El Teorema establece lo siguiente: Dado cualquier triángulo ABC, se construyen dos cuadrados en dos lados AC y BC. El punto medio del segmento de recta que une los vértices de los cuadrados opuestos al vértice común C, es independiente de la ubicación de C. Si lo anterior lo trasladamos a los elementos del problema del Tesoro del Pirata, se puede notar que los vértices del triángulo A y B representan las Rocas; la Palmera es el vértice en común (C);

los vértices opuestos son las Estacas; y el punto medio es la ubicación del Tesoro. Por lo que la ubicación de la Palmera (c) no es importante, ésta puede hallarse en cualquier lugar del plano sin afectar la ubicación del Tesoro, ya que éste se localiza de forma perpendicular al punto medio del segmento que une a las Rocas.

APÉNDICE B. [Análisis de resultados Tarea 1]

https://docs.google.com/document/d/1i7uLxxrjCvh0RaN9L-xD5KISB1FzRFke-klq_i4OhkY/edit?usp=sharing

APÉNDICE C. [Análisis de resultados Tarea 2]

https://docs.google.com/document/d/1jUi8sEfXUBTah0UKMen1NT9T46LWUIm9xhlRmT0VJzY/edit?usp=sharing

APÉNDICE D.[Análisis de resultados Tarea 3]

https://docs.google.com/document/d/1ICAepZO3-mS7CQMGAgEkSnbIcHHFtTYO2OuS7bs1Chg/edit?usp=sharing

APÉNDICE E. [Reportes de los participantes]

https://drive.google.com/drive/folders/1UmZKO_TiVsZoJ5S8DgLWEZ_7iZoRgkaV?usp=share_link

APÉNDICE F.[Heurísticas]

De acuerdo con Polya (1973), define las siguientes estrategias en la resolución de problemas

Dibujar una figura: Es una representación gráfica de información relevante en el problema.

Generalización: Consiste en examinar una colección de objetos habiendo examinado uno o varios de ellos.

Descomponer y recomposición del problema: Considerar el objeto como un todo, concentrarse en las diversas combinaciones de detalles que se pueden presentar y recomponer sus partes de un modo diferente.

Elementos auxiliares: En problemas de geometría consiste en la incorporación de elementos geométricos tales como rectas, paralelas, mediatrices, puntos entre otros. Para mayores referencias, revisar la fuente original.

Durante este trabajo se desarrolló una definición para la estrategia de arrastre

Arrastre: Dada una configuración de objetos geométricos, el arrastre es un proceso que permite examinar cualquier cantidad de casos particulares para sustentar una conjetura o comportamiento.

De acuerdo con Arzarello (2002) define los diferentes tipos de arrastre existentes en un software de geometría dinámica, para una mayor comprensión, se sugiere consultar directamente las fuentes citadas.

Construcción Robusta: De acuerdo con Laborde (2005) las construcciones robustas son aquellas que mantienen sus propiedades incluso al utilizar el modo de arrastre. Para crear estas construcciones, es esencial emplear objetos geométricos y relaciones específicas que definan claramente la construcción deseada.