



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

El cálculo no newtoniano y una aplicación a la estadística: la regresión polinomial

Tesis para obtener el título de

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

presenta

Ana Perla Romero Silva

bajo la dirección de

Dr. Raúl Temoltzi Ávila

Mineral de la Reforma, Hidalgo, a 24 de febrero de 2025

Mineral de la Reforma, Hgo., a 29 de enero de 2025

Número de control: ICBI-D/114/2025

Asunto: Autorización de impresión.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

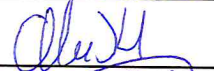
Con fundamento en lo dispuesto en el Título Tercero, Capítulo I, Artículo 18 Fracción IV; Título Quinto, Capítulo II, Capítulo V, Artículo 51 Fracción IX del Estatuto General de nuestra Institución, por este medio le comunico que el Jurado asignado a la Egresada de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas **Ana Perla Romero Silva**, quien presenta el trabajo de titulación “**El cálculo no newtoniano y una aplicación a la estadística: la regresión polinomial**”, después de revisar el trabajo en reunión de Sinodales ha decidido autorizar la impresión del mismo, hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación, firman de conformidad los integrantes del Jurado:

Presidente: Mtra. Margarita Tetlalmatzi Montiel



Secretario: Dra. Alma Sofía Santillán Hernández



Vocal: Dr. Raúl Temoltzi Ávila



Suplente: Dr. Federico Menéndez Conde Lara



Sin otro particular por el momento, reciba un cordial saludo.

Atentamente
“Amor, Orden y Progreso”

Mtro. Gabriel Vergara Rodríguez
Director del ICBI



GVR/YCC

Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P. 42184
Teléfono: 771 71 720 00 Ext. 40001
direccion_icbi@uaeh.edu.mx,
vergarar@uaeh.edu.mx

Resumen

Se aborda el problema de la regresión polinomial empleando el cálculo no newtoniano. Esta tesis comprende de tres capítulos. En el capítulo 1 se introduce a las propiedades algebraicas y topológicas, así como operaciones básicas con matrices del cálculo no newtoniano. En el capítulo 2 se plantean los conceptos del cálculo diferencial no newtoniano. Finalmente, en el capítulo 3, se propone la teoría de regresión polinomial no newtoniana, en donde para los ejemplos propuestos, se emplea la función logaritmo como un caso particular para la función α .

Abstract

This thesis comprises three chapters; Chapter I introduces the algebraic and topological properties, as well as basic operations with matrices of non-Newtonian calculus. Chapter II introduces the concepts of non-Newtonian differential calculus. Finally, in Chapter III, the theory of non-Newtonian polynomial regression is proposed, where for the proposed examples, the logarithm function is used as a particular case.

Dedicatoria

Quiero dedicar esta historia a las personas queridas en las que vivo. En primer lugar, a mis padres, Rogelio Romero y Amelia Silva, por su paciencia, su ejemplo y su fortaleza. Gracias por ser el pilar que me impulsa cada día a dar lo mejor de mí y por levantarme de cada tropiezo.

A mis amigos y compañeros de carrera más cercanos, Karyme Rivero e Israel Mejía, con quienes compartí incontables tardes y noches de estudio, risas y momentos de frustración que, de alguna manera, hicieron de mi experiencia universitaria un disfrute.

También quiero dedicar este trabajo a mi novio, Jair Oropeza, por ser otro pilar de apoyo incondicional en cada aspecto de mi vida, pero, sobre todo, por acompañarme paso a paso en el camino hacia mis sueños y anhelos.

A Eduardo Lazcano, un amigo muy especial que, desde el momento en que lo conocí, me motivó a emprender este proyecto y ha estado presente en cada etapa de mi recorrido.

Finalmente, esta dedicatoria es también para mis sobrinos, Edwin Jesús, Luis Arturo y Leonor, con la esperanza de que este logro les sirva de inspiración y ejemplo de todo lo que se puede alcanzar con esfuerzo y dedicación.

Cause there's magic in my bones

Imagine Dragons

Agradecimientos

En primer lugar, le agradezco profundamente a mi asesor, el Dr. Raúl Temoltzi Ávila, quien me ha propuesto iniciar este proyecto, el cual, despertó un interés nuevo en mí hacia la investigación, tuve el privilegio de aprenderle nuevas y valiosas estrategias. Gracias por su dedicación y paciencia, por su guía y todos sus consejos, los cuáles, llevaré grabados para siempre en la memoria en mí futuro profesional.

Asimismo, quiero expresar mi gratitud a todos mis profesores del área académica de matemáticas, quienes, con entusiasmo y paciencia, compartieron sus conocimientos y enseñanzas, enriqueciendo mi formación.

Finalmente le doy gracias a mis sinodales por tomarse el tiempo de leer esta investigación: Mtra. Margarita Tetlalmatzi Montiel, Dra. Alma Sofía Santillán Hernández y Dr. Federico Menéndez-Conde Lara.

Índice general

Resumen	v
Abstract	vii
Dedicatoria	ix
Agradecimientos	xi
Introducción	1
1. Nociones básicas del cálculo no newtoniano	3
1.1. Preliminares de aritmética no newtoniana	3
1.2. Propiedades algebraicas y topológicas de \mathbb{R}_α	5
1.2.1. Propiedades algebraicas	5
1.2.2. Propiedades topológicas	8
1.3. Conceptos básicos de matrices no newtonianas	15
1.3.1. Operaciones no newtonianas con matrices	15
2. Conceptos de cálculo diferencial no newtoniano	21
2.1. Polinomios no newtonianos	21
2.2. Algunas funciones no newtonianas	24
2.3. Derivada de una función no newtoniana	32
2.4. Máximos y mínimos de una función no newtoniana	36
3. Una aplicación del cálculo no newtoniano: la regresión polinomial	37
3.1. Regresión lineal	38
3.1.1. Regresión lineal newtoniana	38
3.1.2. Regresión lineal no newtoniana	42
3.2. Regresión cuadrática	48
3.2.1. Regresión cuadrática newtoniana	48
3.2.2. Regresión cuadrática no newtoniana	51
3.3. Regresión cúbica	53
3.3.1. Regresión cúbica newtoniana	53

3.3.2. Regresión cúbica no newtoniana	56
Conclusión	61

Introducción

Cuando se quiere construir un modelo de regresión lineal el cual es una técnica fundamental en el análisis de datos donde se pretende estudiar la relación entre variables, a menudo, al modelar situaciones o problemáticas de la vida real, nos enfrentamos con obstáculos que afectan al rendimiento del modelo. Un ejemplo de esto es cuando el conjunto de los valores de los datos están muy dispersos o bastante asimétricos, frecuentemente cuando se presenta esta situación, en ocasiones se aplica una transformación a los datos, particularmente, una transformación logarítmica a fin de obtener una mejor distribución de los mismos. Esta es una técnica que debe emplearse con cuidado ya que puede cambiar el significado o la interpretación del modelo y resultados.

En West (2021) se señala que es una buena práctica el emplear la transformación logarítmica a los datos con el fin de reducir la asimetría de una variable de medición: si el resultado es una distribución simétrica o se aproxima a una distribución normal se podrían obtener buenos resultados. El autor también hace la observación de que si hay muchos valores cero, deberán emplearse otros métodos, ya que la función logaritmo no está definida en cero.

Por otra parte, en Barranco *et al.* (2017) se desarrollan fórmulas que permiten expresar resultados de la regresión con transformaciones logarítmicas en cuatro modelos diferentes comparándolos entre ellos: en el primero se considera el modelo sin aplicar ninguna transformación, en el segundo se considera modificar solo la variable independiente, en el tercero se considera la opción de transformar sólo la variable dependiente y, finalmente, el cuarto modelo se induce una transformación total de los datos.

Finalmente, en Feng *et al.* (2014) se plantean diversos desafíos al emplear el enfoque de una transformación logarítmica. La principal limitación es interpretar la relevancia del análisis de los datos transformados en relación con la hipótesis planteada sobre los datos originales. Exponen algunos ejemplos donde la transformación logarítmica no contribuye a reducir la variabilidad de los datos ni a aproximarlos a una distribución normal. De hecho en ciertas circunstancias, puede incrementar tanto la variabilidad como el sesgo de los datos. Además, los datos transformados mediante logaritmos suelen tener escasa relación con los datos originales, lo que dificulta hacer inferencias válidas sobre estos últimos. Se concluye finalmente, que el investigador debe ser verdaderamente consciente de las limitaciones de esta práctica y optar por herramientas mas nuevas como las ecuaciones de estimación generalizadas.

Considerando una generalización del cuarto modelo que se presenta en Barranco *et*

al. (2017), en este trabajo se analiza el efecto de aplicar una transformación logarítmica total, es decir, aplicar una transformación logarítmica a todo el proceso que se sigue para realizar una regresión polinomial. Para lograr esto, será necesario considerar el cálculo no newtoniano empleando una función α -generadora particular: la función logaritmo. Con este método se muestra que existe una limitación al usar el coeficiente de determinación.

Capítulo 1

Nociones básicas del cálculo no newtoniano

1.1. Preliminares de aritmética no newtoniana

El cálculo tradicional, y que en el presente trabajo también denominamos cálculo newtoniano, fue iniciado en la segunda mitad del siglo XVII por matemáticos tales como Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibnitz, Jakob Bernoulli, Johann Bernoulli, entre otros, ver Dunham (2005). Una alternativa del cálculo newtoniano es el cálculo no newtoniano, cuyo origen se remonta en una serie de trabajos desarrollados por Michael Grossman y Robert Katz publicados entre los años 1967 a 1970, y que se resumen en Grossman y Katz (1972). La base del cálculo no newtoniano consiste en substituir las operaciones binarias: suma, resta, multiplicación y división, por otras operaciones binarias que dependen de una función inyectiva. En este sentido, el cálculo no newtoniano constituye una generalización del cálculo newtoniano.

Los principios básicos se resumen a continuación. Sea X un intervalo no vacío de \mathbb{R} y sea $\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}$ una función cuyo rango $\alpha(X)$ se denota por \mathbb{R}_α . La función α es llamada un α -generador de una α -aritmética sobre \mathbb{R}_α si las siguientes cuatro α -operaciones son bien definidas para todo $a, b \in \mathbb{R}_\alpha$:

$$a \overset{\alpha}{\oplus} b = \alpha(\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(b)), \quad \alpha\text{-suma}, \quad (1.1a)$$

$$a \overset{\alpha}{\ominus} b = \alpha(\alpha^{-1}(a) - \alpha^{-1}(b)), \quad \alpha\text{-resta}, \quad (1.1b)$$

$$a \overset{\alpha}{\otimes} b = \alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(b)), \quad \alpha\text{-multiplicación}, \quad (1.1c)$$

$$a \overset{\alpha}{\oslash} b = \alpha\left(\frac{\alpha^{-1}(a)}{\alpha^{-1}(b)}\right), \quad \alpha\text{-división}. \quad (1.1d)$$

El conjunto \mathbb{R}_α es llamado *conjunto de números reales no newtonianos*. La función α permite establecer un α -orden sobre el conjunto \mathbb{R}_α de la siguiente manera: $a \overset{\alpha}{\leq} b$ si, y sólo si, $\alpha^{-1}(a) < \alpha^{-1}(b)$. De manera equivalente: $a \overset{\alpha}{\leq} b$ si, y sólo si, $\alpha^{-1}(a) \leq \alpha^{-1}(b)$.

Los siguientes ejemplos de cálculo no newtoniano son de interés.

4 Nociones básicas del cálculo no newtoniano

Ejemplo 1.1. Si se elige $X = \mathbb{R}$ y $\alpha = id$, donde $id: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función identidad: $id(x) = x$ para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces las id -operaciones se reducen a las operaciones habituales en el cálculo newtoniano:

$$a \overset{id}{\oplus} b = a + b, \quad a \overset{id}{\ominus} b = a - b, \quad a \overset{id}{\odot} b = a \cdot b, \quad a \overset{id}{\oslash} b = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

En este caso, el conjunto \mathbb{R}_{id} describe el conjunto de números reales newtonianos, es decir, $\mathbb{R}_{id} = \mathbb{R}$. Es claro que el id -orden en \mathbb{R}_{id} coincide con el orden habitual de \mathbb{R} .

Ejemplo 1.2. Si se eligen $\alpha(x) = \exp(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y $\alpha^{-1}(x) = \ln(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}_\alpha = \mathbb{R}^+$, entonces las \exp -operaciones que se obtienen de (1.1a)–(1.1d) para cada $a, b \in \mathbb{R}_\alpha$ son:

$$a \overset{\exp}{\oplus} b = ab, \quad a \overset{\exp}{\ominus} b = \frac{a}{b}, \quad a \overset{\exp}{\odot} b = a^{\ln(b)} = b^{\ln(a)}, \quad a \overset{\exp}{\oslash} b = a^{\frac{1}{\ln(b)}}, \quad b \neq 1.$$

Considere el siguiente caso particular para esclarecer como se opera en este cálculo no newtoniano. Se toman los números reales no newtonianos 3 y 4, entonces:

- $3 \overset{\exp}{\oplus} 4 = e^{\ln(3)+\ln(4)} = e^{\ln(3 \cdot 4)} = 12,$
- $3 \overset{\exp}{\ominus} 4 = e^{\ln(3)-\ln(4)} = e^{\ln(\frac{3}{4})} = \frac{3}{4},$
- $3 \overset{\exp}{\odot} 4 = e^{\ln(3) \cdot \ln(4)} = e^{\ln(3^{\ln(4)})} = 3^{\ln(4)},$
- $3 \overset{\exp}{\oslash} 4 = e^{\frac{\ln(3)}{\ln(4)}} = e^{\ln(3^{\frac{1}{\ln(4)}})} = 3^{\frac{1}{\ln(4)}}.$

El conjunto de números reales no newtonianos que se obtiene \mathbb{R}_{\exp} es llamado *conjunto de números reales multiplicativos* o *conjunto de números reales geométricos*. Algunas propiedades de este conjunto de números reales no newtoniano se pueden consultar en Bashirov *et al.* (2008) y Stanley (1999). Se destaca que, probablemente, este es uno de los conjuntos de números reales no newtonianos más populares, debido al número de investigaciones y aplicaciones que se han reportado en la literatura. Algunas aplicaciones se pueden consultar en Moorthy (2020), Georgiev (2022), Georgiev y Zennir (2023, 2024).

Ejemplo 1.3. Si se considera una constante $\kappa \in (-1, 1)$ y se eligen las funciones $\alpha(x) = \kappa^{-1} \sinh(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y $\alpha^{-1}(x) = \operatorname{arcsinh}(\kappa x)$ para cada $x \in \mathbb{R}_\alpha = \mathbb{R}$, entonces el conjunto de números reales no newtonianos que se obtiene \mathbb{R}_κ es llamado *conjunto de números reales de Kaniadakis*. Las κ -operaciones que se obtienen de (1.1a)–(1.1d) se describen por

$$\begin{aligned} a \overset{\kappa}{\oplus} b &= a\sqrt{1 + \kappa^2 b^2} + b\sqrt{1 + \kappa^2 a^2}, \\ a \overset{\kappa}{\ominus} b &= a\sqrt{1 + \kappa^2 b^2} - b\sqrt{1 + \kappa^2 a^2}, \\ a \overset{\kappa}{\odot} b &= \kappa^{-1} \sinh(\kappa^{-1} \operatorname{arcsinh}(\kappa a) \operatorname{arcsinh}(\kappa b)), \\ a \overset{\kappa}{\oslash} b &= \kappa^{-1} \sinh\left(\kappa \frac{\operatorname{arcsinh}(\kappa a)}{\operatorname{arcsinh}(\kappa b)}\right), \quad b \neq 0. \end{aligned}$$

En el conjunto de números reales de Kaniadakis se describe una aritmética que se suele emplear en física estadística, ver Kaniadakis (2002, 2005, 2013). Algunas aplicaciones del conjunto de números reales de Kaniadakis se pueden consultar en Czachor (2021), Kaabouchi *et al.* (2009), Kaniadakis *et al.* (2020).

Otros tipos de conjunto de números reales no newtoniano y su unificación se pueden consultar en Czachor (2020).

Observación 1.1. En ocasiones se emplea la notación

$$a \overset{\alpha}{\oslash} b = \frac{a}{b^\alpha}, \quad a, b \in \mathbb{R}_\alpha,$$

para denotar la α -división de dos números reales no newtonianos.

1.2. Propiedades algebraicas y topológicas de \mathbb{R}_α

Los resultados que se presentan en este apartado son una adaptación de aquellos que se discuten en Çakmak y Başar (2012). Durante la exposición se supone que $X = \mathbb{R}$ y que $\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ es una función inyectiva y continua y, por consiguiente, α posee función inversa, ver Spivak (2012).

1.2.1. Propiedades algebraicas

En este apartado se muestra que \mathbb{R}_α es un campo aritmético bajo las operaciones (1.1a)–(1.1d). Se recuerda que un sistema conformado por un conjunto E , cuatro operaciones binarias ($\overset{\alpha}{\oplus}, \overset{\alpha}{\ominus}, \overset{\alpha}{\odot}, \overset{\alpha}{\oslash}$) definidas en E y un orden $\overset{\alpha}{<}$ definido en E , es llamado un *campo ordenado* si las operaciones binarias definidas en E se comportan de la misma manera como se comportan las operaciones binarias $(+, -, \cdot, /)$ definidas en \mathbb{R} , y la relación de orden definida en E se comporta de la misma manera como se comporta el orden $<$ definido en \mathbb{R} , ver Grossman y Katz (1972). Un campo ordenado se llama *campo aritmético* cuando este es un subconjunto de \mathbb{R} .

La α -suma induce las siguientes propiedades sobre \mathbb{R}_α .

(a₁) $a \overset{\alpha}{\oplus} b \in \mathbb{R}_\alpha$ para todo $a, b \in \mathbb{R}_\alpha$, lo cual se sigue de la definición de α -suma.

(a₂) $(a \overset{\alpha}{\oplus} b) \overset{\alpha}{\oplus} c = a \overset{\alpha}{\oplus} (b \overset{\alpha}{\oplus} c)$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}_\alpha$. En efecto:

$$\begin{aligned} (a \overset{\alpha}{\oplus} b) \overset{\alpha}{\oplus} c &= \alpha(\alpha^{-1}(a \overset{\alpha}{\oplus} b) + \alpha^{-1}(c)) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(b))) + \alpha^{-1}(c)) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(b) + \alpha^{-1}(c)) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(\alpha(\alpha^{-1}(b) + \alpha^{-1}(c)))) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(b \overset{\alpha}{\oplus} c)) = a \overset{\alpha}{\oplus} (b \overset{\alpha}{\oplus} c). \end{aligned}$$

6 Nociones básicas del cálculo no newtoniano

(a₃) $a \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(0) = \alpha(0) \overset{\alpha}{\oplus} a = a$ para todo $a \in \mathbb{R}_\alpha$. En realidad, basta con observar que $a \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(0) = \alpha(\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(\alpha(0))) = \alpha(\alpha^{-1}(a)) = a$. De la misma manera se muestra que $\alpha(0) \overset{\alpha}{\oplus} a = a$. Por lo tanto, $\alpha(0)$ es el elemento α -neutro de \mathbb{R}_α con respecto a la α -suma.

(a₄) $a \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(-\alpha^{-1}(a)) = \alpha(-\alpha^{-1}(a)) \overset{\alpha}{\oplus} a = \alpha(0)$ para todo $a \in \mathbb{R}_\alpha$. En efecto, resulta que $a \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(-\alpha^{-1}(a)) = \alpha(\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(\alpha(-\alpha^{-1}(a)))) = \alpha(0)$. De la misma manera se muestra que $\alpha(-\alpha^{-1}(a)) \overset{\alpha}{\oplus} a = \alpha(0)$. Por lo tanto, $\alpha(-\alpha^{-1}(a)) \in \mathbb{R}_\alpha$ es el α -inverso aditivo de $a \in \mathbb{R}_\alpha$ con respecto a la α -suma.

(a₅) $a \overset{\alpha}{\oplus} b = b \overset{\alpha}{\oplus} a$ para todo $a, b \in \mathbb{R}_\alpha$. En realidad, de la definición de α -suma se observa que $a \overset{\alpha}{\oplus} b = \alpha(\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(b)) = \alpha(\alpha^{-1}(b) + \alpha^{-1}(a)) = b \overset{\alpha}{\oplus} a$.

Los puntos (a₁)–(a₅) muestran que el conjunto \mathbb{R}_α es un grupo abeliano si en él se considera la α -suma como operación binaria.

Teorema 1.1. $(\mathbb{R}_\alpha, \overset{\alpha}{\oplus})$ es un grupo abeliano.

Empleando un procedimiento análogo al anterior, se muestra que la α -multiplicación induce las siguientes propiedades en $\mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}$:

(b₁) $a \overset{\alpha}{\otimes} b \in \mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}$ para todo $a, b \in \mathbb{R}_\alpha$, lo cual se concluye a partir de la definición de α -multiplicación.

(b₂) $(a \overset{\alpha}{\otimes} b) \overset{\alpha}{\otimes} c = a \overset{\alpha}{\otimes} (b \overset{\alpha}{\otimes} c)$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}$. De acuerdo con la definición de α -multiplicación se sigue que

$$\begin{aligned} (a \overset{\alpha}{\otimes} b) \overset{\alpha}{\otimes} c &= \alpha(\alpha^{-1}(a \overset{\alpha}{\otimes} b) \cdot \alpha^{-1}(c)) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(b))) \cdot \alpha^{-1}(c)) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(b) \cdot \alpha^{-1}(c)) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(\alpha(\alpha^{-1}(b) \cdot \alpha^{-1}(c)))) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(b \overset{\alpha}{\otimes} c)) = a \overset{\alpha}{\otimes} (b \overset{\alpha}{\otimes} c). \end{aligned}$$

(b₃) $a \overset{\alpha}{\otimes} \alpha(1) = \alpha(1) \overset{\alpha}{\otimes} a = a$ para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha(0)\}$. Para verificar esto, se observa que $a \overset{\alpha}{\otimes} \alpha(1) = \alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(\alpha(1))) = \alpha(\alpha^{-1}(a)) = a$. De la misma manera se comprueba que $\alpha(1) \overset{\alpha}{\otimes} a = a$. Se sigue que $\alpha(1)$ es el elemento α -identidad del conjunto $\mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}$ con respecto a la α -multiplicación.

(b₄) $a \overset{\alpha}{\otimes} \alpha((\alpha^{-1}(a))^{-1}) = \alpha((\alpha^{-1}(a))^{-1}) \overset{\alpha}{\otimes} a = \alpha(1)$ para todo $a \in \mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}$. Ya que $a \overset{\alpha}{\otimes} \alpha((\alpha^{-1}(a))^{-1}) = \alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(\alpha((\alpha^{-1}(a))^{-1}))) = \alpha(1)$, se obtiene la primera igualdad. La segunda igualdad, $\alpha((\alpha^{-1}(a))^{-1}) \overset{\alpha}{\otimes} a = \alpha(1)$, se muestra de forma análoga. Se concluye que $\alpha((\alpha^{-1}(a))^{-1})$ es el α -inverso multiplicativo de $a \in \mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}$.

(b₅) $a \overset{\alpha}{\odot} b = b \overset{\alpha}{\odot} a$ para todo $a, b \in \mathbb{R}_\alpha$. De la definición de α -multiplicación se observa que: $a \overset{\alpha}{\odot} b = \alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(b)) = \alpha(\alpha^{-1}(b) \cdot \alpha^{-1}(a)) = b \overset{\alpha}{\odot} a$.

Los puntos (b₁)–(b₅) permiten obtener el siguiente resultado.

Teorema 1.2. $(\mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}, \overset{\alpha}{\odot})$ es un grupo abeliano.

Las leyes distributivas por la izquierda y por la derecha, también se cumplen en \mathbb{R}_α con respecto a la α -multiplicación y a la α -suma.

(b₆) $a \overset{\alpha}{\odot} (b \overset{\alpha}{\oplus} c) = (a \overset{\alpha}{\odot} b) \overset{\alpha}{\oplus} (a \overset{\alpha}{\odot} c)$ y $(b \overset{\alpha}{\oplus} c) \overset{\alpha}{\odot} a = (b \overset{\alpha}{\odot} a) \overset{\alpha}{\oplus} (c \overset{\alpha}{\odot} a)$ para cada $a, b, c \in \mathbb{R}_\alpha$. En realidad, se observa que

$$\begin{aligned} a \overset{\alpha}{\odot} (b \overset{\alpha}{\oplus} c) &= \alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(b \overset{\alpha}{\oplus} c)) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot (\alpha^{-1}(b) + \alpha^{-1}(c))) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(b) + \alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(c)) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(b)) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(c)) \\ &= (a \overset{\alpha}{\odot} b) \overset{\alpha}{\oplus} (a \overset{\alpha}{\odot} c). \end{aligned}$$

Similarmente se comprueba que $(b \overset{\alpha}{\oplus} c) \overset{\alpha}{\odot} a = (b \overset{\alpha}{\odot} a) \overset{\alpha}{\oplus} (c \overset{\alpha}{\odot} a)$.

Se obtiene entonces el siguiente resultado como conclusión.

Teorema 1.3. La α -multiplicación es distributiva sobre la α -suma.

Tomando en consideración que \mathbb{R}_α es un conjunto ordenado, y de acuerdo con los teoremas 1.1–1.3, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 1.4. $(\mathbb{R}_\alpha, \overset{\alpha}{\oplus}, \overset{\alpha}{\odot}, \overset{\alpha}{\lt})$ es un campo ordenado.

Se recuerda que dos campos son isomorfos si existe un homomorfismo biyectivo entre ambos campos, ver Herstein (1990). Se termina este apartado con el siguiente resultado que muestra la relación que existe entre los campos ordenados considerados.

Teorema 1.5. Los campos ordenados $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ y $(\mathbb{R}_\alpha, \overset{\alpha}{\oplus}, \overset{\alpha}{\odot}, \overset{\alpha}{\lt})$ son isomorfos.

Demostración. Es suficiente con observar que si se elige $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ de tal manera que $\varphi(x) = \alpha(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi(a \cdot b) &= \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(a)) \cdot \alpha^{-1}(\alpha(b))) = \alpha(a) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(b) = \varphi(a) \overset{\alpha}{\odot} \varphi(b), \\ \varphi(a + b) &= \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(a)) + \alpha^{-1}(\alpha(b))) = \alpha(a) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(b) = \varphi(a) \overset{\alpha}{\oplus} \varphi(b). \end{aligned}$$

Por otra parte, si se elige $\phi: \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi(y) = \alpha^{-1}(y)$ para cada $y \in \mathbb{R}_\alpha$, entonces se sigue que:

$$\begin{aligned} \phi(a \overset{\alpha}{\oplus} b) &= \alpha^{-1}(\alpha(\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(b))) = \alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(b) = \phi(a) + \phi(b), \\ \phi(a \overset{\alpha}{\odot} b) &= \alpha^{-1}(\alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(b))) = \alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(b) = \phi(a) \cdot \phi(b). \end{aligned}$$

Esto muestra el resultado deseado. □

1.2.2. Propiedades topológicas

Las propiedades topológicas de \mathbb{R}_α se pueden obtener a partir de las operaciones (1.1a)–(1.1d). Estas propiedades serán empleadas más adelante al describir el α -cálculo. Los resultados que se muestran a continuación son una adaptación de aquellos que se presentan en Çakmak y Başar (2012) y Turan y Çevik (2017). Con el objeto de analizar tales propiedades, se introducen los subconjuntos principales de \mathbb{R}_α .

El primer conjunto que se considera es el conjunto de *números naturales no newtonianos*, el cual se define como

$$\mathbb{N}_\alpha = \{\alpha(n) \in \mathbb{R}_\alpha \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Este conjunto tiene propiedades similares al conjunto \mathbb{N} . En principio, se puede observar que este conjunto es cerrado bajo la α -suma, pues si se eligen $\alpha(n), \alpha(m) \in \mathbb{N}_\alpha$, entonces

$$\alpha(n) \oplus \alpha(m) = \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(n)) + \alpha^{-1}(\alpha(m))) = \alpha(n + m) \in \mathbb{N}_\alpha.$$

En particular, se observa que $\alpha(n) \oplus \alpha(1) = \alpha(n + 1)$. Por lo tanto, si se α -suma n -veces $\alpha(1)$, como resultado se obtiene $\alpha(n)$. Lo anterior permite observar que el principio de inducción matemática es válido en \mathbb{N}_α . Por otra parte, se tiene que si $\alpha(n) \stackrel{>}{\sim} \alpha(1)$, entonces $\alpha(n) \ominus \alpha(1) = \alpha(n - 1)$. Esta propiedad permite introducir el conjunto de *números enteros no newtonianos*, el cual se define por

$$\mathbb{Z}_\alpha = \{\alpha(n) \in \mathbb{R}_\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Por construcción se sigue que $\mathbb{N}_\alpha \subset \mathbb{Z}_\alpha$. Es claro que el conjunto \mathbb{Z}_α se conforma de las soluciones de la ecuación lineal no newtoniana $\alpha(m) \oplus b = \alpha(n)$, donde $m, n \in \mathbb{N}$. Por el contrario, si se considera el problema de hallar soluciones de la ecuación lineal no newtoniana $\alpha(m) \ominus b = \alpha(n)$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $m \neq 0$, entonces existen soluciones que no pertenecen a \mathbb{Z}_α . Esto permite introducir el conjunto de *números racionales no newtonianos*, el cual se define como

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_\alpha &= \{\alpha(n) \ominus \alpha(m) \in \mathbb{R}_\alpha \mid n, m \in \mathbb{Z} \text{ y } m \neq 0\} \\ &= \left\{ \frac{\alpha(n)}{\alpha(m)}_\alpha \in \mathbb{R}_\alpha \mid n, m \in \mathbb{Z} \text{ y } m \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Una vez más, por construcción se sigue que $\mathbb{Z}_\alpha \subset \mathbb{Q}_\alpha$. Como conclusión, se tiene que $\mathbb{N}_\alpha \subset \mathbb{Z}_\alpha \subset \mathbb{Q}_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha$.

El número $\alpha(0)$ permite separar \mathbb{R}_α en dos subconjuntos. Sea $a \in \mathbb{R}_\alpha$ arbitrario. Se dice que a es un *número real no newtoniano positivo* si $a \stackrel{>}{\sim} \alpha(0)$, a es un *número real no newtoniano negativo* si $a \stackrel{<}{\sim} \alpha(0)$ y, finalmente, a es un *número real no newtoniano sin signo* si $a = \alpha(0)$. Lo anterior justifica la descomposición $\mathbb{R}_\alpha = \mathbb{R}_\alpha^+ \cup \mathbb{R}_\alpha^- \cup \{\alpha(0)\}$, donde $\mathbb{R}_\alpha^+ = \{a \in \mathbb{R}_\alpha \mid a \stackrel{>}{\sim} \alpha(0)\}$ y $\mathbb{R}_\alpha^- = \{a \in \mathbb{R}_\alpha \mid a \stackrel{<}{\sim} \alpha(0)\}$. Se llamará a \mathbb{R}_α^+ el *conjunto de números reales no newtonianos positivos* y \mathbb{R}_α^- el *conjunto de números*

reales no newtonianos negativos. Además, se llamará a $\bar{\mathbb{R}}_\alpha^+ = \mathbb{R}_\alpha^+ \cup \{\alpha(0)\}$ el conjunto de números reales no newtonianos no negativos. De las definiciones se desprende que $\mathbb{N}_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha^+$ y que $\mathbb{N}_\alpha \cup \{\alpha(0)\} \subset \bar{\mathbb{R}}_\alpha^+$.

Se establece ahora la relación que existe entre la suma y multiplicación de números reales newtonianos con respecto a la α -suma y la α -multiplicación de números reales no newtonianos.

Sean $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}_\alpha$. Usando (1.1a) se observa que

$$\begin{aligned} a_1 \overset{\alpha}{\oplus} a_2 &= \alpha(\alpha^{-1}(a_1) + \alpha^{-1}(a_2)), \\ a_1 \overset{\alpha}{\oplus} a_2 \overset{\alpha}{\oplus} a_3 &= \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(\alpha^{-1}(a_1) + \alpha^{-1}(a_2))) + \alpha^{-1}(a_3)) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(a_1) + \alpha^{-1}(a_2) + \alpha^{-1}(a_3)), \\ &\dots \\ a_1 \overset{\alpha}{\oplus} a_2 \overset{\alpha}{\oplus} \dots \overset{\alpha}{\oplus} a_m &= \alpha(\alpha^{-1}(a_1) + \alpha^{-1}(a_2) + \dots + \alpha^{-1}(a_m)). \end{aligned}$$

La fórmula anterior se puede simplificar si se considera la notación de α -sumatoria: ${}^\alpha \sum_{k=1}^m a_k = a_1 \overset{\alpha}{\oplus} a_2 \overset{\alpha}{\oplus} \dots \overset{\alpha}{\oplus} a_m$, con lo cual se observa que

$${}^\alpha \sum_{k=1}^m a_k = \alpha \left(\sum_{k=1}^m \alpha^{-1}(a_k) \right). \quad (1.2)$$

Se sigue que la α -suma de los primeros m números naturales no newtonianos cumple:

$${}^\alpha \sum_{k=1}^m \alpha(k) = \alpha \left(\frac{m(m+1)}{2} \right).$$

Se muestra por inducción matemática la igualdad anterior. Se emplea la notación $P(\alpha(m))$ para denotar el cumplimiento de (1.2). Se observa que el resultado es válido para el primer número no newtoniano, es decir, se cumple $P(\alpha(1))$: $\alpha(1) = \alpha\left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)$. Luego, se supone que el resultado es válido para $m = k$, es decir, se supone que es válido

$$P(\alpha(k)) : \alpha(1) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(2) \overset{\alpha}{\oplus} \dots \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(k) = \alpha \left(\frac{k(k+1)}{2} \right),$$

y se muestra que el resultado es válido para $m = k + 1$, es decir, se muestra que se cumple

$$P(\alpha(k+1)) : \alpha(1) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(2) \overset{\alpha}{\oplus} \dots \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(k) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(k+1) = \alpha \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right).$$

10 Nociones básicas del cálculo no newtoniano

Por hipótesis de inducción, se obtiene la siguiente suma

$$\begin{aligned}
 \alpha(1) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(2) \overset{\alpha}{\oplus} \cdots + \alpha(k) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(k+1) &= \alpha \left(\frac{k(k+1)}{2} \right) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(k+1) \\
 &= \alpha \left(\alpha^{-1} \left(\alpha \left(\frac{k(k+1)}{2} \right) \right) + \alpha^{-1}(\alpha(k+1)) \right) \\
 &= \alpha \left(\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \right) \\
 &= \alpha \left(\frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \right) \\
 &= \alpha \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple $P(\alpha(k+1))$. Esto muestra que $P(\alpha(m))$ es verdadero para todo $\alpha(m) \in \mathbb{N}_\alpha$.

De la misma manera, usando (1.1c) se puede comprobar que para $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}_\alpha$ se tiene

$$\begin{aligned}
 a_1 \overset{\alpha}{\odot} a_2 &= \alpha(\alpha^{-1}(a_1) \cdot \alpha^{-1}(a_2)), \\
 a_1 \overset{\alpha}{\odot} a_2 \overset{\alpha}{\odot} a_3 &= \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(\alpha^{-1}(a_1) \cdot \alpha^{-1}(a_2))) \cdot \alpha^{-1}(a_3)) \\
 &= \alpha(\alpha^{-1}(a_1) \cdot \alpha^{-1}(a_2) \cdot \alpha^{-1}(a_3)), \\
 &\dots \\
 a_1 \overset{\alpha}{\odot} a_2 \overset{\alpha}{\odot} \cdots \overset{\alpha}{\odot} a_m &= \alpha(\alpha^{-1}(a_1) \cdot \alpha^{-1}(a_2) \cdots \alpha^{-1}(a_m)).
 \end{aligned}$$

Una vez más, la fórmula anterior se puede simplificar si se considera la siguiente notación: ${}^\alpha \prod_{k=1}^m a_k = a_1 \overset{\alpha}{\odot} a_2 \overset{\alpha}{\odot} \cdots \overset{\alpha}{\odot} a_m$, con lo cual se obtiene

$${}^\alpha \prod_{k=1}^m a_k = \alpha \left(\prod_{k=1}^m \alpha^{-1}(a_k) \right). \quad (1.3)$$

Como caso particular, se observa que la α -multiplicación de los primeros m números naturales no newtonianos, es decir, el α -factorial de $\alpha(m)$ que se denota por $\alpha(m)!$, cumple:

$$\alpha(m)! = \prod_{k=1}^{\alpha(m)} \alpha(k) = \alpha(m!).$$

Si para cada $a \in \mathbb{R}_\alpha$ y $\alpha(m) \in \mathbb{N}_\alpha$ se denota por $a^{\alpha(m)}$ la correspondiente $\alpha(m)$ -ésima potencia de a , entonces se obtiene una expresión para $a^{\alpha(m)}$ por α -multiplicar m -veces el

número real no newtoniano a consigo mismo, es decir,

$$\begin{aligned} a^{\alpha(2)} &= a \overset{\alpha}{\otimes} a = \alpha(\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(a)) = \alpha((\alpha^{-1}(a))^2), \\ a^{\alpha(3)} &= a^{\alpha(2)} \overset{\alpha}{\otimes} a = \alpha((\alpha^{-1}(a))^2 \cdot \alpha^{-1}(a)) = \alpha((\alpha^{-1}(a))^3), \\ &\dots \\ a^{\alpha(m)} &= a^{\alpha(m-1)} \overset{\alpha}{\otimes} a = \alpha((\alpha^{-1}(a))^{m-1} \cdot \alpha^{-1}(a)) = \alpha((\alpha^{-1}(a))^m), \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$a^{\alpha(m)} = \alpha((\alpha^{-1}(a))^m), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (1.4)$$

La expresión (1.4) permite observar que $a^{\alpha(1)} = \alpha(\alpha^{-1}(a)) = a$, y que si $\alpha^{-1}(a) \neq 0$, entonces $a^{\alpha(0)} = \alpha(1)$. Por otra parte, se observa que $a^{\alpha(-1)} = \alpha((\alpha^{-1}(a))^{-1})$, es decir, $a^{\alpha(-1)}$ es el inverso multiplicativo de $a \in \mathbb{R}_\alpha$. Esto permite reescribir el punto (b_4) al emplear $a^{\alpha(-1)}$ en lugar de $\alpha((\alpha^{-1}(a))^{-1})$:

$$(b'_4) \quad a \overset{\alpha}{\otimes} a^{\alpha(-1)} = a^{\alpha(-1)} \overset{\alpha}{\otimes} a = \alpha(1) \text{ para todo } a \in \mathbb{R}_\alpha.$$

Como aplicación de (1.2) y (1.4) se obtienen algunas fórmulas en el conjunto \mathbb{R}_α que son conocidas en el conjunto \mathbb{R} . Por ejemplo, si $a \in \mathbb{R}_\alpha$ es tal que $\alpha^{-1}(a) \neq 1$, entonces la α -suma geométrica finita cumple

$$\alpha \sum_{k=0}^m a^{\alpha(k)} = \alpha \left(\frac{1 - (\alpha^{-1}(a))^{m+1}}{1 - \alpha^{-1}(a)} \right).$$

Vamos a mostrar la identidad anterior por inducción matemática. Para el primer número no newtoniano, se tiene

$$\begin{aligned} P(\alpha(1)) : \alpha \left(\frac{1 - (\alpha^{-1}(a))^2}{1 - \alpha^{-1}(a)} \right) &= \alpha \left(\frac{(1 - \alpha^{-1}(a))(1 + \alpha^{-1}(a))}{1 - \alpha^{-1}(a)} \right) \\ &= \alpha(1 + \alpha^{-1}(a)) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(1)) + \alpha^{-1}(a)) \\ &= \alpha(1) \overset{\alpha}{\oplus} a \\ &= a^{\alpha(0)} \overset{\alpha}{\oplus} a^{\alpha(1)}. \end{aligned}$$

Se supone que el resultado es válido para $m = k$, esto es

$$P(\alpha(k)) : a^{\alpha(0)} \overset{\alpha}{\oplus} a^{\alpha(1)} \overset{\alpha}{\oplus} \dots \overset{\alpha}{\oplus} a^{\alpha(k)} = \alpha \left(\frac{1 - (\alpha^{-1}(a))^{k+1}}{1 - \alpha^{-1}(a)} \right),$$

y se muestra que el resultado es válido para $m = k + 1$:

$$P(\alpha(k+1)) : a^{\alpha(0)} \overset{\alpha}{\oplus} a^{\alpha(1)} \overset{\alpha}{\oplus} \dots \overset{\alpha}{\oplus} a^{\alpha(k+1)} = \alpha \left(\frac{1 - (\alpha^{-1}(a))^{k+2}}{1 - \alpha^{-1}(a)} \right).$$

12 Nociones básicas del cálculo no newtoniano

Así

$$\begin{aligned}
 a^{\alpha(0)} \oplus a^{\alpha(1)} \oplus \dots \oplus a^{\alpha(k)} \oplus a^{\alpha(k+1)} \\
 &= \alpha \left(\frac{1 - (\alpha^{-1}(a))^{k+1}}{1 - \alpha^{-1}(a)} \right) \oplus a^{\alpha(k+1)} \\
 &= \alpha \left(\alpha^{-1} \left(\alpha \left(\frac{1 - (\alpha^{-1}(a))^{k+1}}{1 - \alpha^{-1}(a)} \right) + \alpha^{-1}(a^{\alpha(k+1)}) \right) \right) \\
 &= \alpha \left(\alpha^{-1} \left(\alpha \left(\frac{1 - (\alpha^{-1}(a))^{k+1}}{1 - \alpha^{-1}(a)} \right) + \alpha^{-1}(\alpha((\alpha^{-1}(a))^{k+1})) \right) \right) \\
 &= \alpha \left(\frac{1 - (\alpha^{-1}(a))^{k+1}}{1 - \alpha^{-1}(a)} + (\alpha^{-1}(a))^{k+1} \right) \\
 &= \alpha \left(\frac{1 - (\alpha^{-1}(a))^{k+1}}{1 - \alpha^{-1}(a)} + \frac{(\alpha^{-1}(a))^{k+1} - (\alpha^{-1}(a))^{k+2}}{1 - \alpha^{-1}(a)} \right) \\
 &= \alpha \left(\frac{1 - (\alpha^{-1}(a))^{k+2}}{1 - \alpha^{-1}(a)} \right).
 \end{aligned}$$

Así el resultado es válido para $m = k + 1$. Por lo tanto, $P(\alpha(m))$ es verdadero para todo $\alpha(m) \in \mathbb{N}_\alpha$.

Si $a, b \in \mathbb{R}_\alpha$, entonces se comprueba que

$$(a \oplus b)^{\alpha(m)} = \alpha((\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(b))^m)$$

y, como consecuencia, el desarrollo de un α -binomio de Newton cumple la siguiente relación

$$(a \oplus b)^{\alpha(m)} = \alpha \left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (\alpha^{-1}(a))^{m-k} (\alpha^{-1}(b))^k \right).$$

Una consecuencia adicional que resulta de la representación (1.4), es que para $a \in \mathbb{R}_\alpha$ y $m \in \mathbb{N}$, la ecuación no newtoniana $b^{\alpha(m)} = a$ admite la solución $b = \alpha(\sqrt[m]{\alpha^{-1}(a)})$, lo cual se puede verificar directamente por sustitución. Esto permite introducir la $\alpha(m)$ -ésima raíz de $a \in \mathbb{R}_\alpha$, la cual se denota por $\sqrt[m]{a}^\alpha$ y se define como

$$\sqrt[m]{a}^\alpha = \alpha \left(\sqrt[m]{\alpha^{-1}(a)} \right). \quad (1.5)$$

Se observa de la expresión (1.5) que cada valor de la $\alpha(m)$ -raíz $\sqrt[m]{a}^\alpha$ de $a \in \mathbb{R}_\alpha$, depende del valor de la m -ésima raíz $\sqrt[m]{\alpha^{-1}(a)}$ de $\alpha^{-1}(a) \in \mathbb{R}$. En particular, si en (1.5) se elige $m = 2$, entonces las dos α -raíces cuadradas de $a \in \mathbb{R}_\alpha$ son: $\ominus \sqrt{a}^\alpha = \alpha(-\sqrt{\alpha^{-1}(a)})$ y $\sqrt{a}^\alpha = \alpha(\sqrt{\alpha^{-1}(a)})$.

Con el mismo método se introduce el α -valor absoluto de $a \in \mathbb{R}_\alpha$, denotado por $|a|_\alpha$, y que satisface $|a|_\alpha = \sqrt{a^{\alpha(2)}} = \alpha(|\alpha^{-1}(a)|)$. En tal caso, se define

$$|a|_\alpha = \alpha(|\alpha^{-1}(a)|). \quad (1.6)$$

Si se considera $a \in \mathbb{R}_\alpha$ arbitrario, entonces se obtiene de la representación (1.6) la definición de la función α -valor absoluto $|\cdot|_\alpha: \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ definida por

$$|a|_\alpha = \begin{cases} a, & \text{si } a \stackrel{\alpha}{>} \alpha(0), \\ \alpha(0), & \text{si } a = \alpha(0), \\ \alpha(0) \stackrel{\alpha}{\ominus} a, & \text{si } a \stackrel{\alpha}{<} \alpha(0). \end{cases}$$

Se describen ahora dos propiedades en \mathbb{R}_α que se desprenden de la definición de α -valor absoluto.

(c₁) $|a \stackrel{\alpha}{\odot} b|_\alpha = |a|_\alpha \stackrel{\alpha}{\odot} |b|_\alpha$ para todo $a, b \in \mathbb{R}_\alpha$. Basta observar que de la definición de α -multiplicación y de (1.6) se obtiene

$$\begin{aligned} |a \stackrel{\alpha}{\odot} b|_\alpha &= \alpha(|\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(b)|) = \alpha(|\alpha^{-1}(a)| \cdot |\alpha^{-1}(b)|) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(|\alpha^{-1}(a)|)) \cdot \alpha^{-1}(\alpha(|\alpha^{-1}(b)|))) \\ &= \alpha(|\alpha^{-1}(a)|) \stackrel{\alpha}{\odot} \alpha(|\alpha^{-1}(b)|) = |a|_\alpha \stackrel{\alpha}{\odot} |b|_\alpha. \end{aligned}$$

(c₂) $|a \stackrel{\alpha}{\oplus} b|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} |a|_\alpha \stackrel{\alpha}{\oplus} |b|_\alpha$ para todo $a, b \in \mathbb{R}_\alpha$. Para ver que esto es así, sean $a, b \in \mathbb{R}_\alpha$. Entonces

$$|a \stackrel{\alpha}{\oplus} b|_\alpha = \alpha(|\alpha^{-1}(a \stackrel{\alpha}{\oplus} b)|) = \alpha(|\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(b)|).$$

Si se aplica la función α^{-1} en ambos lados de esta desigualdad, se observa lo siguiente: $\alpha^{-1}(|a \stackrel{\alpha}{\oplus} b|_\alpha) = |\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(b)| \leq |\alpha^{-1}(a)| + |\alpha^{-1}(b)|$ y, como α es una función inyectiva, se obtiene que

$$\begin{aligned} |a \stackrel{\alpha}{\oplus} b|_\alpha &\stackrel{\alpha}{\leq} \alpha(|\alpha^{-1}(a)| + |\alpha^{-1}(b)|) \\ &\stackrel{\alpha}{\leq} \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(|\alpha^{-1}(a)|)) + \alpha^{-1}(\alpha(|\alpha^{-1}(b)|))) \\ &= \alpha(|\alpha^{-1}(a)|) \stackrel{\alpha}{\oplus} \alpha(|\alpha^{-1}(b)|) = |a|_\alpha \stackrel{\alpha}{\oplus} |b|_\alpha. \end{aligned}$$

Los puntos (c₁)–(c₂) implican las siguientes propiedades en \mathbb{R}_α . Sean $a, b \in \mathbb{R}_\alpha$ arbitrarios. Se observa primero que $|a \stackrel{\alpha}{\oplus} b|_\alpha \stackrel{\alpha}{\geq} \alpha(0)$, pues esta desigualdad no newtoniana es equivalente a la desigualdad newtoniana $|\alpha^{-1}(a) - \alpha^{-1}(b)| \geq 0$. Además, es claro que $|a \stackrel{\alpha}{\oplus} b|_\alpha = \alpha(0)$ si, y sólo si, $\alpha^{-1}(a) - \alpha^{-1}(b) = 0$, es decir, si y sólo si, $a = b$. Por otra parte, se puede comprobar de forma directa que $|a \stackrel{\alpha}{\oplus} b|_\alpha = |b \stackrel{\alpha}{\oplus} a|_\alpha$. Además, $|a \stackrel{\alpha}{\oplus} c|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} |a \stackrel{\alpha}{\oplus} b|_\alpha \stackrel{\alpha}{\oplus} |b \stackrel{\alpha}{\oplus} c|_\alpha$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}_\alpha$, lo cual se obtiene de (c₂) y de observar que

$$\begin{aligned} (a \stackrel{\alpha}{\oplus} b) \stackrel{\alpha}{\oplus} (b \stackrel{\alpha}{\oplus} c) &= \alpha(\alpha^{-1}(a \stackrel{\alpha}{\oplus} b) + \alpha^{-1}(b \stackrel{\alpha}{\oplus} c)) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(a) - \alpha^{-1}(c)) = a \stackrel{\alpha}{\oplus} c. \end{aligned}$$

Finalmente, se observa que $|a \stackrel{\alpha}{\oplus} b|_\alpha \in \bar{\mathbb{R}}_\alpha^+$, lo cual se desprende de la representación (1.6) y de notar que: $|a \stackrel{\alpha}{\oplus} b|_\alpha = \alpha(|\alpha^{-1}(a) - \alpha^{-1}(b)|)$. Esto permite introducir una propiedad adicional en \mathbb{R}_α .

14 Nociones básicas del cálculo no newtoniano

(c₃) La función $\rho_\alpha: \mathbb{R}_\alpha \times \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ definida por

$$\rho_\alpha(a, b) = |a \overset{\alpha}{\ominus} b|_\alpha, \quad a, b \in \mathbb{R}_\alpha,$$

induce una métrica en \mathbb{R}_α , que satisface para todo $a, b, c \in \mathbb{R}_\alpha$ las siguientes propiedades:

- (I) $\rho_\alpha(a, b) \overset{\alpha}{\geq} \alpha(0)$.
- (II) $\rho_\alpha(a, b) = \alpha(0)$ si, y sólo si, $a = b$.
- (III) $\rho_\alpha(a, b) = \rho_\alpha(b, a)$.
- (IV) $\rho_\alpha(a, c) \overset{\alpha}{\leq} \rho_\alpha(a, b) \overset{\alpha}{\oplus} \rho_\alpha(b, c)$.

Como consecuencia de (c₃) se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 1.6. *El conjunto de números reales no newtoniano \mathbb{R}_α puede ser considerado un espacio métrico bajo la métrica ρ_α definida por*

$$\rho_\alpha(a, b) = |a \overset{\alpha}{\ominus} b|_\alpha = \alpha(|\alpha^{-1}(a) - \alpha^{-1}(b)|). \quad (1.7)$$

El espacio métrico $(\mathbb{R}_\alpha, \rho_\alpha)$ es llamado espacio métrico no newtoniano y ρ_α es llamada métrica no newtoniana.

Si en \mathbb{R} se considera la métrica estándar $\rho: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, la métrica definida por $\rho(b_1, b_2) = |b_1 - b_2|$, entonces se observa de (1.7) que

$$\rho_\alpha(a, b) = \alpha(\rho(\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b))), \quad a, b \in \mathbb{R}_\alpha.$$

Se establecen algunas propiedades sobre la topología en \mathbb{R}_α . Para este fin, se supone que a y b son elementos arbitrarios de \mathbb{R}_α tal que $a \overset{\alpha}{<} b$.

(d₁) Sea $(a, b)_\alpha = \{x \in \mathbb{R}_\alpha \mid a \overset{\alpha}{<} x \overset{\alpha}{<} b\}$ un *intervalo abierto no newtoniano* en \mathbb{R}_α . Este conjunto se identifica en \mathbb{R} con el conjunto de números $\alpha^{-1}(x) \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha^{-1}(a) < \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(b)$. De esta manera

$$(a, b)_\alpha = \alpha((\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b))).$$

(d₂) Sea $[a, b]_\alpha = \{x \in \mathbb{R}_\alpha \mid a \overset{\alpha}{\leq} x \overset{\alpha}{\leq} b\}$ un *intervalo cerrado no newtoniano* en \mathbb{R}_α . Este conjunto se identifica en \mathbb{R} con el conjunto de números $\alpha^{-1}(x) \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha^{-1}(a) \leq \alpha^{-1}(x) \leq \alpha^{-1}(b)$. Por lo tanto

$$[a, b]_\alpha = \alpha([\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)]).$$

(d₃) Sea $B_\alpha(a, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}_\alpha \mid \rho_\alpha(x, a) \overset{\alpha}{<} \epsilon\}$ una *bola abierta no newtoniana* de centro $a \in \mathbb{R}_\alpha$ y radio $\epsilon \overset{\alpha}{>} \alpha(0)$. Si $x \in B_\alpha(a, \epsilon)$, entonces se comprueba que la desigualdad $\rho_\alpha(x, a) \overset{\alpha}{<} \epsilon$ equivale en \mathbb{R} a $\alpha^{-1}(a) - \alpha^{-1}(\epsilon) < \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(\epsilon)$. Se sigue que

$$B_\alpha(a, \epsilon) = \alpha(B(\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(\epsilon))).$$

(d4) Sea $\bar{B}_\alpha(a, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}_\alpha \mid \rho_\alpha(x, a) \stackrel{\alpha}{\leq} \epsilon\}$ una bola cerrada no newtoniana de centro $a \in \mathbb{R}_\alpha$ y radio $\epsilon \stackrel{\alpha}{>} \alpha(0)$. Si $x \in \bar{B}_\alpha(a, \epsilon)$, entonces se observa de forma análoga que $\rho_\alpha(x, a) \stackrel{\alpha}{\leq} \epsilon$ equivale en \mathbb{R} a $\alpha^{-1}(a) - \alpha^{-1}(\epsilon) \leq \alpha^{-1}(x) \leq \alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(\epsilon)$. Luego

$$\bar{B}_\alpha(a, \epsilon) = \alpha(\bar{B}(\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(\epsilon))).$$

1.3. Conceptos básicos de matrices no newtonianas

El estudio de los sistemas de ecuaciones lineales es uno de los conceptos fundamentales en el álgebra lineal dado que aparecen en una gran cantidad de problemas, ya sea de índole teórico o práctico. Por ejemplo, en la estadística cuando se quiere aplicar una regresión lineal a un conjunto de datos, se debe resolver un sistema de ecuaciones para hallar los parámetros de la función que mejor los aproxime, comúnmente una línea recta.

Conjuntamente se emplean las matrices y vectores para representar, operar e interpretar más fácilmente la información de un sistema de ecuaciones.

1.3.1. Operaciones no newtonianas con matrices

Se comienza con algunas definiciones.

Definición 1.1. Un α -vector columna de n componentes es un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:

$$\alpha(\eta) = \alpha \left(\begin{bmatrix} \hat{\eta}_1 \\ \hat{\eta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\eta}_n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \alpha(\hat{\eta}_1) \\ \alpha(\hat{\eta}_2) \\ \vdots \\ \alpha(\hat{\eta}_n) \end{bmatrix}.$$

Definición 1.2. Una α -matriz es un arreglo rectangular de $m \times n$ números dispuestos en m renglones y n columnas, es decir,

$$\alpha(A) = \alpha \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \alpha(a_{11}) & \alpha(a_{12}) & \cdots & \alpha(a_{1n}) \\ \alpha(a_{21}) & \alpha(a_{22}) & \cdots & \alpha(a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha(a_{m1}) & \alpha(a_{m2}) & \cdots & \alpha(a_{mn}) \end{bmatrix}.$$

Definición 1.3. Sean $\alpha(A) = (\alpha(a_{ij}))$ y $\alpha(B) = (\alpha(b_{ij}))$ dos α -matrices de tamaño $m \times n$. La α -suma de $\alpha(A)$ y $\alpha(B)$ denotada por $\alpha(A) \oplus \alpha(B)$ es la α -matriz $\alpha(C) = (\alpha(c_{ij}))$ de tamaño $m \times n$ tal que $\alpha(c_{ij}) = \alpha(a_{ij}) \oplus \alpha(b_{ij})$.

De la definición 1.3 se sigue la α -suma de $\alpha(A)$ y $\alpha(B)$ es la α -matriz $\alpha(C)$ que se obtiene de sumar los componentes correspondientes de $\alpha(A)$ y $\alpha(B)$.

Es conveniente en ocasiones emplear la notación $\alpha(A)_{m \times n}$ para denotar que el tamaño de la α -matriz $\alpha(A)$ es $m \times n$.

Ejemplo 1.4. De la definición de α -suma de α -matrices se sigue que si

$$\alpha(A) = \begin{bmatrix} \alpha(3) & \alpha(1) \\ \alpha(2) & \alpha(4) \end{bmatrix}, \quad \alpha(B) = \begin{bmatrix} \alpha(2) & \alpha(-1) \\ \alpha(-2) & \alpha(3) \end{bmatrix},$$

entonces la α -matriz $\alpha(C) = \alpha(A) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(B)$ se obtiene de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \alpha(C) &= \begin{bmatrix} \alpha(3) & \alpha(1) \\ \alpha(2) & \alpha(4) \end{bmatrix} \overset{\alpha}{\oplus} \begin{bmatrix} \alpha(2) & \alpha(-1) \\ \alpha(-2) & \alpha(3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha(3) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(2) & \alpha(1) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(-1) \\ \alpha(2) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(-2) & \alpha(4) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(5) & \alpha(0) \\ \alpha(0) & \alpha(7) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora que se a definido un α -vector columna y una α -matriz parece natural extender la definición del α -producto de una α -matriz $\alpha(A)_{n \times n}$ y el α -vector $\alpha(\boldsymbol{\eta})_{n \times 1}$ tal como se hace en el álgebra lineal. En tal caso, el producto satisface la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} \alpha(A) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(\boldsymbol{\eta}) &= \begin{bmatrix} \alpha(a_{11}) & \alpha(a_{12}) & \cdots & \alpha(a_{1n}) \\ \alpha(a_{21}) & \alpha(a_{22}) & \cdots & \alpha(a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha(a_{n1}) & \alpha(a_{n2}) & \cdots & \alpha(a_{nn}) \end{bmatrix} \overset{\alpha}{\odot} \begin{bmatrix} \alpha(\hat{\eta}_1) \\ \alpha(\hat{\eta}_2) \\ \vdots \\ \alpha(\hat{\eta}_n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha(a_{11}) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(\hat{\eta}_1) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(a_{12}) \overset{\alpha}{\odot} (\hat{\eta}_2) \overset{\alpha}{\oplus} \cdots \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(a_{1n}) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(\hat{\eta}_n) \\ \alpha(a_{21}) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(\hat{\eta}_1) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(a_{22}) \overset{\alpha}{\odot} (\hat{\eta}_2) \overset{\alpha}{\oplus} \cdots \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(a_{2n}) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(\hat{\eta}_n) \\ \vdots \\ \alpha(a_{n1}) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(\hat{\eta}_1) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(a_{n2}) \overset{\alpha}{\odot} (\hat{\eta}_2) \overset{\alpha}{\oplus} \cdots \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(a_{nn}) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(\hat{\eta}_n) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La expresión anterior se puede simplificar si se emplea la fórmula (1.2):

$$\begin{aligned} \alpha(A) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(\boldsymbol{\eta}) &= \begin{bmatrix} \alpha(a_{11}) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(\hat{\eta}_1) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(a_{12}) \overset{\alpha}{\odot} (\hat{\eta}_2) \overset{\alpha}{\oplus} \cdots \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(a_{1n}) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(\hat{\eta}_n) \\ \alpha(a_{21}) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(\hat{\eta}_1) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(a_{22}) \overset{\alpha}{\odot} (\hat{\eta}_2) \overset{\alpha}{\oplus} \cdots \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(a_{2n}) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(\hat{\eta}_n) \\ \vdots \\ \alpha(a_{n1}) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(\hat{\eta}_1) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(a_{n2}) \overset{\alpha}{\odot} (\hat{\eta}_2) \overset{\alpha}{\oplus} \cdots \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(a_{nn}) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(\hat{\eta}_n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha(a_{11}\hat{\eta}_1 + a_{12}\hat{\eta}_2 + \cdots + a_{1n}\hat{\eta}_n) \\ \alpha(a_{21}\hat{\eta}_1 + a_{22}\hat{\eta}_2 + \cdots + a_{2n}\hat{\eta}_n) \\ \vdots \\ \alpha(a_{n1}\hat{\eta}_1 + a_{n2}\hat{\eta}_2 + \cdots + a_{nn}\hat{\eta}_n) \end{bmatrix} \\ &= \alpha \left(\begin{bmatrix} a_{11}\hat{\eta}_1 + a_{12}\hat{\eta}_2 + \cdots + a_{1n}\hat{\eta}_n \\ a_{21}\hat{\eta}_2 + a_{22}\hat{\eta}_2 + \cdots + a_{2n}\hat{\eta}_2 \\ \vdots \\ a_{n1}\hat{\eta}_1 + a_{n2}\hat{\eta}_2 + \cdots + a_{nn}\hat{\eta}_n \end{bmatrix} \right) \\ &= \alpha(A\boldsymbol{\eta}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos concluir que el α -producto de una α -matriz $\alpha(A)_{n \times n}$ y un α -vector $\alpha(\eta)_{n \times 1}$ cumple la siguiente identidad:

$$\alpha(A) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(\eta) = \alpha(A\eta). \quad (1.8)$$

Con esta misma idea, pero de modo más general, se define el α -producto de α -matrices.

Definición 1.4. Sean $\alpha(A)_{n \times n} = (\alpha(a_{ij}))$ y $\alpha(B)_{n \times n} = (\alpha(b_{ij}))$ dos α -matrices. El α -producto de $\alpha(A)$ y $\alpha(B)$, denotado por $\alpha(A) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(B)$, es la α -matriz $\alpha(C) = (\alpha(c_{ij}))$, donde

$$\alpha(c_{ij}) = \alpha \sum_{l=1}^n \alpha(a_{il}) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(b_{lj}) = \alpha \left(\sum_{l=1}^n a_{il} \cdot b_{lj} \right).$$

El siguiente ejemplo ilustra la definición anterior.

Ejemplo 1.5. De la definición de α -producto de α -matrices se sigue que si

$$\alpha(A) = \begin{bmatrix} \alpha(3) & \alpha(1) \\ \alpha(2) & \alpha(4) \end{bmatrix}, \quad \alpha(B) = \begin{bmatrix} \alpha(2) & \alpha(-1) \\ \alpha(-2) & \alpha(3) \end{bmatrix},$$

entonces la α -matriz $\alpha(C) = \alpha(A) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(B)$ se obtiene de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \alpha(C) &= \begin{bmatrix} \alpha(1) & \alpha(2) \\ \alpha(2) & \alpha(-1) \end{bmatrix} \overset{\alpha}{\odot} \begin{bmatrix} \alpha(3) & \alpha(-2) \\ \alpha(1) & \alpha(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha(1) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(3) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(2) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(1) & \alpha(1) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(-2) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(2) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(1) \\ \alpha(2) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(3) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(-1) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(1) & \alpha(2) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(-2) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(-1) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha(3) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(2) & \alpha(-2) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(2) \\ \alpha(6) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(-1) & \alpha(-4) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha(3+2) & \alpha(-2+2) \\ \alpha(6-1) & \alpha(-4-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha(5) & \alpha(0) \\ \alpha(5) & \alpha(-5) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

El siguiente ejemplo muestra un caso particular de una propiedad interesante que cumple el α -producto de dos matrices no newtonianas.

Ejemplo 1.6. Se supone que

$$\alpha(A) = \begin{bmatrix} \alpha(a_{11}) & \alpha(a_{21}) \\ \alpha(a_{12}) & \alpha(a_{22}) \end{bmatrix}, \quad \alpha(B) = \begin{bmatrix} \alpha(b_{11}) & \alpha(b_{21}) \\ \alpha(b_{12}) & \alpha(b_{22}) \end{bmatrix},$$

entonces el α -producto $\alpha(C) = \alpha(A) \overset{\circ}{\circlearrowleft} \alpha(B)$ cumple la siguiente identidad similar a (1.9):

$$\begin{aligned} \alpha(C) &= \begin{bmatrix} \alpha(a_{11}) & \alpha(a_{21}) \\ \alpha(a_{12}) & \alpha(a_{22}) \end{bmatrix} \overset{\circ}{\circlearrowleft} \begin{bmatrix} \alpha(b_{11}) & \alpha(b_{21}) \\ \alpha(b_{12}) & \alpha(b_{22}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha(a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12}) & \alpha(a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22}) \\ \alpha(a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12}) & \alpha(a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22}) \end{bmatrix} \\ &= \alpha \left(\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} & a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12} & a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \right) \\ &= \alpha(AB). \end{aligned}$$

El ejemplo anterior permite concluir, empleando inducción, que para matrices $\alpha(A)$ y $\alpha(B)$ de tamaño $n \times n$, se cumple la siguiente identidad que extiende (1.9):

$$\alpha(A) \overset{\circ}{\circlearrowleft} \alpha(B) = \alpha(AB). \quad (1.9)$$

En particular, se sigue que $\alpha(A) \overset{\circ}{\circlearrowleft} \alpha(A) = \alpha(A^2)$, $\alpha(A) \overset{\circ}{\circlearrowleft} \alpha(A) \overset{\circ}{\circlearrowleft} \alpha(A) = \alpha(A^3)$ y, en general, que el α -producto de la α -matriz $\alpha(A)$ consigo misma n veces, lo cual se denota como $\alpha(A)^{\alpha(n)}$, cumple

$$\alpha(A)^{\alpha(n)} = \underbrace{\alpha(A) \overset{\circ}{\circlearrowleft} \cdots \overset{\circ}{\circlearrowleft} \alpha(A)}_{n\text{-veces}} = \alpha(A^n).$$

Ejemplo 1.7. Simplificar la siguiente expresión

$$\eta = \begin{bmatrix} \alpha(3) & \alpha(1) & \alpha(-1) \\ \alpha(2) & \alpha(4) & \alpha(2) \\ \alpha(-1) & \alpha(-1) & \alpha(1) \end{bmatrix}^{\alpha(25)} \overset{\circ}{\circlearrowleft} \begin{bmatrix} \alpha(1) \\ \alpha(2) \\ \alpha(-3) \end{bmatrix}.$$

Observemos algunos casos particulares. Con $\alpha(n) = \alpha(1)$ se tiene

$$\begin{bmatrix} \alpha(3) & \alpha(1) & \alpha(-1) \\ \alpha(2) & \alpha(4) & \alpha(2) \\ \alpha(-1) & \alpha(-1) & \alpha(1) \end{bmatrix} \overset{\circ}{\circlearrowleft} \begin{bmatrix} \alpha(1) \\ \alpha(2) \\ \alpha(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(2) \\ \alpha(4) \\ \alpha(-6) \end{bmatrix} = \alpha \left(2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right).$$

Con $n = 2$ se tiene

$$\begin{bmatrix} \alpha(3) & \alpha(1) & \alpha(-1) \\ \alpha(2) & \alpha(4) & \alpha(2) \\ \alpha(-1) & \alpha(-1) & \alpha(1) \end{bmatrix} \overset{\circ}{\circlearrowleft} \begin{bmatrix} \alpha(3) & \alpha(1) & \alpha(-1) \\ \alpha(2) & \alpha(4) & \alpha(2) \\ \alpha(-1) & \alpha(-1) & \alpha(1) \end{bmatrix} = \alpha \left(\begin{bmatrix} 10 & 6 & 6 \\ 12 & 16 & 12 \\ -6 & -6 & 2 \end{bmatrix} \right).$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \alpha \left(\begin{bmatrix} 10 & 6 & 6 \\ 12 & 16 & 12 \\ -6 & -6 & 2 \end{bmatrix} \right) \overset{\circ}{\circlearrowleft} \begin{bmatrix} \alpha(1) \\ \alpha(2) \\ \alpha(-3) \end{bmatrix} &= \alpha \left(\begin{bmatrix} 10 & 6 & 6 \\ 12 & 16 & 12 \\ -6 & -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \alpha \left(4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Se puede comprobar por inducción que para $n = k$ se tiene

$$\begin{bmatrix} \alpha(3) & \alpha(1) & \alpha(-1) \\ \alpha(2) & \alpha(4) & \alpha(2) \\ \alpha(-1) & \alpha(-1) & \alpha(1) \end{bmatrix}^{\alpha(k)} \overset{\alpha}{\odot} \begin{bmatrix} \alpha(1) \\ \alpha(2) \\ \alpha(-3) \end{bmatrix} = \alpha \left(2^k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right).$$

En particular para $n = 25$ se obtiene

$$\eta = \alpha \left(2^{25} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right).$$

Definición 1.5. La α -matriz identidad de tamaño $n \times n$ es una matriz $\alpha(I_n)$ cuadrada tal que $\alpha(a_{ij}) = \alpha(0)$ si $i \neq j$, y tal que $\alpha(a_{ij}) = \alpha(1)$, si $i = j$; es decir,

$$\alpha(I) = \begin{bmatrix} \alpha(1) & \alpha(0) & \cdots & \alpha(0) \\ \alpha(0) & \alpha(1) & \cdots & \alpha(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha(0) & \alpha(0) & \cdots & \alpha(1) \end{bmatrix}.$$

Definición 1.6. Se dice que una α -matriz $\alpha(A)$ de tamaño $n \times n$ es invertible si, existe una α -matriz $\alpha(B)$ de tamaño $n \times n$ tal que

$$\alpha(B) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(A) = \alpha(A) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(B) = \alpha(I). \quad (1.10)$$

Si una matriz $\alpha(A)$ es invertible, su inversa se denota por $\alpha(A)^{\alpha(-1)}$.

De acuerdo con la propiedad (1.9), se sigue que si una matriz $\alpha(A)$ de tamaño $n \times n$ posee inversa $\alpha(B)$ de tamaño $n \times n$, entonces la identidad (1.10) se puede reescribir de forma equivalente como

$$\alpha(BA) = \alpha(AB) = \alpha(I).$$

Esta observación, y la inyectividad de la función generadora α , permite concluir que si $\alpha(A)$ posee inversa $\alpha(B)$, entonces la matriz newtoniana A posee inversa B , y viceversa. Por consiguiente, se sigue que si $\alpha(A)$ posee inversa $\alpha(B)$, entonces $\alpha(B) = \alpha(A^{-1})$. Se tiene así la siguiente relación:

$$\alpha(A)^{\alpha(-1)} = \alpha(A^{-1}). \quad (1.11)$$

Ejemplo 1.8. Sea

$$\alpha(A) = \begin{bmatrix} \alpha(1) & \alpha(2) \\ \alpha(1) & \alpha(3) \end{bmatrix}, \quad \alpha(B) = \begin{bmatrix} \alpha(3) & \alpha(-2) \\ \alpha(-1) & \alpha(1) \end{bmatrix}.$$

Luego, si se hace el producto de estas matriz se obtiene

$$\alpha(A) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(B) = \begin{bmatrix} \alpha(3) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(-2) & \alpha(-2) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(2) \\ \alpha(3) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(-3) & \alpha(-2) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(1) & \alpha(0) \\ \alpha(0) & \alpha(1) \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz $\alpha(B)$ es la matriz inversa de la matriz $\alpha(A)$. Así $\alpha(B) = \alpha(A^{-1})$ y se cumple $\alpha(A) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(A^{-1}) = \alpha(A^{-1}) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(A) = \alpha(I_2)$.

Capítulo 2

Conceptos de cálculo diferencial no newtoniano

2.1. Polinomios no newtonianos

Considere en el cálculo tradicional una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = a_1x + a_0, \quad (2.1)$$

la cual tiene como representación gráfica una línea recta. Ahora bien, si se expresa en el cálculo no newtoniano una función lineal que describa una “línea recta” con las operaciones definidas en \mathbb{R}_α , entonces se debe considerar la siguiente función $f_\alpha: \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ que transforma valores no newtonianos en valores no newtonianos:

$$f_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(a_1) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(x) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(a_0). \quad (2.2)$$

En este caso, la función lineal (2.1) describe una recta en el cálculo tradicional y la función lineal (2.2) describe una recta en el cálculo no newtoniano.

Para observar la relación que existe entre las funciones (2.1) y (2.2), se observa la siguiente propiedad que se obtiene de la definición de las operaciones (1.1a)–(1.1d) en \mathbb{R}_α :

$$\begin{aligned} f_\alpha(\alpha(x)) &= \alpha(a_1) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(x) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(a_0) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(a_1)) \cdot \alpha^{-1}(\alpha(x))) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(a_0) \\ &= \alpha(a_1x) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(a_0) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(a_1x)) + \alpha^{-1}(\alpha(a_0))) \\ &= \alpha(a_1x + a_0). \end{aligned}$$

De la representación anterior se establece que, si se consideran las funciones lineales $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_\alpha: \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ definidas en (2.1) y (2.2), entonces se cumple la siguiente identidad

$$f_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(f(x)). \quad (2.3)$$

Esta identidad se ilustra en el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc}
 \alpha(x) \in \mathbb{R}_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & \alpha(f(x)) \in \mathbb{R}_\alpha \\
 \updownarrow \alpha^{-1} & & \updownarrow \alpha^{-1} \\
 x \in \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & f(x) \in \mathbb{R}
 \end{array}$$

Ejemplo 2.1. Una función lineal en el cálculo tradicional podría ser la función lineal $f(x) = 3x + 4$. Si ahora se considera la misma función, pero no newtoniana, esta se expresa como $f_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(3) \overset{\circ}{\circlearrowleft} \alpha(x) \overset{\oplus}{\oplus} \alpha(4)$, lo cual, de acuerdo con (2.3), es equivalente a $f_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(f(x)) = \alpha(3x + 4)$.

Como caso particular, si se elige $\alpha(x) = \exp(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces se tiene

$$f_{\exp}(\exp(x)) = \exp(3x + 4) = \exp(3x) \exp(4).$$

En la figura 2.1 se comparan las gráficas de ambas funciones.

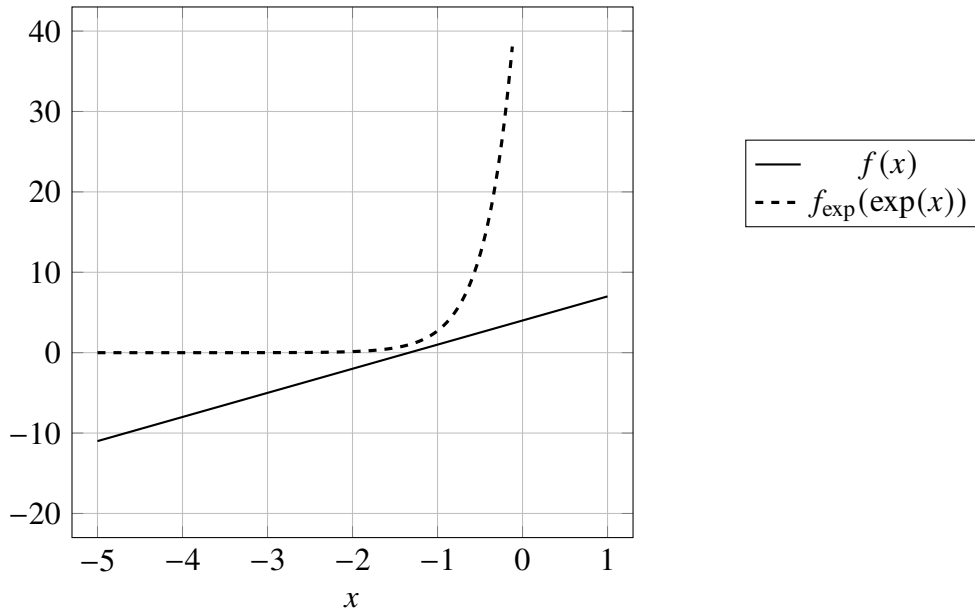


Figura 2.1. Gráficas de $f(x)$ y $f_{\exp}(\exp(x))$.

Una consecuencia adicional que resulta, es que si se considera el polinomio

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \tag{2.4}$$

con coeficientes $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, y a la par, si se define un α -polinomio en la variable $\alpha(x) \in \mathbb{R}_\alpha$ como la siguiente expresión

$$P_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(a_n) \overset{\circ}{\circlearrowleft} \alpha(x)^{\alpha(n)} \overset{\oplus}{\oplus} \dots \overset{\oplus}{\oplus} \alpha(a_1) \overset{\circ}{\circlearrowleft} \alpha(x)^{\alpha(1)} \overset{\oplus}{\oplus} \alpha(a_0), \tag{2.5}$$

entonces se cumple una relación análoga a (2.3). Esto se muestra en el siguiente resultado.

Proposición 2.1. Para todo par de polinomio $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $P_\alpha: \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ como en (2.4) y (2.5), se cumple la siguiente igualdad:

$$P_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(P(x)). \tag{2.6}$$

Demostración. Se observa primero que

$$\alpha(a_0) = \alpha(a_0) \overset{\alpha}{\circlearrowleft} \alpha(1) = \alpha(a_0) \overset{\alpha}{\circlearrowleft} \alpha(x)^{\alpha(0)},$$

con lo cual (2.5) se puede expresar como

$$P_\alpha(\alpha(x)) = \alpha \sum_{k=0}^n \alpha(a_k) \overset{\alpha}{\circlearrowleft} \alpha(x)^{\alpha(k)}.$$

Así, de acuerdo con (1.2), se tiene

$$\begin{aligned} P_\alpha(\alpha(x)) &= \alpha \sum_{k=0}^n \alpha(a_k) \overset{\alpha}{\circlearrowleft} \alpha(x)^{\alpha(k)} \\ &= \alpha \left(\sum_{k=0}^n \alpha^{-1}(\alpha(a_k) \overset{\alpha}{\circlearrowleft} \alpha(x)^{\alpha(k)}) \right) \\ &= \alpha \left(\sum_{k=0}^n \alpha^{-1}(\alpha(a_k \cdot x^k)) \right) \\ &= \alpha \left(\sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k \right) = \alpha(P(x)), \end{aligned}$$

cumpléndose así la igualdad. □

El resultado de la proposición 2.1 se ilustra en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \alpha(x) \in \mathbb{R}_\alpha & \xrightarrow{P_\alpha} & \alpha(P(x)) \in \mathbb{R}_\alpha \\ \alpha \updownarrow \alpha^{-1} & & \alpha \updownarrow \alpha^{-1} \\ x \in \mathbb{R} & \xrightarrow{P} & P(x) \in \mathbb{R} \end{array}$$

Ejemplo 2.2. Se requiere hallar la ecuación de la recta l_α que toca la gráfica de la función $f_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(x)^{\alpha(2)} \overset{\alpha}{\circlearrowleft} \alpha(1)$ en el punto $\alpha(2)$ y que tiene una pendiente $m_\alpha = \alpha(4)$.

De la igualdad (2.6), se tiene que la función se puede expresar de forma equivalente a $f_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(x^2 + 1)$. Por lo tanto, si se considera la función $f(x) = x^2 + 1$, entonces la

ecuación de la recta l que toca la gráfica de esta función en el punto $x = 2$, tiene pendiente $m = 4$ y ordenada $y = f(2) = 5$. Tal recta se describe por

$$l : y - 5 = 4(x - 2),$$

o bien

$$l : y = 4x - 3.$$

Así, la ecuación de la recta $l_\alpha = \alpha(l)$, se expresa como:

$$l_\alpha : \alpha(y - 4x + 3) = \alpha(0),$$

o bien

$$l_\alpha : \alpha(y) = \alpha(4) \overset{\circ}{\circlearrowleft} \alpha(x) \overset{\circ}{\circlearrowright} \alpha(3).$$

Si se considera el α -generador $\alpha(x) = \ln(x)$ para $x \in \mathbb{R}^+$ y $\alpha^{-1}(x) = \exp(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, entonces en la figura 2.2 se muestra la situación descrita, donde $f_{\ln}(\ln(x)) = \ln(x^2 + 1)$ y $g_{\ln}(\ln(x)) = \ln(4x - 3)$.

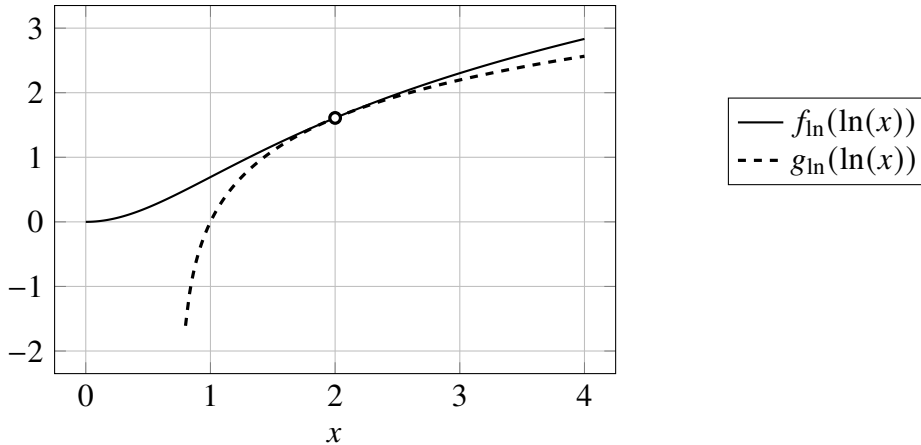


Figura 2.2. Gráficas de las ln-funciones $f_{\ln}(\ln(x)) = \ln(x^2 + 1)$ y $g_{\ln}(\ln(x)) = \ln(4x - 3)$.

2.2. Algunas funciones no newtonianas

En general, la expresión (2.3) invita a pensar como se pueden definir funciones tales como $\exp_\alpha(\alpha(x))$, $\sin_\alpha(\alpha(x))$, $\cos_\alpha(\alpha(x))$, entre otras, empleando series de potencias. Para esto es necesario introducir conceptos tales como sucesiones de números, sucesiones de funciones, y criterios de convergencia.

En el cálculo tradicional se conoce que una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales es convergente a un número real A , si para cada $\epsilon > 0$ puede determinarse un entero positivo N (que depende de ϵ) con la siguiente propiedad:

$$|a_n - A| < \epsilon,$$

siempre que $n > N$, véase Apostol (1976).

Paralelamente podemos definir la convergencia de una sucesión de números reales no newtonianos.

Definición 2.1. La sucesión $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales no newtonianos es convergente a un número no newtoniano B , si para cada $\alpha(\epsilon) \stackrel{\alpha}{>} \alpha(0)$ puede determinarse un entero positivo N (que depende de $\alpha(\epsilon)$) con la siguiente propiedad

$$|b_n \overset{\alpha}{\ominus} B|_{\alpha} \stackrel{\alpha}{<} \alpha(\epsilon),$$

siempre que $n > N$.

Ejemplo 2.3. Se conoce que la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $a_n = \frac{1}{n}$ converge a cero en el cálculo newtoniano, es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \epsilon$ siempre que $n > N$.

Si se considera la sucesión $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales no newtonianos definida por $b_n = \frac{\alpha(1)}{\alpha(n)}_{\alpha}$, se debe esperar que tal sucesión converge a $\alpha(0)$. En efecto, se observa que para cada $\alpha(\epsilon) \stackrel{\alpha}{>} \alpha(0)$, si se elige $n > N$, entonces

$$\left| \frac{\alpha(1)}{\alpha(n)}_{\alpha} \overset{\alpha}{\ominus} \alpha(0) \right|_{\alpha} = \left| \alpha \left(\frac{1}{n} \right) \overset{\alpha}{\ominus} \alpha(0) \right|_{\alpha} = \left| \alpha \left(\frac{1}{n} \right) \right|_{\alpha} = \alpha \left(\frac{1}{n} \right) \stackrel{\alpha}{<} \alpha(\epsilon),$$

teniendo así el resultado.

Otra noción que se considera en el cálculo tradicional es el relacionado con la convergencia uniforme de una sucesión de funciones. Una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente convergente a una función f en un conjunto S , si para cada $\epsilon > 0$, existe un entero positivo N tal que $n > N$ implica $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para cada $x \in S$, véase Apostol (1976).

Al trasladar este concepto al cálculo no newtoniano, surge la siguiente:

Definición 2.2. Una sucesión de funciones $\{f_{\alpha,n}\}_{n \in \mathbb{N}_{\alpha}}$ converge uniformemente a una función $f_{\alpha}: S_{\alpha} \subset \mathbb{R}_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}_{\alpha}$, si para cada $\alpha(\epsilon) \stackrel{\alpha}{>} \alpha(0)$ puede determinarse un entero positivo N (que depende de $\alpha(\epsilon)$) tal que $n > N$ implica

$$|f_{\alpha,n}(\alpha(x)) \overset{\alpha}{\ominus} f_{\alpha}(\alpha(x))|_{\alpha} \stackrel{\alpha}{<} \alpha(\epsilon) \text{ para cada } \alpha(x) \in S_{\alpha}.$$

Ahora bien, un criterio para determinar la convergencia uniforme en el cálculo tradicional es la condición de Cauchy, la cual señala que una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función f en un conjunto S si, y solo si, se cumple que para todo $\epsilon > 0$ existe un entero positivo N (que depende de ϵ) tal que $m, n > N$, implica $|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$ para cada $x \in S$, véase Apostol (1976). Una formulación no newtoniana del resultado anterior se concentra en el siguiente:

Teorema 2.1 (Condición de Cauchy para la convergencia uniforme). *Una sucesión de funciones $\{f_{\alpha,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función f_α en un conjunto S_α si, y solo si, para todo $\alpha(\epsilon) \stackrel{\alpha}{>} \alpha(0)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n > N$ se cumple la siguiente relación*

$$|f_{\alpha,m}(\alpha(x)) \ominus f_{\alpha,n}(\alpha(x))|_\alpha \stackrel{\alpha}{<} \alpha(\epsilon) \text{ para cada } \alpha(x) \in S_\alpha. \quad (2.7)$$

Demostración. Se supone que la sucesión $\{f_{\alpha,n}\}_{n \in \mathbb{N}_\alpha}$ converge uniformemente a la función f_α , luego dado $\alpha(\epsilon) \stackrel{\alpha}{>} \alpha(0)$, existe un entero positivo N tal que si $n > N$, entonces $|f_{\alpha,n}(\alpha(x)) \ominus f_\alpha(\alpha(x))|_\alpha \stackrel{\alpha}{<} \alpha(\frac{\epsilon}{2})$ para cada $\alpha(x) \in S_\alpha$, así que si $m, n > N$, entonces

$$\begin{aligned} |f_{\alpha,m}(\alpha(x)) \ominus f_{\alpha,n}(\alpha(x))|_\alpha &\stackrel{\alpha}{\leq} |f_{m,\alpha}(\alpha(x)) \ominus f_\alpha(\alpha(x))|_\alpha \oplus |f_\alpha(\alpha(x)) \ominus f_{n,\alpha}(\alpha(x))|_\alpha \\ &= |f_{\alpha,m}(\alpha(x)) \ominus f_\alpha(\alpha(x))|_\alpha \oplus |f_{\alpha,n}(\alpha(x)) \ominus f_\alpha(\alpha(x))|_\alpha \\ &\stackrel{\alpha}{<} \alpha(\frac{\epsilon}{2}) \oplus \alpha(\frac{\epsilon}{2}) = \alpha(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}) = \alpha(\epsilon), \end{aligned}$$

para cada $\alpha(x) \in S_\alpha$, es decir, la sucesión satisface (2.7).

Se supone ahora que $\{f_{\alpha,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface (2.7) con $\alpha(\frac{\epsilon}{2}) \stackrel{\alpha}{>} \alpha(0)$, es decir,

$$|f_{\alpha,m}(\alpha(x)) \ominus f_{\alpha,n}(\alpha(x))|_\alpha \stackrel{\alpha}{<} \alpha(\frac{\epsilon}{2}), \quad (2.8)$$

para $m, n > N$, esta última desigualdad es válida para cualquier $\alpha(x) \in S_\alpha$, es decir, para cada $\alpha(x) \in S_\alpha$ fijo, la sucesión $\{f_{\alpha,n}(\alpha(x))\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y, por lo tanto, convergente; esto es, para cada $\alpha(x) \in S_\alpha$ existe $f_\alpha(\alpha(x))$ tal que $\{f_{\alpha,n}(\alpha(x))\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f_\alpha(\alpha(x))$. Regresando a (2.8), se fija $m > N$ y se toma el límite $n \rightarrow \infty$, obteniendo

$$|f_{\alpha,m}(\alpha(x)) \ominus f_\alpha(\alpha(x))|_\alpha \stackrel{\alpha}{<} \alpha(\frac{\epsilon}{2}) < \alpha(\epsilon).$$

para cualquier $m > N$, lo anterior significa que $\{f_{\alpha,m}(\alpha(x))\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge a $f_\alpha(\alpha(x))$ para cada $\alpha(x) \in S_\alpha$. \square

El resultado anterior nos permite definir funciones que se definen mediante series de potencias de números no newtonianos, tal como el análogo a la función exponencial en el cálculo tradicional, es decir, la función $\exp_\alpha(\alpha(x))$.

Ejemplo 2.4. Se conoce que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge uniformemente para cada $x \in \mathbb{R}$ a la función $\exp(x)$ en el cálculo tradicional, es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > N$ entonces

$$\left| \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| < \epsilon.$$

Un pensamiento natural nos lleva a suponer que si se considera la serie no newtoniana

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(x)^{\alpha(k)}}{\alpha(k!)} \alpha, \quad \alpha(x) \in \mathbb{R}_\alpha,$$

esta converge a una función $f_\alpha : \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$. En efecto, basta con demostrar que para cada $\alpha(\epsilon) > \alpha(0)$, puede determinarse $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > N$, entonces

$$\alpha \left(\left| \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \right) < \alpha(\epsilon).$$

Considere la sucesión $S_n(\alpha(x))$ definida por

$$S_n(\alpha(x)) = \alpha \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(x)^{\alpha(k)}}{\alpha(k!)} \alpha, \quad \alpha(x) \in \mathbb{R}_\alpha.$$

Se observa que

$$\begin{aligned} S_n(\alpha(x)) &= \alpha \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(x)^{\alpha(k)}}{\alpha(k!)} \alpha = \alpha \left(\sum_{k=0}^n \alpha^{-1} \left(\frac{\alpha(x)^{\alpha(k)}}{\alpha(k!)} \alpha \right) \right) \\ &= \alpha \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right). \end{aligned}$$

En tal caso para $m, n > N$, se tiene

$$\begin{aligned} |S_m(\alpha(x)) \ominus S_n(\alpha(x))|_\alpha &= \alpha (|\alpha^{-1}(S_m(\alpha(x))) - \alpha^{-1}(S_n(\alpha(x)))|) \\ &= \alpha \left(\left| \sum_{k=1}^m \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \right| \right) < \alpha(\epsilon). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie no newtoniana $\alpha \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(x)^{\alpha(k)}}{\alpha(k!)} \alpha$ converge uniformemente a una función no newtoniana $f_\alpha : \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$. Esto permite definir la función α -exponencial no newtoniana como:

$$\exp_\alpha(\alpha(x)) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(x)^{\alpha(k)}}{\alpha(k!)} \alpha, \quad \alpha(x) \in \mathbb{R}_\alpha. \quad (2.9)$$

Se observa que:

$$\begin{aligned} \exp_\alpha(\alpha(x)) &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(x)^{\alpha(k)}}{\alpha(k!)} \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(x)^{\alpha(k)}}{\alpha(k!)} \alpha \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \left(\sum_{k=0}^n \alpha^{-1} \left(\frac{\alpha(x)^{\alpha(k)}}{\alpha(k!)} \alpha \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) \\ &= \alpha \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) = \alpha \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \\ &= \alpha(\exp(x)). \end{aligned}$$

Esto muestra la relación que existe entre la función exponencial en el cálculo newtoniano y la función α -exponencial no newtoniana, lo cual se resumen en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \alpha(x) \in \mathbb{R}_\alpha & \xrightarrow{\exp_\alpha} & \alpha(\exp(x)) \in \mathbb{R}_\alpha \\
 \updownarrow \alpha^{-1} & & \updownarrow \alpha^{-1} \\
 x \in \mathbb{R} & \xrightarrow{\exp} & \exp(x) \in \mathbb{R}
 \end{array}$$

Observación 2.1. En ocasiones se suele emplear la notación $e_\alpha^{\alpha(x)}$ para designar a la α -función exponencial $\exp_\alpha(\alpha(x))$.

Los casos de estudio anteriores permiten formular el siguiente resultado que incorpora los casos ya discutidos.

Teorema 2.2. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente sobre un conjunto $S \subset \mathbb{R}$ a una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces la α -serie ${}^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(a_n) \overset{\circ}{\circlearrowleft} \alpha(x)^{\alpha(n)}$ converge uniformemente sobre $S_\alpha = \alpha(S)$ a una función $f_\alpha: \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$. Además, se cumple la identidad

$$f_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(f(x)), \quad x \in S.$$

Demostración. Sea $\alpha(\epsilon) > \alpha(0)$ arbitrario, es decir, $\epsilon > 0$. Por hipótesis, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente para cada $x \in \mathbb{R}$, luego por el criterio de Cauchy se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$ entonces

$$\left| \sum_{k=1}^m a_k x^k - \sum_{k=0}^n a_k x^k \right| < \epsilon.$$

En tal caso, basta demostrar que para $\alpha(\epsilon) > \alpha(0)$, si $n, m > N$ entonces

$$\alpha \left(\left| \sum_{k=1}^m a_k x^k - \sum_{k=0}^n a_k x^k \right| \right) < \alpha(\epsilon).$$

Considere la sucesión de sumas parciales definida como

$$S_n(\alpha(x)) = \alpha \sum_{k=1}^n \alpha(a_k) \overset{\circ}{\circlearrowleft} \alpha(x)^{\alpha(k)}, \quad \alpha(x) \in S_\alpha.$$

Note lo siguiente

$$\begin{aligned}
 S_n(\alpha(x)) &= \alpha \sum_{k=1}^m \alpha(a_k) \overset{\circ}{\ominus} \alpha(x)^{\alpha(k)} \\
 &= \alpha \left(\sum_{k=1}^n \alpha^{-1} \left(\alpha(a_k) \overset{\circ}{\ominus} \alpha(x)^{\alpha(k)} \right) \right) \\
 &= \alpha \left(\sum_{k=1}^n \alpha^{-1} \left(\alpha(a_k) \overset{\circ}{\ominus} \alpha(x^k) \right) \right) \\
 &= \alpha \left(\sum_{k=1}^n a_k \cdot x^k \right),
 \end{aligned}$$

Luego para $n, m > N$ se puede escribir

$$\begin{aligned}
 |S_m(\alpha(x)) \overset{\circ}{\ominus} S_n(\alpha(x))|_{\alpha} &= \alpha \left(\left| \alpha^{-1}(S_m(\alpha(x))) - \alpha^{-1}(S_n(\alpha(x))) \right| \right) \\
 &= \alpha \left(\left| \sum_{k=1}^m a_k \cdot x^k - \sum_{k=1}^n a_k \cdot x^k \right| \right) < \alpha(\epsilon).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la α -serie de potencias $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(a_n) \overset{\circ}{\ominus} \alpha(x)^{\alpha(n)}$ converge uniformemente sobre $S_{\alpha} = \alpha(S)$.

Por otro lado, observe que

$$\begin{aligned}
 f_{\alpha}(\alpha(x)) &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(a_n) \overset{\circ}{\ominus} \alpha(x)^{\alpha(n)} \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha \sum_{n=1}^k \alpha(a_n) \overset{\circ}{\ominus} \alpha(x)^{\alpha(n)} \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha \left(\sum_{n=1}^k \alpha^{-1} \left(\alpha(a_n) \overset{\circ}{\ominus} \alpha(x)^{\alpha(n)} \right) \right) \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha \left(\sum_{k=1}^n a_k \cdot x^k \right) \\
 &= \alpha \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \cdot x^k \right) = \alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot x^k \right) = \alpha(f(x)).
 \end{aligned}$$

Esto muestra que se cumple la igualdad $f_{\alpha}(\alpha(x)) = \alpha(f(x))$. □

El teorema 2.2 permite concluir que toda función en el cálculo tradicional que se admita una representación mediante serie de potencias, permite definir una α -función que

es uniformemente convergente. El siguiente diagrama resume este resultado:

$$\begin{array}{ccc}
 \alpha(x) \in \mathbb{R}_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & \alpha(f(x)) \in \mathbb{R}_\alpha \\
 \uparrow \alpha & & \uparrow \alpha \\
 \downarrow \alpha^{-1} & & \downarrow \alpha^{-1} \\
 x \in \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & f(x) \in \mathbb{R}
 \end{array}$$

Con este precedente, se puede emplear el procedimiento anterior para obtener otras funciones que se definen mediante series de potencias no newtonianas. Con ello se puede definir, por ejemplo, las siguientes funciones α -trigonométricas:

- La función α -seno: $\sin_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(\sin(x))$, $\alpha(x) \in \mathbb{R}_\alpha$.
- La función α -coseno: $\cos_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(\cos(x))$, $\alpha(x) \in \mathbb{R}_\alpha$.
- La función α -tangente: $\tan_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(\tan(x))$, $\alpha(x) \in \mathbb{R}_\alpha$.

Se puede comprobar que con las operaciones no newtonianas, la siguiente identidad respecto a las funciones α -seno y α -coseno es cierta:

$$\sin_\alpha^{\alpha(2)}(\alpha(x)) \oplus \cos_\alpha^{\alpha(2)}(\alpha(x)) = \alpha(1), \quad \alpha(x) \in \mathbb{R}_\alpha.$$

Se verifica que esto es así:

$$\begin{aligned}
 \sin_\alpha^{\alpha(2)}(\alpha(x)) \oplus \cos_\alpha^{\alpha(2)}(\alpha(x)) &= \alpha((\alpha^{-1}(\sin_\alpha(\alpha(x))))^2) \oplus \alpha((\alpha^{-1}(\cos_\alpha(\alpha(x))))^2) \\
 &= \alpha((\alpha^{-1}(\sin_\alpha(\alpha(x))))^2) + \alpha((\alpha^{-1}(\cos_\alpha(\alpha(x))))^2) \\
 &= \alpha(\sin^2(x) + \cos^2(x)) = \alpha(1).
 \end{aligned}$$

Una de las identidades importantes en el cálculo tradicional es la que permite determinar la suma de ángulos: $\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x)$. Se comprueba que está también se cumple en el cálculo no newtoniano.

$$\begin{aligned}
 \sin_\alpha(\alpha(x)) \otimes \cos_\alpha(\alpha(y)) \oplus \sin_\alpha(\alpha(y)) \otimes \cos_\alpha(\alpha(x)) \\
 &= \alpha(\alpha^{-1}(\sin_\alpha(\alpha(x))) \cdot \alpha^{-1}(\cos_\alpha(\alpha(y)))) \\
 &\quad \oplus \alpha(\alpha^{-1}(\sin_\alpha(\alpha(y))) \cdot \alpha^{-1}(\cos_\alpha(\alpha(x)))) \\
 &= \alpha(\sin(x) \cdot \cos(y)) \oplus \alpha(\sin(y) \cdot \cos(x)) \\
 &= \alpha(\sin(x) \cdot \cos(y) + \sin(y) \cdot \cos(x)) \\
 &= \sin_\alpha(\alpha(x + y)) = \sin_\alpha(\alpha(x)) \oplus \alpha(y).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sin_\alpha(\alpha(x)) \oplus \alpha(y) = \sin_\alpha(\alpha(x)) \otimes \cos_\alpha(\alpha(y)) \oplus \sin_\alpha(\alpha(y)) \otimes \cos_\alpha(\alpha(x)).$$

Las tres identidades trigonométricas principales del ángulo doble que se cumplen en el cálculo tradicional, a saber, $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$, $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x)$ y $\tan(2x) = 2 \tan(x)/(1 - \tan^2(x))$, también son válidas en el cálculo no newtoniano. Se muestra únicamente que la primera identidad es válida, las otras dos se obtienen de forma análoga. En efecto:

$$\begin{aligned} \alpha(2) \overset{\alpha}{\odot} \cos_{\alpha}(\alpha(x)) \overset{\alpha}{\odot} \sin_{\alpha}(\alpha(x)) & \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(2)) \cdot \alpha^{-1}(\cos_{\alpha}(\alpha(x))) \overset{\alpha}{\odot} \sin_{\alpha}(\alpha(x))) \\ &= \alpha(2 \cdot \cos(x)) \overset{\alpha}{\odot} \sin_{\alpha}(\alpha(x)) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(2 \cdot \cos(x))) \cdot \alpha^{-1}(\alpha(\sin(x)))) \\ &= \alpha(2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)) = \alpha(\sin(2x)) = \sin_{\alpha}(\alpha(2) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(x)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sin_{\alpha}(\alpha(2) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(x)) = \alpha(2) \overset{\alpha}{\odot} \cos_{\alpha}(\alpha(x)) \overset{\alpha}{\odot} \sin_{\alpha}(\alpha(x)).$$

Por último se tiene la siguiente identidad

$$\begin{aligned} \frac{\tan_{\alpha}(\alpha(x)) \overset{\alpha}{\oplus} \tan_{\alpha}(\alpha(y))}{\alpha(1) \overset{\alpha}{\odot} \tan_{\alpha}(\alpha(x)) \overset{\alpha}{\odot} \tan_{\alpha}(\alpha(y))}^{\alpha} &= \frac{\alpha(\tan(x) + \tan(y))}{\alpha(1 - \tan(x)) \overset{\alpha}{\odot} \tan_{\alpha}(\alpha(y))}^{\alpha} \\ &= \frac{\alpha(\tan(x) + \tan(y))}{\alpha(1 - \tan(x) \cdot \tan(y))}^{\alpha} \\ &= \alpha \left(\frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)} \right) \\ &= \alpha(\tan(x + y)) = \tan_{\alpha}(\alpha(x) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(y)). \end{aligned}$$

Así, se cumple la identidad

$$\tan_{\alpha}(\alpha(x) \overset{\alpha}{\oplus} \alpha(y)) = \frac{\tan_{\alpha}(\alpha(x)) \overset{\alpha}{\oplus} \tan_{\alpha}(\alpha(y))}{\alpha(1) \overset{\alpha}{\odot} \tan_{\alpha}(\alpha(x)) \overset{\alpha}{\odot} \tan_{\alpha}(\alpha(y))}^{\alpha}.$$

Ejemplo 2.5. Si se considera el α -generador definido por $\alpha(x) = \exp(x)$ para $x \in \mathbb{R}$ y $\alpha^{-1}(x) = \ln(x)$ para $x \in \mathbb{R}^+$, entonces las exp-funciones trigonométricas $\sin_{\exp}(\exp(x))$, $\cos_{\exp}(\exp(x))$ y $\tan_{\exp}(\exp(x))$ tienen los siguientes valores en $x = \pi$:

- $\sin_{\exp}(\exp(\pi)) = \exp(\sin(\pi)) = 1.$
- $\cos_{\exp}(\exp(\pi)) = \exp(\cos(\pi)) = e^{-1} = \frac{1}{e}.$
- $\tan_{\exp}(\exp(\pi)) = \exp(\tan(\pi)) = 1.$

En la figura 2.3 se observan estos valores, así como las gráficas de las exp-funciones trigonométricas consideradas.

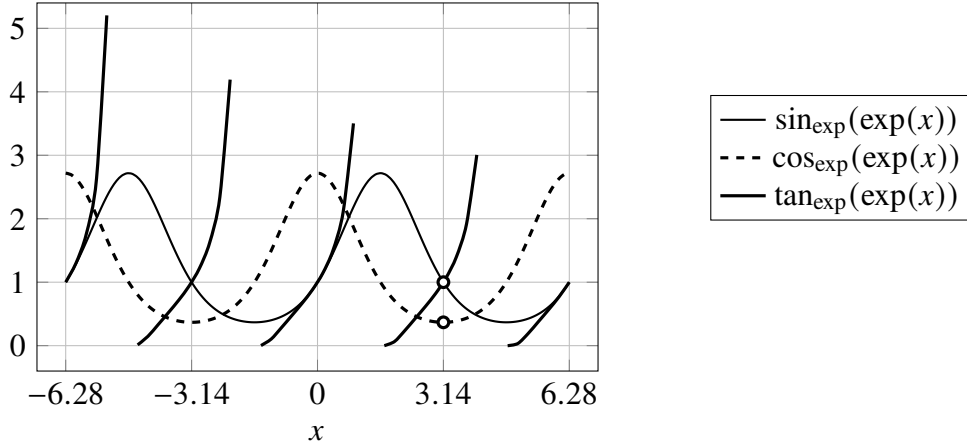


Figura 2.3. Representaciones gráficas de las siguientes exp-funciones trigonométricas $\sin_{\exp}(\exp(x))$, $\cos_{\exp}(\exp(x))$ y $\tan_{\exp}(\exp(x))$.

2.3. Derivada de una función no newtoniana

En este apartado se consideran funciones no newtonianas $f_{\alpha} : [a, b]_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}_{\alpha}$ como aquellas que se analizaron en el apartado anterior, es decir, funciones no newtonianas que satisfacen la igualdad $f_{\alpha}(\alpha(x)) = \alpha(f(x))$ para alguna función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición 2.3. Se dice que $f_{\alpha} : [a, b]_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}_{\alpha}$ es α -diferenciable en $\alpha(x) \in [a, b]_{\alpha}$ si el límite

$$\alpha \lim_{\alpha(h) \rightarrow \alpha(0)} \frac{f_{\alpha}(\alpha(x) \oplus \alpha(h)) \ominus f_{\alpha}(\alpha(x))}{\alpha(h)}_{\alpha},$$

existe. En tal caso, la α -derivada de f_{α} en $\alpha(x) \in [a, b]_{\alpha}$ es denotada por

$$\frac{\alpha d}{dx} f_{\alpha}(\alpha(x)) = \alpha \lim_{\alpha(h) \rightarrow \alpha(0)} \frac{f_{\alpha}(\alpha(x) \oplus \alpha(h)) \ominus f_{\alpha}(\alpha(x))}{\alpha(h)}_{\alpha}. \quad (2.10)$$

Es conveniente obtener una expresión alternativa para determinar la derivada de una función no newtoniana. Para este fin, se observa que para una función $f_{\alpha} : [a, b]_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}_{\alpha}$ existe $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_{\alpha}(\alpha(x)) = \alpha(f(x))$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{f_{\alpha}(\alpha(x) \oplus \alpha(h)) \ominus f_{\alpha}(\alpha(x))}{\alpha(h)}_{\alpha} &= \frac{\alpha(\alpha^{-1}(f_{\alpha}(\alpha(x) \oplus \alpha(h))) - \alpha^{-1}(f_{\alpha}(\alpha(x))))}{\alpha(h)}_{\alpha} \\ &= \alpha \left(\frac{\alpha^{-1}(f_{\alpha}(\alpha(x) \oplus \alpha(h))) - \alpha^{-1}(f_{\alpha}(\alpha(x)))}{h} \right) \\ &= \alpha \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right), \end{aligned}$$

por lo tanto, empleando la continuidad de la función α se puede expresar (2.10) como

$$\begin{aligned}
 \frac{{}^{\alpha}\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{\alpha}(\alpha(x)) &= \lim_{\alpha(h)\rightarrow\alpha(0)}^{\alpha} \frac{f_{\alpha}(\alpha(x) \oplus \alpha(h)) \ominus f_{\alpha}(\alpha(x))}{\alpha(h)}_{\alpha} \\
 &= \lim_{h\rightarrow 0} \alpha \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \\
 &= \alpha \left(\lim_{h\rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \\
 &= \alpha \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) \right).
 \end{aligned}$$

Como resultado de lo anterior, se obtiene la siguiente expresión para la α -derivada de una α -función no newtoniana f_{α} en $\alpha(x) \in [a, b]_{\alpha}$:

$$\frac{{}^{\alpha}\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{\alpha}(\alpha(x)) = \alpha \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) \right). \quad (2.11)$$

Esta formulación nos permite derivar funciones simples y obtener expresiones para la α -derivada de la suma, producto y cociente de funciones que son α -diferenciables.

Ejemplo 2.6. Se considera la función $f_{\alpha}(\alpha(x)) = \alpha(x)^{\alpha(n)}$ con $\alpha(n) \in \mathbb{N}_{\alpha}$, en este caso

$$\begin{aligned}
 \frac{{}^{\alpha}\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{\alpha}(\alpha(x)) &= \lim_{\alpha(h)\rightarrow\alpha(0)}^{\alpha} \frac{\alpha(x+h)^{\alpha(n)} \ominus \alpha(x)^{\alpha(n)}}{\alpha(h)}_{\alpha} \\
 &= \lim_{\alpha(h)\rightarrow\alpha(0)}^{\alpha} \frac{\alpha((\alpha^{-1}(\alpha(x+h)))^n) \ominus \alpha((\alpha^{-1}(\alpha(x)))^n)}{\alpha(h)}_{\alpha} \\
 &= \lim_{\alpha(h)\rightarrow\alpha(0)}^{\alpha} \frac{\alpha((x+h)^n) \ominus \alpha(x^n)}{\alpha(h)}_{\alpha} \\
 &= \lim_{\alpha(h)\rightarrow\alpha(0)}^{\alpha} \frac{\alpha((x+h)^n - x^n)}{\alpha(h)}_{\alpha} \\
 &= \lim_{\alpha(h)\rightarrow\alpha(0)} \alpha \left(\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \right) \\
 &= \alpha \left(\lim_{h\rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \right) = \alpha(nx^{n-1}).
 \end{aligned}$$

Adicionalmente, se observa el siguiente procedimiento

$$\begin{aligned}
 \alpha(nx^{n-1}) &= \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(n)) \cdot \alpha^{-1}(\alpha(x^{n-1}))) = \alpha(n) \ominus \alpha(x^{n-1}) \\
 &= \alpha(n) \ominus \alpha((\alpha^{-1}(\alpha(x)))^{n-1}) = \alpha(n)\alpha(x)^{\alpha(n-1)},
 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\frac{{}^{\alpha}\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{\alpha}(\alpha(x)) = \alpha(n)\alpha(x)^{\alpha(n-1)}.$$

Ejemplo 2.7. La expresión (2.11) permite verificar la validez de la siguiente derivada: para la función $\sin_\alpha(\alpha(x))$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{{}^\alpha d}{dx} \sin_\alpha(\alpha(x)) &= \alpha \left(\frac{d}{dx} \sin(x) \right) \\ &= \alpha(\cos(x)) = \cos_\alpha(\alpha(x)). \end{aligned}$$

Dada la experiencia anterior, se pueden verificar las siguientes propiedades.

Teorema 2.3. Si $g_\alpha, h_\alpha: [a, b]_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ son α -diferenciables en $\alpha(x) \in [a, b]_\alpha$, entonces $g_\alpha(\alpha(x)) \oplus h_\alpha(\alpha(x))$ también es α -diferenciable en $\alpha(x) \in [a, b]_\alpha$ y

$$\frac{{}^\alpha d}{dx} (g_\alpha(\alpha(x)) \oplus h_\alpha(\alpha(x))) = \frac{{}^\alpha d}{dx} g_\alpha(\alpha(x)) \oplus \frac{{}^\alpha d}{dx} h_\alpha(\alpha(x)).$$

Demostración. Se observa primero que existen dos funciones $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $g_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(g(x))$ y $h_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(h(x))$, de donde, de la definición de α -suma se sigue que $g_\alpha(\alpha(x)) \oplus h_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(g(x) + h(x))$, para todo $x \in [a, b]$ y, por lo tanto, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{{}^\alpha d}{dx} (g_\alpha(\alpha(x)) \oplus h_\alpha(\alpha(x))) &= \alpha \left(\frac{d}{dx} g(x) + \frac{d}{dx} h(x) \right) \\ &= \alpha \left(\frac{d}{dx} g(x) \right) \oplus \alpha \left(\frac{d}{dx} h(x) \right) \\ &= \frac{{}^\alpha d}{dx} g_\alpha(\alpha(x)) \oplus \frac{{}^\alpha d}{dx} h_\alpha(\alpha(x)), \end{aligned}$$

lo cual muestra el resultado. □

Teorema 2.4. Si $g_\alpha, h_\alpha: [a, b]_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ son α -diferenciables en $\alpha(x) \in [a, b]_\alpha$, entonces $g_\alpha(\alpha(x)) \odot h_\alpha(\alpha(x))$ también es α -diferenciable en $\alpha(x) \in [a, b]_\alpha$ y

$$\frac{{}^\alpha d}{dx} (g_\alpha(\alpha(x)) \odot h_\alpha(\alpha(x))) = g_\alpha(\alpha(x)) \odot \frac{{}^\alpha d}{dx} h_\alpha(\alpha(x)) \oplus h_\alpha(\alpha(x)) \odot \frac{{}^\alpha d}{dx} g_\alpha(\alpha(x)).$$

Demostración. Existen dos funciones $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $g_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(g(x))$ y $h_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(h(x))$ y, por lo tanto, de acuerdo con la definición de α -multiplicación se sigue que $g_\alpha(\alpha(x)) \odot h_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(g(x)h(x))$, para todo $x \in [a, b]$ y, por lo tanto, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{{}^\alpha d}{dx} (g_\alpha(\alpha(x)) \odot h_\alpha(\alpha(x))) &= \alpha \left(\frac{d}{dx} (g(x)h(x)) \right) \\ &= \alpha \left(g(x) \frac{d}{dx} h(x) + h(x) \frac{d}{dx} g(x) \right) \\ &= \alpha \left(g(x) \frac{d}{dx} h(x) \right) \oplus \alpha \left(h(x) \frac{d}{dx} g(x) \right) \\ &= g_\alpha(\alpha(x)) \odot \frac{{}^\alpha d}{dx} h_\alpha(\alpha(x)) \oplus h_\alpha(\alpha(x)) \odot \frac{{}^\alpha d}{dx} g_\alpha(\alpha(x)), \end{aligned}$$

lo cual muestra el resultado. □

Teorema 2.5. Si $g_\alpha : [a, b]_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ es una función diferenciable en $\alpha(x) \in [a, b]_\alpha$ con $g_\alpha(\alpha(x)) \neq \alpha(0)$, entonces:

$$\frac{{}^\alpha d}{dx} \frac{\alpha(1)}{g_\alpha(\alpha(x))}{}^\alpha = \alpha(0) \overset{\ominus}{\ominus} \frac{{}^\alpha d}{dx} g_\alpha(\alpha(x))}{g_\alpha(\alpha(x))^{\alpha(2)}}{}^\alpha.$$

Demostración. Podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{{}^\alpha d}{dx} \frac{\alpha(1)}{g_\alpha(\alpha(x))}{}^\alpha &= \alpha \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} \right) = \alpha \left(-\frac{\frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2} \right) = \alpha(0) \overset{\ominus}{\ominus} \alpha \left(\frac{\frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2} \right) \\ &= \alpha(0) \overset{\ominus}{\ominus} \frac{\alpha \left(\frac{d}{dx} g(x) \right)}{\alpha (g(x)^2)}{}^\alpha = \alpha(0) \overset{\ominus}{\ominus} \frac{{}^\alpha d}{dx} g_\alpha(\alpha(x))}{g_\alpha(\alpha(x))^{\alpha(2)}}{}^\alpha. \end{aligned}$$

Teniendo así el resultado. □

Ejemplo 2.8. Se quiere encontrar la ecuación de la recta tangente t_α a la gráfica de $f_\alpha(\alpha(x)) = \frac{\alpha(1)}{\alpha(x)}{}^\alpha$ en el punto $(\alpha(a), \frac{\alpha(1)}{\alpha(a)}{}^\alpha)$ con $\alpha(a) \neq \alpha(0)$.

La función se puede expresar en la forma

$$f_\alpha(\alpha(x)) = \alpha \left(\frac{1}{x} \right).$$

Se conoce que la pendiente de t_α es

$$\frac{{}^\alpha d}{dx} f_\alpha(\alpha(a)) = \alpha(0) \overset{\ominus}{\ominus} \frac{\alpha(1)}{\alpha(a)^{\alpha(2)}}{}^\alpha,$$

en tal caso, la recta tangente se expresa como:

$$t_\alpha : \alpha(y) \overset{\ominus}{\ominus} \frac{\alpha(1)}{\alpha(a)}{}^\alpha = \alpha(0) \overset{\ominus}{\ominus} \frac{\alpha(1)}{\alpha(a)^{\alpha(2)}}{}^\alpha \overset{\ominus}{\ominus} (\alpha(x) \overset{\ominus}{\ominus} \alpha(a)),$$

Por otra parte, es claro que

$$t_\alpha : \alpha(y) \overset{\ominus}{\ominus} \alpha \left(\frac{1}{a} \right) = \alpha \left(-\frac{1}{a^2} \right) \overset{\ominus}{\ominus} (\alpha(x - a)),$$

y, por lo tanto,

$$t_\alpha : \alpha \left(y - \frac{1}{a} \right) = \alpha \left(-\frac{1}{a^2} \cdot (x - a) \right).$$

Aplicando α^{-1} en ambos lados de la igualdad anterior, se obtiene que

$$t : y - \frac{1}{a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{1}{a},$$

es la recta tangente a la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el cálculo tradicional.

Se termina este apartado con la siguiente observación.

Observación 2.2. Sea $f_\alpha: [a_1, b_1]_\alpha \times \cdots \times [a_n, b_n]_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ una función α -diferenciable en $\alpha(x_i) \in [a_i, b_i]_\alpha$ para la cual existe una función $f: [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_\alpha(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)) = \alpha(f(x_1, \dots, x_n))$ para cada $x_i \in [a_i, b_i]$, entonces se puede definir la α -derivada parcial extendiendo la α -derivada y mostrar que

$$\frac{{}^\alpha\partial}{\partial x_i} f_\alpha(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)) = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n) \right).$$

2.4. Máximos y mínimos de una función no newtoniana

En lo que sigue se supone que $I_\alpha = [\alpha(a), \alpha(b)]_\alpha$ es un intervalo en \mathbb{R}_α .

Definición 2.4. Sea $f_\alpha: I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ una función no newtoniana. Un punto $\alpha(x) \in I_\alpha$ es un punto máximo de f_α en I_α si

$$f_\alpha(\alpha(x)) \stackrel{\alpha}{\geq} f_\alpha(\alpha(y)),$$

para todo $\alpha(y) \in I_\alpha$.

Teorema 2.6. Sea $f_\alpha: I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ una función. Si $\alpha(x_0)$ es un punto máximo o mínimo de f_α en I_α y f_α es α -diferenciable en $\alpha(x_0)$, entonces

$$\frac{{}^\alpha d}{dx} f_\alpha(\alpha(x_0)) = \alpha(0).$$

La demostración se sigue de las propiedades de la derivada no newtoniana ya mencionadas y de la inyectividad de la función α .

Definición 2.5. Una función no newtoniana $f_\alpha: I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ es una función α -creciente en I_α si para $\alpha(x), \alpha(y) \in I_\alpha$ con $\alpha(x) \stackrel{\alpha}{<} \alpha(y)$ se tiene $f_\alpha(\alpha(x)) \stackrel{\alpha}{\leq} f_\alpha(\alpha(y))$. Análogamente, f_α es una función α -decreciente en I_α si para $\alpha(x), \alpha(y) \in I_\alpha$ con $\alpha(x) \stackrel{\alpha}{<} \alpha(y)$ se tiene $f_\alpha(\alpha(x)) \stackrel{\alpha}{\geq} f_\alpha(\alpha(y))$.

Corolario 2.1. Sea $f_\alpha: I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ una función no newtoniana α -diferenciable sobre I_α . Si $\frac{{}^\alpha d}{dx} f_\alpha(\alpha(x)) \stackrel{\alpha}{\geq} \alpha(0)$ para todo $\alpha(x) \in I_\alpha$, entonces f_α es α -creciente en dicho intervalo. Si $\frac{{}^\alpha d}{dx} f_\alpha(\alpha(x)) \stackrel{\alpha}{\leq} \alpha(0)$ para todo $\alpha(x) \in I_\alpha$, entonces f_α es α -decreciente en dicho intervalo.

Ejemplo 2.9. Considere la función $f_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(x)^{\alpha(2)} \stackrel{\alpha}{\ominus} \alpha(8) \stackrel{\alpha}{\ominus} \alpha(x) \stackrel{\alpha}{\oplus} \alpha(1)$. Encuentre el valor máximo o mínimo.

Recuerde que se cumple $f_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(f(x)) = \alpha(x^2 - 8x + 1)$, si resolvemos la ecuación $\frac{{}^\alpha d}{dx} \alpha(f(x)) = \alpha(0)$ se tiene el punto máximo $\alpha(4)$.

Capítulo 3

Una aplicación del cálculo no newtoniano: la regresión polinomial

En este capítulo se comparan algunos tipos de regresión polinomial en el cálculo newtoniano y en el cálculo no newtoniano: la regresión lineal, regresión cuadrática, regresión cúbica, y en general, la regresión polinomial mediante un polinomio de grado n . Estos son métodos que se emplean para realizar inferencia estadística. De manera más específica, dada una colección de datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, el problema consiste en buscar un polinomio $y(x) = \hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2x + \hat{\eta}_3x^2 + \dots + \hat{\eta}_nx^n$ de grado $n < m - 1$ que aproxime de la mejor manera tales datos.

En este trabajo serán de interés tres casos particulares de regresión polinomial. Cuando $n = 1$, el polinomio describe la línea recta $y(x) = \hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2x$, y la aproximación polinomial es llamada *regresión lineal*. Cuando $n = 2$, el polinomio representa la parábola $y(x) = \hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2x + \hat{\eta}_3x^2$, y la regresión polinomial es llamada *regresión cuadrática*. Finalmente, cuando $n = 3$, el polinomio representa una función cúbica $y(x) = \hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2x + \hat{\eta}_3x^2 + \hat{\eta}_4x^3$, y la regresión polinomial es llamada *regresión cúbica*. En la figura 3.1 se ilustran estos casos particulares.

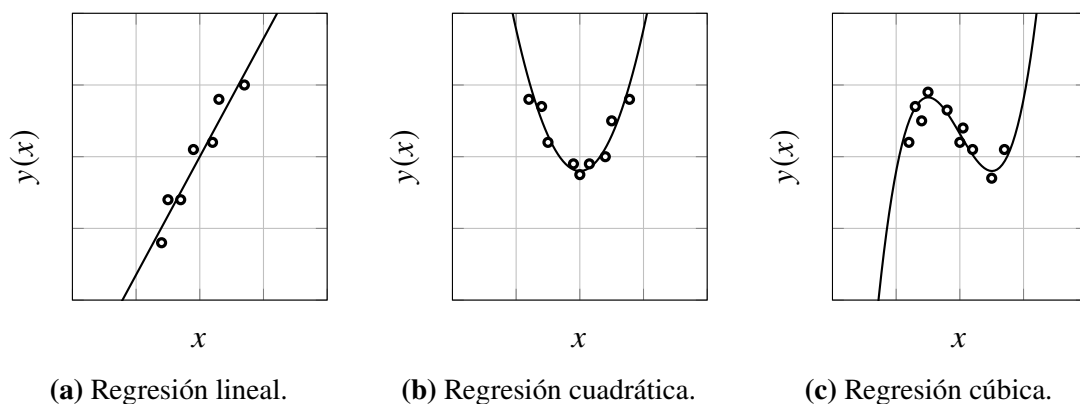


Figura 3.1. Casos particulares de regresión polinomial

En el caso de la regresión lineal, se obtiene información sobre la asociación de dos variables, una independiente, denotada por x , y otra dependiente, denotada por y , la cual se describe por la relación $y(x) = \hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x$. Este proceso se distingue de otras pruebas para realizar análisis de datos preliminares y predecir tendencias futuras, ya que se propone una recta que puede describir la tendencia de los datos. La misma perspectiva se obtiene si se requiere aproximar por una curva cuadrática $y(x) = \hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x + \hat{\eta}_3 x^2$ o por una cúbica $y(x) = \hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x + \hat{\eta}_3 x^2 + \hat{\eta}_4 x^3$. Más adelante se discute este tipo de regresiones y, finalmente, una aproximación por una función polinómica.

3.1. Regresión lineal

El método de regresión lineal es una herramienta estadística muy útil dado que permite determinar el grado en que la variable independiente influye en la variable dependiente, es decir, cuando se quiere conocer la relación entre dos variables, por ejemplo, en economía, en medicina o biología, por mencionar algunas.

Se supone que se tiene una colección finita de datos, digamos, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, y que y es una variable aleatoria con distribución normal tal que su media $\mu(x) = \hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x$ y su varianza σ^2 son desconocidas. En tal caso, el problema consiste en hallar una función que aproxime de la mejor manera estos valores, para lo cual, se contempla como caso particular una recta $y(x) = \hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x$. Es importante señalar que este proceso se realiza bajo el supuesto $E[y] = \mu(x)$ y $\text{Var}(y) = \sigma^2$. Esto significa que el valor promedio de la variable dependiente se puede expresar como una función lineal de la variable explicativa.

3.1.1. Regresión lineal newtoniana

Si se considera que la función que mejor aproxima estos valores se describe por

$$y(x) = \hat{\eta}_0 + \hat{\eta}_1 x + e,$$

El problema consiste en hallar el valor de los parámetros $\hat{\eta}_1$ y $\hat{\eta}_2$ a fin de obtener la recta de regresión. Estos valores se estiman por el método de mínimos cuadrados, donde e se considera como una variable aleatoria distribuida normalmente con media cero, desviación estándar σ , la cual es llamada *error*. Este valor explica la variabilidad entre la respuesta observada y la respuesta media.

La idea consiste en minimizar el error medio cuadrático:

$$E(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = \sum_{k=1}^m (y_k - (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x_k))^2.$$

Dado que este es un problema de optimización, el procedimiento se basa en derivar con

respecto a $\hat{\eta}_1$ y $\hat{\eta}_2$, e igualar a cero dichas derivadas, es decir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial \hat{\eta}_1}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) &= -2 \sum_{k=1}^m (y_k - \hat{\eta}_1 - \hat{\eta}_2 \bar{x} x_k) = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial \hat{\eta}_2}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) &= 2 \sum_{k=1}^m (y_k - \hat{\eta}_1 - \hat{\eta}_2 \bar{x} x_k)(-\bar{x} x_k) = 0.\end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m y_k &= n\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 \sum_{k=1}^m x_k, \\ \sum_{k=1}^m y_k x_k &= \hat{\eta}_1 \sum_{k=1}^m x_k + \hat{\eta}_2 \sum_{k=1}^m x_k^2.\end{aligned}$$

Este sistema se puede representar de modo matricial:

$$M\eta = \mathbf{b},$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} n & \sum_{k=1}^m x_k \\ \sum_{k=1}^m x_k & \sum_{k=1}^m x_k^2 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \hat{\eta}_1 \\ \hat{\eta}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m y_k \\ \sum_{k=1}^m y_k x_k \end{bmatrix}.$$

De lo anterior se puede obtener la solución explícitamente como

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_1 &= \frac{\sum_{k=1}^m x_k^2 \sum_{k=1}^m y_k - \sum_{k=1}^m x_k y_k \sum_{k=1}^m x_k}{n \sum_{k=1}^m x_k^2 - (\sum_{k=1}^m x_k)^2}, \\ \hat{\eta}_2 &= \frac{n \sum_{k=1}^m x_k y_k - \sum_{k=1}^m x_k \sum_{k=1}^m y_k}{n \sum_{k=1}^m x_k^2 - (\sum_{k=1}^m x_k)^2}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Existen diversas maneras de verificar que efectivamente, el modelo proporciona un buen ajuste en el momento de explicar (predecir) la variable respuesta. Básicamente, son medidas sobre la bondad del ajuste, y se cuantifica como el porcentaje de variabilidad de la respuesta que consigue ser explicada por el modelo ajustado. Una de estas es el coeficiente de determinación R^2 . Con el objeto de obtener su definición, introducimos las variabilidades siguientes:

- Suma total de cuadrados: Mide la variabilidad total de las observaciones:

$$SST = \sum_{k=1}^m (y_k - \bar{y})^2,$$

40 Una aplicación del cálculo no newtoniano: la regresión polinomial

- Suma total de cuadrados del error: Representa la variabilidad residual que queda sin explicar por la línea recta de regresión:

$$SSE = \sum_{k=1}^m (y_k - \hat{y}_k)^2.$$

- Suma total de cuadrados de la regresión: Cuantifica la cantidad de variabilidad en las observaciones y_k explicada por la línea recta de regresión:

$$SSR = \sum_{k=1}^m (\hat{y}_k - \bar{y})^2.$$

Se satisface la siguiente igualdad

$$SST = SSE + SSR.$$

El coeficiente de determinación se expresa como

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}. \quad (3.2)$$

Se cumple que $0 \leq R^2 \leq 1$, un valor cercano a 1 implicará que buena parte de la varianza es explicada por la recta de regresión, por otro lado, un valor cercano a 0 significará que prácticamente toda la variabilidad de los datos queda sin explicar por la recta. El estadístico R^2 se debe emplear con precaución, pues tiende a estimar de forma optimista el ajuste de regresión. Siempre incrementa a medida que aumenta la dispersión de las x y decrece cuando disminuye esta dispersión. Así un valor grande o pequeño de R^2 puede ser tan sólo el resultado de que x haya variado. Se debe tener presente que aunque R^2 es grande esto no necesariamente implica que el modelo de regresión sea un predictor exacto. Para corregir esta medida de bondad de ajuste se emplea el estadístico R^2 ajustado a fin de enmendar esta sobreestimación siempre que el coeficiente R^2 ajustado sea menor que R^2 , ver Montgomery *et al.* (2006).

En los siguientes ejemplos se muestra esta situación.

Ejemplo 3.1. En la tabla 3.1 se muestra la relación que existe entre las horas que se trabajan en una empresa, las cuales se denotan por x_1, x_2, \dots, x_{20} , y las correspondientes unidades de un producto, las cuales se denotan por y_1, y_2, \dots, y_{20} , los cuales han sido tomados de Bilgehan (2015). Con esta información, se desea buscar la recta

$$y(x) = \hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x,$$

que mejor aproxime los datos que se han descrito.

Se aplica un modelo de regresión lineal simple en el cual la recta que mejor ajusta los datos es:

$$y = 2.97 + 0.001x.$$

n	Horas (x_n)	Producción (y_n)
1	10	2.87
2	20	2.80
3	30	2.89
4	40	2.90
5	50	3.00
6	60	3.06
7	70	3.11
8	80	3.16
9	90	3.20
10	100	3.13
11	110	3.26
12	120	3.27
13	130	3.27
14	140	3.32
15	150	3.30
16	160	3.00
17	170	3.11
18	180	3.13
19	190	2.99
20	200	2.82

Tabla 3.1. Datos del ejemplo 3.1.

El valor de R^2 fue de 0.07428 , lo que significa que el 7.4 % del cambio de la producción puede ser explicada por las horas trabajadas.

En la figura 3.2 se muestran los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{20}, y_{20})$ y la recta que mejor los aproxima, de acuerdo con el método de regresión lineal.

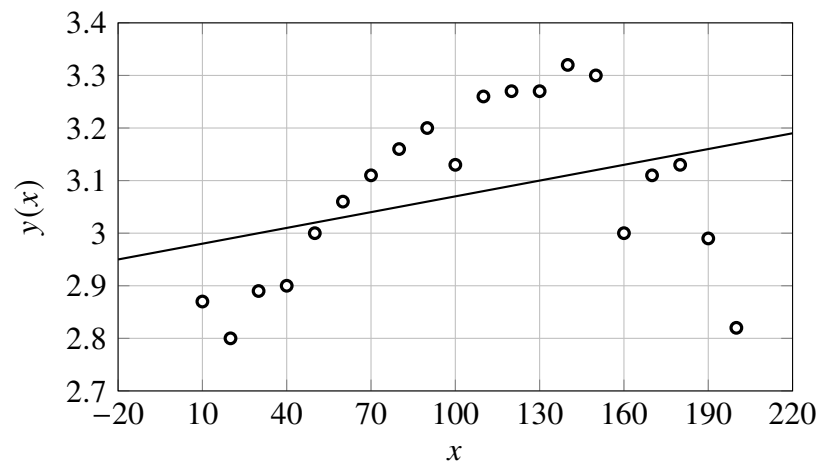


Figura 3.2. Aproximación lineal de los datos newtonianos del tabla 3.1 del ejemplo 3.1.

En el ejemplo anterior se ha mostrado un caso particular en el que el coeficiente $\hat{\eta}_2$ en la recta $y(x) = \hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2x$ es pequeño. El siguiente ejemplo muestra el caso opuesto.

Ejemplo 3.2. En la tabla 3.2 se muestran mediciones de la relación que existe entre la concentración de madera contenida en la pulpa a partir de la que se elabora papel (madera), las cuales se denotan por x_1, x_2, \dots, x_{18} , y la resistencia (en términos de tensión que soporta) del papel resultante, y que se denotan por y_1, y_2, \dots, y_{18} . Con esta información, se desea buscar la recta

$$y(x) = \hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x,$$

que mejor aproxime los datos que se han descrito.

n	Madera x_n	Tensión y_n
1	1.5	11.1
2	2.0	20.0
3	3.0	24.0
4	4.0	26.1
5	4.5	30.0
6	5.0	33.8
7	5.5	34.0
8	6.0	38.1
9	6.6	39.9
10	7.0	42.0
11	8.0	46.1
12	9.0	53.1
13	10.0	52.0
14	11.0	52.5
15	12.0	48.0
16	13.0	42.8
17	14.0	27.8
18	15.0	21.9

Tabla 3.2. Datos del ejemplo 3.2.

Se determina la ecuación de la regresión lineal y se obtiene:

$$y = 1.39x + 25.12.$$

En este caso, el valor de R^2 fue de 0.2173, lo que significa que el 21.73 % del cambio de la resistencia del papel puede ser explicado por concentración de madera con la que se elabora el papel.

En la figura 3.3 se muestran los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{18}, y_{18})$ y la recta que mejor los aproxima, de acuerdo con el método de regresión lineal.

3.1.2. Regresión lineal no newtoniana

En este apartado se observa que ocurre si la idea de una regresión lineal se traslada al cálculo no newtoniano. Por lo tanto, dada una colección de datos, digamos, $(\alpha(x_1), \alpha(y_1))$,

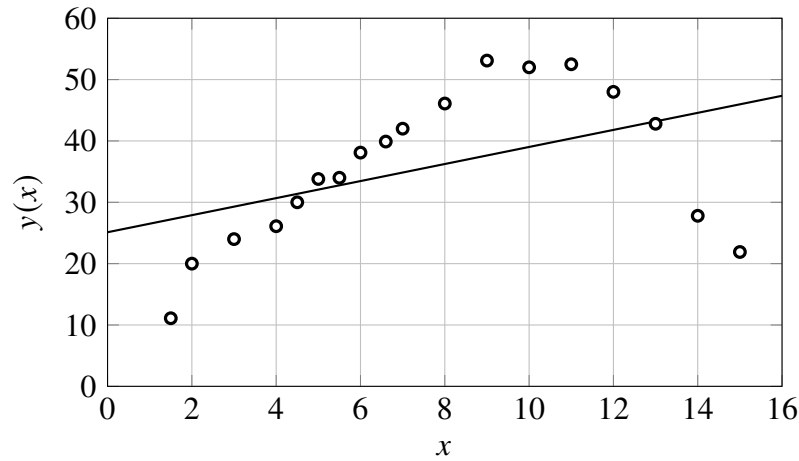


Figura 3.3. Aproximación lineal de los datos newtonianos del tabla 3.2 del ejemplo 3.2.

$(\alpha(x_2), \alpha(y_2)), \dots, (\alpha(x_m), \alpha(y_m))$, se considera el problema de aproximar estos por una α -función de la forma

$$y_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(\hat{\eta}_1) \oplus \alpha(\hat{\eta}_2) \odot \alpha(x),$$

o de manera equivalente, de acuerdo con la expresión (2.3), la α -función

$$y_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x).$$

En tal caso, se considera el α -error cuadrático

$$\begin{aligned} E_\alpha(\alpha(\hat{\eta}_1), \alpha(\hat{\eta}_2)) &= \alpha \sum_{k=1}^m (\alpha(y_k) \ominus (\alpha(\hat{\eta}_1) \oplus \alpha(\hat{\eta}_2) \odot \alpha(x_k)))^{\alpha(2)} \\ &= \alpha \left(\sum_{k=1}^m (y_k - (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x_k))^2 \right), \end{aligned}$$

y se plantea el problema de buscar su α -valor mínimo posible. Calculando las α -derivadas, de acuerdo con la observación 2.2, e igualando a $\alpha(0)$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\alpha \partial E_\alpha}{\partial \hat{\eta}_1}(\alpha(\hat{\eta}_1), \alpha(\hat{\eta}_2)) &= \alpha \left(-2 \sum_{k=1}^m (y_k - (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x_k)) \right) = \alpha(0), \\ \frac{\alpha \partial E_\alpha}{\partial \hat{\eta}_2}(\alpha(\hat{\eta}_1), \alpha(\hat{\eta}_2)) &= \alpha \left(-2 \sum_{k=1}^m (y_k - (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x_k)) x_k \right) = \alpha(0), \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones anterior se puede reescribir como $\alpha(M) \odot \alpha(\boldsymbol{\eta}) \ominus \alpha(\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{0})$, o de manera equivalente,

$$\alpha(M\boldsymbol{\eta}) = \alpha(\mathbf{b}),$$

de donde se concluye que los parámetros resultantes en \mathbb{R} solo se trasladan a \mathbb{R}_α , esto es:

$$\begin{aligned}\alpha(\hat{\eta}_1) &= \alpha \left(\frac{\sum_{k=1}^m x_k^2 \sum_{k=1}^m y_k - \sum_{k=1}^m x_k y_k \sum_{k=1}^m x_k}{n \sum_{k=1}^m x_k^2 - (\sum_{k=1}^m x_k)^2} \right), \\ \alpha(\hat{\eta}_2) &= \alpha \left(\frac{n \sum_{k=1}^m x_k y_k - \sum_{k=1}^m x_k \sum_{k=1}^m y_k}{n \sum_{k=1}^m x_k^2 - (\sum_{k=1}^m x_k)^2} \right).\end{aligned}\tag{3.3}$$

El α coeficiente de determinación se considera como $\alpha(R)^{\alpha(2)}$. Para ver su definición, necesitamos introducir las variabilidades siguientes:

- Suma total de cuadrados:

$$\alpha(SST) = \alpha \sum_{k=1}^m (\alpha(y_k) \ominus \alpha(\bar{y}))^{\alpha(2)} = \alpha \left(\sum_{k=1}^m (y_k - \bar{y})^2 \right).$$

- Suma total de cuadrados del error:

$$\alpha(SSE) = \alpha \sum_{k=1}^m (\alpha(y_k) \ominus \alpha(\hat{y}_k))^{\alpha(2)} = \alpha \left(\sum_{k=1}^m (y_k - \hat{y}_k)^2 \right).$$

- Suma total de cuadrados de la regresión:

$$\alpha(SSR) = \alpha \sum_{k=1}^m (\alpha(\hat{y}_k) \ominus \alpha(\bar{y}))^{\alpha(2)} = \alpha \left(\sum_{k=1}^m (\hat{y}_k - \bar{y})^2 \right).$$

Se cumple la siguiente relación

$$\alpha(SST) = \alpha(SSE) \oplus \alpha(SSR) = \alpha(SSE + SSR).$$

El α -coeficiente de determinación se expresa como

$$\alpha(R^2) = \frac{\alpha(SSR)}{\alpha(SST)}_\alpha = \alpha \left(1 - \frac{SSE}{SST} \right).\tag{3.4}$$

Se cumple que $\alpha(0) \leq \alpha(R^2) \leq \alpha(1)$, un valor cercano a $\alpha(1)$ implicará que buena parte de la varianza es explicada por la recta de regresión, por otro lado, un valor cercano a $\alpha(0)$ significará que prácticamente toda la variabilidad de los datos queda sin explicar por la recta.

Ejemplo 3.3. Se consideran para la regresión lineal no newtoniana, los datos correspondientes no newtonianos del ejemplo 3.1, es decir, se consideran los datos $(\alpha(x_1), \alpha(y_1))$, $(\alpha(x_2), \alpha(y_2))$, \dots , $(\alpha(x_{20}), \alpha(y_{20}))$, donde los datos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , \dots , (x_{20}, y_{20}) son

descritos en la tabla 3.1. Como caso particular, se considera la función $\alpha(x) = \ln(x)$ para $x \in \mathbb{R}^+$.

El primer paso consiste en aplicar el logaritmo a los datos de la tabla 3.1, con lo cual se obtienen los valores trasladados al plano \mathbb{R}_{\ln} , como se muestra en el tabla 3.3.

Ahora bien, el valor de los parámetros también se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} \ln(\hat{\eta}_1) &= \ln(2.97) = 1.09, \\ \ln(\hat{\eta}_2) &= \ln(0.001) = \overset{\ln}{\ominus} 6.90. \end{aligned}$$

Con estos valores, es posible calcular un modelo de regresión lineal simple, en el cual la recta que mejor ajusta los datos es:

$$\begin{aligned} y_{\ln}(\ln(x)) &= 1.09 \ominus (6.90) \overset{\ln}{\ominus} \ln(x) \\ &= \ln(2.97 + 0.001x). \end{aligned}$$

En este caso, el valor del ln-coeficiente de determinación ajustado $\ln(R^2)$ corresponde al valor $\ln(0.07428)$. Notemos que en este caso es más difícil dar un porcentaje de aprobación del cambio de la producción que puede ser explicada por las horas trabajadas, pues el modelo proporcionará un buen ajuste cuando $\ln(R^2)$ esté lo más cercano a $\ln(1)$, mientras que el modelo proporcionará un mal ajuste cuando $\ln(R^2)$ esté lo más cercano posible a $\ln(0)$, ¡pero dicho valor no existe! Por lo tanto, cualquier valor de $\ln(R^2)$ siempre estará mas cerca de $\ln(1)$.

En la figura 3.4 se pueden observar los valores correspondientes del conjunto de los ln-datos $(\ln(x_1), \ln(y_1)), (\ln(x_2), \ln(y_2)), \dots, (\ln(x_{20}), \ln(y_{20}))$ que se obtienen de los correspondientes datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{20}, y_{20})$ del tabla 3.1, y la ln-recta que mejor los aproxima, de acuerdo con el método de ln-regresión lineal.

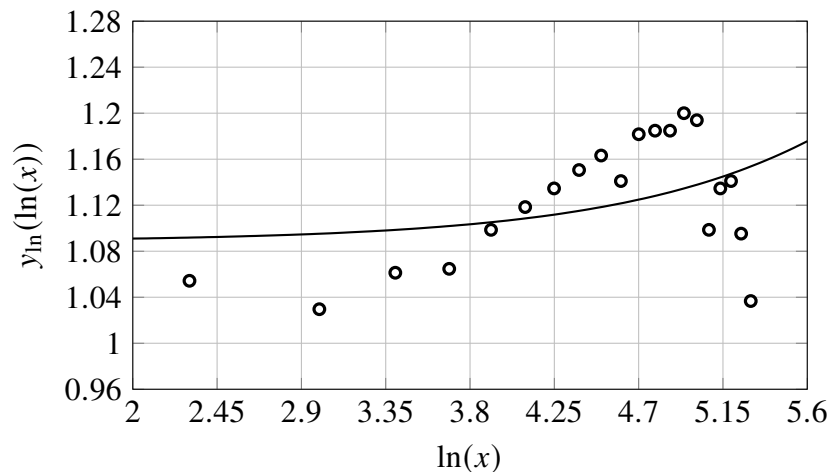


Figura 3.4. Aproximación lineal de los ln-datos de la tabla 3.3 del ejemplo 3.3.

n	Horas ($\ln(x_n)$)	Toneladas ($\ln(y_n)$)
1	2.30	1.05
2	2.99	1.02
3	3.40	1.06
4	3.68	1.06
5	3.91	1.09
6	4.09	1.11
7	4.24	1.13
8	4.38	1.15
9	4.49	1.16
10	4.60	1.14
11	4.70	1.18
12	4.78	1.18
13	4.86	1.18
14	4.94	1.20
15	5.01	1.19
16	5.07	1.09
17	5.13	1.13
18	5.19	1.14
19	5.24	1.09
20	5.29	1.03

Tabla 3.3. ln-datos del ejemplo 3.1.

Ejemplo 3.4. Se considera ahora la correspondiente regresión lineal no newtoniana que se obtuvo en el ejemplo 3.2. Por lo tanto, como primer paso, se determina los correspondientes α -datos de la tabla 3.2, es decir, los α -datos $(\alpha(x_1), \alpha(y_1)), (\alpha(x_2), \alpha(y_2)), \dots, (\alpha(x_{18}), \alpha(y_{18}))$. Como caso particular, se considera una vez más la función $\alpha(x) = \ln(x)$ para $x \in \mathbb{R}^+$.

El primer paso consiste en aplicar el logaritmo a los datos de la tabla 3.2, con lo cual se obtienen los valores trasladados al plano \mathbb{R}_{\ln} , como se muestra en la tabla 3.4. Ahora bien, el valor de los parámetros también se trasladan, es decir,

$$\ln(\hat{\eta}_1) = \ln(25.12) = 3.224,$$

$$\ln(\hat{\eta}_2) = \ln(1.39) = 0.33.$$

Así, la recta que mejor aproxima los datos es

$$\begin{aligned} y_{\ln}(\ln(x)) &= 3.22 \oplus (0.33) \odot \ln(x) \\ &= \ln(3.22 + 1.39x). \end{aligned}$$

En el actual caso, el valor del ln-coeficiente de determinación ajustado $\ln(R^2)$ corresponde al valor $\ln(0.2173)$. Notemos una vez más, que en este caso es más difícil dar un porcentaje de aprobación del cambio de la resistencia del papel que puede ser explicada por la madera, pues el modelo proporcionará un buen ajuste cuando $\ln(R^2)$ esté lo más cercano a $\ln(1)$, mientras que el modelo proporcionará un mal ajuste cuando $\ln(R^2)$ esté lo más

cercano posible a $\ln(0)$, ¡pero dicho valor no existe! Por lo tanto, cualquier valor de $\ln(R^2)$ está más cerca de $\ln(1)$. En la figura 3.5 se pueden observar los valores correspondientes de los correspondientes \ln -datos $(\ln(x_1), \ln(y_1)), (\ln(x_2), \ln(y_2)), \dots, (\ln(x_{18}), \ln(y_{18}))$ que se obtiene de los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{18}, y_{18})$ del tabla 3.2 y la recta que mejor los aproxima, de acuerdo con el método de \ln -regresión lineal.

n	Madera $\ln(x_n)$	Tensión $\ln(y_n)$
1	0.40	2.40
2	0.69	2.99
3	1.09	3.17
4	1.38	3.26
5	1.50	3.40
6	1.60	3.52
7	1.70	3.52
8	1.79	3.64
9	1.88	3.68
10	1.94	3.73
11	2.07	3.83
12	2.19	3.97
13	2.30	3.95
14	2.39	3.96
15	2.48	3.87
16	2.56	3.75
17	2.63	3.32
18	2.70	3.08

Tabla 3.4. Datos del ejemplo 3.4.

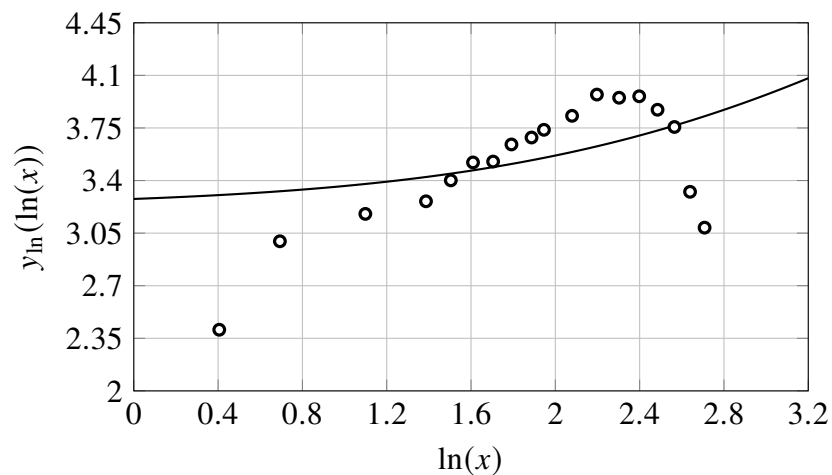


Figura 3.5. Aproximación lineal de los \ln -datos de la tabla 3.4 del ejemplo 3.4.

3.2. Regresión cuadrática

Cuando se quiere estudiar la relación entre las variables puede ser de dos tipos: la relación lineal y la relación no lineal. Se considera que la relación es lineal si al graficar los datos se observa una distribución de estos alrededor de una línea recta, como se ha desarrollado en la sección anterior. Si la relación es no lineal, los datos observados se distribuyen alrededor de una curva y la ecuación de esa curva se determina a partir de alguno de los modelos no lineales. En particular la regresión cuadrática es un modelo alternativo a emplearse cuando en el modelo de regresión lineal no se obtiene un coeficiente de determinación apropiado, o bien, cuando se observa que los datos podrían tener un comportamiento parabólico

3.2.1. Regresión cuadrática newtoniana

Se desea ajustar una colección de datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ por una expresión de la forma $y(x) = \hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x + \hat{\eta}_3 x^2$, de tal manera que se minimice el siguiente error

$$E(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3) = \sum_{k=1}^m (y_k - (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x_k + \hat{\eta}_3 x_k^2))^2.$$

Para minimizar esta función, se calculan las derivadas parciales y se igualan a cero, con lo cual se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \hat{\eta}_1}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3) &= -2 \sum_{k=1}^m (y_k - (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x_k + \hat{\eta}_3 x_k^2)) = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial \hat{\eta}_2}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3) &= -2 \sum_{k=1}^m (y_k - (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x_k + \hat{\eta}_3 x_k^2)) x_k = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial \hat{\eta}_3}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3) &= -2 \sum_{k=1}^m (y_k - (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x_k + \hat{\eta}_3 x_k^2)) x_k^2 = 0. \end{aligned}$$

De donde resulta el siguiente sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m y_k &= n\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 \sum_{k=1}^m x_k + \hat{\eta}_3 \sum_{k=1}^m x_k^2, \\ \sum_{k=1}^m y_k x_k &= \hat{\eta}_1 \sum_{k=1}^m x_k + \hat{\eta}_2 \sum_{k=1}^m x_k^2 + \hat{\eta}_3 \sum_{k=1}^m x_k^3, \\ \sum_{k=1}^m y_k x_k^2 &= \hat{\eta}_1 \sum_{k=1}^m x_k^2 + \hat{\eta}_2 \sum_{k=1}^m x_k^3 + \hat{\eta}_3 \sum_{k=1}^m x_k^4. \end{aligned}$$

Este sistema se puede representar de la siguiente formal matricial:

$$M\eta = \mathbf{b},$$

donde η es el vector de parámetros a estimar, y

$$M = \begin{bmatrix} n & \sum_{k=1}^m x_k & \sum_{k=1}^m x_k^2 \\ \sum_{k=1}^m x_k & \sum_{k=1}^m x_k^2 & \sum_{k=1}^m x_k^3 \\ \sum_{k=1}^m x_k^2 & \sum_{k=1}^m x_k^3 & \sum_{k=1}^m x_k^4 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \hat{\eta}_1 \\ \hat{\eta}_2 \\ \hat{\eta}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m y_k \\ \sum_{k=1}^m y_k x_k \\ \sum_{k=1}^m y_k x_k^2 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 3.5. En los resultados del ejemplo 3.1 se observa que una línea recta no es la mejor opción para aproximar los datos, así que retomando los valores en la tabla 3.1 se realiza la pertinente regresión cuadrática.

Se considera la siguiente matriz M y vector \mathbf{b} como:

$$M = \begin{bmatrix} 20 & 2100 & 287000 \\ 2100 & 287000 & 44100000 \\ 287000 & 44100000 & 7226660000 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 61.59 \\ 6532.60 \\ 889796 \end{bmatrix}.$$

Apoyándose en la representación matricial $M\eta = \mathbf{b}$, el vector η representa los parámetros que se quieren estimar, el cual se obtiene de llevar a cabo el siguiente producto $\eta = M^{-1}\mathbf{b}$, en consecuencia:

$$\eta = \begin{bmatrix} 2.63 \\ 0.0103 \\ -0.00004 \end{bmatrix}.$$

Por tanto la ecuación de la regresión cuadrática es:

$$y = 2.63 + 0.0103x - 0.00004x^2.$$

La estimación del coeficiente R^2 resultó de 0.5624, lo que denota que el 56.24 %, del cambio de la producción puede ser explicada por las horas trabajadas. Notoriamente el coeficiente de determinación obtiene un valor mas alto y por tanto una regresión cuadrática es mas conveniente para este ejemplo.

En la figura 3.6 se muestran los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{20}, y_{20})$ y la recta que mejor los aproxima, de acuerdo con el método de regresión lineal.

Ejemplo 3.6. De los resultados del ejemplo 3.2 se infiere que un modelo de regresión lineal no es la mejor alternativa para aproximar los datos, así que reanudando la información de la tabla 3.2 se procede con la regresión cuadrática.

La matriz M y vector \mathbf{b} son:

$$M = \begin{bmatrix} 18 & 137.1 & 1335.31 \\ 137.1 & 1335.31 & 14947.37 \\ 1335.31 & 14947.37 & 181538.66 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 643.2 \\ 5304.29 \\ 51712.71 \end{bmatrix}.$$

Apoyándose en la representación matricial $M\eta = \mathbf{b}$, el vector η representa los parámetros que se quieren estimar, el cual se obtiene de llevar a cabo el siguiente producto $\eta = M^{-1}\mathbf{b}$, en consecuencia:

$$\eta = \begin{bmatrix} -7.85 \\ 12.04 \\ -0.64 \end{bmatrix}.$$

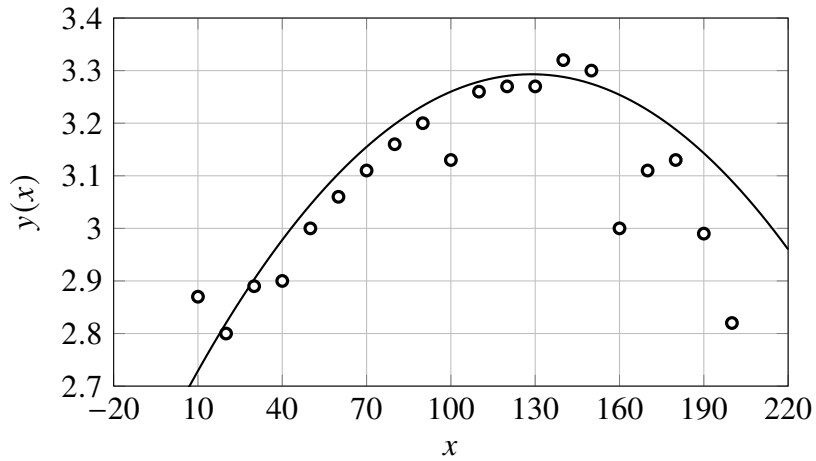


Figura 3.6. Aproximación cuadrática de los datos newtonianos de la tabla 3.1 del ejemplo 3.1.

La ecuación de la regresión es:

$$y = -7.85 + 12.04x - 0.64x^2.$$

El valor de R^2 fue de 0.8459, lo que significa que el 84.59 % del cambio de la resistencia del papel puede ser explicada por concentración de madera con la que se elabora el papel.

En la figura 3.7 se muestran los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{18}, y_{18})$ y la recta que mejor los aproxima, de acuerdo con el método de regresión lineal.

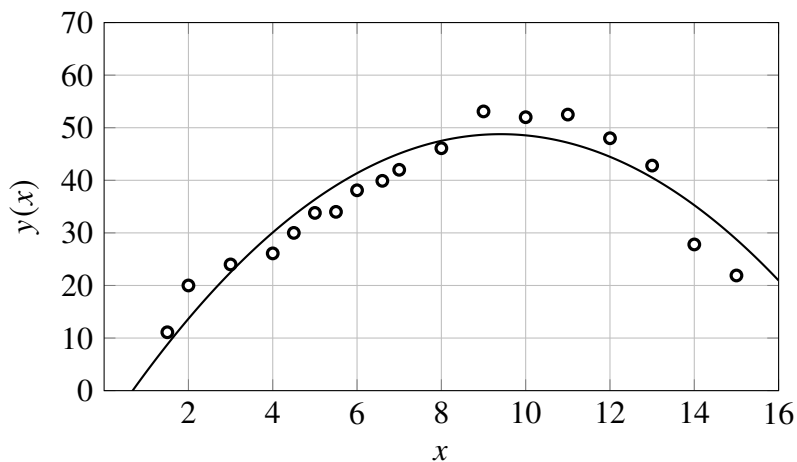


Figura 3.7. Aproximación cuadrática de los datos newtonianos de la tabla 3.2 del ejemplo 3.6.

3.2.2. Regresión cuadrática no newtoniana

Si se traslada esta misma idea al cálculo no newtoniano, entonces se plantea el problema de aproximar un conjunto de datos no newtonianos $(\alpha(x_1), \alpha(y_1)), (\alpha(x_2), \alpha(y_2)), \dots, (\alpha(x_m), \alpha(y_m))$ mediante una función cuadrática

$$y_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(\hat{\eta}_1) \oplus \alpha(\hat{\eta}_2) \oplus \alpha(x) \oplus \alpha(\hat{\eta}_3) \oplus \alpha(x)^{\alpha(2)},$$

o de manera equivalente, la α -función

$$y_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x + \hat{\eta}_3 x^2),$$

de tal manera que se minimice el siguiente error

$$\begin{aligned} E_\alpha(\alpha(\hat{\eta}_1), \alpha(\hat{\eta}_2), \alpha(\hat{\eta}_3)) &= \alpha \sum_{k=1}^m \left(\alpha(y_k) - \alpha(\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x_k + \hat{\eta}_3 x_k^2) \right)^{\alpha(2)} \\ &= \alpha \left(\sum_{k=1}^m \left(y_k - (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x_k + \hat{\eta}_3 x_k^2) \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Para minimizar esta función, se calculan las derivadas parciales y se igualan a $\alpha(0)$, luego

$$\begin{aligned} \frac{\alpha \partial E_\alpha}{\partial \hat{\eta}_1}(\alpha(\hat{\eta}_1), \alpha(\hat{\eta}_2), \alpha(\hat{\eta}_3)) &= \alpha \left(-2 \sum_{k=1}^m \left(y_k - (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x_k + \hat{\eta}_3 x_k^2) \right) \right) = \alpha(0), \\ \frac{\alpha \partial E_\alpha}{\partial \hat{\eta}_2}(\alpha(\hat{\eta}_1), \alpha(\hat{\eta}_2), \alpha(\hat{\eta}_3)) &= \alpha \left(-2 \sum_{k=1}^m \left(y_k - (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x_k + \hat{\eta}_3 x_k^2) \right) x_k \right) = \alpha(0), \\ \frac{\alpha \partial E_\alpha}{\partial \hat{\eta}_3}(\alpha(\hat{\eta}_1), \alpha(\hat{\eta}_2), \alpha(\hat{\eta}_3)) &= \alpha \left(-2 \sum_{k=1}^m \left(y_k - (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x_k + \hat{\eta}_3 x_k^2) \right) x_k^2 \right) = \alpha(0). \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones se puede reescribir como $\alpha(M) \oplus \alpha(\boldsymbol{\eta}) \oplus \alpha(\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{0})$, o de manera equivalente:

$$\alpha(M\boldsymbol{\eta}) = \alpha(\mathbf{b}). \tag{3.5}$$

Ejemplo 3.7. Se contempla para la regresión cuadrática no newtoniana los datos correspondientes no newtonianos del ejemplo 3.3, estos valores son descritos en la tabla 3.3, donde como caso particular, se considera la función $\alpha(x) = \ln(x)$ para $x \in \mathbb{R}^+$. El vector $\alpha(\boldsymbol{\eta})$ representa los parámetros que se quieren estimar, el cual se obtiene de llevar a cabo el siguiente producto $\boldsymbol{\eta} = M^{-1}\mathbf{b}$, en consecuencia:

$$\ln(\boldsymbol{\eta}) = \ln \left(\begin{bmatrix} 2.63 \\ 0.0103 \\ 0.00004 \end{bmatrix} \right).$$

52 Una aplicación del cálculo no newtoniano: la regresión polinomial

Por lo tanto, la ecuación de la regresión cuadrática es:

$$y_{\ln}(\ln(x)) = \ln(2.63 + 0.0103x - 0.00004x^2).$$

En este caso, el valor del ln-coeficiente de determinación $\ln(R^2)$ corresponde al valor $\ln(0.5624)$. Notemos que en este caso es más difícil dar un porcentaje de aprobación del cambio de la producción que puede ser explicada por las horas trabajadas, pues el modelo proporcionará un buen ajuste cuando $\ln(R^2)$ esté lo más cercano a $\ln(1)$, mientras que el modelo proporcionará un mal ajuste cuando $\ln(R^2)$ esté lo más cercano posible a $\ln(0)$, ¡pero dicho valor no existe! Por lo tanto, cualquier valor de $\ln(R^2)$ está más cerca de $\ln(1)$.

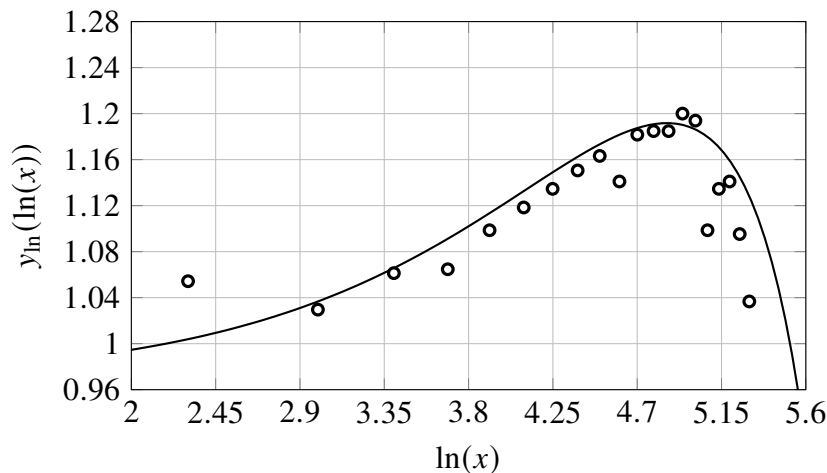


Figura 3.8. Aproximación cuadrática de los datos no newtonianos de la tabla 3.3 del ejemplo 3.3.

Ejemplo 3.8. Se retoma para la regresión cuadrática no newtoniana los datos correspondientes no newtonianos del ejemplo 3.4, estos valores son descritos en la tabla 3.4, donde como caso particular, se considera la función $\alpha(x) = \ln(x)$ para $x \in \mathbb{R}^+$. El vector $\alpha(\eta)$ representa los parámetros que se quieren estimar, el cual se obtiene de llevar a cabo el siguiente producto $\eta = M^{-1}\mathbf{b}$, en consecuencia:

$$\ln(\eta) = \ln \left(\begin{bmatrix} -7.85559 \\ 12.045 \\ -0.6491 \end{bmatrix} \right).$$

La ecuación de la regresión es:

$$y_{\ln}(\ln(x)) = \ln(-7.85 + 12.045x - 0.64x^2).$$

El valor de $\ln(R^2)$ es de $\ln(0.846)$, lo que significa que el 84.6% del cambio de la resistencia del papel puede ser explicada por concentración de madera con la que se

elabora el papel. Notemos que en este caso es más difícil dar un porcentaje de aprobación del cambio de la producción que puede ser explicada por las horas trabajadas, pues el modelo proporcionará un buen ajuste cuando $\ln(R^2)$ esté lo más cercano a $\ln(1)$, mientras que el modelo proporcionará un mal ajuste cuando $\ln(R^2)$ esté lo más cercano posible a $\ln(0)$, ¡pero dicho valor no existe! Por tanto, cualquier valor de $\ln(R^2)$ está más cerca de $\ln(1)$.

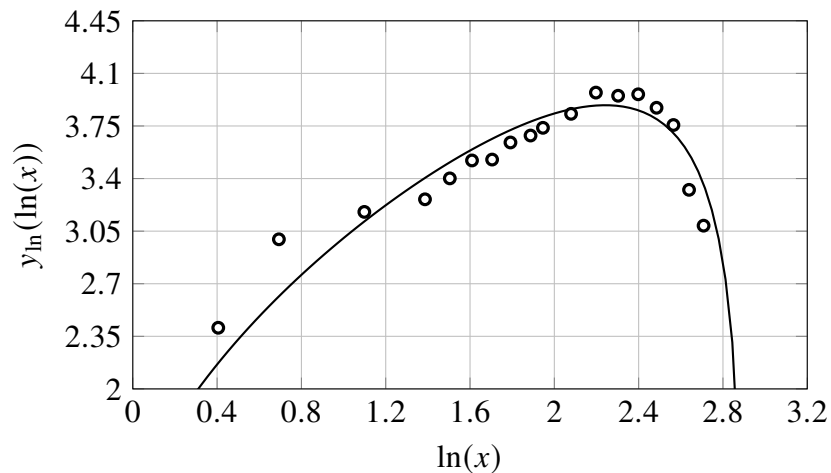


Figura 3.9. Aproximación cuadrática de los datos no newtonianos de la tabla 3.4 del ejemplo 3.4.

3.3. Regresión cúbica

Dentro de los modelos de regresión no lineales se encuentra el modelo de regresión polinómica de tercer orden, aquí se enriquece el modelo lineal al aumentar predictores adicionales, obtenidos al elevar cada uno de los predictores originales a una potencia. Por ejemplo, una regresión cúbica utiliza tres variables, como predictores. Este enfoque proporciona una forma sencilla de proporcionar un ajuste no lineal a los datos.

3.3.1. Regresión cúbica newtoniana

Se desea ajustar una colección de datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$ por una expresión de la forma $y(x) = \hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2x + \hat{\eta}_3x^2 + \hat{\eta}_4x^3$, de tal manera que se minimice el siguiente error

$$E(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3) = \sum_{k=1}^m (y_k - (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2x_k + \hat{\eta}_3x_k^2 + \hat{\eta}_4x_k^3))^2.$$

54 Una aplicación del cálculo no newtoniano: la regresión polinomial

Para minimizar esta función, se calculan las derivadas parciales y se igualan a cero, con lo cual se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial \hat{\eta}_1}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3, \hat{\eta}_4) &= -2 \sum_{k=1}^m \left(y_k - (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x_k + \hat{\eta}_3 x_k^2 + \hat{\eta}_4 x_k^3) \right) = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial \hat{\eta}_2}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3, \hat{\eta}_4) &= -2 \sum_{k=1}^m \left(y_k - (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x_k + \hat{\eta}_3 x_k^2 + \hat{\eta}_4 x_k^3) x_k \right) = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial \hat{\eta}_3}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3, \hat{\eta}_4) &= -2 \sum_{k=1}^m \left(y_k - (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x_k + \hat{\eta}_3 x_k^2 + \hat{\eta}_4 x_k^3) x_k^2 \right) = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial \hat{\eta}_4}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3, \hat{\eta}_4) &= -2 \sum_{k=1}^m \left(y_k - (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 x_k + \hat{\eta}_3 x_k^2 + \hat{\eta}_4 x_k^3) x_k^3 \right) = 0.\end{aligned}$$

De donde resulta el siguiente sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m y_k &= n\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2 \sum_{k=1}^m x_k + \hat{\eta}_3 \sum_{k=1}^m x_k^2 + \hat{\eta}_4 \sum_{k=1}^m x_k^3, \\ \sum_{k=1}^m y_k x_k &= \hat{\eta}_1 \sum_{k=1}^m x_k + \hat{\eta}_2 \sum_{k=1}^m x_k^2 + \hat{\eta}_3 \sum_{k=1}^m x_k^3 + \hat{\eta}_4 \sum_{k=1}^m x_k^4, \\ \sum_{k=1}^m y_k x_k^2 &= \hat{\eta}_1 \sum_{k=1}^m x_k^2 + \hat{\eta}_2 \sum_{k=1}^m x_k^3 + \hat{\eta}_3 \sum_{k=1}^m x_k^4 + \hat{\eta}_4 \sum_{k=1}^m x_k^5, \\ \sum_{k=1}^m y_k x_k^3 &= \hat{\eta}_1 \sum_{k=1}^m x_k^3 + \hat{\eta}_2 \sum_{k=1}^m x_k^4 + \hat{\eta}_3 \sum_{k=1}^m x_k^5 + \hat{\eta}_4 \sum_{k=1}^m x_k^6.\end{aligned}$$

Este sistema se puede representar de la siguiente manera matricial:

$$M\eta = b,$$

$$M = \begin{bmatrix} n & \sum_{k=1}^m x_k & \sum_{k=1}^m x_k^2 & \sum_{k=1}^m x_k^3 \\ \sum_{k=1}^m x_k & \sum_{k=1}^m x_k^2 & \sum_{k=1}^m x_k^3 & \sum_{k=1}^m x_k^4 \\ \sum_{k=1}^m x_k^2 & \sum_{k=1}^m x_k^3 & \sum_{k=1}^m x_k^4 & \sum_{k=1}^m x_k^5 \\ \sum_{k=1}^m x_k^3 & \sum_{k=1}^m x_k^4 & \sum_{k=1}^m x_k^5 & \sum_{k=1}^m x_k^6 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \hat{\eta}_1 \\ \hat{\eta}_2 \\ \hat{\eta}_3 \\ \hat{\eta}_4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m y_k \\ \sum_{k=1}^m y_k x_k \\ \sum_{k=1}^m y_k x_k^2 \\ \sum_{k=1}^m y_k x_k^3 \end{bmatrix}.$$

donde η es el vector de parámetros a estimar.

Ejemplo 3.9. Se retoman los resultados del ejemplo 3.1 donde se tiene que la matriz M y vector b son:

$$M = \begin{bmatrix} 20 & 2100 & 287000 & 44100000 \\ 2100 & 287000 & 44100000 & 7226660000 \\ 287000 & 44100000 & 7226660000 & 1,233,330,000,000 \\ 44100000 & 7226660000 & 1,233,330,000,000 & 216,455,810,000,000 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 61.59 \\ 6532.6 \\ 889796 \\ 135783700 \end{bmatrix}.$$

Apoyándose en la representación matricial $M\boldsymbol{\eta} = \mathbf{b}$, el vector $\boldsymbol{\eta}$ representa los parámetros que se quieren estimar, el cual se obtiene de llevar a cabo el siguiente producto $\boldsymbol{\eta} = M^{-1}\mathbf{b}$, en consecuencia:

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 2.78 \\ 0.0025 \\ 0.000045 \\ -0.0000028 \end{bmatrix}.$$

Por tanto la función de regresión esta dada por

$$y = 2.78 + 0.0025x + 0.000045x^2 - 0.00000028x^3.$$

El valor de R^2 fue de 0.8646, lo que significa que el 86.46 % del cambio de la producción puede ser explicada por las horas trabajadas.

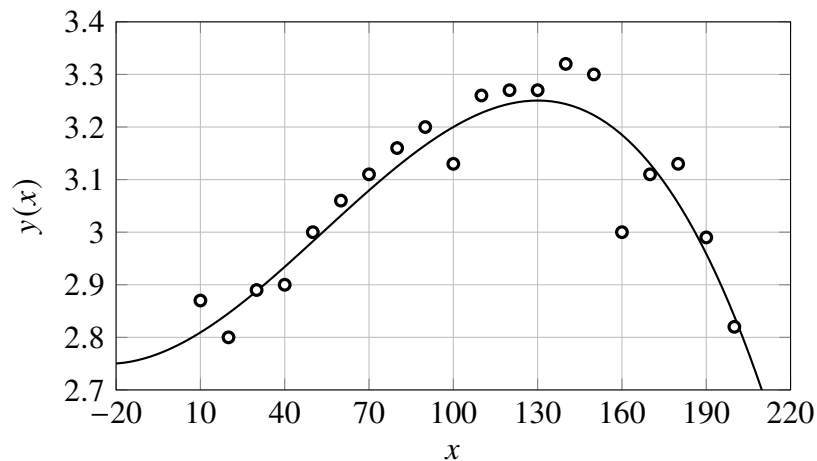


Figura 3.10. Aproximación cúbica de los datos newtonianos de la tabla 3.1 del ejemplo 3.9.

Ejemplo 3.10. Se retoman los resultados del ejemplo 3.2 donde se tiene que la matriz M y vector \mathbf{b} son:

$$M = \begin{bmatrix} 18 & 137.10 & 1335.31 & 14947.37 \\ 137.10 & 1335.31 & 14947.37 & 181538.66 \\ 1335.31 & 14947.37 & 181538.66 & 2318608.04 \\ 14947.37 & 181538.66 & 2318608.04 & 30601568.75 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 643.20 \\ 5304.29 \\ 51712.71 \\ 560599.95 \end{bmatrix}.$$

Apoyándose en la representación matricial $M\boldsymbol{\eta} = \mathbf{b}$, el vector $\boldsymbol{\eta}$ representa los parámetros que se quieren estimar, el cual se obtiene de llevar a cabo el siguiente producto $\boldsymbol{\eta} = M^{-1}\mathbf{b}$, en consecuencia:

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 10.83 \\ 1.38 \\ 0.91 \\ -0.06 \end{bmatrix}.$$

Por tanto la función de regresión esta dada por

$$y = -0.0648x^3 + 0.9184x^2 + 1.3886x + 10.833.$$

El valor de R^2 fue de 0.97, lo que significa que el 97 % del cambio de la resistencia del papel puede ser explicada por concentración de madera con la que se elabora el papel.

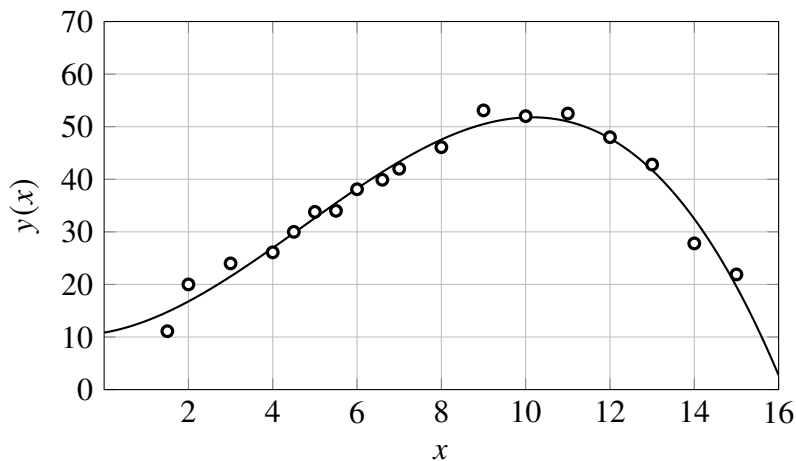


Figura 3.11. Aproximación cúbica de los datos newtonianos de la tabla 3.2 del ejemplo 3.10.

3.3.2. Regresión cúbica no newtoniana

Si se traslada esta misma idea al cálculo no newtoniano, entonces se plantea el problema de aproximar un conjunto de datos no newtonianos $(\alpha(x_1), \alpha(y_1)), (\alpha(x_2), \alpha(y_2)), \dots, (\alpha(x_m), \alpha(y_m))$ mediante una función cúbica

$$y_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(\hat{\eta}_1) \oplus \alpha(\hat{\eta}_2) \otimes \alpha(x) \oplus \alpha(\hat{\eta}_3) \otimes \alpha(x^2) + \alpha(\hat{\eta}_4) \otimes \alpha(x^3),$$

o de forma equivalente

$$y_\alpha(\alpha(x)) = \alpha(\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2x + \hat{\eta}_3x^2 + \hat{\eta}_4x^3),$$

de tal manera que se minimice el siguiente error

$$\begin{aligned} E_\alpha(\alpha(\hat{\eta}_1), \alpha(\hat{\eta}_2), \alpha(\hat{\eta}_3), \alpha(\hat{\eta}_4)) &= \alpha \sum_{k=1}^m \left(\alpha(y_k) - \alpha(\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2x_k + \hat{\eta}_3x_k^2 + \hat{\eta}_4x_k^3) \right)^{\alpha(2)} \\ &= \alpha \left(\sum_{k=1}^m (y_k - (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2x_k + \hat{\eta}_3x_k^2 + \hat{\eta}_4x_k^3))^2 \right). \end{aligned}$$

Para minimizar esta función, se calculan las derivadas parciales y se igualan a cero, con lo cual se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\alpha \partial E_\alpha}{\partial \hat{\eta}_1}(\alpha(\hat{\eta}_1), \alpha(\hat{\eta}_2), \alpha(\hat{\eta}_3), \alpha(\hat{\eta}_4)) &= \alpha \left(-2 \sum_{k=1}^m (y_k - (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2x_k + \hat{\eta}_3x_k^2)) \right) = \alpha(0), \\ \frac{\alpha \partial E_\alpha}{\partial \hat{\eta}_2}(\alpha(\hat{\eta}_1), \alpha(\hat{\eta}_2), \alpha(\hat{\eta}_3), \alpha(\hat{\eta}_4)) &= \alpha \left(-2 \sum_{k=1}^m (y_k - (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2x_k + \hat{\eta}_3x_k^2))x_k \right) = \alpha(0), \\ \frac{\alpha \partial E_\alpha}{\partial \hat{\eta}_3}(\alpha(\hat{\eta}_1), \alpha(\hat{\eta}_2), \alpha(\hat{\eta}_3), \alpha(\hat{\eta}_4)) &= \alpha \left(-2 \sum_{k=1}^m (y_k - (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2x_k + \hat{\eta}_3x_k^2))x_k^2 \right) = \alpha(0), \\ \frac{\alpha \partial E_\alpha}{\partial \hat{\eta}_4}(\alpha(\hat{\eta}_1), \alpha(\hat{\eta}_2), \alpha(\hat{\eta}_3), \alpha(\hat{\eta}_4)) &= \alpha \left(-2 \sum_{k=1}^m (y_k - (\hat{\eta}_1 + \hat{\eta}_2x_k + \hat{\eta}_3x_k^2))x_k^3 \right) = \alpha(0). \end{aligned}$$

Del anterior sistema de ecuaciones se puede reescribir de manera matricial, observe lo siguiente: $\alpha(M) \overset{\alpha}{\odot} \alpha(\boldsymbol{\eta}) \overset{\alpha}{\ominus} \alpha(\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{0})$

$$\alpha(M\boldsymbol{\eta}) = \alpha(\mathbf{b})$$

Ejemplo 3.11. Se contempla para la regresión cúbica no newtoniana los datos correspondientes no newtonianos del ejemplo 3.3, estos valores son descritos en la tabla 3.3, donde como caso particular, se considera la función $\alpha(x) = \ln(x)$ para $x \in \mathbb{R}^+$. El vector $\alpha(\boldsymbol{\eta})$ representa los parámetros que se quieren estimar, el cual se obtiene de llevar a cabo el siguiente producto $\boldsymbol{\eta} = M^{-1}\mathbf{b}$, en consecuencia:

$$\ln(\boldsymbol{\eta}) = \ln \left(\begin{bmatrix} 2.63 \\ 0.0103 \\ 0.00004 \end{bmatrix} \right).$$

Por tanto la ecuación de la regresión cúbica es:

$$y_{\ln}(\ln(x)) = \ln(2.78 + +0.0025x + 0.000045x^2 - 0.0000028x^3).$$

En este caso, el valor del ln-coeficiente de determinación $\ln(R^2)$ corresponde al valor $\ln(0.8646)$. Notemos que en este caso es más difícil dar un porcentaje de aprobación del cambio de la producción que puede ser explicada por las horas trabajadas, pues el modelo proporcionará un buen ajuste cuando $\ln(R^2)$ esté lo más cercano a $\ln(1)$, mientras que el modelo proporcionará un mal ajuste cuando $\ln(R^2)$ esté lo más cercano posible a $\ln(0)$, ¡pero dicho valor no existe! Por lo tanto, cualquier valor de $\ln(R^2)$ está mas cerca de $\ln(1)$.

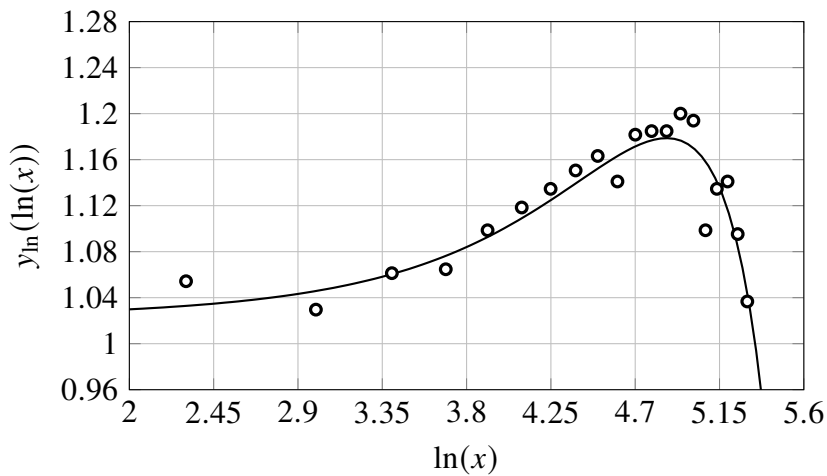


Figura 3.12. Aproximación cúbica de los datos no newtonianos de la tabla 3.3 del ejemplo 3.11.

Ejemplo 3.12. Se contempla para la regresión cúbica no newtoniana los datos correspondientes no newtonianos del ejemplo 3.4 , estos valores son descritos en la tabla 3.4, donde como caso particular, se considera la función $\alpha(x) = \ln(x)$ para $x \in \mathbb{R}^+$. El vector $\alpha(\eta)$ representa los parámetros que se quieren estimar, el cual se obtiene de llevar a cabo el siguiente producto $\eta = M^{-1}b$, en consecuencia:

$$\ln(\eta) = \ln \left(\begin{bmatrix} 2.63 \\ 0.0103 \\ 0.00004 \end{bmatrix} \right).$$

Por tanto la ecuación de la regresión cúbica es:

$$y_{\ln}(\ln(x)) = \ln(10.833 + 1.3886x + 0.9184x^2 - 0.0648x^3).$$

En este caso, el valor del ln-coeficiente de determinación $\ln(R^2)$ corresponde al valor $\ln(0.97)$. Notemos que en este caso es más difícil dar un porcentaje de aprobación del cambio de la producción que puede ser explicada por las horas trabajadas, pues el modelo proporcionará un buen ajuste cuando $\ln(R^2)$ esté lo más cercano a $\ln(1)$, mientras que el modelo proporcionará un mal ajuste cuando $\ln(R^2)$ esté lo más cercano posible a $\ln(0)$, ¡pero dicho valor no existe! Por lo tanto, cualquier valor de $\ln(R^2)$ está mas cerca de $\ln(1)$.

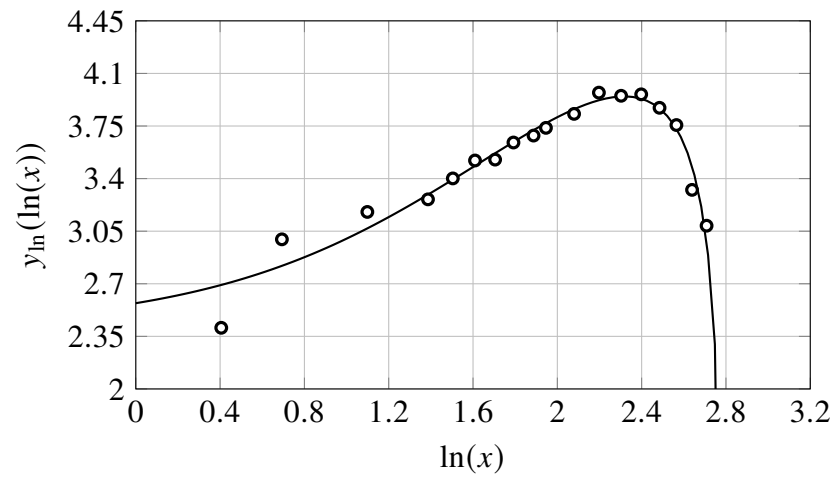


Figura 3.13. Aproximación cúbica de los datos no newtonianos del tabla 3.4 del ejemplo 3.12.

Conclusión

Esta investigación comenzó con el interés de explorar y comprender conceptos y operaciones fundamentales del cálculo no newtoniano. Posteriormente, se planteó el objetivo de integrarlo con otra rama de las matemáticas: la estadística y el modelo de regresión polinomial. Para ello, se analizaron dos casos específicos aplicando regresiones lineales, cuadráticas y cúbicas, tanto con el cálculo tradicional como el no newtoniano, utilizando especialmente la función ln-generadora. Cabe señalar que la validez de estos resultados se debe a que la función ln es inyectiva.

En los ejemplos estudiados, se observó que en las regresiones clásicas, el coeficiente de determinación permite interpretar en qué porcentaje la variabilidad de la variable dependiente es explicada por la variable independiente. Sin embargo, al aplicar el cálculo no newtoniano con la función ln-generadora, esta medida de bondad de ajuste pierde su interpretación habitual, ya que no es posible que $\ln(R^2)$ tome valores cercanos a $\ln(0)$, el cual está indefinido. La alternativa para evaluar el mejor ajuste es calcular varias regresiones polinoiales de diferentes ln-órdenes, y la regla es elegir el modelo de tal manera que $\ln(R^2)$ esté más cercano a $\ln(1)$.

Los resultados de las regresiones indican que aplicar una transformación logarítmica total no es una técnica adecuada si el objetivo es realizar inferencias sobre la variable en su escala original, es decir, sin transformación. Pues considerando el coeficiente de determinación como medida de bondad de ajuste, se encuentra que este cumple: $\ln(R^2) < \ln(1)$, es decir, $\ln(R^2)$ no está acotado inferiormente. Esto muestra una pérdida de utilidad del coeficiente de determinación como criterio para evaluar la eficiencia de la regresión.

Una ampliación futura de este trabajo podría fundamentarse en estudiar que ocurre con las pruebas de significancia del modelo de regresión, al estudiar como se transforman las funciones de densidad de probabilidad correspondientes al cálculo no newtoniano.

Bibliografía

- Apostol, T. M. (1976). *Análisis matemático*. Editorial Reverté, España, 2a edición.
- Barranco, M. R., Tobias, A., Redondo, D., Portillo, E. M., y Sánchez, M. J. (2017). Standardizing effect size from linear regression models with log-transformed variables for meta-analysis. *BMC Medical Research Methodology*, 17:44.
<https://doi.org/10.1186/s12874-017-0322-8>.
- Bashirov, A. E., Kurpinar, E. M., y Özyapıcı, A. (2008). Multiplicative calculus and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 337:36–48.
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.03.081>.
- Bilgehan, B. (2015). Efficient approximation for linear and non-linear signal representation. *IET Signal Processing*, 9(3):260–266.
<https://doi.org/10.1049/iet-spr.2014.0070>.
- Çakmak, A. F. y Başar, F. (2012). Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus. *Journal of Inequalities and Applications*, 2012(1):228.
<https://doi.org/10.1186/1029-242X-2012-228>.
- Czachor, M. (2020). Unifying aspects of generalized calculus. *Entropy*, 22(10).
<https://doi.org/10.3390/e22101180>.
- Czachor, M. (2021). Non-Newtonian mathematics instead of non-Newtonian physics: dark matter and dark energy from a mismatch of arithmetics. *Foundations of Science*, 26.
<https://doi.org/10.1007/s10699-020-09687-9>.
- Dunham, W. (2005). *The calculus gallery: masterpieces from Newton to Lebesgue*. Princeton University Press, New Jersey.
- Feng, C., Wang, H., Lu, N., Chen, T., He, H., Lu, Y., y Tu, X. M. (2014). Log-transformation and its implications for data analysis. *Shanghai Archives of Psychiatry*, 26(2):105–109.
<https://doi.org/10.1177/00045632211050531>.
- Georgiev, S. G. (2022). *Multiplicative differential geometry*. CRC Press, Boca Raton.
<https://doi.org/10.1201/9781003299844>.

- Georgiev, S. G. y Zennir, K. (2023). *Multiplicative differential calculus*. CRC Press, Boca Raton.
<https://doi.org/10.1201/9781003299080>.
- Georgiev, S. G. y Zennir, K. (2024). *Multiplicative partial differential equation*. CRC Press, Boca Raton.
<https://doi.org/10.1201/9781003440116>.
- Grossman, M. y Katz, R. (1972). *Non-Newtonian calculus*. Lee Press, Pigeon Cove, Massachusetts.
- Herstein, I. N. (1990). *Álgebra moderna*. Editorial Trillas, México, 2a edición.
- Kaabouchi, A., Nivanen, L., Wang, Q., Badiali, J., y Méhauté, A. (2009). A mathematical structure for the generalization of conventional algebra. *Open Physics*, 7(3):549–554.
<https://doi.org/10.2478/s11534-009-0046-4>.
- Kaniadakis, G. (2002). Statistical mechanics in the context of special relativity. *Physical Review E*, 66:056125.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.056125>.
- Kaniadakis, G. (2005). Statistical mechanics in the context of special relativity. II. *Physical Review E*, 72:036108.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.036108>.
- Kaniadakis, G. (2013). Theoretical foundations and mathematical formalism of the power-law tailed statistical distributions. *Entropy*, 15(10):3983–4010.
<https://doi.org/1099-4300/15/10/3983>.
- Kaniadakis, G., Baldi, M. M., Deisboeck, T. S., Grisolia, G., Hristopulos, D. T., Scarfone, A. M., Sparavigna, A., Wada, T., y Lucia, U. (2020). The κ -statistics approach to epidemiology. *Scientific Reports*, 10:19949.
<https://doi.org/10.1038/s41598-020-76673-3>.
- Montgomery, D. C., Peck, E. A., y Vining, G. G. (2006). *Introducción al análisis de regresión lineal*. Campaña Editorial Continental, Mexico.
- Moorthy, C. G. (2020). *Multiplicative analysis*. LAP Lambert Academic Publishing, Mauritius.
- Spivak, M. (2012). *Calculus*. Editorial Reverté, España, 3a edición.
- Stanley, D. (1999). A multiplicative calculus. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 10(4):310–326.
<https://doi.org/10.1080/10511979908965937>.

Turan, B. y Çevik (2017). A note on the equivalence of some metric and non-Newtonian metric results. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 7:56–58.

West, R. M. (2021). Best practice in statistics: The use of log transformation. *Annals of Clinical Biochemistry*, 59(3):163–165.
<https://doi.org/10.1177/00045632211050531>.