



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

**REPRESENTACIONES DEL GRUPO SIMÉTRICO EN
HOMOLOGÍAS DE RETÍCULAS DE SUBCONJUNTOS**

TESIS

Que para obtener el título de
Maestra en Matemáticas

PRESENTA

Sonia Arely Sánchez González

Bajo la dirección de

Dr. Rafael Villarroel Flores

Pachuca de Soto, Hgo., México., diciembre 2024

Mineral de la Reforma, Hgo., a 13 de diciembre de 2024

Número de control: ICBI-AAMyF/3336/2024

Asunto: Autorización de impresión de tesis

**MTRA. OJUKY ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR**

El Comité Tutorial de la tesis titulada “**Representaciones del grupo simétrico en homología de retículas de subconjuntos**”, realizada por la sustentante **Sonia Arely Sánchez González**, con número de cuenta **231125**, perteneciente a la **Maestría en Matemáticas**, una vez que ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el Artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente:

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

Atentamente
“Amor, Orden y Progreso”

El Comité Tutorial


Dr. Benajmín Alfonso Itzá Ortiz
Director


Dr. Federico Menéndez Conde Lara
Miembro del comité


Dr. Rafael Villarroel Flores
Miembro del comité


Dr. Jorge Viveros Rogel
Miembro del comité



Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P. 42184
Teléfono: 52 (771) 71 720 00 Ext. 2531
aamyf_icbi@uaeh.edu.mx

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo es fruto de un esfuerzo colectivo, y quiero agradecer de corazón a cada persona que contribuyó a su desarrollo. Les debo, a todos ellos, no solo el conocimiento adquirido, sino también el aliento y la fortaleza en los momentos difíciles.

A mi asesor, el Dr. Rafael Villarroel Flores, le expreso mi más sincero agradecimiento por permitirme trabajar bajo su guía y por brindarme su invaluable tiempo, paciencia y retroalimentación a lo largo del proceso de elaboración de esta tesis. Su dedicación y confianza han sido fundamentales para mi desarrollo.

A CONAHCYT por la beca que me permitió avanzar en mi maestría y enfocarme plenamente en esta investigación.

A mis sinodales, el Dr. Benjamín A. Itzá Ortiz, el Dr. Federico Menéndez Conde Lara y el Dr. Jorge Viveros Rogel, por su tiempo y sus valiosas aportaciones a mi investigación. A mis profesores, por inspirarme y enriquecer mi aprendizaje.

A mi padre, quien, aunque ya no está físicamente conmigo, sigue siendo una fuente de inspiración y fuerza en cada paso que doy. Su amor y enseñanzas permanecen vivos en mi corazón, y este logro es, en gran parte, un reflejo de todo lo que me enseñó.

A mi madre, por su apoyo constante, por ser mi roca y por creer en mí incluso cuando yo dudaba de mis propias capacidades.

A mi familia por su motivación y a mi pareja, por su comprensión y apoyo.

A mis compañeros de clase y amigos, tanto de la maestría como de la licenciatura, por compartir este viaje. Su compañerismo y apoyo mutuo han hecho que los desafíos sean más llevaderos y las victorias más significativas.

A todos aquellos que de alguna manera han contribuido a este proyecto, ya sea con una palabra de aliento, un gesto de amistad o un momento de comprensión, les expreso mi más profundo agradecimiento.

Gracias a todos por ayudarme a alcanzar esta meta. Su influencia no solo ha dejado huella en este trabajo, sino que también perdurará en todos mis logros futuros.

ÍNDICE

Introducción	11
1. Preliminares	15
1.1. Topología	15
1.2. Grupos	16
1.3. Homotopía	18
1.4. Gráficas	21
1.5. Representaciones de grupos	23
1.6. Módulos de Specht	27
2. Homología	37
2.1. Complejos simpliciales abstractos	37
2.2. Complejos simpliciales geométricos	38
2.3. Conjuntos parcialmente ordenados (copos)	43
2.4. Homología de copos	46
2.5. La retícula booleana	48
2.6. Homología de complejos simpliciales	53
2.7. Subdivisión baricéntrica	56
3. Gráfica de clanes de la retícula de subconjuntos	61
3.1. Antecedentes teóricos	61
3.2. La retícula booleana truncada $\bar{\mathcal{B}}_4^2$	66
3.3. La retícula booleana truncada $\bar{\mathcal{B}}_n^{n-2}$	81
4. Conclusión	97
Bibliografía	99

RESUMEN

En esta tesis, consideraremos la clase de las gráficas de comparabilidad de retículas booleanas truncadas y nos centraremos en analizar la descomposición en submódulos irreducibles de la homología de las gráficas de clanes de tales gráficas. Demostraremos que los complejos simpliciales asociados a estas gráficas y sus gráficas de clanes son homotópicos por medio de una equivalencia homotópica equivariante, lo que implica isomorfismo en sus homologías vistas como representaciones del grupo simétrico.

ABSTRACT

In this thesis, we will consider the class of the comparability graphs of truncated Boolean lattices and we will focus on analyzing the decomposition into irreducible submodules of the homology of the clique graphs associated with such graphs. We will show that the simplicial complexes associated to these graphs and their clique graphs are homotopic, through an equivariant homotopy equivalence, implying isomorphism in their homologies viewed as representations of the symmetric group.

INTRODUCCIÓN

En matemáticas, al analizar un tema exploramos diversas ramas de estudio que, al interactuar, revelan conexiones profundas entre diferentes principios. Por esta razón, comenzaremos revisando en el capítulo 1 algunos conceptos preliminares, iniciando nuestra travesía con el estudio de la topología en la sección 1.1, donde recordaremos la definición y propiedades de una función continua. Posteriormente, en la sección 1.2 estudiaremos el concepto de un grupo G , el cual es un conjunto con una operación binaria entre sus elementos que es asociativa y garantiza la existencia de un elemento neutro y de inversos. Estas primeras nociones nos permitirán abordar el concepto de función homotópica y espacios homotópicos equivariantes en la sección 1.3.

En la sección 1.4 analizaremos las gráficas, las cuales son representaciones visuales que capturan las interconexiones y asociaciones entre elementos. Una gráfica G consiste de un conjunto finito de vértices y aristas. Nosotros estamos interesados en las gráficas de clanes $K(G)$, donde cada vértice representa un clan, que es una subgráfica completa maximal en una gráfica G , es decir, un conjunto de vértices conectados entre sí de manera que no se puede agregar ningún vértice adicional sin perder la propiedad de que todos los vértices se relacionen. Los vértices en la gráfica de clanes están conectados por aristas si los clanes que representan tienen una intersección no vacía en la gráfica original G .

Dado un grupo G y un espacio vectorial V , diremos que V es un G -módulo si existe una función $G \times V \rightarrow V$, llamada acción, que cumple ciertas propiedades. Si V es un G -módulo, entonces un G -submódulo es un subespacio W de V que es cerrado bajo la acción de G . Si V es un G -módulo y no tiene G -submódulos no triviales entonces se dice que V es irreducible. La descomposición en submódulos irreducibles se presentará en la sección 1.5 y es un concepto importante en diversas ramas de las matemáticas, ya que permite descomponer un módulo más grande en partes más pequeñas y manejables. Esto facilita el estudio y la manipulación algebraica, haciendo que los cálculos sean más accesibles.

En la sección 1.6, revisaremos los módulos de Specht, estructuras fundamentales en la teoría de representaciones del grupo simétrico S_n . Introduciremos el concepto de tableros de Young, que son diagramas formados a partir de particiones de enteros. Posteriormente, definiremos el módulo M^λ , generado por los tableros de Young, y el módulo de Specht S^λ , que se construye a partir de ciertas combinaciones lineales de estos tableros. Por último, presentaremos teoremas clave que establecen la irreducibilidad de

los módulos de Specht y su relación con las clases de conjugación en S_n .

En el capítulo 2, comenzamos revisando los conceptos de complejos simpliciales, que establecen un puente entre la combinatoria y la topología, sirviendo como un medio para traducir conceptos combinatorios abstractos en estructuras topológicas concretas. A estos complejos los abordaremos desde dos perspectivas, la abstracta (sección 2.1) y la geométrica (sección 2.2). En términos generales, un complejo simplicial se compone de un conjunto de vértices y una colección de subconjuntos de vértices denominados simplejos, los cuales cumplen con la propiedad de ser cerrados bajo inclusión. Esto significa que si un conjunto es un simplejo cualquier subconjunto de este también lo es. A una gráfica se le puede asociar un complejo simplicial, donde los vértices de la gráfica son los vértices del complejo simplicial y los simplejos están determinados por subgráficas completas, es decir, gráficas en donde todos los vértices están conectados entre sí.

En la sección 2.3 se presenta el concepto de un conjunto parcialmente ordenado, o copo por su abreviación, que es un conjunto P equipado con una relación binaria \leq que cumple con ciertas propiedades de orden. A cada copo P le podemos asociar una gráfica $G(P)$, llamada gráfica de comparabilidad, donde los vértices de la gráfica son los elementos de los copos y si dos elementos son comparables se unen por una arista. La asociación entre un complejo simplicial y un conjunto parcialmente ordenado se realiza asignando un vértice a cada elemento del conjunto parcialmente ordenado, y un conjunto de elementos del conjunto parcialmente ordenado forman un simplejo si es totalmente ordenado.

Las retículas, abordadas en la sección 2.5, son conjuntos parcialmente ordenados en los cuales, para cualquier par de elementos, existe tanto el supremo como el ínfimo de dicho par en el conjunto. En general, se tiene que el complejo simplicial de un conjunto parcialmente ordenado es isomorfo al complejo simplicial de su gráfica de comparabilidad. Por tanto, a las retículas les podemos asociar un complejo simplicial de la manera en que ya hemos descrito y podremos trabajar con su gráfica de comparabilidad.

Por otra parte, una manera efectiva de introducir el álgebra en el estudio topológico es a través de la homología. En la sección 2.4 se discutirá la homología de copos, y en la sección 2.6 se tratará la homología de complejos simpliciales. Siguiendo el enfoque previo donde asociamos complejos simpliciales a retículas, ahora extendemos este vínculo y asignamos a los complejos simpliciales una sucesión de espacios vectoriales conocida como la homología del complejo simplicial.

Finalmente, en el capítulo 3 se presentarán nuestros resultados, aplicando la teoría desarrollada en los capítulos anteriores y las nociones introducidas en la sección 3.1.

La inspiración para esta investigación proviene del estudio del teorema de Solomon (Solomon, 1968), mencionado por M. Wachs en (Wachs, 2007). Este teorema establece que para todo $k \leq n$, se cumple la siguiente relación:

$$\tilde{H}_{n-k-1}(\bar{\mathcal{B}}_n^k) \cong_{S_n} S^{(k, 1^{n-k})},$$

donde $(k, 1^{n-k})$ es una partición de n y $S^{(k, 1^{n-k})}$ denota el módulo de Specht correspondiente a dicha partición. El teorema nos habla de la descomposición en submódulos irreducibles del módulo sobre el grupo simétrico dado por las homologías de complejos simpliciales asociados a la retícula booleana truncada, denotada como $\bar{\mathcal{B}}_n^k$, que es una retícula que consiste de los subconjuntos del conjunto $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ de tamaño al menos k ordenados por inclusión.

No obstante, otros investigadores también han trabajado en la descomposición en submódulos irreducibles de otras homologías, tal es el caso de S. Bouc (Bouc, 1984), quien ha establecido una descomposición en submódulos irreducibles del módulo sobre el grupo simétrico dado por las homologías de complejos simpliciales M_n construidos a partir de ciertas gráficas, llamadas gráficas de emparejamiento. El teorema de Bouc, fue abordado previamente en una tesis de maestría por un colega (Campero, 2021) donde presentó la descomposición en submódulos irreducibles de los módulos de homología asociados a los complejos simpliciales de la gráfica de emparejamientos y de la gráfica de clanes de la gráfica de emparejamientos, para valores particulares de n .

La contribución principal de este trabajo se encuentra en la sección 3.3, consiste en analizar la homología de las gráficas de clanes de las gráficas de comparabilidad de retículas booleanas truncadas y determinar si se obtiene un resultado similar al teorema de Solomon antes mencionado. A la gráfica de comparabilidad de retículas booleanas truncadas, es decir $G(\bar{\mathcal{B}}_n^k)$ la denotaremos como $G_{n,k}$. Demostraremos que los espacios topológicos de los complejos simpliciales asociados a $G_{n,k}$ y $K(G_{n,k})$ son homotópicos, para ciertos valores de n y k , lo que implica la isomorfía de sus homologías. Nuestra investigación se enfoca en demostrar la isomorfía de las homologías entre las gráficas de comparabilidad de las retículas booleanas truncadas $G_{n,k}$, y las gráficas de clanes de estas $K(G_{n,k})$, no solo como espacios vectoriales, sino también como S_n -módulos. A pesar de que no hemos hallado una fórmula general para descomponer en irreducibles $\tilde{H}(K(G_{n,k}))$, hemos logrado identificar resultados concretos para ciertos valores de n y k , específicamente en el caso $n - k = 2$.

PRELIMINARES

1.1 Topología

En esta sección se presentan una serie de definiciones y teoremas que proporcionan los fundamentos necesarios para respaldar nuestras afirmaciones en los resultados. Es importante señalar que las demostraciones de estos teoremas pueden consultarse en (Munkres, 2000).

1.1.1 Definición. Sea X un conjunto, una **topología** sobre X es una familia de subconjuntos τ de X que satisface las siguientes condiciones.

- $\emptyset, X \in \tau$.
- La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ está en τ .
- La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ .

Un conjunto X con una topología τ se llama **espacio topológico**.

A los elementos $U \in \tau$ se les dicen **conjuntos abiertos** y sus complementos se llaman **conjuntos cerrados**.

Cuando estamos formulando definiciones para ciertas estructuras, como los espacios topológicos, conviene considerar funciones que conserven las características esenciales de dicha estructura. En el caso específico de los espacios topológicos, nos referimos a estas funciones como funciones continuas y enseguida proporcionamos su definición.

1.1.2 Definición. Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f: X \rightarrow Y$ se dice que es **continua** si para cada subconjunto abierto V de Y , el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X .

1.1.3 Definición. Sean X y Y espacios topológicos y sea $f: X \rightarrow Y$ una biyección. Si la función f y la función inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$ son ambas continuas, entonces se dice que f es un **homeomorfismo**.

La noción de homeomorfismo es importante en topología, ya que permite identificar espacios que son topológicamente equivalentes, es decir, esencialmente iguales. Gracias a este concepto, se establece una relación que identifica y preserva las propiedades topológicas entre diferentes espacios.

1.1.4 Teorema. Si $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$ son funciones continuas, entonces la composición $g \circ f: X \rightarrow Z$ es una función continua.

1.1.5 Teorema. (Lema del pegado). Sea $X = A \cup B$ donde A y B son cerrados en X . Sean $f: A \rightarrow Y$ y $g: B \rightarrow Y$ funciones tales que para toda $x \in A \cap B$ se tiene que $f(x) = g(x)$, definamos una función $h: X \rightarrow Y$ tal que:

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in B, \\ f(x) & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Entonces h es continua si y solo si f y g son ambas continuas.

El lema del pegado se puede extender al caso cuando X sea unión de n subespacios cerrados.

1.2 Grupos

1.2.1 Definición. Un **grupo** es una pareja $(G, *)$, con G un conjunto no vacío, y $*$ una función llamada operación binaria $*: G \times G \rightarrow G$, denotada por $*((a, b)) = ab$, que satisface las siguientes condiciones:

1. La operación es asociativa, es decir, para todos $a, b, c \in G$, $a(bc) = (ab)c$.
2. Existe un elemento neutro $1 \in G$ tal que para todo $a \in G$, $a1 = 1a = a$.
3. Para todo $a \in G$ existe $a^{-1} \in G$, llamado inverso de a , tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

Algunos ejemplos de grupos son:

1.2.2 Ejemplo. Los grupos aditivos de los números enteros, racionales, complejos y reales.

1.2.3 Ejemplo. Sea X un conjunto no vacío. Una **permutación** de X es una función biyectiva $\pi: X \rightarrow X$. El conjunto de todas las permutaciones de X se suele denotar

como S_X . Si $x \in X$ y $\pi \in S_X$, decimos que π fija a x si $\pi(x) = x$, en caso contrario decimos que π mueve a x .

El grupo de todas las permutaciones de n elementos se llama **grupo simétrico** y se denota como S_n . La operación en el grupo simétrico es la composición de permutaciones, es decir, la realización de una permutación seguida de otra.

Sea $x \in X$ y $\pi \in S_n$, un **ciclo** de longitud k es una permutación que envía k elementos a otros k elementos de manera cíclica, y deja fijos los demás elementos. Un ciclo de longitud k se denota generalmente como (a_1, a_2, \dots, a_k) indicando la secuencia de elementos que se mueven. Un ciclo de longitud 2 se llama **transposición**.

Los ciclos son importantes en la descomposición de permutaciones más complejas, y el teorema de descomposición en transposiciones establece que cualquier permutación se puede expresar como un producto de transposiciones.

1.2.4 Ejemplo. El conjunto de todas las transformaciones lineales invertibles de un espacio vectorial V sobre un campo F , junto con la operación de composición de transformaciones lineales, forma un grupo llamado **general lineal** o grupo de transformaciones lineales invertibles de V en V y es denotado como:

$$GL(V) = \{T: V \rightarrow V \mid T \text{ es una transformación lineal invertible en } V\}.$$

1.2.5 Ejemplo. El conjunto de matrices invertibles $n \times n$ con entradas en un campo F , denotado como $GL(n, F)$, junto con el producto usual de matrices, forma un grupo llamado **grupo de matrices**.

1.2.6 Definición. Sea G un grupo y H un subconjunto no vacío de G . Se dice que H es un **subgrupo** de G , y lo denotaremos como $H \leq G$, si la operación de G restringida a H hace de este un grupo.

1.2.7 Definición. Sea G un grupo y X un conjunto no vacío. Una **acción** de G en X es una función $*$: $G \times X \rightarrow X$ tal que para toda $x \in X$ y para toda $g_1, g_2 \in G$:

- $1 * x = x$.
- $(g_1 g_2) * x = g_1 * (g_2 * x)$.

Si se cumple lo anterior, también decimos que X es un **G -conjunto**.

En adelante por brevedad escribiremos gx en lugar de $g * x$.

1.3 Homotopía

1.3.1 Definición. Sean $f, g: X \rightarrow Y$ funciones continuas entre espacios topológicos, decimos que f es **homotópica** a g si existe una función continua $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$, tal que para cada $x \in X$,

$$H(x, 0) = f(x) \text{ y } H(x, 1) = g(x).$$

La función H se conoce como homotopía entre f y g . Cuando dos funciones sean homotópicas escribiremos $f \simeq g$. En adelante, I representará el intervalo cerrado $[0, 1]$.

1.3.2 Definición. Sean X y Y dos espacios topológicos. Diremos que X y Y son **homotópicamente equivalentes** u **homotópicos** y lo denotaremos por $X \simeq Y$, si existen las funciones $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow X$ tales que $g \circ f \simeq \text{id}_X$ y $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. Las funciones f y g son llamadas **equivalencias homotópicas** donde g es la **inversa homotópica** de f .

Si X es homotópico a Y y Y es homotópico a Z , entonces X es homotópico a Z . Esto se debe a la existencia de homotopías $F: X \times I \rightarrow Y$ y $G: Y \times I \rightarrow Z$, con las cuales podemos producir una homotopía de X a Z denotada como $G \circ F: X \times I \rightarrow Z$. Cabe señalar que esta construcción requiere un proceso especial y no consiste simplemente en aplicar F y luego G de manera secuencial.

Cuando X es homotópico a un punto, se dice que X es **contraíble**. Un ejemplo de espacio contraíble es el siguiente:

1.3.3 Ejemplo. Consideremos $X = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$, el disco cerrado. Vamos a probar que este espacio es contraíble.

Sea $p \in X$ un punto fijo. Definamos $f: X \rightarrow \{p\}$ como la función constante que envía todos los puntos de X a p y $g: \{p\} \rightarrow X$ como la función inclusión. Mostraremos que $g \circ f \simeq \text{id}_X$ y $f \circ g \simeq \text{id}_{\{p\}}$.

Definamos la homotopía $H: X \times I \rightarrow X$ como:

$$H(x, t) = (1 - t)x + tp,$$

donde $x \in X$, $t \in [0, 1]$ y p es un punto fijo en X . Se tiene que $H(x, t)$ está bien definido pues el disco X es un conjunto convexo. Notemos que cuando $t = 0$, la función $H(x, 0) = (1 - 0)x + 0p = x$, para cualquier x en X , por lo que $H(x, 0)$ es la identidad

en X . Por otro lado, si $t = 1$, la función $H(x, 1) = (1 - 1)x + 1p = p$, para cualquier x en X . Así, $H(x, 1)$ es la función constante que mapea todos los puntos de X a p , es decir $H(x, 1) = g(f(x))$.

Además, la función H es continua por ser combinación lineal de funciones continuas, por tanto $g \circ f \simeq \text{id}_X$. Finalmente notemos que $f \circ g = \text{id}_{\{p\}}$. Por lo tanto, podemos concluir que X es contraíble.

Si dos espacios son homeomorfos, entonces son homotópicos. Sin embargo, la recíproca no siempre es cierto. En el ejemplo anterior vimos que un disco cerrado y un punto son homotópicos, sin embargo, estos dos espacios no son homeomorfos pues no existe una biyección entre un disco cerrado y un punto.

1.3.4 Definición. Sea G un grupo y sean X y Y G -conjuntos, decimos que una función $f: X \rightarrow Y$ es **equivariante** si $f(\sigma x) = \sigma f(x)$ para todo $\sigma \in G$ y $x \in X$.

Si $f: X \rightarrow Y$ es una función equivariante y $x \in X$ es un punto fijo, es decir, $\sigma x = x$ para todo $\sigma \in G$, entonces $f(x) \in Y$ es un punto fijo. Por lo tanto, podemos concluir que toda función equivariante mapea puntos fijos a puntos fijos.

1.3.5 Definición. Un G -espacio topológico es un G -conjunto X , donde X es un espacio topológico, y la acción es tal que la función $\sigma: X \rightarrow X$ definida por $x \mapsto \sigma x$ es continua para todo $\sigma \in G$.

1.3.6 Definición. Sean X y Y G -espacios topológicos. Una G -homotopía entre funciones equivariantes $f, g: X \rightarrow Y$ es una homotopía $H: X \times I \rightarrow Y$ que satisface que para todo $x \in X$, $t \in I$, y $\sigma \in G$,

$$H(\sigma x, t) = \sigma H(x, t).$$

Una G -homotopía también se puede llamar homotopía equivariante. Si X y Y son homotópicamente equivalentes, sus equivalencias homotópicas son equivariantes y las homotopías $g \circ f \simeq i_X$ y $f \circ g \simeq i_Y$ son equivariantes. En este caso, decimos que X y Y son G -homotópicamente equivariantes y lo denotamos como $X \simeq_G Y$.

1.3.7 Ejemplo. Un ejemplo de dos espacios donde actúa un grupo G tal que $X \simeq Y$, pero $X \not\simeq_G Y$ es el siguiente:

Consideremos dos espacios homotópicos, $X = [-1, 1]$ y $Y = [-1, 1]$. Y consideremos el grupo S_2 en donde la acción de S_2 en X y Y se define de la siguiente manera:

- En X la acción de S_2 es la trivial, es decir, la identidad y la transposición dejan fijos todos los puntos.
- En Y la acción de S_2 consiste en dejar fijo el intervalo bajo la identidad y en invertir el intervalo bajo la transposición (12).

Aunque X y Y son homotópicos, no son S_2 -homotópicos ya que una G -homotopía necesariamente tiene que preservar los puntos fijos.

La topología algebraica se ocupa del estudio de propiedades topológicas que son invariantes bajo deformaciones continuas de espacios topológicos. En este contexto, dos operaciones importantes son la suspensión y la cuña o *wedge* por su nombre en inglés, que nos permiten construir nuevos espacios a partir de otros más simples.

1.3.8 Definición. Para un espacio topológico X , la **suspensión** $\text{Susp } X$ es el cociente de $X \times I$ obtenido al identificar $X \times \{0\}$ en un punto y $X \times \{1\}$ en otro punto.

1.3.9 Definición. Sean X y Y dos espacios topológicos, y sean $x_0 \in X$ y $y_0 \in Y$, entonces definimos la **cuña** $X \vee Y$ como el cociente de la unión disjunta $X \sqcup Y$ obtenido al identificar x_0 y y_0 en un solo punto. Es decir,

$$X \vee Y = (X \sqcup Y) / \{x_0, y_0\}, \text{ con } x_0 \in X, y_0 \in Y.$$

En general se puede definir la cuña de una colección arbitraria de espacios $\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$ comenzando con la unión disjunta $\bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$ e identificando los puntos $x_{\alpha} \in X_{\alpha}$ en un solo punto. Notemos que, aunque en general la cuña depende de los puntos x_{α} escogidos, los espacios a los que aplicaremos tal concepto tienen las propiedades suficientes para que la cuña sea independiente salvo homeomorfismos de los puntos escogidos.

1.3.10 Ejemplo. La cuña de dos circunferencias S^1 , $S^1 \vee S^1$, se ve en la figura 1.

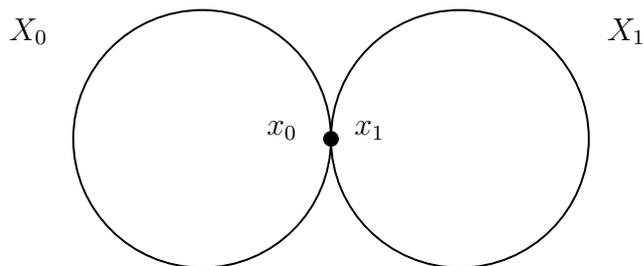


Figura 1: Cuña de dos circunferencias S^1 .

1.4 Gráficas

1.4.1 Definición. Una **gráfica** G consiste de un conjunto finito $V = V(G)$ de p **vértices** y un conjunto $E = E(G)$ de q pares no ordenados de vértices distintos llamados **aristas**, es decir, $q \in E$ es tal que $q = \{u, v\}$ con $u, v \in V$ y $u \neq v$.

Una manera natural de ver una gráfica es colocando puntos para los vértices y una línea entre dos puntos para una arista. Si dos vértices forman una arista se dice que son **adyacentes** y se escribe $u \sim v$. Representaremos a dos vértices u y v unidos por una arista como uv , en lugar de $\{u, v\}$.

1.4.2 Definición. Sea G una gráfica. Un **camino** es una sucesión de vértices en la que cada par consecutivo está conectado por una arista. Se dice que G es una **gráfica conexa** si para cualesquiera dos vértices $u, v \in V(G)$, existe un camino en G que comienza en u y termina en v .

1.4.3 Ejemplo. En la figura 2 podemos ver un ejemplo de gráfica conexa. En esta gráfica, cualquier par de vértices está conectado a través de caminos y no hay ningún vértice aislado. Por ejemplo, 1 y 3 tiene el camino de vértices adyacentes $1 \sim 2$ y $2 \sim 3$.

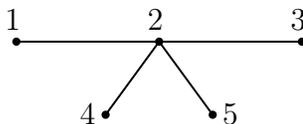


Figura 2: Gráfica conexa.

1.4.4 Definición. Sean G y H dos gráficas. Decimos que G y H son **isomorfas** si existe una correspondencia biyectiva $\theta: V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $u \sim v$ si y solo si $\theta(u) \sim \theta(v)$.

Escribimos $G \cong H$ para denotar isomorfismo.

1.4.5 Definición. Decimos que G es una **gráfica completa** si para todo $u, v \in V(G)$ con $u \neq v$ se tiene que $u \sim v \in E(G)$. Una gráfica completa con n vértices se denota como K_n .

1.4.6 Definición. Dada una gráfica G , definimos la **gráfica de emparejamientos** $M(G)$ como la gráfica cuyos vértices son las aristas de G y dos vértices son adyacentes si las aristas correspondientes no tienen vértices en común.

1.4.7 Ejemplo. En la figura 3 se encuentra un ejemplo de una gráfica y su gráfica de emparejamientos.

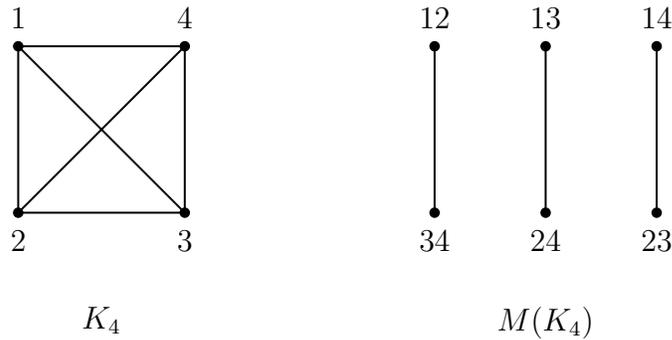


Figura 3: Gráfica completa K_4 y su gráfica de emparejamientos $M(K_4)$.

1.4.8 Definición. Una **subgráfica** de una gráfica G es una gráfica H tal que:

$$V(H) \subseteq V(G) \text{ y } E(H) \subseteq E(G).$$

1.4.9 Definición. A una subgráfica completa maximal, es decir, que no está contenida propiamente en ninguna otra subgráfica completa se le llama **clan**.

1.4.10 Definición. Dada una gráfica G , definimos la **gráfica de clanes**, denotada como $K(G)$, como la gráfica en la que los vértices representan clanes de la gráfica G , y hay una arista entre dos vértices distintos si tienen intersección no vacía.

1.4.11 Ejemplo. En la figura 4 tenemos una gráfica G que contiene 4 clanes de 3 vértices, por tanto tendremos 4 vértices en su respectiva gráfica de clanes $K(G)$. Dado que en G los cuatro clanes se intersecan dos a dos, en la gráfica de la derecha podemos observar la gráfica de clanes de G , la cual es la gráfica completa K_4 .

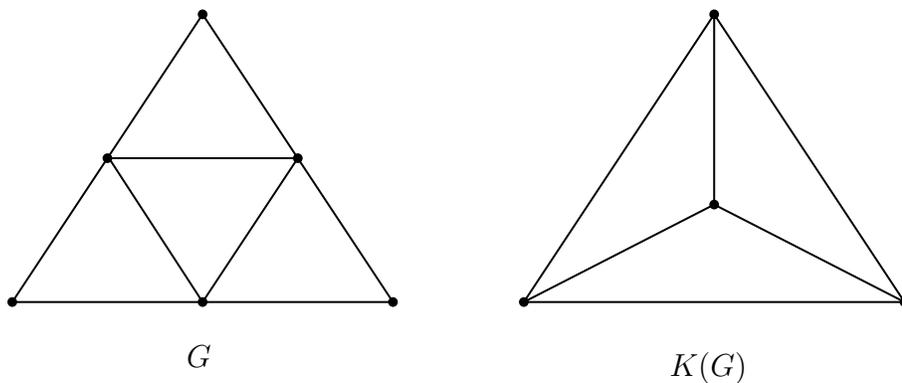


Figura 4: Una gráfica G y su gráfica de clanes $K(G)$.

1.5 Representaciones de grupos

En este capítulo, estudiaremos las definiciones y propiedades de los módulos. En lo que sigue, restringimos nuestra discusión a grupos finitos G y espacios vectoriales de dimensión finita sobre el campo \mathbb{C} . Sin embargo, muchos de estos conceptos son válidos en general para cualquier campo F . Los detalles de la teoría y los teoremas mencionados en este capítulo fueron consultados principalmente en (Wachs, 2007), (Sagan, 2001) y (Fulton, 1997).

1.5.1 Definición. Sea G un grupo y V un espacio vectorial sobre el campo \mathbb{C} . Una **acción lineal** (izquierda) de G en V es una acción (definición 1.2.7) que cumple las siguientes propiedades para todo $v, w \in V$ y $g \in G$:

1. $g(v + w) = gv + gw$, (distributiva con respecto a la suma en V).
2. $g(\lambda v) = \lambda(gv) = (\lambda g)v$, para $\lambda \in \mathbb{C}$.

1.5.2 Definición. Sea V un espacio vectorial y G un grupo. Decimos que V es un **G -módulo** (izquierdo) si existe una acción lineal de G en V , $G \times V \rightarrow V$, denotada por $(g, v) \mapsto gv$, de elementos de G por elementos de V .

1.5.3 Definición. Sea V un G -módulo. Un **G -submódulo** de V es un subespacio vectorial W que es invariante bajo la acción de G , es decir, $gw \in W$ para todos $w \in W$, $g \in G$, tal que W junto con la acción de G es en sí mismo un G -módulo. Escribiremos $W \leq V$ si W es submódulo de V .

1.5.4 Definición. Sea G un grupo y V un espacio vectorial sobre el campo \mathbb{C} . Una **acción lineal por la derecha** de G en V es una función $*$: $V \times G \rightarrow V$ que cumple que para todo $v, w \in V$ y $g_1, g_2 \in G$:

1. $v1 = v$, donde 1 es el neutro de G .
2. $v(g_1g_2) = (vg_1)g_2$.
3. $(v + w)g_1 = vg_1 + wg_1$, (distributiva con respecto a la suma en V).
4. $(\lambda v)g_1 = \lambda(vg_1)$, para $\lambda \in \mathbb{C}$.

También, se pueden definir **módulos derechos** mediante una acción lineal de G por la derecha en V , $V \times G \rightarrow V$, denotada por $(v, g) \mapsto vg$. Y **submódulos derechos**,

con W invariante bajo la acción de G por la derecha, es decir, $wg \in W$ para todos $w \in W, g \in G$.

En lo siguiente usaremos acción lineal izquierda a menos que se indique lo contrario.

1.5.5 Definición. Sean G un grupo y V un espacio vectorial sobre el campo \mathbb{C} . Una **representación** de G en V es un homomorfismo de grupos

$$\phi: G \rightarrow GL(V).$$

La dimensión de la representación es definida como la dimensión del espacio vectorial V .

1.5.6 Teorema. Sea G un grupo y V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo \mathbb{C} . Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de acciones lineales de G en V y el conjunto de representaciones de G en V .

Demostración. Supongamos primero que se tiene una acción lineal $*$: $G \times V \rightarrow V$, para cada $g \in G$, usando esta acción definamos la función $\rho_g: V \rightarrow V$ dada por $\rho_g v = gv$ para todo $v \in V$. Enseguida demostraremos que ρ_g es una transformación lineal invertible.

Sean $v, w \in V, \lambda \in F$, entonces:

$$\rho_g(v + w) = g(v + w) = gv + gw = \rho_g(v) + \rho_g(w),$$

$$\rho_g(\lambda v) = g(\lambda v) = \lambda(gv) = \lambda \rho_g(v).$$

Así que ρ_g es lineal, ahora veamos que es invertible. Como G es un grupo, existe $g^{-1} \in G$, tal que:

$$\rho_g(\rho_{g^{-1}}(v)) = \rho_g(g^{-1}v) = g(g^{-1}v) = (gg^{-1})v = v,$$

$$\rho_{g^{-1}}(\rho_g(v)) = \rho_{g^{-1}}(gv) = g^{-1}(gv) = (g^{-1}g)v = v,$$

por lo tanto ρ_g tiene como inversa a $\rho_{g^{-1}}$.

Ahora, observemos que la función $\rho: G \rightarrow GL(V)$ es un homomorfismo de grupos. Si $g, h \in G$, entonces para todo $v \in V$:

$$\rho_{gh}(v) = (gh)v = g(hv) = g(\rho_h(v)) = \rho_g(\rho_h(v)) = (\rho_g \circ \rho_h)(v),$$

por lo que $\rho_{gh} = \rho_g \circ \rho_h$.

Suponga ahora que se tiene un homomorfismo de grupos $\rho: G \rightarrow GL(V)$. Demostraremos que $gv = \rho_g(v)$ define una acción lineal de G en V verificando las propiedades de una acción lineal:

- 1 es el neutro de G , entonces,

$$1v = (\rho_1)v = 1_V(v) = v,$$

para todo $v \in V$.

- Si $g, h \in G$ y $v \in V$, entonces,

$$(gh)v = \rho_{gh}(v) = (\rho_g \circ \rho_h)(v) = \rho_g(\rho_h(v)) = g(\rho_h(v)) = g(hv).$$

- Para $g \in G$ y $v, w \in V$,

$$g(v + w) = \rho_g(v + w) = \rho_g(v) + \rho_g(w) = gv + gw.$$

- Para $\lambda \in F, v \in V$ y $g \in G$,

$$g(\lambda v) = \rho_g(\lambda v) = \lambda \rho_g(v) = \lambda(gv).$$

Así, hemos verificado que $gv = \rho_g(v)$ define una acción lineal de G en V . □

Este teorema nos dice que estudiar las representaciones de G en V es equivalente a estudiar G -módulos V .

1.5.7 Ejemplo. Dado que toda permutación $\sigma \in S_n$ es producto de transposiciones, es decir, ciclos de longitud 2, al expresar a σ como $\sigma = \tau_1\tau_2 \dots \tau_k = \psi_1\psi_2 \dots \psi_s$, donde τ_i y ψ_j son transposiciones para $i = 1, \dots, k$ y $j = 1, \dots, s$, se puede demostrar que tanto k como s son pares o bien ambos impares, y por lo tanto, $(-1)^k = (-1)^s$. Si σ puede ser expresado como una multiplicación de una cantidad par de transposiciones se dice que es par y en el caso contrario que σ es impar. Ahora, sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre \mathbb{C} . Si $\sigma = \tau_1\tau_2 \dots \tau_k$, donde τ_i son transposiciones, definimos la función signo $\text{sgn}: S_n \rightarrow GL(V)$ mediante:

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^k 1_V.$$

La función signo está bien definida, así que V recibe una estructura de S_n -módulo, con acción:

$$\sigma v = \begin{cases} v, & \text{si } \sigma \text{ es par,} \\ -v, & \text{si } \sigma \text{ es impar.} \end{cases}$$

El caso en el que $V = \mathbb{C}$, como espacio vectorial de dimensión 1, es una representación importante de grado 1. Denotamos como $\hat{\mathbb{C}}$ al S_n -módulo \mathbb{C} con la acción anterior.

1.5.8 Ejemplo. Sean G un grupo y $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un G -conjunto. Consideremos el espacio vectorial generado por X sobre \mathbb{C} , $V = \mathbb{C}X$, donde:

$$\mathbb{C}X = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \mid \lambda_i \in \mathbb{C}\}.$$

La suma y la multiplicación por escalar en $\mathbb{C}X$ está definida por:

$$(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) + (\lambda'_1 x_1 + \dots + \lambda'_n x_n) = (\lambda_1 + \lambda'_1) x_1 + \dots + (\lambda_n + \lambda'_n) x_n$$

y

$$c(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) = (c\lambda_1) x_1 + (c\lambda_2) x_2 + \dots + (c\lambda_n) x_n,$$

respectivamente. Sean $v \in \mathbb{C}X$, con $v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$ y $g \in G$, entonces la acción de G en $\mathbb{C}X$ está dada por:

$$gv = g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 (gx_1) + \lambda_2 (gx_2) + \dots + \lambda_n (gx_n).$$

Luego, $\mathbb{C}X$ es un G -módulo de dimensión $|X|$. El cual es conocido como módulo de permutación, y los elementos de X son una base de $\mathbb{C}X$. Tomemos un caso específico, sea S_n el grupo simétrico actuando en $Y = \{1, 2, \dots, n\}$. Entonces,

$$\mathbb{C}Y = \{\lambda_1 1 + \lambda_2 2 + \dots + \lambda_n n \mid \lambda_i \in \mathbb{C}\},$$

y la acción de S_n en Y está dada por:

$$\sigma(\lambda_1 1 + \lambda_2 2 + \dots + \lambda_n n) = \lambda_1 \sigma(1) + \lambda_2 \sigma(2) + \dots + \lambda_n \sigma(n).$$

Un submódulo importante de dimensión $n - 1$ de $\mathbb{C}Y$ es:

$$E = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}Y \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}.$$

La representación asociada a este submódulo se llama **representación estándar**.

1.5.9 Definición. Sea V un G -módulo no trivial. Decimos que V es **irreducible** si los únicos submódulos de V son 0 y V .

1.5.10 Definición. Un espacio vectorial V es la suma directa de W_1 y W_2 , denotada como $V = W_1 \oplus W_2$, si W_1 y W_2 son subespacios de V tales que $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ y $W_1 + W_2 = V$. Si W_1 y W_2 son G -módulos, entonces V se convierte en un G -módulo con acción $g(w_1, w_2) = (gw_1, gw_2)$. La definición se extiende a suma directa de n G -módulos con $n > 2$.

1.5.11 Definición. Sea V un G -módulo. Decimos que V es **completamente reducible**, si V se descompone en suma directa de submódulos irreducibles, es decir,

$$V \cong W^{(1)} \oplus W^{(2)} \oplus \dots \oplus W^{(k)},$$

donde cada $W^{(i)}$ es un G -submódulo irreducible de V . Nos referiremos en ocasiones a tal descomposición de V simplemente como una descomposición en irreducibles.

1.5.12 Teorema (Teorema de Maschke). Sea G un grupo finito y V un G -módulo. Entonces, V es completamente reducible.

Una prueba de este teorema la podemos encontrar en (Sagan, 2001). Es importante tener en cuenta que el teorema de Maschke se aplica a campos cuya característica no divide el orden del grupo. Por ello, es conveniente trabajar sobre un campo de característica cero, ya que esto implica automáticamente que la característica no divide al orden de cualquier grupo finito.

1.6 Módulos de Specht

1.6.1 Definición. Una **partición** de un entero positivo n es una sucesión de enteros positivos $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ cuya suma es n y satisface que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$.

Escribimos $\lambda \vdash n$ para denotar que λ es una partición de n y decimos que la longitud $l(\lambda)$ es k . También escribiremos $\lambda = (\lambda_1^{m_1}, \lambda_2^{m_2}, \dots, \lambda_k^{m_k})$ si λ tiene m_i partes de tamaño λ_i para cada i .

1.6.2 Ejemplo. Para $n = 5$ tenemos las siguientes siete particiones:

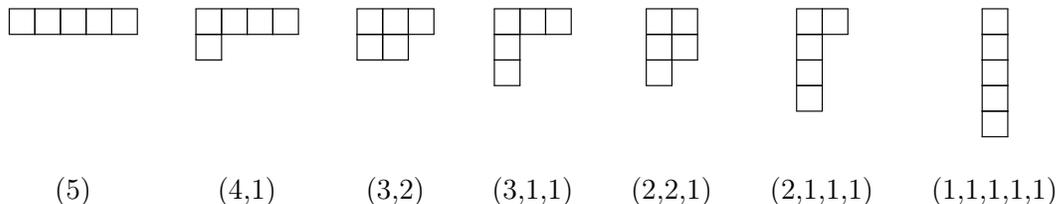
$$(5), (4, 1), (3, 1, 1), (3, 2), (2, 1, 1, 1), (2, 2, 1), (1, 1, 1, 1, 1).$$

Las cuales podemos reescribir de la siguiente manera:

$$(5), (4, 1), (3, 1^2), (3, 2), (2, 1^3), (2^2, 1), (1^5).$$

1.6.3 Definición. Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ una partición de n , entonces se define el **diagrama de Young** de λ como n cajas colocadas en k renglones alineados a la izquierda, donde el i -ésimo renglón tiene λ_i cajas.

1.6.4 Ejemplo. Los diagramas de Young correspondientes a las particiones de $n = 5$ son:



1.6.5 Definición. Un λ -tablero de Young T_λ es el relleno de un diagrama de Young correspondiente a $\lambda \vdash n$, con los enteros positivos distintos del 1 al n .

1.6.6 Definición. Sea $\lambda \vdash n$. Se define \mathcal{T}_λ como el conjunto de λ -tableros de Young.

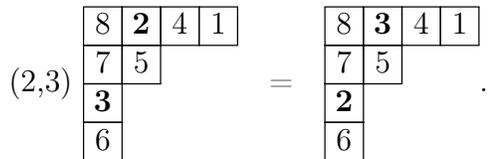
1.6.7 Definición. Sea $\lambda \vdash n$. Se define M^λ como el espacio vectorial sobre \mathbb{C} generado por elementos de \mathcal{T}_λ , es decir,

$$M^\lambda = \langle T \mid T \in \mathcal{T}_\lambda \rangle.$$

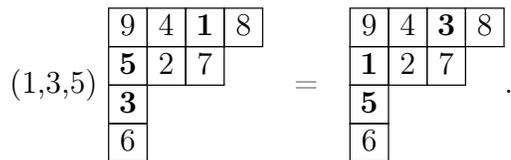
1.6.8 Ejemplo. Sea $(2, 1) \vdash 3$. Un posible λ -tablero de Young es $T_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Por otro lado, $\mathcal{T}_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, y $M^\lambda = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

El grupo simétrico S_n actúa (por la izquierda) sobre el conjunto de λ -tableros, permutando entradas de los tableros de Young. En este caso, para la transposición $\sigma = (i, j) \in S_n$ y $T \in \mathcal{T}_\lambda$, el tablero σT se obtiene de T al intercambiar las entradas i y j .

1.6.9 Ejemplo. Sea $(4, 2, 1, 1) \vdash 8$ y $\sigma = (2, 3) \in S_8$, entonces:



1.6.10 Ejemplo. Sea $(4, 3, 1, 1) \vdash 9$ y $\sigma = (1, 3, 5) \in S_9$, entonces:



1.6.11 Ejemplo. Sea $(3, 2, 1) \vdash 6$ y $\sigma \in S_6$, entonces:

$$\sigma \begin{array}{|c|c|c|} \hline i & j & k \\ \hline l & m & \\ \hline n & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \sigma(i) & \sigma(j) & \sigma(k) \\ \hline \sigma(l) & \sigma(m) & \\ \hline \sigma(n) & & \\ \hline \end{array} .$$

La representación que hemos descrito es la **representación regular izquierda** de S_n . También se puede dejar que S_n actúe por la derecha como la **representación regular derecha**. En este caso, para la transposición $\sigma = (i, j) \in S_n$ y T un λ -tablero, el tablero $T\sigma$ se obtiene de T intercambiando los contenidos de las celdas i -ésima y j -ésima, considerando que las celdas se numeran de izquierda a derecha del primer al último renglón. Note que hacer actuar σ por la derecha, es equivalente a reemplazar la entrada a_i por la entrada $a_{\sigma^{-1}(i)}$ en el lugar i .

Una prueba de que efectivamente $T\sigma$ es una acción por la derecha es la siguiente:

Sean $\sigma, \alpha \in S_n$ y $T \in T_\lambda$. Vamos a probar que $(T\sigma)\alpha = T(\sigma\alpha)$.

Consideremos la celda i cuya entrada es a_i . Primero, al actuar σ en T por la derecha, la entrada a_i es reemplazada por la entrada $a_{\sigma^{-1}(i)}$. Así, en la celda i ahora está la entrada $a_{\sigma^{-1}(i)}$. Luego, al aplicar α por la derecha en $T\sigma$, la entrada $a_{\sigma^{-1}(i)}$ es reemplazada por la entrada $a_{\alpha^{-1}\sigma^{-1}(i)} = a_{(\sigma\alpha)^{-1}(i)}$.

Por otro lado, en el caso $T(\sigma\alpha)$ tenemos que $\sigma\alpha$ actúa por la derecha en T moviendo a la celda i la entrada $a_{(\sigma\alpha)^{-1}(i)}$. Por tanto, $(T\sigma)\alpha = T(\sigma\alpha)$.

1.6.12 Ejemplo. Sea $(4, 2, 1, 1) \vdash 8$ y $\sigma = (2, 3) \in S_8$, entonces:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 8 & 2 & 4 & 1 \\ \hline 7 & 5 & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array} \quad (2,3) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 8 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 7 & 5 & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array} .$$

1.6.13 Ejemplo. Sea $(4, 3, 1, 1) \vdash 9$ y $\sigma = (1, 3, 5) \in S_9$, entonces:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 9 & 4 & 1 & 8 \\ \hline 5 & 2 & 7 & \\ \hline 3 & & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array} \quad (1,3,5) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 9 & 8 \\ \hline 1 & 2 & 7 & \\ \hline 3 & & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array} .$$

1.6.14 Ejemplo. Sea $(3, 2, 1) \vdash 6$ y $\sigma \in S_6$, entonces:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_4 & a_5 & \\ \hline a_6 & & \\ \hline \end{array} \sigma = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{\sigma^{-1}(1)} & a_{\sigma^{-1}(2)} & a_{\sigma^{-1}(3)} \\ \hline a_{\sigma^{-1}(4)} & a_{\sigma^{-1}(5)} & \\ \hline a_{\sigma^{-1}(6)} & & \\ \hline \end{array} .$$

1.6.15 Proposición. La acción izquierda y derecha de S_n en \mathcal{T}_λ conmutan.

Demostración. Sean $\sigma, \alpha \in S_n$ y $T \in \mathcal{T}_\lambda$. Vamos a probar que $(\sigma T)\alpha = \sigma(T\alpha)$.

Supongamos que en la celda i de T está la entrada j . Entonces, al actuar σ por la izquierda en T se tiene que en la celda i ahora está la entrada $\sigma(j)$. Luego, al aplicar α por la derecha en σT , obtenemos que en la celda $\alpha(i)$ está la entrada $\sigma(j)$.

Por otro lado, aplicando primero α en T por la derecha se tiene que en la celda $\alpha(i)$ de $T\alpha$ está la entrada j . Posteriormente, aplicando σ por la izquierda en $T\alpha$ obtenemos que en la celda $\alpha(i)$ está la entrada $\sigma(j)$. \square

1.6.16 Definición. Diremos que dos tableros en \mathcal{T}_λ son **equivalentes por renglones** si tienen la misma sucesión de conjuntos de renglones. Análogamente dos tableros en \mathcal{T}_λ son **equivalentes por columnas** si tienen la misma sucesión de conjuntos de columnas.

1.6.17 Ejemplo. Los siguientes tableros son equivalentes por renglones:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 1 \\ \hline 7 & 5 & \\ \hline 8 & 3 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 5 & 7 & \\ \hline 3 & 8 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} .$$

Sea $\lambda \vdash n$ y $T \in \mathcal{T}_\lambda$. El **estabilizador de renglón**, denotado como R_λ , se define como el subgrupo:

$$R_\lambda = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ fija cada renglón de } T \text{ por acción derecha}\}.$$

De manera similar, el **estabilizador de columna**, denotado con C_λ , se define como el subgrupo:

$$C_\lambda = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ fija cada columna de } T \text{ por acción derecha}\}.$$

1.6.18 Definición. Para cada $T \in \mathcal{T}_\lambda$, se define el **politabloide** asociado a λ como:

$$e_T = \sum_{\alpha \in R_\lambda} \sum_{\beta \in C_\lambda} \text{sgn}(\beta) T\alpha\beta.$$

Note que α y β realizan acción derecha.

1.6.19 Ejemplo. Si tenemos $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ entonces,

$$R_\lambda = \langle (1, 2) \rangle = \{(), (1, 2)\},$$

$$C_\lambda = \langle (1, 3) \rangle = \{(), (1, 3)\}.$$

Por lo que que:

$$\begin{aligned} e_T &= \left(\text{sgn}(\emptyset) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}(\emptyset) + \text{sgn}((1, 3)) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}(\emptyset)(1, 3) \right) \\ &\quad + \left(\text{sgn}(\emptyset) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}(1, 2)(\emptyset) + \text{sgn}((1, 3)) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}(1, 2)(1, 3) \right) \\ &= \left(\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}(\emptyset) \right) (\emptyset) - \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}(\emptyset) \right) (1, 3) \right) + \left(\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}(1, 2) \right) (\emptyset) - \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}(1, 2) \right) (1, 3) \right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}(\emptyset) - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix}(1, 3) \right) + \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 \end{bmatrix}(\emptyset) - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 \end{bmatrix}(1, 3) \right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Dado que la acción izquierda y derecha de S_n en \mathcal{T}_λ conmutan (proposición 1.6.15) tenemos que:

$$\pi e_T = e_{\pi T},$$

para todo $T \in \mathcal{T}_\lambda$ y $\pi \in S_n$.

La justificación de esta afirmación se presenta a continuación:

$$\begin{aligned} \pi e_T &= \pi \left(\sum_{\alpha \in R_\lambda} \sum_{\beta \in C_\lambda} \text{sgn}(\beta) T\alpha\beta \right) \\ &= \sum_{\alpha \in R_\lambda} \sum_{\beta \in C_\lambda} \text{sgn}(\beta) \pi(T\alpha\beta) \\ &= \sum_{\alpha \in R_\lambda} \sum_{\beta \in C_\lambda} \text{sgn}(\beta) (\pi T)\alpha\beta = e_{\pi T}. \end{aligned}$$

1.6.20 Definición. El módulo de Specht S^λ es el subespacio de M^λ (definición 1.6.7) dado por:

$$S^\lambda = \langle e_T \mid T \in \mathcal{T}_\lambda \rangle.$$

De la igualdad $\pi e_T = e_{\pi T}$ se deduce que S^λ es un S_n -submódulo de M^λ (bajo la acción izquierda).

El teorema que sigue es importante, pues en general se sabe (Sagan, 2001), que para un grupo finito se tiene que la cantidad de módulos irreducibles es la misma que la de clases de conjugación de sus elementos. Sin embargo, no se conoce un algoritmo que construya una representación irreducible a partir de cada clase de conjugación y que se aplique a todo grupo finito, pero para el grupo simétrico si se conoce y es el siguiente teorema.

1.6.21 Teorema. Los módulos de Specht S^λ para todo $\lambda \vdash n$ forman una lista completa de S_n -módulos irreducibles.

Una prueba para el teorema 1.6.21 la podemos encontrar en (Sagan, 2001).

Ahora daremos una caracterización del módulo de Specht como cociente de M^λ .

1.6.22 Definición. Las **relaciones de renglón** se definen para toda $T \in \mathcal{T}_\lambda$ y $\sigma \in R_\lambda$ por:

$$r_\sigma(T) = T\sigma - T.$$

1.6.23 Ejemplo. Sea $\lambda = (2, 1, 1)$ y $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \in \mathcal{T}_\lambda$ (definición 1.6.5). El estabilizador de renglón R_λ contiene permutaciones que mantienen fijos los renglones de T (actuando por la derecha), como por ejemplo $\sigma = (1, 2)$.

Entonces para este T y σ la relación de renglón $r_\sigma(T)$ es:

$$r_\sigma(T) = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} (1, 2) - \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}.$$

1.6.24 Definición. Sea $\lambda \vdash n$. Para todo i, j tal que $1 \leq j \leq \lambda_i$ e $i < n$, se define $C_{i,j}(\lambda)$ como el conjunto de celdas en las columnas j hasta λ_i del renglón i y en las columnas 1 hasta j del renglón $i + 1$. Definimos $G_{i,j}(\lambda)$ como el subgrupo de S_n que consiste en todas las permutaciones $\sigma \in S_n$ que fijan las entradas que no están en $C_{i,j}(\lambda)$, bajo la acción derecha sobre todo λ -tablero de Young. Las **relaciones de Garnir** se definen para todo i, j tal que $1 \leq j \leq \lambda_i$ y para todo $T \in \mathcal{T}_\lambda$ por:

$$g_{i,j}(T) = \sum_{\sigma \in G_{i,j}(\lambda)} T\sigma.$$

1.6.25 Ejemplo. Sea $\lambda = (2, 2, 1)$ y $T = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 5 & 4 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$.

Estudiemos el caso $i = 2$ y $j = 1$. Entonces, $C_{2,1}(\lambda)$ es el conjunto de celdas desde la columna $j = 1$ hasta $\lambda_2 = 2$ del renglón $i = 2$, es decir, las celdas 3 y 4 con entradas 5 y 4 respectivamente, y desde la columna 1 hasta la columna $j = 1$ del renglón $i + 1 = 3$, es decir la celda 5 que contienen la entrada 3.

Luego, las permutaciones $\sigma \in S_5$ tales que σ fija por acción derecha las entradas de T que no están en $C_{2,1}(\lambda)$ son aquellas que dejan inalteradas las entradas que no están en las celdas de $C_{2,1}(\lambda)$, es decir, las celdas 1 y 2, de modo que $G_{2,1}(\lambda)$ consiste de las permutaciones de las celdas 3, 4 y 5, por lo que:

$$G_{2,1}(\lambda) = \{(), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (3, 4, 5), (3, 5, 4)\}.$$

Por tanto, la relación de Garnir de T para $i = 2$ y $j = 1$ es:

$$\begin{aligned} g_{2,1}(T) &= \sum_{\sigma \in G_{2,1}(\lambda)} T\sigma \\ &= \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 5 & 4 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} () + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 5 & 4 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} (3, 4) + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 5 & 4 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} (3, 5) + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 5 & 4 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} (4, 5) + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 5 & 4 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} (3, 4, 5) + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 5 & 4 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} (3, 5, 4) \\ &= \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 5 & 4 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 5 & 3 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array}. \end{aligned}$$

Nuevamente, dado que la acción izquierda y derecha de S_n en T_λ conmutan, tenemos:

$$\pi r_\sigma(T) = r_\sigma(\pi T),$$

$$\pi g_{i,j}(T) = g_{i,j}(\pi T),$$

para todo $\pi \in S_n$. En consecuencia, el subespacio U^λ de M^λ generado por las relaciones de renglón $r_\sigma(T) = T\sigma - T$ y las relaciones de Garnir $g_{i,j}(T) = \sum_{\sigma \in G_{i,j}(\lambda)} T\sigma$ es un

S_n -submódulo de M^λ .

El teorema siguiente aparece en (Wachs, 2007). Recordemos (definición 1.6.7), que M^λ es el S_n -módulo generado por los elementos de \mathcal{T}_λ y S^λ es el submódulo de M^λ generado por todos los politabloides e_T asociados a λ (definición 1.6.20).

1.6.26 Teorema. Para todo $\lambda \vdash n$,

$$S^\lambda \cong_{S_n} M^\lambda / U^\lambda.$$

Ahora, podemos ver el módulo de Specht S^λ como el módulo generado por tableros de una partición λ sujeto a las relaciones de renglón y de Garnir.

1.6.27 Definición. Un tablero de Young es **estándar** si las entradas aumentan a lo largo de cada renglón y columna.

1.6.28 Ejemplo. El tablero de Young de la izquierda no es estándar, pues en el primer renglón $8 > 2$ y además $8 > 7$, por lo que las entradas no aumentan ni en renglón ni en columna. Por otro lado, el tablero de Young de la derecha sí lo es.

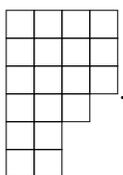
8	2	4	1
7	5		
9	3		
6			

1	2	4	7
3	6		
5	8		
9			

1.6.29 Definición. Se dice que un politabloide e_T es **estándar** si T es un tablero de Young estándar.

1.6.30 Definición. Dado un diagrama de Young para una partición $\lambda \vdash n$, se define el **gancho** asociado a una celda x como el conjunto de celdas que incluye la celda x misma, así como todas las celdas a la derecha de x en el mismo renglón y todas las celdas que están debajo de x en la misma columna. Denotaremos como h_x al número de celdas en el gancho asociado a la celda x .

1.6.31 Ejemplo. Sea $\lambda = (4, 4, 4, 3, 2, 2)$. Entonces, el diagrama de Young para esta partición es:



1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	
16	17		
18	19		

Procedamos a señalar el número de celda en el diagrama:

Sea x la celda 6, entonces, el gancho asociado a esta celda contiene a la celda 6 misma, las celdas 7 y 8 que están a la derecha de esta y las celdas 10, 14, 17 y 19 que

están debajo de la celda 6.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	
16	17		
18	19		

Por tanto, el número de celdas que conforman el gancho asociado a $x = 6$ es 7, de modo que $h_6 = 7$.

Los siguientes teoremas aparecen en (Sagan, 2001) y nos proporcionan la dimensión de S^λ en términos de λ .

1.6.32 Teorema. Para cualquier partición λ , $\dim S^\lambda = f^\lambda$, donde f^λ es el número de λ -tableros estándar.

1.6.33 Teorema (Fórmula de la longitud del gancho, (Frame et al., 1954)). Si $\lambda \vdash n$,

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{x \in \lambda} h_x},$$

donde el denominador es el producto de las longitudes de los ganchos h_x sobre todas las celdas x del diagrama de Young de λ .

1.6.34 Ejemplo. Sea $\lambda = (3, 2)$. Entonces, el diagrama de Young para esta partición es

. Luego, los λ -tableros de Young estándar son:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}.$$

De modo que, $\dim S^{(3,2)} = f^{(3,2)} = 5$. Ahora, en el diagrama de Young de λ señalaremos la celda x y el número de celdas en el gancho asociado a la celda x , denotado por h_x , solo para ilustrar la idea:

4^1	3^2	1^3
2^4	1^5	

Por tanto,

$$f^{(3,2)} = \frac{5!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 5.$$

HOMOLOGÍA

En este capítulo, abordaremos las definiciones y propiedades básicas de complejos simpliciales abstractos, complejos simpliciales geométricos y conjuntos parcialmente ordenados. Estos conceptos se pueden estudiar de manera más amplia en (Munkres, 1984), (Graham et al., 1995) y (Kozlov, 2008). Posteriormente, exploraremos el concepto de homología y sus propiedades asociadas a los complejos simpliciales y a los conjuntos parcialmente ordenados.

2.1 Complejos simpliciales abstractos

2.1.1 Definición. Sea Δ una colección finita de conjuntos, decimos que Δ es un **complejo simplicial abstracto** si es cerrado bajo inclusión, es decir si $A \in \Delta$ y $B \subseteq A$, entonces $B \in \Delta$.

2.1.2 Definición. Dado un complejo simplicial abstracto Δ , a cada elemento $A \in \Delta$ se le llama **simplejo**.

2.1.3 Definición. Sea $A \in \Delta$ un simplejo. Si A tiene $p + 1$ elementos, decimos que A es un **p -simplejo** y su **dimensión** es p .

La **dimensión** de Δ es el máximo de las dimensiones de sus simplejos.

2.1.4 Definición. Sea $A \in \Delta$ un simplejo. Los subconjuntos de A se llaman **caras** de A .

2.1.5 Definición. Si v es tal que $\{v\} \in \Delta$, entonces v se llama **vértice** de Δ . Denotamos el conjunto de todos los vértices de Δ como $V(\Delta)$.

Por convención se considera que no hay diferencia entre un vértice $v \in V$ y el 0-simplejo $\{v\}$ de Δ .

2.1.6 Ejemplo. La colección de conjuntos de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ de hasta dos elementos es un complejo simplicial abstracto:

$$\Delta = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}.$$

Este conjunto cumple con la condición de ser cerrado bajo inclusión, ya que si un subconjunto de $\{1, 2, 3\}$ está en Δ , entonces todos sus subconjuntos también lo están. Por ejemplo, $\{1, 2\}$ está en Δ , y sus subconjuntos \emptyset , $\{1\}$ y $\{2\}$ también están en Δ . Note que en este ejemplo los p -simplejos son:

- (-1)-simplejos: \emptyset .
- 0-simplejos: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$.
- 1-simplejos: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$.
- 2-simplejos: $\{1, 2, 3\}$.

2.2 Complejos simpliciales geométricos

2.2.1 Definición. Sea $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$. Diremos que σ es **afinmente independiente** si la única solución de la ecuación:

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0,$$

donde $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ son coeficientes que suman 0, es aquella en la que todos los coeficientes son cero ($\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$).

En términos generales, un conjunto x_0, \dots, x_n es afinmente independiente si y solo si los vectores $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_n - x_0$ son linealmente independientes en el contexto del álgebra lineal.

2.2.2 Definición. Sea $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ afinmente independiente, con $n \leq N$, el **simplejo geométrico** generado por σ es:

$$|\sigma| = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Se puede demostrar que los números λ_i están determinados únicamente por:

$$x = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i \in |\sigma|,$$

y se llaman **coordenadas baricéntricas** del punto x de σ con respecto a x_0, x_1, \dots, x_n .

2.2.3 Ejemplo. En la figura 5 podemos observar que los 0-simplejos geométricos son puntos. El 1-simplejo generado por x_0 y x_1 consiste de todos los puntos de la forma

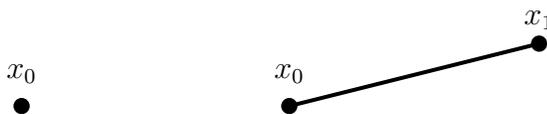


Figura 5: 0-simplejo y 1-simplejo geométrico.

$x = \lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1$ con $0 \leq \lambda \leq 1$, es decir, de los puntos a lo largo del segmento de línea que une a x_0 y x_1 . De este modo los 1-simplejos geométricos son segmentos.

2.2.4 Definición. A los puntos x_0, x_1, \dots, x_n que definen un n -simplejo geométrico σ se les llama sus **vértices**. Escribiremos $\sigma = \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$.

2.2.5 Definición. Si σ es un simplejo geométrico generado por un conjunto de vértices $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ y $\tau \subseteq \sigma$ también es un simplejo geométrico generado por un subconjunto de $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, decimos que τ es **cara** de σ .

2.2.6 Definición. Un **complejo simplicial geométrico** Δ es una colección finita de simplejos geométricos tal que:

1. Si $\sigma \in \Delta$ y τ es cara de σ , entonces $\tau \in \Delta$. Es decir, todas las caras de un simplejo en Δ también están en Δ .
2. La intersección de cualesquiera dos simplejos geométricos $\sigma, \tau \in \Delta$ es una cara de cada uno de ellos.

2.2.7 Ejemplo. En la figura 6 tenemos a la izquierda un complejo simplicial geométrico. Por otro lado, a la derecha tenemos dos simplejos cuya intersección no es una cara de ninguno de ellos, por lo que la unión de tales dos simplejos junto con todas sus caras no es un complejo simplicial geométrico.

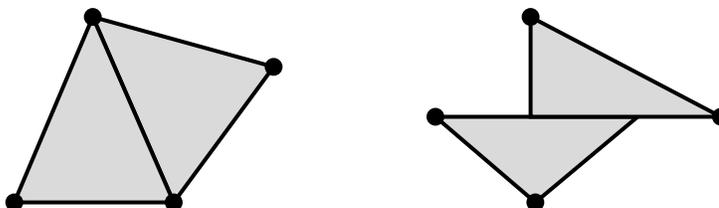


Figura 6: Complejo y no complejo simplicial geométrico.

2.2.8 Definición. Dado un complejo simplicial geométrico Δ el **esquema de vértices** de Δ , se define como el conjunto de conjuntos de vértices de todas las caras de los simplejos geométricos de Δ .

Notemos que el esquema de vértices es un complejo simplicial abstracto.

2.2.9 Definición. Sea Δ un complejo simplicial geométrico formado por simplejos geométricos contenidos en \mathbb{R}^n para alguna n . La **realización geométrica** de Δ es $|\Delta| = \cup_{\sigma \in \Delta} \sigma$, el cual se considera un espacio topológico como subespacio de \mathbb{R}^n .

2.2.10 Definición. Si Δ es un complejo simplicial abstracto existe un complejo simplicial geométrico K_Δ tal que su esquema de vértices es Δ . La realización geométrica de Δ se define como la realización geométrica de K_Δ y se denota como $|\Delta|$.

Si Δ es un complejo simplicial abstracto se puede demostrar que su realización geométrica es única salvo homeomorfismo, es decir, no depende del K_Δ escogido.

2.2.11 Ejemplo. Consideremos el siguiente complejo simplicial abstracto Δ con vértices $\{v_1, v_2, v_3\}$ y las siguientes caras:

$$\Delta = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3\}\}.$$

La realización geométrica $|\Delta|$ se construye asignando a cada vértice en Δ un vértice correspondiente en el espacio euclidiano \mathbb{R}^N . Luego, cada conjunto de vértices en Δ se representa como un simplejo geométrico en $|\Delta|$.

En esta realización geométrica, como se puede observar en la figura 7, cada vértice o 0-simplejo en el complejo simplicial abstracto corresponde a un vértice en el espacio euclidiano \mathbb{R}^2 , cada 1-simplejo en el complejo simplicial abstracto corresponde a una arista conectando los vértices v_i y v_j , con $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e $i \neq j$, y cada 2-simplejo en el complejo simplicial abstracto corresponde a un triángulo con vértices v_1, v_2, v_3 .

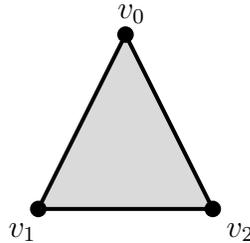


Figura 7: Realización geométrica del complejo simplicial abstracto $\Delta = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3\}\}$.

Esta representación geométrica captura la estructura del complejo simplicial abstracto Δ en términos de vértices, aristas y caras, asignando coordenadas en el espacio euclidiano de manera que se respeten las relaciones de inclusión de caras.

2.2.12 Definición. $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una **transformación afín** si existen $p \in \mathbb{R}^n$ y una transformación lineal invertible $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que:

$$T(x) = Qx + p.$$

2.2.13 Proposición.

1. Si $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ son afínmente independientes y T es una transformación afín, entonces $T(v_1), \dots, T(v_r)$ son afínmente independientes.
2. Si $v_0, v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ son afínmente independientes y $w_0, w_1, \dots, w_r \in \mathbb{R}^n$ son afínmente independientes, entonces existe una transformación afín tal que:

$$T(v_i) = w_i.$$

Demostración.

1. Supongamos que $T(x) = Qx + p$ para $p \in \mathbb{R}^n$ y Q una transformación lineal invertible. Supongamos que $\lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_r T(v_r) = 0$, con $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = 0$. Queremos demostrar que $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$.

Se tiene que, $\lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_r T(v_r) = \lambda_1(Qv_1 + p) + \dots + \lambda_r(Qv_r + p) = 0$. Por lo que, $Q(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r) + (\lambda_1 + \dots + \lambda_r)p = 0$. Como $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = 0$, entonces, $Q(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r) = 0$. Luego, Q es no singular, entonces, $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$. Ahora, puesto que $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ son afínmente independientes, se tiene que $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ como se quería.

2. Como $v_0, v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ y $w_0, w_1, \dots, w_r \in \mathbb{R}^n$ son afínmente independientes, tenemos que $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_r - v_0$ son linealmente independientes y también $w_1 - w_0, w_2 - w_0, \dots, w_r - w_0$ son linealmente independientes.

Luego, por álgebra lineal, existe una transformación lineal invertible $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

$$Q(v_i - v_0) = w_i - w_0,$$

para $i = 1, 2, \dots, r$. De donde se tiene que $Q(v_i) - Q(v_0) = w_i - w_0$, lo cual implica que $Q(v_i) - Q(v_0) + w_0 = w_i$, para $i = 1, 2, \dots, r$.

Entonces, sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $T(x) = Q(x) + p$ con $p = -Q(v_0) + w_0$, se tiene que T es una transformación afín tal que $T(v_i) = w_i$, para $i = 1, 2, \dots, r$.

□

2.2.14 Proposición. Sean $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^N$ afinmente independientes, con $n \leq N$, y sean $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{R}^N$, elementos de la base canónica. Si $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es la transformación afín que lleva a_0 a 0 y a_i a e_i , para $i = 1, 2, \dots, n$, entonces T lleva el punto:

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i,$$

al punto $(t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0)$, donde t_1, \dots, t_n son coeficientes que suman 1.

Demostración. De la proposición 2.2.13 tenemos que existe una transformación afín $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $T(a_i) = e_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$ y $T(a_0) = 0$.

Entonces:

$$\begin{aligned} T(x) &= T\left(\sum_{i=0}^n t_i a_i\right) = \sum_{i=0}^n t_i T(a_i) \\ &= 0 + \sum_{i=1}^n t_i e_i \\ &= t_1 e_1 + t_2 e_2 + \dots + t_n e_n \\ &= t_1(1, 0, \dots, 0) + t_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + t_n(0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \\ &= \underbrace{(t_1, t_2, \dots, t_n, 0, 0, \dots, 0)}_N. \end{aligned}$$

□

2.2.15 Proposición. Una transformación afín $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua.

Demostración. Por definición de transformación afín tenemos que $T(x) = Qx + p$ para alguna transformación lineal invertible $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $p \in \mathbb{R}^n$.

Luego $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua pues $\|Qx - Qy\| \leq \|Q\| \|x - y\|$ y como $\|Q\| \neq 0$, entonces, tomando $\delta = \frac{\epsilon}{\|Q\|}$, dado $\epsilon > 0$ se tiene que Q satisface la definición de continuidad. Por otro lado, la traslación es una función continua pues note que $\|x_1 + p - (x_2 + p)\| = \|x_1 - x_2\|$, por lo que considerando $\delta = \epsilon$ se demuestra la continuidad.

Por tanto, como una transformación afín es composición de una función invertible y una traslación y ambas son continuas se tiene que T es continua. □

2.2.16 Proposición. Sea $\sigma = \{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$, con $n \leq N$, un conjunto afínmente independiente. Sea $x \in |\sigma|$. Sean $\{t_i(x)\}$ las coordenadas baricéntricas de x . Entonces, las coordenadas baricéntricas $t_i(x)$ de x con respecto a a_0, a_1, \dots, a_n son funciones continuas de x .

Demostración. Sea $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ la transformación afín que manda a_0 a 0 y a_i a e_i para $i = 1, \dots, n$. Entonces, T envía el punto $x = \sum_{i=0}^n t_i a_i$ al punto $(t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0)$ por la proposición 2.2.14, y T es continua por la proposición 2.2.15. Entonces, para $i > 0$ se tiene que la función t_i es la composición de T con la i -ésima proyección de \mathbb{R}^N en \mathbb{R} , por lo tanto t_i es continua. Pero $t_0 = 1 - t_1 - t_2 - \dots - t_n$, por lo cual t_0 también es continua. \square

2.3 Conjuntos parcialmente ordenados (copos)

2.3.1 Definición. Un **copo** (abreviatura de **conjunto parcialmente ordenado**), o *poset* por su abreviatura en inglés, es un conjunto P junto con una relación binaria \leq que satisface los siguientes axiomas para todo $x, y, z \in P$:

1. Es reflexiva: $x \leq x$.
2. Es antisimétrica: Si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$.
3. Es transitiva: Si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

Además, los elementos x y y se dicen **comparables** si $x \leq y$ o $y \leq x$, mientras que se dicen **incomparables** si no son comparables.

2.3.2 Definición. Un copo (P, \leq) donde cualquier par de elementos $x, y \in P$ son comparables se dice que está **totalmente ordenado**.

En esta tesis se supondrá implícitamente que todos los copos son finitos.

2.3.3 Definición. Dado un copo (P, \leq) , un subconjunto Q de P se llama **subconjunto parcialmente ordenado (subcopo)** si, para cualquier par de elementos $x, y \in Q$, la relación de orden \leq en P se mantiene en Q . Esto significa que si $x, y \in Q$, entonces $x \leq y$ en Q si y solo si $x \leq y$ en P .

Existen subcopos importantes, como los subintervalos, que definimos a continuación.

2.3.4 Definición. Dado un conjunto parcialmente ordenado (P, \leq) , para $x \leq y$ en P , el intervalo cerrado entre x y y , denotado como $[x, y]$, está definido como:

$$[x, y] = \{z \in P \mid x \leq z \leq y\}.$$

Notemos que como $[x, y] \subseteq P$, se tiene que $[x, y]$ es finito.

Análogamente el intervalo abierto se define como:

$$(x, y) = \{z \in P \mid x < z < y\}.$$

Los intervalos semiabiertos $(x, y]$ y $[x, y)$ se definen de manera similar.

2.3.5 Definición. Una m -cadena de un conjunto parcialmente ordenado P es un subconjunto totalmente ordenado $c = \{x_1 < x_2 < \dots < x_{m+1}\}$ de P .

También diremos que la longitud $l(c)$ de c es m y se considerará que la cadena vacía es una (-1) -cadena. La longitud $l(P)$ de P se define como:

$$l(P) = \text{máx}\{l(c) \mid c \text{ es una cadena de } P\}.$$

2.3.6 Definición. Si un copo P tiene un elemento mínimo, es habitual denotarlo con $\hat{0}$ y referirse a él como el elemento inferior. De manera similar, el elemento máximo, si existe, se denota como $\hat{1}$ y se denomina elemento superior.

2.3.7 Definición. Dado un copo (P, \leq) , el **complejo simplicial asociado** $\Delta(P)$, se construye de la siguiente manera:

- Los vértices del complejo $\Delta(P)$ son los elementos de P .
- Los m -simplejos son las m -cadenas.

Es decir, cada simplejo en el complejo corresponde a una cadena de elementos de P ordenados por la relación de orden parcial \leq . Además, si τ es una subcadena de una cadena σ entonces el simplejo correspondiente a τ está contenido en el simplejo correspondiente a σ .

2.3.8 Definición. Si P es un conjunto parcialmente ordenado, denotamos a $\Delta(P)$ como $|P|$ y se llama la **realización geométrica de P** .

Por medio de $|P|$ (definición 2.2.9) se le asocian conceptos topológicos al copo P . Por ejemplo, se dice que P es contraíble si $|P|$ lo es y que dos copos P, Q son homotópicos si $|P|, |Q|$ lo son.

2.3.9 Definición. Sean P y Q copos, definimos un **morfismo de copos** como una función $f: P \rightarrow Q$ tal que si $x, y \in P$ con $x \leq y$ entonces $f(x) \leq f(y)$.

Un morfismo de copos $f: P \rightarrow Q$ induce una función continua $|f|: |P| \rightarrow |Q|$.

2.3.10 Definición. Si f, g son morfismos de copos P, Q , diremos que son homotópicos si $|f|$ y $|g|$ lo son como funciones de $|P|$ en $|Q|$.

Así como asociamos un complejo simplicial a un copo, podemos asociar un conjunto parcialmente ordenado a un complejo simplicial de la siguiente manera:

2.3.11 Definición. Dado un complejo simplicial Δ , abstracto o geométrico, el copo **asociado** $P(\Delta)$ se define asignando cada simplejo no vacío en Δ como un elemento en $P(\Delta)$ y decimos que $\tau \leq \sigma$ si y solo si τ es un subconjunto de σ .

Un conjunto parcialmente ordenado no solo puede estar asociado a un complejo simplicial, sino también a una gráfica mediante la siguiente definición.

2.3.12 Definición. Dada la relación de orden en un copo P , podemos construir una **gráfica de comparabilidad** $G(P)$ en donde cada vértice P se representa como un vértice en la gráfica $G(P)$ y si dos elementos a y b son comparables ($a \leq b$ o $b \leq a$), se forma una arista del vértice a al vértice b en la gráfica $G(P)$.

2.3.13 Definición. La **parte propia** de un conjunto parcialmente ordenado P es:

$$\bar{P} = P - \{x \in P \mid x = \hat{0} \text{ o } x = \hat{1}\},$$

donde $\hat{0}$ es el mínimo y $\hat{1}$ es el máximo de P , si existen.

2.3.14 Definición. Sea G un grupo. Un **G -copo** es un copo P junto con una acción de G en P tal que, para todo $g \in G$, la acción de g en P preserva la relación de orden, es decir, si $x \leq y$ en P , entonces $gx \leq gy$ en P .

Si P es un G -copo, entonces $|P|$ es un G -espacio topológico.

La definición de un G -copo nos permite enunciar el siguiente teorema, que será relevante en nuestra contribución. Este teorema proporciona una condición suficiente para que dos funciones equivariantes sean G -homotópicas.

2.3.15 Teorema. (Thévenaz & Webb, 1991). Sea X un G -copo y sean $\phi, \psi: X \rightarrow X$ dos funciones de copos equivariantes tales que $\phi(x) \geq \psi(x)$ para todo $x \in X$. Entonces ϕ y ψ son G -homotópicas.

2.3.16 Definición. Si P y Q son copos, se define la **junta** $P \star Q$ como el copo cuyo conjunto de elementos es $P \cup Q$ y el orden se define como:

1. $x \leq y$ si $x, y \in P$ y $x \leq y$ en P .
2. $x \leq y$ si $x, y \in Q$ y $x \leq y$ en Q .
3. $x \leq y$ si $x \in P$ y $y \in Q$.

2.4 Homología de copos

2.4.1 Definición. Sea P un copo, definimos el j -ésimo **espacio de cadenas** como:

$$C_j(P) = \mathbb{C}\text{-espacio vectorial cuya base son } j\text{-cadenas de } P.$$

Por convención la cadena vacía es una (-1) -cadena por lo cual $C_{-1}(P)$ es un espacio de dimensión uno, esto es $C_{-1}(P) \cong \mathbb{C}$. Además $C_j(P) = 0$ si $j \leq -2$.

2.4.2 Definición. Sea P un copo, el j -ésimo **operador frontera** está dado por

$$\partial_j(x_1 < \cdots < x_{j+1}) = \sum_{i=1}^{j+1} (-1)^i (x_1 < \cdots < \hat{x}_i < \cdots < x_{j+1}),$$

donde $\hat{}$ denota la eliminación.

Notemos que en el caso $j = 0$, se tiene que $\partial_0(x_1)$ es la cadena vacía, por lo cual se puede considerar como el generador de $C_{-1}(P)$.

2.4.3 Teorema. Sea P un copo, entonces $\partial_{j-1} \circ \partial_j = 0$ para toda j .

Demostración. Calculamos:

$$\begin{aligned} (\partial_{j-1} \circ \partial_j)(x_1 < \cdots < x_{j+1}) &= \partial_{j-1} \left(\sum_{i=1}^{j+1} (-1)^i (x_1 < \cdots < \hat{x}_i < \cdots < x_{j+1}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{j+1} (-1)^i \partial_{j-1}(x_1 < \cdots < \hat{x}_i < \cdots < x_{j+1}) \\ &= \sum_{1 \leq k < i \leq j+1} (-1)^i (-1)^k (x_1 < \cdots < \hat{x}_k < \cdots < \hat{x}_i < \cdots < x_{j+1}) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < k \leq j+1} (-1)^i (-1)^k (x_1 < \cdots < \hat{x}_i < \cdots < \hat{x}_k < \cdots < x_{j+1}). \end{aligned}$$

Notemos que las dos últimas sumas se cancelan al intercambiar i y k . Esto se debe a que al realizar esta permutación en la segunda suma, esta se convierte en el negativo de la primera. Por lo tanto, $\partial_{j-1} \circ \partial_j = 0$ para toda j . \square

En la sección 2.5, se encuentra un ejemplo práctico del cálculo de estos operadores en el ejemplo 2.5.10.

2.4.4 Definición. El núcleo del j -ésimo operador frontera ∂_j es llamado espacio de **ciclos** y se denota con $Z_j(P)$. El espacio de **fronteras** se define como la imagen de ∂_{j+1} y se denota con $B_j(P)$.

2.4.5 Definición. La **homología** del copo P en la dimensión $j \geq 0$ se define por

$$\tilde{H}_j(P) = Z_j(P)/B_j(P).$$

2.4.6 Definición. Sea P un copo y $j \geq 0$, $\delta^j: C_j(P) \rightarrow C_{j+1}(P)$, es el j -ésimo **operador cofrontera** y se define en generadores por medio de la siguiente ecuación:

$$\langle \delta^j(\alpha), \beta \rangle = \langle \alpha, \partial_{j+1}(\beta) \rangle,$$

donde $\alpha \in C_j(P)$, $\beta \in C_{j+1}(P)$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la forma bilineal donde las cadenas, es decir generadores de $C_j(P)$, son base ortonormal. Esto es equivalente a decir que:

$$\delta^j(x_1 < \cdots < x_j) = \sum_{i=1}^{j+2} (-1)^i \sum_{x \in (x_{i-1}, x_i)} (x_1 < \cdots < x_{i-1} < x < x_i < \cdots < x_j),$$

para todas las cadenas $x_1 < \cdots < x_j$, donde x_0 es el elemento más pequeño de P y x_{j+1} es el elemento más grande de P .

2.4.7 Teorema. Sea P un copo, entonces $\delta^j \circ \delta^{j-1} = 0$ para toda j .

Demostración. Sea $\alpha \in C_{j-1}$ y $\beta \in C_{j+1}$, entonces:

$$\langle \delta^j(\delta^{j-1}(\alpha)), \beta \rangle = \langle \delta^{j-1}(\alpha), \partial_{j+1}(\beta) \rangle = \langle \alpha, \partial_j(\partial_{j+1}(\beta)) \rangle = \langle \alpha, 0 \rangle = 0.$$

Por lo tanto, $\delta^j \circ \delta^{j-1} = 0$ para toda j . \square

2.4.8 Definición. El núcleo del j -ésimo operador cofrontera δ^j es llamado espacio de **cociclos** y se denota con $Z^j(P)$. El espacio de **cofronteras** se define como la imagen de δ^{j-1} y se denota con $B^j(P)$.

2.4.9 Definición. La **cohomología** del copo P en la dimensión $j \geq 0$ se define por

$$\tilde{H}^j(P) = Z^j(P)/B^j(P).$$

Se puede demostrar (Wachs, 2007), que para todo copo P y todo j se tiene que

$$\tilde{H}_j(P) \cong \tilde{H}^j(P).$$

2.5 La retícula booleana

2.5.1 Definición. Una *lattice*, o **retícula** en español, es un conjunto parcialmente ordenado (L, \leq) tal que para cada par de elementos $a, b \in L$ existe un supremo (denotado como $a \vee b$) y un ínfimo (denotado como $a \wedge b$) en L . Es decir, dados $a, b \in L$, existen $a \vee b$ y $a \wedge b$ en L tales que:

- $a \leq a \vee b$ y $b \leq a \vee b$.
- $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$.
- Si $c \in L$ y $c \leq a$ y $c \leq b$, entonces $c \leq a \wedge b$.
- Si $c \in L$ y $a \leq c$ y $b \leq c$, entonces $a \vee b \leq c$.

2.5.2 Definición. La **retícula Booleana** \mathcal{B}_n está formada por todos los subconjuntos del conjunto $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, ordenados por inclusión.

2.5.3 Ejemplo. Si $n = 4$ la retícula booleana \mathcal{B}_4 (ver figura 8), tiene los siguientes elementos:

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

La relación de orden que consideramos es la inclusión de conjuntos, es decir, para dos subconjuntos A y B , diremos que $A \leq B$ si $A \subseteq B$. Para demostrar que esta estructura es una retícula, tenemos que verificar que cumple con las dos condiciones necesarias, en este caso, el supremo de $a, b \in \mathcal{B}_n$ es $a \cup b$ y el ínfimo de $a, b \in \mathcal{B}_n$ es $a \cap b$.

Note que en el dibujo del diagrama de la retícula, así como en los copos en general, hay relaciones que quedan implícitas, por lo que no agregamos líneas adicionales. Esto se

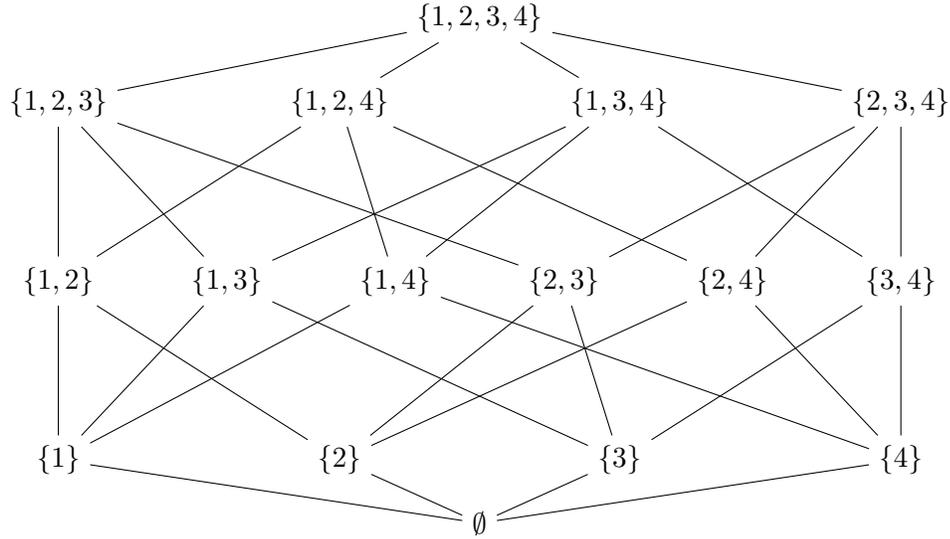


Figura 8: Retícula Booleana \mathcal{B}_4 .

debe a que solo representamos las relaciones de inclusión directa entre los subconjuntos. Por ejemplo, en $\{1\} \leq \{1, 2\} \leq \{1, 2, 3\}$ solo dibujamos líneas entre $\{1\} \leq \{1, 2\}$ y $\{1, 2\} \leq \{1, 2, 3\}$, pero no entre $\{1\} \leq \{1, 2, 3\}$, ya que esta última relación se deduce de las anteriores.

2.5.4 Definición. Para cada $k \leq n$, se define la retícula booleana **truncada** \mathcal{B}_n^k como el subconjunto de \mathcal{B}_n dado por:

$$\mathcal{B}_n^k = \{A \subseteq [n] : |A| \geq k\}.$$

Aunque \mathcal{B}_n^k se llama retícula booleana truncada y conserva algunas propiedades de la retícula booleana \mathcal{B}_n , no es una retícula en el sentido estricto. Esto se debe a que no siempre contiene ínfimos (intersecciones) para todos los pares de elementos en \mathcal{B}_n^k .

A nosotros nos interesa estudiar la parte propia, (definición 2.3.13), de la retícula booleana truncada, denotada como $\hat{\mathcal{B}}_n^k$. Por lo cual, en adelante por razones de brevedad nos referiremos a ella simplemente como ‘retícula booleana truncada’.

2.5.5 Definición. Un subconjunto Q de un copo (P, \leq) se llama **anticadena** si para cualesquiera $a, b \in Q$ con $a \neq b$, se tiene que $a \not\leq b$ y $b \not\leq a$. En otras palabras, ningún par de elementos en Q son comparables bajo la relación de orden.

2.5.6 Definición. Sea (L, \leq) una retícula y $a, b \in L$. Se dice que b es el **complemento** de a si $a \vee b = \hat{1}$ y $a \wedge b = \hat{0}$. Esto se denota como $a \perp b$.

El siguiente teorema es útil para obtener el tipo de homotopía de un copo cuando el copo es retícula.

2.5.7 Teorema. (Björner & Walker, 1983) Sea L una retícula con máximo $\hat{1}$ y mínimo $\hat{0}$, y sea $a \in L$ un elemento tal que los complementos de a forman una anticadena. Entonces, el tipo de homotopía de la parte propia de L (definición 2.3.13), denotado por \bar{L} está dado por:

$$|\bar{L}| \cong \bigvee_{x \perp a} \text{Susp } |(\hat{0}, x) \star (x, \hat{1})|,$$

donde la unión se toma sobre todos los elementos x de L que son complementos de a , y Susp (definición 1.3.8) indica la suspensión del espacio topológico asociado a la junta (definición 2.3.16) de los intervalos $(\hat{0}, x)$ y $(x, \hat{1})$, que son los elementos de L entre $\hat{0}$ y x , y entre x y $\hat{1}$, respectivamente.

En ejemplo 2.5.10 usamos conceptos y teoremas de topología algebraica, sugerimos como referencia (Munkres, 1984). En particular, existe un concepto de homología que es aplicable a todo espacio topológico X tal que si P es un copo y $X = |P|$ entonces $\tilde{H}_n(X)$ es isomorfo a la homología del copo $\tilde{H}_n(P)$ como lo definimos antes.

2.5.8 Teorema. Sean X y Y espacios topológicos. Si X y Y son homotópicos, entonces $\tilde{H}_n(X) \cong \tilde{H}_n(Y)$ para $n \geq 0$. En particular, si X es contraíble, entonces $\tilde{H}_n(X) = 0$ para $n \geq 0$.

2.5.9 Teorema. Sea $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ la esfera de dimensión n , entonces

$$\tilde{H}_i(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n, \\ \mathbb{C} & \text{si } i = n. \end{cases}$$

2.5.10 Ejemplo.

$$\tilde{H}_k(\bar{\mathcal{B}}_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n-2 \\ \mathbb{C} & \text{si } k = n-2 \end{cases}.$$

Demostración. Para esta prueba primero veamos que $\bar{\mathcal{B}}_n$ es homotópico a S^{n-2} . La prueba la haremos por inducción sobre n .

Notemos que si $n = 2$ tenemos que $\bar{\mathcal{B}}_2$ son dos puntos no comparables y por tanto,

$$\bar{\mathcal{B}}_2 \simeq S^0.$$

Ahora, supongamos que se cumple para $n-1$, es decir, tenemos que $\bar{\mathcal{B}}_{n-1} \simeq S^{n-3}$. Si consideremos $a = \{n\} \in \bar{\mathcal{B}}_n$, entonces a solo tiene un complemento, $b = \{1, 2, \dots, n-1\}$,

entonces por el teorema 2.5.7 tenemos que $\bar{\mathcal{B}}_n$ es:

$$\bar{\mathcal{B}}_n = \text{Susp}((\hat{0}, \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}) \star (\{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}, \hat{1})).$$

Luego, como $\bar{\mathcal{B}}_{n-1} = B_{n-1} - \{\emptyset, n-1\}$, es decir es el subconjunto que contiene a todos los elementos entre el \emptyset y $n-1$, entonces $(\hat{0}, \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}) = \bar{\mathcal{B}}_{n-1}$ y además, $(\{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}, \hat{1}) = \emptyset$, por lo tanto, considerando nuestra hipótesis de inducción tenemos que:

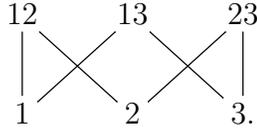
$$\bar{\mathcal{B}}_n = \text{Susp} \bar{\mathcal{B}}_{n-1} \star \emptyset = \text{Susp} \bar{\mathcal{B}}_{n-1} = \text{Susp} S^{n-3}.$$

Y como la suspensión de una esfera es homotópica a una esfera del grado siguiente (Hatcher, 2002), tenemos por tanto que:

$$\bar{\mathcal{B}}_n \simeq S^{n-2}.$$

Por consiguiente, como $\bar{\mathcal{B}}_n$ es homotópico a S^{n-2} la homología reducida de $\bar{\mathcal{B}}_n$ es igual a 0 cuando $k \neq n-2$ y \mathbb{C} si $k = n-2$ por el teorema 2.5.9. \square

Veamos con detalle el caso del cálculo de la homología de $\bar{\mathcal{B}}_3$, directo de la definición, sin usar el teorema anterior, considerándolo como una representación del grupo S_3 .



Queremos determinar si $\tilde{H}_1(\bar{\mathcal{B}}_3)$ es la permutación signo o la trivial.

Consideremos los siguientes operadores frontera:

$$C_2(\bar{\mathcal{B}}_3) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\bar{\mathcal{B}}_3) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\bar{\mathcal{B}}_3) \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{C}.$$

Notemos que $C_0(\bar{\mathcal{B}}_3) = \langle 1, 2, 3, 12, 13, 23 \rangle$, lo que implica que $\dim(C_0(\bar{\mathcal{B}}_3)) = 6$. Además, debido a que $\dim(C_0(\bar{\mathcal{B}}_3)) = \dim(\ker \partial_0) + \dim(\text{im } \partial_0)$ y $\dim(\text{im } \partial_0) = 1$, pues la imagen de ∂_0 genera a \mathbb{C} , tenemos que $\dim(\ker \partial_0) = 5$.

Por otro lado, como

$$C_1(\bar{\mathcal{B}}_3) = \langle 1 \leq 12, 1 \leq 13, 2 \leq 12, 2 \leq 23, 3 \leq 13, 3 \leq 23 \rangle,$$

entonces:

$$\begin{aligned} \text{im } \partial_1 &= \partial_1[C_1(\bar{\mathcal{B}}_3)] \\ &= \langle \partial_1(1 \leq 12), \partial_1(1 \leq 13), \partial_1(2 \leq 12), \partial_1(2 \leq 23), \partial_1(3 \leq 13), \partial_1(3 \leq 23) \rangle \\ &= \langle 1 - 12, 1 - 13, 2 - 12, 2 - 23, 3 - 13, 3 - 23 \rangle \\ &= \langle 1 - 12, 1 - 13, 2 - 12, 2 - 23, 3 - 13 \rangle. \end{aligned}$$

Ya que $(1 - 12), (1 - 13), (2 - 12), (2 - 23)$ y $(3 - 13)$ son linealmente independientes pues,

$$c_1(1 - 12) + c_2(1 - 13) + c_3(2 - 12) + c_4(2 - 23) + c_5(3 - 13) = 0,$$

implica que,

$$(c_1 + c_2)1 + (c_3 + c_4)2 + (c_5)3 + (-c_1 - c_3)12 + (-c_2 - c_5)13 + (-c_4)23 = 0,$$

de donde se sigue que, $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$.

$$\text{Note que } (3 - 23) = (3 - 13) - (1 - 13) + (1 - 12) - (2 - 12) + (2 - 23).$$

Por lo tanto, tenemos que $\dim(\text{im } \partial_1) = 5$.

Luego, $\dim(\ker \partial_0 / \text{im } \partial_1) = \dim(\ker \partial_0) - \dim(\text{im } \partial_1) = 5 - 5 = 0$, entonces como tenemos un espacio de dimensión cero, $\ker \partial_0 / \text{im } \partial_1 = 0$, por lo cual,

$$\tilde{H}_0(\bar{\mathcal{B}}_3) = \ker \partial_0 / \text{im } \partial_1 = 0.$$

Ahora como $\dim(C_1(\bar{\mathcal{B}}_3)) = \dim(\ker \partial_1) + \dim(\text{im } \partial_1) = \dim(\ker \partial_1) + 5 = 6$, tenemos que $\dim(\ker \partial_1) = 1$, además dado que no tenemos cadenas de dimensión 3 en $\bar{\mathcal{B}}_3$ tenemos que la $\text{im } \partial_2 = 0$, por lo cual tenemos que

$$\tilde{H}_1(\bar{\mathcal{B}}_3) = \ker \partial_1.$$

Entonces, consideremos:

$$z = (1 \leq 12) - (1 \leq 13) - (2 \leq 12) + (2 \leq 23) + (3 \leq 13) - (3 \leq 23),$$

y observemos que

$$\partial z = (1 - 12) - (1 - 13) - (2 - 12) + (2 - 23) + (3 - 13) - (3 - 23) = 0,$$

por lo que $z \in \ker \partial_1$, luego si hacemos actuar una permutación impar, como por ejemplo $(1, 2)$ tenemos que:

$$(12)z = (2 \leq 12) - (2 \leq 23) - (1 \leq 12) + (1 \leq 13) + (3 \leq 23) - (3 \leq 13) = -z,$$

por lo tanto $\tilde{H}_1(\bar{\mathcal{B}}_3)$ es la representación signo de S_3 .

2.6 Homología de complejos simpliciales

2.6.1 Definición. A una subcolección de simplejos de Δ que a su vez forman un complejo se les llama un **subcomplejo** de Δ .

2.6.2 Definición. Se le dice **p -esqueleto** de Δ y se le denota por $\Delta^{(p)}$ al subcomplejo que consiste de todos los simplejos de dimensión a lo más p .

Los puntos de la colección $\Delta^{(0)}$ son los vértices de Δ , y el 1-esqueleto $\Delta^{(1)}$ de cualquier complejo simplicial es una gráfica.

2.6.3 Definición. Un complejo simplicial Δ es **conexo** si $\Delta^{(1)}$ es una gráfica conexa.

2.6.4 Definición. Sea $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_p\}$ un p -simplejo, un **p -simplejo orientado** es un simplejo junto con una orientación en él.

Una forma natural de formar esta orientación es enumerando sus vértices y dos ordenamientos de su conjunto de vértices se dicen equivalentes si son diferentes el uno del otro por una permutación par. De modo que la orientación “usual” en σ se denota como $\sigma = v_0 \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_p$.

2.6.5 Ejemplo. Un 0-simplejo orientado es un punto v_0 . Un 1-simplejo orientado $v_0 \wedge v_1$ es ilustrado en la figura 9 con una flecha dirigida de v_0 a v_1 , de modo que $v_0 \wedge v_1 \neq v_1 \wedge v_0$, pero $v_0 \wedge v_1 = -v_1 \wedge v_0$ por tener una orientación opuesta.



Figura 9: 1-simplejo.

2.6.6 Definición. Sea Δ un complejo simplicial abstracto. Una **p -cadena** en Δ es una función c que asigna a cada p -simplejo orientado de Δ un número complejo, de tal manera que si σ y σ' son dos orientaciones opuestas del mismo simplejo, entonces $c(\sigma) = -c(\sigma')$. En otras palabras, la función c cambia de signo al cambiar la orientación de un simplejo.

El espacio vectorial de p -cadenas orientadas de un complejo simplicial abstracto Δ , denotado $C_p(\Delta)$, se obtiene considerando una orientación fija por cada p -simplejo y tomando $C_p(\Delta)$ como el espacio vectorial generado por tales p -simplejos orientados. Cada elemento en $C_p(\Delta)$ puede expresarse como una suma finita de p -cadenas orien-

tadas en Δ , donde cada término de la suma es un p -simplejo orientado en Δ y cada coeficiente es un número complejo. La suma de dos p -cadenas orientadas en Δ se define como la suma de sus respectivos términos, mientras que el producto de una p -cadena orientada en Δ por un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ se define como la multiplicación de cada término por λ .

El espacio vectorial $C_p(\Delta)$ se utiliza para construir la homología de Δ , que es una medida de la cantidad de “agujeros” de dimensión p en $|\Delta|$. Si $p < -1$ o $p > \dim \Delta$, entonces $C_p(\Delta)$ denota al espacio trivial, es decir, el espacio vectorial que consta únicamente del vector cero. Por convención $C_{-1}(\Delta)$ está generado por el único simplejo de dimensión -1 , esto es, el simplejo vacío, y por tanto, $C_{-1}(\Delta) \cong \mathbb{C}$.

A una gráfica finita G se le asocia un espacio topológico por medio de cierto complejo simplicial.

2.6.7 Definición. Sea G una gráfica, su **complejo simplicial asociado** $\Delta(G)$, se construye considerando los vértices de la gráfica como los vértices del complejo simplicial y los simplejos son las subgráficas completas.

2.6.8 Definición. Sea $\sigma = v_0 \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ un simplejo orientado, definimos la transformación lineal $\partial_p: C_p(\Delta) \rightarrow C_{p-1}(\Delta)$ por medio de:

$$\partial_p(\sigma) = \partial_p(v_0 \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^{i+1} (v_0 \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_p),$$

al que llamamos el **p -ésimo operador frontera**, donde \hat{v}_i indica que el vértice v_i es borrado del arreglo.

Como $C_p(\Delta)$ es el espacio trivial para $p < -1$, para $p \leq -1$ tenemos que ∂_p es la transformación cero.

Se mostrará que $\partial_p(-\sigma) = -\partial_p(\sigma)$. Para ello, es suficiente mostrar que si se cambian dos vértices adyacentes en el arreglo $v_0 \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_p$, el lado derecho de la ecuación:

$$\partial_p(v_0 \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^{i+1} (v_0 \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_p),$$

cambia de signo. Entonces, vamos a comparar las expresiones:

- a) $\partial_p(v_0 \wedge \cdots \wedge v_{j-1} \wedge v_j \wedge v_{j+1} \wedge v_{j+2} \wedge \cdots \wedge v_p)$ y
- b) $\partial_p(v_0 \wedge \cdots \wedge v_{j-1} \wedge v_{j+1} \wedge v_j \wedge v_{j+2} \wedge \cdots \wedge v_p)$.

Si i es distinto de j y $j + 1$, el i -ésimo término en esas dos expresiones difiere precisamente por un signo, el término es idéntico excepto que v_j y v_{j+1} aparecen intercambiados. A continuación, se presenta que sucede para el i -ésimo término cuando $i = j$ y $i = j + 1$.

Para la expresión a) se tiene:

$$(-1)^{j+1}(v_0 \wedge \cdots \wedge v_{j-1} \wedge \hat{v}_j \wedge v_{j+1} \wedge v_{j+2} \wedge \cdots \wedge v_p) + (-1)^{j+2}(v_0 \wedge \cdots \wedge v_{j-1} \wedge v_j \wedge \hat{v}_{j+1} \wedge v_{j+2} \wedge \cdots \wedge v_p).$$

Mientras que para b), se tiene:

$$(-1)^{j+1}(v_0 \wedge \cdots \wedge v_{j-1} \wedge \hat{v}_{j+1} \wedge v_j \wedge v_{j+2} \wedge \cdots \wedge v_p) + (-1)^{j+2}(v_0 \wedge \cdots \wedge v_{j-1} \wedge v_{j+1} \wedge \hat{v}_j \wedge v_{j+2} \wedge \cdots \wedge v_p).$$

Por lo que comparando las dos expresiones se observa que difieren por un signo.

2.6.9 Ejemplo. Observemos que:

1. En el caso de un 1-simplejo:

$$\partial_1(v_0 \wedge v_1) = -v_1 + v_0.$$

2. En el caso de un 2-simplejo:

$$\partial_2(v_0 \wedge v_1 \wedge v_2) = -(v_1 \wedge v_2) + (v_0 \wedge v_2) - (v_0 \wedge v_1).$$

3. En el caso de un 3-simplejo:

$$\partial_3(v_0 \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) = -(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) + (v_0 \wedge v_2 \wedge v_3) - (v_0 \wedge v_1 \wedge v_3) + (v_0 \wedge v_1 \wedge v_2).$$

2.6.10 Teorema. Sea σ un p -simplejo orientado, entonces $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ para todo p .

Demostración. Calculamos:

$$\begin{aligned} \partial_{p-1} \partial_p(v_0 \wedge \cdots \wedge v_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_{p-1}(v_0 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_p) \\ &= \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j (v_0 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_j \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_p) \\ &\quad + \sum_{j > i} (-1)^{i+j+1} (v_0 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge \hat{v}_j \wedge \cdots \wedge v_p). \end{aligned}$$

Las dos últimas sumas se cancelan ya que después de cambiar i y j en la segunda suma, se convierte en el negativo de la primera por lo que $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$. \square

2.6.11 Definición. El núcleo de $\partial_p: C_p(\Delta) \rightarrow C_{p-1}(\Delta)$ es llamado el espacio de p -ciclos y es denotado por $Z_p(\Delta)$. La imagen de $\partial_{p+1}: C_{p+1}(\Delta) \rightarrow C_p(\Delta)$ es llamado el espacio de p -fronteras y es denotado por $B_p(\Delta)$.

2.6.12 Definición. Se define el p -ésimo espacio de homología de Δ como el espacio cociente

$$H_p(\Delta) = Z_p(\Delta)/B_p(\Delta).$$

2.7 Subdivisión baricéntrica

A continuación introduciremos el concepto de subdivisión baricéntrica, primero para un complejo simplicial geométrico y posteriormente para un abstracto.

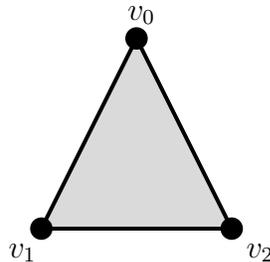
2.7.1 Definición. Sea Δ un complejo simplicial geométrico y sea s un n -simplejo de Δ con vértices v_0, \dots, v_n . El **baricentro** b_s de s es el punto de s definido por

$$b_s = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} v_i.$$

De este modo tenemos que el baricentro de un 0-simplejo $s = \langle v_0 \rangle$ es el mismo vértice $b_s = \langle v_0 \rangle$ y el baricentro de un 1-simplejo $s = \langle v_0, v_1 \rangle$ es el punto medio del segmento que une v_0 con v_1 . En general podemos identificar al baricentro como el centroide de s .

2.7.2 Definición. Dado un complejo simplicial geométrico Δ , definimos su **subdivisión baricéntrica** como el complejo simplicial geométrico, denotado como $\text{sd } \Delta$, en donde los vértices son los baricentros de los simplejos de Δ y los simplejos de $\text{sd } \Delta$ son todos los simplejos geométricos generados por los conjuntos ordenados $\langle b_{s_0}, \dots, b_{s_q} \rangle$ con s_i cara propia de s_{i+1} para todo i .

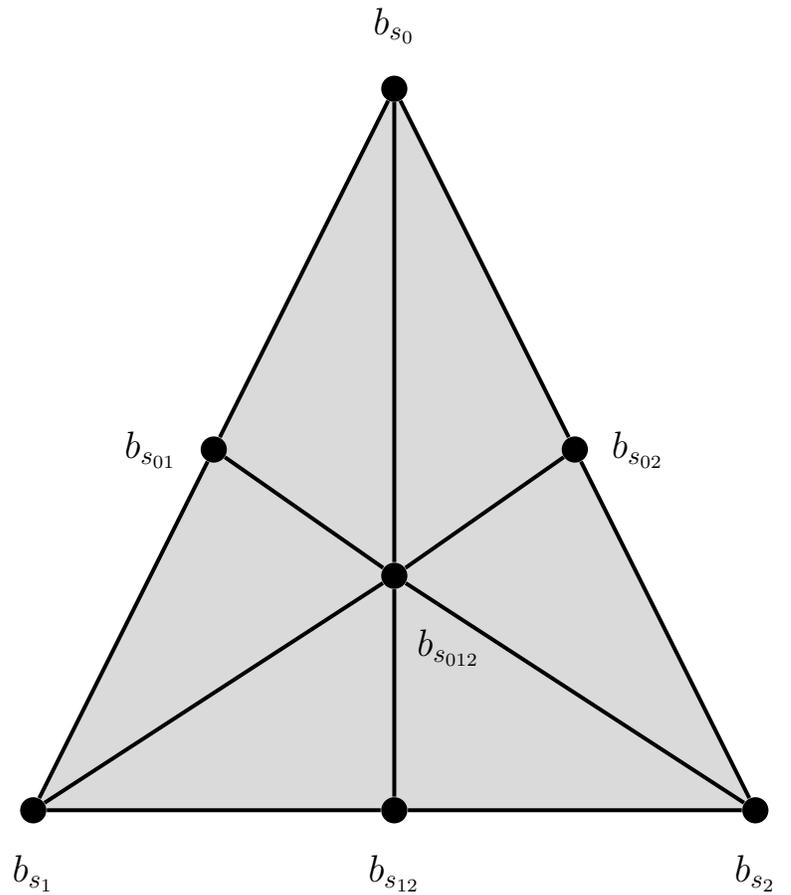
2.7.3 Ejemplo. Sea Δ el siguiente complejo simplicial:



Veamos que en Δ tenemos los siguientes n -simplejos:

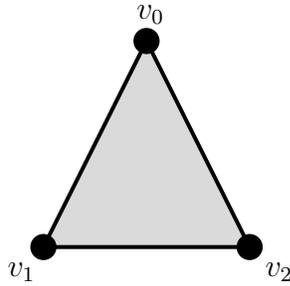
- 0-simplejos $s_0 = v_0, s_1 = v_1$ y $s_2 = v_2$, con baricentros $b_{s_0} = v_0, b_{s_1} = v_1$ y $b_{s_2} = v_2$ respectivamente.
- 1-simplejos $s_{01} = \langle v_0, v_1 \rangle, s_{02} = \langle v_0, v_2 \rangle$ y $s_{12} = \langle v_1, v_2 \rangle$, que tienen como baricentros $b_{s_{01}} = \frac{1}{2}(v_0 + v_1), b_{s_{02}} = \frac{1}{2}(v_0 + v_2), b_{s_{12}} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ respectivamente.
- 2-simplejo $s_{012} = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ con baricentro $b_{s_{012}} = \frac{1}{3}(v_0 + v_1 + v_2)$.

Por lo que $sd\Delta$ consta de $\langle b_{s_0}, b_{s_{01}}, b_{s_{012}} \rangle, \dots, \langle b_{s_2}, b_{s_{12}}, b_{s_{012}} \rangle$, y todas las caras de éstos. Su dibujo se puede ver como:

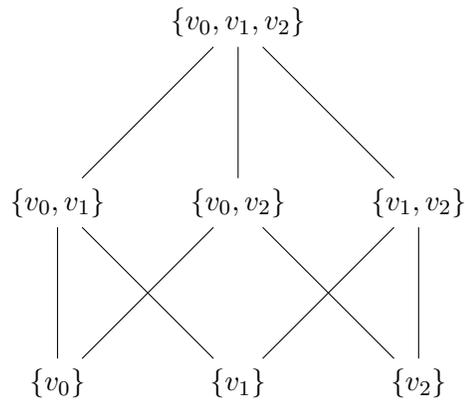


2.7.4 Definición. Sea Δ un complejo simplicial abstracto, la **subdivisión baricéntrica** de Δ , denotada como $sd(\Delta)$ es el complejo simplicial abstracto asociado al copo de simplejos, es decir $sd(\Delta) = \Delta(P(\Delta))$.

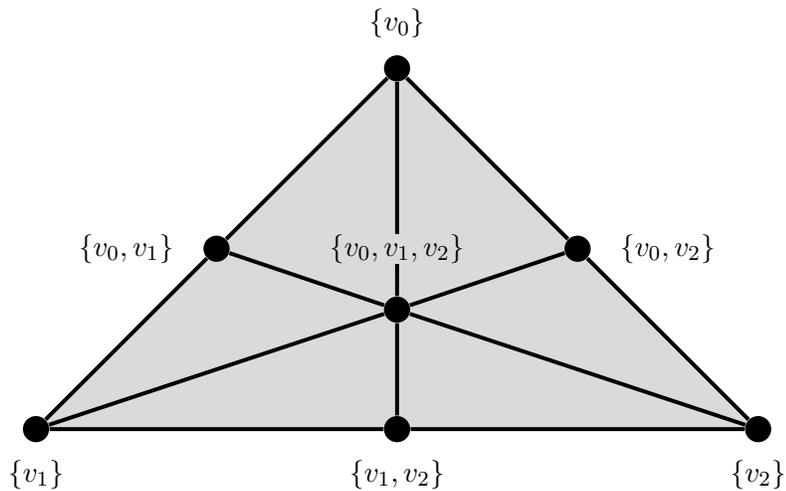
2.7.5 Ejemplo. Sea Δ el complejo simplicial abstracto que consiste de $\{v_0, v_1, v_2\}$ y todos sus subconjuntos.



Entonces el diagrama de $P(\Delta)$ es:



Por lo que $\text{sd } \Delta = \Delta(P(\Delta))$ es:



Note que $\{v_0\}$ y $\{v_0, v_1\}$ son simplejos en Δ tales que $\{v_0\} \subseteq \{v_0, v_1\}$, de modo que $\{v_0\}$ y $\{v_0, v_1\}$ son elementos de $P(\Delta)$ que están relacionados y forman una 1-cadena. Por tanto, $\{v_0\}$ y $\{v_0, v_1\}$ son vértices de $\text{sd } \Delta$ y forman un 1-simplejo.

Es importante destacar que si Δ es un complejo simplicial abstracto, entonces las realizaciones geométricas de los complejos simpliciales Δ y $\text{sd } \Delta$ son siempre homeomorfas, es decir tienen la misma estructura topológica (Eilenberg & Steenrod, 1952):

$$|\Delta| = |\text{sd } \Delta|.$$

GRÁFICA DE CLANES DE LA RETÍCULA DE SUBCONJUNTOS

Las representaciones del grupo simétrico en las homología de ciertos complejos simpliciales notables con mucha simetría han sido estudiados por varios investigadores como por ejemplo Solomon (Solomon, 1968) y S. Bouc (Bouc, 1984). Por otro lado, ya en una tesis de maestría de la UAEH (Campero, 2021) se consideró además otro complejo construido a partir del complejo estudiado por Bouc usando el operador de clanes en gráficas. Tales estudios nos sirvieron como motivación y nos permitieron la creación del presente capítulo.

Dentro de este capítulo se encuentran los resultados obtenidos en el estudio de la descomposición en submódulos irreducibles de la homología de las gráficas de clanes de las gráficas de comparabilidad de retículas booleanas truncadas. En particular, se explorará la relación entre el complejo simplicial de la gráfica de comparabilidad del copo $\bar{\mathcal{B}}_n^k$ y el complejo simplicial de la gráfica de clanes asociada a su gráfica de comparabilidad, $K(G_{n,k})$. Se pretende probar que $\Delta(G_{n,k}) \cong_{S_n} \Delta(K(G_{n,k}))$ y, por tanto, mediante el uso de la subdivisión baricéntrica y del teorema 2.3.15, así como de otros resultados presentados en este capítulo, establecer que $\tilde{H}(K(\bar{\mathcal{B}}_n^k)) \cong_{S_n} \tilde{H}(\bar{\mathcal{B}}_n^k)$.

3.1 Antecedentes teóricos

En el proceso de llevar a cabo una investigación, la selección y la aplicación de teoremas juegan un papel crucial al proporcionar las bases teóricas y las herramientas necesarias para dar forma y respaldar la investigación. En este contexto, en esta sección, los teoremas y conceptos que presentaremos desempeñan un papel fundamental al permitirnos pasar desde la formulación inicial de la investigación hasta su implementación efectiva.

3.1.1 Definición. Dada una gráfica G y una subgráfica H de G , decimos que H es una **subgráfica inducida** si para cualesquiera dos vértices $u, v \in H$ se tiene que u y v son adyacentes en H si y solo si son adyacentes en G .

3.1.2 Ejemplo. En la figura 10 se presenta una gráfica G y dos subgráficas de G , H y J . En este caso, únicamente H es una subgráfica inducida de G , ya que cualquier par

de vértices adyacentes en H también lo son en G . Sin embargo, J no es inducida pues v_1 y v_3 son adyacentes en G , pero no lo son en J .

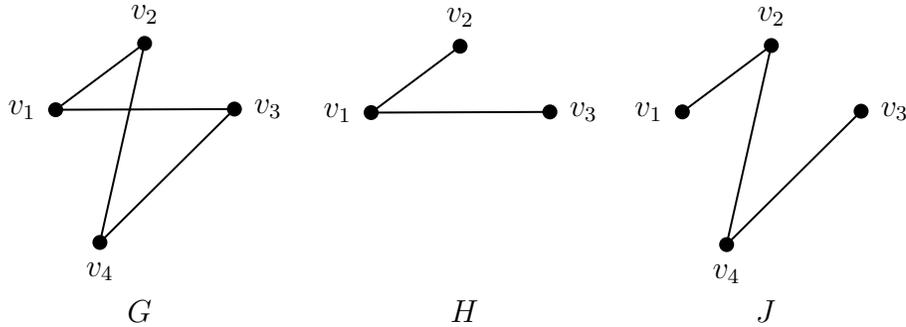


Figura 10: Una gráfica G y dos subgráficas de G , H es inducida y J no.

3.1.3 Definición. El **complemento** de una gráfica G , denotado como \overline{G} consiste del mismo conjunto de vértices de G y tal que dos vértices distintos en \overline{G} son adyacentes si y solo si no lo son en G .

3.1.4 Ejemplo. En la figura 11 tenemos una gráfica G y su complemento \overline{G} .

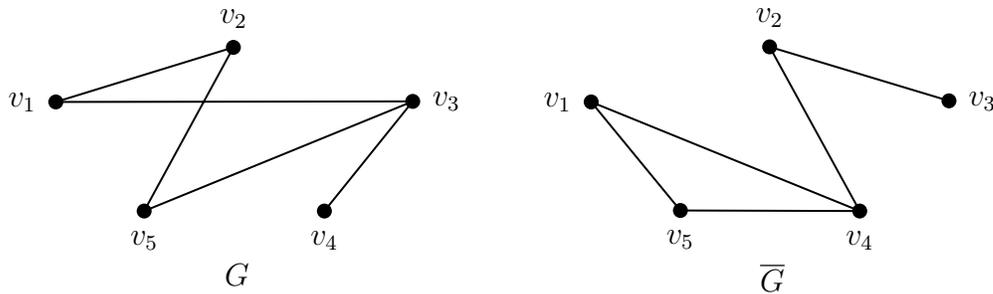


Figura 11: Una gráfica G y su complemento \overline{G} .

Recordemos que en la definición 1.4.6 denotamos como K_n a la gráfica completa de n vértices, para la siguiente definición denotaremos como nK_2 a la gráfica que consiste de la unión de n gráficas completas de 2 vértices.

3.1.5 Definición. Sea nK_2 la gráfica que consiste en n gráficas completas de dos vértices. Llamamos **octaedro** al complemento de esta gráfica y lo denotamos como O_n , es decir, $O_n = \overline{nK_2}$.

3.1.6 Ejemplo. En la figura 12 tenemos una gráfica $4K_2$, es decir, una gráfica con 8 vértices que consiste de 4 gráficas K_2 y en la figura 13 el complemento de esta, es decir O_4 .

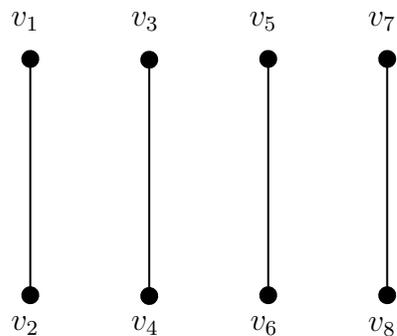


Figura 12: Gráfica $4K_2$.

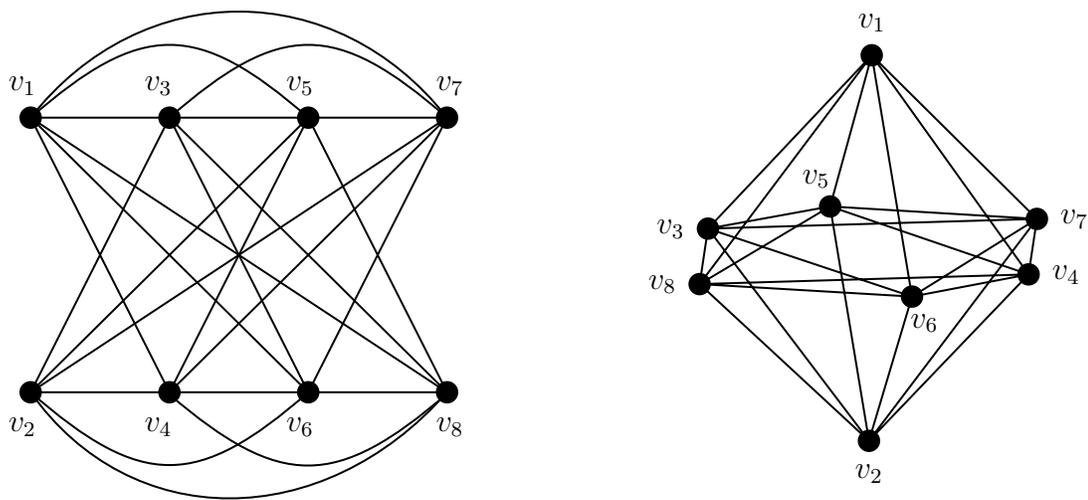


Figura 13: Representaciones del octaedro O_4 .

Recordemos que hemos denotado como $G_{n,k}$ a la gráfica de comparabilidad de la retícula booleana truncada $\bar{\mathcal{B}}_n^k$. Los siguientes dos teoremas son útiles porque nos permiten argumentar que la gráfica de comparabilidad de una retícula booleana con $k = n - 2$ es homotópica a su gráfica de clanes, es decir, $G_{n,n-2} \simeq K(G_{n,n-2})$.

3.1.7 Teorema. (Larrión et al., 2009) Sea G una gráfica que no tiene octaedros O_3 inducidos y tal que todo triángulo está contenido en un único clan. Entonces $K(G) \simeq G$.

Que todo triángulo esté contenido en un único clan significa que si tenemos 3 vértices en G , v_1, v_2 y v_3 , tales que forman una gráfica completa K_3 (un triángulo), no puede haber dos vértices distintos de estos, $v_4, v_5 \in G$, tales que son adyacentes a v_1, v_2 y v_3 , pero no sean adyacentes entre ellos. Que no tenga octaedros inducidos significa que no se pueden escoger 6 vértices tales que esos vértices induzcan un octaedro O_3 .

3.1.8 Teorema. Sea $G_{n,k}$ la gráfica de comparabilidad de una retícula booleana truncada con $n - k \leq 3$, entonces $G_{n,k}$ es libre de octaedros O_3 y todo triángulo está contenido en un único clan.

Demostración. Supongamos que $G_{n,k}$ tiene un octaedro inducido. Entonces tenemos un subcopo de $\bar{\mathcal{B}}_n^k$ con 6 elementos A, B, C, D, E y F en donde solo son incomparables A con B , C con D y E con F y todos los demás son comparables, como se muestra la figura 14. Note que A y E son comparables pues $A \leq C \leq E$, análogamente B y F .

Como A y B son incomparables existen $x \in A \setminus B$ y $y \in B \setminus A$. Luego $\{x, y\} \subseteq C \cap D$, ya que A y B están contenidos en C y D .

Similarmente, como C y D son incomparables existen $w \in C \setminus D$ y $z \in D \setminus C$ tales que w y z son distintos de x y y , pues A y B están contenidos en C y D . Por tanto, $\{x, y, w\} \subseteq C$ y $\{x, y, z\} \subseteq D$.

Análogamente, como E y F son incomparables, existen $u \in E \setminus F$ y $v \in F \setminus E$ distintos de x, y, w y z , tales que $\{x, y, w, z, u\} \subseteq E$ y $\{x, y, w, z, v\} \subseteq F$. Y dado que C y D están contenidos en E y F tenemos que $\{x, y, w, z\} \subseteq E \cap F$ por tanto para que haya octaedros O_3 inducidos se necesita que $n \geq 6$. Por otro lado, como $|E \setminus A| \geq 4$, se necesita que la diferencia en cardinalidad entre los elementos más grandes y los elementos más pequeños en $\bar{\mathcal{B}}_n^k$ sea 4.

Entonces, $G_{n,k}$ con $n - k \leq 3$ es libre de octaedros O_3 y como en este caso los clanes de $G_{n,k}$ son triángulos, en particular todo triángulo de $G_{n,k}$ está contenido en un único clan. \square

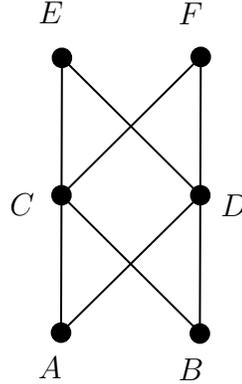


Figura 14: Octaedro O_3

El teorema 3.1.8 nos da condiciones necesarias para cumplir las hipótesis del teorema 3.1.7 y poder concluir que para ciertos valores de n y k se tenga que $G_{n,k} \simeq K(G_{n,k})$. Como el grupo simétrico S_n actúa en $G_{n,k}$ se obtiene por tanto una acción natural en su gráfica de clanes $K(G_{n,k})$, por lo que surge la pregunta base de este trabajo de si la equivalencia homotópica $G_{n,k} \simeq K(G_{n,k})$ será equivariante, lo cual implicaría que las representaciones de S_n en sus homología serán isomorfas.

El teorema que se enuncia a continuación, nos muestra la descomposición en submódulos irreducibles del módulo sobre el grupo simétrico dado por las homología de complejos simpliciales asociados a la retícula booleana truncada. Una idea de esta prueba la encontramos en (Wachs, 2007).

3.1.9 Teorema. (Solomon, 1968) Para todo $k \leq n$, se tiene que:

$$\tilde{H}_{n-k-1}(\bar{\mathcal{B}}_n^k) \cong_{S_n} S^{(k, 1^{n-k})}.$$

donde $(k, 1^{n-k})$ es una partición de n y $S^{(k, 1^{n-k})}$ denota el módulo de Specht correspondiente a dicha partición.

Sabemos que el complejo simplicial del copo $\bar{\mathcal{B}}_n^k$ coincide con el complejo simplicial de la gráfica de comparabilidad de $\bar{\mathcal{B}}_n^k$, es decir $\Delta(\bar{\mathcal{B}}_n^k) = \Delta(G_{n,k})$. En este capítulo pretendemos mostrar que $\Delta(G_{n,k}) \simeq_{S_n} \Delta(K(G_{n,k}))$, es decir queremos mostrar que son homotópicamente equivalentes preservando la acción del grupo simétrico. Para ello, primero haremos uso de la subdivisión baricéntrica de $\Delta(G_{n,k})$ y $\Delta(K(G_{n,k}))$ y veremos que $\Delta(G_{n,k}) \simeq_{S_n} \text{sd}(\Delta(G_{n,k}))$ y que $\Delta(K(G_{n,k})) \simeq_{S_n} \text{sd}(K(\Delta(G_{n,k})))$, posteriormente probaremos que $\text{sd}(\Delta(G_{n,k})) \simeq_{S_n} \text{sd}(K(\Delta(G_{n,k})))$ utilizando el teorema 2.3.15.

Antes de considerar el caso general en la sección 3.3 consideraremos con detalle un ejemplo pequeño en la sección 3.2.

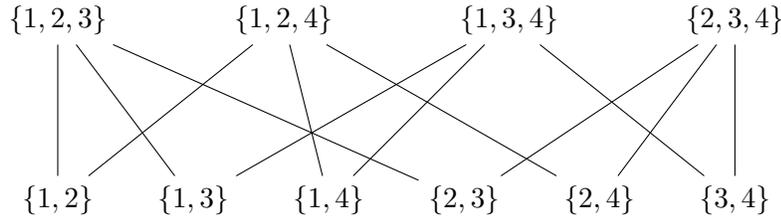


Figura 15: Diagrama de $\bar{\mathcal{B}}_4^2$.

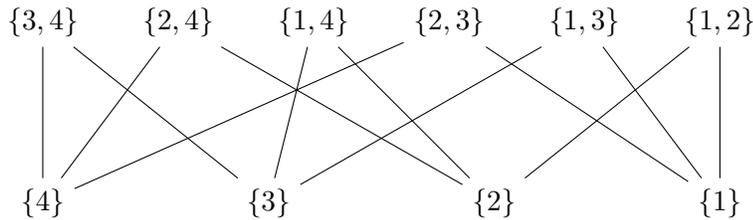


Figura 16: Diagrama de $\bar{\mathcal{B}}_4^2$, truncando los k “niveles” más altos.

3.2 La retícula booleana truncada $\bar{\mathcal{B}}_4^2$

Consideremos el copo de $\bar{\mathcal{B}}_4^2$, representado por el diagrama en la figura 15.

Se puede demostrar que el copo obtenido truncando los k “niveles” más bajos de $\bar{\mathcal{B}}_n$, es isomorfo al obtenido truncando los k “niveles” más altos. En la figura 16 aparece el dibujo del copo obtenido. Para simplificar, a este copo isomorfo se le denotará también con $\bar{\mathcal{B}}_n^k$.

Procedemos a obtener la gráfica de comparabilidad de la retícula booleana truncada $\bar{\mathcal{B}}_4^2$, $G(\bar{\mathcal{B}}_4^2)$ (definición 2.3.12), a la que denotaremos como $G_{4,2}$, y el complejo simplicial asociado $\Delta(G_{4,2})$ (definición 2.6.7). Notemos que $\Delta(G_{4,2})$ puede ilustrarse como en el dibujo de la figura 17, en donde omitimos los corchetes y comas para mantener una notación más clara y concisa. En lo que resta de la demostración seguiremos con esta notación pues esto no afecta la validez, ya que el grupo simétrico actúa de manera consistente con tal notación.

Ahora, consideremos la subdivisión baricéntrica de $\Delta(G_{4,2})$, la cual es denotada como $\text{sd}(\Delta(G_{4,2}))$. En la figura 18 se muestra el dibujo del diagrama de $\text{sd}(\Delta(G_{4,2}))$, en donde $[a, b]$ con $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$ y $a \neq b$, denota el conjunto $\{a, ab\}$, por ejemplo $[1, 2]$ es $\{1, 12\}$ mientras que $[2, 1]$ es $\{2, 12\}$. Seguiremos usando esta notación a lo largo de la demostración, ya que como el grupo simétrico sigue actuando de manera consistente

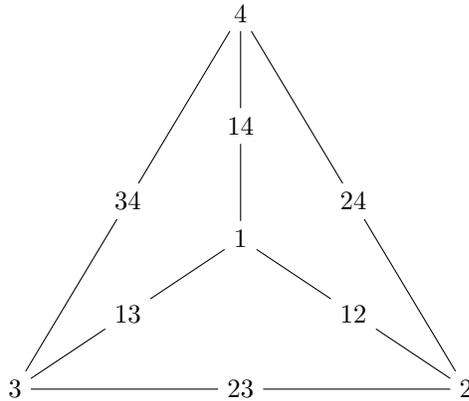


Figura 17: Complejo simplicial de $G_{4,2}$.

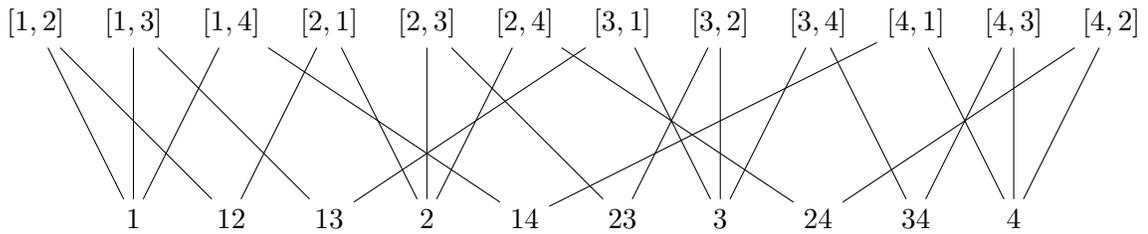


Figura 18: Diagrama de $\text{sd}(\Delta(G_{4,2}))$

no afecta su validez. El dibujo de $\text{sd}(\Delta(G_{4,2}))$ tiene una representación gráfica dentro del tetraedro, ver la figura 19.

Sean $X = \Delta(G_{4,2})$ y $\hat{X} = \text{sd}(\Delta(G_{4,2}))$. Aunque es inmediato que X y \hat{X} son homeomorfos, nosotros queremos demostrar que estos dos espacios de hecho son homotópicamente equivariantes, para ello vamos a definir funciones $f_1: X \rightarrow \hat{X}$ y $g_1: \hat{X} \rightarrow X$, G -equivalencias homotópicas que preserven la acción del grupo $G = S_4$.

Recordemos que si x se encuentra en el $(k-1)$ -simplejo con vértices v_1, v_2, \dots, v_k lo representaremos como $x \in \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$.

Comencemos observando que todo 1-simplejo (segmento) en $\Delta(G_{4,2})$ va de a_1 a a_1a_2 con $a_1, a_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$ y $a_1 \neq a_2$, de modo que todo punto $x \in \langle a_1, a_1a_2 \rangle$ se ve de la forma $x = \lambda a_1a_2 + (1 - \lambda)a_1$ con $\lambda \in [0, 1]$. Por lo que definimos f_1 de la siguiente manera:

$$f_1(x) = \begin{cases} (1 - 2\lambda)a_1 + 2\lambda[a_1, a_2] & \text{si } \lambda \in [0, \frac{1}{2}], \\ (2 - 2\lambda)[a_1, a_2] + (2\lambda - 1)a_1a_2 & \text{si } \lambda \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

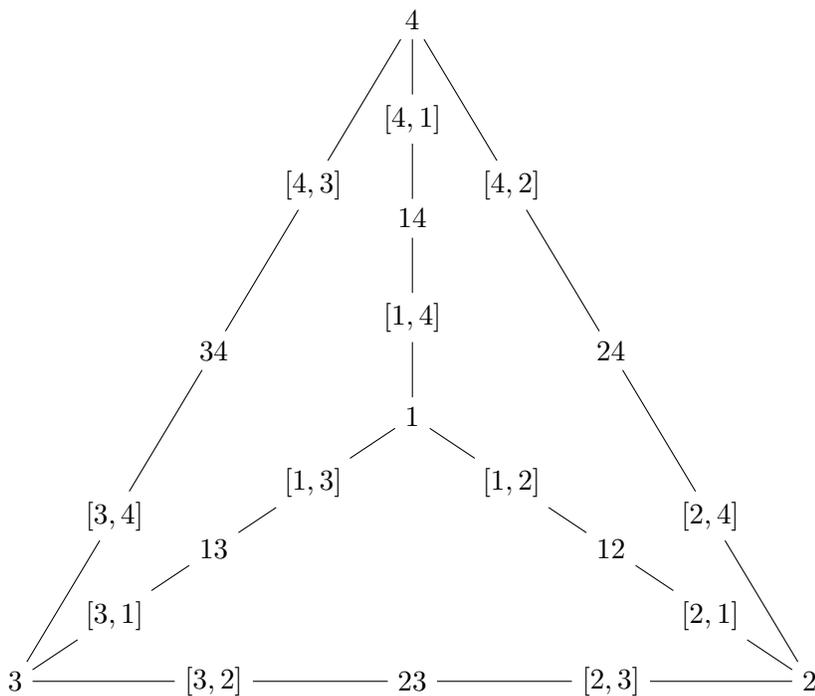


Figura 19: Subdivisión baricéntrica de $\Delta(G_{4,2})$.

Observemos que f_1 está bien definida ya que para $\lambda = \frac{1}{2}$ se tiene que:

$$(1 - 2\lambda)a_1 + 2\lambda[a_1, a_2] = [a_1, a_2] = (2 - 2\lambda)[a_1, a_2] + (2\lambda - 1)a_1a_2.$$

Para demostrar que f_1 es continua, consideremos una transformación afín T que envíe $a_1 \in X$ en $a_1 \in \hat{X}$ y $a_1a_2 \in X$ en $-a_1 + 2[a_1, a_2] \in \hat{X}$. Entonces:

$$\begin{aligned} T(\lambda a_1a_2 + (1 - \lambda)a_1) &= \lambda T(a_1a_2) + (1 - \lambda)T(a_1) \\ &= \lambda(-a_1 + 2[a_1, a_2]) + (1 - \lambda)a_1 \\ &= -\lambda a_1 + 2\lambda[a_1, a_2] + (1 - \lambda)a_1 \\ &= (1 - 2\lambda)a_1 + 2\lambda[a_1, a_2]. \end{aligned}$$

Como T es una transformación afín, entonces T es continua. Restringiendo T a los puntos $\langle a_1, a_1a_2 \rangle$ de la forma $\lambda a_1a_2 + (1 - \lambda)a_1$ con $\lambda \in [0, \frac{1}{2}]$ obtenemos la función del primer caso de la definición de f_1 .

Similarmente se muestra la continuidad del segundo caso (con $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$). Por tanto, como f_1 es continua en los dos subintervalos cerrados $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$, se tiene que f_1 es continua para toda $\lambda \in [0, 1]$.

Veamos que f_1 preserva la acción del grupo S_4 .

Sean $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix} \in S_4$ y $x = \lambda a_1 a_2 + (1 - \lambda) a_1$. Primero consideremos el caso cuando λ está en el intervalo cerrado $[0, \frac{1}{2}]$. Por un lado, tenemos que:

$$\sigma f_1(x) = \sigma((1 - 2\lambda)a_1 + 2\lambda[a_1, a_2]) = (1 - 2\lambda)u_1 + 2\lambda[u_1, u_2],$$

mientras que $\sigma x = \sigma(\lambda a_1 a_2 + (1 - \lambda) a_1) = \lambda u_1 u_2 + (1 - \lambda) u_1$. Por lo tanto,

$$f_1(\sigma x) = (1 - 2\lambda)u_1 + 2\lambda[u_1, u_2] = \sigma f_1(x).$$

Por otro lado, si consideramos el caso cuando λ está en el intervalo cerrado $[\frac{1}{2}, 1]$, tenemos que:

$$\sigma f_1(x) = \sigma((2 - 2\lambda)[a_1, a_2] + (2\lambda - 1)a_1 a_2) = (2 - 2\lambda)[u_1, u_2] + (2\lambda - 1)u_1 u_2,$$

y como $f_1(\sigma x) = (2 - 2\lambda)[u_1, u_2] + (2\lambda - 1)u_1 u_2$, tenemos por lo tanto que para toda $x \in X$ y $\sigma \in S_4$, $\sigma f_1(x) = f_1(\sigma x)$.

Para definir g_1 notemos que todo punto $\hat{x} \in \text{sd}(\Delta(G_{4,2}))$ puede estar en el 1-simplejo $\langle a_1, [a_1, a_2] \rangle$ o en el 1-simplejo $\langle a_1 a_2, [a_1, a_2] \rangle$, donde $a_1, a_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$ y $a_1 \neq a_2$. De modo que todo punto $\hat{x} \in \text{sd}(\Delta(G_{4,2}))$ es de la forma:

$$\hat{x} = \lambda[a_1, a_2] + (1 - \lambda)a_1 \quad \text{si} \quad \hat{x} \in \langle a_1, [a_1, a_2] \rangle,$$

o de la forma:

$$\hat{x} = \lambda a_1 a_2 + (1 - \lambda)[a_1, a_2] \quad \text{si} \quad \hat{x} \in \langle a_1 a_2, [a_1, a_2] \rangle.$$

Entonces, para toda $\lambda \in [0, 1]$, g_1 puede definirse de la siguiente manera:

$$g_1(\hat{x}) = \begin{cases} (1 - \frac{\lambda}{2})a_1 + \frac{\lambda}{2}a_1 a_2 & \text{si} \quad \hat{x} = \lambda[a_1, a_2] + (1 - \lambda)a_1, \\ (\frac{1-\lambda}{2})a_1 + (\frac{1+\lambda}{2})a_1 a_2 & \text{si} \quad \hat{x} = \lambda a_1 a_2 + (1 - \lambda)[a_1, a_2]. \end{cases}$$

La continuidad de g_1 se demuestra de manera análoga a la manera en como se demostró la continuidad de f_1 .

Veamos ahora que esta función preserva la acción del grupo S_4 .

Sea $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix} \in S_4$. Comencemos con el caso $\hat{x} = \lambda[a_1, a_2] + (1 - \lambda)a_1$.

Dado que $\sigma\hat{x} = \lambda[u_1, u_2] + (1 - \lambda)u_1$, podemos calcular $g_1(\sigma\hat{x})$ y $\sigma g_1(\hat{x})$:

$$g_1(\sigma\hat{x}) = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) u_1 + \frac{\lambda}{2} u_1 u_2,$$

$$\sigma g_1(\hat{x}) = \sigma \left(\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) a_1 + \frac{\lambda}{2} a_1 a_2 \right) = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) u_1 + \frac{\lambda}{2} u_1 u_2.$$

Por lo tanto, $g_1(\sigma\hat{x}) = \sigma g_1(\hat{x})$ en este caso.

Ahora, consideremos el caso en el que $\hat{x} = \lambda a_1 a_2 + (1 - \lambda)[a_1, a_2]$. Dado que:

$$\sigma\hat{x} = \sigma(\lambda a_1 a_2 + (1 - \lambda)[a_1, a_2]) = \lambda u_1 u_2 + (1 - \lambda)[u_1, u_2],$$

podemos calcular nuevamente $g_1(\sigma\hat{x})$ y $\sigma g_1(\hat{x})$:

$$g_1(\sigma\hat{x}) = \left(\frac{1 - \lambda}{2}\right) u_1 + \left(\frac{1 + \lambda}{2}\right) u_1 u_2,$$

$$\sigma g_1(\hat{x}) = \sigma \left(\left(\frac{1 - \lambda}{2}\right) a_1 + \left(\frac{1 + \lambda}{2}\right) a_1 a_2 \right) = \left(\frac{1 - \lambda}{2}\right) u_1 + \left(\frac{1 + \lambda}{2}\right) u_1 u_2.$$

Como en este caso también $g_1(\sigma\hat{x}) = \sigma g_1(\hat{x})$ tenemos por tanto que para toda $\hat{x} \in \hat{X}$ y $\sigma \in S_4$, $\sigma g_1(\hat{x}) = g_1(\sigma\hat{x})$.

Analicemos ahora si $(g_1 \circ f_1)(x)$ y $(f_1 \circ g_1)(\hat{x})$ son homotópicas a la identidad en X y \hat{X} respectivamente por medio de una homotopía que preserve la acción del grupo S_4 , para así determinar si X y \hat{X} son homotópicamente equivariantes.

Empecemos con el caso $(g_1 \circ f_1)(x)$ y tomemos $x = \lambda a_1 a_2 + (1 - \lambda)a_1$, entonces:

$$f_1(x) = (1 - 2\lambda)a_1 + 2\lambda[a_1, a_2] \text{ para } \lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

de modo que nos encontramos en el caso en el que $\hat{x} = \lambda'[a_1, a_2] + (1 - \lambda')a_1$ con $\lambda' = 2\lambda$ por lo que:

$$(g_1 \circ f_1)(x) = \left(1 - \frac{\lambda'}{2}\right) a_1 + \frac{\lambda'}{2} a_1 a_2 = (1 - \lambda)a_1 + \lambda a_1 a_2 = x.$$

Por otro lado, para $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$,

$$f_1(x) = (2 - 2\lambda)[a_1, a_2] + (2\lambda - 1)a_1 a_2,$$

por lo cual estamos en el caso $\hat{x} = \lambda' a_1 a_2 + (1 - \lambda')[a_1, a_2]$ con $\lambda' = 2\lambda - 1$ por tanto:

$$\begin{aligned} (g_1 \circ f_1) &= \left(\frac{1 - \lambda'}{2}\right) a_1 + \left(\frac{1 + \lambda'}{2}\right) a_1 a_2 \\ &= \left(\frac{1 - (2\lambda - 1)}{2}\right) a_1 + \left(\frac{1 + (2\lambda - 1)}{2}\right) a_1 a_2 \\ &= (1 - \lambda)a_1 + \lambda a_1 a_2 = x, \end{aligned}$$

Así, para toda $x \in X$ tenemos que $(g_1 \circ f_1)(x) = x$, es decir, $g_1 \circ f_1$ es la identidad en $X = \Delta(G_{4,2})$.

Para el caso $(f_1 \circ g_1)(\hat{x})$, supongamos que $\hat{x} = \lambda[a_1, a_2] + (1 - \lambda)a_1$, entonces:

$$g_1(\hat{x}) = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) a_1 + \frac{\lambda}{2} a_1 a_2,$$

por lo que estamos en el caso en el que $x = \lambda' a_1 a_2 + (1 - \lambda')a_1$ y $\lambda' \in [0, \frac{1}{2}]$ con $\lambda' = \frac{\lambda}{2}$ por tanto:

$$(f_1 \circ g_1)(\hat{x}) = (1 - 2\lambda')a_1 + 2\lambda'[a_1, a_2] = (1 - \lambda)a_1 + \lambda[a_1, a_2] = \hat{x}.$$

Luego, si $\hat{x} = \lambda a_1 a_2 + (1 - \lambda)[a_1, a_2]$, entonces:

$$g_1(\hat{x}) = \left(\frac{1 - \lambda}{2}\right) a_1 + \left(\frac{1 + \lambda}{2}\right) a_1 a_2,$$

por lo cual estamos en el caso $x = \lambda' a_1 a_2 + (1 - \lambda')a_1$ y $\lambda' \in [\frac{1}{2}, 1]$ con $\lambda' = \frac{1 + \lambda}{2}$, entonces:

$$\begin{aligned} (f_1 \circ g_1)(\hat{x}) &= (2 - 2\lambda')[a_1, a_2] + (2\lambda' - 1)a_1 a_2 \\ &= \left(2 - 2\left(\frac{1 + \lambda}{2}\right)\right) [a_1, a_2] + \left(2\left(\frac{1 + \lambda}{2}\right) - 1\right) a_1 a_2 \\ &= (1 - \lambda)[a_1, a_2] + \lambda a_1 a_2 = \hat{x}, \end{aligned}$$

de modo que para toda $\hat{x} \in \hat{X}$ tenemos que $(f_1 \circ g_1)(\hat{x}) = \hat{x}$.

Dado que se ha demostrado que las composiciones $(g_1 \circ f_1)(x)$ y $(f_1 \circ g_1)(\hat{x})$ son la identidad en los espacios X y \hat{X} respectivamente, esto implica que las funciones f_1 y g_1 establecen una homotopía equivariante entre X y \hat{X} . En otras palabras, los espacios $\Delta(G_{4,2})$ y $\text{sd}(\Delta(G_{4,2}))$ son S_4 -homotópicamente equivariantes.

Consideremos ahora el complejo simplicial de la gráfica de clanes de $G_{4,2}$, $\Delta(K(G_{4,2}))$, cuya gráfica puede ser dibujada dentro de un octágono, como se muestra en la figura 20. Recordemos que $[a, b]$ con $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$ y $a \neq b$, denota el conjunto $\{a, ab\}$.

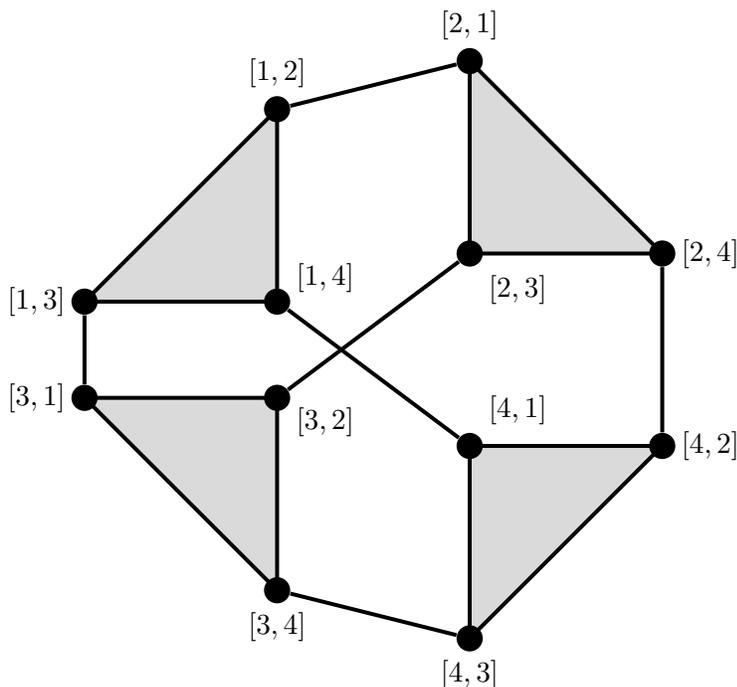


Figura 20: Complejo simplicial de la gráfica de clanes de $G_{4,2}$.

Examinemos ahora el dibujo de la subdivisión baricéntrica de $\Delta(K(G_{4,2}))$, ver figura 21. La gráfica de la subdivisión baricéntrica puede ser dibujada dentro de un octágono como se muestra en la figura 22.

Sean $Y = \Delta(K(G_{4,2}))$ y $\hat{Y} = \text{sd}(\Delta(K(G_{4,2})))$, queremos demostrar que estos espacios son homotópicamente equivariantes, para ello vamos a definir funciones $f_3: \hat{Y} \rightarrow Y$ y $g_3: Y \rightarrow \hat{Y}$ G -equivalecias homotópicas que preserven la acción del grupo $G = S_4$.

Comencemos definiendo f_3 . Para ello, notemos que todo punto \hat{y} en \hat{Y} puede encontrarse en un 1-simplejo de la forma $\langle [a_1, a_2], \{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\} \rangle$ o en un 2-simplejo de la forma $\langle [a_1, a_2], \{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\}, \{[a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_1, a_4]\} \rangle$, donde $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \{1, 2, 3, 4\}$ y $a_1 \neq a_2, a_1 \neq a_3, a_1 \neq a_4, a_2 \neq a_3, a_2 \neq a_4$ y $a_3 \neq a_4$. Por tanto, si \hat{y} está en un 1-simplejo, entonces \hat{y} es de la forma:

$$\hat{y} = (1 - \lambda)[a_1, a_2] + \lambda\{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\}.$$

Y si \hat{y} está en un 2-simplejo, entonces \hat{y} es de la forma:

$$\hat{y} = \lambda_1[a_1, a_2] + \lambda_2\{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\} + \lambda_3\{[a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_1, a_4]\}.$$

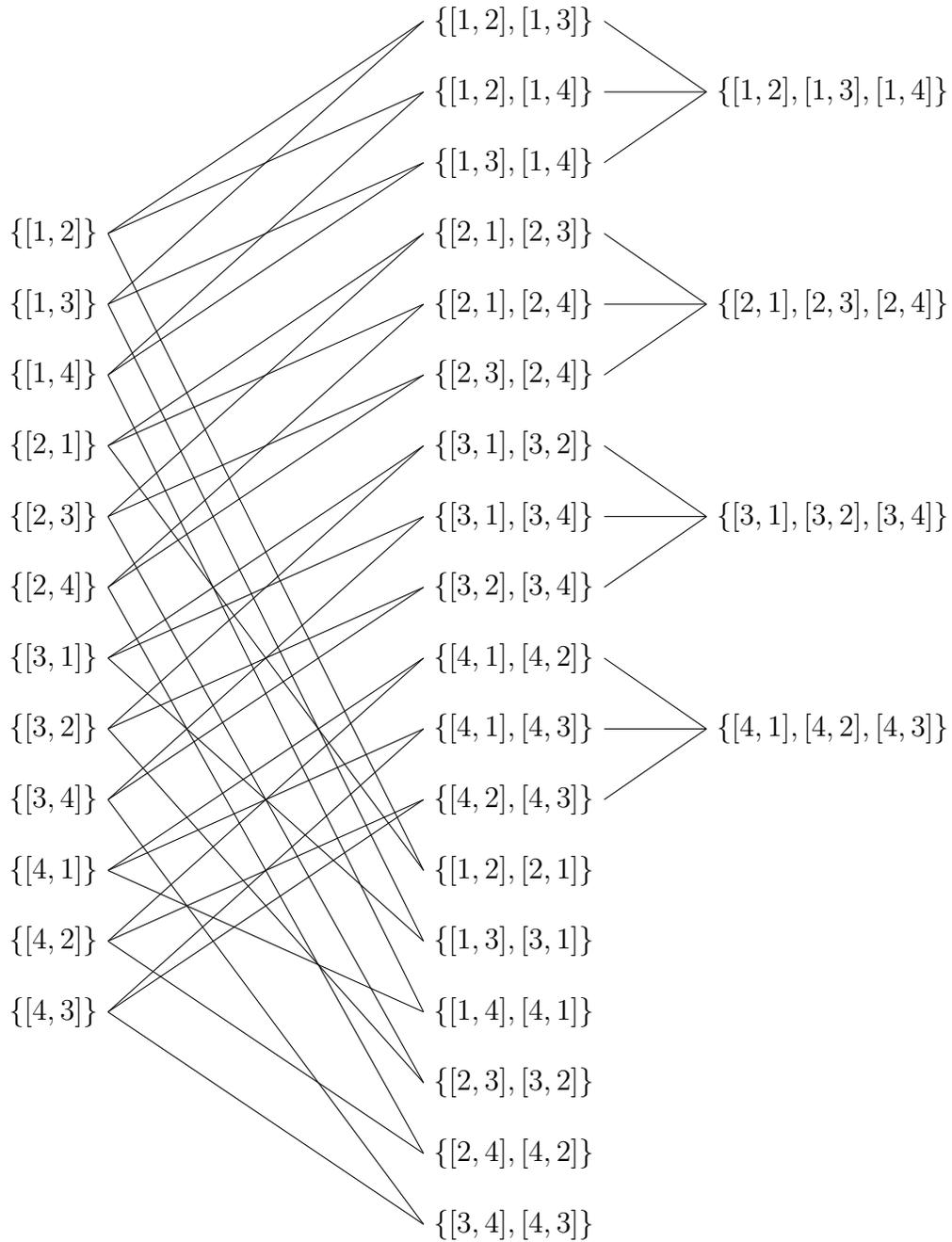


Figura 21: Diagrama de $\Delta(K(G_{4,2}))$. En este copo los elementos minimales aparecen a la izquierda y los maximales a la derecha.

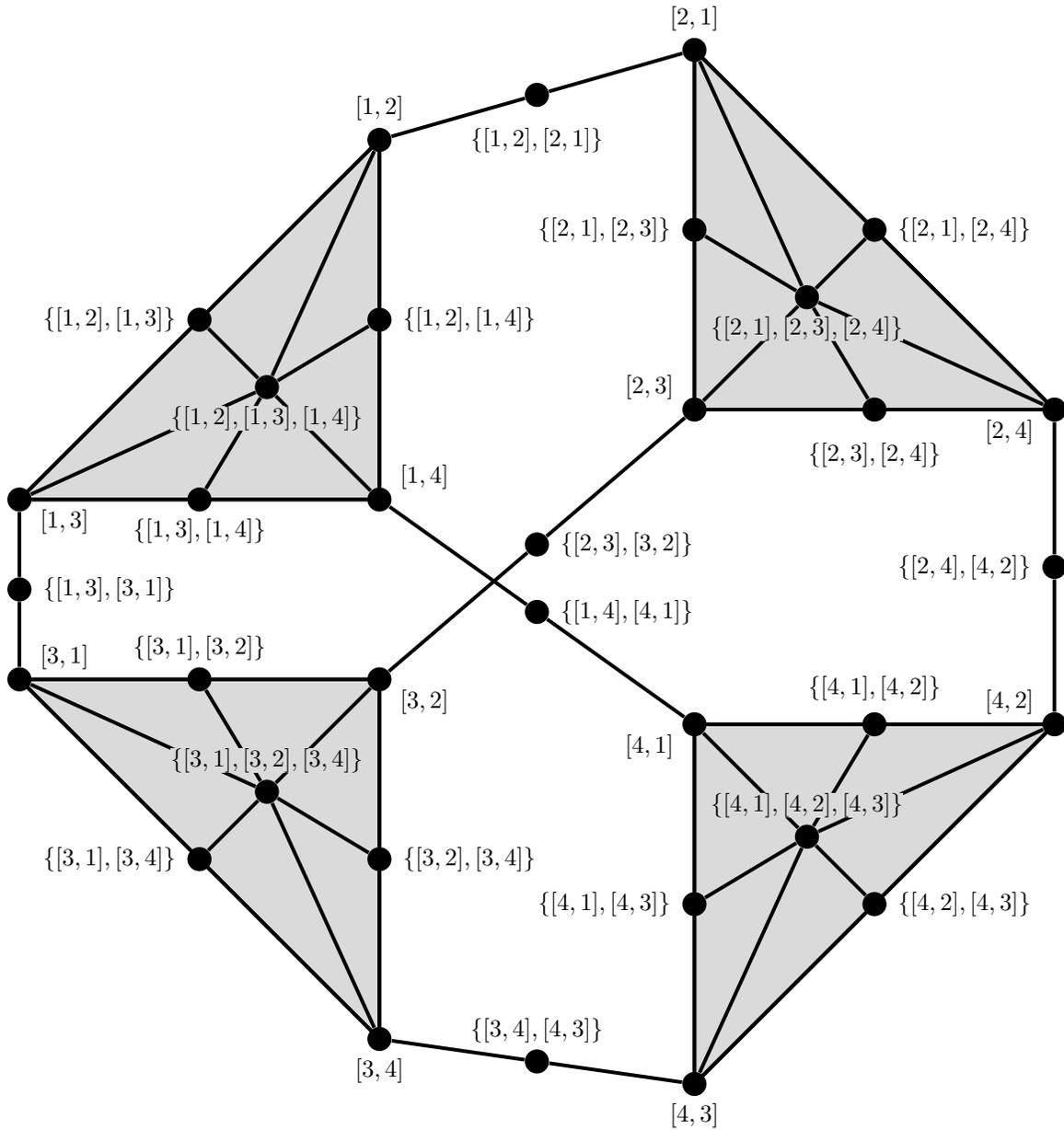


Figura 22: Subdivisión baricéntrica de $\Delta(K(G_{4,2}))$.

Por tanto, para toda λ en $[0, 1]$, definiremos a f_3 de la siguiente manera:

$$f_3(\hat{y}) = \begin{cases} (1 - \frac{\lambda}{2})[a_1, a_2] + \frac{\lambda}{2}[a_2, a_1] & \text{en el primer caso,} \\ (\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_3}{3})[a_1, a_2] + (\frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_3}{3})[a_1, a_3] + \frac{\lambda_3}{3}[a_1, a_4] & \text{en el segundo caso.} \end{cases}$$

La continuidad de f_3 se demuestra de manera análoga a la manera en como se demostró la continuidad de f_1 .

Veamos ahora que la función f_3 preserva la acción del grupo S_4 .

Sea $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix} \in S_4$. Analicemos primero el caso:

$$\hat{y} = (1 - \lambda)[a_1, a_2] + \lambda\{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\}.$$

Dado que $\sigma\hat{y} = (1 - \lambda)[u_1, u_2] + \lambda\{[u_1, u_2], [u_2, u_1]\}$ entonces:

$$f_3(\sigma\hat{y}) = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)[u_1, u_2] + \frac{\lambda}{2}[u_2, u_1].$$

Y,

$$\sigma f_3(\hat{y}) = \sigma \left(\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)[a_1, a_2] + \frac{\lambda}{2}[a_2, a_1] \right) = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)[u, v] + \frac{\lambda}{2}[u_2, u_1].$$

Por lo que $f_3(\sigma\hat{y}) = \sigma f_3(\hat{y})$ para este caso.

Por otro lado, si $\hat{y} = \lambda_1[a_1, a_2] + \lambda_2\{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\} + \lambda_3\{[a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_1, a_4]\}$. Dado que:

$$\begin{aligned} \sigma\hat{y} &= \sigma(\lambda_1[a_1, a_2] + \lambda_2\{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\} + \lambda_3\{[a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_1, a_4]\}) \\ &= \lambda_1[u_1, u_2] + \lambda_2\{[u_1, u_2], [u_1, u_3]\} + \lambda_3\{[u_1, u_2], [u_1, u_3], [u_1, u_4]\}, \end{aligned}$$

podemos calcular nuevamente $f_3(\sigma\hat{y})$ y $\sigma f_3(\hat{y})$:

$$f_3(\sigma\hat{y}) = \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_3}{3}\right)[u_1, u_2] + \left(\frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_3}{3}\right)[u_1, u_3] + \frac{\lambda_3}{3}[u_1, u_4],$$

$$\begin{aligned} \sigma f_3(\hat{y}) &= \sigma \left(\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_3}{3}\right)[a_1, a_2] + \left(\frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_3}{3}\right)[a_1, a_3] + \frac{\lambda_3}{3}[a_1, a_4] \right) \\ &= \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_3}{3}\right)[u_1, u_2] + \left(\frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_3}{3}\right)[u_1, u_3] + \frac{\lambda_3}{3}[u_1, u_4]. \end{aligned}$$

Como en este caso también $f_3(\sigma\hat{y}) = \sigma f_3(\hat{y})$ tenemos por tanto que para toda $\hat{y} \in \hat{Y}$ y $\sigma \in S_4$, $\sigma f_3(y) = f_3(\sigma\hat{y})$.

Ahora, para definir g_3 notemos que todo punto $y \in Y$ puede encontrarse en un 1-simplejo, es decir $y \in \langle [a_1, a_2], [a_2, a_1] \rangle$ o en un 2-simplejo, $y \in \langle [a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_1, a_4] \rangle$. De modo que, basándonos en la imagen de f_3 , tenemos que $y \in Y$ puede ser:

$$y = \lambda \left(\frac{[a_1, a_2]}{2} + \frac{[a_2, a_1]}{2} \right) + (1 - \lambda)[a_1, a_2] = \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) [a_1, a_2] + \frac{\lambda}{2} [a_2, a_1],$$

con $\lambda \in [0, 1]$ como primer caso, o bien:

$$\begin{aligned} y &= \lambda_1 [a_1, a_2] + \lambda_2 \left(\frac{[a_1, a_2] + [a_1, a_3]}{2} \right) + \lambda_3 \left(\frac{[a_1, a_2] + [a_1, a_3] + [a_1, a_4]}{3} \right) \\ &= \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_3}{3} \right) [a_1, a_2] + \left(\frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_3}{3} \right) [a_1, a_3] + \frac{\lambda_3}{3} [a_1, a_4], \end{aligned}$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1]$ tal que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ como el segundo. Por tanto, definiremos a g_3 de la siguiente manera:

$$g_3(y) = \begin{cases} (1 - \lambda)[a_1, a_2] + \lambda[a_2, a_1] & \text{en el primer caso ,} \\ \lambda_1 [a_1, a_2] + \lambda_2 \{ [a_1, a_2], [a_1, a_3] \} \\ \quad + \lambda_3 \{ [a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_1, a_4] \} & \text{en el segundo caso .} \end{cases}$$

La prueba de que g_3 es una función continua se hace de manera análoga a la manera en como se demostró la continuidad de f_1 .

Veamos que esta función preserva la acción del grupo S_4 .

Sea $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix} \in S_4$. Por un lado, si $y = \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) [a_1, a_2] + \frac{\lambda}{2} [a_2, a_1]$, dado que:

$$\sigma y = \sigma \left(\left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) [a_1, a_2] + \frac{\lambda}{2} [a_2, a_1] \right) = \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) [u_1, u_2] + \frac{\lambda}{2} [u_2, u_1],$$

entonces calculando $\sigma g_3(y)$ y $g_3(\sigma y)$, tenemos que:

$$\sigma g_3(y) = \sigma \left(\left(1 - \lambda \right) [a_1, a_2] + \lambda [a_2, a_1] \right) = \left(1 - \lambda \right) [u_1, u_2] + \lambda [u_2, u_1],$$

y

$$g_3(\sigma y) = \left(1 - \lambda \right) [u_1, u_2] + \lambda [u_2, u_1],$$

lo que implica que $\sigma g_3(y) = g_3(\sigma y)$.

Por otro lado si $y = (\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_3}{3}) [a_1, a_2] + (\frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_3}{3}) [a_1, a_3] + \frac{\lambda_3}{3} [a_1, a_4]$, como:

$$\begin{aligned} \sigma y_2 &= \sigma \left(\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_3}{3} \right) [a_1, a_2] + \left(\frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_3}{3} \right) [a_1, a_3] + \frac{\lambda_3}{3} [a_1, a_4] \right) \\ &= \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_3}{3} \right) [u_1, u_2] + \left(\frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_3}{3} \right) [u_1, u_3] + \frac{\lambda_3}{3} [u_1, u_4], \end{aligned}$$

entonces calculando $\sigma g_3(y)$ y $g_3(\sigma y)$, tenemos que:

$$g_3(\sigma y) = \lambda_1 [u_1, u_2] + \lambda_2 \{[u_1, u_2], [u_1, u_3]\} + \lambda_3 \{[u_1, u_2], [u_1, u_3], [u_1, u_4]\},$$

y

$$\begin{aligned} \sigma g_3(y) &= \sigma(\lambda_1 [a_1, a_2] + \lambda_2 \{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\} + \lambda_3 \{[a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_1, a_4]\}) \\ &= \lambda_1 [u_1, u_2] + \lambda_2 \{[u_1, u_2], [u_1, u_3]\} + \lambda_3 \{[u_1, u_2], [u_1, u_3], [u_1, u_4]\}. \end{aligned}$$

Por tanto, para toda $y \in Y$ y $\sigma \in S_4$ tenemos que $\sigma g_3(y) = g_3(\sigma y)$.

Ahora, notemos que por construcción $(g_3 \circ f_3)(\hat{y}) = \hat{y}$ y $(f_3 \circ g_3)(y) = y$, lo que implica que se preserva la acción del grupo S_4 . De este modo, Y y \hat{Y} son S_4 -homotópicamente equivariantes.

Por último, queremos probar que $\text{sd}(\Delta(G_{4,2})) \simeq_{S_4} \text{sd}(\Delta(K(G_{4,2})))$. Para ello, procedemos a obtener los copos asociados a los complejos simpliciales de $\text{sd}(\Delta(G_{4,2}))$ y $\text{sd}(\Delta(K(G_{4,2})))$ (definición 2.3.11), a los cuales denotaremos como \tilde{X} y \tilde{Y} respectivamente. Recordemos que en la figura 18 y en la figura 21 se muestran sus diagramas.

Entonces, definamos $f_2 : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ y $g_2 : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$ de la siguiente manera:

$$f_2(\tilde{x}) = \begin{cases} [a_1, a_2] & \text{si } \tilde{x} = [a_1, a_2], \\ \{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\} & \text{si } \tilde{x} = a_1 a_2, \\ \{[a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_1, a_4]\} & \text{si } \tilde{x} = a_1. \end{cases}$$

$$g_2(\tilde{y}) = \begin{cases} [a_1, a_2] & \text{si } \tilde{y} = [a_1, a_2], \\ a_1 a_2 & \text{si } \tilde{y} = \{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\}, \\ a_1 & \text{si } \tilde{y} \in \{ \{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\}, \{[a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_1, a_4]\} \}. \end{cases}$$

Veamos que f_2 y g_2 preservan la acción del grupo S_4 .

Sea $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix} \in S_4$. Por un lado notemos que si $\tilde{x} \in \tilde{X}$, entonces:

$$\sigma\tilde{x} = \begin{cases} \sigma[a_1, a_2] = [u_1, u_2] & \text{si } \tilde{x} = [a_1, a_2] \\ \sigma a_1 a_2 = u_1 u_2 & \text{si } \tilde{x} = a_1 a_2, \\ \sigma a_1 = u_1 & \text{si } \tilde{x} = a_1. \end{cases}$$

Luego,

$$\sigma f_2(\tilde{x}) = \begin{cases} \sigma[a_1, a_2] = [u_1, u_2] & \text{si } \tilde{x} = [a_1, a_2], \\ \sigma\{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\} = \{[u_1, u_2], [u_2, u_1]\} & \text{si } \tilde{x} = a_1 a_2, \\ \sigma\{[a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_1, a_4]\} = \{[u_1, u_2], [u_1, u_3], [u_1, u_4]\} & \text{si } \tilde{x} = a_1. \end{cases}$$

Y

$$f_2(\sigma\tilde{x}) = \begin{cases} [u_1, u_2] & \text{si } \tilde{x} = [a_1, a_2], \\ \{[u_1, u_2], [u_2, u_1]\} & \text{si } \tilde{x} = a_1 a_2, \\ \{[u_1, u_2], [u_1, u_3], [u_1, u_4]\} & \text{si } \tilde{x} = a_1. \end{cases}$$

De modo que $\sigma f_2(\tilde{x}) = f_2(\sigma\tilde{x})$ para toda $\tilde{x} \in \tilde{X}$ y $\sigma \in S_4$. Por tanto, f_2 es equivariante.

Por otro lado, si $\tilde{y} \in \tilde{Y}$.

$$\sigma\tilde{y} = \begin{cases} \sigma[a_1, a_2] = [u_1, u_2] & \text{si } \tilde{y} = [a_1, a_2], \\ \sigma\{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\} = \{[u_1, u_2], [u_2, u_1]\} & \text{si } \tilde{y} = \{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\}, \\ \sigma\{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\} \\ = \{[u_1, u_2], [u_1, u_3]\} & \text{si } \tilde{y} = \{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\}, \\ \sigma\{[a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_1, a_4]\} \\ = \{[u_1, u_2], [u_1, u_3], [u_1, u_4]\} & \text{si } \tilde{y} = \{[a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_1, a_4]\}. \end{cases}$$

Entonces,

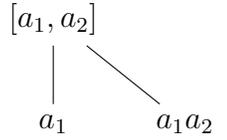
$$\sigma g_2(\tilde{y}) = \begin{cases} \sigma[a_1, a_2] = [u_1, u_2] & \text{si } \tilde{y} = [a_1, a_2], \\ \sigma a_1 a_2 = u_1 u_2 & \text{si } \tilde{y} = \{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\}, \\ \sigma a_1 = u_1 & \text{si } \tilde{y} \in \{\{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\}, \{[a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_1, a_4]\}\}. \end{cases}$$

Y,

$$g_2(\sigma\tilde{y}) = \begin{cases} [u_1, u_2] & \text{si } \tilde{y} = [a_1, a_2], \\ u_1 u_2 & \text{si } \tilde{y} = \{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\}, \\ u_1 & \text{si } \tilde{y} \in \{\{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\}, \{[a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_1, a_4]\}\}. \end{cases}$$

De modo que $\sigma g_2(\tilde{y}) = g_2(\sigma\tilde{y})$ para toda $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ y $\sigma \in S_4$. Por tanto, g_2 es equivariante.

Ahora, notemos que en general en \tilde{X} se tiene el siguiente diagrama:



Por lo que $a_1 \leq [a_1, a_2]$ y $a_1 a_2 \leq [a_1, a_2]$. Luego, dado que:

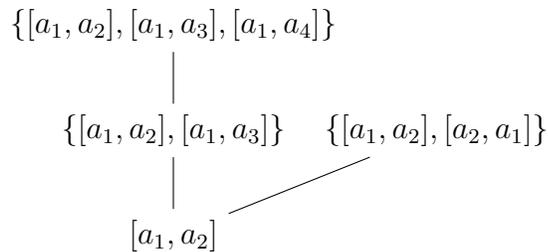
$$f_2(a_1) = \{[a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_1, a_4]\} \geq [a_1, a_2] = f_2([a_1, a_2]),$$

y

$$f_2(a_1 a_2) = \{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\} \geq [a_1, a_2] = f_2([a_1, a_2]),$$

entonces se tiene que f_2 invierte el orden.

Por otro lado, para \tilde{Y} tenemos en general el siguiente diagrama:



Por lo que:

$$\begin{aligned} [a_1, a_2] &\leq \{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\}, \\ [a_1, a_2] &\leq \{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\}, \\ [a_1, a_2] &\leq \{[a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_1, a_4]\}, \\ \{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\} &\leq \{[a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_1, a_4]\}. \end{aligned}$$

Entonces, dado que:

$$\begin{aligned} g_2([a_1, a_2]) &= [a_1, a_2] \geq a_1 a_2 = g_2(\{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\}), \\ g_2([a_1, a_2]) &= [a_1, a_2] \geq a_1 = g_2(\{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\}), \\ g_2([a_1, a_2]) &= [a_1, a_2] \geq a_1 = g_2(\{[a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_1, a_4]\}), \\ g_2(\{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\}) &= a_1 = g_2(\{[a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_1, a_4]\}), \end{aligned}$$

tenemos que g_2 invierte el orden.

Finalmente, notemos que:

$$(g_2 \circ f_2)(\tilde{x}) = \begin{cases} [a_1, a_2] & \text{si } \tilde{x} = [a_1, a_2], \\ a_1 a_2 & \text{si } \tilde{x} = a_1 a_2, \\ a_1 & \text{si } \tilde{x} = a_1. \end{cases}$$

Y

$$(f_2 \circ g_2)(\tilde{y}) = \begin{cases} [a_1, a_2] & \text{si } \tilde{y} = [a_1, a_2], \\ \{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\} & \text{si } \tilde{y} = \{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\}, \\ \{[a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_1, a_4]\} & \text{si } \tilde{y} \in \{\{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\}, \{[a_1, a_2], [a_1, a_3], [a_1, a_4]\}\}. \end{cases}$$

Por lo que tenemos que $(g_2 \circ f_2)(\tilde{x}) = \tilde{x}$ para toda $\tilde{x} \in \tilde{X}$ y $(f_2 \circ g_2)(\tilde{y}) \geq \tilde{y}$ para toda $\tilde{y} \in \tilde{Y}$. Entonces por el teorema 2.3.15 podemos concluir que \tilde{X} y \tilde{Y} son G -homotópicos y como además f_2 y g_2 son tales que $f_2(\sigma\tilde{x}) = \sigma f_2(\tilde{x})$ y $g_2(\sigma\tilde{y}) = \sigma g_2(\tilde{y})$ para toda $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ y $\sigma \in S_4$ tenemos que \tilde{X} y \tilde{Y} son homotópicamente equivariantes. Lo cual implica que $\Delta(G_{4,2}) \simeq_{S_4} \Delta(K(G_{4,2}))$ como se quería.

Esto implica que las representaciones de S_4 en las homologías de $G_{4,2}$ y $K(G_{4,2})$ son isomorfas.

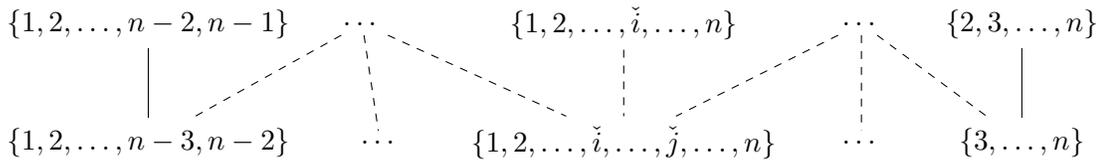


Figura 23: Diagrama de $\bar{\mathcal{B}}_n^{n-2}$, donde $\check{\cdot}$ denota eliminación, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e $i \neq j$.

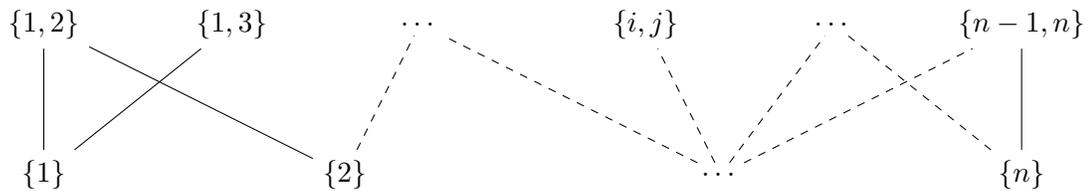


Figura 24: Diagrama de $\bar{\mathcal{B}}_n^{(n-2)}$, con $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y $1 \leq i < j \leq n$.

3.3 La retícula booleana truncada $\bar{\mathcal{B}}_n^{n-2}$

Consideremos el copo de $\bar{\mathcal{B}}_n^{n-2}$, el cual es ilustrado en el diagrama de la figura 23. Recordemos que para simplificar notación trabajaremos con un copo isomorfo a este, ilustrado en el diagrama de la figura 24.

Procedamos a obtener la gráfica de comparabilidad del copo $\bar{\mathcal{B}}_n^{n-2}$ (definición 2.3.12), denotada como $G_{n,n-2}$ y el complejo simplicial asociado a esta, $\Delta(G_{n,n-2})$ (definición 2.6.7).

Notemos que el complejo simplicial de $G_{n,n-2}$ puede dibujarse dentro de una pirámide con base un polígono de $n-1$ lados o en un polígono de n lados. En las figuras 25 y 26 tenemos el ejemplo de este dibujo para $n=5$ y en las figuras 27 y 28 para $n=6$.

En el resto de la demostración, simplificamos la notación eliminando corchetes y comas para garantizar una presentación más clara y concisa. Además, utilizaremos la notación $[a, b]$ para representar el conjunto $\{a, ab\}$, donde $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $a \neq b$. Por ejemplo, $[4, 2]$ denota el conjunto $\{4, 24\}$, mientras que $[2, 4]$ representa el conjunto $\{2, 24\}$. Estas simplificaciones no afectan la validez de la demostración, ya que el grupo simétrico actúa de manera consistente con tales notaciones.

Ahora, consideremos la subdivisión baricéntrica de $\Delta(G_{n,n-2})$, $\text{sd}(\Delta(G_{n,n-2}))$. El dibujo de su diagrama lo encontramos en la figura 29.

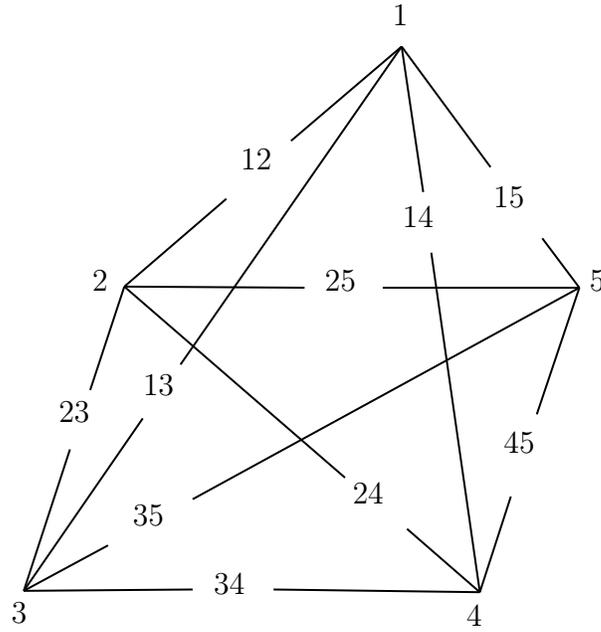


Figura 25: Complejo simplicial de $G_{5,3}$ dibujado en una pirámide cuadrangular.

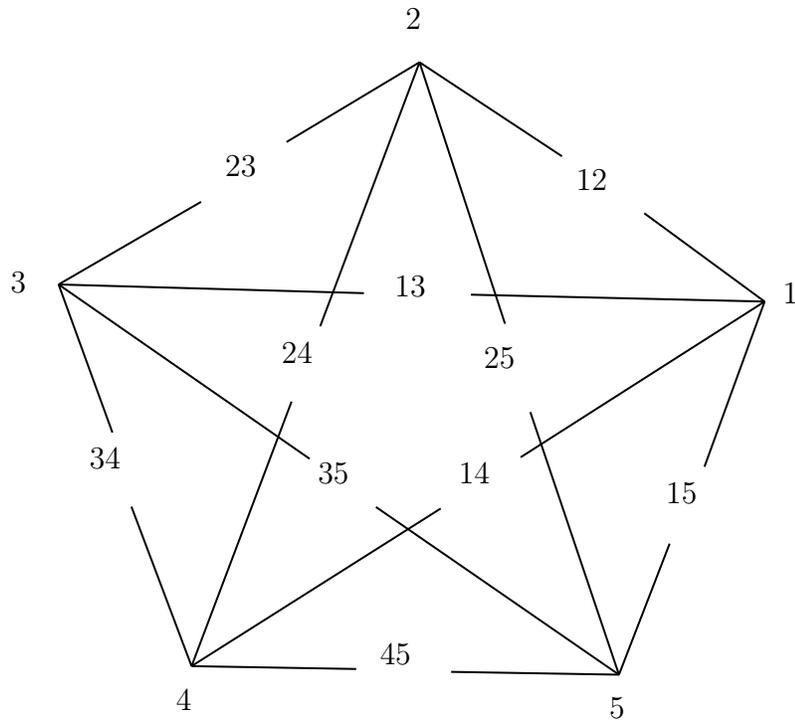


Figura 26: Complejo simplicial de $G_{5,3}$ dibujado en un pentágono.

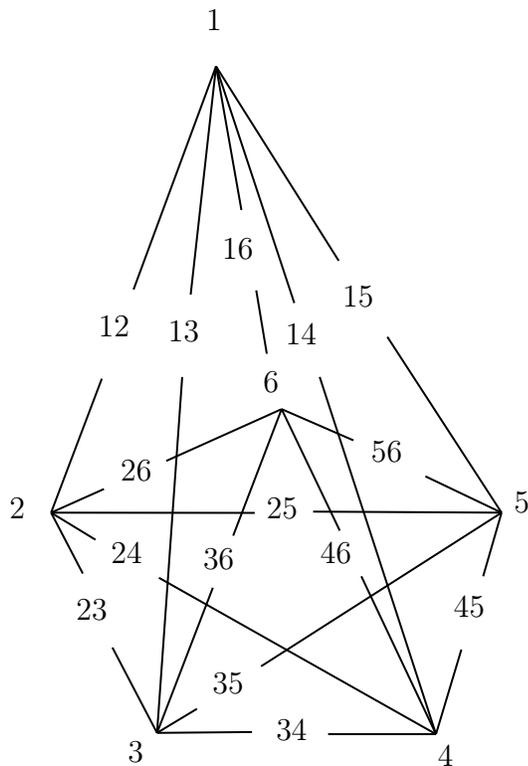


Figura 27: Complejo simplicial de $G_{6,4}$ dibujado en una pirámide pentagonal.

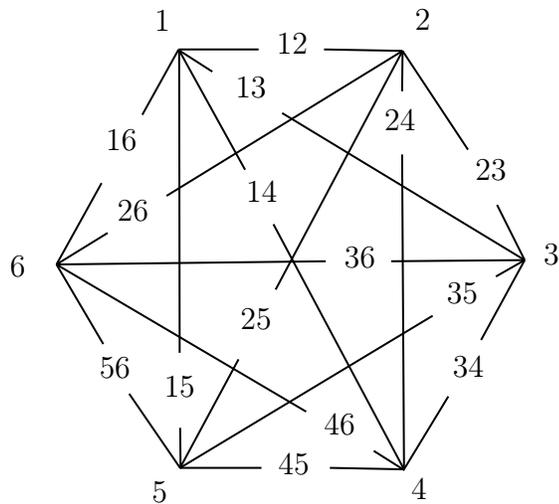
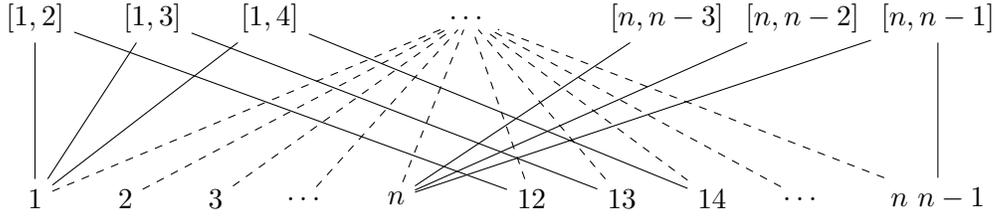


Figura 28: Complejo simplicial de $G_{6,4}$ dibujado en un hexágono.


 Figura 29: Diagrama de $\text{sd}(\Delta(G_{n,n-2}))$.

Sean $X = \Delta(G_{n,n-2})$ y $\hat{X} = \text{sd}(\Delta(G_{n,n-2}))$. Aunque es inmediato que estos dos espacios son homeomorfos, nosotros queremos demostrar que estos dos espacios son de hecho homotópicamente equivariantes, para ello vamos a definir funciones $f_1: X \rightarrow \hat{X}$ y $g_1: \hat{X} \rightarrow X$, G -equivalencias homotópicas que preserven la acción del grupo $G = S_n$.

Recordemos que si x se encuentra en el $(k-1)$ -simplejo con vértices v_1, v_2, \dots, v_k lo representamos como $x \in \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$.

Comencemos observando que todo 1-simplejo (segmento) en $\Delta(G_{n,n-2})$ va de a_1 a $a_1 a_2$ con $a_1, a_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $a_1 \neq a_2$, de modo que todo punto $x \in \langle a_1, a_1 a_2 \rangle$ se ve de la forma $x = \lambda a_1 a_2 + (1 - \lambda) a_1$ con $\lambda \in [0, 1]$. Por lo que definimos f_1 de la siguiente manera:

$$f_1(x) = \begin{cases} (1 - 2\lambda)a_1 + 2\lambda[a_1, a_2] & \text{si } \lambda \in [0, \frac{1}{2}], \\ (2 - 2\lambda)[a_1, a_2] + (2\lambda - 1)a_1 a_2 & \text{si } \lambda \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Observemos que f_1 está bien definida ya que para $\lambda = \frac{1}{2}$ se tiene que:

$$(1 - 2\lambda)a_1 + 2\lambda[a_1, a_2] = [a_1, a_2] = (2 - 2\lambda)[a_1, a_2] + (2\lambda - 1)a_1 a_2.$$

Además, como vimos en la sección anterior, f_1 es continua en los dos subintervalos cerrados $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$, por lo que f_1 es continua para toda $\lambda \in [0, 1]$.

Veamos que f_1 preserve la acción del grupo S_n .

Sean $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} \in S_n$ y $x = \lambda a_1 a_2 + (1 - \lambda) a_1$. Primero consideremos el caso cuando λ está en el intervalo cerrado $[0, \frac{1}{2}]$. Por un lado tenemos que:

$$\sigma f_1(x) = \sigma((1 - 2\lambda)a_1 + 2\lambda[a_1, a_2]) = (1 - 2\lambda)u_1 + 2\lambda[u_1, u_2],$$

mientras que $\sigma x = \sigma(\lambda a_1 a_2 + (1 - \lambda) a_1) = \lambda u_1 u_2 + (1 - \lambda) u_1$. Por lo tanto,

$$f_1(\sigma x) = (1 - 2\lambda)u_1 + 2\lambda[u_1, u_2] = \sigma f_1(x).$$

Por otro lado, si consideramos el caso cuando λ está en el intervalo cerrado $[\frac{1}{2}, 1]$, tenemos que:

$$\sigma f_1(x) = \sigma((2 - 2\lambda)[a_1, a_2] + (2\lambda - 1)a_1 a_2) = (2 - 2\lambda)[u_1, u_2] + (2\lambda - 1)u_1 u_2,$$

y como $f_1(\sigma x) = (2 - 2\lambda)[u_1, u_2] + (2\lambda - 1)u_1 u_2 = \sigma f_1(x)$, tenemos por lo tanto que para toda $x \in X$ y $\sigma \in S_n$, $\sigma f_1(x) = f_1(\sigma x)$.

Para definir g_1 notemos que todo punto $\hat{x} \in \text{sd}(\Delta(G_{n,n-2}))$ puede estar en el 1-simplejo $\langle a_1, [a_1, a_2] \rangle$ o en 1-simplejo $\langle a_1 a_2, [a_1, a_2] \rangle$, donde $a_1, a_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $a_1 \neq a_2$. De modo que todo punto $\hat{x} \in \text{sd}(\Delta(G_{n,n-2}))$ es de la forma :

$$\hat{x} = \lambda[a_1, a_2] + (1 - \lambda)a_1 \quad \text{si} \quad \hat{x} \in \langle a_1, [a_1, a_2] \rangle,$$

o de la forma:

$$\hat{x} = \lambda a_1 a_2 + (1 - \lambda)[a_1, a_2] \quad \text{si} \quad \hat{x} \in \langle a_1 a_2, [a_1, a_2] \rangle,$$

por tanto para toda $\lambda \in [0, 1]$, g_1 puede definirse de la siguiente manera:

$$g_1(\hat{x}) = \begin{cases} (1 - \frac{\lambda}{2})a_1 + \frac{\lambda}{2}a_1 a_2 & \text{si} \quad \hat{x} = \lambda[a_1, a_2] + (1 - \lambda)a_1, \\ (\frac{1-\lambda}{2})a_1 + (\frac{1+\lambda}{2})a_1 a_2 & \text{si} \quad \hat{x} = \lambda a_1 a_2 + (1 - \lambda)[a_1, a_2]. \end{cases}$$

Notemos que g_1 es continua, la prueba es análoga a la manera en que se demostró la continuidad de f_1 .

Veamos que esta función preserva la acción del grupo S_n .

Sea $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} \in S_n$. Analicemos el caso $\hat{x} = \lambda[a_1, a_2] + (1 - \lambda)a_1$. Dado que $\sigma \hat{x} = \lambda[u_1, u_2] + (1 - \lambda)u_1$, podemos calcular $g_1(\sigma \hat{x})$ y $\sigma g_1(\hat{x})$:

$$g_1(\sigma \hat{x}) = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) u_1 + \frac{\lambda}{2} u_1 u_2,$$

$$\sigma g_1(\hat{x}) = \sigma \left(\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) a_1 + \frac{\lambda}{2} a_1 a_2 \right) = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) u_1 + \frac{\lambda}{2} u_1 u_2.$$

Por lo tanto, $g_1(\sigma\hat{x}) = \sigma g_1(\hat{x})$ en este caso.

Ahora, consideremos el caso en el que $\hat{x} = \lambda a_1 a_2 + (1 - \lambda)[a_1, a_2]$. Dado que:

$$\sigma\hat{x} = \sigma(\lambda a_1 a_2 + (1 - \lambda)[a_1, a_2]) = \lambda u_1 u_2 + (1 - \lambda)[u_1, u_2],$$

podemos calcular nuevamente $g_1(\sigma\hat{x})$ y $\sigma g_1(\hat{x})$:

$$g_1(\sigma\hat{x}) = \left(\frac{1 - \lambda}{2}\right) u_1 + \left(\frac{1 + \lambda}{2}\right) u_1 u_2,$$

$$\sigma g_1(\hat{x}) = \sigma\left(\left(\frac{1 - \lambda}{2}\right) a_1 + \left(\frac{1 + \lambda}{2}\right) a_1 a_2\right) = \left(\frac{1 - \lambda}{2}\right) u_1 + \left(\frac{1 + \lambda}{2}\right) u_1 u_2.$$

Como en este caso también $g_1(\sigma\hat{x}) = \sigma g_1(\hat{x})$ tenemos por tanto que para toda $\hat{x} \in \hat{X}$ y $\sigma \in S_n$ se cumple que $\sigma g_1(\hat{x}) = g_1(\sigma\hat{x})$.

Analicemos ahora, si $(g_1 \circ f_1)(x)$ y $(f_1 \circ g_1)(\hat{x})$ son homotópicas a la identidad en X y \hat{X} respectivamente por medio de una homotopía que preserve la acción del grupo S_n , para así determinar si X y \hat{X} son homotópicamente equivariantes.

Empecemos con el caso $(g_1 \circ f_1)(x)$ y tomemos $x = \lambda a_1 a_2 + (1 - \lambda)a_1$, entonces:

$$f_1(x) = (1 - 2\lambda)a_1 + 2\lambda[a_1, a_2] \text{ para } \lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

por lo que estamos en el caso en el que $\hat{x} = \lambda' [a_1, a_2] + (1 - \lambda')a_1$ con $\lambda' = 2\lambda$ entonces:

$$(g_1 \circ f_1)(x) = \left(1 - \frac{\lambda'}{2}\right) a_1 + \frac{\lambda'}{2} a_1 a_2 = (1 - \lambda)a_1 + \lambda a_1 a_2 = x.$$

Por otro lado, para $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$,

$$f_1(x) = (2 - 2\lambda)[a_1, a_2] + (2\lambda - 1)a_1 a_2,$$

por lo cual estamos en el caso cuando $\hat{x} = \lambda' a_1 a_2 + (1 - \lambda')[a_1, a_2]$ con $\lambda' = 2\lambda - 1$ por tanto:

$$\begin{aligned} (g_1 \circ f_1) &= \left(\frac{1 - \lambda'}{2}\right) a_1 + \left(\frac{1 + \lambda'}{2}\right) a_1 a_2 \\ &= \left(\frac{1 - (2\lambda - 1)}{2}\right) a_1 + \left(\frac{1 + (2\lambda - 1)}{2}\right) a_1 a_2 \\ &= (1 - \lambda)a_1 + \lambda a_1 a_2 = x, \end{aligned}$$

de modo que para toda $x \in X$ tenemos que $(g_1 \circ f_1)(x) = x$, es decir, $g_1 \circ f_1$ es la identidad en $X = \Delta(G_{n,n-2})$.

Ahora, para el caso $(f_1 \circ g_1)(\hat{x})$, supongamos que $\hat{x} = \lambda[a_1, a_2] + (1 - \lambda)a_1$, entonces:

$$g_1(\hat{x}) = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) a_1 + \frac{\lambda}{2},$$

de modo que estamos en el caso en el que $x = \lambda' a_1 a_2 + (1 - \lambda') a_1$ y $\lambda' \in [0, \frac{1}{2}]$ con $\lambda' = \frac{\lambda}{2}$ por tanto:

$$(f_1 \circ g_1)(\hat{x}) = (1 - 2\lambda') a_1 + 2\lambda' [a_1, a_2] = (1 - \lambda) a_1 + \lambda [a_1, a_2] = \hat{x}.$$

Luego si $\hat{x} = \lambda a_1 a_2 + (1 - \lambda) [a_1, a_2]$, se tiene que:

$$g_1(\hat{x}) = \left(\frac{1 - \lambda}{2}\right) a_1 + \left(\frac{1 + \lambda}{2}\right) a_1 a_2,$$

por lo que estamos en el caso $x = \lambda' a_1 a_2 + (1 - \lambda') a_1$ y $\lambda' \in [\frac{1}{2}, 1]$ con $\lambda' = \frac{1 + \lambda}{2}$, entonces:

$$\begin{aligned} (f_1 \circ g_1)(\hat{x}) &= (2 - 2\lambda') [a_1, a_2] + (2\lambda' - 1) a_1 a_2 \\ &= \left(2 - 2 \left(\frac{1 + \lambda}{2}\right)\right) [a_1, a_2] + \left(2 \left(\frac{1 + \lambda}{2}\right) - 1\right) a_1 a_2 \\ &= (1 - \lambda) [a_1, a_2] + \lambda a_1 a_2 = \hat{x}, \end{aligned}$$

de modo que para toda $\hat{x} \in \hat{X}$ tenemos que $(f_1 \circ g_1)(\hat{x}) = \hat{x}$.

Dado que se ha demostrado que las composiciones $(g_1 \circ f_1)(x)$ y $(f_1 \circ g_1)(\hat{x})$ son la identidad en los espacios X y \hat{X} respectivamente, esto implica que las funciones f_1 y g_1 establecen una homotopía equivariante entre X y \hat{X} . En otras palabras, los espacios X y \hat{X} son S_n -homotópicamente equivariantes.

Analícemos a continuación el complejo simplicial de la gráfica de clanes de $G_{n,n-2}$, $\Delta(K(G_{n,n-2}))$, cuya gráfica se puede dibujar dentro de un polígono de $2n$ lados con n polígonos interiores de $n - 1$ lados, en donde cada vértice de la forma $[a_1, a_2]$, con $a_1, a_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $a_1 \neq a_2$, tiene una arista con el vértice de la forma $[a_2, a_1]$ y con los vértices de la forma $[a_1, a_i]$, con $a_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $a_i \neq a_1$ para $i \in \{3, 4, \dots, n\}$, como se muestra en la figura 30.

Recordemos que $[a, b]$ con $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $a \neq b$, denota el conjunto $\{a, ab\}$.

Examinemos ahora el dibujo del diagrama de $\text{sd}(\Delta(K(G_{n,n-2})))$, ver figura 31.

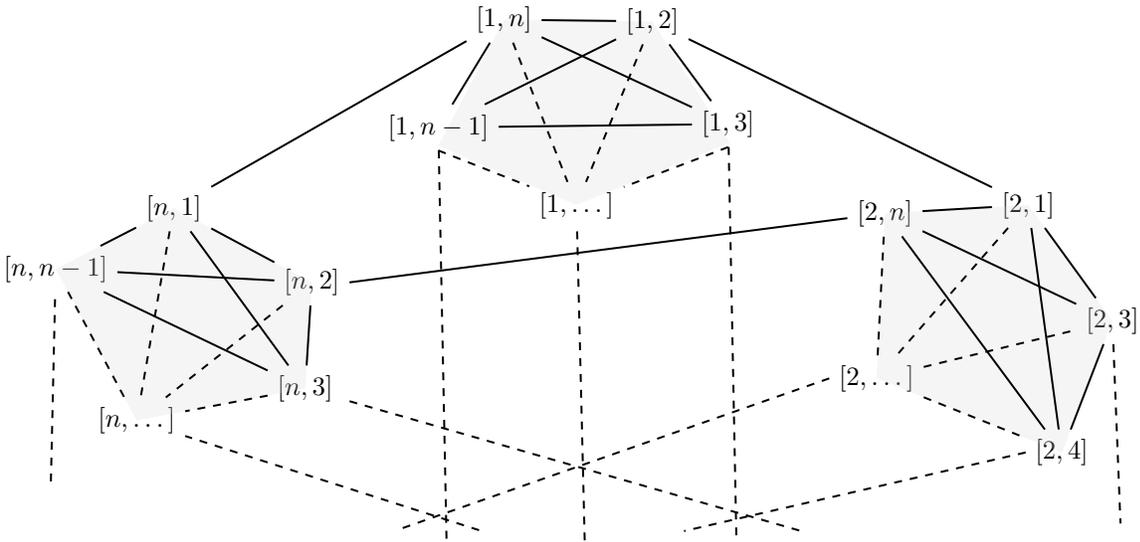


Figura 30: Complejo simplicial de la gráfica de clanes de $G_{n,n-2}$.

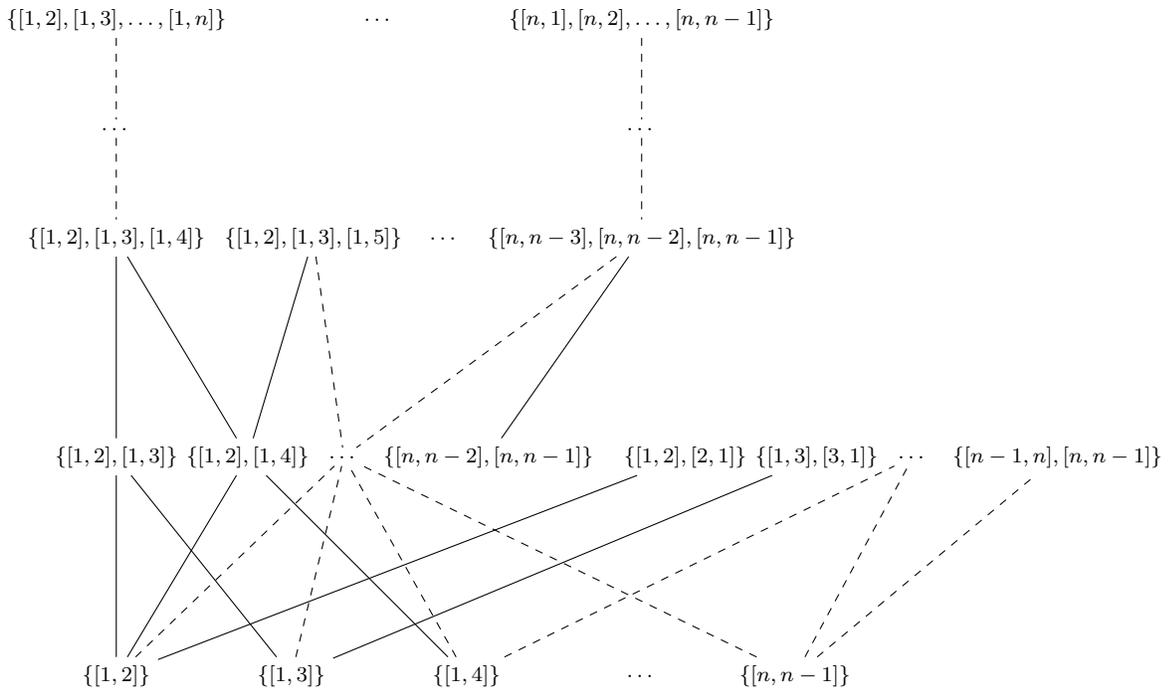


Figura 31: Diagrama de $\text{sd}(\Delta(K(G_{n,n-2})))$.

3.3 La retícula booleana truncada $\tilde{\mathcal{B}}_n^{n-2}$

Sean $Y = \Delta(K(G_{n,n-2}))$ y $\hat{Y} = \text{sd}(\Delta(K(G_{n,n-2})))$, queremos demostrar que estos espacios son homotópicamente equivariantes, para ello vamos a definir funciones $f_3: \hat{Y} \rightarrow Y$ y $g_3: Y \rightarrow \hat{Y}$ G -equivalencias homotópicas que preserven la acción del grupo $G = S_n$.

Empecemos definiendo f_3 . Para ello, notemos que todo punto $\hat{y} \in \hat{Y}$ puede estar en un 1-simplejo de la forma

$$\langle [a_1, a_2], \{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\} \rangle,$$

o en un $(n-1)$ -simplejo de la forma:

$$\langle [a_1, a_2], \{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\}, \dots, \{[a_1, a_2], [a_1, a_3], \dots, [a_1, a_n]\} \rangle,$$

donde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{1, 2, \dots, n\}$ con $a_i \neq a_j$ para toda $i \neq j$. Por tanto, si \hat{y} está en un 1-simplejo, entonces \hat{y} es de la forma:

$$\hat{y} = (1 - \lambda)[a_1, a_2] + \lambda\{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\}.$$

Si \hat{y} está en un $(n-1)$ -simplejo, entonces \hat{y} es de la forma:

$$\hat{y} = \lambda_1[a_1, a_2] + \lambda_2\{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\} + \dots + \lambda_{n-1}\{[a_1, a_2], [a_1, a_3], \dots, [a_1, a_n]\}.$$

Por tanto, para toda λ en $[0, 1]$, definiremos a f_3 de la siguiente manera:

$$f_3(\hat{y}) = \begin{cases} \left((1 - \frac{\lambda}{2})[a_1, a_2] + \frac{\lambda}{2}[a_2, a_1] \right) & \text{en el primer caso,} \\ \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{n-1} \right) [a_1, a_2] & \text{en el segundo caso.} \\ \quad + \left(\frac{\lambda_2}{2} + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{n-1} \right) [a_1, a_3] + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{n-1} [a_1, a_n] \end{cases}$$

La continuidad de f_3 se demuestra de manera análoga a la manera en como se demostró la continuidad de f_1 .

Veamos que esta función preserva la acción del grupo S_n .

Sea $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} \in S_n$. Analicemos primero el caso:

$$\hat{y} = (1 - \lambda)[a_1, a_2] + \lambda\{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\}.$$

Dado que $\sigma\hat{y} = (1 - \lambda)[u_1, u_2] + \lambda\{[u_1, u_2], [u_2, u_1]\}$ entonces:

$$f_3(\sigma\hat{y}) = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) [u_1, u_2] + \frac{\lambda}{2}[u_2, u_1].$$

Y,

$$\sigma f_3(\hat{y}) = \sigma \left(\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) [a_1, a_2] + \frac{\lambda}{2}[a_2, a_1] \right) = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) [u, v] + \frac{\lambda}{2}[u_2, u_1].$$

Por lo que $f_3(\sigma\hat{y}) = \sigma f_3(\hat{y})$ en este caso.

Por otro lado, si

$$\hat{y} = \lambda_1[a_1, a_2] + \lambda_2\{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\} + \cdots + \lambda_{n-1}\{[a_1, a_2], [a_1, a_3], \dots, [a_1, a_n]\}.$$

Dado que:

$$\begin{aligned} \sigma\hat{y} &= \sigma(\lambda_1[a_1, a_2] + \lambda_2\{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\} + \cdots + \lambda_{n-1}\{[a_1, a_2], [a_1, a_3], \dots, [a_1, a_n]\}) \\ &= \lambda_1[u_1, u_2] + \lambda_2\{[u_1, u_2], [u_1, u_3]\} + \cdots + \lambda_{n-1}\{[u_1, u_2], [u_1, u_3], \dots, [u_1, u_n]\}, \end{aligned}$$

podemos calcular nuevamente $f_3(\sigma\hat{y})$ y $\sigma f_3(\hat{y})$:

$$\begin{aligned} f_3(\sigma\hat{y}) &= \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{n-1}\right) [u_1, u_2] + \left(\frac{\lambda_2}{2} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{n-1}\right) [u_1, u_3] + \cdots \\ &\quad + \frac{\lambda_{n-1}}{n-1}[u_1, u_n]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma f_3(\hat{y}) &= \sigma \left(\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{n-1}\right) [a_1, a_2] + \left(\frac{\lambda_2}{2} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{n-1}\right) [a_1, a_3] + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_{n-1}}{n-1}[a_1, a_n] \right) \\ &= \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{n-1}\right) [u_1, u_2] + \left(\frac{\lambda_2}{2} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{n-1}\right) [u_1, u_3] + \cdots \\ &\quad + \frac{\lambda_{n-1}}{n-1}[u_1, u_n]. \end{aligned}$$

Como en este caso también $f_3(\sigma\hat{y}) = \sigma f_3(\hat{y})$ tenemos por tanto que para toda $\hat{y} \in \hat{Y}$ y $\sigma \in S_n$, $\sigma f_3(\hat{y}) = f_3(\sigma\hat{y})$.

Para definir g_3 , notemos que todo punto $y \in Y$ puede estar en un 1-simplejo, es decir, $y \in \langle [a_1, a_2], [a_2, a_1] \rangle$ o bien en un $(n-1)$ -simplejo $y \in \langle [a_1, a_2], [a_1, a_3], \dots, [a_1, a_n] \rangle$. De modo que basándonos en la imagen de f_3 , tenemos que $y \in Y$ puede ser:

$$y = \lambda \left(\frac{[a_1, a_2]}{2} + \frac{[a_2, a_1]}{2} \right) + (1 - \lambda)[a_1, a_2] = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) [a_1, a_2] + \frac{\lambda}{2}[a_2, a_1],$$

como primer caso, o bien:

$$\begin{aligned} y &= \lambda_1[a_1, a_2] + \lambda_2 \left(\frac{[a_1, a_2] + [a_1, a_3]}{2} \right) + \cdots + \lambda_{n-1} \left(\frac{[a_1, a_2] + [a_1, a_3] + \cdots + [a_1, a_{n-1}]}{n-1} \right) \\ &= \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{n-1} \right) [a_1, a_2] + \left(\frac{\lambda_2}{2} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{n-1} \right) [a_1, a_3] + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{n-1} [a_1, a_n], \end{aligned}$$

como segundo caso. Por tanto, definiremos a g_3 de la siguiente manera:

$$g_3(y) = \begin{cases} (1 - \lambda)[a_1, a_2] + \lambda[a_2, a_1] & \text{en el primer caso,} \\ \lambda_1[a_1, a_2] + \lambda_2\{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\} & \text{en el segundo caso.} \\ \quad + \cdots + \lambda_{n-1}\{[a_1, a_2], [a_1, a_3], \dots, [a_1, a_n]\} \end{cases}$$

La prueba de que g_3 es una función continua se hace de manera análoga a como se demostró la continuidad de f_1 .

Veamos que esta función preserva la acción del grupo S_n .

Sea $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \in S_n$. En el primer caso, dado que:

$$\sigma y = \sigma \left(\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) [a_1, a_2] + \frac{\lambda}{2} [a_2, a_1] \right) = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) [u_1, u_2] + \frac{\lambda}{2} [u_2, u_1],$$

entonces calculando $\sigma g_3(y)$ y $g_3(\sigma y)$, tenemos que:

$$\sigma g_3(y) = \sigma \left((1 - \lambda)[a_1, a_2] + \lambda[a_2, a_1] \right) = (1 - \lambda)[u_1, u_2] + \lambda[u_2, u_1],$$

y

$$g_3(\sigma y) = (1 - \lambda)[u_1, u_2] + \lambda[u_2, u_1],$$

lo que implica que $\sigma g_3(y) = g_3(\sigma y)$.

Por otro lado, en el segundo caso se tiene que:

$$\begin{aligned} \sigma y &= \sigma \left(\left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{n-1} \right) [a_1, a_2] + \left(\frac{\lambda_2}{2} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{n-1} \right) [a_1, a_3] + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{n-1} [a_1, a_n] \right) \\ &= \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{n-1} \right) [u_1, u_2] + \left(\frac{\lambda_2}{2} + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{n-1} \right) [u_1, u_3] + \cdots + \frac{\lambda_{n-1}}{n-1} [u_1, u_n], \end{aligned}$$

entonces calculando $g_3(\sigma y)$ y $\sigma g_3(y)$, tenemos que:

$$g_3(\sigma y) = \lambda_1[u_1, u_2] + \lambda_2\{[u_1, u_2], [u_1, u_3]\} + \cdots + \lambda_{n-1}\{[u_1, u_2], [u_1, u_3], \dots, [u_1, u_n]\},$$

y

$$\begin{aligned}\sigma g_3(y) &= \sigma(\lambda_1[a_1, a_2] + \lambda_2\{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\} + \cdots + \lambda_{n-1}\{[a_1, a_2], \dots, [a_1, a_n]\}) \\ &= \lambda_1[u_1, u_2] + \lambda_2\{[u_1, u_2], [u_1, u_3]\} + \cdots + \lambda_{n-1}\{[u_1, u_2], \dots, [u_1, u_n]\}.\end{aligned}$$

Por tanto, para toda $y \in Y$ y $\sigma \in S_n$ tenemos que $\sigma g_3(y) = g_3(\sigma y)$.

Ahora, notemos que por construcción $(g_3 \circ f_3)(\hat{y}) = \hat{y}$ y $(f_3 \circ g_3)(y) = y$, lo que implica que se preserva la acción del grupo S_n . De este modo, Y y \tilde{Y} son S_n -homotópicamente equivariantes.

Por último, queremos probar que $\text{sd}(\Delta(G_{n,n-2})) \simeq_{s_n} \text{sd}(\Delta(K(G_{n,n-2})))$. Para ello, procedemos a obtener los copos asociados a los complejos simpliciales de $\text{sd}(\Delta(G_{n,n-2}))$ y $\text{sd}(\Delta(K(G_{n,n-2})))$ (definición 2.3.11), a los cuales denotaremos como \tilde{X} y \tilde{Y} respectivamente. Recordemos que en la figura 24 y en la figura 31 se muestran sus diagramas.

Entonces, definamos las funciones $f_2 : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ y $g_2 : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$ de la siguiente manera:

$$f_2(\tilde{x}) = \begin{cases} [a_1, a_2] & \text{si } \tilde{x} = [a_1, a_2], \\ \{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\} & \text{si } \tilde{x} = a_1 a_2, \\ \{[a_1, a_2], [a_1, a_3], \dots, [a_1, a_n]\} & \text{si } \tilde{x} = a_1. \end{cases}$$

$$g_2(\tilde{y}) = \begin{cases} [a_1, a_2] & \text{si } \tilde{y} = [a_1, a_2], \\ a_1 a_2 & \text{si } \tilde{y} = \{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\}, \\ a_1 & \text{si } \tilde{y} \in \{\{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\}, \dots, \{[a_1, a_2], \dots, [a_1, a_n]\}\}. \end{cases}$$

Veamos que f_2 y g_2 preservan la acción del grupo S_n .

Sea $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \in S_n$. Por un lado notemos que si $\tilde{x} \in \tilde{X}$, entonces

$$\sigma\tilde{x} = \begin{cases} \sigma[a_1, a_2] = [u_1, u_2], & \text{si } \tilde{x} = [a_1, a_2], \\ \sigma a_1 a_2 = u_1 u_2, & \text{si } \tilde{x} = a_1 a_2, \\ \sigma a_1 = u_1 & \text{si } \tilde{x} = a_1. \end{cases}$$

Por lo que:

$$\sigma f_2(\tilde{x}) = \begin{cases} \sigma[a_1, a_2] = [u_1, u_2] & \text{si } \tilde{x} = [a_1, a_2], \\ \sigma\{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\} = \{[u_1, u_2], [u_2, u_1]\} & \text{si } \tilde{x} = a_1 a_2, \\ \sigma\{[a_1, a_2], [a_1, a_3], \dots, [a_1, a_n]\} = \{[u_1, u_2], [u_1, u_3], \dots, [u_1, u_n]\} & \text{si } \tilde{x} = a_1. \end{cases}$$

Y

$$f_2(\sigma\tilde{x}) = \begin{cases} [u_1, u_2] & \text{si } \tilde{x} = [a_1, a_2], \\ \{[u_1, u_2], [u_2, u_1]\} & \text{si } \tilde{x} = a_1 a_2, \\ \{[u_1, u_2], [u_1, u_3], \dots, [u_1, u_n]\} & \text{si } \tilde{x} = a_1. \end{cases}$$

De modo que $\sigma f_2(\tilde{x}) = f_2(\sigma\tilde{x})$ para toda $\tilde{x} \in \tilde{X}$ y $\sigma \in S_n$. Por tanto, f_2 es equivariente.

Por otro lado, si $\tilde{y} \in \tilde{Y}$,

$$\sigma\tilde{y} = \begin{cases} \sigma[a_1, a_2] = [u_1, u_2] & \text{si } \tilde{y} = [a_1, a_2], \\ \sigma\{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\} = \{[u_1, u_2], [u_2, u_1]\} & \text{si } \tilde{y} = \{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\}, \\ \sigma\{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\} & \\ \quad = \{[u_1, u_2], [u_1, u_3]\} & \text{si } \tilde{y} = \{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\}, \\ \vdots & \vdots \\ \sigma\{[a_1, a_2], \dots, [a_1, a_n]\} & \\ \quad = \{[u_1, u_2], \dots, [u_1, u_n]\} & \text{si } \tilde{y} = \{[a_1, a_2], \dots, [a_1, a_n]\}. \end{cases}$$

Por lo que

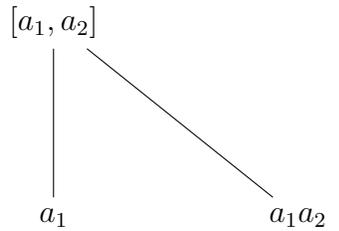
$$\sigma g_2(\tilde{y}) = \begin{cases} \sigma[a_1, a_2] = [u_1, u_2] & \text{si } \tilde{y} = [a_1, a_2], \\ \sigma a_1 a_2 = u_1 u_2 & \text{si } \tilde{y} = \{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\}, \\ \sigma a_1 = u_1 & \text{si } \tilde{y} \in \{\{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\}, \dots, \{[a_1, a_2], \dots, [a_1, a_n]\}\}. \end{cases}$$

Y,

$$g_2(\sigma\tilde{y}) = \begin{cases} [u_1, u_2] & \text{si } \tilde{y} = [a_1, a_2], \\ u_1 u_2 & \text{si } \tilde{y} = \{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\}, \\ u_1 & \text{si } \tilde{y} \in \{\{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\}, \dots, \{[a_1, a_2], \dots, [a_1, a_n]\}\}. \end{cases}$$

De modo que $\sigma g_2(\tilde{y}) = g_2(\sigma\tilde{y})$ para toda $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ y $\sigma \in S_n$. Por tanto, g_2 es equivariante.

Ahora, notemos que en general en \tilde{X} se tiene el siguiente diagrama:



Por lo que $a_1 \leq [a_1, a_2]$ y $a_1 a_2 \leq [a_1, a_2]$, luego, dado que

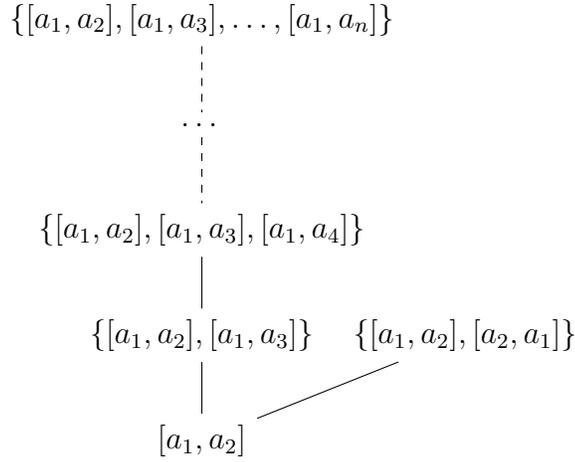
$$f_2(a_1) = \{[a_1, a_2], \dots, [a_1, a_n]\} \geq [a_1, a_2] = f_2([a_1, a_2]),$$

y

$$f_2(a_1 a_2) = \{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\} \geq [a_1, a_2] = f_2([a_1, a_2]),$$

entonces se tiene que f_2 invierte el orden.

Por otro lado, para \tilde{Y} tenemos en general el siguiente diagrama:



Por lo que:

$$[a_1, a_2] \leq \{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\},$$

y

$$\{[a_1, a_2], [a_1, a_3], \dots, [a_1, a_i]\} \leq \{[a_1, a_2], [a_1, a_3], \dots, [a_1, a_j]\},$$

para $i, j \in \{2, \dots, n\}$ con $i \leq j$.

Entonces, dado que:

$$g_2([a_1, a_2]) = [a_1, a_2] \geq a_1 a_2 = g_2(\{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\}),$$

$$g_2([a_1, a_2]) = [a_1, a_2] \geq a_1 = g_2(\{[a_1, a_2], [a_1, a_3], \dots, [a_1, a_i]\}),$$

para $i \in \{3, \dots, n\}$, y

$$g_2(\{[a_1, a_2], [a_1, a_3], \dots, [a_1, a_i]\}) = a_1 = g_2(\{[a_1, a_2], [a_1, a_3], \dots, [a_1, a_j]\}),$$

para $i, j \in \{3, \dots, n\}$ con $i \leq j$, tenemos que g_2 invierte el orden.

Finalmente, notemos que:

$$(g_2 \circ f_2)(\tilde{x}) = \begin{cases} [a_1, a_2] & \text{si } \tilde{x} = [a_1, a_2], \\ a_1 a_2 & \text{si } \tilde{x} = a_1 a_2, \\ a_1 & \text{si } \tilde{x} = a_1. \end{cases}$$

Y

$$(f_2 \circ g_2)(\tilde{y}) = \begin{cases} [a_1, a_2] & \text{si } \tilde{y} = [a_1, a_2], \\ \{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\} & \text{si } \tilde{y} = \{[a_1, a_2], [a_2, a_1]\}, \\ \{[a_1, a_2], \dots, [a_1, a_n]\} & \text{si } \tilde{y} \in \{\{[a_1, a_2], [a_1, a_3]\}, \dots, \{[a_1, a_2], \dots, [a_1, a_n]\}\}. \end{cases}$$

Por lo que tenemos que $(g_2 \circ f_2)(\tilde{x}) = \tilde{x} \geq \tilde{x}$ para toda $\tilde{x} \in \tilde{X}$ y $(f_2 \circ g_2)(\tilde{y}) \geq \tilde{y}$ para toda $\tilde{y} \in \tilde{Y}$. Entonces por el teorema 2.3.15 podemos concluir que \tilde{X} y \tilde{Y} son G -homotópicos y como además f_2 y g_2 son tales que

$$f_2(\sigma\tilde{x}) = \sigma f_2(\tilde{x}),$$

y

$$g_2(\sigma\tilde{y}) = \sigma g_2(\tilde{y}),$$

para toda $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ y $\sigma \in S_n$ tenemos, que \tilde{X} y \tilde{Y} son homotópicamente equivalentes. Lo cual implica que $\Delta(G_{n,n-2}) \simeq_{S_n} \Delta(K(G_{n,n-2}))$ como se quería.

Esto implica que las representaciones de S_n en las homología de $G_{n,n-2}$ y $K(G_{n,n-2})$ son isomorfas.

CONCLUSIÓN

El aporte de este trabajo radica en el análisis de la homología de las gráficas de clanes de las gráficas de comparabilidad de retículas booleanas truncadas $\bar{\mathcal{B}}_n^k$, recordemos que la retícula booleana truncada consiste de los subconjuntos del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ de tamaño al menos k . Nosotros buscábamos determinar un resultado análogo al teorema de Solomon 3.1.9 (Solomon, 1968) para la gráfica de clanes de $\bar{\mathcal{B}}_n^k$ logrando identificar que $\tilde{H}(K(\bar{\mathcal{B}}_n^{n-2})) \cong_{S_n} \tilde{H}(\bar{\mathcal{B}}_n^{n-2})$.

El teorema 3.1.7 del artículo (Larrión et al., 2009) nos permitió mostrar en el teorema 3.1.8 que para $n - k \leq 3$ se tiene que $G_{n,k} \simeq K(G_{n,k})$ lo cual, por el teorema 2.5.8, implica que $\tilde{H}(G_{n,k})$ y $\tilde{H}(K(G_{n,k}))$ son isomorfos como espacios vectoriales para ciertos valores de n y k , por lo que surge la pregunta de si son isomorfos como S_n -módulos y la prueba hecha en la sección 3.3 nos dice que para $n - k = 2$ sí se tiene este isomorfismo.

En la sección 3.3 se demostró que para $n - k = 2$ los espacios $\Delta(G_{n,k})$ y $\Delta(K(G_{n,k}))$ son S_n -homotópicamente equivariantes, lo cual implica que $\tilde{H}(G_{n,k}) \cong_{S_n} \tilde{H}(K(G_{n,k}))$ para $n - k = 2$ y por tanto $\tilde{H}(\bar{\mathcal{B}}_n^{n-2}) \cong_{S_n} \tilde{H}(K(\bar{\mathcal{B}}_n^{n-2}))$, entonces, por el teorema de Solomon (Solomon, 1968) se puede concluir que:

$$\tilde{H}(\bar{\mathcal{B}}_n^{n-2}) \cong_{S_n} \tilde{H}(K(\bar{\mathcal{B}}_n^{n-2})) \cong_{S_n} S^{((n-2), 1^2)} = S^{\overbrace{\square \cdots \square}^{n-2}}.$$

Aunque no se ha encontrado una fórmula general para descomponer en irreducibles $\tilde{H}(K(G_{n,k}))$, no descartamos la posibilidad de un resultado análogo al menos para $n - k = 3$.

BIBLIOGRAFÍA

- Björner, A., & Walker, J. W. (1983). A homotopy complementation formula for partially ordered sets. *European J. Combin.*, 4(1), 11-19. [https://doi.org/10.1016/S0195-6698\(83\)80003-1](https://doi.org/10.1016/S0195-6698(83)80003-1)
- Bouc, S. (1984). Homologie de certains ensembles ordonnés. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 299(2), 49-52.
- Campero, M. (2021). *Un enfoque computacional a la representación del grupo simétrico en homología* [Tesis de maestría]. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.
- Eilenberg, S., & Steenrod, N. (1952). *Foundations of algebraic topology*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Frame, J. S., Robinson, G. d. B., & Thrall, R. M. (1954). The hook graphs of the symmetric groups. *Canad. J. Math.*, 6, 316-324. <https://doi.org/10.4153/cjm-1954-030-1>
- Fulton, W. (1997). *Young tableaux* (Vol. 35) [With applications to representation theory and geometry]. Cambridge University Press, Cambridge.
- Graham, R. L., Grötschel, M., & Lovász, L. (Eds.). (1995). *Handbook of Combinatorics* (Vol. 2). Elsevier Science B.V., Amsterdam; MIT Press, Cambridge, MA.
- Hatcher, A. (2002). *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Kozlov, D. (2008). *Combinatorial algebraic topology* (Vol. 21). Springer, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-71962-5>
- Larrión, F., Pizaña, M. A., & Villarroel-Flores, R. (2009). The clique operator on matching and chessboard graphs. *Discrete Math.*, 309(1), 85-93. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.12.047>
- Munkres, J. R. (1984). *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA.
- Munkres, J. R. (2000). *Topology* [Second edition]. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ.
- Sagan, B. E. (2001). *The symmetric group* (Second, Vol. 203) [Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions]. Springer-Verlag, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6804-6>
- Solomon, L. (1968). A decomposition of the group algebra of a finite Coxeter group. *J. Algebra*, 9, 220-239. [https://doi.org/10.1016/0021-8693\(68\)90022-7](https://doi.org/10.1016/0021-8693(68)90022-7)

- Thévenaz, J., & Webb, P. J. (1991). Homotopy equivalence of posets with a group action. *J. Combin. Theory Ser. A*, 56(2), 173-181. [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(91\)90030-K](https://doi.org/10.1016/0097-3165(91)90030-K)
- Wachs, M. L. (2007). Poset topology: tools and applications. En *Geometric combinatorics* (pp. 497-615, Vol. 13). Amer. Math. Soc., Providence, RI. <https://doi.org/10.1090/pcms/013/09>