



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

Procesos cognitivos que se promueven en los libros de texto de segundo grado de secundaria: funciones lineales

PRESENTA

Andrea Zamudio Hernández

Director

Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez

Codirector

Dr. Fernando Barrera Mora

Comité tutorial

Dr. Carlos Arturo Soto Campos
Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez
Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez
Dr. Fernando Barrera Mora

Mineral de la Reforma, Hgo., México, mayo 2024.



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

School of Engineering and Basic Sciences

Área Académica de Matemáticas y Física

Department of Physics and Mathematics

Mineral de la Reforma, Hgo., a 15 de octubre de 2024

Número de control: ICBI-AAMyF/2968/2024

Asunto: Autorización de impresión de tesis.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

El Comité Tutorial de la tesis titulada "**Procesos cognitivos que se promueven en los libros de texto de segundo grado de secundaria: funciones lineales**", realizada por la sustentante **Andrea Zamudio Hernández** con número de cuenta **477761** perteneciente a la **Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica**, una vez que ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el Artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente:

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

El Comité Tutorial


Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez
Director


José Félix Fernando Barrera Mora
Codirector


Dr. Carlos Arturo Soto Campos
Miembro del comité


Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez
Miembro del comité



Ciudad del Conocimiento, Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P. 42184
Teléfono: 52 (771) 71 720 00 Ext. 40124, 40119
aamyf_icbi@uaeh.edu.mx, ravila@uaeh.edu.mx

uaeh.edu.mx

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por el apoyo otorgado para la realización de esta tesis, a través de la beca de posgrado con número 1237485.

Agradezco a Dios por permitirme vivir y culminar una etapa más de mi vida, a mis padres por siempre apoyarme en cada una de mis decisiones, a mis directores de tesis por no dejarme sola, por guiarme y apoyarme en la realización de este proyecto de investigación. También agradezco a mis sinodales por el apoyo en la revisión de este trabajo.

Resumen

Se identifican los procesos cognitivos que promueven las tareas asociadas con funciones lineales que aparecen en libros de texto de matemáticas, utilizados en segundo grado de secundaria. La investigación es relevante ya que los libros de texto son la herramienta principal con la que cuentan los docentes para orientar el proceso de aprendizaje y, por ello, influyen en la práctica de los salones de clase y sobre las características del conocimiento que los estudiantes construyen. ¿Qué oportunidades de aprendizaje ofrecen las tareas sobre funciones lineales en libros de texto oficiales de matemáticas de secundaria? Responder a esta pregunta es importante para un docente, ya que en la investigación se ha evidenciado que las tareas pueden ayudar a construir diferentes niveles de entendimiento; así que, es importante contar con alguna metodología que permita determinar las oportunidades de aprendizaje que ofrecen las tareas. Este trabajo se enfoca en tareas que involucran el concepto de función lineal, ya que esta idea permea diversas ramas de las matemáticas. El marco conceptual de este trabajo está integrado por el modelo de resolución de problemas y la *taxonomía para el aprendizaje, la enseñanza y la evaluación* de Anderson, a partir de los cuales se identifican procesos cognitivos que promueven las tareas. El marco también considera las diferentes perspectivas desde las cuales se puede analizar el contenido de un libro: (a) del estudiante, (b) matemática, (c) del docente y (d) del autor. La metodología incluye un análisis documental de contenido, desde un punto de vista matemático. La unidad de análisis son las tareas, entendiendo como tarea cualquier ejercicio, problema o actividad del texto. Entre los principales resultados se identificó que existen diferencias entre los procesos cognitivos que se promueven en los textos. En uno de los libros, las tareas promueven procesos cognitivos de bajo nivel, principalmente el recordar e implementar procedimientos; mientras que en el otro libro existe una mayor diversidad de procesos cognitivos asociados con las tareas. Por otra parte, en muchas ocasiones los enunciados de los problemas no son precisos, presentando errores de redacción e, incluso, errores conceptuales.

Abstract

We identified the cognitive processes promoted by the tasks, on linear functions, included in middle school mathematics textbooks. The research is important since textbooks are the teachers' main tool for guiding students' learning processes and, therefore, these materials influence classroom practice and the characteristics of the knowledge that students construct. What learning opportunities offer the tasks on linear functions in mathematics textbooks used in middle school? Answering this question is important for teachers, since educational research has obtained evidence that characteristics of mathematical tasks can stimulate different levels of understanding, and hence it is important to have some methodology for determining the learning opportunities offered by the tasks. This work focuses on the analysis of tasks that involve the concept of function, and particularly that of linear function, because this idea permeates all branches of mathematics. The conceptual framework of this work is integrated by the problem-solving model and Anderson's taxonomy for learning, teaching, and assessing, the latter help us to identify the cognitive processes associated with the tasks. The framework also included the different perspectives from which the content of a book can be analyzed: (a) student, (b) mathematical, (c) teacher, and (d) author of the textbook. The methodology includes a document analysis, from a mathematical point of view. The unit of analysis is the task. We consider a task as any exercise, problem, or activity in the text. Among the main results, it was identified that there are differences between the cognitive processes promoted in each textbook. In one of the books, tasks promote low-level cognitive processes, primarily remembering and implementing procedures; while in the other book there is a greater diversity of cognitive processes associated with the tasks. On the other hand, frequently the problem statements are not precise, presenting writing errors and even conceptual misconceptions.

Contenido	Página
Oficio de autorización de impresión.....	ii
Agradecimientos.....	iii
Resumen.....	iv
Abstract.....	v
CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	
1.1. Introducción.....	1
1.2. Revisión de la literatura.....	2
1.3. Líneas de investigación, marcos y metodologías presentes en la literatura.....	16
1.4. Planteamiento del problema.....	20
CAPÍTULO 2. MARCO DE INVESTIGACIÓN	
2.1. Introducción.....	22
2.2. Tipos y características de los marcos de investigación.....	22
2.3. Descripción del marco conceptual.....	24
2.4. Contexto actual de los libros de texto de secundaria en México.....	27
2.5. Taxonomía de procesos cognitivos y conocimientos.....	29
2.6. Aprendizaje del concepto de función lineal.....	47
CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA	
3.1. Introducción.....	49
3.2. Análisis cualitativo de contenido.....	49
3.3. Fuentes de información	54
3.4. Estructura general de los textos y contexto de uno de los materiales	54
3.5. Procesamiento y análisis de las información	57
3.6. Criterios de calidad	61

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

4.1. Introducción.....	62
4.2. Revuela. Secundaria. Matemáticas 2.....	62
4.3. Matemáticas 2. Espacios recreativos.....	69
4.4. Análisis comparativo.....	77

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

5.1. Introducción.....	79
5.2. Respuesta a la pregunta de investigación.....	79
5.3. Discusión de los resultados.....	81
5.4. Alcances, limitaciones y propuestas a futuro.....	83
5.5. Reflexiones finales.....	84
Referencias.....	85
Apéndice A. Código de R para generar una nube de palabras.....	96
Apéndice B. Tablas de sustitución para elaborar nubes de palabras.....	99

1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Introducción

Los libros de texto son la herramienta principal con la que cuentan los docentes para orientar el proceso de aprendizaje de los estudiantes y, por ello, influyen en las prácticas que se llevan a cabo en las aulas (Fan, 2013; Gueudet et al., 2011; Howson, 1995; Stylianides, 2014; Valverde et al., 2002). De acuerdo con diversas investigaciones, los libros de texto tienen una gran influencia en las actividades del salón de clase (Fan, 2013; Howson, 1995; Stylianides, 2014; Valverde et al., 2002) pues se ha evidenciado que los docentes usan los textos para decidir qué tareas implementar y cómo implementarlas (Porter, 2002; Stylianides, 2014; Tarr et al., 2006). Así, estos materiales curriculares influyen sobre lo que se enseña, cómo se enseña y lo que aprenden los estudiantes (Polikoff, 2015).

¿Qué oportunidades de aprendizaje ofrecen las tareas sobre funciones lineales, en dos libros de matemáticas, uno de ellos aprobado por la SEP para utilizarse como texto en segundo de secundaria para el ciclo escolar 2022-2023? Esta pregunta es relevante ya que las características de las tareas determinan los niveles de pensamiento matemático que los estudiantes pueden alcanzar, al abordarlas (Stein et al., 2000; Sullivan, et al. 2010; Watson y Ohtani, 2015). Por lo anterior, es importante conocer las oportunidades de aprendizaje que ofrecen las tareas en libros de texto, las cuales dependen de su nivel de demanda cognitiva y de los procesos cognitivos que promueven.

En esta tesis se analizan las oportunidades de aprendizaje que ofrecen las tareas referentes a funciones lineales que se encuentran en dos textos oficiales de matemáticas, correspondientes al segundo grado de secundaria, utilizados como material didáctico en una institución privada en el estado de Hidalgo, durante el ciclo escolar 2022-2023. Se decidió enfocar el análisis en el concepto de función, en particular, el de función lineal, ya que éste permea todas las ramas de las matemáticas (Lloyd y Wilson, 1998). Particularmente, el concepto de función lineal es un contenido clave del plan de estudios de matemáticas de secundaria en México y de propuestas curriculares internacionales (CCSSI, 2010; NCTM, 2000). En el apartado 8.8.5 del *Plan y Programa de Estudios de Secundaria* de la SEP se

indica que el estudiante debe ser capaz de interpretar y construir gráficas de funciones lineales asociadas a diversos fenómenos (SEP, 2011). Por otra parte, en los *Principios y Estándares* de la NCTM (2000), se indica que los estudiantes deben desarrollar fluidez trabajando con funciones lineales en una variedad de representaciones.

Se eligieron los libros de segundo grado de secundaria porque la autora de la tesis trabaja en este nivel educativo y, con base en su experiencia, identificó diversas dificultades de comprensión del concepto de función lineal en estudiantes de tercer grado de secundaria, a pesar de que este concepto se aborda desde el primer grado de este nivel educativo (SEP, 2017).

Así, esta tesis tiene el objetivo de identificar aquellos procesos cognitivos que promueven las tareas de dos libros de matemáticas de segundo grado (Martinez, 2022; Riva, 2020), utilizados como textos en una secundaria privada, uno de los cuales está autorizado por la Secretaría de Educación Pública (Riva, 2020) para utilizarse como libro de texto en el ciclo escolar 2022-2023¹. Específicamente, se analizan las oportunidades de aprendizaje que promueven las tareas relacionadas con el concepto de función lineal.

1.2. Revisión de la literatura

En esta sección se revisan diversos artículos de investigación empírica que analizan los contenidos de libros de texto, con la finalidad de identificar las principales líneas de investigación, las aproximaciones teóricas y metodológicas comúnmente utilizadas, así como los principales resultados que se han obtenido. La revisión incluyó artículos, publicados en inglés y en revistas de reconocido prestigio. Se descartaron las publicaciones en revistas depredadoras, así como artículos publicados en memorias de congresos, ya que en ambos casos, el proceso de revisión no es riguroso, como ocurre con las revistas que están indexadas. En total se revisaron 20 artículos de investigación, de los cuales el 40% tienen una antigüedad de publicación menor que 10 años.

¹ La lista de libros de texto de secundaria autorizados por la SEP para el ciclo escolar 2022-2023 se puede consultar en la siguiente dirección electrónica del diario oficial de la federación, correspondiente al 28 de junio de 2022: <https://bit.ly/3yuU6RT>.

Mesa (2004) realizó un análisis cualitativo, de los ejercicios sobre funciones, de 24 libros de texto de secundaria de 15 países. Como sustento teórico se utilizó una adaptación de la teoría de las concepciones de Balacheff y la noción de dominio prototípico de aplicación de conceptos, propuesta por Biehler, para describir las prácticas asociadas a la noción de función. El análisis arrojó cinco prácticas diferentes (regla simbólica, par ordenado, datos sociales, fenómenos físicos e imagen controladora). La existencia de diferentes prácticas podría ayudar a explicar las nociones compartimentadas y a veces contradictorias que tienen estudiantes y docentes sobre las funciones, podría arrojar luz sobre los procesos de diseño curricular y de instrucción sobre funciones.

Fan y Zhu (2007) investigaron cómo se representan procedimientos de resolución de problemas en textos de China, Singapur y Estados Unidos. Se analizaron, cualitativamente, dos elementos: (i) estrategias generales, considerando las cuatro fases de Polya y (ii) estrategias específicas, considerando 17 heurísticas. Se seleccionaron nueve libros de matemáticas empleados en primer año de secundaria. En cuanto a las estrategias generales, los libros asiáticos simplemente explican *cómo llevar a cabo el plan*. En contraste, más de dos tercios de las soluciones en los textos americanos modelaron al menos dos etapas de resolución de problemas. Los textos chinos son más explícitos al distinguir las fases de resolución de problemas, mientras los de Singapur proporcionaron menos indicadores para identificar cada fase. Las tres series de libros proponen un número considerable de heurísticas; nueve de las cuales fueron comunes en las tres series y dos sólo aparecieron en libros de Singapur. La frecuencia en el uso de las heurísticas específicas fue baja. Las heurísticas están concentradas en los libros chinos y difundida en los de Singapur. La presentación de heurísticas específicas en los textos de Singapur fue más explícita.

Stylianides (2009) realizó una investigación en la que se propone y evalúa un marco teórico para analizar el razonamiento y la prueba (RP) en libros de textos de matemáticas. Dicho análisis es importante porque las decisiones de los profesores sobre qué tareas implementar, cuándo y cómo hacerlo están influidas por los libros de texto. Se analiza la serie *Connected Mathematics Project* (CMP), usada en el *Middle School* (grados 6-8) de los Estados Unidos. Esta serie de libros se encuentra alineada con los estándares de la NCTM (2000). El RP se analiza mediante las siguientes actividades: identificar patrones, formular

conjeturas, proporcionar argumentos y demostraciones (Stylianides, 2008a). A su vez, se consideran dos dimensiones, la primera enfocada en los componentes y subcomponentes del RP, y la segunda en los propósitos de las actividades de RP. Se revisaron tres libros de la serie, uno para cada grado, los cuales cuentan con 8 unidades. Del total de 24 unidades se tomó una muestra de 12 unidades, 3 de grado seis, 3 de grado 7 y 6 de grado 8. Los resultados de este análisis se utilizaron como contexto para debatir sobre cuestiones relacionadas con el diseño de libros de texto.

Bayazit (2012) realizó un estudio cualitativo sobre la calidad de las tareas sobre el concepto de proporción en tres libros de texto de matemáticas utilizados en una escuela primaria de Turquía (grados 6, 7 y 8). Las tareas se analizaron con base en el nivel de demanda cognitiva (Smith y Stein, 1998). Las tareas se codificaron y agruparon de acuerdo con el tipo de proporcionalidad (directa o inversa). Por otro lado, las tareas se agrupan como (a) actividades para realizarse en el salón, (b) ejemplos resueltos y (c) ejercicios-problemas para realizarse fuera de clase. Los resultados indican que el 75% de las tareas tuvieron una alta demanda cognitiva, que requerían conectar conocimientos y procedimientos, y exigió respuestas con alguna explicación. Solo el 25% de las tareas tuvieron una baja demanda cognitiva. Éstas podían resolverse recordando e implementando reglas, procedimientos y conocimientos factuales sin reflexionar sobre significados asociados. La mayoría de las tareas incluyeron el uso de múltiples representaciones y se enmarcaron en contextos extra matemáticos. Los nuevos libros de texto de primaria tienen la capacidad de promover el razonamiento proporcional de los estudiantes, pero se sobre enfatiza la proporcionalidad directa, ya que solo 13 de 174 tareas se refieren a proporcionalidad inversa.

Davis (2012) realizó una investigación cualitativa sobre las oportunidades para el razonamiento y prueba (RP) en tres libros de texto de matemáticas de secundaria, (i) convencionales, (ii) alineados con una reforma educativa e (iii) híbridos. Se examinó una unidad de cada libro, relacionada con funciones polinómicas, en busca de oportunidades para RP. Se utilizó el marco de RP propuesto por Stylianides (2009). Las tareas de RP comprendieron el 4.9% y 22% de las tareas en las unidades de libros de texto convencionales, híbridos y orientados a la reforma. Los textos promueven la presentación de bloques enfocados a la justificación, sin tareas para formulación de conjeturas o pruebas.

Solo se validó el 19% de los objetivos de aprendizaje de las tres unidades. Los resultados indican que las unidades de los libros convencionales e híbridos favorecen esquemas de prueba autoritarios, mientras que los libros orientados a la reforma promueven esquemas de prueba empíricos.

Thompson et al. (2012) realizaron una investigación para identificar la naturaleza y extensión del RP en 20 libros de textos de matemáticas de bachillerato de los Estados Unidos (grados 9-12), específicamente en los temas de álgebra y funciones. Los textos analizados fueron Álgebra 1, Álgebra 2 y Precálculo, de seis series comercializadas en USA. Se examinó el contenido narrativo y los problemas que abordan los temas de exponentes, logaritmos y polinomios, para identificar variaciones al abordar el RP. Esta investigación usó el marco para análisis del currículo de TIMSS (Third International Mathematics and Science Study), el estándar de razonamiento y prueba (NCTM, 2000), y los marcos de Balacheff (1988), Sowder y Harel (1998) y Miyazaki (2000). Se identificó que, en los libros de texto estadounidenses, el contenido narrativo prepara el escenario para que los estudiantes encuentren nuevos contenidos matemáticos y proporciona oportunidades para que los estudiantes desarrollen actividades exploratorias o visualicen ejemplos resueltos. Globalmente, el 50% de las propiedades enunciadas sobre exponentes, logaritmos y polinomios se justificaron, el 10% dejaron al estudiante la justificación, y el resto de las propiedades no se justificaron.

Hong y Choi (2014) realizaron un estudio cualitativo y comparativo sobre cómo se introduce el concepto de función en cuatro textos coreanos (459 problemas en total) y dos textos americanos (519 problemas en total). Se identificaron diferencias y similitudes en las lecciones sobre funciones lineales, con base en un marco bidimensional que incluye análisis horizontales y verticales (Charalambous et al., 2010). El análisis horizontal informa sobre el número de lecciones, número de problemas y la asignación de temas en los diferentes grados. El análisis vertical da cuenta del contenido del texto, incluyendo cómo empieza la lección y cómo se desarrollan los conceptos, la demanda cognitiva de las tareas, así como el tipo de respuestas (información, explicación o justificación) y prácticas utilizadas (regla simbólica, dato social, fenómeno físico, pares ordenados). Las tareas se clasificaron, de acuerdo con su nivel de demanda cognitiva, en: (i) memorización, (ii) procedimientos sin

conexiones, (iii) procedimientos con conexiones y (iv) hacer matemáticas. De acuerdo con el marco del nivel cognitivo de las tareas de Stein et al., 2000, hacer matemáticas requiere un pensamiento complejo y no algorítmico (es decir, no hay un enfoque o camino predecible y bien ensayado sugerido explícitamente por la tarea, las instrucciones de la tarea o un ejemplo elaborado). Requiere que los estudiantes exploren y entiendan la naturaleza de los conceptos matemáticos. La codificación de las tareas se realizó, independientemente, por tres personas, para asegurar la fiabilidad de los resultados. El análisis horizontal reveló que los tópicos sobre funciones y funciones lineales se introducen antes en los libros coreanos, en comparación con los libros americanos. El análisis vertical confirmó la presencia de *una firma de los libros de texto*; es decir, características comunes en los libros de cada país.

Bieda et al. (2014) investigaron las oportunidades para el aprendizaje del razonamiento y prueba (RP) que ofrecen siete libros de texto de matemáticas de quinto grado, publicados en los Estados Unidos. Se analizaron los textos de este grado, ya que son los contenidos matemáticos más avanzados de primaria y, por ello, es más probable que las tareas se enfoquen en RP. Se efectuó un análisis de contenido, centrado en las oportunidades para el razonamiento y justificación; específicamente, en cuanto a las oportunidades para formular, justificar y evaluar afirmaciones matemáticas. Cuando fue necesario se revisó la guía del profesor y otros materiales de apoyo. Los problemas se codificaron con base en: (a) tipo de problema, (b) propósito, (c) resultado previsto y (d) tipo de argumento obtenido. Globalmente, el promedio de tareas enfocadas en RP es 3.7%. Se obtuvo evidencia de que los libros desarrollados a partir de la investigación y redactados para ajustarse a los estándares curriculares (CCSSI, 2010) tienen más probabilidades de incluir tareas de RP en las secciones narrativas y en los ejercicios, en comparación con otros textos.

Fujita y Jones (2014) realizaron una investigación cualitativa para identificar las oportunidades para el RP, que aparecen en los capítulos sobre geometría de un libro de texto utilizado en grado 8 en Japón (*Mathematics International Grade 8*). El marco teórico incluye la conceptualización de RP propuesta por Sylianides (2009); la conceptualización de *bloque de texto* propuesta por Valverde et al. (2002), y una caracterización de los bloques con base en tres categorías: (a) contenido temático, (b) expectativa de desempeño y

(c) perspectiva (Robitaille et al., 1993). El estudio consistió en analizar el modo en que se presenta la RP en el texto mediante las categorías de: identificar un patrón, hacer una conjetura, proporcionar una prueba y proporcionar un argumento. Se identificó que las demostraciones directas aparecen, principalmente en ejercicios que requieren el uso de congruencia de triángulos y ejemplos resueltos. Además, se promueven aspectos de RP en bloques narrativos (definiciones, hechos, teoremas, etc., y las diferencias entre demostración y argumento) y bloques de actividades (utilizados para conjeturar). En resumen, el libro hace hincapié en las demostraciones directas de enunciados geométricos acompañadas de actividades que animan a los alumnos a formular conjeturas. También se evidenció que la estructura y contenido del texto no permite a los estudiantes apreciar la necesidad o nivel de generalidad de una demostración.

Otten et al. (2014) investigaron cualitativamente las oportunidades para RP, que brindan seis libros de texto de geometría de secundaria, utilizados en los Estados Unidos (grados 7-9). La atención se centró en el capítulo donde se introduce la idea de demostración. Particularmente, se identificó el tipo de actividades en torno a las cuales se desarrollaron procesos de RP. Los libros son utilizados por estudiantes de entre 13 y 16 años. Se prestó atención al contenido narrativo y a las tareas, ya que ambos elementos contribuyen a las oportunidades potenciales que tienen los estudiantes de comprometerse con el RP. El marco teórico incluyó ideas de Thompson et al. (2012) y Stylianides (2009). Se encontró que las oportunidades para el RP, que ofrecen los ejercicios, son de tipo particular, mientras que el contenido narrativo expresa regularmente enunciados generales. Las oportunidades para desarrollar demostraciones son menos frecuentes que los ejercicios orientados a formular conjeturas y afirmaciones, o los ejercicios sobre el proceso de razonamiento. Las oportunidades para reflexionar sobre RP son frecuentes en el capítulo que introduce la demostración, aunque escasas en el resto de las secciones.

Stylianides (2014) analizó el contenido de libros de texto referente al RP, con la finalidad de identificar las oportunidades de aprendizaje presentes en los textos. Los procesos de RP no reciben la atención adecuada en el aula y, por ello, los estudiantes se enfrentan a serias dificultades al respecto. El marco teórico se construyó con base el *Mathematical Tasks Framework*, MTF (Silver y Stein, 1996; Stein et al., 1996), el cual permite analizar cómo

evolucionan las tareas. De acuerdo con el MTF, las tareas pasan por tres fases: (i) tal y como aparecen en los libros de texto; (ii) tal y como las implementan los profesores y (iii) tal y como las abordan los estudiantes. Este artículo menciona algunos retos metodológicos para el análisis del RP en libros de texto, entre los que destaca que el RP son actividades matemáticas más que un tema. Otro reto que se aborda está relacionado con la perspectiva de análisis: (a) la perspectiva del alumno, (b) la perspectiva matemática, (c) la perspectiva del profesor y (d) la perspectiva del autor del libro. Realizar un análisis coherente desde cada perspectiva, o desde una combinación de ellas, puede plantear dificultades relacionadas con la realización de inferencias válidas basadas en información incompleta o respecto al tipo de fuentes de información que se deben considerar. Los resultados indican que los estudiantes de todos los niveles educativos tienden a enfrentarse a serias dificultades en el ámbito de RP; y que incluso los profesores de matemáticas a menudo muestran las mismas dificultades que sus estudiantes.

Remillard et al. (2014) investigaron cómo las características del diseño de materiales curriculares (guía para el maestro, libro para el estudiante y materiales suplementarios), utilizados en primer y segundo grado, influyen en las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes. Se realizó un análisis comparativo y documental de cuatro materiales curriculares utilizados comúnmente en los Estados Unidos, pero sólo se reportan los resultados referentes al análisis del diseño de los materiales, incluyendo análisis de libros de texto. El diseño de los materiales curriculares se analizó con base en tres categorías: (a) énfasis matemático, (b) enfoque instructivo y (c) apoyo a los profesores. Fueron seleccionadas 10 unidades de cada material curricular, cinco de primer grado y cinco de segundo grado, correspondientes al estándar de *Números y Operaciones*, que incluyeran los temas de valor posicional y sumas de números con un dígito. También se analizó el énfasis matemático con base en las categorías: (a) nivel conceptual de la tarea, (b) el uso de rutinas para involucrarse con conceptos, hechos y procedimientos, y (f) frecuencia de repetición para adquirir fluidez procedimental. Los resultados del análisis revelan oportunidades sustancialmente diferentes de aprendizaje en los cuatro grupos de materiales.

Polikoff (2015) realizó un estudio cualitativo y comparativo sobre la alineación de los libros de texto de cuarto grado, utilizados en los Estados Unidos, con los *Common Core*

*State Standards*² en matemáticas (CCSS-M); es decir, el nivel de concordancia entre los temas y la demanda cognitiva de las tareas. El estudio es relevante debido a la existencia de diversas problemáticas que limitan la implementación de CCSS-M en el salón de clases, debidas a la falta de alineación de los libros de texto con esos estándares. Se realizó un análisis de contenido de los estándares y de libros de texto, utilizando una taxonomía de contenido denominada SEC (Surveys of Enacted Curriculum). La SEC en matemáticas es una taxonomía de contenido que se desarrolló a lo largo del tiempo con aportes de expertos en matemáticas y educación matemática. Para más información de la SEC, consulte Martone & Sireci, 2009. la cual considera 183 temas y cinco niveles de demanda cognitiva. Los niveles de demanda cognitiva se construyeron con base en una versión modificada de la taxonomía de Bloom. La comparación se llevó a cabo con respecto a los estándares estatales y textos utilizados en Florida. Los resultados indican áreas sustanciales de desalineación, en particular, se identificó un sobre énfasis en los procedimientos y la memorización respecto con lo indicado en los estándares. Además, no se promueve suficientemente el entendimiento de los contenidos. También se observó que los libros no abordan todos los contenidos. La evidencia contradice las afirmaciones realizadas por los editores sobre la alineación entre los contenidos de los libros y los estándares curriculares.

Wang et al. (2017) llevaron a cabo un estudio cualitativo y comparativo de seis libros de texto de Inglaterra y uno de Shanghai, utilizados en secundaria. Shanghai tiene un sistema educativo centralizado y por ello todas las escuelas utilizan un mismo libro de texto. El libro de texto de Shangai se utiliza en grado 8; mientras que los libros ingleses corresponden a los grados 8, 9 y 10. El análisis se enfocó en el contenido matemático requerido para el entendimiento de la función lineal, considerando cinco niveles progresivos: (i) relación de dependencia, (ii) conexión de representaciones, (iii) identificación de propiedades locales (iv) análisis de objetos y (v) inventiva. También se consideró que la idea de función lineal se basa inicialmente en el conocimiento e interrelación de las representaciones: (a) algebraica, (b) tabular y (c) gráfica. El contenido del texto se dividió en diferentes bloques. Se identificó un total de 10 bloques que incluyen

² The Common Core State Standards se centran en un conjunto de habilidades y conceptos matemáticos. Los estudiantes aprenderán conceptos de una manera más organizada, tanto durante el año escolar como en los distintos grados. Los estándares alientan a los estudiantes a resolver problemas del mundo real: <https://www.thecorestandards.org/Math/>

bloques narrativos, bloques gráficos, bloques de ejercicios y preguntas, bloques de actividades, bloque de ejercicios resueltos (worked examples) y otros bloques. Los resultados sugieren que los libros de texto ingleses limitan el aspecto estructural de la función lineal debido a una visión puntual de la función, mientras que el libro de texto de Shanghai, centrado en la conceptualización de la función en términos de la idea de variabilidad sobre enfatiza el enfoque algebraico.

Mellor et al. (2018) llevaron a cabo un estudio comparativo para determinar cómo se presentan las funciones lineales en libros utilizados en Sudáfrica; uno editado en el país, en idioma inglés (grado 9), y otro de origen alemán (grado 7). Se llevó a cabo un análisis cualitativo de contenido, el cual consideró la interacción entre el conocimiento conceptual y procedimental; la interrelación entre representaciones y las conexiones con otros contenidos o el mundo real. También se utilizó una versión adaptada de la guía para el análisis de tareas de Stein et al. (2000), la cual permite clasificar a las tareas en cuatro categorías con demanda cognitiva: (i) memorización, (ii) procedimientos sin conexiones, (iii) procedimientos con conexiones y (iv) hacer matemáticas. Las lecciones de cada libro se partitionaron en unidades denominadas “bloques”. Se identificaron 10 tipos de bloques de acuerdo con su propósito: narrativo, relacionado narrativo, instruccional narrativo no relacionado, gráfico relacionado, gráfico no relacionado, conjunto de ejercicios, conjunto de ejercicios no relacionado, actividad, ejemplo resuelto y otro. El texto de origen alemán incluyó un enfoque conceptual, debido a la mayor demanda cognitiva de las tareas; mientras que el texto sudafricano ofrece más oportunidades para interactuar con las diferentes representaciones de una función y para conectar los contenidos matemáticos con el mundo real. Ambos libros establecen relaciones con otros contenidos matemáticos; aunque el libro de origen alemán incluye más de estas relaciones entre contenidos.

Hong y Choi (2018) compararon cualitativamente tareas sobre funciones lineales propuestas en dos libros de texto coreanos y uno americano. Se buscaron diferencias y similitudes entre las tareas mediante un marco bidimensional (análisis vertical y horizontal). El análisis vertical consiste en identificar el número de lecciones y número de problemas por lección, la secuencia de los temas y los tópicos que anteceden a los contenidos sobre funciones lineales. El análisis horizontal identifica el tipo de ejemplos, la

demanda cognitiva de las tareas, el tipo de respuestas y de representaciones que se promueven. Se obtuvo evidencia de que los libros ofrecen oportunidades diferenciadas de aprendizaje. El libro americano enfatiza las aplicaciones de la vida real de las funciones lineales, más que las matemáticas puras y los algoritmos. Además ofrece más oportunidades para que los estudiantes resuelvan, expliquen y razonen al abordar tareas con alta demanda cognitiva, en relación con los textos coreanos.

Tesfamicael y Lundeby (2019) realizaron un estudio comparativo y cualitativo de libros de texto de matemáticas noruegos y etíopes. El análisis se basó en la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD). El objetivo es sugerir principios que permitan mejorar el diseño de los libros de texto de matemáticas. Se preguntó a docentes en un grupo de facebook ¿qué libro de texto utilizan para enseñar relaciones y funciones? A la pregunta respondieron 119 personas. Se tomaron definiciones, ejemplos y tareas relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de relaciones y funciones, como una sub-construcción de varios libros de texto de matemáticas en Noruega, y un libro de texto de Etiopía. La información se analizó con base en tipos de representaciones, niveles de demanda cognitiva y respuestas a las tareas. En los resultados se hallaron similitudes de los libros y que la TAD provee una herramienta para apoyar el diseño de libros de texto.

Petersson (2020) realizó una investigación sobre el análisis cualitativo del contenido de tres libros de texto de matemáticas de primer año, utilizando dos enfoques para el análisis de datos secuenciales, para analizar libros de texto, no considerados anteriormente, que complementan los análisis basados en frecuencias y que van más allá de los simples cronogramas para hacer transparente la ubicación y la secuencia de formas particulares de tareas, lo anterior con la finalidad de apoyar los análisis comparativos. Se utilizaron promedios móviles, y una versión adaptada de las curvas de Lorenz, para eliminar el ruido y reconocer tendencias en los datos. Ambos amplían el rango de preguntas que pueden formularse significativamente a los libros de texto. El resultado del análisis muestra cómo tanto los promedios móviles como las curvas de Lorenz adaptadas pueden resaltar las diferencias tanto en el énfasis como en la secuencia del contenido de los libros de texto.

Vicente et al. (2022) realizaron una investigación cualitativa y comparativa para determinar si los libros de texto de matemáticas de primaria en países de alto rendimiento, como Singapur, son más efectivos para apoyar el razonamiento y el aprendizaje, en relación con libros de países de rendimiento medio, como España. El análisis se llevó a cabo considerando: (a) cantidad de problemas verbales y aritméticos, (b) variedad de problemas en término de sus estructuras aditivas o multiplicativas y subestructuras semántico-matemáticas, y (c) cantidad y naturaleza de las ilustraciones adjuntas a los problemas aritméticos verbales. Se encontró una mayor cantidad de actividades AWP (*arithmetic word problems*) en los textos de Singapur; aunque la variedad de problemas es similar para ambos países. El libro de texto de Singapur contiene un mayor porcentaje de ilustraciones que reflejan las estructuras semántico-matemáticas de los problemas. Las ilustraciones constituyen un apoyo para que los estudiantes aprendan a resolver AWP.

Dibek y Toker (2022) realizaron un estudio cualitativo, con el objetivo de examinar varios aspectos de los ítems de práctica (ejercicios sin soluciones) incluidos en libros de texto de matemáticas de octavo grado utilizados en Turquía. Se analizó el contexto y la calidad con respecto a las reglas de redacción de ítems. Se analizaron dos textos utilizados en escuelas públicas y uno utilizado en escuelas privadas. La recopilación y el análisis de datos se realizaron utilizando un marco bidimensional basado en (a) tipo de contexto y (b) calidad de ítem. Los resultados indican que ambos libros contienen diversos elementos defectuosos en términos de reglas de escritura, además de no tener elementos contextuales.

A continuación, se sintetiza la revisión de la literatura (Tabla 1), enfatizando las principales líneas de investigación, marcos teóricos y metodologías más utilizadas; así como los principales resultados. La información anterior permite enmarcar la pregunta que orienta esta tesis en el cuerpo de conocimientos existentes sobre el tema, además fundamentar y justificar la relevancia del estudio y su posible contribución al conocimiento actual respecto de las características de las tareas en libros de texto oficiales utilizados en México.

Tabla 1. Concentrado de la literatura sobre libros de texto.

Autores	Pregunta de investigación	Marco teórico/conceptual	Metodología	Resultados
Mesa (2004)	<p>¿Cuáles son las prácticas asociadas con la noción de función en libros de texto?</p> <p>Tema: funciones</p>	Teoría de concepciones (Balacheff) y dominio prototípico aplicación de conceptos (Biehler).	Análisis cualitativo de las tareas sobre funciones de 24 libros de texto de secundaria (grados 7 y 8) de 15 países.	Se identificaron cinco diferentes prácticas: (1) regla simbólica, (2) par ordenado, (3) dato social, (4) fenómeno físico y (5) imagen de control. Las diferencias entre prácticas ayudan a explicar las nociones de estudiantes y docentes sobre funciones, y apoyan el diseño curricular y de instrucción.
Fan y Zhu (2007)	<p>¿Cuáles heurísticas de resolución de problemas se promueven en textos de China, Singapur y EU?</p> <p>Tema: heurísticas</p>	Resolución de problema (Pólya).	Estudio cualitativo. Nueve libros de primer año de secundaria. Se analizaron los ejercicios resueltos. Fiabilidad basada en triangulación de investigadores.	Todos los textos introdujeron un número considerable de heurísticas; nueve de las cuales fueron comunes en las tres series. Dos heurísticas sólo aparecen en libros de Singapur.
Stylianides (2009)	<p>Proponer y evaluar un marco teórico para analizar las oportunidades para el razonamiento y la prueba (RP) en libros de textos de matemáticas.</p> <p>Tema: razonamiento y prueba</p>	Marco propio de razonamiento y prueba.	Análisis bidimensional: (i) componentes y subcomponentes del RP, y (ii) propósito de las actividades de RP. Serie de libros analizada es la Connected Mathematics Project (CMP), la más usada en el Middle School (grados 6-8) de EUA	El marco fue útil para analizar las oportunidades de RP. 1. En grado 7 hay menos oportunidades de RP. 2. En grado 6 se enfatiza más en las oportunidades para conjeturar, demostrar y justificar, en relación con los materiales de grado 7 y 8. 3. Más oportunidades para RP en teoría de números, luego geometría y álgebra. En geometría hay pocas oportunidades para identificar patrones.
Bayazit (2012)	<p>¿En qué medida los nuevos libros de texto apoyan el desarrollo del razonamiento proporcional?</p> <p>Tema: razonamiento proporcional.</p>	Nivel de demanda cognitiva de las tareas (Smith y Stein, 1998): (i) baja demanda cognitiva y (ii) alta demanda cognitiva.	Estudio cualitativo. Tres libros de texto de matemáticas de primaria en Turquía (grados 6, 7 y 8). Las tareas incluyeron: (a) actividades para realizarse en el salón, (b) ejemplos resueltos y (c) ejercicios-problemas para realizarse fuera de clase.	El 75% de las tareas son de alta demanda cognitiva, ya que requirieron una interpretación, conectar conocimiento y relacionar procedimientos. La mayoría de las tareas incluyeron múltiples representaciones, contextos extra matemáticos. Los libros promueven el razonamiento proporcional. Sobre énfasis en la proporcionalidad directa.
Davis (2012)	<p>¿Cuáles son las oportunidades de aprendizaje de RP en tres libros de texto de matemáticas (orientado por una reforma, convencional e híbrido)?</p>	Marco de RP (Stylianides, 2009)	Análisis cualitativo. Libros de secundaria de EUA (grado 8-12). Se analizó una unidad de cada libro sobre funciones polinómicas. Unidad de análisis: tareas y contenido narrativo.	Los libros convencionales e híbridos favorecen esquemas de prueba autoritarios, mientras que los libros orientados a la reforma promueven esquemas de prueba empíricos.

Thompson et al. (2012)	Identificar la naturaleza y extensión del razonamiento y prueba (RP) Tema: razonamiento y prueba. Exponentes, logaritmos y polinomios.	TIMSS, el estándar de razonamiento y prueba (NCTM, 2000), y marco de Balacheff (1988), y Miyazaki (2000). Esquemas de prueba (Sowder y Harel, 1998)	Veinte libros de texto de bachillerato (grados 9-12) de EUA. Las unidades de análisis son el contenido narrativo y los problemas sobre exponentes, logaritmos y polinomios.	Globalmente, el 50% de las propiedades enunciadas sobre exponentes, logaritmos y polinomios se justificaron, el 10% dejaron al estudiante la justificación, y el resto de las propiedades no se justificaron.
Hong y Choi (2014)	¿Cómo se introduce el concepto de función en cuatro libros de texto coreanos? Tema: razonamiento y prueba	Bidimensional incluye análisis horizontales y verticales	Análisis cualitativo y comparativo. Cuatro libros de texto coreanos (grados 7-8) y dos americanos (grados 9-11). La codificación se realizó por tres personas, para asegurar la fiabilidad.	El análisis horizontal reveló que los tópicos sobre funciones se introducen antes en los libros coreanos, que en los americanos. El análisis vertical confirmó la presencia de características comunes en los libros de cada país.
Bieda et al. (2014)	Oportunidades para RP (formular, justificar y evaluar afirmaciones matemáticas) en libros de texto de matemáticas Tema: razonamiento y prueba	Adaptación del marco analítico a partir de marcos existentes (Thompson, Senk y Johnson, 2012; Stylianides, 2009).	Siete libros de 5to grado de EUA. Las unidades de análisis son el contenido narrativo y las tareas.	Los libros desarrollados para ajustarse a los estándares curriculares (CCSSI, 2010) tienen más probabilidades de incluir tareas de RP en las secciones narrativas y en los ejercicios, en comparación con otros textos.
Fujita y Jones (2014)	¿Cuáles son las oportunidades para el razonamiento y prueba (RP), en libros de Japón? Tema: razonamiento y prueba	Marco de RP de Stylianides (2009). Conceptualización de bloque de texto (Valverde et al., 2002). Tipos de bloques de texto: (a) contenido temático, (b) expectativa de desempeño y (c) perspectiva (Robitaille et al., 1993).	Investigación cualitativa. Libro Mathematics International Grade 8. Oportunidades para RP utilizando las categorías de Stylianides (2009): identificar un patrón, hacer una conjetura, proporcionar una prueba y proporcionar un argumento.	Se enfatizan las demostraciones directas y formulación de conjeturas. La estructura y contenido del texto no permite a los estudiantes apreciar la necesidad o nivel de generalidad de una demostración.
Otten et al. (2014)	Oportunidades para el razonamiento y prueba (RP) Tema: introducción a la demostración en geometría.	El marco teórico incluyó ideas de Thompson et al. (2012) y Stylianides (2009)	Seis libros de secundaria, de geometría, usados en EUA (Grados 8-11). Se identificó el tipo de actividades en torno a las cuales se desarrollaron procesos de RP. Las unidades de análisis son el contenido narrativo y las tareas.	Las oportunidades para desarrollar demostraciones son menos frecuentes que para formular conjeturas, o los ejercicios sobre el proceso de razonamiento. Las oportunidades para reflexionar sobre RP son frecuentes en el capítulo que introduce la demostración, aunque escasas en el resto de los textos.
Stylianides (2014)	Identificar las oportunidades para RP presenten en los textos Tema: razonamiento y prueba	Marco conceptual basado en el Mathematical Tasks Framework (Silver y Stein, 1996; Stein et al., 1996)	Investigación cualitativa. Seis libros de geometría de secundaria, utilizados en los EUA (grados 7-9). Las unidades de análisis son el contenido narrativo y las tareas.	Los estudiantes de todos los niveles educativos tienden a enfrentarse a serias dificultades en el ámbito de RP; y que incluso los profesores de matemáticas a menudo muestran las mismas dificultades que sus estudiantes.

Remillard et al. (2014)	<p>Determinar las oportunidades de aprendizaje (OTL) que ofrecen cuatro textos, cada uno de ellos basado en una propuesta curricular diferente.</p> <p>Tema: diseño de material curricular. Oportunidades de aprendizaje.</p>	Tres categorías que caracterizan el diseño instruccional y que influyen en las OTL: (a) énfasis matemático, aproximación instruccional y apoyo para los docentes.	Análisis comparativo y documental. Cuatro libros utilizados en EUA, cada uno de ellos basado en una propuesta curricular diferente. Libros de 1ro y 2do grado, Guía del maestro y materiales suplementarios.	<p>1. Libro 1: conceptualmente retador, fomenta el pensamiento matemático, razonamiento y entendimiento conceptual, basado en la fluidez procedimental.</p> <p>2. Libro 2: contenido más balanceado. Enfatiza entendimiento conceptual, pensamiento matemático, razonamiento y fluidez procedimental.</p> <p>3. Libro 3: prioriza fluidez procedimental y habilidades rutinarias.</p> <p>4. Libro 4: similar al tercero, con énfasis en fluidez procedimental y habilidades rutinarias, atiende conexiones conceptuales.</p>
Polikoff (2015)	<p>1.-¿Hasta qué punto cuatro libros de texto (grado 4) están alineados con los estándares para matemáticas? ¿Cuáles son las fuentes de desalineación?</p> <p>Tema: Alineación del texto con estándares curriculares.</p>	Concepto de oportunidad del estudiante para aprender (OTL)	Cualitativo y comparativo de tres libros de texto de 4to grado en EUA. Utilizando una taxonomía SEC y una modificación de la taxonomía de Bloom	Indican áreas sustanciales de desalineación, en particular, se identificó un sobre énfasis en los procedimientos y la memorización respecto con lo indicado en los estándares y que no se promueve suficientemente el entendimiento de los contenidos. También se observó que los libros no abordan todos los contenidos.
Wang (2017)	<p>1. ¿Qué énfasis ponen los ejemplos en libros de texto en términos de niveles de comprensión de la función lineal?</p> <p>2. En cada nivel, ¿existen diferencias en la expresión de los ejemplos así como en la solución sugerida?</p>	Se extrajo inicialmente del marco TIMSS. TIMSS utilizó "bloques" en lugar de secciones para caracterizar los libros de texto.	Estudio cualitativo y comparativo de seis libros de texto de Inglaterra de grados 8, 9 y 10. Uno de Shanghai de grado 8, utilizados en secundaria.	Los resultados sugieren que los libros de texto ingleses limitan el aspecto estructural de la función lineal debido a una visión puntual de la función, mientras que el libro de texto de Shanghai, centrado en la conceptualización de la función en términos de la idea de variabilidad sobre enfatiza el enfoque algebraico.
Mellor et al. (2018)	<p>¿Cómo se presentan las funciones lineales en dos libros de texto usados en Sudáfrica?</p> <p>¿Qué oportunidades para aprender sobre funciones lineales ofrecen los libros de texto?</p>	Se utilizó una versión adaptada de la guía para el análisis de tareas de Stein et al. (2000)	Estudio comparativo, entre dos libros de texto, uno de origen sudafricano y otro de origen alemán.	El texto de origen alemán incluyó un enfoque conceptual, debido a la mayor demanda cognitiva de las tareas; mientras que el texto sudafricano ofrece más oportunidades para interactuar con las diferentes representaciones de una función y para conectar los contenidos matemáticos con el mundo real.
Hong y Choi (2018)	<p>¿Qué temas se incluyen en las lecciones de funciones lineales?</p> <p>¿Qué procedimientos, algoritmos y representaciones se presentan en los libros de texto?</p> <p>¿Qué tipos de respuestas y niveles de demanda cognitiva se requieren?</p> <p>Tema: funciones lineales</p>	Marco bidimensional (análisis vertical y horizontal)	Comparación cualitativa de tareas sobre funciones lineales propuestas en dos libros de texto coreanos y uno americano.	El libro americano enfatiza las aplicaciones de la vida real de las funciones lineales, más que las matemáticas puras y los algoritmos. El libro americano ofrece más oportunidades para que los estudiantes resuelvan, expliquen y razonen al abordar tareas con alta demanda cognitiva, en relación con los textos coreanos.

Tesfamicael y Lundeby (2019)	¿Cuáles son las similitudes y diferencias de textos noruegos y etíopes en el tema de funciones? ¿cómo se representan estos conceptos en los libros? ¿Cuál es el nivel de demanda cognitiva de las tareas?	Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)	Estudio comparativo y cualitativo de libros de texto de matemáticas noruegos y etíopes	Se hallaron similitudes de los libros. La TAD provee una herramienta para apoyar el diseño de libros de texto.
Petersson et al. (2020)	Proponer y ejemplificar el uso de dos métodos cuantitativos, para analizar la localización y secuenciación de tareas en textos de matemáticas, que complementan los métodos de frecuencias y líneas de tiempo.	Fundacional Number Sense (FoNS)	Promedios móviles y una versión adaptada de curvas de Lorenz. Un libro de texto de Inglaterra y dos libros de Singapur, utilizados en primer grado.	Los promedios móviles y las curvas de Lorenz adaptadas pueden resaltar las diferencias tanto en el énfasis como en la secuencia del contenido de los libros de texto.
Vicente (2022)	Comparar la frecuencia y características de los problemas aritméticos verbales (AWP) de textos de matemáticas de primaria utilizados en dos países con diferentes niveles de desempeño en evaluación internacionales (Singapur y España).	Análisis a partir de las categorías: 1. Cantidad de problemas aritméticos verbales 2. variedad de problemas en términos de la estructura aditiva o multiplicativa. 3. Cantidad y naturaleza de las ilustraciones.	Estudio cualitativo, comparativo y documental. Libros de Singapur y España	Hay una mayor proporción de AWP en los libros de Singapur, la diversidad de los problemas es similar en ambos libros y en ambos se enfatizan estructuras aditiva y tasa simple (multiplicativa). El libro de Singapur contiene más ilustraciones que reflejan las estructuras semántico-matemáticas de los problemas. Las ilustraciones constituyen un apoyo para que los estudiantes aprendan a resolver AWP. (arithmetic word problems).
Dibek y Toker (2022)	(1) ¿En qué medida los libros de texto turcos de matemáticas de octavo grado ofrecen elementos de práctica basados en el contexto? (2) ¿Cuáles son las fallas en la escritura de ítems de los ítems de práctica en los libros de texto de matemáticas de octavo grado de Turquía?	Marco bidimensional (tipo de contexto y calidad del ITEM)	Estudio cualitativo. Ejercicios sin soluciones. Dos libros de matemáticas de 8vo grado en Turquía. Uno utilizado es escuela privada y otro en escuela pública.	Ambos libros contienen diversos elementos defectuosos en términos de reglas de escritura, además de no tener elementos contextuales.

Fuente. Elaboración propia.

1.3. Líneas de investigación, marcos y metodologías presentes en la literatura

Con base en la revisión de la literatura se identificaron tres grandes grupos de investigaciones relacionadas con el análisis de libros de texto: (a) análisis de libros individuales, (b) análisis comparativos de libros utilizados en un mismo país, o (c) análisis

comparativos de libros de diferentes países. En lo que respecta a los análisis comparativos entre diferentes países, las investigaciones mayoritariamente contrastan libros de naciones occidentales como Reino Unido, Estados Unidos, España, Alemania o Noruega con libros de países asiáticos o africanos como China, Corea, Japón, Singapur, Sudáfrica o Etiopía (Fan y Zhu, 2007; Hong y Choi 2014; Hong y Choi, 2018; Mellor et al. 2018; Tesfamichael y Lundeby 2019; Vicente 2022; Wang et al. 2017). Entre los estudios comparativos se encontró una sola investigación en la que se contrastan libros de 15 diferentes países (Mesa, 2004).

En relación con el foco de análisis, es decir, la característica o características de interés que se analizan en los contenidos del texto, se identificaron: (a) oportunidades de aprendizaje que ofrecen los contenidos (Bieda et al. 2014; Davis 2012; Fujita y Jones 2014; Mellor et al. 2018; Otten et al. 2014; Remillard et al. 2014; Stylianides 2014; Thompson et al. 2012), (b) nivel de demanda cognitiva de las tareas (Bayazit 2012), (c) alineación entre el contenido de los libros con el currículum (Polikoff 2015), (e) heurísticas utilizadas en los problemas resueltos (Fan y Zhu, 2007), (f) cantidad o frecuencia de tareas con ciertas características (Vicente, 2022), o (g) contextualización de las tareas. Las unidades básicas de análisis fueron (i) las tareas, (ii) los ejercicios resueltos, y (iii) los problemas o ejercicios propuestos. En cuanto a las investigaciones enfocadas en las oportunidades de aprendizaje, predominan las investigaciones orientadas a las oportunidades de razonamiento y prueba (RP). Una categoría especial la integran dos trabajos que realizan propuestas teórico-metodológicas para el análisis de los libros de texto (Petersson et al. 2020; Stylianides 2009).

Entre los marcos de investigación más utilizados, se encuentran el marco de las tareas matemáticas (Bayazit, 2012; Mellor et al. 2018), particularmente se utiliza el constructo de *demanda cognitiva de las tareas* (Stein et al., 2000). Otro marco relevante es el marco de TIMSS (Thompson et al. 2012; Wang et al. 2017), a partir del cual se construyeron marcos como el de razonamiento y prueba (Davis 2012; Fujita y Jones 2014; Stylianides 2009), cuya finalidad es identificar las oportunidades de aprendizaje respecto del RP y de otros temas (Polikoff 2015; Remillard et al. 2014).

Algunos otros marcos menos utilizados son el modelo de resolución de problemas de Polya, principalmente el concepto de heurística (Fan y Zhu 2007); la teoría de concepciones Balacheff (Mesa 2004) y Teoría Antropológica de lo Didáctico, TAD (Teschfamicael y Lundebj 2019). También hay marcos de elaboración propia, tales como el marco bidimensional (Hong y Choi 2014; Hong y Choi 2018), mismo que se empleó para describir el tipo de contexto y calidad de *ítems* (Dibek y Toker 2022); categorizaciones de los problemas como la utilizada por Vicente (2022); o marcos conceptuales estructurados a partir de elementos de otros marcos reconocidos (Bieda et al. 2014; Otten et al. 2014).

En lo referente a las aproximaciones metodológicas, la mayoría de las investigaciones son de corte cualitativo y documental, predominando los estudios comparativos y, como caso especial, una investigación de corte cuantitativo (Peterson et al., 2020).

Los resultados referentes a oportunidades de razonamiento y prueba (RP) en los libros de texto son variables y diversos. Por ejemplo, se reporta que las oportunidades para RP, en textos de EUA, son diferentes en función del grado escolar (grados 6-9); además de que las mayores oportunidades se encuentran temas de teoría de números, geometría y, por último, en álgebra (Stylianides 2009). En el contexto geométrico, los libros utilizados en EUA (grados 8-11) ofrecen más oportunidades para formular conjeturas y afirmaciones, o razonar matemáticamente y menos oportunidades para desarrollar demostraciones (Otten et al. 2014).

También se reporta que en los libros estadounidenses (grados 8-12) promueven diferentes oportunidades de RP varían en función de si los libros son convencionales, híbridos o basados en alguna reforma curricular; ya que en los primeros se favorecen esquemas de prueba autoritarios, mientras que en los segundos se favorecen esquemas de pruebas empíricos (Davis 2012). En esta misma línea, se destaca que los libros americanos (grado 5) que se alinean con estándares como los *Common Core State Standards* (CCSSI, 2010) incluyen más tareas de razonamiento y prueba en las secciones narrativas y en los ejercicios, en relación con otros textos (Bieda et al. 2014). Se destaca que en libros de texto de bachillerato americanos (grados 9-12), el 50% de las propiedades enunciadas sobre los

exponentes, logaritmos y polinomios se justificaron, el 10% dejaron la justificación al estudiante, y el resto no se justificaron (Thompson et al. 2012).

En libros de Japón (grado 8) se enfatizan las demostraciones directas y formulación de conjeturas; sin embargo la estructura y contenido del texto no permite a los estudiantes apreciar la necesidad de demostrar resultados (Fujita y Jones 2014).

Los resultados de las investigaciones enfocadas en las oportunidades de aprendizaje (OTL), orientado al pensamiento matemático, razonamiento y entendimiento conceptual, fluidez procedimental y dominio de habilidades, también son diversos. Por ejemplo, se reporta que tales oportunidades son diferenciadas, en función del currículo (grados 1-2) con el que está alineado cada texto (Remillard et al. 2014).

Otro grupo importante de resultados se refiere a las características de los contenidos y tareas asociadas con el concepto de función. Particularmente, los textos ingleses (grados 8-10) limitan el aspecto estructural de la función lineal, en contraste con un texto de Shanghai (grado 8) que enfatiza el enfoque algebraico de la función lineal (Wang et al., 2017). En otro caso, se identificaron cinco prácticas en libros de texto (grados 7-8) que pueden ayudar a explicar las nociones de estudiantes y docentes sobre las funciones, y de esta manera apoyar los procesos de diseño curricular y de instrucción (Mesa 2004). Además, se reporta que los tópicos sobre funciones y funciones lineales se introducen antes en los textos coreanos (grados 7-8) con respecto a textos americanos (grados 9-11) (Hong y Choi 2014). También se obtuvo evidencia que los textos de EUA enfatizan las aplicaciones de la función lineal en la vida real, más que la matemáticas puras y los algoritmos, también ofrece más oportunidades para que los estudiantes resuelvan, expliquen y razonen al abordar tareas con alta demanda cognitiva (Hong y Choi 2018).

Por último, se reportan resultados sueltos de investigación. Al respecto se detectó que dos libros de texto turcos (grado 8) contienen diversos elementos defectuosos en términos de reglas de escritura, además de no tener elementos contextuales (Dibek y Toker 2022).

Al comparar textos de primaria usados en Singapur y España, se determinó que existe una mayor proporción de Arithmetic Word Problems (AWP) en los textos de Singapur; que

contiene un mayor porcentaje de ilustraciones que constituyen un apoyo para que los estudiantes aprendan a resolver AWP. Ambos textos enfatizan en las estructuras denominadas aditiva y multiplicativa (Vicente 2022) . La mayoría de tareas de textos americanos (grado 4) tienen un bajo nivel de demanda cognitiva (Polikoff 2015). Además, el uso de múltiples representaciones y contextos extra matemáticos en las tareas en los libros de texto turcos (grado 6-8) apoyan el desarrollo de razonamiento proporcional (Bayazit 2012). De acuerdo con Mellor et al. (2018) los textos de origen alemán, utilizados en Sudáfrica, incluyen un enfoque conceptual debido a la mayor demanda cognitiva, en cambio los textos de origen sudafricano ofrecen más oportunidades para interactuar y conectar con las diferentes representaciones de una función.

1.4. Planteamiento del problema

El interés de esta tesis radica en determinar los procesos cognitivos que se promueven en libros de texto oficiales, utilizados en segundo grado de secundaria en México. Particularmente, se analizan las tareas que abordan el concepto de función lineal. El trabajo resulta relevante ya que, generalmente, los docentes carecen de herramientas teóricas y metodológicas que les permitan evaluar las oportunidades de aprendizaje o los procesos cognitivos que promueven las tareas de un libro de texto, y determinar si estas son adecuadas para que los estudiantes desarrollen un aprendizaje matemático con entendimiento (Hiebert et al., 1997). Por otra parte, diversos investigadores coinciden al considerar que el análisis de libros de texto puede ayudar a explicar, parcialmente, diferencias en el logro de los estudiantes (Hong y Choi, 2018; Reys et al., 2004; Zhu y Fan, 2006).

Además, las investigaciones en las que se analizan los procesos mentales que se promueven en los libros de texto de matemáticas en México son escasos y, por ello, se eligió esta temática para la elaboración del presente trabajo. Por otra parte, es poco probable que los docentes puedan implementar adecuadamente el currículo de matemáticas sin el apoyo de libros de texto y otros materiales de alta calidad (Polikoff, 2015). Incursionar en el análisis de libros de texto de matemáticas resulta desafiante, ya que como menciona Fan (2013), este tipo de investigación se encuentra en una etapa temprana de su desarrollo, y por ello

sus fundamentos filosóficos, así como los marcos teóricos y los métodos de investigación para llevar a cabo una indagación disciplinada se encuentran aún en desarrollo.

La pregunta de investigación de esta tesis es: ¿Cuáles son los procesos cognitivos que promueven las tareas en dos libros de matemáticas, uno de los cuales está autorizado por la SEP para utilizarse como texto en segundo de secundaria durante el ciclo escolar 2022-2023, específicamente las tareas que abordan el concepto de función lineal? Se considera que la pregunta de investigación es relevante, ya que su respuesta puede aportar información importante que apoye la selección o, en su caso, la adaptación de tales tareas, lo anterior con la finalidad de que permitan a los estudiantes desarrollar un aprendizaje matemático con entendimiento.

La hipótesis que se plantea es que los procesos mentales más comunes en las tareas que abordan el concepto de función lineal en los libros de texto analizados se enfocan en recordar información y aplicar algoritmos o procedimientos rutinarios. Además, se identifican diversas deficiencias de redacción de las tareas, así como errores e imprecisiones conceptuales. Por otra parte, la contextualización de las tareas es artificial o irrelevante y, por ello, no contribuye en el desarrollo de un aprendizaje matemático con entendimiento.

2. MARCO DE INVESTIGACIÓN

2.1 Introducción

Un marco de investigación es una estructura básica de ideas, principios, acuerdos o reglas que proporcionan las bases y lineamientos para orientar el proceso de investigación (Lester, 2005). Un elemento fundamental de todo marco de investigación consiste en explicitar las concepciones que se sostienen con respecto a qué son las matemáticas (ontología), qué es el conocimiento (epistemología) y qué significa aprender matemáticas (didáctica). La descripción y explicación del marco sobre el cual se fundamenta una investigación ayuda a comprender por qué los autores toman determinadas acciones metodológicas para la recolección y análisis de la información; así como en la construcción de los resultados y conclusiones.

2.2 Tipos y características de los marcos de investigación

La noción de marco es fundamental para el desarrollo de una investigación; sin embargo, la comprensión y uso de marcos puede ser el aspecto menos entendido de todo el proceso investigativo. De acuerdo con Lester (2005), un marco de investigación es “un conjunto de ideas, principios, acuerdos, o reglas que proporciona la base o el esquema para algo” (p. 69). Un marco de investigación es análogo a un andamio que hace posible las reparaciones de un edificio ya que los andamios permiten llegar a lugares de un edificio que de otro modo serían inaccesibles. Por lo tanto, un marco de investigación es una estructura de ideas (abstracciones y relaciones) que sirven como base para entender y explicar, más allá del sentido común, cómo se comporta un fenómeno. Estas abstracciones, y las supuestas interrelaciones entre ellas, representan las características relevantes de un fenómeno (Lester, 2005).

El uso de un marco para conceptualizar y guiar la investigación tiene al menos cuatro ventajas: (i) proporciona una estructura para conceptualizar y diseñar una investigación, (ii) no hay datos sin un marco que les de sentido, (iii) permite trascender el sentido común y (iv) promueve una comprensión profunda de un fenómeno. Eisenhart (1991) conceptualiza un marco de investigación como una estructura esquelética de ideas y argumenta que

existen al menos tres tipos de marcos de investigación: teóricos, prácticos y conceptuales (Einsenhart, 1991; Lester, 2005).

Un marco teórico guía las actividades de investigación basado en una teoría formal; es decir, una teoría que proporciona una explicación coherente, y basada en evidencia, sobre el funcionamiento de cierto tipo de fenómenos. Algunos ejemplos de teorías formales son: la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget y la teoría del constructivismo social de Vygotsky, las cuales son ampliamente utilizadas en educación matemática (Lester, 2005). Cuando un investigador usa una teoría bien establecida como marco de investigación, está decidiendo seguir la agenda de investigación programática esbozada por tal teoría; es decir, el investigador decide ajustarse a sus convenciones aceptadas de argumentación y experimentación. Esta elección tiene la ventaja de facilitar la comunicación, alentar programas de investigación sistemáticos y demostrar el progreso entre académicos de ideas afines que trabajan en problemas de investigación similares.

Por otra parte, un marco práctico, guía una investigación usando *lo que funciona* en la experiencia o ejercicio de un profesional. Por ejemplo, en el caso de la investigación educativa, usar lo que funciona en la enseñanza o administración escolar, lo que funciona como padre de un niño en edad escolar; como ideas o acciones que, si se extendiera a otros contextos, podrían ayudar a solucionar alguna problemática educativa. Una investigación basada en este tipo de marco está estructurada para determinar si una práctica (comportamiento, técnica, estrategia, forma de pensar, estilo de enseñanza, etc.) funciona como se esperaba o imaginaba. Este tipo de marco se fundamenta en el conocimiento práctico acumulado (ideas) de profesionales y administradores, los hallazgos de investigaciones previas y, a menudo, los puntos de vista de los políticos o la opinión pública. Las hipótesis o preguntas de investigación se derivan de esta base de conocimientos y los resultados de la investigación se utilizan para respaldar, ampliar o revisar la práctica (Einsenthart, 1991).

Un marco conceptual puede pensarse como una estructura esquelética de justificación; como un conjunto de argumentos que permiten explicar por qué un fenómeno funciona como lo hace. Las ideas o conceptos adoptados sirven como guías para recopilar datos en

un estudio en particular y determinar formas para analizar e interpretar los datos de un estudio en particular. Al igual que los marcos teóricos, los marcos conceptuales se basan en investigaciones y literatura previas, pero los marcos conceptuales se construyen a partir de una variedad de fuentes de gran alcance (Einsenhart, 1991).

2.3. Descripción del marco conceptual

Un investigador puede analizar el contenido de libros de texto desde diferentes perspectivas: (a) del estudiante, (b) matemática, (c) del docente y (d) del autor del libro (Stylianides, 2014). A continuación se describen y ejemplifican los diferentes tipos de análisis, a partir de una tarea de los libros que constituyen los datos de esta tesis. El enunciado de la tarea es el siguiente: “En un parlamento formado por 72 integrantes se sabe que 3 de cada 8 legisladores son mujeres. ¿Cuántas mujeres hay en el parlamento?” (Martínez et al., 2022).

Análisis desde la perspectiva del estudiante. Involucra codificar las tareas con base en preguntas tales como, ¿qué soluciones o respuestas produciría un estudiante típico/de bajo desempeño/sobresaliente al abordar esta tarea? Enfocarse en cada tipo de estudiantes implica responder diferentes preguntas de investigación. Definir operativamente los términos “estudiante típico”, “estudiante de bajo desempeño” y “estudiante sobresaliente” constituye un reto para los investigadores. ¿De qué manera un investigador puede determinar qué respuestas produce un estudiante típico al abordar una tarea? Pedir a estudiantes “típicos” que respondan a cada tarea en un libro de texto, para analizar sus respuestas, claramente es impráctico. Parece razonable, entonces, determinar el tipo de respuestas con base en los resultados reportados en artículos de investigación que abordan dicha temática.

Estudiante avanzado. Determina cuántas personas son hombres y cuántas son mujeres. De esta manera al seguir el planteamiento, calcula cuántas veces cabe el 8 en el 72, que son 9 veces, de esas 8 personas 3 son mujeres y al saber que 8 está 9 veces en 72, multiplicaría 3×9 y obtendremos que son 27 mujeres.

Estudiante típico o promedio. Utiliza una representación gráfica (dibujo), en donde para simbolizar a las 72 personas, dibujaría montoncitos de 8 personas hasta juntar las 72

personas, posteriormente de esos montoncitos pintar de otro color a las 3 personas que representan a las mujeres. Hacer el conteo y determinar que son 27 mujeres.

Análisis de la desde la perspectiva matemática. Realizar este tipo de análisis involucra codificar a las tareas del texto con base en responder a preguntas tales como, ¿qué oportunidades ofrece esta tarea para desarrollar el pensamiento matemático? Es importante resaltar que se debe responder a esta pregunta atendiendo solamente al potencial matemático de la tarea sin considerar algún contexto pedagógico específico (Stylianides y Stylianides, 2010).

Análisis: Familiarizarse con la representación simbólica de cantidades y sus transformaciones.

El alumno puede hacer uso del concepto de múltiplo, ya que para poder obtener el total de los integrantes del parlamento se necesita dos números que multiplicados entre sí obtenga 72, como el problema menciona que 3 de cada 8 legisladores son mujeres puede descomponer el total de las 72 integrantes del parlamento en 9 grupos de 8 personas cada uno, de esta forma al hacer la multiplicación entre estos números, obtendrá el total de los integrantes ($8 \times 9 = 72$). Posteriormente al tener la cantidad de personas totales en cada grupo puede determinar cuántas mujeres hay en cada uno de ellos, ya que en el problema se plantea que hay 3 mujeres por cada 8 legisladores, de esta manera de las 8 personas que conforman cada grupo 3 son mujeres, entonces al tener 9 grupos y de cada uno de ellos, deberá tomar solo a las 3 mujeres que los conforman, volverá a aplicar una multiplicación, esto para determinar el total de mujeres que existe en el parlamento ($9 \times 3 = 27$), encontrado así la respuesta que se le solicita.

Análisis desde la perspectiva del docente. Realizar este tipo de análisis involucra codificar a las tareas del texto con base en responder a preguntas tales como, ¿qué oportunidades para la actividad matemática, dada una población escolar específica, proporciona esta tarea? Desde esta perspectiva se interrelaciona el potencial matemático de la tarea con consideraciones sobre el contexto pedagógico, incluyendo características de la población a la cual se dirige la tarea, tales como el nivel escolar y los recursos esperados de tales estudiantes. Otra pregunta que podría orientar el análisis desde esta perspectiva es, ¿Qué

tipo de solución esperaría un profesor con “débil/robusto conocimiento matemático” que los estudiantes de su clase produjeran en respuesta a esta tarea? Otra posible pregunta es ¿qué tipo de apoyo ofrecería un profesor con débil/robusto conocimiento matemático para que los estudiantes avancen en la solución de esta tarea?

Análisis: Buscar alguna "herramienta" que le permita representar la información como puede ser una tabla para organizar los datos, ver relaciones de proporcionalidad y hacer uso de una regla de tres o algún método para encontrar la solución. (Es importante considerar el nivel en el que se encuentran los estudiantes). Basándonos en lo anterior y considerando como apoyo las preguntas que se presentan para poder realizar un análisis bajo esta perspectiva sería que el docente esperaría que el alumno pueda llegar a la solución de este problema implementado algún recurso que anteriormente haya utilizado o visto, es decir que esta situación le permita recordarlo e implementarlo si es lo que el docente espera o bien plantearle la situación para que el estudiante proponga o explore algún camino para su solución, de esta forma se podría abordar la pregunta sobre qué apoyo ofrecería el docente, de esta manera como se plantea al inicio de este párrafo, de acuerdo con la solución que se espera, el docente puede sugerir el uso de alguna “herramienta” que le permita al alumno no desviarse del camino o le permita explorar otra solución.

Por ejemplo esta tarea se puede abordar familiarizándose con la representación simbólica de cantidades y cómo transformarlas, el docente puede sugerir una representación gráfica, que permita representar lo que el problema plantea, por ejemplo representar los grupos de personas por las que está conformado el parlamento, esto hará que el alumno comience a acomodar los grupos hasta obtener el total, el problema menciona que 3 de cada 8 legisladores son mujeres, de esta manera el alumno puede ir conformando estos grupos con 8 personas en cada uno hasta llegar al total de 72 legisladores, posteriormente de cada grupo separar 3 personas que representan a las mujeres por cada 8 legisladores; sumar a las 3 tres personas que separó de cada grupo y así poder llegar a la solución del problema, haciendo uso de alguna representación.

Análisis desde la perspectiva del autor del libro. Realizar este tipo de análisis involucra codificar a las tareas del texto con base en responder a preguntas tales como, ¿cómo

pretendía el autor que se implementara la tarea? Para abordar esta pregunta de investigación es necesario considerar la información presente en la guía del maestro, ya que esta puede proporcionar una rica fuente de información acerca de cómo el autor espera que se implementen las tareas en el aula.

2.4. Contexto de los libros de texto de secundaria en México

El sistema educativo mexicano es centralizado, en el nivel básico (preescolar, primaria y secundaria) y, por ello, los planes y programas de estudio oficiales se deben implementar en las instituciones tanto públicas como privadas de todo el territorio nacional; a diferencia de otros sistemas educativos, como el de los Estados Unidos, donde cada estado tiene el control de las políticas educativas, incluyendo la autorización de los programas de estudio, así como de los materiales educativos.

La reforma constitucional de 1934 en México confirió al Congreso Federal la facultad de legislar para unificar y coordinar la educación en todo el país. La Secretaría de Educación Pública (SEP) es el organismo responsable de la impartición y regulación de la educación pública, a nivel federal. La *Ley General de Educación* (LGE) establece que corresponde a la federación definir lineamientos, planes y programas; así como la elaboración y producción de libros de texto gratuitos (Ley General de Educación, 2019).

La Comisión Nacional de Libros de texto adquiere o produce, en su propia planta o a través de terceros, los libros de texto gratuitos para la educación básica en México. Así es como los libros son entregados cada año a las autoridades educativas de las 32 entidades federativas de México. Los libros que no se producen en la planta se hacen con las empresas de artes gráficas establecidas. La SEP es la mayor editorial de México y el mayor cliente para las empresas que producen libros.

En el caso de secundaria, la SEP evalúa las propuestas que los editores privados hacen para las 17 materias y con ellas conforma un catálogo de donde los maestros y las autoridades educativas de los estados seleccionan los libros que se usarán en los salones de clase. Cada escuela elige los libros con los que trabajará durante el ciclo escolar, a partir de un catálogo de textos previamente aprobados. Se hace una revisión y la decisión final, sobre qué texto se utiliza, corresponde a directivos y administrativos de cada plantel educativo.

En septiembre de 1995, Tabasco se convirtió en el primer estado en distribuir libros de texto totalmente gratuitos para educación secundaria, seleccionados por maestros, autorizados por la SEP y elaborados por editoriales privadas. En una nota periodística publicada en marzo de 2023 (Quiroga, 2023) se expresan dudas respecto de la participación de las editoriales privadas en la distribución de los libros de texto de secundaria, ante la implementación de la reforma denominada *Nueva Escuela Mexicana* en el ciclo escolar 2023-2024.

Durante el primer trimestre de cada año, la SEP emitía una convocatoria para que las editoriales privadas enviaran propuestas de materiales especializados para las asignaturas de secundaria, para su revisión y aprobación. Así, las editoriales enviaban sus propuestas y las autoridades educativas elegían aquellas que se ajustaban a los lineamientos establecidos, para integrar el catálogo de títulos entre los cuales los docentes pudieran elegir los libros más adaptables a sus necesidades. Sin embargo es importante mencionar que los criterios de selección de los textos la mayoría de las veces se regían por cuestiones de índole económica o política de los directivos, más que a necesidades de carácter pedagógico o didáctico determinados por los docentes.

En el caso de los libros de secundaria, para el ciclo escolar 2023-2024, además de no existir planes y programas de estudio alineados con la Nueva Escuela Mexicana, en junio de 2023 aún se desconoce quién va a elaborar e imprimir los libros de texto³. En años anteriores, las editoriales privadas cuyos textos se autorizaron se encargaron de la impresión. Sin embargo en 2023 no han sido convocadas para presentar propuestas, a cuatro meses de que inicie el siguiente ciclo escolar. Hasta el ciclo escolar 2022-2023, los materiales para secundaria eran adquiridos por la Conaliteg mediante un concurso en el que participaban editoriales privadas. Según el sitio web de la propia Conaliteg, los profesores de cada una de las 17 materias revisaban los materiales autorizados en una plataforma de la SEP, para elegir el material que consideraban mejor para impartir clases (Aquino, 2023).

³ Boletín 78 En Ciclo Escolar 2024-2025 se distribuirán 160 millones de Libros de Texto Gratuitos. La Secretaria de Educación Pública (SEP), Leticia Ramírez Amaya, informó que para el ciclo escolar 2024-2025 se distribuirán 160 millones de Libros de Textos Gratuitos (LTG) para estudiantes de Educación Básica de todo el país. La titular de la SEP recordó que en la integración de los LTG participaron docentes, innovadores, especialistas, normalistas, creadores y, por primera vez, se tomó en cuenta la opinión fundamental de lo que viven y hacen diariamente las y los maestros en las escuelas: <https://bitly.cx/QZnl>

En algunas notas periodísticas se opina que la ausencia de un libro específico para el aprendizaje de las matemáticas, como materia independiente, despierta preocupación en algunos sectores sociales, ya que, según ellos las matemáticas se conciben únicamente como un recurso para el aprendizaje de las ciencias sociales o naturales. Por otra parte, se argumentan fallas en la secuencia de los aprendizajes y poca atención al desarrollo del pensamiento lógico matemático. Se comenta también que el diseño de actividades, la extensión en las instrucciones y el lenguaje empleado en los LTG no corresponden con la edad de los niños (Andere y Villalpando, 2023).

2.5. Taxonomía de procesos cognitivos y conocimientos

La idea de proceso cognitivo adolece, al igual que otros conceptos como el de competencias, de una precisión terminológica (Kilpatrick, 2020). Generalmente, los investigadores emplean el término *procesos cognitivos* sin dar una definición, al suponer que el lector conoce ya el significado de dicho término. Aunque algunos autores han intentado definir los procesos cognitivos, las definiciones generalmente son vagas. Por ejemplo, Bartol y Bartol (2012), indican que: “Los procesos cognitivos son aquellos procesos mentales internos que permiten a los humanos imaginar, generar conocimiento, razonar y evaluar información” (p. 81). Por otra parte, para Smith y Kelly (2016) los procesos cognitivos son “procesos mentales internos que se activan después de que se encuentra un estímulo en el entorno y antes de que se pueda observar una respuesta conductual manifiesta” (p. 210).

En otros casos, sólo se enumeran algunos términos que ejemplifican procesos cognitivos, como ocurre en la *Enciclopedia de Neuropsicología Clínica* donde se indica que: “Los procesos cognitivos pueden incluir a la atención, percepción, razonamiento, emoción, aprendizaje, síntesis, rearrreglo y manipulación de información almacenada, almacenamiento en la memoria, recuperación de información y metacognición” (Krch, 2011, p. 627).

2.4.1. Procesos cognitivos

Existen diversas formas de conceptualizar un proceso cognitivo, en función de los supuestos o principios ontológicos y epistemológicos que se adopten (Blomberg, 2011;

Rowlands, 1999), pero para los fines de este trabajo se considera que un proceso cognitivo es un proceso mental. Específicamente, adoptamos la perspectiva de Anderson et al. (2001) quienes consideran que los procesos cognitivos se expresan mediante verbos y los contenidos disciplinares mediante adjetivos, cuando se enuncian como parte de los objetivos educativos. Los procesos cognitivos indican lo que se busca que los estudiantes aprendan, más que cómo esperamos que demuestren dicho aprendizaje; es decir, los verbos utilizados en la taxonomía describen *finés* (resultados o cambios esperados) y no medios o actividades instruccionales a través de las cuales se lograrán los objetivos (leer un libro, escuchar al maestro, llevar a cabo un experimento, realizar trabajo de campo, etcétera). De la misma forma que las actividades instruccionales no son objetivos, tampoco lo son los exámenes, pruebas estandarizadas o cualquier otra forma de evaluación. Anderson et al. proponen seis categorías de procesos cognitivos (Tabla 2).

Tabla 2. Categorización de procesos cognitivos.

Categoría	Procesos cognitivos
1. Recordar. Recuperar conocimiento relevante de la memoria a largo plazo.	1.1. <i>Reconocer</i> 1.2. <i>Recuperar</i>
2. Entender. Construir significado, incluyendo comunicaciones y representaciones orales, escritas (retórica o algebraica) y gráficas.	2.1. <i>Interpretar</i> 2.2. <i>Ejemplificar</i> 2.3. <i>Clasificar</i> 2.4. <i>Resumir</i> 2.5. <i>Inferir</i> 2.6. <i>Comparar</i> 2.7. <i>Explicar</i>
3. Aplicar. Llevar a cabo o implementar procedimientos.	3.1. <i>Ejecutar</i> 3.2. <i>Implementar</i>
4. Analizar. Dividir un material en sus partes constitutivas y determinar cómo las partes se relacionan unas con otras.	4.1. <i>Diferenciar</i> 4.2. <i>Organizar</i> 4.3. <i>Atribuir</i>
5. Evaluar. Realizar juicios basados en criterios o estándares.	5.1. <i>Verificar</i> 5.2. <i>Criticar</i>
6. Crear. Organizar elementos para formar una estructura coherente o funcional; reorganizar elementos en un nuevo patrón o estructura.	6.1. <i>Generar</i> 6.2. <i>Planear</i> 6.3. <i>Producir</i>

Fuente. Elaboración propia con base en Anderson et al. (2001)

Esta taxonomía, al ser general, no incluye algunos procesos cognitivos específicos del aprendizaje en matemáticas (Kilpatrick, 1993; 2020), por lo que la información de la Tabla 2 se complementará, en caso de ser necesario, con procesos cognitivos identificados en la literatura de educación matemática; particularmente, aquellos asociados con los *elementos esenciales del pensamiento matemático* (Barrera et al., 2021). A continuación se describe con detalle el significado de cada uno de los procesos cognitivos incluidos en la taxonomía de Anderson et al. (2001).

Categoría 1, *Recordar*. Tiene como objetivo principal del proceso de instrucción promover la *retención* de los contenidos en una forma similar a cómo se revisaron o abordaron. Involucra recuperar información relevante de la memoria a largo plazo. Los dos procesos cognitivos asociados son *reconocer* y *recuperar*.

1.1. *Reconocer*. Consiste en ubicar y recuperar un conocimiento en la memoria a largo plazo, con la finalidad de compararlo con cierta información presentada. El estudiante busca en la memoria a largo plazo una pieza de información que es idéntica o muy similar a cierta información que se proporciona (tal como se representa en la memoria de trabajo). Cuando se presenta información nueva, el estudiante determina si dicha información corresponde al conocimiento previamente aprendido, buscando un *matching* o correspondencia sin que existan variaciones significativas con el contexto en que originalmente se revisó dicho contenido. Un verbo alternativo para el proceso cognitivo de reconocer es *identificar*. Por ejemplo, cuando a un estudiante se le proporciona la definición de *número racional* como aquel número que es el cociente de dos números enteros y se le proporcionan los siguientes ejemplos: $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{12}{26}$. Lleva a cabo este proceso cognitivo cuando, se le pide, por ejemplo, seleccionar la opción que corresponda a un número racional: (a) $\frac{\sqrt{2}}{0.5}$, (b) $\frac{5}{7}$, (c) $\frac{\pi}{4}$, (d) $\frac{0.2}{\pi}$. Otro ejemplo de tarea en la que se lleva a cabo este proceso es cuando se le pregunta al estudiantes que seleccione la opción que corresponda al número de lados que tiene un hexágono: (a) cuatro, (b) cinco, (c) seis, (d) siete. Otra tarea para evaluar este tipo de proceso cognitivo es aquella en la que se solicita al estudiante indicar si es verdadera o falsa la afirmación de que el número $-\frac{9}{8}$ es racional.

1.2. *Recuperar*. Consiste en recuperar un conocimiento relevante de la memoria a largo plazo cuando se nos indica hacerlo mediante una pregunta. Al llevar a cabo este proceso cognitivo, el estudiante busca en la memoria a largo plazo una pieza de información y la trae a la memoria de trabajo con la finalidad de procesarla. Por ejemplo, cuando a un estudiante se le proporciona la definición de *número racional* como aquel número que es el cociente de dos números enteros y se le proporcionan los siguientes ejemplos: $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{12}{26}$. El estudiante lleva a cabo el proceso cognitivo de recuperar cuando se le solicita indicar si es verdadera o falsa la afirmación de que el número $\frac{\sqrt[3]{8}}{5}$ es racional, ya que debe no solo llevar a cabo un proceso de reconocimiento, sino además debe procesar parte de la información presentada, en este caso, procesar el hecho de que a pesar de la representación con radicales, el número $\sqrt[3]{8}$ es un número entero. En aritmética, una tarea que involucra recuperar, por ejemplo, consiste en indicar al estudiante que obtenga el resultado de multiplicar 7×8 y el estudiante recupera su conocimiento sobre las tablas de multiplicar para obtener la respuesta. Otro ejemplo es cuando el estudiante tiene que recordar que la fórmula para calcular el área de un círculo es πr^2 , donde la letra r representa la longitud del radio de la circunferencia y que la literal π representa una constante cuyo valor aproximado es 3.1416.

Categoría 2, *Entender*. Tiene como objetivo principal del proceso de instrucción promover la construcción de conocimientos estructurados. Se dice que los estudiantes entienden algo, cuando son capaces de construir significado a partir de comunicaciones orales, escritas y gráficas. Ejemplos de posibles mensajes instruccionales incluyen simulaciones por computadora o mensajes verbales, pictóricos, y representaciones simbólicas escritas. Los estudiantes entienden algo cuando son capaces de conectar un “nuevo” conocimiento que se va a adquirir y sus conocimientos previos. Específicamente, el nuevo conocimiento se integra a partir de los esquemas y marcos cognitivos existentes. Dado que los conceptos son los componentes básicos de estos esquemas y marcos, el conocimiento conceptual es la base para los procesos que involucran el entendimiento. Los siete procesos cognitivos asociados con esta categoría son *interpretar*, *ejemplificar*, *clasificar*, *resumir*, *inferir*, *comparar* y *explicar*.

2.1. *Interpretar*. Involucra realizar transformaciones dentro de un mismo registro de representación o efectuar cambios entre registros de representación; lo que Duval (2017), denomina como operaciones de *tratamiento* y *conversión*, respectivamente. En el caso de un tratamiento dentro del registro algebraico se puede solicitar al estudiante completar el cuadrado en la expresión función cuadrática $f(x) = x^2 + 2x - 1$ para determinar las coordenadas del vértice de la parábola que representa dicha función. En el caso de una conversión se puede solicitar al estudiante bosquejar la gráfica que corresponde a la función representada mediante la expresión $f(x) = x^2 + 2x - 1$. El proceso cognitivo de interpretar involucra establecer conexiones entre formas de representación. Algunos verbos equivalentes son *traducir*, *parafrasear*, *representar* y *aclerar*. Algunas tareas propias de este tipo de procesos cognitivos son aquellas donde se le solicita al estudiante expresar en lenguaje algebraico enunciados expresados en lenguaje natural.

2.2. *Ejemplificar*. Consiste en encontrar un ejemplo o ilustración específica de un concepto o principio general. Ejemplificar involucra identificar las características definitorias del concepto o principio general (por ejemplo, la característica que define a un triángulo isósceles es la igualdad entre las longitudes de, al menos, dos de sus lados) y usar esas características para seleccionar o construir uno o más casos que satisfagan tales características. Por ejemplo, seleccionar de entre tres triángulos dados, aquel que es isósceles. Algunos verbos alternativos para este proceso cognitivo son *ilustrar*. En este proceso cognitivo involucra establecer conexiones entre casos y características que definen o determinan a una categoría o concepto general. Aquí se transita de las características generales al caso, es decir de lo general a lo particular.

2.3. *Clasificar*. Consiste en determinar si algo pertenece a una determinada categoría. Este proceso cognitivo ocurre cuando un estudiante reconoce que algo pertenece a determinada categoría (concepto o principio). La clasificación implica abstraer las características relevantes de un objeto, centrando la atención en aquellas que son determinantes y dejando de lado todas aquellas que son accesorias. Aquí el caso se ubica en una categoría a partir de decidir si satisface las características de dicha categoría; es decir, se pasa de lo particular a lo general. Es el proceso inverso o complementario de ejemplificar. Algunos verbos

alternativos para este proceso cognitivo son categorizar, incluir y subsumir. Una tarea en la que el estudiante debe clasificar consiste en solicitar que seleccione las categorías a las cuales pertenece un cuadrado: (a) trapecios, (b) paralelogramos, (c) rombos, (d) romboides.

2.4. *Resumir*. Consiste en identificar los elementos o puntos principales en cierto conjunto de información. Ocurre cuando un estudiante, mediante una frase, representa un conjunto mayor de información. Resumir implica construir una representación de la información que capture el significado esencial, sus aspectos o características principales. Un verbo alternativo para este proceso cognitivo es *abstraer*.

2.5. *Inferir*. Consiste en obtener una conclusión lógica a partir de cierta información dada. Inferir involucra obtener un patrón subyacente en una serie de ejemplos o casos, de forma que el estudiante es capaz de abstraer un principio al codificar las características relevantes que comparten tales ejemplos o casos. Por ejemplo, cuando a un estudiante se le presenta la serie de números 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... y es capaz de identificar que cada número en la secuencia se obtiene como suma de los dos números previos, está infiriendo una característica de tales números y deja de lado otras características que para este caso son irrelevantes, como por ejemplo que los números sean pares o impares. El proceso de inferir involucra realizar comparaciones entre casos que pertenecen a cierto conjunto. Un proceso asociado consiste en utilizar el patrón en la creación de nuevos casos (por ejemplo, que el siguiente número en la sucesión es 34, ya que este número es la suma de 13 y 21, que son los dos números previos en la secuencia), el cual se denomina *ejecutar*. *Inferir* y *ejecutar* son procesos que se utilizan conjuntamente al abordar tareas de aprendizaje. Algunos verbos alternativos para este proceso cognitivo son *predecir* y *concluir*. Una tarea que involucra este tipo de procesos cognitivo es; por ejemplo, presentar al estudiante una tabla de doble entrada, con datos que satisfacen una relación de proporcionalidad directa, y que el estudiante sea capaz de identificar que los cocientes $\frac{y_i}{x_i}$ son constantes. Otra tarea asociada con este mismo proceso cognitivo consiste en solicitar al estudiante que proponga una expresión algebraica en las variables x y y , tal que y tome el valor 0 cuando x es igual a 1, que y sea igual a 3 cuando x es igual a 2, y que y sea igual a 8 cuando x es igual a 3.

2.6. *Comparar*. Consiste en detectar semejanzas y diferencias entre dos o más objetos, eventos, ideas, problemas o situaciones. Comparar incluye encontrar correspondencia 1–1 entre elementos y patrones en un objeto, evento o idea y aquellos en otro objeto, evento o idea. Cuando se implementa junto con los procesos de *inferir* (abstraer una regla) e *implementar* (aplicar la regla a una situación menos familiar), la comparación contribuye al razonamiento por analogía. Algunos verbos asociados con este proceso cognitivo son *contrastar* o *parear*. Se lleva a cabo este proceso cognitivo cuando se presenta nueva información y el estudiante debe detectar correspondencias o similitudes con un conocimiento familiar. Comparar también puede involucrar la determinación de correspondencias entre dos o más objetos, ideas o eventos que se le presentan. Una tarea asociada con este proceso cognitivo puede ser que el estudiante compare las gráficas de las ecuaciones $y = 2x + 1$ y $y = 2x + 3$. Otro tipo de tareas puede ser que el estudiante compare la estructura de problemas verbales que involucran relaciones de proporcionalidad directa y proporcionalidad inversa.

2.7. *Explicar*. Consiste en construir un modelo de causa-efecto asociado a un sistema y aplicar este modelo para determinar por qué las cosas funcionan como lo hacen. El modelo puede derivarse de una teoría formal (principios físicos, axiomas matemáticos), o puede fundamentarse en la investigación empírica o la experiencia. Una explicación completa involucra la construcción de un modelo causa-efecto, incluyendo cada parte principal en un sistema, o cada evento principal en una cadena de causalidades; y usar el modelo para determinar cómo un cambio en una parte del sistema o un “eslabón” en la cadena produce un cambio en la otra parte o eslabón. Un término alternativo para el proceso de explicar es *construir un modelo*. Una tarea en la que el estudiante debe llevar a cabo este proceso cognitivo es aquella en la que se le solicita al estudiante expresar por qué la suma de dos números impares tiene que ser par, o por qué el producto de dos números impares es impar. Otra tarea en la que se promueve este proceso cognitivo es que el estudiante exprese por qué al duplicar el lado de un cuadrado el área del segundo cuadrado es cuatro veces el área del cuadrado original.

Categoría 3, *Aplicar*. Tiene como objetivo principal del proceso de instrucción promover el uso de procedimientos para resolver problemas o ejercicios. El proceso cognitivo de aplicar

está ligado estrechamente con el *conocimiento procedimental*. La categoría de aplicar está integrada por dos procesos cognitivos, los cuales son *ejecutar* e *implementar*. Cuando la tarea es un ejercicio, los estudiantes generalmente conocen qué conocimiento procedimental deben utilizar. Al solicitar a los estudiantes que aborden un ejercicio, los estudiantes utilizan el procedimiento casi de forma automática, sin pensarlo mucho. Por ejemplo, a un estudiante de secundaria al que se le proponen varios ejercicios en los que debe resolver ecuaciones cuadráticas, solamente identifica los valores de los parámetros a , b y c , y los sustituye en la fórmula general ($x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$) y obtiene, sin más, los valores de la incógnita. Por otra parte, cuando la tarea es un problema, el estudiante debe decidir, con cierta dificultad, cuál conocimiento debe utilizar para abordar la situación problemática, y puede requerir la modificación o adaptación de un algoritmo o procedimiento ya conocido. Al llevar a cabo el proceso cognitivo de *implementar*, a diferencia del proceso de *ejecutar*, se requiere un mayor nivel de entendimiento tanto del problema como del proceso de solución. En el caso de *implementar*, se requiere un entendimiento conceptual como requisito para la aplicación de un conocimiento procedimental.

3.1. *Ejecutar*. Consiste en aplicar un procedimiento a una tarea con la que se tiene familiaridad. Durante el proceso cognitivo de ejecutar el estudiante lleva a cabo, de forma rutinaria, un algoritmo o procedimiento durante una tarea familiar. La familiaridad con la tarea proporciona suficientes pistas o indicaciones sobre cuál es el algoritmo o procedimiento adecuado o idóneo. Ejecutar se asocia más frecuentemente con habilidades y algoritmos, más que con técnicas y métodos. Las habilidades y algoritmos están integrados por secuencias de pasos que generalmente se siguen en un orden fijo y cuando los pasos se implementan de forma correcta se obtiene la respuesta esperada. Un término asociado con ejecutar es *llevar a cabo*. En este caso el estudiante se enfrenta con una tarea familiar y sabe que debe hacer para completarla. Ejemplos de tareas en la que se lleva a cabo este tipo de procesos cognitivos consiste en solicitar a estudiantes de secundaria sumar o multiplicar dos números enteros de cinco cifras con los algoritmos usuales; que un estudiante de bachillerato resuelva un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

mediante el método de eliminación; o que un estudiante de licenciatura obtenga la derivada de una función polinómica.

3.2. *Implementar*. Consiste en seleccionar y utilizar un procedimiento adecuado para abordar o resolver un problema. Dado que se requiere de un proceso de selección, los estudiantes deben poseer un entendimiento de los problemas encontrados, así como del tipo de procedimientos disponibles para abordarlos. El proceso cognitivo de implementar frecuentemente se lleva a cabo en coordinación con otros procesos como *entender* y *crear*. En este caso los estudiantes enfrentan una situación problemática que no es familiar, así que no saben, de forma inmediata, qué procedimiento deben emplear para enfrentarla. Además, un simple procedimiento no parece ser suficiente para obtener la solución al problema, así que puede requerirse de modificar o adaptar algún procedimiento o algoritmo estándar. El proceso de implementar se asocia con el uso de técnicas y métodos, más que con el de habilidades y algoritmos. Las técnicas y métodos no siguen una secuencia fija de pasos, sino que durante el proceso se deben tomar ciertas decisiones, y no se espera obtener una respuesta fija y única al implementar el método. La noción de que no existe una respuesta simple y fija se aplica especialmente a objetivos en los cuales se aplican conocimientos conceptuales tales como teorías, modelos o estructuras. Un ejemplo de tareas asociadas con este objetivo son aquellas en las que a los estudiantes de cálculo se les pide utilizar sus conocimientos sobre derivadas para bosquejar la gráfica de una función a partir de la gráfica de su función derivada. Otra tarea en la que se aplica este proceso cognitivo es aquella en la que se solicita a los estudiantes que decidan cuál es el mejor plan de telefonía celular, entre dos o más opciones posibles.

Categoría 4, *Analizar*. Tiene como objetivo principal del proceso de instrucción seccionar o dividir cierto material en sus partes constituyentes, y determinar cómo las partes se relacionan entre sí y con la estructura global de la que forman parte. Esta categoría está integrada por los procesos cognitivos de *diferenciar*, *organizar* y *atribuir*. Llevar a cabo procesos de análisis incluye aprender a determinar las piezas relevantes o importantes en un mensaje (diferenciar), las formas en las cuales las piezas del mensaje se organizan (organizar), y el propósito subyacente del mensaje (atribuir). El análisis puede considerarse como una extensión de los procesos de entendimiento y un antecedente de los procesos que

involucran evaluar y crear. Algunas actividades en las que se llevan a cabo procesos cognitivos relacionados con el análisis son: (a) distinguir entre hechos y opiniones, (b) conectar conclusiones con las afirmaciones que las sustentan, (d) distinguir entre información relevante e información accesorio, (e) determinar cómo unas ideas se relacionan con otras, (f) determinar los supuestos no declarados en una afirmación, (g) encontrar evidencia que sustente una afirmación.

4.1. *Diferenciar*. Consiste en distinguir las partes de una estructura global en términos de su relevancia o importancia. Un estudiante lleva a cabo este proceso cognitivo cuando es capaz de discriminar qué información es relevante y cuál es irrelevante, cuando puede decidir qué información es importante y cuál no lo es. Diferenciar involucra capacidad para identificar una organización estructural y para determinar cómo las partes se relacionan con el todo o con la estructura global. Diferenciar se distingue de comparar, ya que para diferenciar entre componentes es necesario considerar una estructura global para determinar qué es importante o relevante. Un verbo alternativo para este proceso cognitivo es *discriminar*. Un ejemplo de tarea matemática en la que el estudiante lleva a cabo este proceso es aquella en la que tiene que determinar qué información o datos son relevantes para resolver la situación problemática o para encontrar una ruta de solución. Otra tarea en la que se lleva a cabo este proceso cognitivo es cuando se le presentan diversas gráficas de funciones lineales en dos variables y se solicita al estudiante diferenciar aquellas que se asocian con una relación de proporcionalidad directa de las que no están asociadas con este tipo de relaciones.

4.2. *Organizar*. Consiste en identificar los elementos constituyentes de una situación y determinar cómo se ajustan u organizan en una estructura coherente. Al ejecutar este proceso cognitivo los estudiantes construyen conexiones sistemáticas y coherentes entre ciertas piezas de información. Este proceso generalmente se lleva a cabo de forma conjunta con el proceso de diferenciar. Los estudiantes primero identifican los componentes relevantes o importantes y, posteriormente, determinan la estructura global dentro de la cual se ajustan dichos componentes. Organizar también se puede ejecutar junto con el proceso de atribuir con la finalidad de identificar la intención, punto de vista o perspectiva a la que hace referencia la información dada. Algunos verbos asociados con este proceso cognitivo

son *estructurar* o *integrar*. Las tareas en las que los estudiantes llevan a cabo este proceso cognitivo se orientan a la identificación de relaciones sistemáticas y coherentes entre elementos relevantes. Una tarea asociada con este procesos cognitivo puede ser identificar cómo se estructuran las diferentes distribuciones o distribuciones de probabilidad, o cómo se organizan los elementos matemáticos asociados con las funciones lineales. El proceso cognitivo de organizar involucra imponer una estructura sobre cierto conjunto de información

4.3. *Atribuir*. Consiste en determinar un punto de vista, sesgo, valor o intención subyacente en cierta información. Este proceso cognitivo involucra un proceso de deconstrucción, en el cual el estudiante determina las intenciones de un autor o productor de cierta información. A diferencia del proceso cognitivo de interpretar, donde el estudiante busca entender el significado del material o información, atribuir involucra una extensión más allá del entendimiento básico para inferir las intenciones o puntos de vista subyacentes en el material. Un verbo alternativo para este proceso cognitivo es el de deconstruir. Un ejemplo de tarea donde se lleva a cabo este proceso cognitivo es la determinación de la finalidad que el autor habría tenido en mente, en términos de procesos cognitivos, al proponer cierta tarea sobre funciones lineales. Específicamente, una tarea de este tipo consiste en determinar cuál es el objetivo instruccional que el autor tenía en mente al solicitar elaborar la gráfica de la función cuya regla de correspondencia está dada por la expresión $y = 3x + 1$.

Categoría 5, *Evaluar*. Tiene como objetivo principal del proceso de instrucción el construir juicios basados en criterios y estándares. Los criterios utilizados con mayor frecuencia son calidad, efectividad, eficiencia y consistencia. Los estándares se aplican a los criterios y pueden ser cualitativos o cuantitativos (¿La cantidad es suficiente?, ¿la calidad es buena?). Esta categoría está integrada por los procesos cognitivos de verificar (emitir juicios basados en la consistencia interna) y criticar (emitir juicios basados en criterios externos). Es importante enfatizar que no todos los juicios tienen el carácter de evaluativos. La evaluación se distingue de otros juicios ya que hace uso de estándares de desempeño basados en criterios claramente definidos. ¿Es esta ruta de solución más sencilla que aquella?, ¿Este procedimiento es más efectivo para resolver el problema?

5.1. *Verificar*. Consiste en detectar inconsistencias o falacias al interior de un proceso o producto; es decir, se busca determinar si un proceso o producto tiene consistencia interna, así como detectar la efectividad de un procedimiento a medida que se implementa. Este proceso cognitivo se lleva a cabo cuando un estudiante determina si una conclusión se deriva o no de ciertas premisas, si ciertos datos confirman o refutan una afirmación, o si cierta información tiene elementos contradictorios; por ejemplo, cuando se solicita el estudiante decidir si es cierto que un triángulo es isósceles cuando se solo se sabe que dicho triángulo tiene dos ángulos iguales; o si basta que la gráfica de una relación entre dos variables sea una línea recta para asegurar que la relación entre esas variables es de proporcionalidad directa. Algunos verbos asociados con este proceso cognitivo son *monitorear* o *examinar*.

5.2. *Criticar*. Consiste en juzgar un producto con base en criterios y estándares externos. Al llevar a cabo este proceso cognitivo un estudiante nota las características positivas y negativas de un producto y elabora un juicio basado en esas características. Un verbo alternativo para este proceso cognitivo es *juzgar*. Los estudiantes juzgan los méritos de o información basados en criterios y estándares específicos, los cuales son determinados por otros o por el mismo estudiante. Una tarea asociada con este objetivo es una en la cual se solicita a los estudiantes determinar cuál es el método más eficiente para encontrar todos los números enteros cuyo producto es 60. De forma análoga se puede solicitar a los estudiantes que indiquen cuál es el método más sencillo para determinar si dos variables varían proporcionalmente; o que digan cuál es el método más efectivo para multiplicar, mentalmente, un número entero por cinco.

Categoría 6, *Crear*. Tiene como objetivo principal del proceso de instrucción agrupar información para obtener un todo coherente o funcional. Al llevar a cabo este proceso cognitivo, los estudiantes tienen que elaborar un nuevo producto mediante la reorganización mental de algunos elementos o partes dentro de una estructura que no se encontraban claramente presentes con anterioridad en dicha estructura. Esta categoría está integrada por los procesos cognitivos de *generar*, *planear* y *producir*.

6.1. *Generar*. Consiste en representar el problema con la finalidad de obtener hipótesis o alternativas que se ajusten a ciertos criterios. Generalmente, la forma de representar un problema sugiere posibles soluciones; sin embargo, redefinir, replantear o cambiar la representación del problema puede sugerir una ruta diferente. El objetivo del proceso de generar es divergente, en el sentido que se buscan diversas alternativas de solución. Un verbo alternativo para este proceso cognitivo es *hipotetizar*. Cuando el estudiante lleva a cabo este proceso cognitivo se le proporciona cierta información a partir de la cual producirá diversas propuestas o alternativas de solución. Una tarea asociada con este proceso cognitivo consiste en solicitar al estudiante generar diversos problemas de palabras en los cuales se encuentre presente la relación de proporcionalidad dada por la expresión $y = 2x$. Otra tarea del mismo estilo consiste en pedir al estudiante que proponga diversos procedimientos para multiplicar mentalmente un número entero por cuatro. También se le puede solicitar al estudiante que proponga métodos alternativos al algorítmico para efectuar restas de números enteros que requieren de reagrupación.

6.2. *Planear*. Consiste en idear, proponer o diseñar un plan o procedimiento para abordar alguna tarea o resolver un problema. La planificación no incluye llevar a cabo o implementar los pasos que determinan la solución de un problema. Al planear, un estudiante puede establecer sub-objetivos o dividir una tarea en sub-tareas que deberán abordarse durante la solución del problema. Un verbo alternativo para este proceso cognitivo es diseñar. Una tarea que involucra este proceso cognitivo puede ser solicitar a los estudiantes especificar los pasos para encontrar el volumen de la base de una pirámide truncada. Los pasos pueden ser calcular primero el volumen de la pirámide completa y posteriormente calcular la pirámide pequeña de la punta y, finalmente, restar las áreas obtenidas. Este proceso cognitivo involucra describir planes de solución.

6.3. *Producir*. Involucra llevar a cabo un plan para resolver un problema. Los procesos cognitivos de esta categoría pueden involucrar o no originalidad en la solución o el proceso. Este proceso cognitivo requiere la coordinación de los cuatro tipos de conocimientos que se describen en el siguiente apartado. Un verbo alternativo para este proceso cognitivo es *construir*. Al llevar a cabo este proceso cognitivo, al estudiante se le proporciona una descripción funcional de un objetivo y debe crear un producto que satisfaga la descripción,

por ejemplo, cuando se le solicita determinar una función polinomial que interpole cierto conjunto de datos. En general, las tareas que solicitan producir un modelo que describa cierto fenómeno se asocian con este tipo de procesos cognitivos.

2.4.2. *Conocimientos*

El segundo elemento de la taxonomía de Anderson et al. (2001), la constituyen los diferentes tipos de conocimientos, entre los cuales se identifican cuatro categorías generales: (i) conocimiento factual, (ii) conocimiento conceptual, (iii) conocimiento procedimental y (iv) conocimiento metacognitivo.

A. Conocimiento factual. Está integrado por elementos discretos o aislados de contenido, tales como terminología y detalles específicos respecto de un tema. Incluye las ideas básicas que los expertos usan para comunicar, entender y organizar sistemáticamente su disciplina. Esos elementos, generalmente son de utilidad en la forma en que se presentan; es decir, necesitan poca o nula alteración para su uso o aplicación. Los elementos de esta categoría usualmente son símbolos asociados con algunos referentes concretos o “cadenas de símbolos” que transmiten información importante. Usualmente, el conocimiento factual posee un bajo nivel de abstracción.

A_a. Conocimiento de la terminología. Incluye conocimiento de etiquetas y símbolos específicos, verbales y no verbales. Está integrado por la terminología básica de una disciplina, la “taquigrafía” que usan los expertos para expresar lo que saben. En el caso de las matemáticas se incluye el conocimiento de términos tales como suma, sumando, producto, factor, número primo, número entero, función, ecuación, relación, identidad, polígono, promedio, proporción, cociente, entre otros.

A_b. Conocimiento de detalles y elementos específicos. Se refiere al conocimiento de eventos, lugares, personas, fechas, fuentes de información, entre otros. Puede incluir datos específicos y precisos, tales como la fecha exacta de un evento, o la magnitud exacta de un fenómeno. También puede incluir información aproximada sobre la ocurrencia de un evento, o el orden general de magnitud de un fenómeno. Estos hechos específicos constituyen información básica que los expertos usan para describir su campo y para pensar

respecto de los problemas de su disciplina. Estos hechos se distinguen de la terminología, en el sentido que la terminología representa las convenciones o acuerdos dentro del campo, mientras los hechos representan descubrimientos a los cuales se llegó por otros medios diferentes que los acuerdos consensuales que se elaboran con propósitos de comunicación. Un ejemplo de este conocimiento es conocer el valor exacto o aproximado de las constantes como $\pi \approx 3.1415$, $e \approx 2.7182$, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Este subtipo de conocimiento también incluye conocimiento sobre libros, escritos y otras fuentes de información de temas o problemas específicos; por ejemplo, que el primer libro de geometría fue Los Elementos de Euclides, escrito alrededor de 300 a.C. Así, el conocimiento de un hecho específico y el conocimiento de las fuentes de ese hecho se clasifican en esta categoría.

B. Conocimiento conceptual. Incluye conocimiento de categorías y clasificaciones, así como las relaciones entre ellas; constituyéndose en formas más complejas y organizadas de conocimiento. Aquí también se encuentra el conocimiento de principios y generalizaciones; así como de teorías, modelos y estructuras. El conocimiento conceptual incluye esquemas, modelos mentales, así como teorías explícitas o implícitas. Representa el conocimiento de un individuo respecto de cómo una disciplina está estructurada y organizada, de cómo las diferentes partes se están interconectadas e interrelacionadas de forma sistemática, y de cómo esas partes funcionan conjuntamente. En el caso de matemáticas incluye conocer qué es un sistema de numeración, como el decimal, cuáles son sus componentes (números y operaciones como la suma y el producto), y cómo estos componentes se organizan a través de las propiedades básicas de la estructura matemática conocida como un campo; o cómo es el proceso de deducción de teoremas en un sistema axiomático como de la geometría euclidiana. El conocimiento conceptual incluye tres subtipos de conocimiento: (a) conocimiento de clasificaciones y categorías, (b) conocimiento de principios y generalizaciones y (c) conocimiento de teorías, modelos y estructuras.

B_a. Conocimiento de clasificaciones y categorías. Incluye las categorías, clases, divisiones y arreglos (n-adas o vectores) que se utilizan para estructurar y sistematizar los fenómenos de interés para cada disciplina. Este conocimiento es más general y más abstracto que el

conocimiento de terminología o de hechos específicos. Las clasificaciones y categorías permiten vincular a la terminología y a los hechos de una disciplina. Por ejemplo, en matemáticas los cuadrados, rombos, trapecios, trapezoides, rectángulos, entre otros, son categorías que se agrupan dentro del término general de cuadriláteros.

Algunas veces resulta complicado distinguir entre el *conocimiento de clasificaciones y categorías* (B_a), y el *conocimiento factual* (A). Para complicar aún más las cosas, las clasificaciones y categorías básicas se pueden colocar en categorías o clasificaciones más amplias. Por ejemplo, los números naturales, los números enteros y las fracciones se pueden ubicar dentro de la categorías de números racionales, los cuales a su vez se pueden colocar dentro de la categoría de números reales, y estos a su vez dentro de la categoría de números complejos. Cada categoría más amplia nos lleva del ámbito de lo específico y concreto, al ámbito de lo abstracto. Las clasificaciones y categorías son esencialmente el resultado de acuerdos y conveniencia, mientras el conocimiento de detalles específicos surge más directamente de la observación, la experimentación y el descubrimiento.

B_b . Conocimiento de principios y generalizaciones. Los principios y generalizaciones se construyen con base en categorías y clasificaciones. Una de las características distintivas de un experto en alguna disciplina consiste en su capacidad para reconocer patrones significativos (por ejemplo, generalizaciones) y activar el conocimiento relevante sobre esos patrones con poco esfuerzo cognitivo. Incluye conocimiento de abstracciones particulares que resumen observaciones de fenómenos. En el caso de las matemáticas, aquí se incluye el conocimiento de diversos teoremas como el de Pitágoras, el de Tales en geometría, o el principio de las casillas y el teorema del binomio, en combinatoria. Los principios y generalizaciones son ideas amplias que pueden ser difíciles de entender para los estudiantes porque es posible que no estén completamente familiarizados con los fenómenos que tales principios pretenden resumir y organizar.

B_c . Conocimiento de teorías, modelos y estructuras. Este conocimiento se construye con base en principios y generalizaciones junto con sus interrelaciones, los cuales presentan una visión clara y sistémica de un fenómeno complejo. Este conocimiento difiere del B_b , en su énfasis sobre un conjunto de principios y generalizaciones organizadas en alguna forma

para dar lugar a una teoría, modelo o estructura. En matemáticas, las diferentes teorías o estructuras tales como los grupos, campos, anillos, espacios vectoriales, entre otros, integran este subtipo de conocimiento.

C. Conocimiento procedimental es aquel conocimiento que me permite saber “cómo hacer algo”, incluye el conocimiento de habilidades y algoritmos, técnicas y métodos; así como conocimientos de los criterios para determinar o justificar “cuándo hacer qué”, dentro de dominios o disciplinas específicas. El “algo” que se va a hacer puede ser un ejercicio rutinario o un problema complejo. El conocimiento procedimental también incluye conocimiento de los criterios para determinar cuándo usar algún procedimiento. El conocimiento procedimental se refiere al conocimiento de ciertos “procesos”, mientras que el conocimiento factual y procedimental se asocia con ciertos “productos”. El conocimiento procedimental incluye habilidades, algoritmos, técnicas, o métodos que son propios o específicos de una disciplina. En el caso de las matemáticas, aquí se incluye el conocimiento de los algoritmos para sumar, restar, multiplicar y dividir; los procedimientos para resolver ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones cuadráticas; o para establecer la congruencia o semejanza de triángulos.

C_a. Conocimiento de habilidades específicas y algoritmos. El conocimiento procedimental se puede representar como una serie o secuencia de pasos, a la cual nos referimos como procedimiento. Algunas veces los pasos se siguen en un orden fijo, pero en otros casos, es necesario decidir, en ciertos momentos, qué pasos seguir a continuación. Además, a veces la respuesta es única, pero en otros casos puede haber múltiples respuestas válidas. Aunque el proceso puede ser fijo o más abierto, el resultado final es fijo, en este tipo de conocimiento. En el caso de matemáticas, aquí se incluyen algoritmos para llevar a cabo, por ejemplo, la suma de dos fracciones, ya que la respuesta derivada de aplicar el algoritmo, de forma correcta, es única. Otro ejemplo es el conocimiento de los diferentes procedimientos para resolver una ecuación cuadrática. El énfasis aquí está en el conocimiento que el estudiante tiene del procedimiento, no en su habilidad para utilizarlo.

C_b. Conocimiento de técnicas y métodos específicos de una disciplina. Aquí se incluyen procedimientos que no conducen a una única o predeterminada respuesta. Incluye

conocimiento que es fundamentalmente el resultado del consenso, acuerdo o normas disciplinarias más que de conocimiento que es, más directamente, resultado de la observación, experimentación o descubrimiento. Este subtipo de conocimiento refleja cómo los expertos en el campo o la disciplina piensan, abordan y atacan los problemas, más que el resultado de tales formas de pensamiento. En el caso de las matemáticas, se tiene las diferentes formas en que se puede “matematizar” en fenómeno o situación, como el proceso de decidir en qué línea de cajas se debe formar una persona en el supermercado para minimizar el tiempo de espera.

C_c. Conocimiento de criterios para determinar cuándo utilizar procedimientos apropiados. Incluye el conocimiento de *cuándo* usar un método o procedimiento, lo cual involucra saber cómo se ha usado en el pasado. Este conocimiento generalmente es de tipo histórico o enciclopédico. En el caso de las matemáticas involucra saber en qué casos usar cierto tipo de procedimiento para resolver una ecuación cuadrática, o cuándo utilizar cierto método de integración.

D. *Conocimiento metacognitivo* es aquel conocimiento sobre nuestros propios procesos de pensamiento, incluye el conocimiento estratégico, conocimiento acerca de tareas cognitivas, incluyendo el conocimiento contextual y condicional, además del autoconocimiento.

2.4.3. Taxonomía para el aprendizaje, la enseñanza y la evaluación

El marco o taxonomía de Anderson et al. (2001) es bidimensional, ya que está integrado por dos dimensiones, la dimensión de procesos cognitivos y la dimensión de conocimientos. La dimensión de los procesos cognitivos (las columnas de la tabla 3) está integrada por seis categorías, las cuales dan cuenta de procesos cognitivos que van incrementando su nivel de complejidad. Por otra parte, la dimensión de conocimiento (los renglones de la tabla 3) está integrada por cuatro categorías de conocimiento que van de lo más concreto a lo más abstracto.

Tabla 3. Forma tabular de la taxonomía para el aprendizaje, la enseñanza y la evaluación.

Dimensión de conocimientos	Dimensión de procesos cognitivos					
	1. Recordar	2. Entender	3. Aplicar	4. Analizar	5. Evaluar	6. Crear
A. Factual						
B. Conceptual						
C. Procedimental						
D. Metacognitivo						

2.6. Aprendizaje del concepto de función lineal

Diversos matemáticos y educadores matemáticos consideran que el concepto de función es uno de los más importantes en matemáticas (Carlson, 1998; Carlson y Oehrtman, 2005; Dubinsky y Harel, 1992; Eisenberg, 2002). Además, concuerdan en que el entendimiento del concepto de función va más allá de la capacidad para operar con expresiones algebraicas (Breidenbach et al., 1992; Carlson y Oehrtman, 2005); incluye para utilizar y conectar sus representaciones más comunes: tabular, algebraica y gráfica (Adu-Gyamfi y Bossé, 2014; Wang et al., 2017); y otras como las escritas, verbales, kinestésicas, coloquiales (DeMarois y Tall, 1996).

Otros investigadores argumentan que el aprendizaje del concepto de función involucra el desarrollo de entendimiento conceptual, fluidez procedimental y conexiones entre conocimientos, *Connected Knowledge* en inglés (Kalchman y Koedinger, 2005). Además, también se ha considerado que el entendimiento del concepto de función requiere llevar a cabo procesos cognitivos generales tales como: (a) identificar, (b) discriminar, (c) generalizar, (d) sintetizar y (e) utilizar (Sierpinska, 1992).

Otro aspecto relevante, relacionado con el concepto de función, son los niveles progresivos para el desarrollo de entendimiento. Una propuesta de tales niveles la realizaron Dubinsky y Harel (1992): (i) función como acción, (ii) función como proceso, (iii) función como objeto y (iv) función como esquema; la cual ha sido retomada y modificada o complementada por otros investigadores como Breidenbach et al. (1992), quien propone las categorías: (i) prefunción, (ii) acción, (iii) proceso y (iv) desconocido; o DeMarois y Tall (1996), quienes proponen las categorías: (i) pre-acción, (ii) acción, (iii) proceso, (iv) objeto y (v) procepto. Otra propuesta de niveles, análoga a los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele, se puede consultar en Kalchman y Koedinger (2005).

La comprensión del concepto de función incluye el entendimiento de otras ideas tales como variable, parámetro (Pierce et al., 2010) o ecuación; así como dependencia, variación, covariación, tasa de cambio, etcétera (Carlson y Oehrtman, 2005; Carlson et al., 2002). Otras ideas que son esenciales para la comprensión del concepto de función lineal incluyen los conceptos de pendiente y de ordenada al origen (Birgin, 2012).

El estudio de las funciones lineales inicia, implícitamente, con el tema de proporcionalidad directa⁴, el cual es un contenido unificador en matemáticas (Bayazit, 2012; Lanius y Williams, 2003). De acuerdo con el *Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas* de los Estados Unidos (NCTM, 2000), el razonamiento proporcional debe ser un tema integrador en la escuela secundaria, ya que este es esencial para entender muchos otros contenidos y establecer conexiones con situaciones reales. Las relaciones de proporcionalidad representan un tipo particular de función lineal, que algebraicamente se representa mediante la expresión $f(x) = kx$, donde k es la constante de proporcionalidad. Así, el entendimiento del concepto de función lineal es complejo e involucra conectar e integrar varias ideas y representaciones con diversos niveles de abstracción (Birgin, 2012; Sherin, 2002).

⁴ Solo la proporcionalidad directa está relacionada con las funciones lineales. No es el caso de la proporcionalidad inversa, ya que esta se representa algebraicamente como $y=k/x$, expresión cuya gráfica corresponde a una hipérbola, no a una línea recta.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

3.1. Introducción

En este capítulo se describe el tipo de investigación, las fuentes de información, así como el proceso para el análisis de datos y la identificación de regularidades en los datos, las cuales se expresan en forma de categorías, a partir de las cuales se formularon la respuesta a la pregunta de investigación y las conclusiones de la tesis.

Este trabajo sigue un enfoque mixto, el cual involucra elementos cuantitativos (conteo de palabras) y cualitativos. El enfoque cualitativo se caracteriza porque la información empírica asociada consiste principalmente en palabras que expresan ideas o significados, aunque también puede ser información en forma de imágenes, dibujos, fórmulas, gestos, entre otros. La característica fundamental de la información cualitativa es que tiene la finalidad de expresar ideas y significados. Esta investigación es comparativa y documental. El análisis documental involucra una revisión repetida, examinación e interpretación de los datos con la finalidad de comprender su significado y obtener conocimiento empírico respecto del constructo que se estudia (Frey, 2018). El significado es algo que cada ser humano atribuye a las palabras que lee o escucha, o a las imágenes que ve. El asignar significado involucra un proceso complejo, durante el cual se combinan las percepciones personales del material y nuestros conocimientos previos. Así, la asignación de significado involucra un *proceso constructivo* (Scheirer, 2012).

Específicamente, en esta tesis se realizó un análisis cualitativo de contenido (QCA, por sus siglas en inglés) de las tareas, relacionadas con el tema de función lineal, de dos libros de secundaria, uno de ellos autorizado por la SEP. Una característica distintiva del QCA es que se enfoca en aspectos seleccionados del material, los cuales están determinados por las categorías (Scheirer, 2012).

3.2. Análisis cualitativo de contenido

El análisis cualitativo de contenido (QCA, por sus siglas en inglés) es una *técnica de investigación* sistemática que se utiliza para analizar información que se encuentra en forma de texto, imágenes, grabaciones y otros recursos mediante los cuales se comunica

información. El QCA es un método sistemático porque se examina todo el material empírico y se decide a qué parte del marco de codificación se ajusta. Por otra parte, el QCA siempre involucra la misma serie de pasos: (i) determinar una pregunta de investigación; (ii) obtener la información empírica; (iii) construir un marco de codificación (categorías y subcategorías); (iv) dividir la información en unidades de codificación; (v) validar el marco de codificación mediante una codificación doble, seguido de una discusión sobre las unidades que se codificaron de manera diferente; (vi) evaluar su marco de codificación en términos de coherencia de la codificación y en términos de validez y revisarlo en consecuencia, seguido de la codificación de todo el material, utilizando la versión revisada del marco de codificación; (vii) interpretar y presentar sus hallazgos.

Con esta técnica se puede analizar tanto el *contenido manifiesto* como el *contenido subyacente* de un texto. El objetivo del QCA es la construcción de categorías, a partir de las cuales se codifica la información textual o visual, mediante un proceso que puede ser inductivo, deductivo o deductivo inductivo (Kuckartz, 2023). En otras palabras, el QCA es una técnica para describir sistemáticamente el significado de material cualitativo, por medio de la clasificación de ese material como casos de un conjunto de categorías provenientes de un marco de codificación (Scheirer, 2012). El QCA es un método flexible, en el sentido de que siempre es posible adaptar el marco de codificación a los datos empíricos; es un método que permite obtener un entendimiento profundo de un fenómeno particular, proporcionando una estructura a cierto conjunto de datos, mediante un proceso sistemático de interpretación (Kleinheksel et al., 2020).

El QCA tiene diversas similitudes con otros métodos cualitativos, incluyendo la aceptación de múltiples realidades, un foco explícito en la indagación naturalista, el énfasis y profundidad en los entendimientos interpretativos de los fenómenos, así como la importancia del contexto en el proceso de construcción de significados y el desarrollo de familiaridad con los datos (Selvi, 2019).

3.2.1. Procedimientos para realizar un análisis cualitativo de contenido

De acuerdo con algunos autores, hay dos formas principales de llevar a cabo un análisis cualitativo de contenido: (a) inductiva u orientada a los datos (data-driven) y (b) deductiva

u orientada a conceptos (concept-driven). Algunos autores prefieren los términos data-driven y concept-driven para evitar posibles confusiones de significado que podrían aparecer al utilizar los términos inductivo y deductivo (Kuckartz, 2019; Scheirer, 2012). El objetivo de un análisis cualitativo de contenido es conceptualizar el proceso de asignación de categorías a pasajes de texto como un acto interpretativo (Mayring, 2014). La aproximación inductiva (data-driven) es más adecuada en los casos en los que se sabe poco sobre el tema o cuando el conocimiento está fragmentado (Elo y Kyngäs, 2008). Esta aproximación va de lo particular a lo general, de modo que se observan casos particulares y entonces se agrupan en categorías de carácter más general. Por otra parte, una aproximación deductiva (concept-driven) se basa en elementos teóricos o modelos previos y se orienta de lo general a lo particular.

La columna vertebral del análisis cualitativo de contenido es un marco de codificación, el cual funciona como un sistema para transformar la información en unidades de datos específicas, significativas y manejables (conocidas como códigos o categorías). Un marco de codificación tiene la finalidad de facilitar el proceso interpretativo y de creación de sentido. Construir un marco de codificación implica seleccionar material, estructurar y generar categorías preliminares las cuales se revisan y amplían durante el proceso (Schreier, 2014). Así, el análisis de contenido puede conceptualizarse como una actividad sistemática de asignación de categorías a porciones de texto; donde la codificación constituye un proceso de toma de decisiones por parte del investigador (Mayring, 2014). Codificar consiste en ordenar las cosas sistemáticamente, es hacer que algo forme parte de un sistema o clasificación (Saldaña, 2015).

El primer paso del análisis cualitativo de datos consiste en dividir la información cruda en fragmentos más pequeños. Posteriormente sigue la estructuración (creación de categorías principales) y generación (creación de subcategorías para cada categoría principal), que pueden llevarse a cabo inductivamente o deductivamente. El enfoque deductivo puede utilizar conocimientos previos (teoría, experiencia, investigaciones existentes, guía de entrevista, ideas, etc.) para desarrollar categorías. El enfoque inductivo, por el contrario, puede incluir estrategias específicas como la subsunción, resumen, comparación y contraste (Schreier, 2014).

Un código en la investigación cualitativa generalmente es una palabra o frase corta que asigna un atributo, evocativo o capturador de esencia, a una porción de texto o de información gráfica. La porción de información codificada, durante el primer ciclo del proceso, puede ser desde una simple palabras hasta un párrafo o una página completa de texto. La codificación no es una ciencia precisa; es fundamentalmente un acto interpretativo. Es importante ser consciente de que un código algunas veces puede resumir, destilar o condensar datos, no simplemente reducirlos (Saldaña, 2015).

Al realizar un análisis cualitativo de contenido, el investigador asume que existe una relación dialéctica entre la comprensión de las partes y el todo de un texto; y que dicho análisis involucra un proceso interpretativo, sustentado en los conocimientos previos del analista. Algunas recomendaciones para llevar a cabo la codificación del texto; así como la identificación de nuevas categorías, en la fase inductiva del proceso, incluyen:

- a. Reflexionar sobre las propias ideas preconcebidas y cualquier supuesto con respecto a la pregunta de investigación.
- b. Analizar el texto en su conjunto, identificando las ideas que no son claras hasta obtener una mejor comprensión global del texto que ayude a precisar las ideas particulares.
- c. Ser consciente de aspectos idiomáticos o culturales integrados en el texto y con los cuales no estamos familiarizados.
- d. Prestar atención, desde la primera lectura, a los temas que aparecen en el texto y que son importantes para la investigación.
- e. Diferenciar entre una lógica de aplicación; es decir, la identificación en el texto de temas y categorías especificadas a priori, y una lógica de descubrimiento; que involucra la identificación en el texto de cosas nuevas importantes, quizás inesperadas (Kuckartz y Rädiker, 2023).

El análisis cualitativo de contenido incluye la realización de diversos pasos o fases, las cuales se enuncian a continuación.

1. Recopilación de datos.
2. Definición de categorías.
3. Codificación.
4. Clasificación y agrupación.
5. Análisis e interpretación.
6. Informe de resultados.

3.2.2. Técnicas básicas para realizar un análisis cuantitativo de contenido

La primera de las técnicas consiste en contabilizar ciertos elementos en el material y comparar las frecuencias, absolutas o relativas, obtenidas. Es importante señalar que el entendimiento de un texto no es un proceso automático de contar elementos textuales manifiestos (Mayring, 2014). En esta aproximación es importante reconocer diferentes formas gramaticales de una palabra dentro del contexto de una oración. Es una aproximación que tiene ciertas desventajas derivadas, principalmente de los siguientes aspectos que no pueden llevar a cabo por sí mismos los programas informáticos mediante los cuales se lleva a cabo el conteo de palabras:

- Multiplicidad de significados de las palabras,
- los matices y connotaciones que el contexto confiere a los términos,
- el problema de las proformas (por ejemplo, en la frase "Noté eso", se requiere especificar a que hace referencia la palabra *eso*),
- las expresiones dialectales necesitan de revisión y reestructuración para hacer patente el significado asociado con ellas.

Otro grupo de técnicas se denominan análisis de valencia e intensidad y consiste en asignar un valor a ciertos componentes textuales en una escala de evaluación de dos o más grados. Por ejemplo, cada unidad de análisis puede ser valorada positiva o negativamente, respecto a una característica; o se pueden realizar valoraciones de intensidad de una característica, en forma análoga a las escalas Likert.

El tercer grupo de técnicas se denomina *análisis de contingencia*. El objetivo de estas consiste en determinar si ciertos tipos de elementos textuales (por ejemplo, conceptos

centrales) aparecen con especial frecuencia en el mismo contexto, y si están relacionados de alguna manera entre sí. Las frecuencias se colocan en tablas de doble entrada, las cuales son susceptibles de ser analizadas estadísticamente.

3.3. Fuentes de información

Tareas que abordan el concepto de función lineal, presentes en dos libros de matemáticas, autorizados por la Secretaría de Educación Pública de México para ser utilizados como textos en segundo grado de secundaria, durante el ciclo escolar 2022-2023. Los libros seleccionados son *Revuela. Secundaria. Matemáticas 2* de la editorial SM (en lo subsecuente, abreviado como RV-SM), y *Matemáticas 2 Espacios Recreativos* de la editorial Santillana (en lo subsecuente, abreviado como EC-SAN). El primer texto se eligió por ser el libro que la autora ha utilizado para enseñar en su centro de trabajo. La utilización es obligatoria e indicada por la dirección del centro educativo. El segundo texto fue seleccionado, porque se utilizaría por la autora a partir del ciclo escolar 2023-2024.

Se decidió analizar los libros de matemáticas de segundo grado de secundaria, por haber notado que el plan de estudios de tercer año de secundaria entra de lleno a trabajar con la función lineal, pasando de un lenguaje escrito al algebraico. Con base en los aprendizajes esperados de segundo grado de secundaria, los estudiantes promovidos a tercero debieran ser capaces de transitar entre el lenguaje escrito y algebraico al trabajar con funciones; sin embargo, esto no ocurre en la mayoría de los casos. Por lo anterior es importante conocer el papel de las tareas en el origen de las dificultades identificadas.

3.4. Estructura general de los textos y contexto de uso de los materiales

El plantel educativo donde se utilizan los libros considerados en el análisis de esta tesis, se encuentra en una zona urbana en el municipio de Pachuca del estado de Hidalgo. Es una institución privada que tiene un mediano prestigio y reconocimiento a nivel local. Los libros que se utilizan en el plantel educativo, pertenecen a la misma editorial en los tres grados de secundaria. El contexto socioeconómico de la comunidad donde se ubica la escuela es de clase media-baja.

En los apartados siguientes se describe la estructura general de cada uno de los textos a partir de los cuales se obtuvieron los datos que constituyen el sustento empírico de esta investigación.

3.4.1. *Revela. Secundaria. Matemáticas 2*

El libro está integrado por 10 unidades, las cuales se encuentran agrupadas en tres secciones denominadas trimestres. Cada una de las unidades a su vez se encuentra dividida en secuencias (Tabla 4). Cada unidad inicia con una página en la que se ubica un cuadro denominado Mis aprendizajes, el cual bosqueja los aprendizajes esperados.

Tabla 4. Estructura del libro RV-SM

Trimestre 1	Unidad 1	Secuencia 1. Multiplicación y división de números con signo Secuencia 2. Expresiones algebraicas equivalentes
	Unidad 2	Secuencia 3. Cálculo de áreas circulares por aproximaciones Secuencia 4. Triángulos posibles e imposibles
	Unidad 3	Secuencia 5. Proporcionalidad Secuencia 6. Gráficas de variación lineal y sus propiedades
Trimestre 2	Unidad 4	Secuencia 7. Proporcionalidad inversa Secuencia 8. Variación lineal
	Unidad 5	Secuencia 9. Sucesiones aritméticas Secuencia 10. Fórmula para el área del círculo
	Unidad 6	Secuencia 11. Espacio muestral y probabilidad teórica Secuencia 12. Ecuaciones lineales
	Unidad 7	Secuencia 13. Gráficas de línea Secuencia 14. Sistemas de dos ecuaciones lineales
Trimestre 3	Unidad 8	Secuencia 15. Áreas de figuras compuestas Secuencia 16. Volúmenes de prismas rectos
	Unidad 9	Secuencia 17. Representación gráfica de sistemas de ecuaciones Secuencia 18. Regla de la suma de probabilidades
	Unidad 10	Secuencia 19. Volumen y capacidad Secuencia 20. Notación científica

3.4.2. Espacios recreativos

Este libro está integrado por 39 secuencias didácticas (Tabla 5) que se dividen en varias sesiones de dos páginas para facilitar el trabajo en el aula. Estas secciones se agrupan en tres secciones denominadas trimestres. Cada trimestre inicia con una breve introducción a los contenidos que se trabajarán y una explicación de cómo se relacionan con los conocimientos que se adquirieron en grados o trimestres anteriores. En la cuarta página del libro del estudiante se indican cuáles son los objetivos esperados de cada uno de los trimestres. Además se mencionan aspectos relativos al modelo académico, entre ellos que este modelo propone tres componentes, y que la asignatura de matemáticas se ubica en el componente de *Formación Académica*. Además, existen los componentes denominados *Desarrollo Personal y Social* y *Autonomía Curricular*. El autor indica que el libro está estructurado en diferentes secciones que son: (a) tabla de contenidos, (b) ¿Cómo aprendemos?, (c) convivencia escolar, (d) leemos juntos, y (e) secuencias didácticas. En esta misma línea de ideas, cada secuencia didáctica consta de tres momentos, que son: (1) ¿Qué sabemos?, (2) ¿Qué estamos aprendiendo?, y (3) ¿Qué aprendimos? Además, en cada secuencia didáctica se encuentran los apartados denominados: (a) aprendo mejor, (b) cómo vamos, (c) otras fuentes y (d) glosario. Por lo consiguiente, los estudiantes cuentan con un LibroWeb, donde además de la información que aparece en el libro impreso, se puede acceder a recursos digitales y ejercicios adicionales en formato de archivo pdf.

Tabla 5. Estructura del libro EC-SAN

Trimestre 1	Secuencia 1. Multiplicación con números fracciones y números decimales Secuencia 2. Factores que divide Secuencia 3. Multiplicación y división Secuencia 4. Multiplicación de números enteros Secuencia 5. División de números enteros Secuencia 6. Multiplicación y división con números positivos y negativos Secuencia 7. Proporcionalidad directa e inversa Secuencia 8. Significado de reparto proporcional Secuencia 9. Diagonales Secuencia 10. Suma de los ángulos interiores Secuencia 11. Ángulo central y ángulo interior Secuencia 12. Recolecta, registra y construye tablas de frecuencia Secuencia 13. Construcción de polígonos de frecuencia
Trimestre 2	Secuencia 14. Raíz cuadrada Secuencia 15. Casos particulares a^n , 1^n , 0^n

	Secuencia 16. Productos de potencias Secuencia 17. Cociente de potencias de la misma base Secuencia 18. Construcción del significado de potencia negativa Secuencia 19. Expresiones algebraicas: cálculo del perímetro Secuencia 20. Cálculo de áreas de figuras geométricas Secuencia 21. Construcción de polígonos regulares Secuencia 22. Figuras que cubren el plano (propiedades de polígonos) Secuencia 23. Área de polígonos Secuencia 24. Área del círculo Secuencia 25. Nociones de dispersión Secuencia 26. ¿Para qué sirve la desviación media?
Trimestre 3	Secuencia 27. Sistema de dos ecuaciones lineales Secuencia 28. Construcción del concepto de igualdad Secuencia 29. Método de sustitución y de suma y resta Secuencia 30. Sistemas de ecuaciones de 2x2 Secuencia 31. Variación inversa Secuencia 32. Expresión algebraica de proporcionalidad inversa Secuencia 33. Expresiones a partir de sucesiones Secuencia 34. Múltiplos y submúltiplos Secuencia 35. Yarda, pie y pulgada Secuencia 36. Sistema Inglés versus Sistema Internacional de Unidades Secuencia 37. Volumen de prismas rectos Secuencia 38. Desarrollo de planos Secuencia 39. Probabilidad teórica de un evento

3.5. Procesamiento y análisis de la información

Siguiendo las recomendaciones de artículos enfocados en el análisis de libros de texto (Li, 2000; Thompson et al., 2012), se decidió analizar las tareas, ya que estas determinan las oportunidades de aprendizaje que se ofrecen a los estudiantes (Otten et al., 2014). Dicho análisis se constituye en una herramienta para determinar el efecto potencial de las tareas en el logro de los estudiantes (Li, 2000). Por una tarea se entiende un ítem numerado en el cual se espera que el estudiante tome un papel activo respondiendo preguntas, resolviendo un problema o completando una actividad (Otten et al., 2014).

Es importante definir la unidad de análisis de tal forma que esa misma unidad pueda aplicarse en el análisis de series de textos que tengan diferente estructura. Esto permitirá la comparación entre los resultados de diferentes estudios que utilicen la misma aproximación analítico/metodológica. En este trabajo se utilizó a la tarea como una de las unidades de análisis; entendiendo por tarea cualquier ejercicio, problema, actividad o partes de las anteriores que tienen marcadores separados en el libro de texto (Stylianides, 2009). Por ejemplo, un ejercicio con incisos a-d, se contabilizó como cuatro tareas (Otten et al., 2014).

El análisis involucró, en primer lugar, la identificación de los problemas o ejercicios en los que estuviera presente, explícita o implícitamente, el concepto de función lineal, específicamente se consideraron los siguientes subtemas: (a) proporcionalidad directa, (b) graficación y variación lineal y (c) variación lineal. Estos problemas y ejercicios fueron segmentados en tareas, tomando en cuenta que algunos de ellos están conformados por más de un inciso. Así que, cada inciso se contabilizó como una tarea. Las tareas se concentraron en un archivo de excel para facilitar su conteo. El texto de esta columna de excel corresponde al *contenido manifiesto* asociado con las tareas.

La segunda fase del análisis consistió en la escritura de un párrafo de texto, desde una perspectiva matemática (Stylianides y Stylianides, 2010), en otra columna de la tabla de excel para cada una de las tareas. La finalidad de la escritura de dicho texto fue promover la reflexión sobre los siguientes aspectos de las tareas: oportunidades de aprendizaje, el contexto, el lenguaje utilizado en el enunciado, así como sobre la precisión y pertinencia de la terminología matemática utilizada. Este proceso de reflexión le permitió familiarizarse con las características de las tareas y conectar a tales tareas con sus conocimientos previos. En este texto se marcaron con color rojo los procesos cognitivos principales y los procesos cognitivos subordinados (Figura 1). El texto de esta columna de excel corresponde al *contenido subyacente* asociado con las tareas. En esta fase se inicia el proceso de asignación o construcción de significados para las tareas en términos de los procesos cognitivos asociados.

Posteriormente, algunas tareas fueron revisadas y corregidas por uno de los directores de tesis. También, a partir de los comentarios y observaciones realizadas en el seminario semanal, en el que la autora y otros estudiantes presentaron los avances parciales de sus trabajos de tesis, se llevó a cabo otra fase de revisión y corrección. Con lo anterior se buscó promover la *fiabilidad* del proceso de codificación (ver sección 3.6).

En la tercera fase del análisis, se revisó que los procesos cognitivos identificados correspondiesen con las definiciones de procesos cognitivos especificadas en la sección 2.4.1., y se llevaron a cabo las correcciones y modificaciones pertinentes; promoviendo, de

esta manera, la *validez* de los resultados (ver Sección 3.6). Esta es una fase de refinamiento y precisión de los significados asociados con las tareas en términos de procesos cognitivos.

	A	B	C
1	Tareas-LIBRO SM	OBSERVACIONES	Análisis de las tareas
	<p>Elige las respuestas correctas.</p> <p>Si un helado de una bola cuesta \$20.00 y el de dos bolas cuesta \$40.00. ¿cuánto cuesta un helado con tres bolas?</p> <p>a) \$40.00 b) \$70.00 c) \$50.00 d) \$60.00</p>	<p>Establecer relación el hald y el costo del mismo. Observar el incremento tanto de la cantidad de helado como del costo No tiene una buena redacción. Se sugiere que podría decir "Por cada" Tiene una formulación confusa En la vida real entre más grande el producto en algunas ocasiones hacen descuentos. Si el estudiante pusiera en juego sus conocimientos de la vida real le darían por incorrecto la solución del problema.</p>	<p>La redacción del enunciado es imprecisa y puede conducir a interpretaciones erróneas, ya que se da por supuesto que se sobreentiende la existencia de una relación de proporcionalidad directa en el problema, ya que sin este supuesto no es posible saber cuánto cuesta el helado de tres bolas, ya que en la vida real, generalmente se ofrecen descuentos en los productos más grandes, respecto a los más pequeños, por lo que sin el supuesto de la relación de proporcionalidad, la respuesta del problema está indeterminada. Una redacción en la que no hay lugar a las imprecisiones anteriores podría ser: El costo de un helado depende de la cantidad de bolas que tiene. Si cada bola de helado cuesta \$20, cual es el precio de un helado con tres bolas. Con esta nueva redacción, el estudiante solo tiene que recordar cuál es el resultado de multiplicar 20(3), o recordar el algoritmo para multiplicar e implementarlo.</p>
2	<p>Elige la fracción y el número decimal que son equivalentes.</p> <p><input type="checkbox"/> $\frac{13}{100}$ <input type="checkbox"/> 0.135 <input type="checkbox"/> 0.013 <input type="checkbox"/> $\frac{27}{200}$</p>	<p>Recordar qué es (equivalencia) Recordar qué es una fracción. Recordar como se hace la transformación de fracción a decimal y de decimal a fracción.</p>	<p>Este no es un problema de proporcionalidad. Habría que preguntarse por qué los autores lo colocaron en la sección de proporcionalidad Para abordar el problema el estudiante debe recordar cómo convertir una fracción en su equivalente decimal. En un sitio de internet se indica que "para convertir una fracción a su equivalencia decimal, solo es necesario dividir el numerador entre el denominador". Entonces el estudiante debe recordar el algoritmo de la división e implementarlo a una o a las dos fracciones que se indican en las opciones.</p>
3	<p>De los siguientes números dos de ellos son múltiplos, determina cuáles son.</p> <p>a) 190 b) 8545 c) 51 d) 969</p>	<p>Recordar el concepto de "múltiplos" Recordar como saber si un número es múltiplo de otro Es aplicable el concepto de divisores Múltiplos de quien. El enunciado no es claro Podría sugerir hacer parejas o combinaciones</p>	<p>El enunciado del problema es impreciso, por lo que se puede interpretar de diversas maneras. Una de las maneras de interpretar la indicación es: se pide identificar aquellos dos números de la lista que son múltiplos de un cierto número que no se menciona en el enunciado. En este caso, la respuesta podría ser 190 y 8545, ya que ambos números son múltiplos de 5. Para obtener la respuesta anterior se recordó el criterio de divisibilidad por 5 y se verificó que los dos números anteriores lo satisfacen (un número entero es múltiplo de 5 si y solo si termina en cero o cinco). De forma análoga se pudo haber recordado el criterio de divisibilidad por 3 y se verificó que lo satisfacen los números 51 y 969. Otra posibilidad de interpretación es: se pide identificar aquellos números de la lista son múltiplos entre sí. Entonces, se puede proceder a realizar divisiones de manera sistemática. Es decir, identificar el número más pequeño de la lista y dividir a los demás entre este, hasta encontrar una división que sea exacta. Si ninguna división es exacta, se procede de forma análoga con el segundo número más pequeño de la lista y así sucesivamente. En este caso se recordó e implementó el algoritmo para dividir números enteros con residuo. En este caso la respuesta es 51 y 969. Detrás de la proporcionalidad se encuentra una relación multiplicativa entre cantidades, la cual es un tipo especial de relación lineal.</p>
4			

Figura 1. Proceso de análisis de tareas (contenido subyacente).

3.5.1. Herramientas de visualización

Para la realización de las siguientes fases del análisis se utilizaron dos herramientas que permiten representar gráficamente y visualizar la frecuencia de aparición de palabras en datos textuales. La primera herramienta es la nube de palabras y la segunda es una red dirigida formada por nodos y aristas. En esta fase del análisis se lleva a cabo un proceso de identificación de patrones de significado.

Una *nube de palabras* es una técnica gráfica que permite visualizar la frecuencia de aparición de una palabra en un texto. Las palabras de mayor tamaño son aquellas que tienen mayor cantidad de repeticiones. Las nubes de palabras se utilizan en la web como índices de contenido, ya que permiten visualizar cuáles son los temas mayormente tratados en un

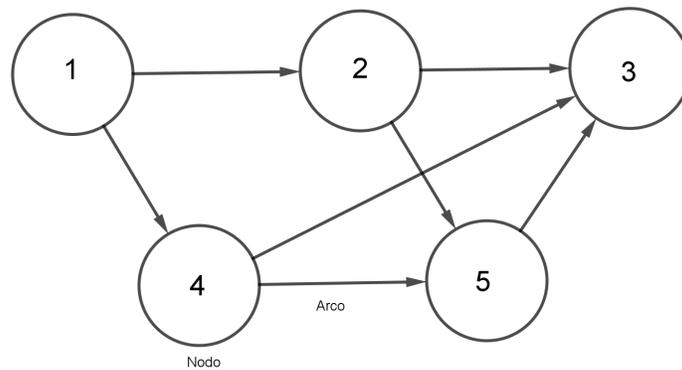


Figura 3. Representación gráfica de una red dirigida

3.6. Criterios de calidad

Los criterios de calidad en la investigación cualitativa son medios a través de los cuales se pretende evaluar la pertinencia y efectividad de los instrumentos de recolección de la información, así como del proceso de análisis y de obtención de las conclusiones. Entre estos criterios destacan los siguientes (Schreirer, 2012):

Fiabilidad (reliability). Se considera que un instrumento o procedimiento es fiable si conduce a datos que están libres de errores. Se puede verificar al verificar la consistencia de asignación de códigos llevada a cabo por dos o más personas; o la asignación de códigos llevada a cabo en diferentes puntos del tiempo. Cuando el material se clasifica con base en un marco de codificación se busca ir más allá de los entendimientos e interpretaciones individuales. De acuerdo con Franklin y Ballan (2000), la fiabilidad en investigación cualitativa es el grado en el cual los significados derivados por diferentes intérpretes son suficientemente congruentes.

Validez (validity). Un instrumento o procedimiento se considera válido en la medida en que, de hecho, captura lo que se propone capturar. Un marco de codificación puede considerarse válido en la medida en que sus categorías representen adecuadamente los conceptos de la pregunta de investigación. La validez también se nombra como credibilidad, y consiste en proporcionar evidencia que fundamenten de forma plausible y creíble las afirmaciones que se realizan (Franklin y Ballan, 2000).

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

4.1. Introducción

En este capítulo se presentan los resultados del análisis. En primer lugar, se analizaron las tareas de cada texto y, posteriormente, se realizó un análisis comparativo. Al inicio de cada sección se presentan datos generales del texto, como cantidad y tipo de problemas relacionados con el tema de funciones lineales, y posteriormente se exponen los resultados referentes al tipo de procesos mentales identificados tanto en las tareas como en el contenido narrativo de las lecciones.

4.2. Revuela. Secundaria. Matemáticas 2

En cada una de las secuencias (tema) de este libro (una secuencia es un tema) se tienen cuatro QR. Los QR se dividen de la siguiente manera: el primer QR corresponde a una actividad previa al iniciar la secuencia, los siguientes dos QR corresponden a actividades relacionadas con la secuencia y funcionan como un *extra* y el último QR corresponde a una actividad de autoevaluación en donde engloba todo lo que se vio a lo largo de esa secuencia. El libro incluye en algunas secuencias una tarea de *reforzamiento* del tema que se aborda en la secuencia. Este tipo de secuencias también se tomó en consideración para el análisis.

4.2.1. Segmentación de la información

Después de identificar los problemas y ejercicios en este libro de texto, y de llevar a cabo el proceso de segmentación, se contabilizó un total de 148 tareas distribuidas de la siguiente manera: 40 tareas de proporcionalidad directa, 40 tareas de graficación y 68 tareas de variación lineal. Después de analizar cada tarea de forma individual se identificaron los procesos cognitivos involucrados en la realización de estas. Las columnas de texto derivadas de este proceso de análisis dan cuenta del contenido subyacente presente en las tareas (Figura 6). De igual manera se incluyó la nube de palabras que corresponde al contenido explícito del libro de texto. Esta nube incluye los enunciados de todos los problemas, tal como aparecen en el libro de texto (Figura 4). Posteriormente, se identificó el proceso cognitivo principal, de acuerdo con la taxonomía de Anderson et al. (2001) y se colocó en otra columna de la tabla de Excel. Con el total de estos verbos se construyó una

nube de palabras para identificar los procesos cognitivos más comunes en las tareas que aparecen en este libro de texto (Figura 5). Las nubes de palabras se elaboraron con el software R.



Figura 4. Contenido explícito en las tareas.



Figura 6. Contenido subyacente en las tareas.



Figura 5. Procesos cognitivos principales.

En una de las reuniones semanales del equipo de investigación, un participante indicó que no entendía el significado del proceso cognitivo *implementar* y, por tal razón, se decidió buscar otra forma gráfica de representar la información que fuese más clara. Así, se optó por representar no solo el proceso cognitivo de mayor nivel, sino todos los procesos cognitivos involucrados en cada tarea, así como las relaciones entre ellos, mediante una *red* dirigida (Flores, 1999; Taha, 2012) integrada por nodos, aristas y un flujo en las aristas. En este caso, las aristas representan una relación, en la dirección marcada por la flecha, entre procesos cognitivos (Figura 7). El número o flujo indicado en cada una de las aristas indica la frecuencia con la que apareció dicha relación en los datos analizados.

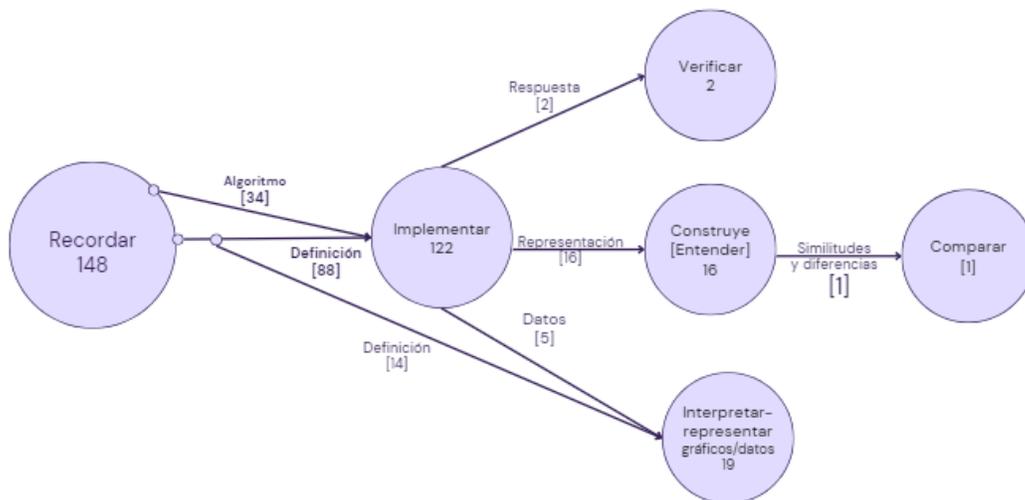


Figura 7. Red dirigida de procesos cognitivos.

A continuación, se muestran ejemplos de los diferentes tipos de tareas identificados durante la realización del análisis. Entre paréntesis se indica el total de tareas que se clasificaron en cada una de las diferentes categorías.

Aquellas que involucran el proceso cognitivo de *recordar* (12). Una de estas tareas involucra que el estudiante recuerde información sobre proporcionalidad directa y, con base en esta información seleccione una de las opciones. A continuación se muestra la información sobre la idea de proporcionalidad que se presenta en el libro de texto, con la finalidad de justificar el por qué se colocó a esta tarea en la categoría correspondiente.

1. Para que podamos decir que hay una relación directa entre dos cantidades de números, es necesario que el factor de proporción sea...
 - a. entero
 - b. constante
 - c. decreciente
 - d. mayor que 2 (Martínez, 2022, p. 70)

Aquellas tareas que involucran el proceso cognitivo *recordar* un algoritmo y luego *implementar* tal algoritmo (34). Una de estas tareas se muestra en la figura 8. Se muestra la información sobre la idea de proporcionalidad y en este caso, el alumno debe recordar el algoritmo de la regla de tres, e implementarlo para responder cuántos huevos se necesita para elaborar cada pastel.

1. Amelia utiliza 12 huevos para hacer tres pasteles iguales. Completen la tabla, considerando que los tres pasteles se hacen siguiendo la misma receta.
 - a) ¿Cuántos huevos necesita para cada pastel?

Pasteles	3	5	8
Huevos	12	20	32

Figura 8. Tarea que involucra recordar un algoritmo e implementarlo

Tareas que involucran el proceso cognitivo de *recordar* una definición y posteriormente *implementar* esa definición fueron 88. Una de estas tareas se muestra en la figura 9. Para

abordar el problema, el estudiante debe recordarla definición de proporcionalidad directa, de esta manera podrá elegir la respuesta correcta que le solicita el libro de texto.

- Elige las respuestas correctas.

Una receta para elaborar rompopo indica que dos de sus principales ingredientes deben estar siempre en proporción directa. ¿Qué sucede con el número de huevos si el número de tazas de leche aumenta al doble?

Número de huevos	4.5	7.5	9
Tazas de leche	9	15	18

Aumenta al triple.
 Se mantiene constante.
 Aumenta al doble.
 Disminuye a la mitad.

Figura 9. Tarea que involucra recordar una definición e implementarla

El total de tareas que involucran *recordar* una definición e *interpretar* ciertos datos o representaciones fueron 19. Una de estas tareas se muestra en la figura 10. En esta tarea, el estudiante debe recordar dichas definiciones para que de esta manera pueda interpretar que la información que le presenta la tabla tiene relación, y así pueda elegir la respuesta correcta que le solicita el libro de texto.

1. Elige la respuesta correcta.
 - i) De acuerdo con la tabla, ¿cuál es la expresión algebraica que corresponde a la relación de proporcionalidad directa dada?

x	y
2	8.2
4	16.4
6	24.6

$y = 4.1x$
 $y = \frac{1}{2}x$
 $y = \frac{2}{4}x$
 $y = 8.2x$

Figura 10. Tarea que involucra recordar una definición e implementar los datos que le presentan.

Tareas que involucran *recordar* una definición y luego *implementar* algún procedimiento y finalmente *verificar* el resultado, fueron solamente dos. En una de estas tareas se muestra información sobre la idea de criterios de divisibilidad o múltiplos en este caso, el alumno debe recordar dichas definiciones, además de implementar cualquier procedimiento, podrá verificar si lo que obtuvo corresponde con las opciones que le presentan.

1. De los siguientes números dos de ellos son múltiplos, determina cuáles son.
 - a) 190
 - b) 8545
 - c) 51
 - d) 969 (Martínez, 2022, p. 10)

La cantidad de tareas que involucran *recordar* un algoritmo o definición, con base en eso *implementar* algún procedimiento y finalmente construir una *representación* fue 16. Se dice que los estudiantes entienden algo, cuando son capaces de construir significado a partir de comunicaciones orales, escritas y gráficas. Una de estas tareas se muestra a continuación y está asociada con el tema de proporcionalidad directa, representación algebraica y factor de proporcionalidad. El estudiante debe recordar dichas definiciones, además de implementar algún procedimiento, como la regla de tres, que le permita responder e interpretar la información que se solicita en el enunciado de la tarea.

1. La tablas corresponden a relaciones de proporcionalidad directa

Kilogramos de naranjas (x)	2	5.7	9	7	10
Costo en pesos (y)	30.00	85.50	135.00	105.00	150.00
Metros cuadrados de tejido (x)	7	13	300	240	22
Horas de trabajo (y)	22.75	42.25	975	780	71.5
Cantidad de días (x)	1	1.5	3	3.5	4
Cantidad de horas (y)	24	36	72	84	96

Escriban la representación algebraica de la forma $y = mx$ de cada una de las tres relaciones
 ¿Cuál es el valor del factor de proporcionalidad de cada relación?
 Interpreten el significado de cada factor de proporcionalidad (Martínez, 2022, p. 65)

Solo hubo una tarea que involucra *recordar* un algoritmo o definición, con base en eso *implementar* algún procedimiento, construir una *representación* y *comparar* lo que se

obtuvo. La tarea involucra representar ciertos datos, de esta manera, el alumno puede realizar una comparación entre las dos representaciones construidas, así como le solicita el libro de texto.

- Utilicen los datos de la tabla y el plano cartesiano para dibujar los puntos que muestran, de forma aproximada, la evolución del salario promedio de los hombres en México.



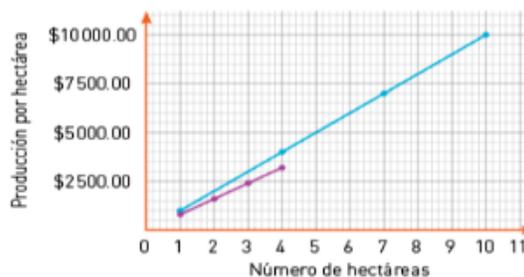
Tracen, en su cuaderno, una gráfica con las dos relaciones de la evolución del salario promedio de las mujeres y de los hombres en México.

Analicen qué similitudes y diferencias notan entre las dos líneas que trazaron. (Martínez, 2022, p. 71)

Tareas que involucran *recordar* un algoritmo o definición, con base en eso *implementar* algún procedimiento y finalmente *representar* o *interpretar* ciertos datos (16). Una de estas tareas se muestra a continuación información sobre variación lineal y representaciones gráficas, posteriormente el alumno tendrá que interpretar los datos que se le presentan.

- Gráfica los datos de ambas tablas en el plano cartesiano.

Tabla 1 Grandes explotaciones agrícolas		Tabla 2 Pequeñas explotaciones agrícolas	
Número de hectáreas	Valor de la producción total	Número de hectáreas	Valor de la producción total
1	\$1 000.00	1	\$800.00
4	\$4 000.00	2	\$1 600.00
7			\$2 400.00
10			\$3 200.00



Une los puntos que corresponden a la tabla 1 y argumenta si se trata de una relación de variación lineal. (Martínez, 2022, p. 97)

4.3. Matemáticas 2: Espacios recreativos

Este libro está dividido en secuencias (cada secuencia es un tema), divididas a su vez en sesiones (de dos páginas). Al inicio de cada secuencia aparece un apartado denominado *leemos juntos*, que es una breve introducción a la secuencia. Sin embargo, este apartado no siempre tiene relación con los temas de la secuencia. También hay un apartado sobre *uso de la tecnología*, cuyo objetivo es practicar contenidos de la secuencia. Para concluir la secuencia se encuentra la sección *¿Qué hemos aprendido?*, el cual consiste en una autoevaluación. Las tareas de estas dos últimas secciones se tomaron en consideración para el análisis.

4.3.1. Segmentación de la información

Después de identificar los problemas y ejercicios relacionados con el concepto de función lineal, y de realizar la segmentación, se contabilizaron un total 251 tareas: 17 tareas sobre proporcionalidad directa, 27 de reparto proporcional, 43 de sistemas de dos ecuaciones lineales, 35 acerca de construcción del concepto de igualdad, 49 tareas de método de sustitución de suma y resta, 34 de sistema de ecuaciones 2x2 y 46 de expresiones a partir de sucesiones.

Una vez registradas las tareas en un archivo de excel, se llevó a cabo la redacción de un párrafo mediante el cual se buscó determinar el contenido subyacente (Figura 11); así como los procesos cognitivos involucrados al abordarlas, de acuerdo con la taxonomía de Anderson et al. (2001), el cual se colocó en otra columna de la tabla de Excel. Con el total de estos verbos se construyó una nube de palabras para identificar los procesos cognitivos más comunes en las tareas (ver Figura 12). De igual manera, se incluyó la nube de palabras correspondiente al contenido explícito del libro de texto. Esta nube se construyó con base en los enunciados de los problemas tal como aparecen en el libro (Figura 13).



Figura 13. Contenido explícito en las tareas.



Figura 11. Contenido subyacente en las tareas.



Figura 12. Procesos cognitivos principales.

Como se mencionó anteriormente, se decidió buscar otra forma de representar gráficamente la información sobre los procesos cognitivos para determinar con mayor precisión las características de las tareas en cada uno de los textos. A continuación se muestran dos diagramas análogos a redes dirigidas (Flores, 1999; Taha, 2012) integradas por nodos, aristas y un flujo en las aristas. En la primera red (Figura 14) se pueden observar de un solo vistazo los procesos cognitivos involucrados en el conjunto de las tareas asociadas con el tema de funciones lineales. En este diagrama, los nodos representan el proceso cognitivo principal, los números sobre las aristas indican la cantidad de tareas que promueven dicho proceso cognitivo, el flujo va hacia la derecha, en donde los procesos cognitivos involucrados inician desde el más sencillo que corresponde al nivel 1, en este caso es *recordar*, hasta el más avanzado que refiere al nivel 6 (*crear*). Cabe resaltar que en esta primera red se encuentran separados los procesos cognitivos que corresponden a la categoría de *entender*. En la segunda nube de palabras que se muestra (Figura 15) se presenta una segunda versión de la red, ya que en esta segunda se muestran los procesos cognitivos que corresponden al proceso cognitivo principal *entender* compactados en un solo nodo.

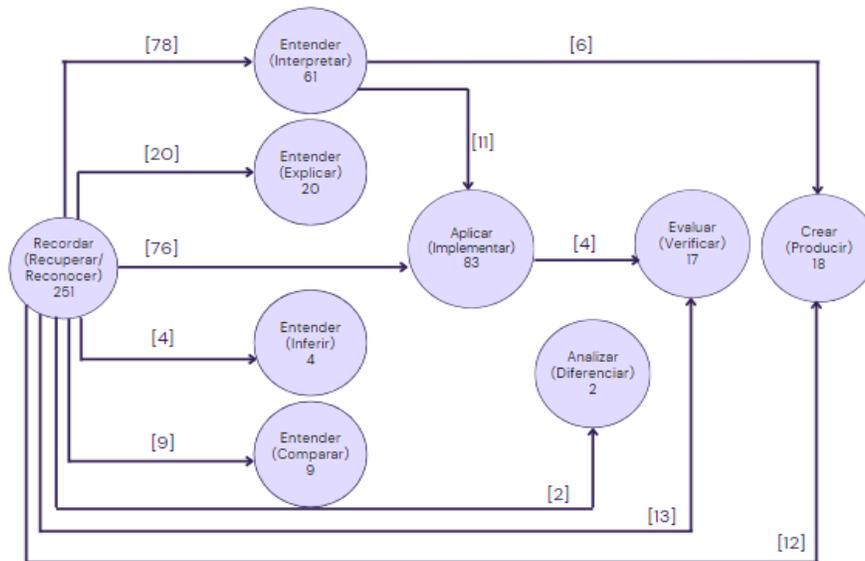


Figura 14. Red dirigida de los procesos cognitivos con procesos desagregados.

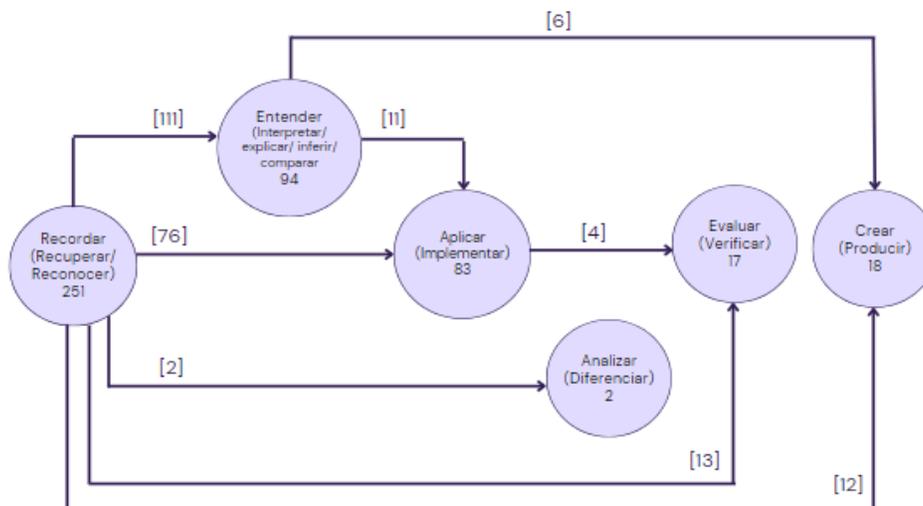


Figura 15. Segunda versión de la red dirigida de procesos cognitivos

A continuación se muestran ejemplos de los diferentes tipos de tareas identificadas durante la realización del análisis. Entre paréntesis se indica el total de tareas que se clasificaron en cada una de las diferentes categorías. Tareas que solo involucran el proceso cognitivo de *recordar* (37). Una de estas involucra que el estudiante recuerde información sobre proporcionalidad directa y, con base en esta información pueda responder lo que se le plantea (Figura 16). A continuación se muestra la información sobre la idea de

proporcionalidad que se presenta en el libro de texto, esto con la finalidad de justificar el por qué se colocó a esta tarea en la categoría correspondiente.

En equipos, hagan lo que pide.

1. Analicen las situaciones y determinen si las variaciones son de proporcionalidad directa o inversa. Argumenten su elección. Escriban un problema que represente a cada una.

Situación 1

A	1	2	3	4	5	6	7	8
B	25	50	75	100	125	150	175	200

Es una situación de: _____ ¿Por qué? _____

Figura 16. Tarea que involucra recordar información.

Aquellas que involucran el proceso cognitivo *recordar* información relevante, para poder *entender* y en este caso *interpretar* (61), lo que involucra establecer conexiones entre formas de representación. En una de estas tareas el estudiante debe recordar información sobre lo qué es una incógnita y posteriormente conectar esta información, al expresar en lenguaje algebraico el enunciado correspondiente, el cual se muestra a continuación. En seguida se muestra la información sobre la idea de incógnita y representación algebraica que se presenta en el libro de texto, esto con la finalidad de justificar el por qué se colocó a esta tarea en la categoría correspondiente.

En parejas, lean la situación y hagan lo que se pide.

1. Teresa y su prima Gabi planean salir de vacaciones a la playa, por lo que fueron a comprar lentes de sol y sandalias. Por los lentes de sol y un par de sandalias, Teresa pagó \$164. Gabi compró 2 lentes de sol y un par de sandalias y pagó \$249.

a) Expresen algebraicamente la compra de Tere (Riva, 2020, p. 232)

Total de tareas que involucran el proceso cognitivo *recordar* información relevante, para poder *entender* y en este caso *explicar* (20), lo que involucra construir un modelo para determinar por qué las cosas funcionan como lo hacen. El enunciado es el siguiente:

1. Tú y 6 de tus amigos van a un restaurante donde pueden comer todo lo que quieran por el mismo precio. En ese lugar, los menores de 10 años pagan \$45 y los demás, \$90.

Una señora conocida llega con sus 3 hijos menores de 10 años y se sienta en la misma mesa que tus amigos y tú para que coman todos juntos. Al final, les propone que repartan equitativamente la cuenta entre tú, tus 6 amigos y ella.

e) ¿Es justa tu sugerencia? (Riva, 2020, p. 76)

En la tarea anterior el estudiante debe recordar información sobre lo qué es el reparto proporcional y, posteriormente, explicar por qué el reparto que sugiere la tarea es justo o no. Enseguida se muestra la información sobre la idea de reparto proporcional y por qué el alumno debe explicar lo que se le solicita, lo cual se presenta en el libro de texto, esto con la finalidad de justificar el por qué se colocó a esta tarea en la categoría correspondiente.

Tareas que involucran el proceso cognitivo *recordar* información relevante, para poder *entender* y en este caso *inferir* (4), lo que involucra obtener un patrón subyacente en una serie de ejemplos o casos. En este caso, el enunciado de la tarea es el siguiente: “Analiza la sucesión 8, 14, 20, 26, 32... a) ¿Cuál es el patrón de la sucesión?” (Riva, 2020, p. 274). Para abordar esta tarea, el estudiante debe recordar información sobre progresión aritmética o serie de números, posteriormente podrá identificar cómo se obtiene cada número en la secuencia y, al realizar lo anterior, el alumno está infiriendo una característica de tales números. De esta manera se muestra la información sobre la idea de progresión aritmética o serie de números, donde el alumno debe encontrar el patrón de la serie que se le presenta en el libro de texto.

Aquellas que involucran el proceso cognitivo *recordar* información relevante, para poder *entender* y en este caso *comparar* (9), lo que involucra detectar semejanzas y diferencias entre dos o más objetos, eventos, ideas, problemas o situaciones. En una de estas tareas el estudiante debe recordar información sobre progresión aritmética o serie de números, que se le presentaron, deberá identificar semejanzas y diferencias de tales números. Enseguida, el alumno debe hacer una comparación entre dos series de números que se le presentan en el libro de texto. El enunciado de la tarea es:

1. Analiza la sucesión 8, 14, 20, 26, 32 ...
2. Analiza la siguiente sucesión y responde - 8, - 14, - 20, - 26, - 32 ..
 - a) ¿Qué diferencias hay entre esta sucesión (2) y la de la actividad inicial (1)? (Riva, 2020, p. 274)

Total de tareas que involucran el proceso cognitivo *recordar* información relevante, para poder *aplicar*, es decir *implementar* un algoritmo (83), lo que involucra uso de procedimientos para resolver problemas o ejercicios. En una de ellas el estudiante debe recordar información sobre el uso de la regla de tres y en qué situaciones la puede aplicar.

En seguida se muestra la información sobre proporcionalidad y el uso de una regla de tres, donde el alumno debe determinar si puede o no aplicar una regla de tres para completar lo que el libro de texto le presenta. A continuación se muestra el enunciado de la tarea:

1. En el mercado, una persona calcula cuántos kilogramos de fruta puede comprar de acuerdo con la cantidad de dinero que lleva.

Dinero	Fruta (kg)
\$15	$1\frac{1}{2}$
\$20	
\$35	
\$40	
\$50	

- a) ¿Qué estrategia empleaste para completar la tabla? (Riva, 2020, p. 70)

Aquellas tareas que involucran el proceso cognitivo *recordar* información relevante, para poder *analizar* y en este caso *diferenciar* (2), para poder llevar a cabo este proceso, el alumno debe ser capaz de decidir qué información es importante y cuál no lo es. En una de ellas el estudiante debe recordar los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones. En seguida se muestra información sobre sistemas de ecuaciones y métodos para su resolución, el alumno debe determinar qué método es más eficiente utilizar para resolver lo que se le plantea, para esto él ya conoce diversos métodos que puede usar para abordar lo que el libro de texto le presenta. A continuación se encuentra el enunciado:

1. Trabajen en parejas y contesten .
 - a. ¿Qué características tiene el sistema de ecuaciones que escribieron? Sin resolverlo, ¿Qué método les parece más eficiente usar? ¿Por qué? (Riva, 2020, p. 252)

Tareas que involucran el proceso cognitivo *recordar* información relevante, para poder *evaluar* y en este caso *verificar* (17), lo que involucra determinar si un proceso o producto tiene consistencia interna, así como detectar la efectividad de un procedimiento a medida que se implementa. En una de estas tareas el estudiante debe recordar información sobre los sistemas de ecuaciones y cómo resolverlos. Después, se muestra la información sobre

sistemas de ecuaciones y métodos de resolución, el alumno debe utilizar otro método de solución para resolver el sistema de ecuaciones que debe plantear. A continuación se presentan:

1. Resuelvan utilizando el método más pertinente.
Encuentren dos números tales que su suma sea igual a 4 y que el triple del primero más el triple del segundo sea igual a 12.
 - a) En su cuaderno, usen otro método para resolver el sistema.
 - b) ¿Obtuvieron una respuesta diferente? Argumente su respuesta. (Riva, 2020, p. 255)

Aquellas que involucran el proceso cognitivo *recordar* información relevante, para poder *crear* y en este caso *producir* (18), lo que involucra determinar si un proceso o producto tiene consistencia interna, así como detectar la efectividad de un procedimiento a medida que se implementa. En una de estas tareas el estudiante debe recordar información sobre progresión aritmética o secuencia de números. En seguida se muestra la información sobre progresión aritmética o secuencia de número, identificación del patrón de la sucesión, además que con el uso de esa información el alumno puede producir la regla general que se le solicita. A continuación se presenta:

- Responde
 1. Analiza la sucesión 8, 14, 20, 26, 32
 - a) ¿Cuál es el patrón de la sucesión?
 - b) ¿Cuál es la regla de la sucesión? (Riva, 2020, p. 274)

4.4. Análisis comparativo

En esta sección se presenta una tabla (Tabla 6), mediante la cual se comparan las características globales de las tareas que aparecen en cada uno de los libros de texto, con la finalidad de resaltar las semejanzas y diferencias entre los materiales didácticos analizados. Esta información puede ser de utilidad, particularmente en lo que concierne al aspectos metodológico, para directores escolares y tomadores de decisiones al momento de seleccionar los materiales educativos que mejor se adapten a los objetivos e intereses de cada centro escolar.

Tabla 6. Características de las tareas en los libros de texto.

<i>Revuela , RV-SM (Martinez,2022)</i>	<i>Espacios Recreativos, EC-SAN (Riva,2020)</i>
En el contenido explícito se puede observar que se implementan escasos tipos de representación, la representación tabular, la representación gráfica, sistema coordinado son de los más utilizados.	Las representaciones indicadas en los enunciados de los problemas son diversas, destacando la representación algebraica, sistemas de ecuaciones, representación tabular y representación gráfica. Además, aparecen procesos cognitivos relevantes como comprobar, comparar, analizar, entre otros.
Se puede observar en el contenido explícito, énfasis en tareas que abordan la pendiente de una recta	No se incluyeron tareas en las que se aborde el concepto de la pendiente de una recta.
Dentro del contenido subyacente se observa que se le da más énfasis a las representaciones tabulares	En el contenido subyacente se observa que las representaciones algebraicas tienen mayor énfasis.
Los tipos de representaciones que se pueden observar en el contenido subyacente, no existe gran diversidad de tipos de representaciones.	Existe diversidad de representaciones en el contenido subyacente, entre las que se encuentran: gráficas, tablas, expresiones algebraicas.
Con apoyo de la nube de palabras de los procesos cognitivos, se puede observar que el proceso cognitivo que más se promueve es aplicar y en segundo lugar recordar.	El proceso cognitivo que más se promueve es implementar, el cual entra en la categoría de aplicar. En segundo lugar, aparece el proceso cognitivo de interpretar, que entra en la categoría de entender.
De los procesos cognitivos identificados pocos de ellos permiten al estudiante comunicar sus resultados o comparar los mismos con sus compañeros, por lo que se puede pensar que solo se enfoca en los resultados	En los procesos cognitivos identificados permiten que los alumnos expresen sus resultados, además poder comparar y verificar los mismos. Esto permite darle relevancia al trabajo detrás del resultado de una tarea.
Los procesos cognitivos promovidos son sumamente escasos, es decir de los seis niveles de acuerdo con la taxonomía de Anderson et al. (2001), llegan a promoverse a lo más tres.	Los procesos cognitivos que se promueven, abarcan los seis niveles de la taxonomía de Anderson et al. (2001), es decir hay tareas que promueven procesos de cada nivel.
El contenido explícito difiere en gran parte del contenido subyacente, existen tipos de representaciones que se observan en el primer contenido que ya no aparecen o no son tan relevantes en el contenido explícito	El contenido explícito y subyacente conserva cierta armonía es decir en ambos contenidos se podían observar los sistemas de representación en mayor y menor medida, pero seguían presentes.
El proceso cognitivo de entender, estuvo presente sólo en las tareas en las que era necesario representar o interpretar datos.	De acuerdo con el diagrama, el proceso cognitivo de entender tuvo un énfasis bastante importante, aunque no fue el más promovido se pudo identificar en varias tareas.

La Tabla 7 tiene la finalidad de brindar una medida de los procesos cognitivos que se promueven en cada uno de los libros de texto. Con base en esa tabla es posible identificar cuáles procesos son más comunes. Se verifica que en el texto EC-SAN, existe una mayor

diversidad de procesos cognitivos, en relación con el texto RV-SM, en el cual no hay tareas sobre funciones lineales que promuevan los procesos cognitivos de las categorías *Analizar* y *Crear*. Esta comparación es fundamental para un docente, así como para directivos, quienes son los encargados de seleccionar los materiales educativos, incluyendo los libros de texto, que utilizarán los docentes de cada plantel o zona escolar.

Tabla 7. Porcentaje de tareas que promueven cada proceso cognitivo

Proceso cognitivo	Porcentaje de tareas RV-SM (Martinez,2022)	Porcentaje de tareas EC-SAN (Riva,2020)
1. Recordar	8.10%	14.74%
2. Entender	22.97%	37.45%
3. Aplicar	66.89%	33.06%
4. Analizar	0%	0.79%
5. Evaluar	1.35%	6.77%
6. Crear	0%	7.17%
Total	100%	100%

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

5.1. Introducción

En este capítulo se da respuesta a la pregunta de investigación, con base en la evidencia aportada por los datos empíricos descritos en el capítulo de resultados. Más adelante se discuten los resultados obtenidos, es decir, se retoman los resultados de los trabajos revisados en el primer capítulo y se contrastan con los resultados obtenidos en este trabajo de tesis. La discusión es importante porque en ella, el autor interpreta y valida sus resultados. La discusión no consiste en repetir los resultados y es importante iniciarla con un breve resumen de los hallazgos, para que el lector conozca y entienda de qué trata la investigación y, como ya se mencionó, comparar el trabajo propio con los resultados reportados por otros (Escamilla, 2018).

También se comentan los alcances y limitaciones del estudio, a partir de los cuales se realizan algunas propuestas para futuras investigaciones. La sección de alcances y limitaciones es importante porque permite que los trabajos de investigación estén bien enfocados y sus resultados sean mucho más analíticos y eficientes (Universidad Veracruzana, s.f.); sin embargo, en muchos trabajos se omite, porque se considera que enunciar las limitaciones puede restar valor a un trabajo. Cuando un autor menciona y reflexiona sobre las limitaciones de su estudio, se pone en evidencia su amplio conocimiento respecto de las características de una población de estudio, del fenómeno que se estudia, de la teoría o metodologías seleccionadas para orientar la investigación (Avello-Martínez et al., 2019).

Se concluye el capítulo con una sección de reflexiones, orientadas a proporcionar una perspectiva de los aprendizajes logrados por la autora a partir de la realización del trabajo de tesis. Particularmente, se mencionan aquellos aspectos en los cuales conocer el proceso para llevar a cabo un trabajo de investigación puede fortalecer la formación de un docente de matemáticas, para abordar los amplios desafíos y retos que se presentan en el aula.

5.2. Respuesta a la pregunta de investigación

La pregunta que orientó el desarrollo de esta tesis es: ¿Cuáles son los procesos cognitivos que promueven las tareas en dos libros de matemáticas, uno de los cuales está aprobado por

la SEP para utilizarse como texto en segundo de secundaria durante el ciclo escolar 2022-2023, específicamente las tareas que abordan el concepto de función lineal? En el primer capítulo se propuso como hipótesis que: “los procesos mentales más comunes en las tareas que abordan el concepto de función lineal en los libros de texto analizados se enfocan en recordar información y aplicar algoritmos o procedimientos rutinarios. Además, se identifican diversas deficiencias de redacción de las tareas, así como errores e imprecisiones conceptuales. Por otra parte, la contextualización de las tareas es artificial o irrelevante y, por ello, no contribuye en el desarrollo de un aprendizaje matemático con entendimiento”. Aunque esta hipótesis es parcialmente correcta, el proceso de análisis de la información empírica permitió precisar y clarificar la forma de responder a la pregunta de investigación.

En primer lugar, se identificó que los procesos cognitivos que promueven las tareas difieren entre cada uno de los textos. En el caso del libro *RV-SM*, los procesos cognitivos se enfocan en la implementación de algoritmos o procedimientos rutinarios. Asimismo, hay una carencia de procesos cognitivos asociados con la comunicación y justificación de ideas. Lo que puede interpretarse como que el objetivo primordial es encontrar y elegir la respuesta correcta, sin darle importancia al proceso de solución de las tareas. En lo que respecta al texto *EC-SAN*, se pudo observar que el proceso cognitivo que más se promueve se orienta a la implementación de algoritmos o procedimientos rutinarios. Sin embargo, también se promueve la comunicación de resultados, la justificación de ideas y la realización de comparaciones entre los resultados obtenidos. En este texto, el proceso para resolver una tarea es importante. Así, las tareas de este texto van más allá de los procesos algorítmicos y la obtención de resultados correctos.

Algunos resultados adicionales se relacionan con la redacción de los enunciados de las tareas, los cuales en muchos casos no son precisos o presentan y por esta razón no fomentan el proceso de creatividad de los estudiantes. Como menciona Sigman (2022), las preguntas muy generales resultan en parálisis creativas.

5.3. Discusión de los resultados

En general, las tareas tienen un énfasis en lo procedimental, además se identificó una falta de conexiones entre diversas representaciones utilizadas, las cuales se manejan de forma aislada, lo cual coincide con lo expresado por otros investigadores como Aguilar et al. (2017). Por otra parte, los sistemas de representación que se promueven en el libro de texto RV-SM se enfocan fundamentalmente en las representaciones gráficas, lo cual se puede verificar al revisar la nube de palabras asociada con el contenido explícito de este libro (ver Figura 4) dejando de lado la interrelación entre diferentes representaciones. Es decir la tarea ya viene diseñada con algunos de estos recursos y el alumno solo se limita a seleccionar u obtener la respuesta correcta implementado algún algoritmo. De esta manera, se deja de lado que el alumno pueda implementar algún otro tipo de representación o que el mismo pueda inventar o utilizar sus propias formas de representación. Se observó también poco uso de representaciones algebraicas en el planteamiento de las tareas. El uso de los sistemas coordenados, las representaciones tabulares y tareas con las que se debe trabajar la pendiente de la recta son lo que más predomina en el contenido explícito del libro RV-SM. En relación con el contenido subyacente del libro RV-SM, se puede observar una discrepancia entre los sistemas de representación, ya que en la nube de palabras asociada (ver Figura 6) indica que el sistema de representación más utilizado es el tabular, lo que significa que el alumno debe completar una tabla, utilizar una tabla o crear una tabla para poder dar solución a una tarea, lo cual limita el uso de otro de otro tipo de representaciones, así como el establecimiento de conexiones entre ellas, lo cual es importante en el proceso de construcción de conocimiento matemático. Además, en este contenido subyacente las presentaciones gráficas, los sistemas coordenados y el trabajo con la pendiente de la recta no sobresalen tanto como en el contenido explícito. El uso de representaciones algebraicas en general es bajo, y se refiere esencialmente en la sección de respuestas representadas simbólicamente, y en aplicar fórmulas. El proceso cognitivo que más se promueve es el de *implementar*, ya que gran parte de las tareas en este libro solicitan implementar algún algoritmo. Esto además se puede observar en el diagrama que ilustra los procesos cognitivos que la gran parte de las tareas analizadas se concentran en el proceso cognitivo de implementar con un total de 122 tareas, lo cual representa dos terceras partes del total.

En el libro EC-SAN el análisis del contenido explícito indica que los sistemas de representación que se promueven en las tareas son mucho más diversos, con respecto al libro RV-SM. Una de las representaciones que más se utiliza es la algebraica, seguida de las representaciones tabulares y gráficas. También se puede resaltar que en este libro se promovió el uso de progresiones aritméticas, sistemas de ecuaciones lineales, proporcionalidad, despejes y el uso de la propiedad distributiva. Se pueden observar los procesos de comparar y comprobar, lo que permite comunicar las ideas y/o resultados obtenidos por los alumnos y así dar cierta relevancia al proceso detrás de la solución de alguna tarea. Sin embargo encontramos también completar, en este caso relacionado a cierta información o alguna tabla para resolver la actividad. Lo anterior es evidencia de cierta diversificación y balance entre los sistemas de representación, lo cual evita caer en la rutina, al utilizar solo una o pocas representaciones aisladas entre sí, de esta manera se evita que un estudiante se forme ideas erróneas, como que una tarea se puede resolver por un solo camino o ruta.

En relación con el contenido subyacente del libro EC-SAN, se puede concluir que las representaciones algebraicas juegan un rol importante en este texto. Los sistemas de representación entre el contenido explícito y subyacente no difieren sustancialmente. En cuanto al proceso cognitivo que más se promueve es el de *implementar* junto con el de *entender*, sin embargo encontramos también procesos como representar, explicar, que promueven que el alumno no solo se centre en obtener el resultado sino en el cómo y de esta manera poder comunicar sus ideas y/o resultados. En diversas tareas se promueve la comunicación de resultados, la comparación de resultados o procedimientos obtenidos por diversos estudiantes, así como procesos de comprobación o verificación. En este texto, el proceso cognitivo de *entender* tuvo bastante relevancia junto con el de *implementar*. También se concluye que en el libro EC-SAN, gran parte de las tareas analizadas se concentran en el proceso cognitivo de *implementar* con un total de 83 tareas y *entender* con un total de 94 tareas.

Con lo anterior se puede concluir que en ambos libros de texto las tareas se enfocan en lo algorítmico; así como en la implementación de procesos. Sin embargo, el libro RV-SM promueve pocos procesos cognitivos, además no existe una diversificación en cuanto a las

representaciones que se utilizan. Por otra parte, en el libro EC-SAN, se promueve mayor variedad de procesos cognitivos, los cuales incluyen las seis categorías de procesos especificadas en la taxonomía de Anderson et al. (2001). En este último libro, se emplea una mayor diversidad de sistemas de representación.

Se pudo identificar que no existe uniformidad en la terminología en lo que concierne a constante de proporcionalidad, puesto que se en los libros se encontraron diferentes palabras o frases que para referirse a dicha constante, tales como: factor de proporción, constante de proporcionalidad, constante de proporción o factor constante.

5.4. Alcances, limitaciones y propuestas a futuro

Una limitación de este trabajo es que solo se analizaron las tareas de dos libros de texto. Para futuras investigaciones se recomienda analizar y contrastar las tareas de una mayor cantidad de libros diferentes. De esta manera, los potenciales lectores del trabajo dispondrán de una metodología, así como la forma de implementarla, que les permita seleccionar el tipo de tareas que implementará en el aula, con base en el proceso o procesos cognitivos que pretenda promover entre los estudiantes. El contar con una metodología para elegir tareas, es de relevancia para la actividad que los docentes llevan a cabo en su día a día. Otra limitante de este trabajo es que solo se enfocó en un tema en específico, ya que por causas de tiempo no fue factible analizar todo el contenido de cada libro, ya que son muchos temas que el libro pretende abarcar, sin embargo puede ser bastante interesante analizar el contenido completo de libros de texto y además hacer un análisis comparativo entre diferentes textos, y no solo entre dos de ellos.

Una propuesta a futuro consiste en analizar los nuevos libros de texto, basados en el modelo de la *Nueva Escuela Mexicana*, puesto que cuando se inició este trabajo de tesis, los nuevos libros de texto aún no se habían implementado, ya que se encontraba en su fase piloto. Una propuesta a futuro que fue sugerida, es el diseño de una propuesta didáctica a partir del nuevo modelo educativo, que ayude a abordar el concepto de función lineal en los alumnos y así potenciar su comprensión.

5.5. Reflexiones finales

Uno de los aportes de mayor relevancia de esta investigación consiste en la propuesta de una metodología para el análisis de tareas de libros de texto que difiere en aspectos relevantes de otras metodologías propuestas en la literatura de investigación. Este tipo de análisis podría ser útil para las instituciones educativas, quienes podrían utilizarla para seleccionar de una manera consciente e informada los libros de texto más acordes con sus necesidades u objetivos educativos y, de esta manera, tener mayor certidumbre respecto de que el contenido es adecuado para los estudiantes y para el docente, ya que será su herramienta de trabajo durante un año escolar. Sin embargo, este tipo de análisis resulta laborioso. Se considera que no se le da la suficiente importancia al análisis de contenido de los textos con los que se trabajan en las escuela, ya que el que sean libros gratuitos o comerciales, no determina la calidad del contenido que ofrecen, es importante que se le dé más visibilidad a investigaciones como la efectuada en este trabajo.

REFERENCIAS

- Adu-Gyamfi, K., & Bossé, M. J. (2014). Processes and reasoning in representations of linear functions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 12, 167–192. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9416-x>
- Aguilar, M. S., Castañeda, A., & Gonzáles-Polo, R. I. (2017). Research findings associated with the concept of function and their implementation in the design of mathematics textbooks tasks. In T. Dooley, & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3776-3783). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.
- Andere, E., y Villalpando, I. (2023, mayo 17). *Errores y enredos de la reforma educativa y los libros de texto gratuitos*. Nexos. Recuperado el 23 de junio de 2023 de <https://bit.ly/47EMJUg>
- Anderson, L. W., Krathwohl, D. R., Airasain, P. W., Cruikshank, K. A., Mayer, R. E., Pintrich, P. R., Raths, J. & Wittrock, M. C. (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing A Revision of Bloom 's Taxonomy of Educational Objectives*. Pearson Education.
- Aquino, E. (2023, mayo 15). *La SEP viola ley con nuevos libros de texto: ordena imprimir sin haber aprobado planes de estudio ni consultar a padres y maestros*. Animal Político. Recuperado el 23 de junio de 2023 de <https://bit.ly/4a4el6F>
- Avello-Martínez, R., Rodríguez-Moteagudo, M., Rodríguez-Monteagudo, P., Sosa-López, D., Companione-Turiño, B., y Rodríguez-Cubela, R. (2018). ¿Por qué enunciar las limitaciones del estudio? *Medisur*, 17(1), 10-12.
- Barrera Mora, F., Reyes Rodríguez, A., Campos Nava, M., & Rodríguez Álvarez, C. (2021). Resolución de problemas en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. *Pädi Boletín Científico De Ciencias Básicas E Ingenierías Del ICBI*, 9(Especial), 10-17. DOI: <https://doi.org/10.29057/icbi.v9iEspecial.7051>
- Barrera Mora, F., y Santos Trigo, M. (2000). Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de

- medicamento. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Memorias del Seminario Nacional: formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas* (pp. 166-185). Bogotá: MEN.
- Bartol, C. R., & Bartol, A. M. (2012). *Criminal behavior. A psychological approach* (10th edition). Boston: Pearson.
- Bayazit, I. (2012). Quality of the tasks in the new Turkish elementary mathematics textbooks: the case of proportional reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 11*. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10763-012-9358-8>
- Bieda, K., Ji X., Drwencke, J. & Picard, A. (2014). Reasoning and proving opportunities in elementary mathematics textbooks. *International Journal of Educational Research, 64*, 71-80. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.06.005>
- Birgin, O. (2012). Investigation of Eighth-Grade Students' Understanding of the Slope of the Linear Function. *Bolema, Rio Claro (SP)*, v. 26, n. 42A, p. 139-162, abr. 2012. DOI: <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000100008>
- Blomberg, O. (2011). Conceptions of cognition for cognitive engineering. *The International Journal of Aviation Psychology, 21*(1), 85-104. DOI: <https://doi.org/10.1080/10508414.2011.537561>
- Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 247–285. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02309532>
- Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In J. J. Kaput, A. H. Schoenfeld, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education, 3, CBMS issues in mathematics education* (Vol. 7, pp. 114–162). Washington: Mathematical Association of America.
- Carlson, M. & Oehrtman, M. (2005). *Key aspects of knowing and learning the concept of function. Research Sampler Series, 9*. The Mathematical Association of America Notes Online. Recuperado el 6 de julio de 2023 de <https://acortar.link/rXAAbD>

- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378. DOI: <https://doi.org/10.2307/4149958>
- Common Core State Standards Initiative [CCSSI] (2010). *Common Core State Standards for mathematics*. Recuperado el 13 de junio de 2023 de https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Common_Core_State_Standards/Math_Standards.pdf
- Davis, J. (2012) An examination of reasoning and proof opportunities in three differently organized secondary mathematics textbook units. *Math Ed Res J* 24, 467–491. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13394-012-0047-2>
- DeMarois, P. & Tall, D. (1996). Facets and layers of the function concept. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 297–304). Valencia: University of Valencia.
- Dibek, M. I. & Toker, Z. (2022). Identifying the presence of context and item-writing flaws in practice items: The case of Turkish mathematics textbooks. *Int. J. Assess. Tools Educ., Vol. 9, Special Issue, (2022) pp. 218–235*. DOI: <https://doi.org/10.21449/ijate.1089472>
- Dubinsky, E. & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 85–106). Washington: Mathematical Association of America.
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Cham: Springer.
- Eisenberg, T. (2002). Functions and associated learning difficulties. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library* (Vol. 11, pp. 141-152) Dordrecht: Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_9
- Eisenhart, M. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991: Ideas from a cultural anthropologist; implications for mathematics education. In R. G. Underhill (Ed.),

- Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 201-220). PMENA.
- Elo, S., & Kyngäs, H. (2008). The qualitative content analysis process. *Journal of Advanced Nursing*, 62(1), 107-115. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2648.2007.04569.x>
- Escamilla Ortiz, A. C. (2018). ¿Qué debe llevar la discusión? *Cirujano General*, 40(3), 157-158. <https://www.scielo.org.mx/pdf/cg/v40n3/1405-0099-cg-40-03-157.pdf>
- Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: Towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM*, 45(5), 765–777. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0530-6>
- Fan, L. & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 61–75. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9069-6>
- Flores de la Mota, I. (1999). *Apuntes de teoría de redes*. México: UNAM. Recuperado el 2 de diciembre de 2023 de <https://bit.ly/413Jjrs>.
- Franklin, C., & Ballan, M. (2000). Reliability and validity in qualitative research. In B. A. Thyer (Ed.), *The handbook of social work research methods* (pp. 273-292). Thousand Oaks: Sage.
- Frey, B. (2018). The SAGE encyclopedia of educational research, measurement, and evaluation. Sage. <https://doi.org/10.4135/9781506326139>
- Fujita, T. & Jones, K. (2014). Reasoning-and-proving in geometry in school mathematics textbooks in Japan. *International Journal of Educational Research*, 64, 81–91. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.09.014>
- Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (2011). Introduction. In G. Gueudet, B. Pepin and L. Trouche (Eds.), *From Text to ‘Lived’ Resources. Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development* (pp. ix-xiii). Springer.

- Hiebert, et al. (1997). *Making Sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different Representations linked to the concept of function. *Journal of mathematical behavior*, 17 (1), 123-134. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(99\)80064-9](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)80064-9)
- Hong, D., & Choi, K. (2014). How is the function concept introduced in textbooks?: A comparative analysis. *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA* 36, 3, 329-336.
- Hong, D. S., & Choi, K. M. (2018). A comparative analysis of linear functions in Korean and American standards-based secondary textbooks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(7), 1025–1051. <https://doi.org/10.1080/0020739x.2018.1440327>
- Howson, G. (1995). *Mathematics textbooks: A comparative study of grade 8 textbooks*. Vancouver: Pacific Educational Press.
- Kalchman, M., & Koedinger, K. R. (2005). Teaching and learning functions. In M. S. Donovan, & J. D. Bransford (Eds.), *How Students Learn Mathematics in the Classroom* (pp. 351-393). Washington: The National Academy Press. DOI: <https://doi.org/10.17226/11101>
- Kilpatrick, J. (1993). The chain and the arrow: from the history of mathematics assessment. In M. Niss (Ed.), *Investigations into assessment in mathematics education: an ICME Study* (pp 31–46). Dordrecht: Kluwer.
- Kilpatrick, J. (2020). Competency frameworks in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education, Second Edition* (pp. 110-113). Springer.
- Kleinheksel, A. J., Rockich-Winston, N., Tawfik, H., Wyatt, T. R. (2020). Demystifying content Analysis. *American Journal of Pharmaceutical Education*, 84(1), 127-137. DOI: <https://doi.org/10.5688/ajpe7113>

- Krch, D. (2011). Cognitive processing. In J. S. Kreutzer, J. DeLuca, & B. Kaplan (Eds.), *Encyclopedia of Clinical Neuropsychology* (p. 627). New York: Springer.
- Kuckartz, U. (2019). Qualitative text analysis: A systematic approach. In G. Kaiser, & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in mathematics education. ICME-13 Monographs* (pp. 181–197). Cham: Springer.
- Kuckartz, U., & Rädiker, S. (2023). *Qualitative content analysis*. Sage, Los Angeles.
- Kuckartz, U., & Rädiker, S. (2024). Teaching qualitative content analysis. In A. Ruth, A. Wutich, & H. R. Bernerd (Eds.), *The handbook of teaching qualitative and mixed research methods. A step-by-step guide for instructors* (pp. 233-237). London: Routledge.
- Lanius, C. S., & Williams, S. E. (2003). Proportionality: A unifying theme for the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 8(8), 392-396. DOI: <https://doi.org/10.5951/MTMS.8.8.0392>
- Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *ZDM*, 37(6), 457-467. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2_8
- Ley General de Educación, [LGE], Reformada, Diario Oficial de la Federación [D.O.F.], 30 de Septiembre de 2019, (México).
- Li, Y. (2000). A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 234–241. DOI: <https://doi.org/10.2307/749754>
- Lloyd, G. M., & Wilson, M. (1998). Supporting innovation: the Impact of a teacher's conceptions of functions on his implementation of a reform curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(3), 248. DOI: <https://doi.org/10.2307/749790>
- Martin, W. G. (2000). Principles and standards for school mathematics. *National Council of Teachers of Mathematics*.

- Martinez, E., Salgado, D., Batta, A. & De la Escosura, S. (2022, marzo). *Revuela Secundaria Matemáticas 2. SM.*
- Martone, A., & Sireci, S., G. (2009). Evaluating Alignment Between Curriculum, Assessment, and Instruction. *Review of Educational Research*, 79, 1332–1361. DOI: 10.3102/0034654309341375.
- Mayring, P. (2014). *Qualitative content analysis: Theoretical foundations, basic procedures and software solution*. Klagenfurt: SSOAR Open Access.
- Mellor, K., Clark, R., Essien, A. (2018). Affordances for learning linear functions: A comparative study of two textbooks from South Africa and Germany. *Pythagoras*, 39(1), a378. DOI: <https://doi.org/10.4102/pythagoras.v39i1.378>
- Mesa, V. (2004). CHARACTERIZING PRACTICES ASSOCIATED WITH FUNCTIONS IN MIDDLE SCHOOL TEXTBOOKS: AN EMPIRICAL APPROACH. *Educational Studies in Mathematics* 56: 255–286, 2004. DOI: 10.1023/B:EDUC.0000040409.63571.56
- Otten, S., Males, L. & Gilbertson, N. (2014). The introduction of proof in secondary geometry textbooks. *International Journal of Educational Research*. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.08.006>
- Petersson, J., Sayers J., Rosenqvist. E., Andrews. P. (2020). Two novel approaches to the content analysis of school mathematics textbooks. *International Journal of Research & Method in Education*. DOI: <https://doi.org/10.1080/1743727X.2020.1766437>
- Pierce, R., Stacey, K., & Bardini, C. (2010). Linear functions: teaching strategies and students' conceptions associated with $y = mx + c$. *Pedagogies: An International Journal*, 5(3), 202–215. <https://doi.org/10.1080/1554480X.2010.486151>
- Porter, A. (2002). Measuring the content of instruction: Uses in research and practice. *Educational Researcher*, 31(7), 3–14.

- Polikoff, M. (2015). How well aligned are textbooks to the Common Core Standards in Mathematics? *American Educational Research Journal*, 52(6), 1185–1211. DOI: <https://doi.org/10.3102/0002831215584435>
- Postelnicu, V. (2011). *Student difficulties with linearity and linear functions and teachers' understanding of student difficulties*. Recuperado el 14 octubre de 2022 from <https://hdl.handle.net/2286/R.I.8924>
- Quiroga, R. (2023, marzo 13). *Conaliteg desconoce el estatus del programa de libros para secundaria*. El Economista. Recuperado el 8 de junio de 2023 de <https://www.economista.com.mx/arteseideas/Conaliteg-desconoce-estatus-del-programa-de-libros-para-secundaria-20230313-0078.html>
- Remillard, J., Harris B. & Agodini R. (2014). The influence of curriculum material design on opportunities for student learning. *ZDM Mathematics Education*. Recuperado el 18 de abril de 2021 from DOI 10.1007/s11858-014-0585-z
- Reyes Soto, I. M. (2020). Nube de palabras. *Eutopía*, 12(33), 54-63.
- Reys, B. J., Reys, R. E., & Chávez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. *Educ Leadership*, 61(5), 61–66.
- Riva Palacio y Santana, M. A. (2022). *Matemáticas 2. Espacios creativos*. México: Santillana.
- Rowlands, M. (1999). *The body in mind. Understanding cognitive processes*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Saldaña, J. (2015). *The coding manual for qualitative researchers*. Los Angeles: Sage.
- Schreier, M. (2012). *Qualitative content analysis in practice*. Thousand Oaks: SAGE.
- Schreier, M. (2014). Qualitative content analysis. In U. Flick (Ed.), *The SAGE handbook of qualitative data analysis* (pp. 170–183). London: Sage.
- Schoenfeld, A. (1994). *Mathematical thinking and problem solving*. Routledge.

- Selvi, A. F. (2019). Qualitative content analysis. In J. McKinley, & H. Rose (Eds.), *The Routledge handbook of research methods in applied linguistics* (pp. 440-452). New York: Routledge.
- Secretaría de Educación Pública. (2017). Aprendizajes clave para la educación integral. (1a ed). Recuperado 14 de agosto de 2024, de: <https://acortar.link/SouAjj>
- Secretaría de Educación Pública (2011). Programas de estudio 2011 Guía para el maestro. (1a ed). Recuperado 14 de agosto de 2024, de: <https://acortar.link/bqhQGA>
- Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of the concept of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA Notes 25* (pp. 25-58). Washington: Mathematical Association of America.
- Sigman, M. (2022). *El poder de las palabras. Cómo cambiar tu cerebro (y tu vida) conversando*. Buenos Aires: Debate.
- Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B., & O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA*, 4(4), 133-142. DOI: 10.30827/pna.v4i4.6163.
- Sherin, M. G. (2002). When Teaching Becomes Learning. *Cognition and Instruction*, 20(2), 119–150. https://doi.org/10.1207/S1532690XCI2002_1
- Smith, A. D., & Kelly, A. (2016). Cognitive processes. In S. K. Whitbourne (Ed.), *The Encyclopedia of Adulthood and Aging* (Vol. 1, pp. 210-213). John Wiley & Sons. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781118521373.wbeaa213>
- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. Teachers College Press.
- Stylianides, J. G. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 258-288.

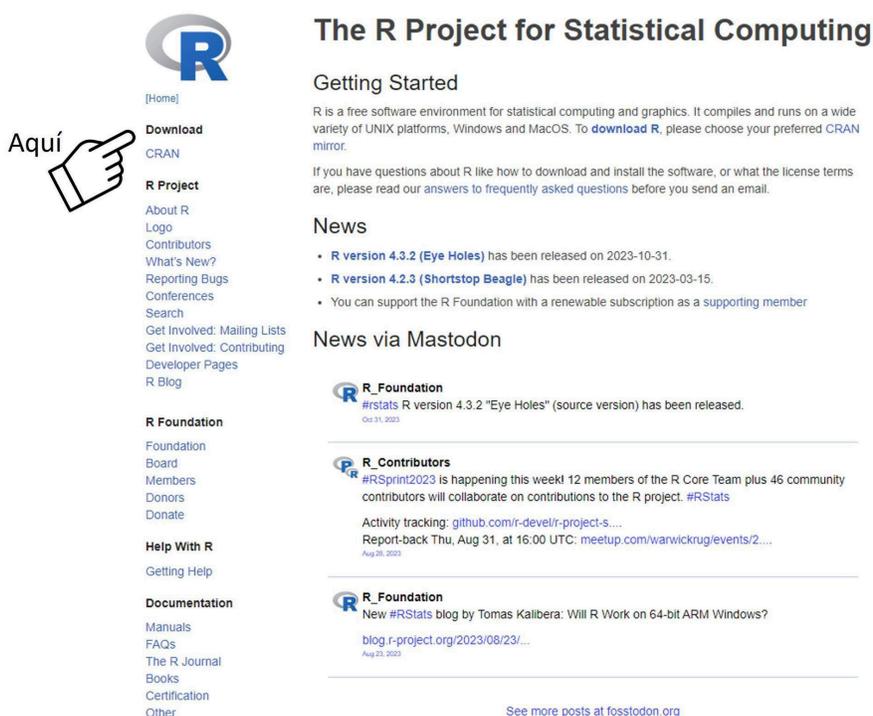
- Stylianides, J. G. (2014). Textbook analyses on reasoning-and-proving: Significance and methodological challenges. *International Journal of Educational Research*, 64, 63–70.
- Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2010). Mathematics for teaching: A form of applied mathematics. *Teaching and Teacher Education*, 26, 161–172.
- Taha, H. A. (2012). *Investigación de operaciones* (9a. Ed., trad. R. Navarro Salas). Naucalpan: Pearson.
- Tarr, J. E., Chávez, O., Reys, R. E., & Reys, B. J. (2006). From the written to the enacted curricula: The intermediary role of middle school mathematics teachers in shaping students' opportunity to learn. *School Science and Mathematics*, 106(4), 191–201.
- Tesfamicael, S. & Lundeby, O. (2019). A comparative study of norwegian and ethiopian textbooks: the case of relations and functions using anthropological theory of didactics (ATD). *Universal Journal of Educational Research* 7(3): 754-765, 2019. DOI:10.13189/ujer.2019.070315
- Thompson, D., Senk, S., & Johnson, G. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(3), 253–295. DOI: <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.43.3.0253>
- Universidad Veracruzana (s.f.). Los límites y alcances de una investigación. Recuperado el 20 de mayo de 2024 de [Introducción a la Investigación: guía interactiva \(uv.mx\)](#)
- Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the Book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks* (2nd ed.). Springer.
- Vicente, S., Verschaffel, L., Sánchez, R., Muñoz, D. (2022). Arithmetic word problem solving. Analysis of Singaporean and Spanish textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 111, 375–397. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-022-10169-x>
- Wang, Y., Barmby, P., & Bolden, D. (2017). Understanding Linear Function: a Comparison of Selected Textbooks from England and Shanghai. *International Journal of Science and Mathematics Education*. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9674-x>

- Watson, A., & Ohtani, M. (2015). *Task design in mathematics education: An ICMI study 22* (1st ed.). Springer International Publishing.
- Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: a comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *Int J Sci Math Educ*, 4(4), 6609–6626.

APÉNDICE A. Código de R para generar una nube de palabras

El software R es un software libre, un lenguaje de programación que permite realizar distintos cálculos científicos, numéricos y estadísticos, así como crear gráficas y figuras de diversos tipos. Esta herramienta fue creada, en 1993, por los matemáticos estadounidenses Robert Gentleman y Ross Ihaka. El objetivo de R es ofrecer una plataforma libre y gratuita para el uso y desarrollo de diversos algoritmos numéricos y estadísticos (Rodríguez, 2019).

El instalador de R puede descargarse, sin costo, en el siguiente enlace: <https://www.r-project.org/>. A continuación se elige la opción CRAN, que es el acrónimo de Comprehensive R Archive Network (ver Figura 16).



The screenshot shows the R Project website for statistical computing. On the left is a navigation menu with a hand icon pointing to the 'Download CRAN' link. The main content area includes the R logo, the title 'The R Project for Statistical Computing', and sections for 'Getting Started', 'News', and 'News via Mastodon'. The 'Getting Started' section explains that R is a free software environment for statistical computing and graphics, available on various platforms. The 'News' section lists recent releases: R version 4.3.2 (Eye Holes) on 2023-10-31 and R version 4.2.3 (Shortstop Beagle) on 2023-03-15. The 'News via Mastodon' section shows three posts from the R Foundation and R Contributors, including announcements about R version 4.3.2 and R Sprint 2023.

Figura 16. Página de descarga del software R.

Para elaborar una nube de palabras en R a partir de un archivo de texto plano, se requieren las bibliotecas *tm* y *wordcloud*. La primera biblioteca procesa el texto y la segunda genera la nube de palabras. Este código se obtuvo del sitio *La Grulla Libre*⁵.

⁵ <https://lagrullalibre.wordpress.com/2014/01/15/aplicaciones-libres-para-crear-nubes-de-palabras/>

```

#Inicia el código para construir la nube de palabras

# Se instalan las bibliotecas necesarias previo a correr el programa que genera la nube de
palabras

install.packages("tm")

install.packages("wordcloud")

# Aquí es donde inicia el programa que elabora la nube de palabras a partir del archivo *.txt

# Llamar paquetes

require(tm)

require(wordcloud)

# Leer archivo

txt <- readLines("C:/ruta/de/archivo.txt",encoding="UTF-8")

# El archivo txt se debe guardar en el directorio de trabajo (Archivos del programa) en la
carpeta de R

txt = iconv(txt, to="ASCII//TRANSLIT")

corpus <- Corpus(VectorSource(txt))

d <- tm_map(corpus, tolower)

d <- tm_map(d, stripWhitespace)

d <- tm_map(d, removePunctuation)

# Remueve palabras vacías genéricas

d <- tm_map(d, removeWords, stopwords("spanish")) # Se puede cambiar spanish por el
lenguaje que corresponda

# Se crea matriz de términos

```

```

tdm <- TermDocumentMatrix(d)

# Mostrar la matriz con términos definidos, lowfreq = 20: Es el parámetro lowfreq, que
establece un umbral de frecuencia mínima. En este caso, se están buscando los términos
que aparecen al menos 20 veces en el conjunto de datos representados por la matriz.

findFreqTerms(tdm, lowfreq=20)

# Si se quieren eliminar palabras no deseadas de la matriz

d <- tm_map(d, removeWords, c("den","ser","alumnos", "bien", "manera" ))

tdm <- TermDocumentMatrix(d)

# Generar la nube

m <- as.matrix(tdm)

v <- sort(rowSums(m),decreasing=TRUE)

df <- data.frame(word = names(v),freq=v)

wordcloud(df$word,df$freq,min.freq=3)

# Se abre una nueva ventana con la nube

# min.freq=3 indica que el mínimo de veces que debe aparecer una palabra para que se
coloque en la nube es 3.

```

Referencias

Rodríguez Silva, J. L. A. (2019). ¿Qué puede hacer el software R para resolver tus problemas? Revista Digital Universitaria, 20(3), 1-10. DOI: <http://doi.org/10.22201/codeic.16076079e.2019.v20n3.a5>

APÉNDICE B. Tablas de sustitución para elaborar nubes de palabras

El objetivo de reemplazar ciertas palabras para poder elaborar las nubes de palabras, fue porque el software R al detectar una palabra larga la divide, es decir mostrará dos palabras sin que exista una relación alguna. Por ejemplo *representación gráfica*, el software lo que hará es mostrar dos palabras *representación* y *gráfica*, por lo cual se tomó la decisión de crear una tabla en donde se colocaron todas las palabras que fueron reemplazadas por palabras más cortas (ver Tablas 8-11).

Esta estrategia fue utilizada para crear las nubes de palabras del contenido explícito y subyacente de ambos libros de texto.

Tabla 8. Palabras reemplazadas del contenido explícito del libro EC-SAN

Palabra	Se cambió por
Tabla Tablas Tabular	Reptab
Expresen algebraicamente Represente algebraicamente Representa algebraicamente Expresión algebraica Expresiones despejadas Expresiones Ecuación Ecuaciones Ecuaciones despejadas	Repalg
Sistema de ecuaciones Sistemas de ecuaciones Sistema	Sistecu
Grafica Grafiquen Gráficas Gráfica	Repgraf
Reparto proporcional	Proporcional
Regla general	Termgral

Reglas generales	
Sucesión Sucesiones	ProgreArit
Incógnitas	Incógnita
Multiplicar Multipliquen Multiplicamos	Multiplicar
Variables	Variable
Estrategias	Estrategia
Analicen Analiza	Analizar
Representen Representan Representa Representarían Representación Representamos Representativa	Representar
Sustituyan Sustituimos Valor (Sustituir valor en alguna variable)	Sustituir
Justifica	Justificar
Propiedad distributiva	Distributiva
Realicen	Realizar
Comparen	Comparar
Complenten	Completar
Resuelvan Resuelve Resuelves Resuelven	Resolver
Despejes Despeje	Despejar

Valor (Encontrar el valor de alguna variable)	Encontrar
---	-----------

Fuente: elaboración propia

Tabla 9. Palabras reemplazadas del contenido subyacente del libro EC-SAN

Palabra	Se cambió por
Tabla Tablas	Reptab
Expresión algebraica Expresiones equivalentes Expresiones algebraicas equivalentes Ecuación Ecuaciones Ecuaciones despejadas Ecuación lineal Representación algebraica	Repalg
Sistema de ecuaciones Sistemas de ecuaciones Sistema	Sistecu
Regla de tres	Regtres
Grafica Graficación Gráficas Gráfica Rectas	Repgraf
Reparto Proporcional	Proporcional
Regla general Reglas generales Reglas Regla	Termgral
Sucesión	ProgreArit
Incógnitas Incógnita	Incógnita

Multiplicado Multiplicación Multiplicarlo Multiplicarlos Multiplicamos Multiplicaciones Multiplicada Multiplicando	Multiplicar
VARIABLES	Variable
Estrategia Estrategias	Estrategia
Represente Representan Representará Representarán Representación	Representar
Sustituirlo Sustituirlos Valores (Sustituir valores en alguna variable) Sustituyendo	Sustituir
Propiedad distributiva	Distributiva
Encontrar	Valores (Encontrar el valor de una variable)
Coeficientes	Coeficiente

Fuente: Elaboración propia

Tabla 10. Palabras reemplazadas del contenido explícito del libro RV-SM

Palabra	Se cambió por
Tabla Tablas	Reptab
Expresión algebraica Expresiones algebraicas Expresión Expresiones Ecuaciones Representación algebraica	Repalg

Grafica Gráficas Gráfica Rectas Recta	Repgraf
Analicen Analiza	Analizar
Representan Representadas	Representar
Justificación	Justificar
Comparen	Comparar
Completen Completa Completarían	Completar
Resuelvan	Resolver
Plano cartesiano Planos cartesianos Eje	Sistcoord
Regla de tres	Regtres
Coordenadas	Coordenada
Relación de proporcionalidad	Reproporcional

Fuente: elaboración propia

Tabla 11. Palabras reemplazadas del contenido subyacente del libro RV-SM

Palabra	Se cambió por
Porporcionalidad	Proporción
Multiplicarlo Multiplicación	Multiplicar
Regla de tres	Reg3
Razonamiento	Razonar
Variación lineal Variaciones lineales Función lineal Relación lineal Ecuación lineal Recta crece Recta decrece	Varlin

Tabla Tabulaciones Columnas Organizar los datos	Reptab
Representación algebraica Ecuación Formula Expresión algebraica	Repalg
Representación geometrica	Repgeo
Plano cartesiano Plano coordenado	Sistecoord
Sustituirán Sustituyen Sustituyendo Sustituir las incógnitas	Sustituir
Inclinación Pendientes	Pendiente
Implementar Ejecutarlos	Ejecutar
Líneas	Rectas

Fuente: elaboración propia