



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería.

Área Académica de Matemáticas y Física

Geodésicas y Potenciales Efectivos de Agujero Negro
Dilatónico

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE :
LICENCIADO EN FÍSICA Y TECNOLOGÍA AVANZADA**

P R E S E N T A :

Luis Osvaldo Téllez Tovar

DIRECTOR DE TESIS :

Dr. Luis Alberto López Suárez

Pachuca Hgo.
Abril de 2016



M. en A. JULIO CÉSAR LEINES MEDÉCIGO
 DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR
 P R E S E N T E

Por este conducto le comunico que el Comité Revisor asignado a el alumno Luis Osvaldo Téllez Tovar, de la Licenciatura en Física y Tecnología Avanzada con número de cuenta 264103, que presenta el manuscrito de tesis titulado “Geodésicas y Potenciales Efectivos de Agujero Negro Dilatónico”, después de revisar el trabajo antes referido, ha decidido autorizar la impresión del mismo hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación se registran las firmas de conformidad de los integrantes del Comité Revisor.

PRESIDENTE Dr. Carlos Arturo Soto Campos
 SECRETARIO Dr. Omar Pedraza Ortega
 PRIMER VOCAL Dr. Luis Alberto López Suárez
 SEGUNDO VOCAL Dra. Argelia Bernal Bautista
 TERCER VOCAL Dr. Lao Tse López Lozano
 PRIMER SUPLENTE Dr. Roberto Noriega Papaqui
 SEGUNDO SUPLENTE Dr. Jorge Viveros Rogel

Sin otro particular, reitero a Usted la seguridad de mi atenta consideración.

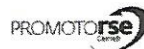
ATENTAMENTE
 “Amor, Orden y Progreso”

Mineral de la Reforma, Hidalgo, a 28 de marzo de 2016


 Dr. Orlando Ávila Rozos
 Director del ICBI



Ciudad del Conocimiento
 Carretera Pachuca - Tulancingo km. 4.5
 Colonia Carboneras
 Mineral de la Reforma, Hidalgo, México, C.P. 42184
 Tel. +52 771 7172000 exts 2231, Fax 2109
 direccion_icbi@uaeh.edu.mx



*Para la estrella que más brilla,
Helena.*

Agradecimientos.

A mi madre Ernestina y a mi padre Porfirio por creer siempre en mí, por darme su amor y todo su apoyo. A mi hermana Ximena, por hacer las tardes de estudio más amenas. A mi sobrina Evolet, por enseñarme a estar contento y ser curioso siempre. A mi abuelita Nena, porque nunca dejo de preocuparse por mí. A mis amigos, porque con ellos la física y la vida son más divertidas. A mis profesores, por todo el conocimiento que compartieron conmigo. Y a mi asesor el Dr. Luis Alberto López por tenerme paciencia y por todo el apoyo que me brindó.

*Somewhere, something incredible
is waiting to be known.*
Carl Sagan.

Índice general

Introducción.	III
Resumen.	V
1. Relatividad General.	1
1.1. Geodésicas.	3
2. Agujeros Negros.	5
2.1. Agujero Negro Dilatónico.	5
3. Potenciales efectivos de Agujero Negro Dilatónico.	9
3.1. Potencial efectivo para geodésicas nulas.	9
3.1.1. Geodésicas nulas radiales.	11
3.1.2. Geodésicas con momento angular.	13
3.2. Potencial efectivo para geodésicas espacialoides.	16
4. Geodésicas.	21
4.1. Geodésicas nulas.	21
4.1.1. Espacio-tiempo con $E=0$	22
4.1.2. Espacio-tiempo con energía distinta de cero.	22
4.2. Geodésicas espacialoides.	23
Conclusiones.	27
Perspectivas.	31

Bibliografía

Introducción.

En la teoría general de la relatividad, Albert Einstein en el año de 1915 propone una versión distinta de la Newtoniana sobre cómo se comporta el campo gravitacional. Entre otras cosas, considera que el espacio-tiempo es curvo y que dicha curvatura está relacionada con la materia que contiene. Las ecuaciones propuestas por Einstein no son sencillas de resolver dado que, cuando el espacio-tiempo es cuatro-dimensional, son diez ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden acopladas. Dentro de las soluciones de estas ecuaciones de Einstein se encuentran las de tipo agujero negro de las cuales se pueden mencionar el agujero negro de Schwarzschild que representa un objeto estático con simetría esférica, el agujero negro de Kerr que representa un objeto estático que rota y tiene simetría esférica, el agujero negro de Reissner-Nordström el cual representa un objeto estático con simetría esférica que posee carga eléctrica, entre otros.

También existen soluciones que representan agujeros negros que provienen de compactificar Teoría de Cuerdas. Este tipo de agujeros negros son soluciones propuestas que tienen validez por debajo de la longitud de Planck¹ dado que las soluciones clásicas (Schwarzschild, Kerr, entre otras) tienen validez sobre la longitud de Planck. Puesto que la Teoría de Cuerdas se ha convertido en un candidato para unificar la fuerza de gravedad con el resto de las fuerzas fundamentales, es importante estudiar soluciones tipo agujeros negros para determinar si es posible tener evidencia de las dimensiones extras en nuestro espacio-tiempo de cuatro dimensiones. Predicciones teóricas como la desviación de la luz cerca de objetos masivos, efectos de perihelio, dilatación de tiempo, ondas gravitacionales, entre otros son elementos físicos que pueden ser comparados con observaciones cuando estudiamos agujeros negros a través de potenciales efectivos y geodésicas.

¹Se considera la longitud de Planck en cuatro dimensiones $l_P \approx 1.6 \times 10^{-35} m$. Para valores de longitud menores que ella, no se espera un comportamiento clásico.

Por lo mencionado anteriormente, el principal objetivo de este trabajo es estudiar las geodésicas y los potenciales efectivos provenientes del Agujero Negro Dilatónico que representa un agujero negro con carga eléctrica, masa, es estático, tiene simetría esférica y acoplado con un campo escalar generado por el mismo agujero negro en cuatro dimensiones, dicha solución proviene de la acción obtenida de compactificar la Teoría de Cuerdas. La acción que se estudia también puede ser obtenida de distintas teorías de dimensiones extras dependiendo del valor que tome la constante de acoplamiento. En particular, se tratará de observar cómo la constante de acoplamiento entre el campo escalar y el campo electromagnético modifica el comportamiento de las partículas alrededor del agujero negro y con ello poder establecer que Teoría de dimensiones extras puede ser más fácil de detectar.

Resumen.

En este trabajo se estudia el Agujero Negro Dilatónico que es un agujero negro con masa, carga eléctrica, estático, esféricamente simétrico y que genera un campo escalar acoplado con el campo electromagnético en cuatro dimensiones que proviene de la compactificación de Teoría de Cuerdas. Se desea conocer el comportamiento de geodésicas nulas y espacialoides bajo la presencia de este agujero negro. Es por eso que se estudian los potenciales efectivos y geodésicas. Particularmente, se quiere analizar cómo distintos valores de la constante de acoplamiento entre el campo escalar y el campo eléctrico modifican el comportamiento de los distintos tipos de geodésicas. Para eso se considerará un mismo agujero negro, es decir, todos los parámetros que lo describen se mantendrán fijos y sólo se variará la constante asociada al campo escalar y las características de la partícula de prueba.

La estructura del trabajo es la siguiente: en el capítulo 1 se aborda la Teoría de la Relatividad General para dar una breve introducción a las geodésicas en un espacio-tiempo. En el capítulo 2, se introducen los agujeros negros y se explica la solución conocida como Agujero Negro Dilatónico. Mientras que en el capítulo 3 se estudian los potenciales efectivos de esta solución para geodésicas nulas y espacialoides. Dentro de este capítulo se estudian los potenciales efectivos para geodésicas nulas radiales, es decir, cuando el momento angular de la partícula de prueba es cero. También se estudian las geodésicas nulas cuando el momento angular es distinto de cero, y considerando dos casos: cuando $E = 0$ y cuando $E \neq 0$. Donde E es una constante de integración que puede ser asociada con la energía de la partícula en el infinito si el potencial efectivo al que está sujeta es asintóticamente plano. En este capítulo también se estudia el potencial efectivo para geodésicas espacialoides con distintos valores de la constante de acoplamiento y de la partícula de prueba. Se estudiará el caso extremo, es decir, cuando los horizontes de eventos coinciden. En el capítulo 4

se presentan las trayectorias que describen las geodésicas nulas con momento angular. Esto se hace para $E = 0$ y $E \neq 0$. También se presentan las geodésicas espacialoides con las mismas condiciones empleadas para obtener el potencial efectivo. Finalmente, se presentan las conclusiones y perspectivas de este trabajo.

Capítulo 1

Relatividad General.

La Relatividad General es una teoría de gravitación formulada en 1915 por Albert Einstein. La teoría de gravedad de Newton no era consistente con la relatividad especial tal como lo eran las ecuaciones de Maxwell. Pues la teoría de Newton requería de fuerzas de acción instantánea a distancia [1].

La Relatividad General, es soportada por dos grandes ideas. La primera de ellas es llamada el principio de equivalencia, que dice “no es posible distinguir entre un sistema inmerso en un campo gravitatorio de un sistema de referencia acelerado”. La segunda idea es el principio de Mach. En la relatividad especial la estructura del espacio-tiempo no es afectada por la materia que se encuentra en ella. En particular, el movimiento inercial y la no rotación no son influenciadas por la materia en el universo. Por otro lado, Ernst Mach creía que la materia en el universo debería contribuir a la definición local de no aceleración y no rotación; en un universo sin materia estos conceptos no tendrían significado [2]. Es decir, el principio de Mach dice que la inercia de cualquier sistema es el resultado de su interacción con el resto del Universo. O bien, cada partícula contenida en el Universo ejerce una influencia sobre el resto de las partículas.¹

La nueva teoría de gravitación propuesta por Einstein afirma que, independientemente del observador, las propiedades del espacio-tiempo son descritas por una métrica como en la relatividad especial. Sin embargo, la métrica del espacio-tiempo no es necesariamente plana. En efecto, la curvatura del espacio-tiempo produce los efectos físicos usualmente asociados a un campo gravitacional. Además, la curvatura del espacio-tiempo está relacionada con

¹Este principio no ha sido comprobado y sólo sirvió como motivación para la Relatividad General.

la materia contenida en él por medio de un tensor de energía-momento. De este modo, la estructura del espacio-tiempo está relacionada con la materia que contiene. [2]

Se puede medir la distancia entre dos puntos en un espacio-tiempo por medio del elemento de línea dado por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.1)$$

Siendo $g_{\mu\nu}$ la métrica que contiene la información de la estructura del espacio-tiempo. Los índices μ y ν van desde cero hasta el número de dimensiones que se tengan. Para el caso particular cuatro dimensional, μ y ν pueden tomar los valores de 0, 1, 2 y 3. Las x^μ son las coordenadas en las cuales se trabaja el espacio-tiempo, donde x^0 corresponde a la coordenada temporal y los $x^i, i = 1, 2, 3$ a las coordenadas espaciales. Para obtener la forma de $g_{\mu\nu}$ es necesario resolver las ecuaciones de Einstein. Las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General son:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = T_{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

Donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci dado por:

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\nu\rho}. \quad (1.3)$$

Esto significa que el tensor de Ricci es una contracción del tensor de curvatura el cual describe la curvatura del espacio-tiempo de forma local. A su vez este tensor está dado por

$$R^{\beta}_{\mu\nu\sigma} = \Gamma^{\beta}_{\mu\sigma,\nu} - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu,\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma}, \quad (1.4)$$

y está en función de los símbolos de Christoffel dados por

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu,\sigma} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\mu}). \quad (1.5)$$

Por otro lado, R es el escalar de curvatura que es una contracción del tensor de Ricci. Este escalar describe la curvatura promedio del espacio-tiempo

$$g^{\nu\rho} R_{\nu\rho} = R^{\nu}_{\nu} = R. \quad (1.6)$$

$T_{\mu\nu}$ es el tensor de momento y energía [3], el cual contiene información de materia y energía contenida en el espacio-tiempo. Cuando el espacio es vacío (es decir sólo contiene la materia que lo deforma) se tiene:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0. \quad (1.7)$$

Las ecuaciones anteriores explican cómo la materia y energía presentes determinan la geometría del espacio-tiempo. Recordando que el tensor de Ricci y el escalar de curvatura están en función de la métrica por lo cual las ecuaciones de Einstein (1.2) son acopladas.

1.1. Geodésicas.

Una geodésica es una curva que representa la trayectoria más corta entre dos puntos en un espacio-tiempo. La expresión general de una geodésica para una partícula de prueba con carga y masa es [4]

$$\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = -\frac{\epsilon}{m} F_\sigma^\nu \frac{dx^\sigma}{d\tau}. \quad (1.8)$$

Donde x^ν son las coordenadas y τ un parámetro afín (tiempo propio de la partícula), $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$ son los símbolos de Christoffel. Además ϵ y m son la carga y masa de la partícula de prueba respectivamente y F_σ^ν son las componentes del tensor electromagnético.

Existen tres tipos de geodésicas:²

1. **Nula:** rayos de luz o partículas sin masa.

$$g_{\mu\nu}u^\nu u^\mu = 0. \quad (1.9)$$

2. **Temporaloide:**

$$g_{\mu\nu}u^\nu u^\mu > 0. \quad (1.10)$$

Este tipo de geodésica no tiene interpretación física porque representa partículas con velocidades mayores que la de la luz.

3. **Espacialoide:**

$$g_{\mu\nu}u^\nu u^\mu < 0. \quad (1.11)$$

Este tipo de geodésica representa partículas con velocidades menores que la de la luz.

Donde se ha tomado $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$.

²Se considera que la métrica tiene la signatura $(-, +, +, +)$, en este trabajo se considera esta signatura.

Capítulo 2

Agujeros Negros.

Mientras que la Teoría de Cuerdas existe naturalmente en diez dimensiones de espacio-tiempo, se han obtenido soluciones cuando seis de estas dimensiones son compactadas a un tamaño pequeño (longitud de Planck) y prácticamente no son observables a ciertas distancias, así el estudio de soluciones de las cuerdas se fundamenta en un espacio-tiempo cuatro-dimensional, característico de la naturaleza. Una forma de compactar es considerar que algunas de las dimensiones están enrolladas, una forma de observar esto es cuando un toro es compactado en círculo.

Los agujeros negros son soluciones de las ecuaciones de Einstein (1.2), sin embargo, no son las únicas. Existen varios tipos de agujeros negros como el agujero negro estático de Schwarzschild, el agujero negro cargado estático de Reissner-Nordstöm, entre otros. Sin embargo, en este capítulo se estudiará el Agujero Negro Dilatónico que proviene de una acción obtenida de la compactificación de Teoría de Cuerdas.

2.1. Agujero Negro Dilatónico.

Un Agujero Negro Dilatónico es un agujero negro con masa M y carga eléctrica Q , esféricamente simétrico, estático, y que genera un campo escalar en función de su masa y carga eléctrica (es decir este campo es generado por el agujero negro). Este agujero negro es proveniente de una acción que se obtiene de la compactificación de Teoría de Cuerdas, y es una propuesta válida para longitudes menores que la longitud de Planck [5]. Se observa el acoplamiento del campo dilatónico y el campo electromagnético.

La acción de la cual proviene este agujero negro es [5]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [-R + 2(\nabla\phi)^2 + e^{-2a\phi} F^2]. \quad (2.1)$$

Donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor electromagnético. Definido como $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, siendo el cuadripotencial $A_\mu = (\Phi, \vec{A})$ donde Φ es el potencial eléctrico y \vec{A} es el potencial magnético. El tensor de energía-momento es $T_{\mu\nu} = \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\gamma\delta}F^{\gamma\delta} - F_\mu^\gamma F_\gamma^\nu$. Y $F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, la constante de acoplamiento a gobierna la interacción entre el campo dilatónico y el campo de Maxwell. ϕ es el campo dilatónico (campo escalar). Este último campo surge de la compactificación de las dimensiones extras y se considera como otro grado de libertad del agujero negro. El tensor electromagnético sólo tiene componente radial, esto asegura que el campo es puramente eléctrico cuando es medido por un observador estacionario. Es decir, la única componente del tensor es

$$F^{tr} = \frac{Q}{r^2}. \quad (2.2)$$

En el caso de que $\phi = 0$ se recupera la acción de la cual proviene el agujero negro de Reissner-Nordström. El elemento de línea para la acción (2.1) está dado por

$$ds^2 = -A^2(r)dt^2 + A^{-2}(r)dr^2 + R^2(r)d\Omega^2, \quad (2.3)$$

donde

$$A^2(r) = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{1-a^2}{1+a^2}}, \quad (2.4)$$

$$R^2(r) = r^2 \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{2a^2}{1+a^2}}. \quad (2.5)$$

El campo escalar está en función de los parámetros que caracterizan al agujero negro y está dado por

$$e^{-2a\phi} = \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{2a}{1+a^2}}. \quad (2.6)$$

Este campo escalar puede ser interpretado como un potencial asociado a una fuerza de atracción.

Las coordenadas para este elemento de línea son

$$x^\mu = (t, r, \theta, \varphi). \quad (2.7)$$

Donde t es el tiempo y r, θ, φ corresponden a las coordenadas esféricas usuales.

Los radios de los horizontes de eventos r_+ y r_- están relacionados con la carga Q , masa M del agujero negro y de la constante de acoplamiento como sigue

$$2M = r_+ + \frac{1 - a^2}{1 + a^2} r_-, \quad (2.8)$$

$$Q^2 = \frac{r_- r_+}{1 + a^2}. \quad (2.9)$$

Explícitamente

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2(1 - a^2)}, \quad (2.10)$$

$$r_- = \frac{1 + a^2}{1 - a^2} \left(M - \sqrt{M^2 - Q^2(1 - a^2)} \right). \quad (2.11)$$

Es posible notar que si $a = 1$, la ecuación (2.11) diverge. Para estudiar este caso se consideran

$$\lim_{a \rightarrow 1} r_+ = 2M, \quad (2.12)$$

$$\lim_{a \rightarrow 1} r_- = \frac{Q^2}{M}. \quad (2.13)$$

El elemento de línea (2.3) tiene una singularidad real en $r = 0$. Algunos autores establecen que r_+ es un horizonte no real, es decir, existe bajo ciertas coordenadas y que r_- envuelve a la singularidad por lo que en algunos casos se trabaja como si el elemento de línea (2.3) representara una singularidad desnuda¹.

La acción (2.1) es general. Sin embargo, por cada valor que la constante de acoplamiento tome se tienen acciones particulares las cuales pueden obtenerse de distintas teorías de dimensiones extras. Por lo tanto, para cada valor de la constante, se tiene una interpretación distinta.

- Caso $a = \sqrt{3}$:

Corresponde al modelo efectivo 4-dimensional reducido de la teoría de Kaluza-Klein, en la cual se unifica gravedad y electromagnetismo en 5 dimensiones.

¹Una singularidad desnuda es aquella que no tiene horizonte de eventos.

- Caso $a = \sqrt{\frac{p}{p+2}}$; $p = 0, 1, 2, \dots$:
Se obtiene de la compactificación de un toro T^p de la teoría (4+p)-dimensional de Einstein-Maxwell.
- Caso $a = 1$:
Corresponde a la solución del agujero negro Gibbons-Maeda (Acción de bajas energías de Teoría de Cuerdas).
- Caso $a = 0$:
Corresponde a la teoría escalar de Einstein-Maxwell-Dilatón, también proveniente de la Teoría de Cuerdas.

Capítulo 3

Potenciales efectivos de Agujero Negro Dilatónico.

Si se considera un agujero negro y una partícula de prueba que se acerca a él, se tiene un problema de dos cuerpos. Por lo cual, es interesante estudiar los potenciales efectivos a los que la partícula está sujeta y tratar de determinar las posibles trayectorias que describa.

3.1. Potencial efectivo para geodésicas nulas.

Para obtener los potenciales efectivos se hará uso de la ecuación geodésica (1.8) para geodésicas nulas. Se tomará en cuenta el elemento de línea del agujero negro dilatónico (2.3).

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (3.1)$$

Y considerando el caso coplanar $\theta = \frac{\pi}{2}$ se obtienen las siguientes geodésicas:¹

Para t

$$\ddot{t} + \left[-\frac{-r_+ r + 2r_+ r_- - r_+ a^2 r - r_- r + r_- a^2 r}{r(-r + r_+)(1 + a^2)(-r + r_-)} \right] \dot{t} \dot{r} = 0, \quad (3.2)$$

Para φ

$$\ddot{\varphi} + 2 \left[\frac{-r + r_- - a^2 r}{r(1 + a^2)(-r + r_-)} \right] \dot{r} \dot{\varphi} = 0. \quad (3.3)$$

¹Los $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$ son obtenidos por medio del software GRTensor.

Se necesita conocer $\dot{\varphi}$ y \dot{t} . Pero se sabe que, integrando la expresión (3.3):

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{g_{\varphi\varphi}}. \quad (3.4)$$

Donde L es una constante de integración asociada con el momento angular total de la partícula. Entonces,

$$\dot{\varphi} = r^{-2} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\left(\frac{-2a^2}{1+a^2}\right)} L. \quad (3.5)$$

Por otro lado, se tiene

$$\dot{t} = \frac{E}{g_{tt}}. \quad (3.6)$$

Donde E es una constante de integración que puede asociarse con la energía total de la partícula en el infinito siempre y cuando el potencial efectivo al que esté sujeta la partícula sea asintóticamente plano. Entonces,

$$\dot{t} = E \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{-\frac{1-a^2}{1+a^2}}. \quad (3.7)$$

De la condición de geodésica nula (1.9) y de las expresiones (3.5) y (3.7) se tiene

$$-E^2 \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{-\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)} + \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{-\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)} \dot{r}^2 + L^2 r^{-2} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{-2a^2}{1+a^2}} = 0. \quad (3.8)$$

Al llevarla a la forma $\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{eff} = 0$ se obtiene que el potencial efectivo para geodésicas nulas es

$$V_{eff} = -\frac{1}{2}E^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{1-3a^2}{1+a^2}} \left(1 - \frac{r_+}{r}\right). \quad (3.9)$$

Ahora, se hará el cambio de variable

$$u = \frac{r}{M} \Rightarrow r = Mu, \quad (3.10)$$

Este cambio se hace para trabajar con una variable que sea adimensional. Puesto que se consideran unidades naturales, las unidades de longitud y masa son las mismas. Entonces

$$V_{eff} = -\frac{1}{2}E^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{M^2 u^2} \left(1 - \frac{r_+}{Mu}\right) \left(1 - \frac{r_-}{Mu}\right)^{\frac{1-3a^2}{1+a^2}}. \quad (3.11)$$

Ahora, se obtendrán las condiciones para que el potencial efectivo sea asintóticamente plano. Esto es,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_{eff} = 0. \quad (3.12)$$

Entonces se tiene que la condición para que el potencial sea asintóticamente plano es

$$E = 0. \quad (3.13)$$

Se observa que, bajo esta condición, las raíces del potencial efectivo son $u_+ = \frac{r_+}{M}$ y $u_- = \frac{r_-}{M}$. Por otro lado, también se quiere conocer si el potencial efectivo tiene máximos y mínimos. Para esto es necesario resolver

$$\frac{dV_{eff}}{du} = 0. \quad (3.14)$$

Se tiene que los puntos críticos donde se encuentran los máximos o mínimos son,

$$u_1 = -\frac{-3Mr_- + a^2Mr_- - 3Mr_+ - 3a^2Mr_+ + \sqrt{M^2(-32(1+a^2)r_-r_+ + ((-3+a^2)r_- - 3(1+a^2)r_+)^2)}}{4(1+a^2)M^2},$$

,

$$(3.15)$$

$$u_2 = \frac{3Mr_- - a^2Mr_- + 3Mr_+ + 3a^2Mr_+ + \sqrt{M^2(-32(1+a^2)r_-r_+ + ((-3+a^2)r_- - 3(1+a^2)r_+)^2)}}{4(1+a^2)M^2}$$

.

$$(3.16)$$

Esto significa que en estos puntos, la partícula describe órbitas circulares. Si la partícula se encuentra en u_2 se tienen trayectorias circulares inestables. Por otro lado, si se encuentra en u_1 las trayectorias son estables.

Dado que se tienen dos puntos críticos se tendrá un pozo de potencial, por lo que se espera tener órbitas cerradas. Se observa que las trayectorias cerradas pueden estar entre r_+ y r_- , más adelante se explicará este caso.

3.1.1. Geodésicas nulas radiales.

Se consideran geodésicas nulas radiales a las trayectorias que describen las partículas sin masa cuando no tienen momento angular ($L = 0$)². Bajo esta consideración, el potencial efectivo se reduce a

²Es necesario recordar que L es una constante de integración asociada al momento angular de la partícula de prueba.

$$V_{eff} = -\frac{1}{2}E^2. \quad (3.17)$$

De la expresión $\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{eff} = 0$, se tiene que

$$\frac{dr}{d\tau} = \dot{r} = \pm E. \quad (3.18)$$

De lo anterior se tiene

$$\frac{d\tau}{dr} = \pm \frac{1}{E}. \quad (3.19)$$

Al integrar se llega a

$$\tau(r) = \pm \frac{1}{E}r + C_{\pm}. \quad (3.20)$$

Donde C_{\pm} es una constante de integración.

Si $r \rightarrow r_+$ se tiene

$$\tau(r) = \pm \frac{1}{E}r_+ + C_{\pm}. \quad (3.21)$$

Esto significa que el tiempo propio τ que tarda la partícula en llegar al horizonte de eventos externo es finito.

Si $r \rightarrow r_-$ se tiene

$$\tau(r) = \pm \frac{1}{E}r_- + C_{\pm}. \quad (3.22)$$

Es decir, el tiempo propio que tarda la partícula en llegar al horizonte de eventos interno también es finito. De lo anterior es posible observar que, si se trabaja en el tiempo propio de la partícula, esta puede encontrarse entre los horizontes de eventos.

Por otro lado,

$$\dot{t} = \frac{dt}{d\tau} = \frac{dt}{dr} \frac{dr}{d\tau} = E \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{-\frac{1-a^2}{1+a^2}}. \quad (3.23)$$

Pero se sabe que

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm E. \quad (3.24)$$

Entonces

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{-\frac{1-a^2}{1+a^2}}. \quad (3.25)$$

Aplicando separación de variables se tiene

$$dt = \pm \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{-\frac{1-a^2}{1+a^2}} dr. \quad (3.26)$$

Si se integra la expresión anterior es posible conocer cómo t depende de r . Sin embargo obtener esta integral es complicado y sólo se estudiarán algunos casos particulares.

Por ejemplo, cuando $a = 0$ se tiene

$$t(r) = r + \frac{r_-^2 \ln(r - r_-)}{r_- - r_+} - \frac{r_+^2 \ln(r - r_+)}{r_- - r_+}. \quad (3.27)$$

Si $r \rightarrow r_+$ se tiene

$$t(r) \rightarrow \infty. \quad (3.28)$$

Ahora, si $a = 1$:

$$t(r) = r + r_+ \ln(r - r_+). \quad (3.29)$$

Si $r \rightarrow r_+$ se tiene

$$t(r) \rightarrow \infty. \quad (3.30)$$

Esto significa que para un observador estático situado en el infinito la partícula de prueba tardaría un tiempo infinito en alcanzar el horizonte de eventos externo. Se espera que para el análisis con otros valores arbitrarios de a ($\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{3}$) tanto $\tau(r)$ como $t(r)$ tengan el mismo comportamiento.

3.1.2. Geodésicas con momento angular.

En esta sección se estudiarán las geodésicas nulas cuando se tiene momento angular ($L \neq 0$).

Espacio-tiempo con $E=0$.

La figura (3.1) muestra el potencial efectivo (3.11) para el espacio-tiempo (2.3) cuando la partícula tiene energía $E = 0$. Por otro lado, los valores relacionados con el agujero negro como la carga eléctrica y la masa se han dejado fijos, esto se ha hecho con la finalidad de estudiar cómo los distintos valores de a afectan al potencial efectivo.

Los puntos en negro representan los horizontes de eventos interno y externo respectiva-

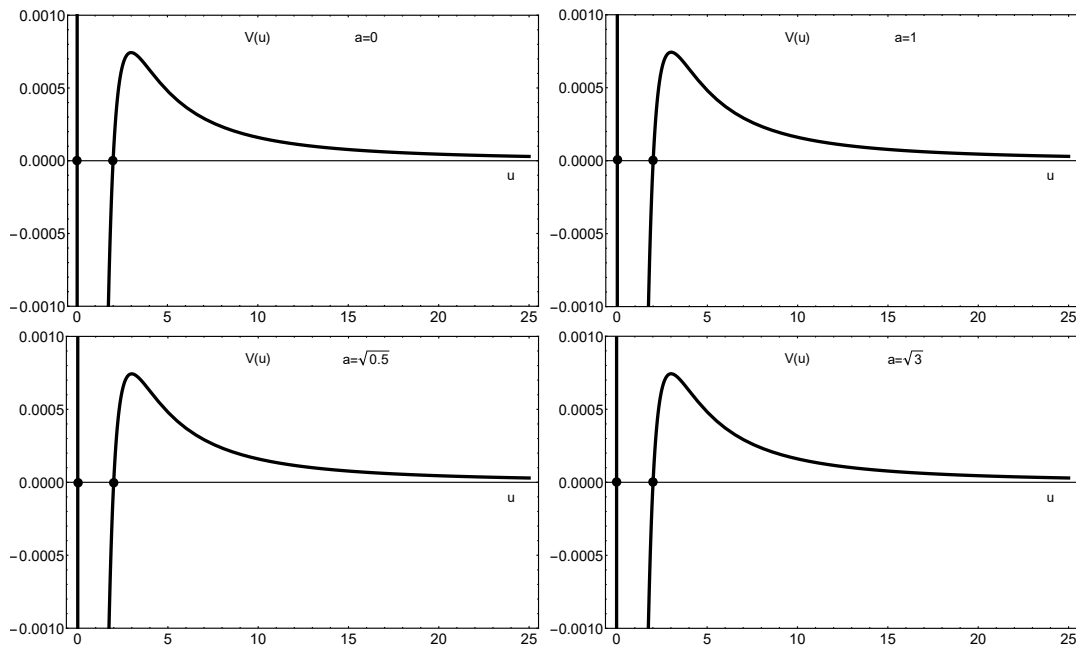


Figura 3.1: Potencial efectivo para geodésicas nulas. Con valores de $Q = -1$, $M = 10$, $E = 0$, $u_+ \approx 2$, $u_- \approx 0$ y con momento angular $L = 2$.

mente. Se observa que el potencial efectivo tiene un comportamiento similar en cada gráfica para los distintos valores de a . También se observa que el potencial presenta un máximo y un mínimo, esto concuerda con el análisis anterior.

Por otro lado, se observa que el mínimo o el pozo de potencial se encuentra entre los horizontes de eventos.

De acuerdo a los potenciales efectivos, existen dos posibilidades para la partícula. Puede ser desviada de su trayectoria original o puede quedar orbitando entre los horizontes de eventos del agujero negro. Sin embargo, no puede alcanzar la singularidad. Las órbitas de

la partícula sólo pueden existir entre r_+ y r_- .

Espacio-tiempo con energía distinta de cero.

En esta sección, en la figura (3.2) se muestran las gráficas obtenidas para los potenciales efectivos donde $E \neq 0$. Como se desea analizar la contribución de la constante de acoplamiento a al potencial efectivo, se han dejado fijos los valores de la carga y masa del agujero negro. Esto significa que se estudia un mismo agujero negro donde el acoplamiento entre el campo eléctrico y el campo escalar es distinto.

Aquí, los puntos negros también representan a los horizontes de eventos. Se observa que

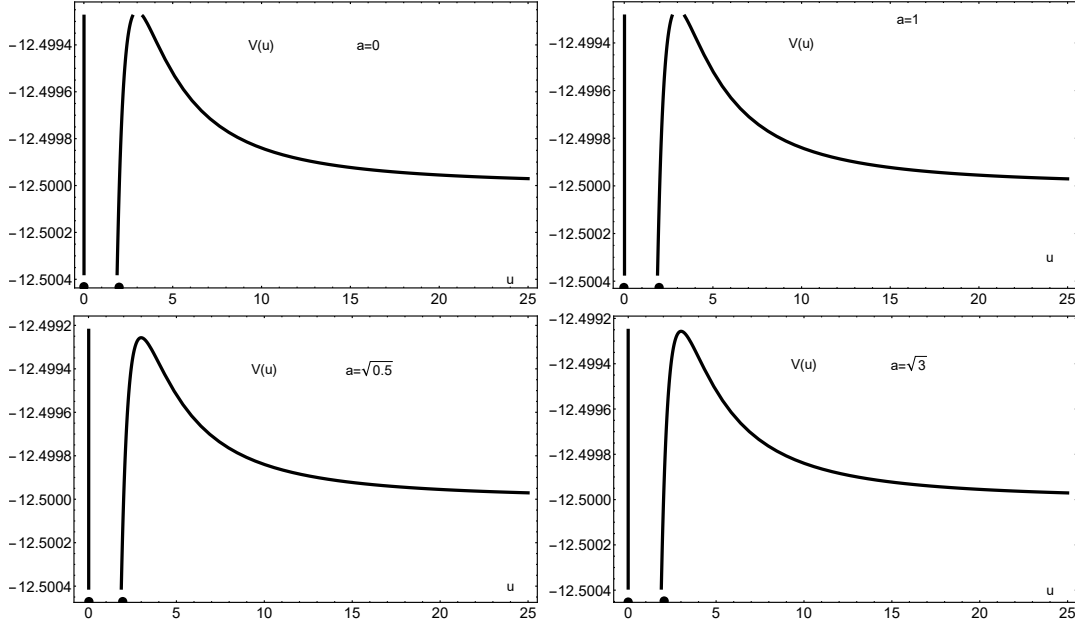


Figura 3.2: Potencial efectivo para geodésicas nulas. Con valores de $Q = -1$, $M = 10$, $E = 5$, $u_+ \approx 2$, $u_- \approx 0$, $a = 0, 1, \sqrt{0.5}, \sqrt{3}$ y con momento angular $L = 2$.

las gráficas de los potenciales efectivos cuando la energía de la partícula es distinta de cero ($E \neq 0$) tiene el mismo comportamiento que los potenciales cuando $E = 0$, pero con la diferencia de que las trayectorias pueden salir de r_+ porque $E \neq 0$ También presenta un máximo y un mínimo, como se había predicho anteriormente.

Se tienen dos posibilidades para la partícula de prueba. Puede ser desviada de su trayectoria original o puede quedar orbitando el agujero negro. Sin embargo, igual que en la sección

anterior, la partícula no puede alcanzar la singularidad. Se puede notar que el comportamiento general del potencial efectivo no se ve realmente afectado por los valores que tome la constante de acoplamiento.

3.2. Potencial efectivo para geodésicas espacialoides.

Para obtener el potencial efectivo de geodésicas espacialoides se usará (1.8).

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = -\frac{\epsilon}{m} F_\sigma^\nu \frac{dx^\sigma}{d\tau}. \quad (3.31)$$

Al igual que en el caso de geodésicas nulas, se aplicará al elemento de línea del agujero negro dilatónico. Considerando el caso coplanar $\theta = \frac{\pi}{2}$ se obtienen las siguientes geodésicas:

Para t

$$\ddot{t} + \left[-\frac{-r_+ r + 2r_+ r_- - r_+ a^2 r - r_- r + r_- a^2 r}{r(-r + r_+)(1 + a^2)(-r + r_-)} \right] \dot{t} \dot{r} = \frac{\epsilon}{m} \dot{r} \frac{Q}{r(-r + r_+) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right) \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)}. \quad (3.32)$$

Para φ

$$\ddot{\varphi} + 2 \left[\frac{-r + r_- - a^2 r}{r(1 + a^2)(-r + r_-)} \right] \dot{r} \dot{\varphi} = 0. \quad (3.33)$$

Es necesario conocer \dot{t} y $\dot{\varphi}$. Sin embargo se sabe que, integrando (3.33):

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{g_{\varphi\varphi}}. \quad (3.34)$$

Donde L es una constante de integración asociada con el momento angular total de la partícula. Entonces,

$$\dot{\varphi} = r^{-2} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right) \left(\frac{-2a^2}{1+a^2}\right) L. \quad (3.35)$$

Por otro lado, de (3.32) se tiene que:

$$\dot{t} = \left(\frac{\epsilon}{m} \frac{Q}{r} + E \right) \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{-\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)}. \quad (3.36)$$

Donde E es una constante de integración que puede ser asociada con la energía de la partícula en el infinito sólo si el potencial efectivo al que está sujeta dicha partícula es

asintóticamente plano.

De la condición de geodésica espacialoide (1.11) y de las ecuaciones (3.36) y (3.35) se tiene

$$-\left(\frac{\epsilon}{m} \frac{Q}{r} + E\right)^2 \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{-\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)} + \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{-\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{-2a^2}{1+a^2}} = -1. \quad (3.37)$$

Al llevar la expresión anterior a la forma $\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{eff} = 0$ se obtiene que el potencial efectivo para geodésicas espacialoides es

$$V_{eff} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{m} \frac{Q}{r} + E\right)^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_+}{r}\right) \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{1-a^2}{1+a^2}} \left[\frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{-2a^2}{1+a^2}} + 1 \right]. \quad (3.38)$$

Con el cambio de variable

$$u = \frac{r}{M}, \quad (3.39)$$

el potencial efectivo puede expresarse como

$$V_{eff} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{m} \frac{Q}{Mu} + E\right)^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_+}{Mu}\right) \left(1 - \frac{r_-}{Mu}\right)^{\frac{1-a^2}{1+a^2}} \left[\frac{L^2}{M^2 u^2} \left(1 - \frac{r_-}{Mu}\right)^{\frac{-2a^2}{1+a^2}} + 1 \right]. \quad (3.40)$$

Ahora se hallarán las condiciones para que el potencial efectivo sea asintóticamente plano, es decir,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_{eff} = 0. \quad (3.41)$$

Y la condición para que se cumpla lo anterior es que

$$E = \pm 1. \quad (3.42)$$

Por otro lado, también se desea conocer si el potencial efectivo tiene máximos y mínimos.

Para esto es necesario resolver

$$\frac{dV_{eff}}{du} = 0. \quad (3.43)$$

Sin embargo, resolver la ecuación anterior de forma analítica es algo complicado. Por esto, se presenta la siguiente tabla en la que se estudia el potencial efectivo bajo ciertas condiciones que serán explicadas más adelante.

En la tabla 3.1 se presenta el número de puntos críticos que tienen el potencial efectivo para

Constante de acoplamiento	Caso 1	Caso 2	Caso 3
0	X	-	XX
$\sqrt{\frac{1}{2}}$	-	-	X
1	-	-	XX
$\sqrt{3}$	-	-	XX

Tabla 3.1: El número de X representa la cantidad de puntos críticos que tienen el potencial efectivo para geodésicas espacialoides.

geodésicas espacialoides bajo diferentes condiciones y con distintos valores de la constante de acoplamiento.

- **Caso 1.**

Se consideran los mismos valores para la masa y carga del agujero negro, momento angular y energía de la partícula usados en el potencial efectivo para geodésicas nulas. Mientras que la carga y masa de la partícula de prueba se tomaron iguales ($m = \epsilon$). Bajo estas condiciones, y si la constante de acoplamiento toma el valor $a = 0$, se tiene un punto crítico. Si $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$ no se tienen puntos críticos. Por otro lado, cuando $a = 1$ analíticamente se obtiene que existe un punto crítico pero este se encuentra dentro del horizonte de eventos interno por lo tanto no se toma en cuenta y se considera que el potencial efectivo no presenta puntos críticos. Para $a = \sqrt{3}$ no se tienen puntos críticos.

- **Caso 2.**

Los valores asignados a la masa y carga del agujero negro, momento angular, energía, masa y carga de la partícula son distintos a los usados en el Caso 1. Sin embargo, se tienen las siguientes restricciones: la carga y masa de la partícula son iguales, la

energía de la partícula toma los valores $E = \pm 1$ y el momento angular de la partícula toma el valor $L = -E$. Bajo estas condiciones, el potencial efectivo tiene un único punto crítico cuando $a = 0$ y $a = 1$ pero estos puntos están dentro del horizonte de eventos interno por eso no se consideran. Mientras que si la constante de acoplamiento toma los valores $\sqrt{\frac{1}{2}}$ y $\sqrt{3}$ no se tienen puntos críticos. Esto significaría que la partícula de prueba cae al agujero negro.

■ **Caso 3.**

Se considera el caso extremo en que los horizontes de eventos coinciden.

$$r_- = r_+. \quad (3.44)$$

Se usan las mismas restricciones que en el caso 2, es decir, que la carga y masa de la partícula son iguales, la energía toma los valores $E = \pm 1$ y el momento angular toma el valor $L = -E$.

Constante de acoplamiento	Condición caso extremo
0	$M = Q $
$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}M = Q $
1	$\sqrt{2}M = Q $
$\sqrt{3}$	$2M = Q $

Tabla 3.2: Condiciones para tener el caso extremo en el potencial efectivo para geodésicas espacialoides.

Para $a = 0$ se obtiene que el potencial efectivo tiene dos puntos críticos pero uno de ellos coincide con el horizonte de eventos. Si $a = 1$ se tiene un único punto crítico. Cuando $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$ y $a = \sqrt{3}$ se tienen dos puntos críticos. Pero como los valores de la energía son $E = \pm 1$ esta se encuentra por debajo o por encima del valor que toma el potencial efectivo en los puntos críticos por lo que la partícula puede ser dispersada o caer al agujero negro sin la posibilidad de quedar orbitando alrededor.

Cuando se estudió el potencial efectivo para geodésicas nulas se obtuvo que, en los dos casos, el potencial efectivo presenta siempre dos puntos críticos sin importar el valor de la constante de acoplamiento. Sin embargo para el primer caso del potencial efectivo de geodésicas espacialoides, en el cual se usaron los mismos valores que en el caso de geodésicas nulas, la existencia de puntos críticos está condicionado por el valor que la constante de acoplamiento tenga. Por lo que en el siguiente capítulo se estudiarán algunas curvas geodésicas.

Capítulo 4

Geodésicas.

4.1. Geodésicas nulas.

Una vez estudiados los potenciales efectivos, se quieren obtener las trayectorias que siguen las geodésicas nulas. Para dicho fin se resolverá

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{eff} = 0. \quad (4.1)$$

Como se quieren obtener las trayectorias angulares en función del radio, se usa el siguiente cambio de variable

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = M \frac{du}{d\varphi} \dot{\varphi}. \quad (4.2)$$

Si se sustituye en (4.1), se tiene

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 \left(\frac{L}{Mu^2} \right)^2 \left(1 - \frac{r_-}{Mu} \right)^{-\frac{4a^2}{1+a^2}} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_+}{Mu} \right) \left(1 - \frac{r_-}{Mu} \right)^{\frac{1-3a^2}{1+a^2}} \left(\frac{L^2}{M^2 u^2} \right) - \frac{1}{2} E^2 = 0. \quad (4.3)$$

Aplicando separación de variables se obtiene

$$d\varphi = du \left[- \left(1 - \frac{1}{u} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{Q}{M} \right)^2 (1 - a^2)} \right) \right) \left(1 - \left(\frac{1+a^2}{1-a^2} \right) \frac{1}{u} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{Q}{M} \right)^2 (1 - a^2)} \right) \right) \right] u^2 + \left(\frac{EM}{L} u^2 \right)^2 \left(1 - \frac{1}{u} \left(\frac{1+a^2}{1-a^2} \right) \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{Q^2}{M^2} \right) (1 - a^2)} \right) \right)^{\frac{4a^2}{1+a^2}}]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.4)$$

Para obtener las trayectorias es necesario integrar la expresión anterior. Como no es sencillo hacer dicha integral analíticamente, esta se hizo de forma numérica usando los mismos valores que se emplearon para obtener los potenciales efectivos.

A continuación se presentan las geodésicas obtenidas para el espacio-tiempo cuando la geodésica nula tiene momento angular.

4.1.1. Espacio-tiempo con $E=0$.

En esta sección se analizan las geodésicas nulas cuando $E = 0$. Los valores usados para las gráficas mostradas en la figura (4.1) son los mismos que se usaron para los potenciales efectivos mostrados en la figura (3.1). Es decir, se quiere estudiar el comportamiento de las partículas de prueba alrededor de un mismo agujero negro con distintos valores de la constante de acoplamiento.

En las gráficas de la figura (4.1) se observa que las trayectorias son cíclicas sin embargo estas no se cierran. El círculo interior corresponde a r_- y el círculo exterior corresponde a r_+ . También, estas trayectorias sólo existen dentro de los horizontes de eventos. En la gráfica con $a = \sqrt{3}$ se tienen trayectorias más cerradas, esto quiere decir que dependiendo de los valores de la constante de acoplamiento existe una presencia mayor de atracción gravitacional.

4.1.2. Espacio-tiempo con energía distinta de cero.

Se presentan las trayectorias considerando un espacio-tiempo cuando la energía de la partícula es $E \neq 0$. Al igual que en la sección anterior, las trayectorias son cíclicas pero no se cierran. En este caso, a diferencia del anterior, las trayectorias si pueden salir del horizonte de eventos como se analizó en los potenciales efectivos.

Los valores para los parámetros del agujero negro son los mismos que se usaron para obtener las gráficas de los potenciales efectivos mostrados en la figura (3.2). El círculo interior corresponde a r_- y el círculo exterior corresponde a r_+ . Una vez más, el único parámetro que se varía es la constante de acoplamiento a .

A medida que el valor de a cambia, se tienen trayectorias que están más separadas unas de otras. También se observa que las trayectorias están rotadas. Observando con ello que la constante de acoplamiento interfiere en la atracción gravitacional.

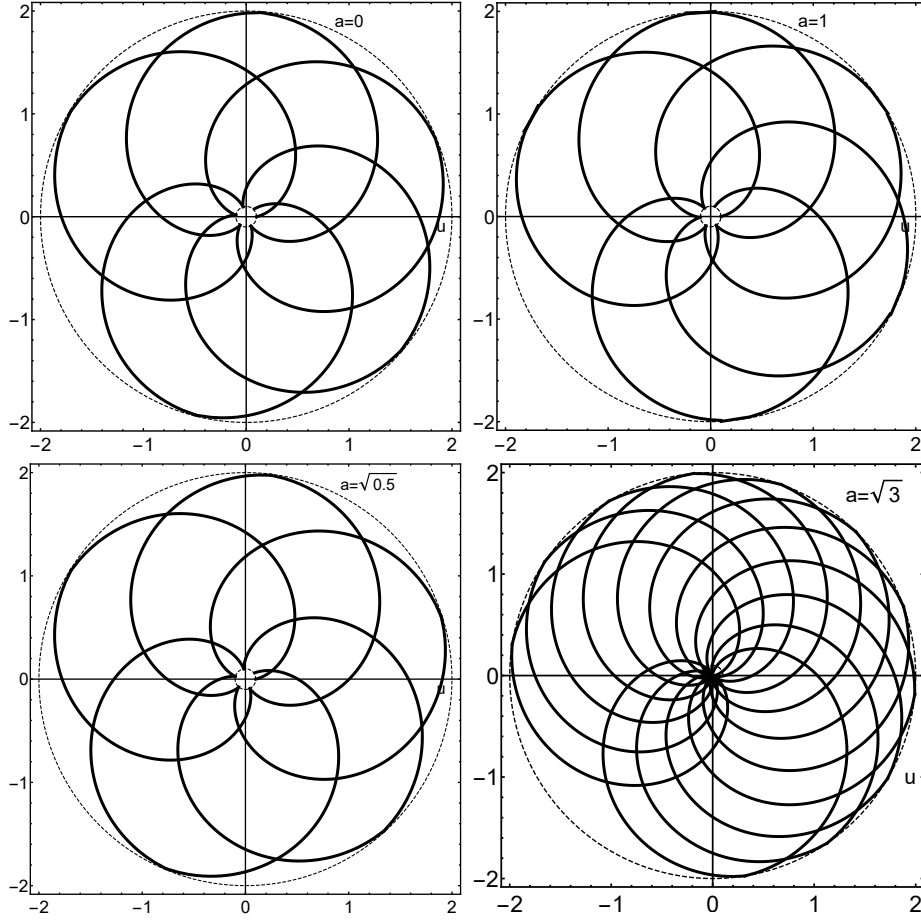


Figura 4.1: Geodésicas nulas en coordenadas polares. Con valores de $Q = -1$, $M = 10$, $E = 0$, $u_+ \approx 2$, $u_- \approx 0$, $a = 0, 1, \sqrt{0.5}, \sqrt{3}$ y con momento angular $L = 2$.

4.2. Geodésicas espacialoides.

En esta sección se presentan las trayectorias descritas por una partícula de prueba que tiene masa y carga alrededor de un agujero negro dilatónico. De manera análoga a las geodésicas nulas, se necesita resolver la ecuación

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{eff} = 0. \quad (4.5)$$

Al igual que en la sección anterior se usará el cambio de variable

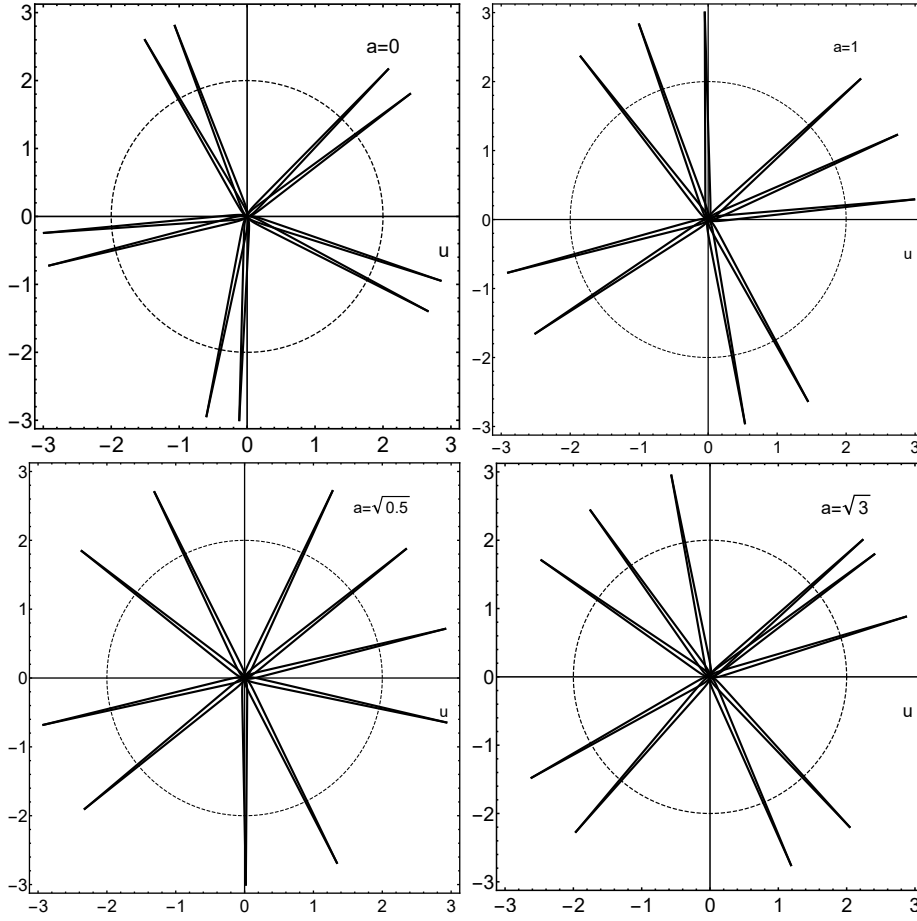


Figura 4.2: Geodésicas nulas en coordenadas polares. Con valores de $Q = -1$, $M = 10$, $E = 5$, $u_+ \approx 2$, $u_- \approx 0$, $a = 0, 1, \sqrt{0.5}, \sqrt{3}$ y con momento angular $L = 2$.

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = M \frac{du}{d\varphi} \dot{\varphi}. \quad (4.6)$$

Pues se quieren obtener trayectorias angulares en función del radio. Haciendo el cambio de variable en (4.5) se llega a

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 \left(\frac{L}{Mu^2} \right)^2 \left(1 - \frac{r_-}{Mu} \right)^{-\frac{4a^2}{1+a^2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{m} \frac{Q}{Mu} + E \right)^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_+}{Mu} \right) \left(1 - \frac{r_-}{Mu} \right)^{\frac{1-a^2}{1+a^2}} \left[\frac{L^2}{M^2 u^2} \left(1 - \frac{r_-}{Mu} \right)^{-\frac{2a^2}{1+a^2}} + 1 \right] = 0.$$

(4.7)

Aplicando separación de variables y sustituyendo los horizontes de eventos, es decir, usando (2.10) y (2.11) se tiene

$$\begin{aligned}
d\varphi = du & \left[\left(\frac{Mu^2}{L} \right)^2 \left(\frac{\epsilon}{m} \frac{Q}{Mu} + E \right)^2 \left(1 - \frac{1}{u} \left(\frac{1+a^2}{1-a^2} \right) \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{Q}{M} \right)^2 (1-a^2)} \right) \right) \right]^{\frac{4a^2}{1+a^2}} - \\
& \left(\frac{Mu^2}{L} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{u} \left(\frac{1+a^2}{1-a^2} \right) \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{Q}{M} \right)^2 (1-a^2)} \right) \right) \right]^{\frac{1+3a^2}{1+a^2}} \left(1 - \frac{1}{u} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{Q}{M} \right)^2 (1-a^2)} \right) \right) \\
& \left[\left(\frac{L}{Mu} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{u} \left(\frac{1+a^2}{1-a^2} \right) \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{Q}{M} \right)^2 (1-a^2)} \right) \right) \right]^{\frac{-2a^2}{1+a^2}} + 1 \Big]^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Para el caso especial en que $a = 1$, se tiene

$$d\varphi = du \left[\left(\frac{Mu^2}{L} \right)^2 \left(\frac{\epsilon}{m} \frac{Q}{Mu} + E \right)^2 \left(1 - \frac{Q^2}{M^2 u} \right)^2 - \left(1 - \frac{2}{u} \right) \left(\frac{Mu^2}{L} \right)^2 \left(1 - \frac{Q^2}{M^2 u} \right)^2 \left[\left(\frac{L}{Mu} \right)^2 \left(1 - \frac{Q^2}{M^2 u} \right)^{-1} + 1 \right] \right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.9}$$

Para obtener las trayectorias se integran de forma numérica las expresiones anteriores usando las condiciones presentadas en la tabla 3.1.

De la figura 4.3 (a) se observa que las trayectorias de la partícula alrededor del agujero

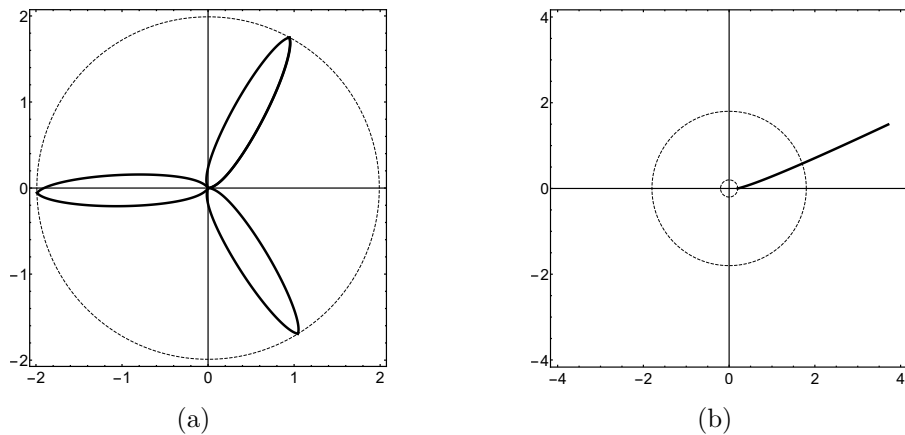


Figura 4.3: Geodésicas espacialoides en coordenadas polares correspondientes al (a) caso 1 y (b) caso 2 de la sección del potencial efectivo de geodésicas espacialoides.

negro dilatónico son cíclicas. Esto se debe a que el potencial efectivo en el caso 1 para

$a = 0$ presentaba un punto crítico. Estas trayectorias están confinadas entre los horizontes de eventos. Para el caso 2, representado en la figura 4.3 (b), se tiene que la partícula sólo cae hasta alcanzar el horizonte de eventos interno. Lo anterior se tiene porque en este caso no existen puntos crítico.

Conclusiones.

En este trabajo se han estudiado los potenciales efectivos y las trayectorias que describe una partícula de prueba que se mueve alrededor de un Agujero Negro Dilatónico para geodésicas nulas y espacialoides. En particular se analizó cómo la constante de acoplamiento a entre el campo electromagnético y el campo dilatónico modifican tanto a los potenciales efectivos a los que está sujeta la partícula como a las trayectorias descritas por esta. Los valores asignados a la constante de acoplamiento son los mencionados en la sección 2.1.

Los potenciales efectivos fueron calculados con los mismos valores de masa y carga del agujero negro, momento angular de la partícula y la misma energía (dependiendo si $E = 0$ ó $E \neq 0$). Se asignaron distintos valores de la constante de acoplamiento para determinar cómo cambia la forma del potencial efectivo. Se puede notar que el potencial efectivo si cambia al variar a pero esta variación es más notable en las gráficas de las geodésicas pues es posible observar que unas se cierran más que otras.

No existe una diferencia notable entre el comportamiento de los potenciales efectivos para $E = 0$ a los obtenidos en un espacio-tiempo $E \neq 0$.

De las gráficas del potencial efectivo se tiene que existen dos posibilidades para las geodésicas nulas: que la partícula de prueba sea desviada de su trayectoria original o bien que pueda quedar orbitando el agujero negro pues existe un pozo de potencial. Sin embargo, nunca alcanzará la singularidad.

Por otro lado, las trayectorias descritas por las partículas sin masa son cíclicas. Sin embargo, no se cierran. Cuando estamos en el caso $E = 0$, las geodésicas sólo existen dentro de los horizontes de eventos. Mientras que en el caso $E \neq 0$ las trayectorias pueden salir del horizonte de eventos externo. Se observa que las geodésicas pueden existir dentro de los horizontes de eventos, esto se tiene porque se trabaja en el tiempo propio de la partícula

como se observa en el caso de geodésicas nulas radiales dado que en su tiempo propio la partícula tarda un tiempo finito en alcanzar el horizonte de eventos externo.

Se puede decir que en el caso $a = \sqrt{3}$ (Kaluzza Klein) sería más fácil observar la presencia de dimensiones extras porque las geodésicas son más cercanas entre sí, es decir, la interacción gravitacional es mayor.

Para obtener el potencial efectivo de geodésicas espacialoides se usó un tratamiento análogo al empleado para nulas. En dicha sección se obtuvieron los puntos críticos (en caso de tenerlos) del potencial efectivo considerando tres casos. En el primer caso se estudió el potencial empleando los mismos valores de masa y carga del agujero negro, momento angular y energía de la partícula usado en geodésicas nulas para poder hacer una comparación entre los resultados obtenidos para geodésicas espacialoides y nulas. También se usaron los mismos valores de la constante de acoplamiento. De esto se obtuvo que se tiene sólo un punto crítico cuando $a = 0$, esto significa que la partícula puede quedar orbitando el agujero negro. Mientras que para el resto de los valores asignados a la constante de acoplamiento no se tienen puntos críticos. Esto significa que la partícula caerá al agujero negro. A diferencia con las geodésicas nulas en las que se presentan pozos de potencial sin importar el valor de la constante de acoplamiento.

Para el segundo caso, los valores de carga y masa del agujero negro fueron distintas a los empleados en geodésicas nulas. Las restricciones impuestas fueron que la masa y carga de la partícula fueran iguales $\epsilon = m$, que la energía de la partícula sólo podría tomar los valores $E = \pm 1$ y que el momento angular tomaría el valor $L = -E$. Bajo estas condiciones, el potencial no presenta puntos críticos. Esto quiere decir que la partícula caerá al agujero negro.

Para el caso 3, se consideró el caso extremo donde el horizonte de eventos interno y el externo coincidían. Esto se hizo con el fin de estudiar si, bajo estas condiciones, se puede o no tener información del potencial efectivo y la geodésica después del horizonte de eventos. La condición para tener este caso extremo es distinto dependiendo del valor de la constante de acoplamiento. En este caso la partícula puede ser desviada de su trayectoria o caer al agujero negro. Además, se obtuvo que para el caso extremo se pierde información de la geodésica y del potencial efectivo después del horizonte de eventos, es decir, el horizonte es real.

De lo anterior, se puede decir que la constante de acoplamiento tiene mayor importancia en

el potencial efectivo de geodésicas espacialoides pues presenta distintos comportamientos comparado con el obtenido en geodesicas nulas.

Perspectivas.

Considerar nuevas restricciones con las cuales estudiar las geodésicas espacialoides y su potencial efectivo.

Bibliografía

- [1] Ta-Pei Cheng, *Relativity, Gravitation and Cosmology A Basic Introduction*, Oxford University Press, Second Edition (2010).
- [2] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984).
- [3] P. A. M. Dirac, *General Theory of Relativity*, Princeton University Press (1996).
- [4] N. Bretón, *Geodesic structure of the Born-Infeld Black Hole*, *Class. Quantum Grav.* **19** (2002).
- [5] D. Garfinkle, G. T. Horowitz, and A. Strominger, *Charged black holes in string theory*, *Phys. Rev. D* **43**, No. 10. (1991).
- [6] E. Poisson, *A Relativist's Toolkit The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, Cambridge University Press (2007).
- [7] N. Calvet, M. Alcubierre and T. Ortín, *La Hechicera Relatividad, Campos y Astrofísica*, Universidad de Los Andes (2001).
- [8] Rong-Gen and Y.S. Myung, *Critical behavior for the dilaton black holes*, *Nuclear Physics B* 495, 339-362 (1997).
- [9] S. Fernando, *Null Geodesics of Charged Black Holes in String Theory*, arXiv:1109.0254v3 (2011).
- [10] A. Chamorro and K. S. Virbhadra, *Energy associated with charged dilaton black holes*, arXiv:hep-th/9407187v3 (1996).

- [11] S. Fernando, D. Krug and C. Curry, *Geodesic Structure of Static Charged Black Hole Solutions in 2 + 1 Dimensions*, General Relativity and Gravitation, Vol. 35, No. 7 (2003).