UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

ÁREA ACADEMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

Conceptualizaciones de Profesores de Matemáticas de Bachillerato sobre las Funciones Logaritmo y Exponencial.

Para obtener el grado:

Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica

Elaborado por:

I.A. ANA MARÍA GARCÍA HERRERA

DIRECTORES DE TESIS

Dr. Arturo Criollo Pérez   Dr. Carlos Rondero Guerrero

Mineral de la Reforma, Hidalgo Diciembre 2016

Agradecimientos

Este reto ha sido cumplido, gracias a todos que me ayudaron en alcanzar este objetivo.

A los Doctores, Carlos Rondero Guerrero y Arturo Criollo Pérez que cumplieron cabalmente su aceptación y creyeron en mí en todo momento.

A los Doctores, Aarón Reyes Rodríguez y Raúl Temoltzi Ávila por sus valiosas académicas.

A mi familia y amigos que cada uno de ellos participio para lograr este éxito. Pero a quién debo de agradecer en todo momento es a ese ser supremo llamado Dios el cual intervino en todo momento para continuar, así como armonizar cada detalle para finalizar.

A los que se adelantaron y en este proceso de mí vida, tengo la necesidad de ofrecerte todo mi éxito a nuestra vida como familia.

Resumen

La investigación sobre las conceptualizaciones de los profesores de las funciones logaritmo y exponencial es un tema de interés, del cual se desprenden diferentes factores de estudio que contribuyen a esta, como son su formación, el análisis de los programas de estudio, análisis de libros de texto, entre otras, todas estas mencionadas, están involucradas en el proceso enseñanza-aprendizaje. En este estudio se exponen instrumentos de las conceptualizaciones de profesores de nivel medio superior de las funciones logaritmo y exponencial, al inicio, desarrollo y conclusión de un curso impartido por un experto en el tema, de los cuales los resultados son poco alentadores, sobre todo en la participación de los profesores. Dichas conceptualizaciones dejan una apertura para nuevas investigaciones, con la posibilidad de ampliar elementos que completen el proceso de enseñanza-aprendizaje. Con la relación a las funciones logaritmo y exponencial, se deben tomar en cuenta los diversos elementos descritos para el fortalecimiento de dicha enseñanza-aprendizaje y mejoramiento en el aula.

Palabras claves: conceptualizaciones, formación de profesores, libros de texto, transposición de saberes, funciones logaritmo y exponencial, enseñanza-aprendizaje.

Summary

The research about conceptualizations of teachers is a subject of interest of the knowledge logarithm and exponential functions, which different study factors emerge such as formation, analysis of curriculum, analysis of textbooks, among other all, these mentioned before are involved in the teaching-learning process. In this study, instruments, conceptualizations of teachers in higher average level of logarithmic and exponential functions are exposed, from the beginning, during de development and at the end, which are taught by an expert on the subject. The results are not encouraging, especially talking about the participation of the teachers. Such conceptualizations leave an opening for further investigation, with the possibility of extending elements to complete the process of teaching and learning.

In relation to the logarithm and exponential functions, they should contemplate various elements, described for the strengthening of such teaching and learning process in the classroom.

Key Words: conceptualizations, teacher formation, textbooks, transposition of knowledge, logarithmic and exponential functions, teaching and learning.

Índice

Introducción

En nuestro país se propone una transformación en la educación basada en un modelo constructivista. Existen diferentes métodos de enseñanza-aprendizaje, de los cuales algunos de los que se emplean se puedan considerar bajo un procedimiento empírico, es por esto la importancia que debe vincularse entre la preparación del profesor y el aprendizaje del estudiante. Este trabajo tiene la visón de mostrar las conceptualizaciones de los profesores de nivel medio superior de las funciones logaritmo y exponencial.

La presente investigación se encuentra estructurada de la siguiente manera, en el capítulo I se plantea la problemática y la justificación sobre las conceptualizaciones de los profesores en dichas funciones, además de que se describe el objetivo a alcanzar para llevar a cabo dicho análisis.

En el capítulo II se hace un referente bibliográfico de los trabajos previos a ésta investigación, estos trabajos aportan ideales centrales sobre la formación de profesores, análisis sobre las funciones logaritmo y exponencial y transposición de saberes que ayudan en el desarrollo de esta.

En el capítulo III se plantean teorías didácticas (TAD y EOS) que tienen como eje central el fortalecimiento de las conceptualizaciones de las funciones logaritmo y exponencial, que sirven de apoyo para la metodología, en donde se enfatizan las semejanzas para el logro del objetivo, las cuales favorecen al reforzamiento de dichas conceptualizaciones.

En el capítulo IV se describen los elementos asociados y los instrumentos que se utilizan en la obtención de recolecta de datos, así como una breve descripción de los participantes, su contexto y el ponente que impartirá un curso-taller sobre las funciones logaritmo y exponencial.

Se realiza en el capítulo V un análisis de síntesis de programas de estudio entre diferentes subsistemas de bachillerato, en los cuales se contemplan si estos estudian a las funciones logaritmo y exponencial. Se realiza también un análisis didáctico a libros de textos.

Para el capítulo VI se describen los resultados obtenidos de los cuestionarios aplicados en la impartición de un curso-taller, de los cuales se extrae información sobre las conceptualizaciones de los profesores.

En el capítulo VII se presentan las deducciones de esta investigación, además de que se realizan reflexiones sobre los diferentes factores que influyen en las conceptualizaciones de las funciones logaritmo y exponencial.

Capítulo 1.

Problemática de estudio y Justificación

1.1 Problemática de estudio

En el nivel medio superior (bachillerato) existe una diversidad de profesionistas que imparten las asignaturas de matemáticas, de acuerdo con el profesiograma para el bachillerato general modalidad escolarizada (Zepeda, 2014), no son especialistas en la materia y se manifiesta una posible debilidad en la formación en aspectos de didáctica específica de las matemáticas. La carencia de didáctica puede provocar complicaciones en el aprendizaje de los estudiantes, y si a esto se le suma una posible existencia de carencias matemáticas así como las aplicaciones y/o relaciones con la misma disciplina u otras asignaturas.

Algunos profesores siguen modelos de enseñanza con los cuales aprendieron matemáticas, con el método de memorización, y con este criterio consideran de manera adecuada la enseñanza, olvidando contexto, condiciones actuales, el tránsito de saberes en la misma asignatura, relaciones entre disciplinas, entre otras.

Se debe insistir en la necesidad de investigar sobre la formación de profesores en ambos aspectos, tanto en el dominio de la asignatura, así como la presencia en la didáctica de las matemáticas de manera explícita e implícita para un marco teórico de investigaciones y un constructo de la mejora de la formación inicial y permanente de los profesores (Font 2002).

Una característica de la mayoría de los profesores de matemáticas de bachillerato, es que provienen o tienen una formación profesional en alguna de las ramas de la ingeniería y/o licenciatura afín (Zepeda, 2014). En términos generales se puede considerar que estos profesores tienen cierto dominio en la parte algorítmica que trabajan con los estudiantes cuando resuelven problemas usuales o típicos en el aula. Ahora bien, en lo que se refiere al domino de los saberes matemáticos que se estudian en bachillerato hay serias deficiencias de los profesores tanto en lo conceptual como en lo contextual, este hecho quedó evidenciado, cuando, como parte de este trabajo se realizó el cuso-taller de formación de profesores. Es conveniente entonces, realizar investigaciones sobre la formación de profesores en donde se identifiquen constructos teóricos particularmente sobre estos dos aspectos.

Este trabajo se enfoca en resaltar algunas de las conceptualizaciones que emplean los profesores sobre las funciones logaritmo y exponencial, dada la trascendencia que tienen en diferentes áreas del conocimiento, por mencionar algunas tareas de nivel medio superior, en química el uso de logaritmos en el cálculo de pH de una sustancia, en biología para el cálculo de flujo genético, y en física para calcular umbral auditivo, ejemplos extraídos en Swokoski y Cole (2002).

Por otra parte, cuando los profesores tienen carencias tanto en el dominio de los contenidos matemáticos como en sus aspectos didácticos, esto tiene serias implicaciones en los aprendizajes de los estudiantes que se ven reflejados en el dominio de los conceptos matemáticos.

En las exigencias del proceso enseñanza-aprendizaje, destacan el trabajo colaborativo o en equipo, trabajo interdisciplinar y habilidades de relaciones interpersonales que resaltan en las diferentes situaciones para los profesores, en la relación estudiante-profesor, las cuales se manifiestan cada vez más, creando un amplio sentido en las investigaciones dentro de este rubro para la formación de profesores, de las cuales se deben ofrecer capacitaciones en las diversas ramas de las matemáticas y su didáctica.

Asimismo, los profesores deben valorar la trascendencia que tiene su formación matemática. En la formación de profesores se requiere incidir sobre sus conceptualizaciones y creencias acerca de la actividad matemática, lo cual le puede permitir reflexionar sobre la forma de propiciar los aprendizajes, así como ampliar sus estrategias de enseñanza que repercutan en los estudiantes (Godino, 2003).

De manera particular, las funciones logaritmo y exponencial se tiene la visión de que se aplace en su análisis, o pueda ser el caso que no se estudie dentro del aula, por el desconocimiento del tema y/o falta de relación con diversas situaciones, éstas deben ser estudiadas puntualmente y de manera eficaz, siendo fundamental para las asignaturas dentro del bachillerato como son matemáticas previas al cálculo, cálculo diferencial, cálculo integral, y aún más allá como ejemplo una base para una ingeniería en su estudio de ecuaciones diferenciales.

Se ha perdido la intencionalidad de análisis en el desarrollo de las funciones logaritmo y exponencial, sobre todo dentro del aula tiene un desarrollo importante en el uso de éstas las cuales facilitan operaciones de multiplicación, división, patrones, series aritméticas y geométricas, de los cuales se considera se ha ido perdiendo la visión de su surgimiento; de acuerdo con Pérez, Rondero & Tarasenko (2013):

"Los logaritmos fueron inventados para resolver operaciones de multiplicación, división, potencia y raíz, con facilidad, convirtiéndolas en suma, resta, multiplicación o división, entonces, si la multiplicación de dos números se convierte en una suma de dos logaritmos, después será necesario convertir esa suma de logaritmos en el resultado de la operación, por esta razón se inventan las tablas de logaritmos y las

de antilogaritmos (exponenciales), es decir, una tabla para la serie aritmética y otra para la geométrica".

Todo esto no se pretende que reemplace a la tecnología sino que al operar con las funciones logaritmo y exponencial no se debe favorecer el uso excesivo de herramientas tecnológicas, sobre todo si existe una ausencia de relación con lo que se opera y el resultado obtenido, el realizar operaciones sin sentido tiene como efecto una falta de conexiones entre estas y/o con otras matemáticas dentro del bachillerato y en sus múltiples aplicaciones en diferentes áreas de conocimiento.

1.2 Justificación

La presente investigación es un intento por analizar cuáles son algunas de las conceptualizaciones que tienen los profesores de matemáticas de bachillerato respecto de los distintos saberes involucrados en la enseñanza de las funciones logaritmo y exponencial, dada su importancia en el tratamiento de diversos temas como pueden ser derivar, integrar, cálculo de crecimiento y decaimiento, interés simple, interés compuesto, entre otros, que se estudian en asignaturas de matemáticas. Se parte además de la consideración de que ambas son básicas y fundamentales porque influyen en el aprendizaje de diferentes asignaturas que se imparten en el nivel superior y son elementales para la comprensión de éstas, como son precálculo, cálculo y ecuaciones diferenciales, por mencionar algunas.

En otros aspectos, resulta conveniente para su enseñanza, relacionar las funciones logaritmo y exponencial, con otras disciplinas (física, química, biología y economía), para buscar que se favorezca el aprendizaje de estos saberes, entre diferentes asignaturas de la misma matemática, y con otras que se imparten en el nivel medio superior o inclusive del nivel superior. Cuando tal transposición no se lleva a cabo, se pierde en gran medida, una buena parte de la conceptualización de estas funciones.

Por otra parte la formación de profesores ha sido una actividad a la que no se le ha puesto suficiente atención. En lo que corresponde a la didáctica de las matemáticas es evidente la conveniencia de realizar investigaciones de formación de profesores, particularmente en nuestro país. En tal caso, los diferentes temas relacionados con las funciones objeto de este estudio, logaritmo y exponencial, se sugieren ser incorporadas ampliamente a la formación de profesores de bachillerato, en lo que corresponde a tener un mayor dominio de los aspectos matemáticos y didácticos, tan necesarios en su enseñanza y aprendizaje.

Particularmente, resulta conveniente fortalecer las conceptualizaciones de los profesores acerca de las funciones logaritmo y exponencial en bachillerato, dado el impacto que puede tener en los aprendizajes significativos de los estudiantes, además de lograr un dominio en diferentes saberes y contextos. Hay que reconocer que la presentación de tales funciones conlleva el confrontar a los estudiantes con aspectos referidos a un nuevo lenguaje matemático, lo que impacta al significado de la simbología empleada y a un cierto tipo de desconcierto acerca de sus usos y aplicaciones.

En una visión de robustecer a dichas conceptualizaciones en las funciones logaritmo y exponencial, éstas generan en el estudiante un aprendizaje significativo, donde se logren crear relaciones de conocimientos dentro de las mismas matemáticas y/o con otras áreas afines, rescatando saberes previos de la exponenciación y la relación con las funciones logaritmo y exponencial, además de un logro de dominio en diferentes saberes de contexto (Ausubel, 1983:18):

> *El aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información "se conecta" con un concepto relevante ("subsunsor") preexistente en la estructura cognitiva, esto implica que, las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de "anclaje" a las primeras.*

Por otra parte, los diversos cambios en los programas de estudios de bachillerato posiblemente han generado una distante conceptualización en dichas funciones, lo cual implica que en la enseñanza de las funciones logaritmo y exponencial se puedan evitar o anular en el aula para no enfrentar dificultades. Además que, en los libros de texto se pueden presentar carencias en las definiciones, conceptos generales, demostraciones, entre otras, representando estos, factores que influencian en la carencia de desarrollo de saberes.

Haciendo presente dicha conjunción de diferentes elementos para la construcción de la conceptualización en las funciones de los profesores, se busca tener un vínculo en el mejoramiento de enseñanza con el objeto de estudio, además del dominio de los profesores en la misma disciplina y mejoramiento en el aula, tanto en lo didáctico como en saberes referenciados. Generando así un interés en el estudio de las funciones logaritmo y exponencial, en el nivel básico (secundaria), nivel medio superior (bachillerato) y nivel superior (ingeniería o licenciatura).

Objetivo General:

Analizar las conceptualizaciones de los profesores de bachillerato, respecto a las funciones logaritmo y exponencial, así como sus posibles factores que inciden en su enseñanza.

Objetivos Particulares:

Realizar un curso-taller con duración de diez horas para profesores de nivel medio superior, para el rescate: histórico-epistemológico, conceptualizaciones y usos de contextos de las funciones logaritmo y exponencial.

Conocer las conceptualizaciones de las funciones logaritmo y exponencial de los profesores de nivel medio superior, a través de la implementación de cuestionarios.

Analizar la presencia de las funciones logaritmo y exponencial, en los programas de estudio de los sistemas correspondientes a la Dirección General de Bachillerato (DGB), Dirección General Tecnológica Agropecuaria (DGTa) y Dirección General Tecnológica Industrial (DGTi), para la comparación del estudio de dichas funciones.

Analizar aspectos matemáticos y didácticos de algunos libros de texto, acerca de las funciones logaritmo y exponencial, para la identificación de los elementos conceptuales que se hacen intervenir.

Preguntas de investigación

¿Qué saberes matemáticos y didácticos deberían ser propuestos en la formación de los profesores para permitirles ampliar sus conceptualizaciones de las funciones logaritmo y exponencial?

¿Cómo incorporar en la formación de los profesores, la articulación de saberes matemáticos referidos a las funciones logaritmo y exponencial?

Hipótesis

Los profesores de bachillerato presentan carencias de elementos matemáticos y didácticos en las conceptualizaciones de las funciones logaritmo y exponencial; las cuales no favorecen en la enseñanza, teniendo como resultado una evasiva en su impartición y análisis.

Capítulo 2.

Estado del Arte

En este capítulo se retoman investigaciones previas sobre el desarrollo de formación de profesores, las cuales hacen referencia a la articulación de saberes matemáticos desde un estudio histórico-epistemológico y modelos conceptuales.

Se da seguimiento a diferentes perspectivas con el mismo fin de mejorar la enseñanza-aprendizaje, formación de profesores, didáctica de las matemáticas con referencia a las funciones logaritmo y exponencial, siendo estas el objeto de estudio de dicha investigación.

2.1 Revisión de investigaciones en formación de profesores y funciones logaritmo y exponencial

Los profesores tienen un alto compromiso con la enseñanza-aprendizaje, deben generar alternativas de desarrollo de saberes de una manera contextualizada conforme aún con las diferencias que presentan el o los grupos, el profesor no debe perder de vista que la adquisición de conocimientos es de modo progresivo. Además cuando un profesor domina la articulación de saberes éste plantea problemas al entorno del estudiante, el trabajo de investigación de Pérez (2007), hace referencia en la articulación de saberes en una ecuación lineal, en la cual describe un estudio histórico-epistemológico y resalta la importancia de su estudio en los saberes de ecuaciones lineales.

Dicha investigación Pérez (2007) describe los principios de las matemáticas tomando como referencia a The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), afirmando la articulación de estos, de los cuales se basa en los principios: currículo y enseñanza, manifestando el aprendizaje de manera gradual. Tiene los siguientes puntos de vista con un enfoque psicológico, a la transposición didáctica de la cual se deben considerar argumentos para su comprensión: mental y un enfoque sistematizado; así como la articulación de saberes, los cuales se jerarquizan en niveles de procesos de articulación: Nivel 0, 1, 2 y 3, de los cuales el nivel uno son preconceptos, el nivel dos son conceptos y nivel tres son desarrollo de conceptos.

Pérez (2007), centra su investigación en la formación de profesores de matemáticas, la cual servirá en este trabajo como referencia sobre su desarrollo bajo una perspectiva de un ámbito histórico-epistemológico, recreando conceptos para el fortalecimiento de la didáctica de las matemáticas y los saberes matemáticos, además del fortalecimiento en los conceptos matemáticos definidos en un currículo, estructura y desarrollo. Incluyendo el aprendizaje progresivo y sistematizado, considerando un acercamiento a la transposición de las matemáticas, de manera que se generen conceptualizaciones en diferentes estatus y el dominio de un saber desde una idea general hasta la resolución de problemas enfocados en cualquier rama de las matemáticas.

Por otra parte, en NCTM (2000) se describe la conceptualización sobre la enseñanza de las matemáticas, ésta siendo ambiciosa, destacando en mejorar: el currículo, los profesores, los estudiantes, uso de tecnología y evaluación. En sus capítulos puntualiza cada uno de los estándares y principios de las matemáticas; en dichos estándares se encuentran matemáticas de alta calidad, siendo normas que describen el contenido y procesos para una calidad de su enseñanza, así como trastocar la formación de profesores y arreglo de currículos, con una visión para los profesores en una mejora continua, arreglos tanto en las aulas, escuelas y sistemas educativos.

El NCTM (2000), tiene como base seis principios de las matemáticas: Equidad, Currículum, Enseñanza, Aprendizaje, Evaluación y Tecnología. En esta investigación se tomará como referencia para tener una visión de análisis de programas el principio del currículo, el cual debe estar diseñado en coherencia entre grados y el seguimiento de temas; además que se basa en el principio de la enseñanza para relacionar la formación de profesores, quiénes deben estar preparados, contar con clases estructuradas, dar sentido a significados, tener disponibilidad, saber que se trabaja con humanos para un aprendizaje de forma gradual y la mejora de argumentos dentro de las aulas.

Uno de los principios con mayor énfasis para éste trabajo de investigación es el principio de aprendizaje de las matemáticas, ya que plantea que se requiere conocer y ser capaz de aplicar los procedimientos, conceptos y procesos, en cual debe existir un sentido de conceptualizaciones. Se sugiere para el profesor realizar una transposición de saberes entre diferentes asignaturas, aplicaciones con el medio que los rodea para implementar un ambiente dentro del aula, asimismo generar un interés por parte del estudiante.

Otro de los principios es el de la tecnología, la cual representa un gran apoyo para el desarrollo de ésta investigación, que a su vez favorece al profesor y le ayuda a tener un mejor dominio del escenario para que de manera recíproca el estudiante perciba mejor el problema. Pero de igual manera esta puede resultar contraproducente si no se emplea de manera adecuada, ya que puede llegar a ser un gran distractor.

El NCTM (2000), resalta los lineamientos para un aprendizaje de matemáticas apropiadas, en una educación de gran índole, la cual se considera en la descripción de este trabajo además de considerar el hecho que se debe atender todos los conceptos de saberes esenciales, con un mayor realce en las funciones logaritmo y exponencial, las cuales al presentarse al estudiante deben tener una perspectiva con relación a alguna asignatura para observar de manera inmediata una aplicación, así como la habilidad de empleo de un concepto.

Por otra parte, el diseño que realizan las instituciones a los currículos es de vital importancia, ya que estos deben ser coherentes y graduales para el aprendizaje de los estudiantes. Los profesores deben poseer una transposición de saberes, que impacte en generar en el aula un ambiente de aprendizaje así como dominio del escenario ya sea con o sin ayuda tecnológica, que enaltezca los saberes de las funciones logaritmo y exponencial.

La investigación de Vargas (2012) ésta dirigida hacia dos vertientes, en el primer enfoque ejemplifica problemas de investigación en la didáctica y la teoría sociocultural sobre la práctica docente, para el segundo aspecto analiza la descomposición genética de un concepto desde la perspectiva de un marco sociocultural, dado por Gavilán (2005).

Por otra parte, la investigación de Vargas (2012) realiza observaciones de la práctica docente de profesores universitarios en los cursos de precálculo, los cuales tienden a enseñar a la función exponencial con creencias abstractas, cada uno radicando en la incidencia de la conceptualización en la función exponencial. Uno de los profesores profundiza más con el impacto de la función y las relaciones con diversas ejemplificaciones, mientras el otro profesor tiende a dirigir un pseudo-concepto, se involucra detalladamente en una construcción del concepto carente de ejemplos. De tal manera que:

> *«se construye utilizando la noción de descomposición genética introducida por el grupo RUMEC (Dubinsky, 1991; Asiala et al., 1996). Desde la práctica del profesor, y la mirada del investigador, debemos entenderla como una descripción y secuencia (orden en el que se presentan y las relaciones) de los mecanismos de construcción que el profesor modela cuando pretende que sus estudiantes lleguen a comprender un concepto»*. (Gavilán 2005, p. 77)

Dicha investigación Vargas (2007) realiza una descomposición genética de la función exponencial y logaritmo, con un enfoque de estudio histórico-epistemológico de la cual no debe estar separada de la enseñanza, e identifica que primero surge la función exponencial, posterior surge la función logaritmo. Resalta las decisiones del profesor en su labor diaria para la conceptualización de las funciones logaritmo y exponencial, además de manera puntual marca la práctica del profesor puede crear contextos para la conceptualización de dichas funciones, asimismo mejorar el argumento para gestionar la participación de los estudiantes y realizar un trabajo de análisis, en específico en la función exponencial, la cual no es lineal ni aditiva, aunque siempre las relacionan con estas.

Ahora bien, señala para la práctica docente mejorar costumbres en cuanto a la interacción con el estudiante (por mencionar algunos, número e, interés compuesto, y razón de cambio promedio), elaboración de conjeturas, secuencia en la función exponencial, así como comparación de funciones, da como sugerencia a la función lineal y la función cuadrática ambas analizarlas con la función exponencial e identificar las diferencias por las cuales genera constantemente errores de la creencia de ser iguales.

La investigación de Vargas (2012), plantea sugerencias de enseñanza sobre la modelación de descomposición genética de la función exponencial, enseguida de la propuesta Elstak (2007), además de un desarrollo implícito histórico-epistemológico dentro de las aulas, las cuales se consideran importantes para ésta investigación, así como la construcción de significado de los componentes (como son el argumento del profesor, problemas con mayor profundidad y diferenciar a la función exponencial de otras funciones que se confunden frecuentemente), de los cuales se debe elevar de manera simultánea con el de la función exponencial a través de la transitividad de saberes.

Por otra parte, cabe mencionar la investigación de Pérez (2011), tiene como objetivo principal encontrar la inclusión o envejecimiento de los logaritmos en el sistema de educación en México, en los niveles de secundaria y bachillerato, así como la manera en que repercuten en la didáctica y formación de profesores.

Pérez (2011), hace mención como eje temático en el desarrollo de su investigación de las conceptualizaciones en las funciones logaritmo y exponencial, manifiestan una exclusión de los saberes matemáticos de los logaritmos. En el estudio realiza un análisis histórico-epistemológico de los logaritmos y exponenciales, que coadyuvan al desarrollo para un estudio con mayor detenimiento en el origen de las funciones, además que aporta para la enseñanza de dichas funciones su uso y aplicabilidad. Entre otros aspectos, señala que en la educación secundaria los logaritmos resultan ser obsoletos en su enseñanza y existe una escasa utilización de la exponenciación, excluyendo a los mismos del currículo.

La investigación de Pérez (2011), afirma que todo esto ha generado una perspectiva de un saber desgastado en el uso excesivo de la calculadora y la tecnología, el cual se ve debilitado y envejecido en el uso de logaritmos y exponenciales; para su enseñanza los profesores están de acuerdo en excluirlos de un problema o del contexto actual.

En la revisión de la investigación de Chehaybar (2006), se destaca la formación de profesores que han sido de suma importancia para múltiples investigaciones y grandes discursos que explican un *"deber ser"*, definen conjunto de ideas y estereotipos sobre la enseñanza, aprendizaje y las perspectivas sobre los profesores. Tiene como finalidad la percepción de los profesores en su formación en diferentes niveles educativos de México, con perspectiva académica, técnica y social.

Esta investigación se considera el análisis de la investigación de Chehaybar (2006), la cual refleja el tratamiento sobre los saberes en la enseñanza-aprendizaje, y con un mayor realce la afirmación de los profesores de su formación, la que a su vez ha sido continua en programas de formación docente, pero no existe un contenido ni un enfoque que refleje lo temas abordados, es así como se reconoce la falta de programas o cursos para una mejora continua. Además, se considera de gran relevancia la aportación de los profesores, en la cual se obtiene como resultado que estos se preocupan por su estatus de saberes y su importancia en la sociedad, en los cuales manifiestan que quieren enriquecer su saber cultural, que se abran más espacios de crecimiento profesional y haya estímulos económicos, entre otros.

La investigación de Viscarra y Angulo (2012), realiza una propuesta metodológica para la enseñanza de las funciones logaritmo y exponencial, la cual se basa en talleres para el desarrollo de temas con problemas contextualizados, los cuales ponen en juego las diferentes herramientas con las que cuenta el estudiante para la solución de ciertos problemas, además de que hace uso de la tecnología. Así mismo se considera importante para el desarrollo de éste estudio la construcción del aprendizaje, si bien no se idealizan las teorías constructivistas, se tiene presente que para el reforzamiento de las conceptualizaciones existen diversos factores que favorecen su enriquecimiento, que a su vez emplean en la enseñanza-aprendizaje, tales como, el rescate de saberes previos, maduración de estos y problemas contextualizados. Esta investigación presenta otro de los elementos importantes que es el aprendizaje significativo, estos autores hacen el rescate: *"para Ausubel aprender es sinónimo de comprender, lo que se comprende es lo que se aprende y se podrá recordar mejor",* en este sentido se considera que al establecer relaciones se crean conceptos y que se manifiesta en diferentes situaciones ya sea con estudiantes o con profesores, con información estructurada, rescate de saberes previos y un argumento adecuado, se genera una conceptualización ideal en diferentes niveles de aprendizaje.

Por otra parte, éstas investigaciones contribuyen en el desarrollo del presente trabajo en el sentido de una perspectiva de formación de profesores así como el desarrollo de las conceptualizaciones de las funciones logaritmo y exponencial. Las diferentes nociones que se adquieren de dichas funciones se construyen a base de teorías adquiridas por experiencia, por referencia teórica o se tiene una carencia de estás.

Se idealiza contribuir en la perspectiva de las conceptualizaciones de las funciones logaritmo y exponencial para el apoyo de reforzar algunos elementos que contribuyen a su mejoramiento de los profesores que en manera de efecto domino impacte en la enseñanza-aprendizaje. Además que refleje la situación sobre el uso de dichas funciones en el nivel medio superior y la conexión que existe entre los diferentes niveles académicos.

Capítulo 3.

Marco Teórico

En el desarrollo del aprendizaje el profesor cuenta con diversas propuestas didácticas para alcanzar el éxito, muchas parecieran poco irrelevantes en las causas que dificultan su labor docente, como por ejemplo grupos numerosos, ambientes conflictivos, contexto de los estudiantes, redes sociales, entre otros, contribuyendo a las deficiencias en los conocimientos. En varias ocasiones los profesores suelen ser transgresores del aprendizaje sin valorar ciertos obstáculos a los que se enfrentan día a día.

Más adelante se hace una propuesta acerca de la necesidad de conceptualizar a las funciones logaritmo y exponencial, desde el nivel básico (secundaria), propiciando su transversalidad hasta el nivel superior (licenciatura o ingeniería) para poder realizar su adecuada modelación, incluidas sus aplicaciones en diversas áreas de conocimiento.

3.1 Formación de profesores

La enseñanza se encuentra en una transformación, de manera particular en México los profesores deben cumplir con una serie de requisitos para poder estar frente a grupo, por ejemplo, evaluaciones continuas al desempeño docente y acompañamiento de un tutor, entre otros.

Por otra parte, además de tener conocimiento en la asignatura que imparte, debe cubrir un perfil educativo el cual vincule la pedagogía con el desarrollo del estudiante, todo esto con el propósito de propiciar una educación de calidad. La enseñanza debe cumplir con las demandas impuestas por la sociedad en los diferentes ámbitos de la población con intereses, aspiraciones y posibilidades, es un arduo trabajo, no sólo en cuestión de gestión sino en una dirección nacional con necesidades en el sector educativo (Hidalgo, 2001).

La formación de profesores mejora la didáctica y el aprendizaje del estudiante favoreciendo a una educación de calidad, el desarrollo de habilidades en los profesores permite una certeza en el aprendizaje, en el Acuerdo 447 (SEMS) se describen las competencias y habilidades que todo profesor de nivel medio superior debe tener. Esta investigación se fija en la competencia dos, la cual se describe:

> *"Domina y estructura los saberes para facilitar experiencias de aprendizaje significativo.*

De donde se desprenden tres atributos que colaboran para el desarrollo de dicha competencia:

- *Argumenta la naturaleza, los métodos y la consistencia lógica de los saberes que imparte.*

- *Explicita la relación de distintos saberes disciplinares con su práctica docente y los procesos de aprendizaje de los estudiantes.*

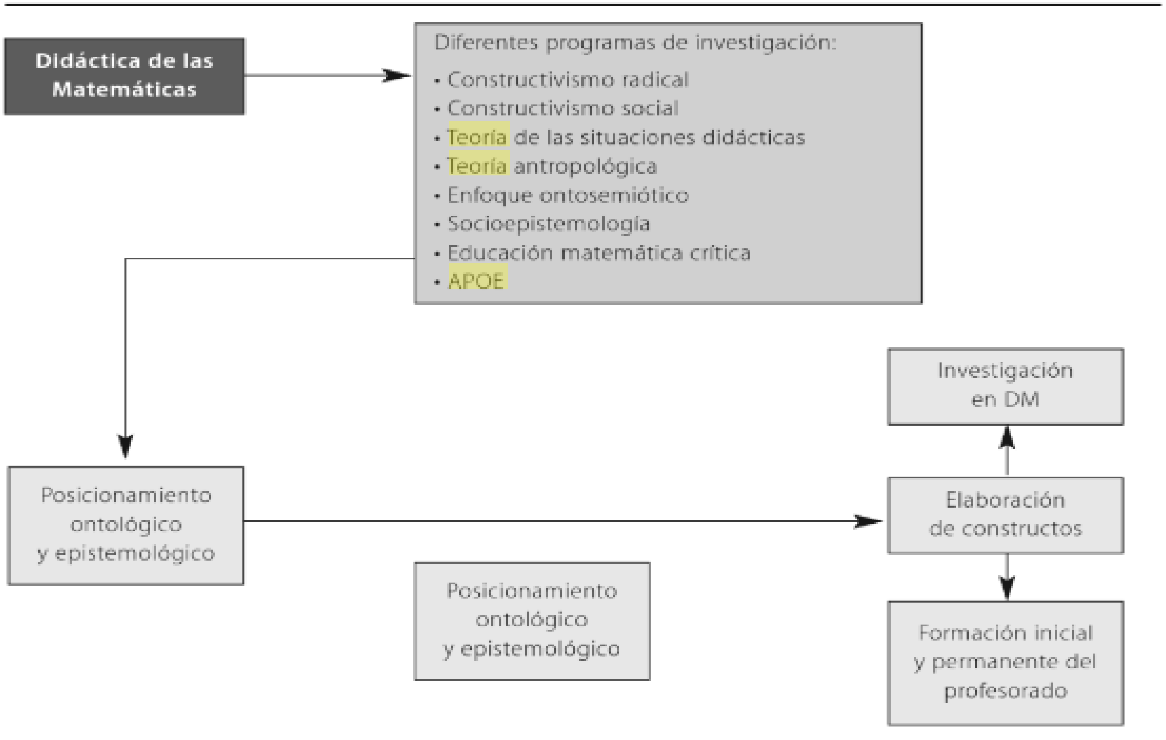
- *Valora y explicita los vínculos entre los conocimientos previamente adquiridos por los estudiantes, los que se desarrollan en su curso y aquellos otros que conforman un plan de estudios[1]".*

Esta competencia se hace explícita para el profesor, quién debe facilitar el conocimiento para resolver una tarea, argumentar procedimientos y soluciones, interpretación de datos, contar con una transposición didáctica o la agilidad de articulación de saberes, vinculación de conocimientos matemáticos con el medio que se rodea, ejemplificarlo en clase y/o ponerlo en práctica con ejemplos cotidianos o reales.

Un conocimiento que se va adquiriendo a través de experiencias, construcción de conceptos, modelos conceptuales, generando diálogos, debates, protagonizados por los estudiantes, pensando que son una comunidad matemática, y un posible mediador (el profesor) dirigiendo a conjeturas, en una aproximación de un modelo conceptual, este genera un aprendizaje significativo (Hidalgo, 2001).

Para la formación permanente de los profesores de matemáticas se necesitan realizar trabajos de investigación en didáctica de las matemáticas, en donde se involucren aspectos teóricos y metodológicos sustentados en elementos ontológicos y epistemológicos, como lo expresa Font (2007) en el siguiente cuadro. Lo que se expresa en teorías como el enfoque ontosemiótico (EOS) o en la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), entre otras. Estos enfoques serán parte del enmarcamiento teórico de esta investigación que se enfoca como ya se mencionó, en las conceptualizaciones de los profesores.

Cuadro 5. Programas de investigación y formación de profesores



Fuente: Font (2007).

Precisamente para dar sentido a los objetos matemáticos con los que el profesor trabaja necesita haber un lenguaje matemático adecuado y debe ser concordante con sus respectivas conceptualizaciones. Cuando esto no ocurre en forma conveniente los estudiantes posiblemente sean limitados en sus aprendizajes y se dificulte el logro de una articulación y contextualización de los saberes matemáticos, con la realidad de su entorno. Como lo señala Godino (2003).

> *"La persona que sabe matemáticas ha de ser capaz de usar el lenguaje y conceptos matemáticos para resolver problemas. No es posible dar sentido pleno a los objetos matemáticos si no los relacionamos con los problemas".*

Es importante mencionar que la investigación destinada a profesores de matemáticas favorece al desarrollo de procesos de su enseñanza y aprendizaje, destinando a la mejora de estrategias de enseñanza para los estudiantes, mejorando sus argumentos en sus clases día a día y enriqueciendo su formación.

Para la formación de profesores es importante rescatar la actitud y disposición de obtener diferentes técnicas que ayuden a mejorar la práctica diaria, involucrando experiencias para la progresión en ésta. Se toma la siguiente definición como base (Honore, 1980): "*La formación es un proceso que va de una experiencia a su* *elucidación en común, de una originalidad a su profundización por una confrontación de una diferencia con la instauración de un reconocimiento recíproco".*

En la formación de profesores en específico acerca de las funciones logaritmo y exponencial se necesita compartir experiencias para un discurso consistente, argumentativo, amplio, coherente y estructurado, siendo necesario tanto para las conceptualizaciones de los profesores como para la incidencia en los estudiantes de sus aprendizajes. Al poseer un argumento fluido, vasto y trascendente, que colabore con los alumnos a un razonamiento para aprender en situaciones reales o hipotéticas.

La comunicación de saberes de dichas funciones (logaritmo y exponencial), es importante para la construcción de conceptualizaciones, así como su estudio y reflexión, que favorece en la formación continua o formatividad de los profesores, (Honore, 1980) "*La formatividad puede también entenderse como el carácter de lo que es formativo, es decir lo que es una condición favorable, o que ejerce una disposición, un poder para favorecer el proceso de formación. Representa, pues la manera en que el entorno material y humano tomas las << formas>> que, en el medio, sirven de soporte objetivo a la formación*".

Para una formación continua es necesario el reconocimiento de una necesidad por parte de los profesores, en ausencia de ésta algunos saberes y situaciones conllevan a una obsolescencia, en la cual se dejan de lado a los hechos que han evolucionado para la mejora tanto en el aula como de manera personal para el profesor. Es por ello la importancia de un curso-taller para la realización de este trabajo, crear un posible ambiente de experiencias, recreando saberes, resolución de ecuaciones, resoluciones de problemas, entre otros. Ofreciendo una alternativa más de espacio para el profesor así como la invitación a su formación continua.

3.2Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

Para el estudio de las funciones logaritmo y exponencial no sólo se debe involucrar un elemento para el aprendizaje, sino que un conjunto de significado al cual corresponde un significado persona y un significado institucional, es por eso que se fija la atención en la teoría antropológica de lo didáctico (TAD); en la cual se considera a los elementos de lo didáctico, para la ayuda del estudio así como su proceso que incluye tareas, técnicas, tecnologías y teorías didácticas.

Al elegir un modelo matemático se tiene que modificar para su comprensión, teniendo en cuenta las posibles mejores condiciones para los estudiantes, donde los profesores consideran una gama de estrategias en la estructuración de un contenido; el problema puede radicar en la secuencia de contenido, y la metodología de la enseñanza (Chevallar, Bosch y Gascón, 2009).

Para este trabajo se considera a los saberes del currículo, de los cuales se compara su contenido y diferentes estrategias entre cada subsistema, en las funciones logaritmo y exponencial, que trae como referente el tiempo que se dedicada a su estudio, la jerarquía del contenido y la manera de relacionar a dichas funciones entre la misma asignatura u otras áreas de conocimiento. Todo esto nos da como referente la importancia que tienen en el medio superior, de lo cual se deduce una posible conceptualización actual de los profesores.

Asimismo, se tiene la visión con posibles carencias presentes en la enseñanza-aprendizaje y con una probabilidad de ausencia de las funciones (logaritmo y exponencial), la contextualización es importante para transformar en conocimiento, lo cual es necesario en la identificación del uso de las conceptualizaciones, a través de diferentes medios, así como tomar elementos base de la teoría antropológica de lo didáctico, por lo tanto se tiene entonces la siguiente definición:

> *"La teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevarllard (1999), la cual considera a la didáctica de la matemática como una actividad humana, realizando observación de axiomas o principios elementales, incuestionables sobre el proceso de la acción humana. Describiendo a la teoría como un saber-hacer,* (Morales, 2013)
>
> *La TAD presenta la siguiente estructura que permite el análisis de las tareas:*
>
> *[T/ô/θ/Θ]*
>
> 1. *T son las tareas*
> 2. *ô es la técnica de T*
> 3. *θ la tecnología de ô*
> 4. *Θ es la teoría de θ*
>
> *Así, la expresión [T/ô/θ/Θ] constituye una praxeología puntual, una praxeología relativa a un tipo de tareas T. Esta organización praxeológica está constituida por dos bloques: uno práctico-técnico y otro tecnológico-teórico:*

- *[T/ô]: Bloque práctico-técnico. Este bloque se identifica con el saber-hacer.*
- *[θ/Θ] Bloque tecnológico- teórico. Este bloque se identifica con el saber".*

En esta teoría el profesor debe analizar y desarrollar una tarea que involucre el saber-hacer y/o el saber cómo resolver un tarea de una manera eficaz, además de proponer tareas para las funciones logaritmo y exponencial con conexión y reflexión, de tal manera que en la solución se vea reflejada la argumentación, así como la técnica del profesor que emplea para la resolución.

Para este trabajo se emplea dicha teoría la cual brindará como referente el análisis de las aplicaciones en las conceptualizaciones de dichas funciones, se pretende observar el saber-hacer que reflejen en algunos ejercicios, mismos en los que se visualice el saber de las funciones, ya sea de manera inmediata su solución, o donde se haga uso de diferentes herramientas, de acuerdo con Chevallard (1999), "*menciona cuatro niveles de praxeologías u organizaciones matemáticas , según el grado de complejidad de sus componentes (puntuales, locales, regionales y globales):*

- Praxeologías puntuales, si están generandas por un único tipo de tareas (T) con técnica (al menos una), tecnologías y teorías representadas por *[T/𝒯; /θ/Θ] que constituye a la praxeología puntual. En este nivel de praexología raramente se generan todos los elementos de la misma.*
- *Praxeologías locales, resultado de integración de diversas praxeologías puntuales. Cada praxeología local está caracterizada por una tecnología, que sirve para justificar, explicar, relacionar entre si y producir las técnicas de todas las praxeologías puntuales que la integran.*
- *Praxeologías regionales, se obtienen mediante la coordinación, articulación y posterior integración de diversas praxeologías locales, alrededor de una teoría matemática común.*
- *Praxeologías globales, surgen agregando varias praxeologías regionales a partir de la integración de diferentes teorías."*

Para el uso de esta teoría y en base al objeto de estudio en la elaboración de una técnica en las funciones logaritmo y exponencial, se deben considerar las conceptualizaciones de éstas, aun siendo evidente en la solución deben de contener un grado incierto en la solución, de manera relativamente metódica, se emplee o se genere la aplicación de una técnica argumentada.

El dominio del profesor en las funciones logaritmo y exponencial debe mantener un argumento sólido en las respuestas a preguntas cotidianas del por qué y para qué sirven, empleando diferentes técnicas de solución así como la transversalidad del tema. Haciendo uso de la TAD se intensifica la justificación e interpretación de soluciones, siguiendo a Chevallard, Bosch y Gascón (2009):

> *"La existencia de una técnica supone que también exista en su entorno un discurso interpretativo y justificativo de la técnica y de ámbito de aplicabilidad o validez".*

Al dominar una técnica en la resolución de problemas con funciones logaritmo y exponencial así como una didáctica matemática, mejoran las conceptualizaciones formadas y permite ofrecer un discurso argumentativo, justificando problemas o resolución de casos que contengan dichos saberes matemáticos, facilitando su entendimiento en diferentes teorías con un impacto de aplicaciones en diferentes ramas de las matemáticas o disciplinas.

Transposición de saberes

El profesor tiene la responsabilidad de saber debatir sobre el tema, conocer a profundidad a las funciones logaritmo y exponencial; el discurso es de gran importancia para un profesor de bachillerato, se considera que se obtiene la atención del estudiante, para mejorar el discurso se debe dejar de lado las creencias del profesor, del cómo para él se aprende mejor, y entender cómo se debe enseñar a las nuevas generaciones las matemáticas, además de analizar al grupo en turno y su contexto (Acevedo, 2009).

Hay que mencionar que se hace referencia de manera frecuente sobre la impartición del conocimiento que debe ser de manera clara, objetiva, con relaciones en las diferentes asignaturas y aplicaciones, contar con el manejo de un buen discurso para mejorar un aprendizaje. En la siguiente figura basada en Ibáñez y Ribes (2001), se hace énfasis a las diferentes relaciones bidireccionales entre el alumno, el saber escolar y el propio medio educativo, en donde la realización de los aprendizajes se hace intervenir a la transposición didáctica de los saberes, la cual requiere de una adecuada comunicación entre los diferentes participantes.

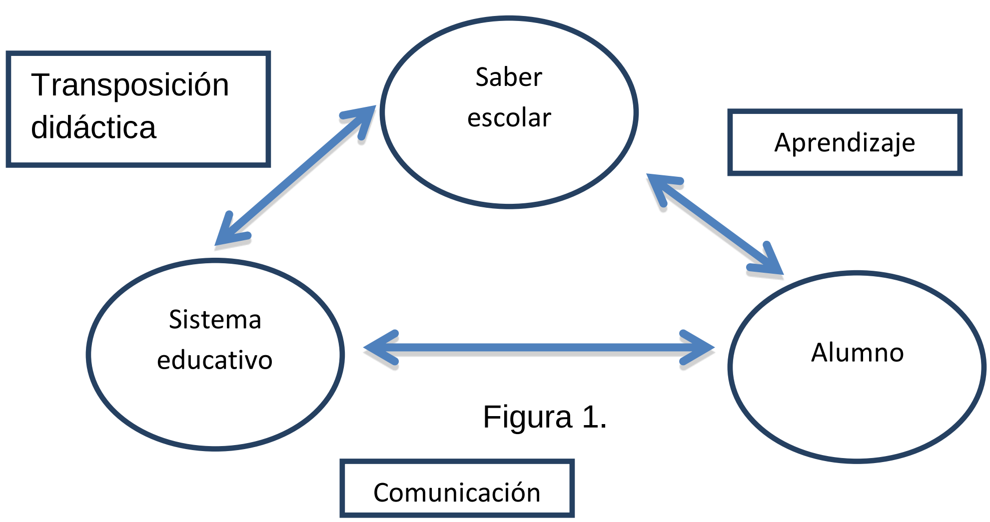


Figura 1.

En referencia a la propuesta del triángulo didáctico, resulta conveniente que el profesor tenga dominio conceptual matemático de manera particular en el tratamiento didáctico de las funciones logaritmo y exponencial, las cuales propiciando transposición didáctica de las mismas este pueda mejorar la comunicación con sus estudiantes, amplíe su discurso argumentativo, entre otros aspectos; todo esto permitirá que mejore el aprendizaje. De este modo el profesor crea un ambiente donde los estudiantes adquieren vivencias únicas, de las cuales aprenden a relacionar las matemáticas con el medio que los rodea, encontrando sentido a la solución de problemas. Para ayudar en la mejora del aprendizaje, Perrenaud (2006):

> *"La tarea de los profesores no es, entonces, improvisar cursos. Esta tiene por objeto la regulación del proceso y, en los niveles superiores, la creación de problemas de complejidad creciente. Ahí se encuentra la mayor inversión: se ve que éste remite a otra epistemología y a otra representación de la creación de saberes en la inteligencia humana".*

Para las funciones logaritmo y exponencial es de suma importancia reconocer las diferentes aplicaciones con otras asignaturas, en éstas es sustancial mencionar su aplicabilidad desde el nivel básico (secundaria) con operaciones de exponente, hasta el estudio de las funciones logaritmo y exponencial en el nivel medio superior, del cual se desprenden elementos para relacionar con diversas áreas de conocimiento y relaciones con el medio que se vive, considerando a éstas elementales para algunas asignaturas en diversas carreras universitarias.

En el aprendizaje de las matemáticas han sistematizado ideas de la relación de ejercicios contra reloj, encareciendo un aprendizaje, el profesor cuenta con el recurso de un aprendizaje previo para impulsar el conocimiento del estudiante, manteniendo un trabajo matemático, mismo que ayudará a conceptualizar a las funciones logaritmo y exponencial (Godino, 2003). Como idea principal de dar solución a problemas de dichas funciones se propone trabajar en equipos de colaboración, los estudiantes comunican ideas, perspectivas de solución y métodos, recreando escenas de grandes matemáticos y tomando decisiones con entendimiento.

Por otra parte, en las conceptualizaciones de las funciones logaritmo y exponencial, se toma la definición de Chevallard (2005), en la cual plantea a la enseñanza a una adaptación para un mejor entendimiento:

> *"Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El trabajo que se transforma un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica".*

Siguiendo esta línea de comprensión, se tienen que mirar a las funciones desde otra visión de enseñanza de problemas contextualizadas, de manera que se apoye de otras asignaturas en su estudio, ya se hizo mención de tomar elementos previos de los estudiantes para éstas, por mencionar algunos problemas de apoyo, se puede hacer uso de la Física donde se utilizan exponenciales y logaritmos para muchos de sus cálculos, en Química en particular para el cálculo de pH de sustancias, en otras, en el capítulo 5, se ejemplifican algunos de estos problemas de apoyo para el profesor.

Un buen discurso por parte de los profesores al trabajar con problemas contextualizados incrementa el entendimiento del problema y/o tema, en ocasiones el estudiante sabe operar pero se pierde en la compresión de éste, cambiando esta situación se pretende un aprendizaje significativo. El enseñar matemáticas es hacer estudiantes autónomos, preparar individuos para solucionar problemas de su entorno, enseñar matemáticas es por saber cultural (Hidalgo, 2011).

En la transposición de saberes se busca que los profesores amplíen sus conceptualizaciones para la mejora en la enseñanza-aprendizaje, y poder radicar un poco en el momento de cuestiones que a diario se presenten para él, por ejemplo, si el profesor sabe responder una pregunta como la siguiente ¿qué aplicación tienen las matemáticas en la vida cotidiana? entonces podemos decir que el saber a enseñar y el saber aprendido se han complementado. Todos los profesores de matemáticas están obligados a presentar argumentos claros y tener un buen discurso que involucre a los estudiantes.

3.3 Teoría Ontosemiótica (EOS)

Las características esenciales de la teoría ontosemiótica (EOS), expresan la base de las matemáticas para establecer conexiones, manifiesta el objeto matemático y su origen, así como el problema del conocimiento sea subjetivo, de diferentes objetos y procesos matemáticos para la obtención de dichos conceptos en la disciplina propia.

Asimismo el EOS con una perspectiva didáctica de las matemáticas, amplia las investigaciones previas en significados institucionales y personales de la matemática con el enfoque semiótico y ontológico. Siguiendo esta senda, brinda criterios para establecer trayectorias epistémica y cognitiva, para adquirir la *“negociación de significados”*, lo cual son estrategia fundamental en esta investigación, así como en la solicitud de las configuraciones y trayectorias didácticas (Godino, 2012).

Se toma la definición de *instituciona*l de Godino y Batanero (2015):

> *“DEFINICION 3: Una institución (I) está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen”.*

Se toma la definición de *personal,* a la que se hace referencia de lo propio de manera psicológico y nos interesa en esta investigación:

“Definición 9: Es el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto O_p en un momento dado.

Una parte del significado es observable, aunque no lo son directamente las prácticas constituidas por acciones interiorizadas”.

De esta manera se considera para las conceptualizaciones de las funciones logaritmo y exponencial el tipo de significado institucional (Godino y Font, 2015): “*Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.”*

Asimismo se toma para el tipo de significado personal: “*Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencial el sujeto relativas a un objeto matemático”.*

Para la negociación de significados matemáticos en las nociones teóricas de los niveles de análisis de proceso de enseñanza y aprendizaje en las funciones logaritmo y exponencial, se analiza la dimensión de configuración de objetos y procesos matemáticos, con la proyección de interaccionar con el significado–conceptualización de las funciones logaritmo y exponencial, y la importancia de la función semiótica contextualizada. Para el desarrollo de ésta investigación se tomarán los primeros tres niveles de análisis didáctico de los procesos de estudio matemático que marca (Godino, Batanero y Font, 2009), los cuales se describen a continuación:

“Niveles de análisis didáctico de los procesos de estudio matemático:

1) *Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas (significados sistémicos).*
2) *Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.*
3) *Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.*
4) *Identificación del sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa).*
5) *Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.*

El primer nivel de análisis se orienta a estudiar las prácticas matemáticas realizadas en el proceso de estudio analizado. La realización de una práctica es algo complejo que moviliza diferentes elementos, a saber, un agente (institución *o persona) que realiza la práctica, un medio en el que dicha práctica se realiza (en este medio puede haber otros agentes, objetos, etc.). Puesto que el agente realiza una secuencia de acciones orientadas a la resolución de un tipo de situaciones problemas, es necesario considerar también, entre otros aspectos, fines, intensiones, valores, objetos y procesos matemáticos.*

El segundo nivel de análisis se centra en los objetos y procesos que intervienen en la realización de las prácticas, y que también los que emergen de ellos; su finalidad es describir la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos semióticos que se producen en su realización.

Dado que el estudio de las matemáticas tiene lugar usualmente bajo la dirección de un profesor y en interacción con otros aprendices, el análisis didáctico debería de progresar desde la situación-problema y de las prácticas matemáticas necesarias para su resolución (análisis uno) a las configuraciones de objetos (epistémicas-cognitivas) y procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas (análisis dos) hacia el estudio de las configuraciones didácticas y su articulación en trayectorias didácticas, lo cual constituye un tercer nivel o tipo de análisis didáctico orientado, sobre todo a la descripción de los patrones de interacción y su puesta en relación con los aprendizajes de los estudiantes (trayectorias cognitivas).

Las configuraciones didácticas y su articulación en su trayectoria didáctica están condiciones y soportadas por una compleja trama de normas y metanormas, (D'Amore, Font y Godino, 2007; Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009) que no sólo regulan la dimensión epistémica de los procesos de estudio (cognitiva, afectiva, etc.)

El cuarto nivel de análisis considerado en el EOS pretende estudiar esta compleja trama de normas y metanormas que soportan y condicionan los procesos de estudio. Este nivel es el resultado de tener en cuenta los fenómenos de índole social que acontecen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Los cuatro niveles de análisis descritos anteriormente son herramientas para una didáctica descriptiva-explicativa, es decir, sirven para comprender y responder a la pregunta, ¿qué está ocurriendo aquí y por qué? Sin embargo, la Didáctica de la Matemática no debería limitarse a la mera descripción que lo deja todo como estaba, sino que debería aspirar a la mejora del funcionamiento de los procesos de estudio.

> *Por tanto, son necesarios criterios de "idoneidad" o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y "guiar" su mejora. Se trata de realizar una acción o meta-acción para ser más precisos (la valoración) que recae en otras acciones (las acciones realizadas en los procesos de instrucción). En consecuencia ha de considerarse la incorporación de una racionalidad axiológica de la educación matemática que permite el análisis, la crítica y la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, etc."*

De esta manera se pretende unificar a las funciones logaritmo y exponencial en la perspectiva de lo conceptualista/formalista, en relaciones lógicas con otros objetos, donde el objeto sea real o imaginario, y así poder situar ese tránsito de saberes en la misma disciplina como en diferentes áreas de conocimiento, estableciendo la definición de concepto (Godino y Font, 2015):

> *"El uso que hacíamos en esta etapa de objeto matemático viene a ser equivalente a concepto matemático idea o noción matemático".*

Para la EOS el objeto es una representación de características físicas a las matemáticas, y para esta teoría un objeto puede adquirir diferentes significados como pueden ser: concepto, procedimiento, propiedad, entre otras, esenciales interpretaciones para la conceptualización de las funciones logaritmo y exponencial, destacando los diversos objetos matemáticos contendidos de su epistemología hasta el uso excesivo de simbología en sus diferentes contextualizaciones.

En la adquisición de saberes como en el caso de las funciones logaritmo y exponencial, se necesita conocer el significado o una definición, teniendo como perspectiva la mejora de prácticas en la solución de problemas, para que estas hagan intervenir nuevos objetos matemáticos. Para EOS puede adquirir diferentes términos de objeto y significado, lo cual lleva un mayor análisis para el estudio de dichas funciones, a lo que hace llamar un "*transfondo ecológico de las prácticas*" y la "*configuración o sistemas de prácticas"* en el origen de los conceptos matemáticos.

En el desarrollo de sistemas de prácticas el operar diferentes objetos matemáticos de las funciones logaritmo y exponencial conlleva a la conceptualización de dichas funciones, las cuales haciendo uso de sus componentes se tiene configuración epistémica-pragmática que posibilita y amplía tanto la didáctica de los profesores como los saberes matemáticos, brindando una asertividad en el aprendizaje.

Se puede considerar tener diferentes usos de conceptualizaciones para los saberes matemáticos, lo cual genera en las funciones logaritmo y exponencial contar con diferentes objetos que relacionen su concepto, significado, prácticas explicitas o implícitas, encausando procesos de enseñanza y aprendizaje, haciendo una colección de herramientas para un marco teórico complejo.

3.4 Conceptualización de las funciones de logaritmo y exponencial

En la enseñanza el profesor se ve obligado a tener múltiples sistemas de representaciones, las cuales impactan en el aprendizaje del estudiante y este consiga comprender conceptualizaciones. Dichas conceptualizaciones van más allá de la simbología, no sólo centradas en una definición, estás deben contar con un desarrollo de concepto, sistemas de representación, contextualización de situaciones y transitividad entre la misma disciplina como en diferentes áreas de aprendizaje.

En la enseñanza se pueden confundir a las conceptualizaciones como conceptos o simbología, en este tránsito de enseñanza-aprendizaje es importante considerar las diferentes situaciones de aprendizaje, para Vergnaund (1990, p.8), define:

> "*un campo conceptual como un conjunto estructurado de clases de situaciones. El tratamiento de las situaciones requiere distintos tipos de esquemas, conceptos, procedimientos y representaciones, estrechamente relacionados".*

Las conceptualizaciones son más que una definición o serie de múltiples ejercicios de repetición algorítmica en el proceso de aprendizaje.

Para el desarrollo de la conceptualización de las funciones logaritmo y exponencial, no se puede limitar a sólo un sentido conceptual formal de los saberes, es indispensable el desarrollo de situaciones contextualizadas, en dicha construcción de conceptualizaciones el profesor debe de contar con múltiples experiencias de situaciones, ejemplos, semiótica, entre otros, para complementarse con recursos teóricos y metodológicos.

Tomando como referencia la investigación de Otero (2014, p. 31), quién define a las conceptualizaciones como un universo de acciones para la enseñanza y aprendizaje, basados desde lo formal hasta la experimentación de manera contextual, haciendo uso de todas las herramientas epistemológicas:

> *"La conceptualización es la identificación de los objetos del mundo, de sus propiedades, de sus relaciones y transformaciones. Esta identificación puede generarse a partir de la percepción relativamente directa o de la construcción individual o en colectivo, pero siempre se originan en la historia y en la experiencia".*

En el proceso de la conceptualización se debe comprender el desarrollo del aprendizaje a medida que se amplían los diversos saberes y representaciones, los cuales resultan ser elementos centrales en la enseñanza. Para las funciones logaritmo y exponencial, la conceptualización de estas debe tener un proceso de desarrollo accesible, lo cual permita adquirir conocimiento a través de experiencias, en la construcción de diferentes esquemas y herramientas.

Para ir construyendo una adecuada conceptualización de las funciones logaritmo y exponencial pareciera que es conveniente la presencia de estas desde la secundaria, pero claro está, con un acercamiento referente a ser consideras como operaciones inversas (logaritmo y exponencial). Por su parte, en el nivel bachillerato se requiere trabajar con ecuaciones que involucran tanto logaritmos y exponenciales, así como las relaciones entre ellas y las formas de involucrarlas en su resolución, sin que se deje de lado las operaciones inversas analizadas en secundaria.

Lo descrito anteriormente se puede sintetizar en la siguiente imagen, la cual específica el recorrido de las funciones logaritmo y exponencial partiendo del nivel básico con operaciones esenciales de su estudio, hasta el nivel superior con sus usos de contexto en el cual al ingresar se conceptualiza a las funciones con una perspectiva de enlace.

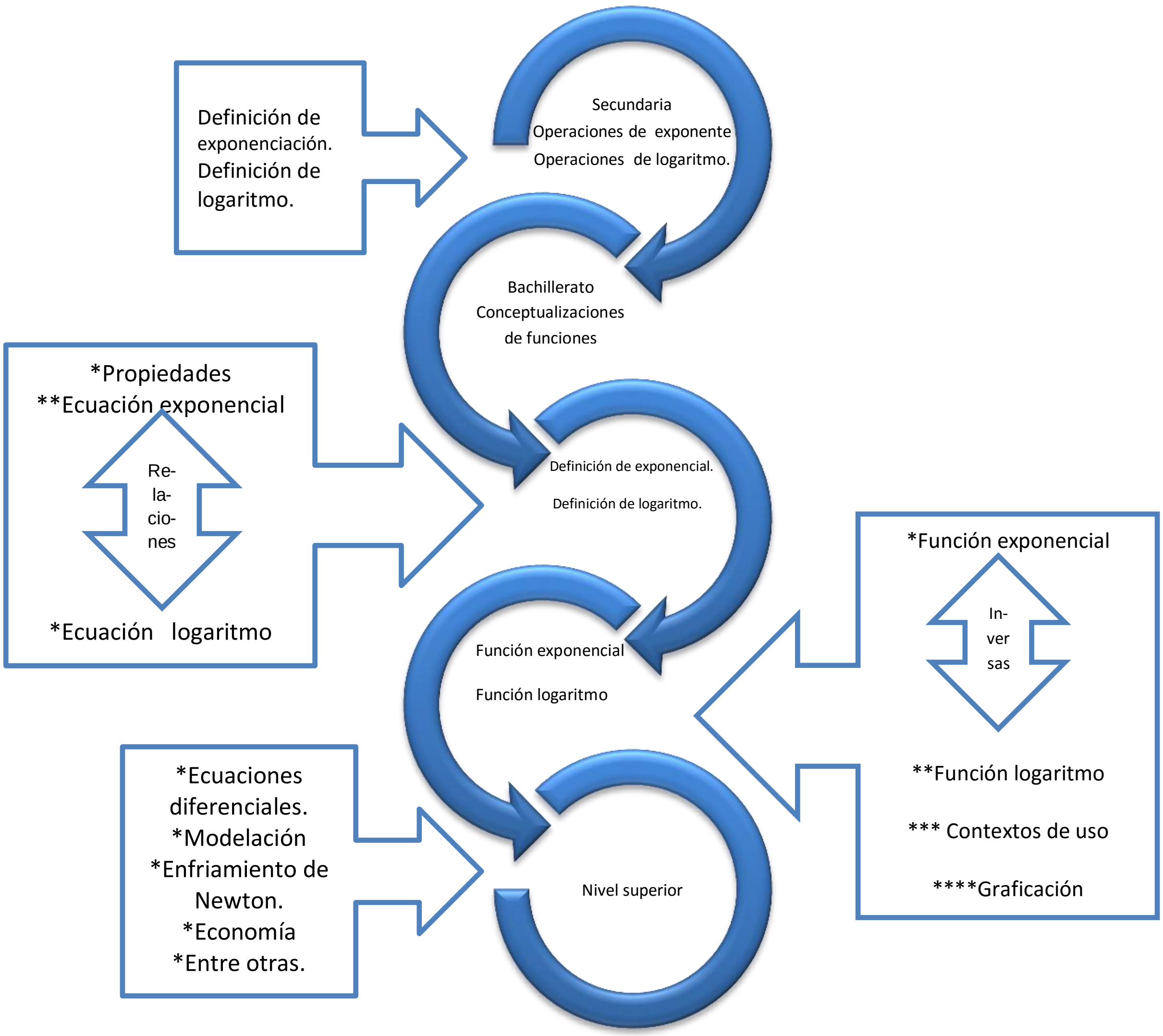


Figura 2. Conceptualización de las funciones exponencial y logaritmo

Se pueden implementar un gran número de situaciones con ayuda de la tecnología o implementación de tablas para la resolución de problemas, la tarea más importante del profesor es transformar la situación correspondiente para cada grupo de estudiantes, dado que estas generan conexiones, según Godino (2013, p. 75)

> *"La buena enseñanza depende de una serie de consideraciones y demanda que los profesores razonen de un modo profesional dentro de contextos particulares de trabajo. Los estándares para la enseñanza de las matemáticas están diseñados como una ayuda en tales razonamientos y decisiones resaltando aspectos cruciales para la creación del tipo de prácticas de enseñanza que apoyan los objetivos de aprendizaje. Se agrupan en cuatro*

categorías: tareas, discurso del profesor y de los estudiantes, entorno y análisis”.

Los profesores cuentan con una serie de herramientas para la enseñanza-aprendizaje, mismas que se deben considerar los diferentes contextos para la conceptualización de saberes.

Por otra parte, en el estudio de las funciones logaritmo y exponencial es indispensable el rescate de la epistemología para propiciar la articulación de saberes, por ejemplificar en la tabla de Stifel existen progresiones aritméticas para sucesión de números en la primer fila, para la segunda fila se tiene una progresión geométrica; haciendo un análisis de tabla se pueden identificar diferentes patrones que contribuyen a mejorar los cálculos de las funciones exponencial y logaritmo.

Para la representación de la tabla de Stifel de base dos, se observa que en la progresión aritmética son los exponentes de la progresión geométrica, de tal manera que utilizando la tabla para una multiplicación los exponentes se suman, los exponentes se restan para la división, en una potenciación los exponentes se multiplican y para una raíz cuadrada se dividen entre dos, (Pérez, Rondero y Tarasenko, 2013).

Tabla 2. Tabla de logaritmos de Stifel

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1/8	¼	½	1	2	4	8	16	32	64

Para establecer la definición de logaritmo y exponencial es considerada de (Swokowski y Cole, 2002) las definiciones de logaritmo y exponencial así como las propiedades de cada uno, dado al acercamiento para esta investigación. Como inicio se define a un exponente:

Si n es un entero positivo, la notación exponencial a^n que se define: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$, la expresión a^n se lee a la enésima potencia o simplemente, a a la n. El entero positivo n se llama exponente y el número real a, base.

Tabla 3. Leyes de los exponentes

1.	$a^m a^n = a^{m+n}$
2.	$(a^m)^n = a^{m*n}$
3.	$(a * b)^n = a^n b^n$
4.	$(a/b)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Exponente cero y negativo

Definición (a≠0)
$a^0 = 1$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

5.	a) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ b) $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$

La definición de logaritmo base a (Swokowski y Cole, 2002), *El logaritmo de un número x en una base a es el exponente al que hay que elevar la base para obtener el número x; Sea a un número real positivo diferente de 1*. El logaritmo de x con base *a* se define como:

$$\log_a y = x \leftrightarrow a^x = y$$

Se ejemplifican las propiedades de los logaritmos de base a:

Propiedades $log_a X$	Razón	Ilustración
1. $log_a 1 = 0$	$a^0 = 1$	$log_3 1 = 0$
2. $log_a a = 1$	$a^1 = a$	$log_{10} 10 = 1$
3. $log_a a^x = X$	$a^x = a^x$	$log_2 8 = log_2 2^2 = 3$
4. $a^{\,log_a x}{}_{a} = X$	Ve abajo	$5^{log_5 7} = 7$

Se define a la función exponencial como: La función exponencial f dada por

$$f(x) = a^x \text{ para 0<a<1 o a>1}$$

Es biunívoca en consecuencia, que satisfacen las siguientes condiciones equivalentes que se cumplen para números reales X_1 y X_2:

(1) Si $x_1 \neq x_2$, entonces $a^{x_1} \neq a^{x_2}$.
(2) Si $a^{x_1} = a^{x_2}$, entonces $x_1 = x_2$.

Se define: La función logarítmica con base a es biunívoca; por tanto, se satisfacen estas condiciones equivalentes para números reales positivos x_1 y x_2:

(1) Si $x_1 \neq x_2$, entonces $log_a x_1 \neq log_a x_2$.
(2) Si $log_a x_1 = log_a x_2$, entonces $x_1 = x_2$

Capítulo 4.

Metodología

4.1 Metodología

La recolección de datos en esta investigación nos permitió conocer las conceptualizaciones de las funciones logaritmo y exponencial que tienen los profesores en servicio en una situación de aprendizaje. La metodología es tanto cualitativa como cuantitativa (Hernández, Fernández, y Baptista, 2006).

En este trabajo se aplicaron tres cuestionarios, los cuales fueron elaborados de manera estratégica para explorar el conocimiento de las funciones logaritmo y exponencial que tienen los profesores. La aplicación de dichos cuestionarios logra la identificación de datos de manera sistemática y ordenada (García, 2003).

La investigación se basó en un pre-test (cuestionario uno), cuestionario (cuestionario dos) y pos-test (cuestionario tres), los cuales se aplicaron a diez profesores de matemáticas del nivel medio superior, sobre las operaciones logaritmo y exponencial, propiedades, ecuaciones, funciones logaritmo y exponencial, funciones inversas, graficación y contexto de uso. Los cuestionarios se realizaron de tal manera que se identificaron las distintas conceptualizaciones que tienen los profesores en este tema, así como sus diferentes aplicaciones.

Con la finalidad de explorar el dominio de las operaciones logaritmo y exponencial se aplicó el primer cuestionario al inicio del curso-taller, posteriormente, se aplicó el segundo cuestionario con la intención de identificar elementos esenciales en los profesores, y por último, la aplicación del tercer cuestionario sirvió para evaluar la sujeción de elementos de las funciones logaritmo y exponencial.

Para el desarrollo de la investigación se trabajó con el subsistema Colegio de Bachilleres del Estado de Hidalgo, siendo un sistema descentralizado estatal de modalidad presencial con una formación básica, específica y para el trabajo; los programas de estudio que se utilizan son de la Dirección General de Bachillerato.

Se hizo una invitación a todos los profesores que imparten la materia de matemáticas de todos los planteles cercanos a la sede en donde se impartió el curso-taller, mismos que conforman la institución COBAEH (Colegio de Bachilleres del Estado de Hidalgo), de los cuales asistieron sólo diez profesores con diferente perfil educativo, y con experiencia frente a grupo.

La impartición del curso-taller para profesores fue llevada a cabo por un profesor de la UAEH (Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo) cuya línea de investigación es la didáctica de la matemática. Dicho curso tuvo una duración total de 10 horas, en el cual se abordaron: aspectos histórico-epistemológicos, definición formal de logaritmo y exponencial, función inversa, función logaritmo, función exponencial y aplicaciones en diferentes áreas enfatizando la articulación de saberes.

El curso-taller fue seccionado en dos, la fase uno tuvo una duración de 5 horas; se recabaron datos generales con los instrumentos de un pre-test (cuestionario uno), cuestionario dos, así como el concepto de la función logaritmo y función exponencial, los profesores expusieron de manera directa sus comentarios acerca de su postura en general sobre la educación y de las funciones logaritmo y exponencial.

En la fase dos se recolectaron las conceptualizaciones de los profesores de las funciones, a través de un post-test (cuestionario tres) sobre los temas en específico: definiciones de logaritmo y exponencial, operaciones con logaritmos y exponenciales, función inversa, función logaritmo y función exponencial.

En la tercera fase se analizaron los datos recabados, se contrastaron las teorías para la identificación de las conceptualizaciones de las funciones logaritmo y exponencial, de la teoría EOS se tomaron los tres niveles de análisis de procesos como se menciona en el capítulo de marco teórico, del cual se identifican los siguientes elementos de cada nivel, como son:

Nivel uno: La resolución de problemas, el cual es un elemento que sirve para la construcción del conocimiento. Se identifica si es correcta la solución del problema.

Nivel dos: La articulación del significado en situaciones reales, es decir, se asume la interacción del objeto y la práctica del significado.

Nivel tres: Articulación de roles de una configuración de objetos, procesos matemáticos de sus facetas: Epistémica (conocimiento institucional), Cognitivo (conocimiento personal), Afectivo, Medicional y temporal (recursos tecnológicos), Interaccional y Ecológica: procesos de estudio matemático.

Por otra parte de la TAD se utilizan los niveles de las praxeologías, de las cuales se distinguen: praxeología puntual, praxeología local, praxeología regional, praxeología global, se consideran los cuatro niveles con la intensión de que se llegue a una praxeología regional. En la praxeología puntual se identifica la solución de la tarea con una técnica empleada; para la praxeología local se observa la integración de técnicas para la solución a la tarea; en la praxeología regional se identifica además de las técnicas, la justificación y argumentación de soluciones; y para la praxeología global se analiza que se haga uso de una técnica de solución, se relacione, se justifique, y se creen relaciones del saber.

4.2 Descripción de profesores y contexto

En el curso-taller impartido en dos sesiones de 5 horas cada uno, en atención a las autoridades competentes del plantel; los participantes fueron diez profesores del nivel medio superior, de diferentes planteles, en sus datos generales se cuestiona si cursaron el diplomado de PROFORDEMS para identificar a los profesores con actualizaciones con base a la nueva reforma así como la experiencia laborar para conocer los contextos en los cuales se han desarrollado, y por último los recursos con los que cuenta para impartir su clase; así como su experiencia frente a grupo y la licenciatura que cursaron.

El primer cuestionario consta de diez preguntas, es un examen diagnóstico, el objetivo es explorar los conocimientos básicos sobre logaritmos y exponenciales.

Dicho examen contempla lo siguiente:

1. Definición verbal de logaritmo
2. Definición algebraica de logaritmo
3. Dominio de operación de logaritmos
4. Dominio de ecuaciones de exponenciales
5. Expresión de la definición logarítmica a exponencial
6. Dominio de las propiedades de las ecuaciones exponenciales
7. Propiedades logarítmicas
8. Dominio de función exponencial
9. Dominio de función logarítmica
10. Aplicaciones de exponenciales y logarítmicas

Una vez finalizado el pre-test se da inicio al curso taller, éste comienza con una breve introducción histórico-epistemológica, y rescata los fundamentos de logaritmos y exponenciales. Además se trabaja con:

1. Elaboración de tablas geométrica y aritmética de Arquímedes.
2. Solución de multiplicaciones con base a la tabla de Arquímedes.
3. Elaboración de tablas de Stifel.
4. Se utilizan herramientas para dar solución a ecuaciones exponenciales.

Al finalizar el curso-taller se aplicó un tercer cuestionario, en éste se incluyeron:

1. Definición algebraica y argumentativa de logaritmo
2. Demostración de propiedades
3. Uso de propiedades de exponenciales y logaritmos
4. Composición de funciones
5. Gráfica de función logarítmica
6. Gráfica de función exponencial

7. Tabla 2. Datos generales.

IDENTIFI-CACIÓN	ESCOLARIDAD MÁXIMA	EXPERI-ENCIA	ASIGNATURAS IMPARTIDAS	TIE M-PO	CERTIFICACIÓN DE PROFORDEMS	RECURSOS PARA IMPARTIR SU ASIGNATURA
P1	Licenciatura en Informática	Media Superior	Capacitación para el Trabajo, Matemáticas II: Trigonometría y Geometría Plana	6 meses	NO	Carece de material didáctico.
P2	Licenciatura en Normal Superior, Especialidad en Química y Matemáticas.	Media Superior	Química I y II, Matemáticas I, II, III, IV, Cálculo Diferencial y Cálculo Integral	7 años	SI	Cuenta con los materiales para impartir su asignatura.
P3	Maestría en Ciencias con orientación en la enseñanza de las Matemáticas	Media Superior	Matemáticas I, II, III, IV, Cálculo Diferencial y Cálculo Integral	15 años	NO	Cuenta con los materiales para impartir su asignatura.
P4	Licenciatura en Contaduría	Media Superior	Matemáticas I, II	2 años	NO	Cuenta con los materiales para impartir su asignatura.
P5	Ingeniería en Sistemas Computacionales	Media Superior	Informática I, Matemáticas II	6 meses 3 meses	NO	Carece de bibliografía y centro de cómputo.
P6	Licenciatura en Matemáticas	Media Superior	Álgebra-Trigonometría, Geometría analítica y	6 años/ 1 año/ 2 meses	NO	Carece de bibliografía y centro de cómputo.

			Matemáticas IV			
P7	Maestría en Ingeniería Industrial con especialidad en productividad	Posgrado, Licenciatura, Media Superior	Calidad total y C. Estadístico, Teoría general de sistemas, Física	7 años/ 1 semestre/1 semestre	NO	Carece de bibliografía y centro de cómputo.
P8	Cursando Maestría TIC'S Licenciatura: Ingeniería en Sistemas Computacionales	Media Superior	Informática, Capacitación para el trabajo, Matemáticas	5 años/ 6 meses	NO	Cuenta con los materiales para impartir su asignatura
P9	Candidato a Maestro en Ciencias con orientación en la enseñanza de las Matemáticas.	Secundaria, Bachillerato, Licenciatura	Química, Física y Matemáticas	16 años	No	Sí, no especifica.
P10	Licenciatura en Ingeniería Industrial	Media Superior	Matemáticas	5 años	Sí	No, no cuenta con buena infraestructura.

En un tercer momento de la investigación se realizó un análisis de tres diferentes subsistemas que contemplen en sus programas de estudio a las funciones logaritmo y exponencial, y un análisis de libros de texto bajo criterios descritos más adelante.

Este análisis se realizó con la intención de hallar las diferencias o semejanzas entre los diferentes subsistemas. Reflejando estos resultados sobre la integración de las funciones (logaritmo y exponencial) en el uso de la enseñanza-aprendizaje, así como la importancia de sus conceptualizaciones.

Por otra parte, en el análisis de los libros de texto se consideraron elementos básicos para su elección, una de las cualidades que deben poseer dichos libros es que sean de fácil distribución o se encuentren en cualquier medio para su uso, de la misma manera que en el contenido de éstos se encuentren las funciones en discusión, así como el acceso tanto para estudiantes como para profesores, además que estén de acuerdo al programa vigente.

González (2004) menciona la importancia del uso de libros para la enseñanza-aprendizaje en la asignatura de matemáticas, él analiza la transmisión del conocimiento a través del tiempo así como la consideración de los libros como una pieza importante para la sociedad, quién cita a Choppin (1980):

> *"a la vez apoyo del saber en tanto que imponen una distribución y una jerarquía de los conocimientos y contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de alumno como de profesores; es instrumento de poder dado que contiene a la uniformización lingüística de la disciplina, a la nivelación cultural y a la propagación de las ideas dominantes".*

Por este impacto se ve la necesidad de realizar un análisis didáctico de libros de texto de bachillerato. Un libro es un poder predominante en la sociedad, el cual debe tener una integración total de conceptos, definiciones, ejercicios matemáticos entre otros, para su uso dentro del aula de una forma generalizada además de ser una creación de material de consulta y utilización para la contextualización de saberes.

Capítulo 5.

Análisis didáctico de textos de apoyo y programas de estudio

Con el afán de mejorar al nivel medio superior en diferentes rubros, en relación a las expectativas de la sociedad y la dirección del país, se reconoce a los programas de estudio en busca de mejorar la calidad de la enseñanza-aprendizaje (Portilla, 2002). En este apartado se describe la importancia de los diferentes programas de estudio de los diversos subsistemas que existen en el nivel medio superior, con respecto a los temas de las funciones logaritmo y exponencial.

Asimismo, se lleva a cabo un análisis de la bibliografía con base a las funciones logaritmo y exponencial, y que su contenido abarque: conceptos histórico-epistemológicos, definiciones, propiedades, cambios de base, ecuaciones y aplicaciones en diferentes contextos.

5.1 Programas de estudio

Los diferentes programas de estudio ofrecen a los estudiantes una serie de temas en un orden específico que permiten cumplir las demandas de la sociedad, o bien para la preparación para el ingreso al nivel superior, siguiendo a Chevallard, Bosch, y Bosch (2009)

> *"Los contenidos del currículo obligatorio que propone nuestra sociedad se presentan en la actualidad como una lista voluntariamente poco estructurada y dividida en tres grandes secciones: los contenidos conceptuales, los contenidos procedimentales y los actitudinales".*

En este rubro de enseñanza y calidad, cada subsistema de nivel medio superior (bachillerato) en su mapa curricular incluye el estudio de las funciones logaritmo y exponencial de acuerdo a sus necesidades y contextos. Se analizan tres programas de estudio para identificar el momento del uso de dichas funciones.

En los programas de estudio de bachillerato se tienen diseños ambiciosos de contenido, es así como se puede perder el objetivo de la asignatura, y generar el rechazo por parte de los estudiantes, dada está situación de rechazo o resistencia de aprender el profesor está obligado a profundizar en su comunicación para involucrar al estudiante, además de mejorar el discurso para cada situación de aprendizaje, siguiendo a (Rondero, 2013, p.25)

> *El profesor que tiene como único o principal objetivo el ser capaz de enseñar "bien" a sus alumnos, lo que está estipulando como obligatorio en el programa de la asignatura correspondiente, deja de lado el profundizar sobre*

los alcances de los conocimientos que él mismo tiene sobre la disciplina científica que enseña, en nuestro caso, las matemáticas.

Existe una controversia de enseñanza ya que existe poco tiempo asignado para las planeaciones y el cargo excesivo en el currículo, se limita la enseñanza con problemas contextualizados pues se tienen variables no controlables como tiempo, disponibilidad de los estudiantes, costumbres, entre otros.

Dirección General de Bachillerato

El primer subsistema del cual se analiza el programa de estudios, es la Dirección General de Bachillerato (DGB), en el rubro de sistema escolarizado; los estudiantes egresan con un bachillerato general aspirando a un ingreso a la universidad, con una capacitación para el trabajo si éste decide ingresar al mercado laboral, Este sistema de bachillerato otorga un diploma que reconoce dicha capacitación, las capacitaciones están asignadas de acuerdo a la región donde se encuentre el centro educativo.

En este programa de estudios podemos encontrar las funciones logaritmo y exponencial a partir de cuarto semestre, en específico se encuentran en el Bloque VII (actualmente llamado de esta manera, lo que antes era unidad de aprendizaje), en la siguiente imagen se observan las competencias disciplinares marcadas con una cruz de forma horizontal correspondiente al bloque.

Para el bloque VII se requiere hacer uso de las ocho competencias matemáticas esenciales que el estudiante debe de desarrollar o las que está desarrollando en matemáticas a lo largo del bachillerato.

Imagen 1.

MATEMÁTICAS IV

COMPETENCIAS DISCIPLINARES BÁSICAS DEL CAMPO DE MATEMÁTICAS	BLOQUES DE APRENDIZAJE							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1.- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos, y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	X	X	X	X	X	X	X	X
2.-Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	X	X	X	X			X	X
3.- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	X	X	X	X		X	X	X
4.- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de la tecnología de la información y la comunicación.			X	X	X	X	X	X
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	X	X	X	X	X	X	X	X
6.- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y de las propiedades físicas de los objetos que los rodean.	X		X				X	X
7.- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.			X				X	
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	X	X	X	X	X	X	X	X

12 DGB/DCA/2013

Imagen 1. Competencias de Bloques del programa de estudios de Matemáticas IV

En la siguiente imagen se muestra la duración del tema, el cual tiene un tiempo asignado de diez horas, temas u objetos de aprendizaje bajo el siguiente orden: función exponencial, función logarítmica, gráfica de la función exponencial y logarítmica, propiedades de los exponentes, propiedades de los logaritmos, cambio de una expresión exponencial a una logarítmica y viceversa, ecuaciones exponencial y ecuaciones logarítmicas.

Al finalizar el bloque el estudiante debe de alcanzar desempeños: análisis de funciones, saber si es creciente o decreciente, resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas con uso de tablas o calculadora, trazo de gráficas, hacer uso de propiedades de exponenciales y logarítmicas así como aplicar propiedades para modelar y resolver problemas, como se muestra en la imagen dos, es decir, lograr resolver bajo esas características un problema de logaritmo y exponencial.

Imagen 2.

MATEMÁTICAS IV

Bloque	Nombre del Bloque	Tiempo asignado
VII	UTILIZAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS	10 horas

Desempeños del estudiante al concluir el bloque
A partir de la expresión de la función exponencial decide si ésta es creciente o decreciente. Obtiene valores de funciones exponenciales y logarítmicas utilizando tablas o calculadora. Traza las gráficas de funciones exponenciales tabulando valores y las utiliza para obtener gráficas de funciones logarítmicas. Utiliza las propiedades de los logaritmos para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Aplica las propiedades y relaciones de las funciones exponenciales y logarítmicas para modelar y resolver problemas.

Objetos de aprendizaje	Competencias a desarrollar
Función exponencial Función logarítmica Gráfica de la función exponencial y logarítmica Propiedades de los exponentes Propiedades de los logaritmos Cambio de una expresión exponencial a una logarítmica y viceversa Ecuaciones exponenciales Ecuaciones logarítmicas	Se conoce, aborda y resuelve problemas de funciones exponenciales que utilice como conocimientos previos requeridos en su preparación de grado superior. Escucha, interpreta y formula problemas en distintos contextos mediante la utilización de herramientas cognitivas y tecnológicas. Aprende por interés en la reafirmación de sus conocimientos básicos para la aplicación en las asignaturas siguientes. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos, desempeñando un papel activo y proactivo. Mantiene una actitud respetuosa hacia los distintos puntos de vista de sus compañeros. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales hipotéticas o formales. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. Explica e interpreta los resultados obtenidos en situaciones reales, mediante procedimientos matemáticos. Argumenta la solución obtenida de un problema, utilizando las tecnologías de la información y comunicación.

41 DGB/DCA/2013

Imagen 2. Estructura de bloque VII de las funciones logaritmo y exponencial.

El profesor tiene como directriz iniciar con funciones de manera inmediata, haciendo a un lado la historia de los logaritmos, además de que se introduce a funciones logaritmo y exponencial y se deja al final el estudio de la diversidad de problemas el cual debe modelar generalizando propiedades y cambios de base.

Todo esto implica poco tiempo asignado para estudiar temas complejos e impide un aprendizaje significativo de dichas funciones.

Dirección General Tecnológica y agropecuaria

La estructura de la Dirección General Tecnológica y agropecuaria (DGTa**)** se generaliza de acuerdo a su contexto en modalidad escolarizada así como la demanda escolar y el entorno social. En la página (SEP, Dirección General Tecnologica y agropecuaria, 2015) de dicho subsistema se marca a *La estructura curricular la cual se sitúa en tres componentes:*

> *" a. Formación básica; se articula con la educación básica y con la del tipo superior; aborda los conocimientos esenciales de la ciencia, la tecnología y las humanidades; aporta fundamentos a la formación propedéutica y a la profesional y está integrado por asignaturas.*
>
> *b. Formación propedéutica; profundiza en los conocimientos disciplinares para favorecer una mejor incorporación de los egresados a instituciones de nivel superior. Está integrado por asignaturas. El estudiante puede elegir alguna de las siguientes áreas: Físico-matemática, Económico-administrativa, Químico-biológica y, Humanidades y ciencias sociales.*
>
> *c. Formación profesional; a partir del segundo semestre en cada carrera se organizan en módulos, contenidos basados en estándares de competencia, para desarrollar las habilidades profesionales correspondientes".*

Este subsistema ofrece carreras técnicas agropecuarias, de acuerdo con la elección de carrera será la curricula asignada, los estudiantes egresan con un título de técnico en el área agropecuaria de acuerdo a la zona, se puede observar en la imagen tres, el tronco común con respecto a matemáticas, en todas las carreras se estudia álgebra en primer semestre, segundo semestre geometría y trigonometría, tercer semestre geometría analítica, cuarto semestre cálculo diferencial, quinto semestre cálculo integral y sexto semestre finaliza con probabilidad y estadística; para cada carrera sus optativas hacen la diferencia.

1er. semestre	2o. semestre	3er. semestre	4o. semestre	5o. semestre	6o. semestre
Álgebra 4 horas	Geometría y Trigonometría 4 horas	Geometría Analítica 4 horas	Cálculo Diferencial 4 horas	Cálculo Integral 5 horas	Probabilidad y Estadística 5 horas
Inglés I 3 horas	Inglés II 3 horas	Inglés III 3 horas	Inglés IV 3 horas	Inglés V 5 horas	Temas de Filosofía 5 horas
Química I 4 horas	Química I 4 horas	Biología 4 horas	Física I 4 horas	Física II 4 horas	Asignatura propedéutica* (1–12)** 5 horas
Tecnologías de la Información y la Comunicación 3 horas	Lectura, Expresión Oral y Escrita II 4 horas	Ética 4 horas	Ecología 4 horas	Ciencia, Tecnología, Sociedad y Valores 4 horas	Asignatura propedéutica* (1–12)** 5 horas
Lógica 4 horas Lectura, Expresión Oral y Escrita I 4 horas	Módulo I 17 horas	Módulo II 17 horas	Módulo III 17 horas	Módulo IV 12 horas	Módulo V 12 horas

Áreas Propedéuticas (optativas)			
Físico—Matemática	Económico—Administrativa	Químico—Biológica	Humanidades y Ciencias Sociales
1.Temas de Física 2.Dibujo Técnico 3.Matemáticas Aplicadas	4.Temas de Administración 5.Introducción a la Economía 6.Introducción al Derecho	7.Introducción a la Bioquímica 8.Temas de Biología Contemporánea 9.Temas de Ciencias de la Salud	10.Temas de Ciencias Sociales 11.Literatura 12.Historia

* Las asignaturas propedéuticas no tienen prerrequisitos de asignaturas o módulos previos.
* Las asignaturas propedéuticas no están asociadas a módulos o carreras específicas del componente profesional.
** El alumno cursará dos asignaturas del área propedéutica que elija.

Imagen 3. Estructura curricular de DGTa

En este subsistema los temas de funciones exponencial y logaritmo se estudian de manera inmediata, dado que al finalizar su estudio de Geometría Analítica se inicia con Cálculo Diferencial restando un poco de importancia al estudio de un pre-cálculo, se inicia directamente con un bloque de pre-cálculo rescatando elementos importantes para Cálculo Diferencial, a cierta perspectiva se deja un espacio breve para la compresión de temas en un precálculo.

Para los estudiantes es muy difícil encontrarse con derivadas de las funciones exponencial y logaritmo, a groso modo se puede observar que existen deficiencias en este tema, sin temor a un error probablemente se usen sólo fórmulas de derivación directa, sin saber de dónde surgen dichas fórmulas ni una aplicación directa.

Los estudiantes del área físico-matemático, únicamente estudian un precálculo en la asignatura de Matemáticas aplicadas, se estudia con mayor énfasis a las funciones logaritmo y exponencial, dando el siguiente orden de estudio a estas funciones: propiedades, función, ecuación, métodos de solución, graficación y aplicación. Por lo cual, se está negando a una parte de la población estudiantil el acceso a dichas funciones.

Dirección General Tecnológica industrial

La Dirección General Tecnológica industrial (DGTi**),** en su página web en el apartado de planes y programas, muestra el acuerdo secretarial 653 iniciado en el ciclo 2013-2014 con el que dirige su curricula en la formación básica, la cual es de interés para las demás formaciones, propias de cada subsistema de acuerdo a sus contextos y oferta educativa, se muestra a continuación en la imagen 4 (SEP, Dirección General Tecnológica industrial, 2015), los programas de estudio en un esquema general.

Este subsistema escolarizado cuenta con una curricula de formación básica y posterior una formación profesional, dado que los estudiantes egresados cuentan con un título de técnicos industriales, ofreciendo una gama de especialidades según en el contexto que se encuentre.

Imagen 4. Planes y programas DGTi

En el programa de estudio de la DGTi, en formación básica no se cuenta con alguna asignatura de pre-cálculo o alguna asignatura relacionada de manera directa con el estudio de las funciones logaritmo y exponencial, sigue la línea de estudio para matemáticas en el siguiente orden: primer semestre álgebra, segundo semestre geometría y trigonometría, tercer semestre geometría analítica, para cuarto semestre cálculo diferencial, para quinto y sexto semestre se asignan materias de acuerdo a la carrera técnica elegida y se dedican a concluir su bachillerato realizando servicio social y prácticas profesionales en alguna industria, en la imagen 5 se muestra dicha relación por semestre a impartir:

Componente de Formación Básica

SEMESTRE	ASIGNATURA	CLAVE
PRIMER SEMESTRE	Álgebra	343101-13FB
	Inglés I	322201-13FB
	Química I	342201-13FB
	Tecnologías de la Información y la Comunicación	344101-13FB
	Lógica	322501-13FB
	Lectura, Expresión Oral y Escrita I	322301-13FB
SEGUNDO SEMESTRE	Geometría y Trigonometría	343102-13FB
	Inglés II	322202-13FB
	Química II	342202-13FB
	Lectura, Expresión Oral y Escrita II	322302-13FB
TERCER SEMESTRE	Geometría Analítica	343103-13FB
	Inglés III	322203-13FB
	Biología	341101-13FB
	Ética	322502-13FB
CUARTO SEMESTRE	Cálculo Diferencial	343104-13FB
	Inglés IV	322204-13FB
	Física I	342101-13FB
	Ecología	341201-13FB
QUINTO SEMESTRE	Física II	342102-13FB
	Ciencia, Tecnología, Sociedad y Valores	322503-13FB

Última modificación
Miércoles, 26 Junio 2013 16:44

Imagen 5. Formación básica

Se hace una exclusión para los estudiantes que se encuentran en el área de Físico-Matemáticas, en el tercer semestre, además de las matemáticas que son para la formación básica se cursa la materia de Matemáticas aplicadas, se presenta a continuación en la imagen seis la estructura de esta materia, observamos que su contenido se centra en pre-cálculo, además, se realizan estudios de las funciones algebraicas y trascendentes así como todo un bloque de funciones exponencial y logaritmo.

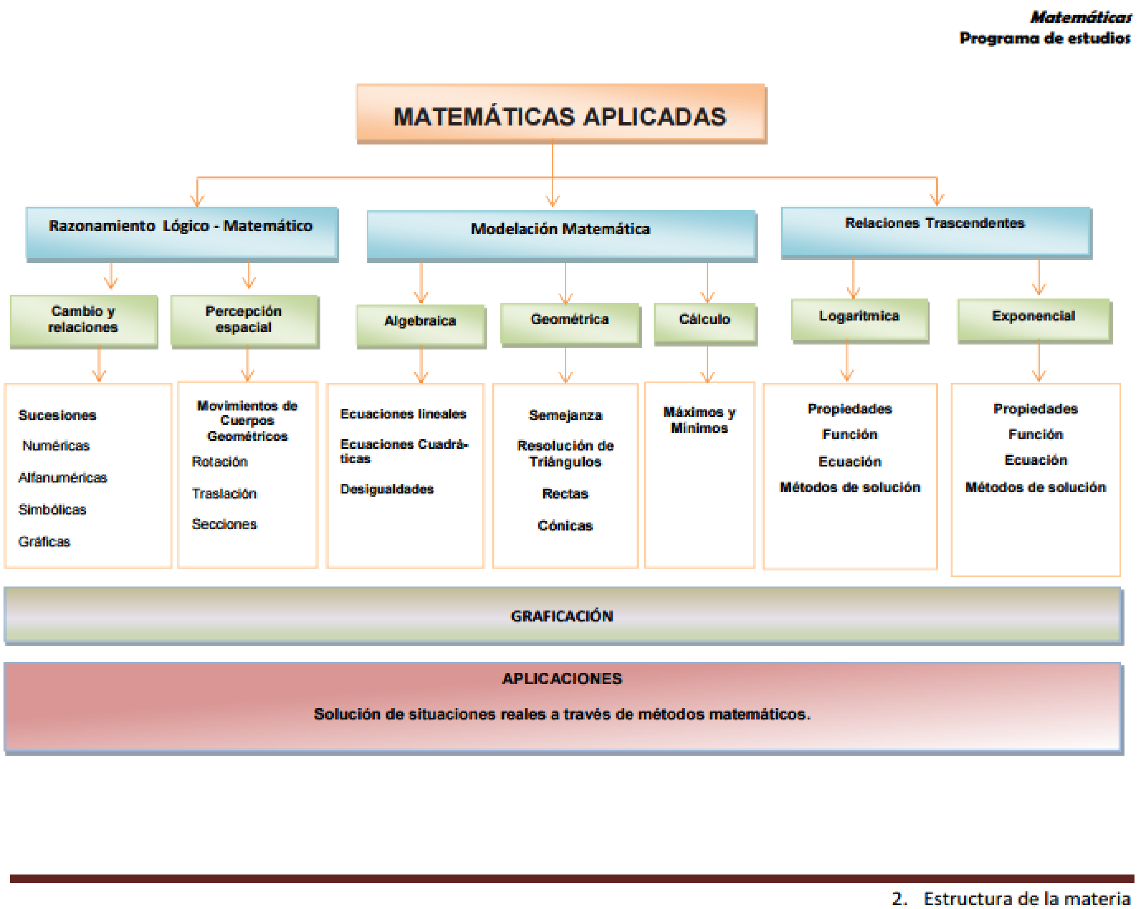


Imagen 6. Programa de estudios para la asignatura de matemáticas aplicadas

En este sistema se deja a gran parte de la población estudiantil sin conocer a las funciones exponencial y logaritmo, como se hace referencia a una parte de los estudiantes se asigna un precálculo. Las demás carreras técnicas tienen un acercamiento de manera inmediata a su estudio con cálculo diferencial, nuevamente no se dejan madurar los temas en los estudiantes cuando se estudia todo en un tema complejo.

En los Bachilleratos DGTa y DGTi se descuida gran parte de la población estudiantil con la función logaritmo y exponencial. En la curricula de cada uno de ellos se muestra el acercamiento directo con Cálculo Diferencial, dicha materia es básica para el ingreso a una ingeniería.

Existe una gran ventaja para los estudiantes del área físico-matemático, los cuales adquieren el conocimiento de las funciones logaritmo y exponencial desde su materia optativa (matemáticas aplicadas), estudian con mayor detenimiento las funciones y la aplicación de estas.

En el bachillerato general se observa que se cubre en su totalidad a la población estudiantil en el estudio de las funciones logaritmo y exponencial en la asignatura de matemáticas IV, dado que tienen un acercamiento con dichas funciones pero su estudio es muy escueto, aún con el tiempo limitado en el estudio de estas.

5.2 Análisis didáctico de Libros de Texto

En las diferentes investigaciones sobre análisis de textos didácticos se establecen dos direcciones, la primera está dirigida al aprendizaje de las conceptualizaciones y la segunda a la enseñanza de dichas conceptualizaciones. Asimismo la importancia de los libros de texto en el aula resulta en ocasiones conveniente para la construcción del conocimiento, en el sentido de ser una guía para el desarrollo curricular en el bachillerato.

Los investigadores destacan diferentes metodologías de análisis de textos, desde análisis de textos antiguos de matemáticas hasta la transposición didáctica de saberes de las mismas, manifestando el uso del libro en la realización de actividades como un importante trabajo en aula, así como el reflejo de dicha enseñanza-aprendizaje, con un posible impacto dentro de una sociedad (González, 2004).

Los libros de texto de matemáticas contienen aportaciones benéficas para los profesores, que pueden verse reflejadas para que los estudiantes lleguen a alcanzar algunos de sus objetivos de aprendizaje, facilitando el análisis y comprensión de los temas en la disciplina. Siguiendo a Ruiz (2013):

> *"Dentro del ámbito de las matemáticas, y por lo que respecta a las clasificaciones de investigaciones curriculares en educación matemática, aparecen los libros de texto como una de las variables destacadas".*

En este trabajo se realizó el análisis de libros de texto de matemáticas de bachillerato, los cuales incluyen en sus contenidos a las funciones logaritmo y exponencial. Se consideraron tres criterios de selección de los mismos:

i) De fácil acceso para los profesores y reconocidos por el programa de estudio para su uso.

ii) Accesibles para los estudiantes y que vayan de acuerdo con el programa de estudios vigente.

iii) Por un vasto contenido del tema en cuestión.

En el análisis de libros de texto de bachillerato se adopta a la metodología de tres categorías por Ruiz J., Dávila P., Etxeberria J. y Sarasua J. (2013):”*Tratamiento Didáctico del Contenido Matemático, Lenguaje Gráfico-Simbólico, Problemas y Ejercicios.*

Tratamiento Didáctico del Contenido Matemático: Se señalan aspectos didácticos, tales como la conceptualización de las situaciones, -porque la contextualización de las situaciones planteadas facilita la comprensión de los conceptos, la aplicabilidad de las matemáticas, -poniéndolas en relación directa con los fenómenos a los cuales modeliza o transfiriendo los conceptos o las técnicas de las matemáticas a diferentes contextos de utilización-, los aspectos lúdicos, motivacionales o hechos relevantes extraídos de la Historia de las Matemáticas.

Lenguaje Gráfico-Simbólico: Se aborda el análisis del lenguaje gráfico, la función de los gráficos utilizados y sus tipos, las tablas, diagramas, y otros símbolos y la tecnología utilizada en su realización.

Problemas y Ejercicios: Se analizan las actividades en sentido amplio trabajadas en el libro de texto, sus tipos, su colocación en el texto, su función, las situaciones que plantean, los enunciados, los problemas de aplicación y los contextualizados y su carácter de ejercicio propuesto en las pruebas de acceso a la universidad, que es una sección cada vez más frecuente en los textos actuales”.

Además, en la siguiente figura se muestran los elementos necesarios de las funciones logaritmo y exponencial que se espera identificar en los libros por analizar.

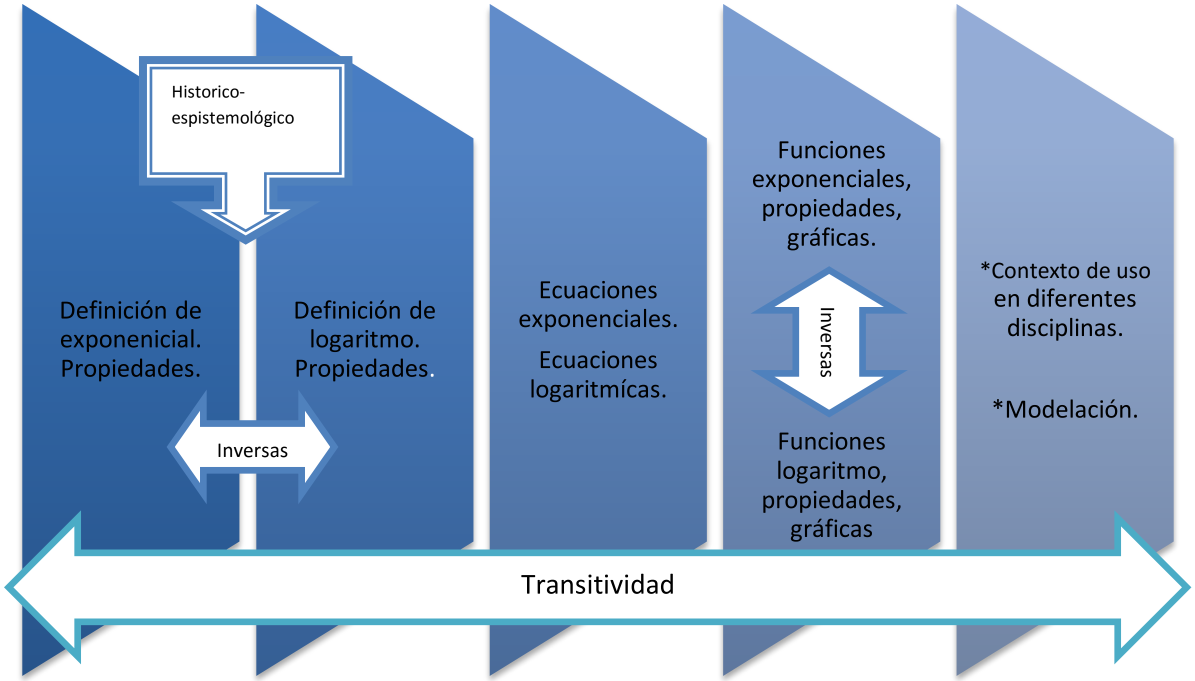


Figura 3. Saberes matemáticos referenciados a exponencial y logaritmo.

En la imagen anterior se ejemplifican el orden de preeminencia (definición, propiedades, ecuaciones exponenciales y logarítmicas, funciones logaritmo y exponencial, funciones inversas, contextos de uso y modelación), para el estudio de las funciones logaritmo y exponencial, además de observar los saberes propuestos en su totalidad del orden indicado. La figura describe de izquierda a derecha la secuencia de la conceptualización de las funciones logaritmo y exponencial, así como la transposición de saberes matemáticos.

Libro de texto uno

Swokowski, E., y Cole, J. (2002). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México: Décima Edición, Thomson Learning.

Tratamiento Didáctico del Contenido Matemático: Contiene características esenciales de un libro formal, presenta definiciones, conceptos claros y formales. Realiza contextualizaciones con diferentes áreas de conocimientos, además de una matemática formal descriptiva, en un orden entendible para el lector.

Define a la función exponencial con base a $f(x) = a^x$, para todos los reales, donde a> 0 y diferente de uno.

Para la función logaritmo, primero define a logaritmo de base a, como: Sea *a* un número real positivo diferente de uno.

El logaritmo de x con base a se define como: $Y = log_a X$ si y sólo si x=a^y para todo x>0 y todo número real y, da ejemplos de formas equivalentes.

Desarrollando el tema de las funciones logaritmo y exponencial de manera gradual que se entienda, como un apoyo para el profesor además de que también sirva de análisis para los estudiantes.

Lenguaje Gráfico-Simbólico: las funciones logarítmicas y sus propiedades hacen mención en una tabla con la relación de la exponenciación, ejemplificando cada caso. Define al logaritmo como la inversa de exponencial y marca la relación entre éstas:

Propiedades $log_a X$	Razón	Ilustración
$1. log_a 1 = 0$	$a^0 = 1$	$log_3 1 = 0$
$2. log_a a = 1$	$a^1 = a$	$log_{10} 10 = 1$
$3. log_a a^x = X$	$a^x = a^x$	$log_2 8 = \ log_2 2^2 = 3$
$4. a^{\ log_a x}\ {}_a = X$		$5^{log_5 7} = 7$

Hace uso adecuado de las definiciones con semiótica clara: Define logaritmo común como: $\log x = \ log_{10} x$ para todo x>0. Además define logaritmo natural: $\ln x = \ log_e x$ para todo x>0.

Se muestran diversos ejemplos de trazos y reflexión de gráficas, realizando un análisis propio, y apoyándose de algunos ejemplos del uso de un graficador.

Problemas y Ejercicios: Es uno de los de libros que se caracteriza por la amplia gama de ejemplos en una visión de uso de las matemáticas en general, con una serie de ejercicios de repaso y aplicación para los estudiantes.

Presenta ejemplos con la utilización de estas definiciones por mencionar algunas: escala de Richterm, ley del enfriamiento de Newton, aproximación de un tiempo de duplicación, crecimiento e interés compuesto, clásicas de interés compuesto, crecimiento, decaimiento, intensidad de luz, ejercicios de ecuaciones logarítmicas, comprobaciones de gráficas, crecimiento bacteriano, interés compuesto definiendo A= $C\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$, con desintegración radiactiva, radioterapia, entre otras.

Elementos de las funciones logaritmo y exponencial: presenta a las funciones logaritmo y exponencial, en un orden de función exponencial, función exponencial natural, funciones logaritmo, propiedades de logaritmos, ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

En el desarrollo del tema se ausenta la historia-epistemológica, conceptualizando a las funciones que satisfacen las condiciones necesarias y equivalentes que se cumplen para números reales.

Libros de texto dos

Barragán, G. (2011). Bloque VII: Utilizas funciones exponencales y logarítmicas. En G. Barragán, y A. G. Davy Pérez, *Matemáticas IV* (pp. 208-241). México: Book Mart.

Tratamiento Didáctico del Contenido Matemático: El contenido de este libro es un bagaje de conceptualizaciones, con definiciones sencillas y sin una validez conceptual de las funciones, es un compendió de información, donde no se formalizan los saberes matemáticos. Además de no considerar a la función inversa ni realizar demostraciones de uso en las funciones logaritmo y exponencial. De manera inmediata se hace la transición de ecuaciones a funciones logaritmo y exponencial, mencionando las propiedades de cada función y un bosquejo.

Lenguaje Gráfico-Simbólico: La semántica que utiliza el libro es informal y carente en semiótica, define a la función exponencial de la siguiente manera: consideremos *a*>0 y *a*≠1 entonces la función exponencial de base *a*, considerando a x ϵ R, se define como $f(x) = a^x$, al finalizar presenta unas gráficas de la definición y enista sus propiedades:

- El dominio equivale a todos números reales R.
- El rango son los reales positivos, es decir R^+.
- Cuando a>1 la función es creciente. Cuando a <1 es decreciente.
- La función pasa por el punto (0,1).
- Es inyectiva.
- Cuando a>1 el eje X es asintótico por la izquierda y cuando a<1 lo es por la derecha.

Haciendo esto para todas las funciones, se muestra débil en sus análisis de gráficas y fácil entendimiento. Da ejemplos de ecuaciones utilizando la definición de logaritmo; define logaritmo de base diez: 1) Se llama *logaritmo común* al logaritmo de base 10 y se representa $log_{10} = log$. 2) Se llama *logaritmo natural* al logaritmo natural al logaritmo de base *e* y se representa $log_e = ln$.

Posterior define a logaritmo, el logaritmo *y* de un número *x* con una base *a* es la potencia a la que hay que elevar la base para obtener dicho número, es decir: $y = log_a x$ si y sólo si $a^x = x$.

De la definición anterior define: $y = \ln x \ \ si\ sólo\ si\ e^y = x$

Muestra a las definiciones así como el uso de simbología de manera confusa y difícil entendimiento, lo cual repercute en la enseñanza-aprendizaje.

Problemas y Ejercicios: Es carente y repetitivo de aplicaciones del uso de las funciones logaritmo y exponencial, muestra ejemplos de crecimientos poblacionales, bacterianos, interés compuesto, desintegración radiactiva, interés compuesto, crecimiento, decaimento. Al final presenta una serie de ejercicios de ejemplos y ejercicios para resolver en síntesis.

Los ejercicios presentados contienen soluciones inmediatas, usando de manera directas las propiedades de logaritmos, además de una serie de ejercicios que el lector puede resolver con las ejemplificaciones, es sólo cuestión de arrastrar el lápiz dado que lo diferente en el ejemplo al ejercicio es la redacción.

Elementos de las funciones logaritmo y exponencial: En el libro de texto se presentan los temas en el siguiente orden: función exponencial, función logarítmica, gráficas de la funciones exponencial y logaritmo, propiedades de los exponentes, propiedades de los logaritmos, cambio de una expresión exponencial a una logarítmica y viceversa, ecuaciones exponenciales y ecuaciones logarítmicas.

De manera general se muestran las propiedades exponenciales, definen el logaritmo de un número así como las propiedades de los logaritmos, en una breve diferencia de logaritmo de una base a un logaritmo natural.

Libro texto tres

Barot, O. P. (2007). Funciones exponenciales y logarítmicas. En M. B. Clemente Merodio, *Matemáticas. Geometría analítica (pp.84-124) .* México: Santillán.

Tratamiento Didáctico del Contenido Matemático: Este libro contiene elementos didácticos del modelo educativo vigente, en el cuál se muestran ejemplos y ejercicios basados en un autor reconocido para la construcción del conocimiento, con definiciones claras. Si en el profesor no existe la conceptualización de las funciones logaritmo y exponencial, este libro no le será de gran utilidad.

Se hace un modelaje matemático según Pólya, ejemplificando toda construcción de un modelo de carbono radioactivo, se bosqueja la función $\mathrm{f(t+5730)=0.5\,f(t)}$, haciendo referencia a la variable t; para cada intervalo de tiempo $\mathrm{f(t+D)=p\,f(t)}$, para todo tiempo.

Este libro presenta situaciones cotidianas para que el estudiante relacione con facilidad el uso de logaritmos, y reconoce el estudio de la historia-epistemológica en la construcción de tablas con diferentes ejemplos, como el lanzar una moneda al aire.

Lenguaje Gráfico-Simbólico: Contiene semiótica clara y de fácil entendimiento para el estudiante, hace definiciones formales y realiza un análisis profundo en las funciones como en gráficas, por ejemplificar: define a la función exponencial: $f(x)=a^x$ tiene como dominio y codominio R. Cualquier número real puede ser un argumento válido para la función exponencial, pero ¿es cierto que cualquier número puede ser un posible valor de la función?; a partir de esto realiza dos cuestiones sobre la variable independiente si es menor o mayor de la variable dependiente así como para qué valores la función es creciente, decreciente o constante; presenta *el conjunto de posibles valores* $\{f(x)\ x\in D\}$ *de una función* $f\colon D\to C$ *se llama rango de f.*

Hace una escala logarítmica en metros en base diez, de -15 a 20, el estudiante debe observar a detalle los ejemplos para posteriormente reproducir la escala con diferentes ejemplos, y en seguida definir a la función logaritmo.

Otra manera de realizar un análisis en el tema es de la siguiente manera, se presenta una gráfica donde sólo se muestran un punto en el plano cartesiano de cada función (3,8) dado que $f(3)=2^3=8$, mientras que (8,3) dado $g(8)=log_2=3$ y se dibuja la función identidad en medio de cada punto, en este ejemplo se conceptualizan y rescata diversos saberes matemáticos para su estudio de cada punto en el plano cartesiano, la composición de funciones y a las funciones inversas.

Problemas y Ejercicios: Este libro muestra diversos ejercicios haciendo uso directo de ambas funciones así como de biyectividad y el cálculo de las funciones inversas. Mantiene ejercicios sobre el decaimiento en las funciones exponenciales y crecimiento, de manera inmediata presenta un ejemplo sobre el crecimiento de una célula de la cual se debe calcular el tiempo de duplicación, sugiere realizar una consulta sobre logaritmos.

En éste resalta al inicio del tema de las funciones con una introducción lanzando una pregunta detonadora sobre el SIDA y haciendo una recopilación de datos, haciendo referencia a una modelación matemática de un fenómeno real, posterior se presenta un ejemplo de una ecuación química de un proceso radioactivo: ${}^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N + {}_{-1}^{0}e + v_e$., explica el por qué la ecuación en relación a los protones como primer superíndice y a los neutrones como subíndice, más adelante indica lanzar una moneda 10 ocasiones para comparar la probabilidad del decaimiento de la moneda con la de un átomo radioactivo, si es águila no decae, si es sol decae, se realiza el llenado de una tabla así como la elaboración de una gráfica de los datos de todos los compañeros de clase.

Presenta un ejemplo del modelo sobre el decaimiento radioactivo enseguida formaliza el concepto de la función exponencial “Una función exponencial es de la forma $f(x) = a^x$”; se analizan diferentes funciones y propone que el estudiante las elabore. A través de notas realiza unas observaciones cuando la base está elevada a la 0.

Para finalizar presenta una dinámica de resolver cuadros mágicos haciendo uso de logaritmos, y cierra con una serie de preguntas de repaso, además de una aproximación histórica de dónde surgen los logaritmos, sólo que su información es escasa; presenta igual el uso de las tablas logarítmicas.

Se hacen ejemplos particulares de la vida cotidiana sobre dónde se pueden encontrar funciones, por ejemplo en la medición de temperatura, lanzamiento de una moneda, entre otras, así como las diferentes representaciones graficas correspondientes.

Elementos de las funciones logaritmo y exponencial: contiene en un orden a las funciones logaritmo y exponencial, como: función exponencial, función exponencial natural, función logaritmo, propiedades de logaritmos, ecuaciones exponenciales, ecuaciones logarítmicas, funciones inversas y aplicaciones en diversas áreas de conocimiento resaltando la transitividad en estas.

Se tiene presente la historia-epistemológica de las funciones, conceptualiza a las funciones que satisfacen las condiciones necesarias para su estudio.

Aplicaciones de logaritmos y exponenciales

El uso y manejo de los exponenciales y logaritmos se encuentran en diferentes asignaturas para el desarrollo de habilidades en el bachillerato. Se presentan en diferentes áreas de conocimiento, como por ejemplo su uso y/o aplicación. A continuación se muestran algunos ejemplos.

Ley de enfriamiento de Newton:

La temperatura de un cuerpo cambia a una velocidad que es proporcional a la diferencia de las temperaturas entre el medio externo y el cuerpo.

T= temperatura t=tiempo

$$\frac{dT}{dt} \alpha T - T_m$$

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

$$\frac{dT}{T - T_m} = -k\ dt$$

$$\int \frac{dT}{(T - T_m)} = \int -k\ dt$$

$$ln|T - T_m| = -k\ t + C$$

$$e^{ln|T-T_m|} = e^{-k\ t+C}$$

$$T - T_m = e^{-k\ t} + e^C$$

$T = Ce^{-k\ t} + T_m$ . . . ecuación general

Ejemplo: En Pachuca se tiene una temperatura de 20°C, el agua alcanza su punto de ebullición a 75°C, al paso de cinco minutos se toma la temperatura del agua y el termómetro marca 68°C. Se requiere saber la temperatura del agua sin ayuda del termómetro a los 10 minutos transcurridos. Además se necesita saber en cuánto tiempo el agua alcanza los 50°C.

Datos:

tiempo (minutos)	0	5	10	
Temperatura (°C)	75	70		50

Temperatura del medio=20 °C

Sustitución:
$T = Ce^{-kt} + T_m$, sustituyendo a T_m
$T = Ce^{-kt} + 17$

Para obtener la constante C, con t=0 y T= 75

$75 = Ce^{-k0} + 20$
$75 = C + 20$
C= $75 - 20 = 55$

Sustitución en ecuación general

$T = 55e^{-kt} + 20$

Para obtener la constante K, con t=5 y T= 68

$68 = 55e^{-k5} + 20$
$68 - 20 = 55e^{-k5}$
$48 = 55e^{-k5}$
$\frac{48}{55} = e^{-k5}$
$ln\frac{48}{55} = lne^{-k5}$
$ln\frac{48}{55} = -5k$

$-0.13613217 = -5k$

$-\frac{-0.13613217}{-5} = k$
$k = 0.02722643$

Solución: *Para obtener la temperatura con t=10 min*

$T = 55e^{-0.02722643t} + 20$
$T = 55e^{-0.02722643(10)} + 20$
$T = 61.9\ °C$

Para obtener la tiempo con T=35°C

$T = 55e^{-0.02722643t} + 20$
$30 = 55e^{-0.02722643t} + 20$
$35 - 20 = 55e^{-0.02722643t}$
$15 = 55e^{-0.02722643t}$
$\frac{15}{55} = e^{-0.02722643t}$

$$ln\frac{15}{55} = lne^{-0.02722643t}$$
$$ln\frac{15}{55} = -0.02722643t$$
$$-1.29928298 = -0.02722643$$
$$-\frac{1.29928298}{-0.02722643} = t$$
$t =$ 47.7 minutos

Para la materia de Física es común el uso de los exponentes en el tema de Magnitudes físicas y medición (Ávila y Rodríguez, 2005), dado que se deben conocer diferentes sistemas de medición además de conceptualizar notación científica, así como hacer uso del concepto en conversiones de sistemas de unidades e interpretación de resultados. Es importante resaltar que para todas las leyes de física se utilizan las leyes de los exponentes.

Además de tener presente en casi todo momento las leyes de los exponentes como lo maneja Tippens (2007), propone un resumen y repaso en los primeros capítulos incluyendo reglas de los exponentes y radicales.

En específico en el tema de ondas sonoras audibles en Tippens (2007), se utilizan diferentes propiedades de logaritmos y exponentes así como su manejo, se describen,

"*La intensidad I_0 del sonido audible apenas perceptible es el orden de 10^{-12} W/m^2. Esta intensidad, que se conoce como el umbral auditivo, ha sido adoptada por expertos en acústica como la intensidad mínima para que un sonido sea audible.*

El umbral auditivo representa el estándar de la intensidad mínima para que un sonido sea audible. Su valor a una frecuencia de 1000 Hz es

$$I_0 = 1\ x\ 10^{-12}\frac{W}{m^2} = 1\ X\ 10^{-10}\ \mu W/cm^2$$

En vista de la amplitud del intervalo de intensidades al que se es sensible el oído, es más práctico establecer una escala logarítmica para las mediciones de intensidades sonoras, la cual la base en la regla siguiente:

Cuando la intensidad I, de un sonido es 10 veces mayor que la intensidad I_2 de otro, se dice que la relación de intensidades es 1 bel (B).

Por tanto, cuando se compara la intensidad de dos sonidos, nos referimos a la diferencia entre niveles de intensidad dada por

$$B = log\frac{I_1}{I_2} \text{ bels B}$$

Donde I_1 es la intensidad de un sonido e I_2 la del otro.

Dos sonidos tienen intensidades de 2.5 x 10^{-8} W/m² y 1.2 W/m². Calcule la diferencia en niveles de intensidad en beles.

Solución:

$$B = \ log\frac{I_1}{I_2} = \log\frac{1.2\frac{W}{m^2}}{2.5\,X\frac{10^{-8}W}{m^2}}$$
$$= \log 4.8\,X\,10^7 \ = 7.68\ B$$

En la práctica, la unidad de 1B es demasiado grande. Para obtener una unidad más útil, se define el decibel (dB) como un décimo de bel.

Al usar la intensidad I_0 como patrón de comparación para todas las intensidades es posible establecer una escala general para valorar cualquier sonido. El nivel de intensidad en decibeles de cualquier sonido de intensidad I puede calcularse a partir de la relación general

$$\beta = 10\log\frac{I_1}{I_2} \quad \text{decibeles (dB)}$$

Donde I_0 es la intensidad del umbral auditivo ($1\ x\ 10^{-12}\ \frac{W}{m^2}$). El nivel de intensidad para I_0 es de cero decibeles.

Calcule el nivel de intensidad de un sonido cuya intensidad es de 1 X 10-4 W/m2.

Solución:

$$\beta = 10\log\frac{I_1}{I_2} = 10\log(\frac{\frac{10^{-4}W}{m^2}}{\frac{10^{-12}W}{m^2}})$$

$$= 10\ log10^8 \ = 10(8) = 80\ dB$$

Otra de las áreas en las que se utilizan las leyes de los exponentes y logaritmo base diez, es en Química; uno de los usos en específico es para el cálculo de pH de una solución, se ejemplifica del libro Cálculos Químicos para la preparación de soluciones de (Santillán, 2003):

"La concentación molar de un ácido o una base se puede expresar indistintamente y de manera simétricamente inversa en forma de pH o POH, sin embargo, el uso de la esca de pH es más común en el leguanje y práctica química contemporánea, reservándose el uso de pOH para casos específicos de interés particular.

En la concepción de Sórense el pH es el logaritmo negativo de la concentración molar (mol/ ℓ) de iones hidronio o hidrógeno $[H^+]$, para su cálculo se emplea la siguiente fórmula:

$pH = -log_{10}[H^+]$ (1.7)

o bien $pH = log\frac{1}{[H^+]}$ (1.8)

Expresando (1.7) $[H^+] = 10^{-pH}$ (1.9)

Según Sórense, el pOH es el logaritmo negativo de la concentración molar (mol/ ℓ) de iones hidroxilo u oxhidrilo $[OH^-]$. Se emplea la siguiente fórmula:

$pOH = -log_{10}[OH^+]$ (1.10)

o bien $pOH = log\frac{1}{[OH^+]}$ (1.11)

Expresando (1.7) $[OH^+] = 10^{-pOH}$ (1.12)

...

Ejemplo: ¿Cuál es el pH de una solución 0.0037 molar de HCl?

Datos: $[H^+] = 0.0037\ M = 3.7\ x\ 10^{-3}\ M$

Sustiyendo en (1.7):

$pH = -log_{10}[3.7\ x\ 10^{-3}]$

$= (-\log 3.7) + (-\log\ 10^{-3})$

= -0.5682 + 3

= 2.4318 (ácido)

Capítulo 6.

Resultados y análisis de conceptualizaciones

En este capítulo se describe de manera puntual los resultados de cada respuesta de los profesores de los tres cuestionarios aplicados, además de tener observaciones de cada pregunta de manera general así como un análisis parcial de cada uno de los cuestionarios y de las observaciones de cada taller.

Se describe la situación de aprendizaje, en momentos de participaciones de los profesores, reflexiones del tema y de manera general la postura de los participantes y avance reflejado de cada uno. En el análisis de las conceptualizaciones de los profesores de bachillerato en las funciones logaritmo y exponencial, deben de estar inmersas la función inversa, transposición de saberes, entre otros.

Se considera para el análisis de los cuestionarios, con respecto a la TAD la praxeología puntal (descrito en el marco teórico) con base a las siguientes tareas:

Tareas:

I. Definir
II. Demostrar
III. Calcular
IV. Representación gráficamente.

Algunas de estas tareas para su solución se necesitan hacer uso de las tecnologías, con el fin de recabar información detallada de dichas conceptualizaciones.

6.1 Cuestionario uno

Para este cuestionario se realizan de manera inmediata preguntas de definición verbal de logaritmo y definición algebraica de logaritmo, para identificar de forma general el concepto de los logaritmos y exponenciales, su manejo en ecuaciones, si conocen demostraciones e identificar funciones inversas, graficación de las mismas además del uso de las posibles áreas de aplicación. Así como de reconocer las competencias de cada profesor, como competencias se toma en cuenta la manera de argumentar cada respuesta y la habilidad de solucionar el cuestionario.

Cuestionario 1

1. Definición verbal de logaritmo: explicar el reactivo y qué se busca.

2. Definición algebraica de logaritmo

   $log_a\ x = y \quad \leftrightarrow \quad a^y = x$

3. Operaciones con logaritmos:

   I. $log_2 8 =$

   $II. log_3 81 =$

   $III.\ log_{10} 0.00001 =$

   $IV.\ log_{10} 100\ 000 =$

4. Dominio de ecuaciones exponenciales:

I. $8^x = 64$

II. $8^x = 2$

III. $5^{2x+1} = 125$

IV. $1^x = 3$

5. Expresión de la definición logarítmica a exponencial

El logaritmo base diez, del número mil es tres. Exprese este enunciado en forma exponencial.

6. Dominio de las propiedades de las ecuaciones exponenciales

El logaritmo base diez, del número mil es tres. Exprese este enunciado en forma exponencial.

7. Propiedades logarítmicas: $log_4 X + log_4 (X - 1) = log_4 6$

8. Dominio de función exponencial: Bosqueje la función $f(x)=2^x$

9. Dominio de función logarítmica

   Bosqueje $f(x) = Log_{10} X$

10. Aplicaciones de exponenciales y logarítmicas

    ¿Conoce algunas aplicaciones de los logaritmos disciplinas?

Resultados del cuestionario uno

T_1: Definición verbal de logaritmo.
Se pretende identificar si los profesores conocen la definición verbal de la función logaritmo básica.

Técnica: Para esta tarea se desea que se describa la definición verbal de logaritmo.

Teoría: Se considera la definición de Swokowski E., y Cole, J. (2002): El logaritmo de un número X en una base a es el exponente al que hay que elevar la base para obtener el número X.

Contraste de teorías	
TAD	*EOS*
Tarea 1. En esta tarea se tiene una praxeología puntual, en la cual no se observa el desarrollo de la técnica en la tarea.	*Se tiene un acercamiento al nivel uno, donde se identifica una noción de la definición verbal.*

Profesor 1. Respuesta incorrecta, da un argumento poco entendible *"encontrar el valor que requiere un determinado número para encontrar el valor mediante multiplicaciones por sí mismo (exponencial)"*.

Profesor 2. Define logaritmo de un número, *"El logaritmo con base b da un número N, es el exponente a, a la cual se eleva la base b para obtener el resultado o argumento N"*.

Profesor 3. Hace referencia a: *"Es la forma de representarlo en algo más simple, o de forma general".*

Profesor 7. Hace la anotación: *"es un número elevado a una potencia"*

Profesor 8. Da como respuesta: *"Es la inversa de la función exponencial a una base"*.

$T_{2.}$ Definición algebraica de logaritmo

$$log_a\, x = y \Leftrightarrow \; a^y = x$$

Se pretende indagar qué tanto los profesores pueden transitar de la definición verbal a la representación (registro) algebraica.

Técnica: Se puede relacionar la definición verbal con la definición algebraica de logaritmo, y que nuevamente se describa tanto la definición algebraica con la definición verbal de logaritmo.

Teoría: Se considera la definición de Swokowski E., y Cole, J. (2002): El logaritmo de un número X en una base a es el exponente al que hay que elevar la base para obtener el número X; $log_a\ x = y \Leftrightarrow\ a^y = x.$

Contraste de teorías	
TAD	*EOS*
Tarea 2, en esta tarea no se identifica la técnica empleada, se hacen algunas relaciones con la tarea asignada.	*No se concreta en un ningún nivel, pues existen respuestas escuetas además de que se hace uso de simbología la cual relacionan con la pregunta y se rescatan elementos de un conocimiento institucional.*

Profesor 1. Da un ejemplo en particular, pero no logra expresar cómo hacer la representación general de la definición de logaritmo de un número con elevar la base a un exponente, describe la definición de la siguiente manera: " $log_2 16 = 2^3$".

Profesor 2. No responde lo que se le pide, existe una confusión con argumentaciones, describe lo siguiente: *"El logaritmo de cualquier número está formado por una parte que corresponde a un número entero llamado característica y otra parte llamada mantista".*

Profesor 3. Conceptualiza la definición: "$log_a n$ ó *ln N*"

Profesor 4. Faltan elementos algebraicos en su respuesta, describe de manera incompleta la representación algebraica: "*ln=a^x* "

Profesor 7. Anota algunos elementos algebraicos en su respuesta: "ln=a^x ", hace una anotación de una propiedad logarítmica de producto de dos números.

Observaciones: Ninguno de los profesores logra expresar adecuadamente la representación algebraica que se desprende de la definición verbal. Algunos de ellos dan ejemplos particulares y otros intentan incorporar una notación logarítmica sin lograrlo, como es el caso de *ln=a^x* y $log_a n$.

Uno de los profesores escribe $log_2 16 = 2^3$, en donde intenta a través de un caso particular expresar lo que para él es el logaritmo de un número con la base correspondiente, pero hace una equivalencia inapropiada entre las dos operaciones, es decir, no logra vincular las dos operaciones adecuadamente $log_2 16 = 4 \Leftrightarrow 2^4 = 16$.

$T_{3.}$ Realizar operaciones de logaritmos *con diferente base*:

$$\text{I.}\, log_2 8 =$$
$$II. log_3 81 =$$
$$III.\ log_{10} 0.00001 =$$
$$IV.\ log_{10} 100\,000 =$$

Se pretende ver si el profesor aplica adecuadamente la definición de logaritmo en este caso enfatizando el cálculo con diferentes bases.

Técnica: Para operar con logaritmos se puede utilizar la definición de logaritmo y relacionar la definición verbal con la algebraica, se tiene por ejemplo:

$$log_2 8 = 3 \Leftrightarrow \ 2^3 = 8$$
$$log_3 81 = 3 \Leftrightarrow \ 3^3 = 81$$

Teoría: Relacionar la definición verbal con la definición algebraica, de la cual se considera la definición de Swokowski E., y Cole, J. (2002): El logaritmo de un número X en una base a es el exponente al que hay que elevar la base para obtener el número X; $log_a x = y \Leftrightarrow \ a^y = x.$

Contraste de teorías	
TAD	*EOS*
Tarea 3, para esta tarea se identifica la realización de algunos ejercicios, con dificultades en el proceso.	*Para el nivel uno, no se concreta dado que no se da solución a todas las operaciones. En el nivel dos, se considera vincular al objeto con el proceso matemático. Para el nivel tres se hacen presentes las facetas de cognitivo y medicional-temporal.*

Profesor 1. No logra identificar el logaritmo y la exponencial como operaciones inversas, mezclando ambas definiciones y realizando igualaciones incorrectas.

Profesor 2. Responde de manera correcta cada apartado, pero no argumenta ninguna respuesta.

Profesor 3**.** Da respuestas correctas con el uso de calculadora pero no argumenta sus respuestas, utiliza la propiedad para cambio de base y recurre al uso de la calculadora para concluir después $2^3 = 8$

Profesor 4. Sólo responde el tercero y cuarto de manera correcta, carece de argumento para llegar a la solución.

Profesor 7. Da solución al tercero y cuarto de manera correcta, carece de argumento en la solución.

Observaciones: Se observa que se tiene poco manejo sobre ecuaciones logarítmicas, la mayoría deja los instrumentos en blanco, puede ser que no lo conoce o que esté olvidado, se carece de dominio de la definición de logaritmo, sólo se da respuesta a las preguntas que se responden con ayuda de una calculadora o que son fáciles de recordar.

$T_{4.}$ Dominio en la solución de ecuaciones exponenciales:

I. $8^x = 64$
II. $8^x = 2$
III. $5^{2x+1} = 125$
IV. $1^x = 3$

Se trata de ver si los profesores son capaces de resolver ecuaciones exponenciales para lo cual se requiere tener un manejo adecuado de la definición de logaritmo, pero ahora la atención está en el cálculo del exponente correspondiente que da o no solución a la ecuación (no se está pidiendo cálculo de logaritmos).

Técnica: Se emplea las propiedades de los exponentes para las soluciones además del uso de la definición de logaritmo como función inversa, y se realizan las ecuaciones correspondientes, por ejemplo:

I. $8^x = 64 \Rightarrow 8^x = 8^2 \Rightarrow log_8 8^x = log_8 8^2 \Rightarrow x=2$
II. $8^x = 2 \Rightarrow log_8 8^x = log_8 2 \Rightarrow x = log_8 2$

III. $5^{2x+1} = 125 \Rightarrow 5^{2x+1} = 5^3 \Rightarrow log_5 5^{2x+1} = log_5 5^3 \Rightarrow 2x + 1 = 3 \Rightarrow x=1$

Teoría: Se utilizan propiedades de los exponentes Swokowski E., y Cole, J. (2002):
Razón

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^x = a^x$$

Además, se tiene el Teorema sobre funciones inversas: sea f una función biunívoca con domino De imagen R. Si g es una función con domino R e imagen D, entonces g es la función inversa de f si y sólo si son ciertas estas dos condiciones: 1) g(f(x))= x para toda x en D, 2) f(g(x))= y para toda y en R

Contraste de teorías	
TAD	*EOS*
Tarea 4, en la tarea generada se identifican diferentes técnicas en dichas soluciones, pero no se relaciona el saber.	*No se concreta en ningún nivel pero se tiene del primero elementos que construyen la conceptualización de las funciones, en el nivel dos se realiza un acercamiento a la articulación de saberes y en el nivel tres se usa la faceta cognitivo en la solución de problemas y la faceta de medicional-temporal con el apoyo de la calculadora.*

Profesor 1. El profesor da como respuesta que en el II y IV no existe solución, en el I y III contesta de manera correcta pero no da un argumento, da de manera inmediata las respuestas, hace sustitución de para x=1 en el tercero.

Profesor 2. Hace uso de logaritmos de manera inmediata, trata de apoyarse de la definición de logaritmos, se puede observar que hace uso de calculadora. Da respuesta para el II y en el IV responde *"indeterminado".*

Profesor 3. Para los ejercicios I y III da respuesta inmediata, para el ejercicio II hace uso correcto de las propiedades de logaritmos, llega a la solución correcta del ejercicio.

Profesor 4. En la cuestión I da respuesta inmediata, hace un tachado de una posible respuesta, para el II no da respuesta, en el III da como respuesta equis igual a uno y resuelve la ecuación con sólo los exponentes, deja a un lado las bases $2x + 1 = 3;\ \ obtiene\ x = {}^{3}/_{2}$, en IV responde *"No se puede" "No existe".*

Profesor 7. En el primero da como respuesta 2 y argumenta 8x8=64, se apoya un poco en la definición de logaritmos. Para el II responde manera correcta, hace uso de las propiedades de los logaritmos para la solución y da su respuesta en decimales, en el III da una respuesta sin argumentos, y en el IV su respuesta *"No existe".*

<u>Observaciones:</u> Algunas de las respuestas son sin argumentos, se carece de la definición y uso de las propiedades de logaritmos para justificar sus respuestas, saben las respuestas de cierta manera empírica pero no hay justificación del porqué de dichas respuestas, se tiene claro que sobre la base de un número debe de ser diferente a uno pero ningún profesor argumenta su respuesta.

T_5. Expresión de la definición logarítmica a exponencial

El logaritmo base diez, del número mil es tres. Exprese este enunciado en forma exponencial.

Se busca representar el dominio sobre la definición verbal donde el profesor pueda vincular tanto la definición verbal como la definición algebraica.

Técnica: Lo esperado es que se establezca la relación $log_a\ x = y \Leftrightarrow\ a^y = x$. *Para que se observe el dominio de la definición de logaritmo,*

$$log_{10}\ 1000 = 3\ \Leftrightarrow\ 10^3 = 1000$$

Teoría: Se utiliza la definición de logaritmo, Swokowski E., y Cole, J. (2002): El logaritmo de un número X en una base ***a*** *es el exponente al que hay que elevar la base para obtener el número X;* $log_a\ x = y \Leftrightarrow\ a^y = x$.

Contraste de teorías	
TAD	*EOS*
Tarea 5, Se observa que en las técnicas se responde a la tarea de manera acertada sin un uso de tecnología.	*Se puede considerar al nivel uno por dar solución a dicha cuestión, pero faltan elementos para concretar en los siguientes niveles.*

Profesor 1. Responde de manera correcta y hace uso de la definición de logaritmo, haciendo anotaciones de multiplicar tres veces 10 para corroborar su respuesta.

Profesor 2. Da como respuesta $1000=10^3$.

Profesor 3. Expresa de manera correcta la representación algebraica de logaritmo pero completa la definición con la expresión *"$3^{10}=1000$"*

Profesor 7. Escribe de manera correcta la representación algebraica de logaritmo pero no hace uso de la definición para dejar clara su respuesta.

T_6. Dominio de las propiedades y solución de las ecuaciones exponenciales

Resuelva y compruebe la ecuación exponencial: $2^{x+1} = 4^{x+3}$

Con esta pregunta se busca que el profesor identifique y haga uso de la misma base y así mismo utilice de las propiedades de los exponenciales para la solución de la ecuación.

Técnica: Para la solución de esta ecuación se requiere hacer uso de las propiedades de los exponentes, además de la función inversa, como posible solución, se describe:

$2^{x+1} = 4^{x+3} \Rightarrow 2^{x+1} = (2^2)^{x+3} \Rightarrow 2^{x+1} = 2^{2x+6} \Rightarrow log_2 2^{x+1} = log_2 2^{2x+6}$
$x + 1 = 2x + 6 \Rightarrow -5 = x$

Teoría: Se hace uso de la definición de función inversa, descrita anterior, y se utilizan propiedades de los exponentes Swokowski E., y Cole, J. (2002):

Razón	Razón
$a^0 = 1$	$a^n a^m = a^{n+m}$
$a^1 = a$	$a^{n^m} = a^{n*m}$
$a^x = a^x$	$a^n/a^m = a^{n-m}$

Contraste de teorías	
TAD	*EOS*
Tarea 6, No se puede concretar en ninguna tarea por carencia de elementos en las soluciones.	*No se puede identificar ningún nivel pues sólo realizan anotaciones que pudieran auxiliar en la solución.*

Profesor 1. Hace igualaciones de las bases con diferentes exponentes”$2^4=4^2$; $2^5=4^3$; $2^{3+1}=4^{-5+3}$, no responde bien.

Profesor 4. Realiza una sustitución directa en los exponentes de las bases “$2^{2+1}=4^{2+3}$; $2^3=4^5$”, no realiza más.

Profesor 7. Intenta resolver, hace uso de logaritmos naturales, aplica la propiedad del exponente, calcula los logaritmos con apoyo de calculadora y deja expresado productos.

<u>Observaciones:</u> De los tres profesores que responden ninguno llega a un resultado, sólo hacen notaciones y tratan de recordar algunas propiedades. No está claro el concepto de logaritmos y exponenciales.

$T_{7.}$ Propiedades logarítmicas

$$log_4X + log_4(X-1) = log_4 6$$

Se quiere analizar el dominio de las propiedades logarítmicas, en particular la de producto, así como utilizar la definición algebraica de logaritmos para dar solución a dicha pregunta. No se quiere llegar a una demostración propia de logaritmos.

Técnica: Para esta tarea se requiere emplear la propiedad del producto para dar solución a la ecuación, así como la definición de función inversa. En esta tarea se deben tener herramientas para la solución de ecuaciones de segundo grado, se emplea más de una tecnología.

$$log_4X + log_4(X-1) = log_4 6$$
$$log_4 x(X-1) = log_4 6$$
$$4^{log_4 x^2 - x} = 4^{log_4 6}$$
$$x^2 - x = 6$$

X=3, tiene solución.

Teoría: Para esta tarea necesita tener presente la siguiente propiedad $log_a X + log_a y = log_a xy$, a partir de esto, se requiere conocer la función inversa, descrita anteriormente y solucionar con herramientas de ecuaciones de segundo grado.

Contraste de teorías	
TAD	*EOS*
Tarea 7, en la realización de la tarea no se puede concretar existen carencia de elementos en las soluciones.	*No se puede identificar ningún nivel pues sólo realizan anotaciones que pudieran auxiliar en la solución.*

Profesor 1. Trata de responder algo pero raya sus anotaciones y deja ver un signo de interrogación.

Profesor 3. Identifica la propiedad de producto pero no desarrolla nada, únicamente deja expresada la multiplicación.

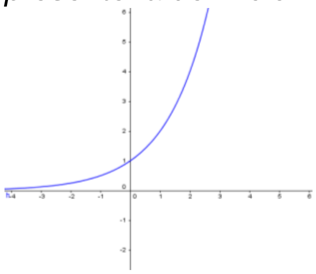
Observaciones: sólo un profesor hace uso de las propiedades de producto, en la mayoría se desconoce o bien no recuerda dichas propiedades.

$T_{8.}$ Dominio de función exponencial

Bosqueje la función *f(x)=2^x*

Se quiere conocer el dominio de la función general de la forma $f(x) = a^x$, así como la familiaridad de sus generalidades de dicha función en particular.

Técnica: En esta tarea se hace uso de una sola técnica de la cual se debe tener presente la definición de la función exponencial.



Teoría: Se utiliza la definición de Swokowski E., y Cole, J. (2002): $f(x) = a^x$*, para todo x en R donde a>0 y a≠1.*

Contraste de teorías	
TAD	*EOS*
Tarea 8. Se identifica un acercamiento en la solución de la tarea.	*Se encuentra la conceptualización de las funciones en el nivel uno pues existe una solución al problema aunque se reflejan carencias.*

Profesor 1. Hace ubicación de cuadrantes, coloca en desorden el número de cuadrante: *"I, IV, III, II"*

Profesor 2. Su bosquejo para los números reales positivos es adecuado pero no marca dominio sobre la función y en los números negativos pasa por el tercer cuadrante la función.

Profesor 3. Realiza su bosquejo adecuado, carece de dominio la función.

Profesor 4. Localiza algunos puntos en el plano, sólo marcando unos puntos en el eje x y hace una tabla de valores:

X	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
F(x)	*1*	*2*	*4*	*8*	*16*

Profesor 7. Su gráfica corresponde a la solicitada y realiza una tabla de valores que se muestra a continuación:

X	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
F(x)	*1*	*2*	*4*	*8*	*16*

Profesor 8. Su bosquejo es correcto, aunque carece de dominio y realiza una tabla de valores:

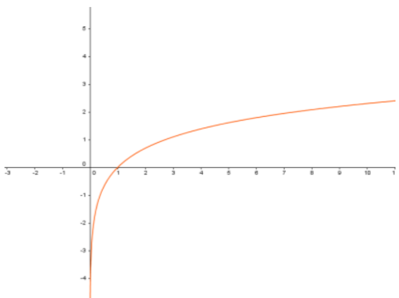
X	*0*	*1*	*2*	*3*
F(x)	*1*	*2*	*4*	*8*

Observaciones: Tres profesores realizan correctamente el bosquejo de la gráfica apoyándose de una tabla de valores, ningún profesor da generalidades sobre la función, en las respuestas de los demás profesores no se logra observar nada, sólo un profesor que se confundió en el orden de los cuadrantes.

$T_{9.}$ Dominio de función logarítmica
Bosquejé $f(x)= Log_{10}X$

Se quiere conocer el dominio de las generalidades de la función de logaritmo de base diez y/o que se apoye de la definición de logaritmo para hacer un bosquejo de la función.

Técnica: Se tiene una sola técnica para la solución de esta tarea, se debe hacer uso de la definición de la función logaritmo y realizar dicha gráfica.



Teoría: Se utiliza la definición de Swokowski E., y Cole, J. (2002): $f(x) = log_x$*, para todo x en R donde x>0.*

Contraste de teorías	
TAD	*EOS*
Tarea 9, Se considera un acercamiento en la solución de la tarea, pero se reflejan algunas carencias.	*Se identifica a la conceptualización de las funciones en el nivel uno con carencias de solución y débiles.*

Profesor 1. Hace ubicación de cuadrantes, coloca en desorden el número de cuadrante: *"I, IV, III, II".*

Profesor 2. Realiza la función de *"f(x)=ln x"*, no marca dominio de la función.

Profesor 3. Se confunde de función, hace una función creciente muy parecida a de *"f(x)=ln x",* no tiene tabla de valores.

Profesor 7. Su gráfica se encuentra bien y realiza una tabla de valores con apoyo de una calculadora:

X	1	10	20	40	60
F(x)	0	1	1.3	1.6	1.77

Profesor 8. Su gráfica no corresponde a la solicitada y realiza una tabla de valores, carece de dominio en la función:

X	-2	-1	0	1	2
F(x)	0.3	0	-infinito	0	0.30

Observaciones: No existe un dominio sobre la función, no se hace uso de la calculadora para poder hacer un bosquejo y en su totalidad no se marca el dominio de la función, se carece de tablas de valores para su apoyo y quién las realiza son erróneas.

T_{10}. Aplicaciones de exponenciales y logarítmicas

¿Conoce algunas aplicaciones de los logaritmos en diferentes disciplinas?

Se quiere identificar qué tanto el profesor conoce de las aplicaciones dado que las contextualización del tema en diferentes disciplinas son importantes para los aprendizajes.

Técnica: Se quiere el reconocimiento y la relación de las funciones logaritmo y exponencial con diferentes áreas de conocimiento.

Contraste de teorías	
TAD	*EOS*
No se plantea ninguna tarea en específico, sólo se requiere observa las diversas relaciones que se establecen con las diferentes asignaturas.	*Se espera la identificación del nivel tres por el tipo de argumentaciones en dicha tarea.*

Profesor 1. Su respuesta la generaliza: *“Matemáticas”*

Profesor 3. No hace mención de disciplinas, menciona: *“Principalmente en el crecimiento demográfico, en experimentos de Química”*

Profesor 4. Su respuesta es *“No”*

Profesor 7. Responde *“Sólo para facilitar los cálculos”*

Observaciones: De manera general se desconocen las principales aplicaciones en las diferentes áreas sobre ecuaciones y funciones de los logaritmos y exponenciales, sólo un profesor hace mención en el área de Química y Estadística, así para facilitar cálculos, no se dice más.

Se observa una deficiencia sobre la definición tanto verbal como algebraica de logaritmos y exponenciales, se carece de lo abstracto y concreto de dichas funciones logarítmicas y exponenciales, al no tener dominio sobre la definición no se puede dar respuesta a algunas cuestiones planteadas. Dada la deficiencia de la conceptualización se carece de un buen desempeño en la solución de ecuaciones tanto logaritmos y exponenciales, no se tienen presente las propiedades de cada una de ellas, así también existe la ausencia de gráficas, no se hace la transversalidad de una definición para una solución de ecuación. Se puede observar el uso habitual sobre la calculadora.

6.2 Cuestionario dos

Para la elaboración de este cuestionario se quiere identificar elementos históricos-epistemológicos de logaritmos y exponenciales principalmente de tablas geométricas y aritméticas de Arquímedes, así como de Stifel.

Con el desarrollo del curso-taller la idea principal es recordar a los profesores los elementos olvidados de logaritmos y exponenciales, enriquecer herramientas para dar solución a ecuaciones.

Cuestionario 2.

1. Elabore una tabla equivalente a la de Arquímedes, tomando como base a los números 3,5 y 10, en la sucesión geométrica y del 1 al 10 en la aritmética.

2. Resuelva las siguientes multiplicaciones utilizando las tablas elaboradas
1) 27X3=
2) 25X625=
3) 1000X100000=
4) 9X81=
5) 1000000X10000=
6) 125X3125=

3. Elabore tres tablas como la de Stifel con bases 3,5 y 10 en la progresión geométrica y de -4 hasta 8 en la serie aritmética.

4. Resuelve la ecuación exponencial:
$3^{5x-2} = 9^4$

Resultados de cuestionario dos

$T_{1.}$ Elabore una tabla equivalente a la de Arquímedes, tomando como base a cada uno de los números 3,5 y 10, en lo que corresponde a la progresión geométrica, considerando los valores de 1 a 10 en la progresión aritmética.

Se pretende identificar si el profesor es capaz de desarrollar las tablas de Arquímedes, para cada una de las bases indicadas, dando los correspondientes valores de la progresión geométrica, cuando la progresión aritmética correspondiente está entre 1 y 10. Es de interés mencionar que en el curso se desarrolló la tabla de Arquímedes para una base igual a 3.

Técnica: Se emplean sólo las propiedades de los exponentes, para la elaboración de dichas tablas.

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}
3	*9*	*27*	*81*	*243*	*729*	*2187*	*6561*	*19683*	*59049*

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
5^1	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6	5^7	5^8	5^9	5^{10}
5	*25*	*125*	*625*	*3125*	*15625*	*78125*	*390625*	*1953125*	*9765625*

Teoría: Las propiedades de los exponentes son el eje para la elaboración de dichas tablas, Swokowski E., y Cole, J. (2002):

Razón Razón

$a^0 = 1$ $\qquad$ $a^n a^m = a^{n+m}$

$a^1 = a$ $\qquad$ $a^{n^m} = a^{n*m}$

$a^x = a^x$ $\qquad$ $a^n/a^m = a^{n-m}$

ontraste de teorías	
TAD	*EOS*
Tareas 1. Se plantea una sola técnica para la solución de dicha tarea, pero se encuentra que se tiene dominio sólo con una base.	*En esta tarea se identifica el nivel uno para la solución de la tabla de base tres.*

Profesor 1. Realiza la tabla de progresión aritmética 3 de Arquímedes

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

Profesor 2. Hace progresión aritmética y geométrica del número 3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

Profesor 3. Realiza la siguiente tabla:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

Profesor 4. Hace lo siguiente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

Profesor 5. Realiza la siguiente tabla y hace una secuencia de flechas como se muestra a continuación:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
3	9	27	81	243	<u>729</u>	2187	6561	19683	59049

Profesor 6. Realiza la progresión aritmética del número 3 hasta el 12:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	177,147	531,441

<u>Observaciones:</u> Se tiene dominio sobre la base 3, no existe una vinculación con la base 5 aunque puede ser de fácil dominio, sólo un profesor realiza una progresión geométrica para la base 3, uno más hace vinculaciones en la tabla para obtener la progresión aritmética, se puede observar a un profesor que hace relaciones de multiplicación y es así como llena su tabla.

$T_{2.}$ Resuelva las siguientes multiplicaciones utilizando las tablas elaboradas

1) 27X3=
2) 25X625=
3) 1000X100000=
4) 9X81=
5) 1000000X10000=
6) 125X3125=

Con apoyo de las tablas construidas, se pretender ver si el profesor logra obtener el resultado de dichos productos, identificando la base y aplicando propiedades de los exponentes.

Técnica: Se emplea el uso de las tablas para solucionar el producto y las propiedades de los exponentes, de manera general se deben de igualar las bases, nuevamente escribir el producto representado con la misma base, para posterior sumar los exponentes, buscar la base con su exponente en dicha tabla y anotar el resultado, por ejemplo: 25X625=$5^2 * 5^4 = 5^6 = 15625$

Teoría: Se utilizan las propiedades de los exponentes, Swokowski E., y Cole, J. (2002):

Razón	Razón
$a^0 = 1$	$a^n a^m = a^{n+m}$
$a^1 = a$	$a^{n^m} = a^{n*m}$
$a^x = a^x$	$a^n / a^m = a^{n-m}$

Contraste de teorías	
TAD	*EOS*
Tarea 2. Se utiliza diferentes técnicas de solución a la tarea así como la identificación de una débil justificación de resultados.	*Se identifica el nivel uno, en la solución de las actividades, aunque no está concreto en el nivel dos se toman elementos de algunas soluciones donde se observa una articulación de saberes.*

Profesor 1. Resuelve el ejercicio 1 y 4, se puede observar que se apoya de una calculadora, no ocupa la tabla anterior.

Profesor 2. Hace dos ejercicios, el 1 y 4 pero no se observa el apoyo de tablas.

Profesor 3. Escribe las respuestas de los ejercicios 1 y 4 no se observa que ocupe las tablas.

Profesor 4. Resuelve los ejercicios 1, 2, 3, 4, 5 de manera correcta aunque se observa que no hay apoyo de tablas.

Profesor 5. Resuelve los ejercicios 1 y 4, hace uso correcto de tablas, da respuesta correcta: *"$3^3 * 3^1$= 27 * 3= 81; $3^4 * 3^2$= 81 * 9 = 729".*

Profesor 6. Se apoya en la definición de exponencial pero no da solución correcta a todas las preguntas, sólo a las de base 10: *"1) 3^4; 2) 3^{8*8}; 3)10^8; 4) 3^6; 5)10^{10}; 3^{11*7}?, 390,625*"

<u>Observaciones:</u> Se identifica la ausencia del uso de tablas cabe mencionar que no se observa la transposición de saberes, se resuelven los ejercicios 1 y 4 donde la mayoría responden de manera correcta pero sin argumento, otro profesor da respuesta a todas con ayuda de una calculadora; un profesor hace buen uso de la tabla de base 3 para dar solución a los ejercicios 1 y 4, por último un profesor hace uso de la tabla de base 3, existe confusión en su manejo y no da solución a los ejercicios, reconoce la base y exponente, resuelve de manera correcta los ejercicios 3 y 5 aún con la carencia de tablas.

$T_{3.}$ Elabore tres tablas como la de Stifel con bases 3, 5 y 10 en la progresión geométrica y de -4 hasta 8 en la progresión aritmética.

Se pretende que los profesores apliquen las propiedades de los exponentes con respecto a las tablas de Stifel, pero ahora con bases correspondientes 3, 5 y 10 en la progresión geométrica y de -4 hasta 8 en la progresión aritmética.

Técnica: Hacer uso de las propiedades de los exponentes.

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5
1/81	1/27	1/9	1/	1	3	9	27	81	243

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
5^{-4}	5^{-3}	5^{-2}	5^{-1}	5^0	5^1	5^2	5^3	5^4	5^5
1/3125	1/625	1/25	1/5	1	5	25	125	625	3125

Teoría: Se utilizan las propiedades de los exponentes, Swokowski E., y Cole, J. (2002):

Razón Razón

$a^0 = 1$ $\qquad$ $a^n a^m = a^{n+m}$

$a^1 = a$ $\qquad$ $a^{nm} = a^{n*m}$

$a^x = a^x$ $\qquad$ $a^n/a^m = a^{n-m}$

Contraste de teorías	
TAD	*EOS*
Tarea 3, Se identifica la realización de las tareas.	*Se identifica en nivel uno por la solución de problemas. Para el nivel dos se tienen la articulación de saberes.*

Profesor 1. Realiza la siguiente tabla:

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1/81	1/27	1/9	1/3	1	3	9	27	81	243	729	2,187	6561
1/625	1/125	1/5	1/5	1	5	25	125	625	3,125	15,625	390,625	

Profesor 2. Da como respuesta:

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1/81	1/27	1/9	1/3	1	3	9	27	81	243	729	2,187	6561

Profesor 3. Elabora la siguiente tabla:

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1/81	1/27	1/9	1/3	1	3	9	27	81	243	729	2,187	6561

Profesor 4. Anota como respuesta:

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1/81	1/27	1/9	1/3	1	3	9	27	81	243	729	2,187	6561

<u>Observaciones:</u> Un profesor elabora una tabla de base 3 y 5 de manera correcta, nuevamente realizan la tabla de base 3 los demás profesores de manera correcta.

$T_{4.}$ Resuelva la ecuación exponencial:

$$3^{5x-2} = 9^4$$

Se quiere observar el manejo de la definición algebraica y las propiedades de los exponentes.

Técnica: Se debe de tener la misma base, posterior utilizar la definición de función inversa, para entonces solucionara la ecuación.

$3^{5x-2} = 9^4 \Rightarrow 3^{5x-2} = 3^{2^4} \Rightarrow 3^{5x-2} = 3^8 \Rightarrow log_3 3^{5x-2} = log_3 3^8$

$5x - 2 = 8 \Rightarrow$ x=2

Teoría: Se utilizan las propiedades de los exponentes, además de la función inversa, descrita anteriormente.

Contraste de teorías	
TAD	*EOS*
Tarea 4, se identifica posibles soluciones pero existen debilidades en las propiedades de los exponentes.	*Parcialmente se encuentra en nivel uno por las conexiones establecidas en la solución.*

Profesor 1. Resuelve la ecuación de manera correcta apoyándose de propiedades de logaritmos.

Profesor 2. Llega al resultado de manera incorrecta, sólo trabaja con los exponentes:

5x-2=8 ⇨ $5x = 10$ ⇨ $x = 2$ ⇨ $38 = 94$

Profesor 3. Utiliza de manera correcta logaritmos para solucionar la ecuación y llega a la respuesta correcta.

Profesor 4. Resuelve la ecuación ocupando una división, eliminando las bases y colocando los exponentes para sumar, finalmente da el resultado.

"$3^{5x-2}=3^{8}$

$$\frac{3^{5x-2}}{3^{8}} = 0$$

$3^{5x-2-8} = 0$; x=2"

Profesor 6. Realiza una operación de logaritmo: "$log_3 8 = 6561$"

<u>*Observaciones;*</u> Dos profesores responden de manera correcta con apoyo de la definición algebraica así como el dominio de las propiedades de logaritmos y exponenciales. De manera particular un profesor deja a un lado las bases y trabaja sólo con exponente asumiendo que es la misma base 3=9, no reduce a una sola base 3=3^2. Un profesor ocupa la propiedad $\frac{log_a}{log_a} = \frac{\ln a}{\ln a}$, resuelve de manera inmediata con uso de calculadora. Es interesante lo que realiza el profesor 4 pues realiza división eliminando las bases, toma sólo los exponentes y resuelve con una ecuación lineal e igualando a cero.

Hubo un profesor que no entregó su cuestionario, uno más dejó su cuestionario en blanco, para los demás que dieron respuesta hacen un mínimo esfuerzo en dar solución a lo planteado, se observa apatía sobre el mismo curso y reflejado en los instrumentos. Al responder se observa que se tiene un mayor dominio sobre la base 3 tanto en progresión aritmética como geométrica, no existe un dominio en la definición algebraica ni propiedades a pesar de la parte del curso en que se recordaron elementos históricos-epistemológicos, definición verbal y algebraica.

6.3 Cuestionario tres

Para la elaboración de este cuestionario se quiere identificar elementos como definición algebraica y argumentativa de logaritmo, demostración de propiedades, uso de propiedades de exponenciales y logaritmos, composición de funciones, gráfica de función logarítmica y gráfica de función exponencial.

Es decir, que los profesores recuerden de manera significativa a los exponenciales de manera concreta, así como mejorar su argumento, transposición de saberes y el reconocimiento de la función logaritmo, su inversa que es la función exponencial y viceversa.

Cuestionario tres

1. Dé la definición del logaritmo de un número y exprésela matemáticamente. Explique su respuesta.

2. Demuestre la siguiente propiedad $log_a {}^{n}/_{m} = log_a n - log_a m$

3. Encuentre el valor de x de la ecuación exponencial: $e^{ln(2x-1)} = 5$

4. Dadas las funciones f(x)=ln x^2 y g(x)=$e^{\sqrt{x}}$, realice la operación, (fog)(x)=f(g(x)).

5. Grafique la función f(x)=$log_2(x-3)$

6. Grafique la función f(x)= e^{x-2}

Resultados del cuestionario tres

$T_{1.}$ Dé la definición del logaritmo de un número y exprésela matemáticamente. Explique su respuesta.

Se quiere observar qué tanto puede expresar verbalmente la definición "El logaritmo de un número es el exponente al que se requiere elevar la base para obtener dicho número". Por otra parte se pide que se exprese matemáticamente, se pretende identificar si logra hacer una representación algebraica de la forma $log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

Técnica: En esta tarea se debe escribir la definición verbal y algebraica de logaritmo.

Teoría: Se considera la definición de Swokowski E., y Cole, J. (2002): El logaritmo de un número X en una base a es el exponente al que hay que elevar la base para obtener el número X.

Contraste de teorías	
TAD	*EOS*
Tarea 1. Se identifica un acercamiento en la solución de la tarea planteada.	*Se identifica el nivel uno con relación a la solución de problemas.*

Profesor 1. La respuesta del profesor en la definición *"Es el exponente de la base"* y con relación a matemáticamente realiza la siguiente tabla:

0	1	2	3
1	10	100	1000

Profesor 2. Da como respuesta *"Es el exponente al que hay que elevar para obtener un número (valor) de la base* $log_{10} = x^{10}$ $log_{10}\, x = y \quad 10^{y} = x$*"*

Profesor 3. Define *"*$log_{a}\, y = x \qquad a^{x} = y^{a}$ "

Profesor 4. La respuesta que da *"En una base de logaritmo determinada- es el exponente a la cual hay que elevar la base"*

Profesor 5. Su respuesta del profesor *"El logaritmo con base b de un número N es el exponente de a.* $log_{b}N = a$ *"*

Profesor 6. La respuesta del profesor *"Es el n°. al que hay que elevar para obtener cierto número* $log_{a}\, x = Y \quad a^{y} = X$ *"*

Profesor 7. Respuesta del profesor *"Exponente de un número elevado a una base"*

Profesor 8. La respuesta del profesor *"Exponente al que hay que elevar una base obtener dicho número", para la definición matemática da como respuestas "*$log_{10}4 = 0.6020$; $10^{0} * 6020$ *"*

Profesor 9. Define *"Es la representación de un número base elevado a el número en cuestión" "* a^{2}*=2*log_{a} *".*

Profesor 10. Da como respuesta: *"Es el exponente de un número al que hay que elevar para encontrar dicho número* $log_{10} = n$ *"*

<u>*Observaciones:*</u> Los profesores carecen de definición verbal y algebraica, y no existe una relación entre estas. No se instaló dicha definición por lo tanto no se puede argumentar su respuesta ni ejemplificar de dicha situación.

T$_{2.}$ Demuestre la siguiente propiedad: $log_a{}^{n}/_{m} = log_a n - log_a m$

Se quiere identificar el dominio de las propiedades de logaritmos y de manera particular cómo jerarquiza, plantea, da solución y argumenta a la propiedad del logaritmo de un cociente.

Técnica: Domino de las propiedades de logaritmos, se puede emplear:
Sea $log_a X = x$; esto significa que $a^x = X$
Sea $log_a Y = y$; esto significa que $a^y = Y$

$$log_a \frac{X}{Y} = log_a \frac{a^x}{a^y} = log_a a^{x-y} = x - y = log_a X - log_a Y$$

Teoría: Demostración Swokowski E., y Cole, J. (2002):
$log_a{}^{u}/_{w} = log_a u - log_a w$

$\frac{u}{w} = \frac{a^r}{a^s} \Rightarrow \frac{u}{w} = a^{r-s} \Rightarrow log_a \frac{u}{w} = r - s \Rightarrow log_a \frac{u}{w} = log_a u - log_a w$

Contraste de teorías	
TAD	*EOS*
Tarea 2, se identifica el desarrollo de tareas, y no existe una relación entre saberes, se pierde la relación entre estos, además de una débil argumentación.	*Se identifica parcialmente en el nivel uno en dar solución al problema y en el nivel dos en las interacciones de los objetos con el significado.*

Profesor 1. Hace algunas vinculaciones utilizando la definición de logaritmo y exponencial, pero no llega a una solución:" $log_a \ {}^{n}/_{m} = Z$; $log_a n = x$; $log_a m = y$; $a^z = a^x - a^y$; $a^z = \frac{a^x}{a^y}$"

Profesor 2. Realiza una serie de relaciones de manera desordenada con uso de propiedades y uso de la definición algebraica, aunque no llega a una solución. $\frac{log_a n}{log_a m} = \frac{x}{y}$ ⇨ $log_a \frac{n}{m} = z$ ⇨ $z = x - y$ ⇨ $\frac{x}{y} = x - y$ ⇨ $log \ \ z = log \ \ x - log \ \ y$ $\frac{\log x}{log \ \ y} = \log x - \log y$

Profesor 3. Hace algunas anotaciones y recuerda propiedades de logaritmos: $a^x = y^a \Rightarrow log_a \frac{n}{m} = y \Rightarrow \mathrm{y} = \mathrm{Y} - \mathrm{z} \Rightarrow log_a x = y \Rightarrow log_a m = z$

Profesor 5. Hace relaciones pero no llega a la demostración: $log_a \frac{n}{m} = z; z = x - y$
$log_a n = x \Rightarrow \quad log_a m = y \quad \Rightarrow \quad log_a \frac{n}{m} = log_a n - log_a m$

Profesor 7. Realiza algunas igualdades pero no llega a una solución: $a^z = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

Profesor 8. Identifica las herramientas a utilizar para dar solución al problema así como el dominio de la definición de logaritmo $log_a \frac{n}{m} = z \Rightarrow log_a n = x$
$a^x = n \Rightarrow \quad log_a m = y \quad a^y = m \Rightarrow \quad log_a \frac{n}{m} \Rightarrow \quad log_a \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

Profesor 9. Hace una sustitución en particular asignando valores a n=20 y m=10 realiza la división de manera directa 20/10=2 y olvida anotar la base del logaritmo en la diferencia de logaritmos, no concluye su idea: $log_a \frac{20}{10} = log\ 20 - log\ 10 \Rightarrow$
$log_a 2 =$

Profesor 10. Hace relaciones de la definición de logaritmo y establece igualdades, no logra realizar dicha demostración: $log_a \frac{n}{m} = z \Rightarrow \quad log_a n = x\ a^x = n \Rightarrow$
$log_a m = y\ a^y = m \Rightarrow \quad a^z = \frac{n}{m} \Rightarrow \quad a^z = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

<u>*Observaciones:*</u> Se observa el dominio de la definición algebraica de logaritmo a diferencia de una definición verbal, lo cual es contradictorio, en los ejercicios de sólo aplicación de la definición se muestra una gran deficiencia en su manejo, las relaciones y la presente constante de no articular desintegran la ecuación o igualdad a demostrar, no hay vínculo entre ellas.

T_3. Encuentre el valor de x de la ecuación exponencial: $e^{\ln(2x-1)} = 5$

Se quiere observar la composición de funciones en la solución de ecuaciones en funciones inversas.

Técnica: Se tiene una técnica en la solución como primer momento es identificar la función inversa, posterior solucionar la ecuación de primer grado.

Teoría: En Swokowski E., y Cole, J. (2002): Teorema sobre funciones inversas: sea f una función biunívoca con domino De imagen R. Si g es una función con domino R e imagen D, entonces g es la función inversa de f si y sólo si son ciertas estas dos condiciones: 1) g(f(x))= x para toda x en D, 2) f(g(x))= y para toda y en R.

Contraste de teorías	
TAD	*EOS*
Tarea 3. Se reconoce las técnicas empleadas en el proceso de la actividad, pero las soluciones son parcialmente correctas.	*Se identifica el nivel uno en la solución del problema.*

Profesor 1. Da como respuesta "*x=3"* sin argumento alguno.

Profesor 2. Se puede identificar el manejo de funciones inversas, de manera inmediata resuelve la ecuación: "$2\mathrm{x} - 1 = 5 \;\Rightarrow 2\mathrm{x} = 6$ obteniendo como respuesta x=3".

Profesor 3. Hace uso de logaritmos naturales, resuelve la ecuación de manera lineal justificando su respuesta con un argumento escrito: "ln(2x-1) = ln5; 2x-1 = ln 5; 2x= ln 5 +1; x= $\frac{\ln 5+1}{2} = \frac{2.609437}{2} = 1.3047$; realiza una anotación *"Se obtiene el logaritmo de ambos miembros de la igualdad y se resuelve para x"*

Profesor 4. Da como respuesta "*x=3*"

Profesor 5. Resuelve la ecuación de manera lineal, asume que son inversas el exponencial y logaritmo natural, existe ausencia de argumento"$2x - 1 = 5 \Rightarrow \; x = \frac{5+1}{2}\; X = 3$ "

Profesor 6. Asigna valores de manera particular para resolver la ecuación, es curioso observar los valores asignados, hace supuestos y sustituye para observar la igualación, confunde el exponencial con asignarle un número, resuelve y con apoyo de la calculadora obtiene su resultado: "$4^{\ln 5} \Rightarrow\; \mathrm{x} = 2 \;\Rightarrow \quad 3^{\ln(2(2)-1)} = 5$ $3^{\ln(3)} = 5$ ⇨1.098612289"

Profesor 9. Aplica las propiedades de logaritmos y resuelve la ecuación con ayuda de calculadora, resuelve de dos maneras diferentes, en la solución aplica propiedades de logaritmos y da solución, en la solución b calcula de manera directa el logaritmo natural de 5 y resuelve como función lineal, obtiene dos resultados diferentes:

a)$\ln e^{\ln(2x-1)} = \ln 5$

$\ln(2x-1) - \ln e = \ln 5$

b) $\ln(2x-1) = 1.609437912$

$\log \mathrm{e}\;\; 1.609437912 = 2x - 1$

$\ln(2x-1) = \frac{\ln 5}{\ln e} = \ 1.609437912$

$2x - 1 = 1.609437912$

$2x = 2.6093$

$x = \frac{2.6093}{2}$

X= 1.3

Observaciones: No se reconocen funciones inversas y la solución que realizan es operando de manera lineal, no se justifica una respuesta, se apoyan de las propiedades de logaritmos pero hace falta una transversalidad en sus procedimientos.

T4. Dadas las funciones f(x)=ln x^2 y g(x)=$e^{\sqrt{x}}$, realice la operación, (fog)(x)=f(g(x)).

Se pretende identificar el manejo de la composición de funciones.

Técnica: Para la resolver dicha tarea se considera a la composición de funciones F (g(x))= (fog)(x)=f(g(x)), lo cual se opera y queda expresado de la siguiente manera:

$$fog = lne^{\sqrt{x}^2} = x$$

Teoría: Swokowski E., y Cole, J. (2002) plantea: La función composición de f o g de dos funciones f y g está definida por (f o g)(x)= f(g(x)), El dominio de f o g es el conjunto de toda x en el dominio de g tal que g(x) esté en el dominio de f.

Contraste de teorías	
TAD	*EOS*
Tarea 4. Se identifica, se observa la realización de composición de funciones.	*Se identifica el nivel uno en la solución del problema. En el nivel dos se identifican la articulación de significados.*

Profesor 1. Realiza la composición de la función f y g e iguala dicha composición a x, no simplifica; “ $\ln x^2 \ e^{\sqrt{x}}$ ⇨ $\ln(e^{\sqrt{x}})^2 \ = x$ “

Profesor 2. Realiza la composición de la función f y g de manera inmediata, elimina la raíz cuadrada con el exponente 2 y obtiene como solución *“x”;* $\ln(e^{\sqrt{x}})^2 \ = x$ ⇨ $\ln(e^{\sqrt{x}})^2 \ = \ln e^x = x$

Profesor 3. Utiliza todos los elementos de manera adecuada y da solución de manera correcta, realiza un argumento escrito:*" (fog)(x)=* $ln(e^{\sqrt{x}})^2 = ln\, e^x = x$*; se evalúa g(x) en f(x) y se resuelve, dando la función identidad y=x"*

Profesor 4. Realiza la composición de la función f y g de manera inmediata, "f(x)= $\ln x^2$ ó g(x)= $e^{\sqrt{x}}$ $= \ln(e^{\sqrt{x}})^2 = x$ "

Profesor 5. Utiliza todos los elementos de manera adecuada y da solución de manera correcta:"*(fog)(x)=* $ln(e^{\sqrt{x}})^2$ *; (fog)(x)=* $\ln e^x = x$"

Profesor 6. Separa las funciones, al realizar la composición cambia valores en cada función hace una división: "f(x)= $\ln x^2$; g(x)= $e^{\sqrt{x}}$; f(x)= $\ln\sqrt{x}$; g(x)= e^2; (fog) ($\ln\sqrt{x}$) $= f(\ln\sqrt{x}\ (ln\, e^2))$, (fog)= $\frac{\ln\sqrt{x}\,(ln\, e^2)}{\ln\sqrt{x}}$

Profesor 7. Transcribe nuevamente las funciones: "f(x)= $\ln x^2$; g(x)= $e^{\sqrt{x}}$ "

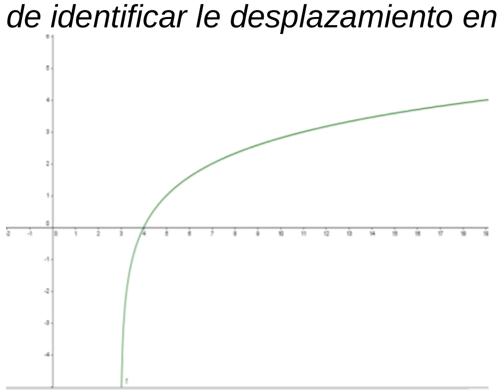
Profesor 10. Hace una serie de sustitución y al final anota igual a equis:" f(x)= $\ln x^2$; g(x)= $e^{\sqrt{x}}$ = f($e^{\sqrt{x}}$)^2 = x"

<u>*Observaciones:*</u> Se tiene noción de lo que son las composiciones de funciones pero no está bien instalado dicho conocimiento en los profesores, aunque siguen existiendo dificultades en el uso de operaciones de logaritmos y exponenciales.

T$_5$. Grafique la función $f(x) = log\ _2(x-3)$

Se pretende identificar el desplazamiento de la función en la gráfica así como el dominio de la función en el plano cartesiano.

Técnica: Se considera hacer uso de la definición de la función logaritmo, además de identificar le desplazamiento en el eje de las abscisas.



Teoría: Swokowski E., y Cole, J. (2002): $f(x) = log_x$*, para todo x en R donde x>0 y desplazamiento de las funciones.*

Contraste de teorías	
TAD	*EOS*
Tarea 5, se realizan acercamientos a las técnicas, con una falta de justificación de las mismas.	*La solución del problema se identifica en el nivel uno.*

Profesor 1. No existe un registro de apoyo, tiene noción del bosquejo aunque se encuentra mal situada la función.

Profesor 2. Traza una parábola que toca en el punto x=3 y sobre ese punto dibuja la función, hace una igualación de $y=(x-3)^2$

Profesor 3. Grafica de manera correcta, hace uso de una tabla de valores, utiliza propiedades de logaritmos, realiza la división de logaritmo de equis menos tres entre logaritmo de dos, obtiene como respuesta equis mayor a 3 y argumenta "*se hace corrimiento a la derecha tres unidades"*

Profesor 4. Grafica de manera correcta, ubica la gráfica en el IV cuadrante.

Profesor 5. Realiza de manera correcta la gráfica, aunque existe ausencia de un elemento de apoyo.

Profesor 6. La gráfica se encuentra mal y en sus anotaciones iguala a equis a 3, $f(x) = log\ _2(0)\ \ logarítmica$

Profesor 7. El bosquejo de la gráfica está mal y se apoya de una tabla de valores que se encuentra vacía:

X	1	2	3	4	5	6	7
F(x)				0		1	

Profesor 9. El bosquejo de la gráfica es erróneo, se apoya de una tabla de valores:

X	3	4	5	6
F(x)	1	2	4	8

Profesor 10. El bosquejo de la gráfica se encuentra mal, su gráfica es ascendente y se apoya de una tabla de valores e identifica el uso de logaritmos:

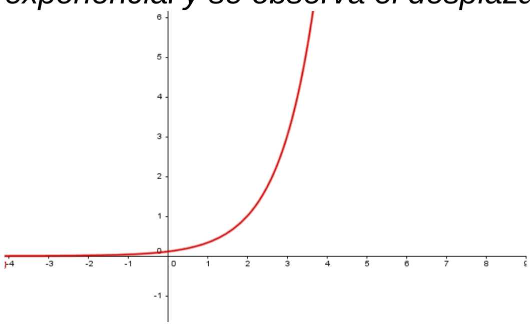
X	4	5	6
F(x)	0	1	1.6

$log_a x = \frac{log\ x}{log\ a} = log_a(x-3) = \frac{ln\ (x-3)}{ln\ 2}$

$T_{6.}$ Grafique la función $f(x) = 3^{x-2}$

Se quiere identificar el dominio de la gráfica y que de manera particular se identifique la función inversa del logaritmo base tres, así como observar el análisis de dicha gráfica.

Técnica: En la solución de esta tarea se hace uso de la definición de la función exponencial y se observa el desplazamiento en el eje de las abscisas.



Teoría : Swokowski E., y Cole, J. (2002) define a la función exponencial como: $f(x) = a^x$, para todo x en R donde a>0 y a≠1, y desplazamiento de la función.

Contraste de teorías	
TAD	*EOS*
Tarea 6. Se observan diferentes técnicas pero se carece de elementos matemáticos de los cuales no permitan observar la solución correcta de la tarea.	*Se identifica en el nivel uno de la teoría, dan solución a la tarea planteada pero no relaciona más elementos de esta.*

Profesor 1. Grafica de manera correcta, no hace uso de tabla de valores. Se observa que hace uso de la tecnología.

Profesor 2. Realiza un bosquejo de manera directa, se encuentra mal ubicada la gráfica pues pasa por el punto y=2

Profesor 3. Realiza de manera correcta la gráfica, no hace uso de ninguna herramienta para su graficación y argumenta:*"Se hace un corrimiento"*

Profesor 4. Sólo realiza un bosquejo, no marca números, dibuja una línea curva en el cuadrante I.

Profesor 5. Realiza de manera correcta la gráfica, no presenta ningún material de apoyo, presenta inmediatamente la gráfica.

Profesor 6. Su gráfica se encuentra mal, es descendente y anota:*"x=3 y f(x)= 3^1 "*

Profesor 7. El bosquejo de la gráfica se encuentra bien y se apoya de una tabla de valores.

X	0	1	2	3	4	5	6
F(x)	.1	.3	1	3	9		

Profesor 8. El bosquejo de la gráfica es correcto, se apoya de una tabla de valores:

X	0	1	2	3	4	5	6
F(x)	.1	.3	1	3	9	27	

Profesor 9. La gráfica se encuentra de manera correcta, hace uso de una tabla de valores:

X	1	2	3	4
F(x)	0.33	1	3	9

Profesor 10. Es de manera correcta la gráfica y hace uso de una tabla de valores:

X	1	2	3	4
F(x)	0.33	1	3	9

Observaciones: Los profesores realizan un bosquejo correcto de la gráfica, se observa el apoyo de la calculadora para el llenado de la construcción de sus tablas, no se da ni un elemento más, es decir, únicamente se dibuja la función, se construye una tabla, no existe un argumento sobre dicha gráfica. Además de que no se tiene el concepto de la gráfica que inversa de la función anterior de la función logarítmica de base tres.

Para este cuestionario las expectativas era altas dado que después del curso se espera que los profesores recuerden lo abstracto e ir a lo concreto de cada situación, existe carencia tanto de la definición verbal como formal de logaritmo así como operaciones de logaritmos y exponenciales y la función inversa no se tiene instalada, no se realiza ningún análisis de gráfica ni se argumentan las respuestas dadas en el cuestionario.

6.3 Análisis de acerca de las conceptualizaciones de los profesores participantes

Se describe el proceso de respuestas de cada profesor en los cuestionarios y se analiza si en el profesor existe un aprendizaje en el curso-taller.

Profesor 1. Existe un acercamiento de la definición formal de logaritmo así como el uso de propiedades logarítmicas para resolver ecuaciones exponenciales, elabora correctamente las tablas de Arquímedes, de las cuales hace falta la aplicación adecuada para dar respuesta a las preguntas relacionadas.

Profesor 2. Se observa conceptualizaciones claras en las soluciones, en el primer test responde de manera correcta la definición de logaritmo, sin embargo la falta de reconocimiento de logaritmo de manera algebraica, toda vez que da solución a la mayor parte del test de manera correcta, deja en blanco a las ecuaciones logarítmicas y exponenciales. En el segundo test no existen respuestas para reafirmar a la definición de logaritmo, da solución a él test de manera inmediata con falta de argumento y/o alguna anotación sobre sus resultados obtenidos, en la solución carece de algunos elementos matemáticos. Siguiendo el orden del segundo test llama la atención en su desarrollo de esté en su forma de soluciones pero no da solución a una propiedad y realiza un bosquejo adecuado para ambas funciones, lo cual lleva a un pensamiento confundo en su manera de resolver dicho test. Para el tercer test elabora ambas tablas y da solución a las siguientes cuestiones, aunque hace una serie de situaciones interesantes en la actividad 4, pues en la igualdad la deja en cero y maneja al exponencial como un factor de un multiplicando.

Profesor 3. En él no se observan sus conceptualizaciones de las funciones logaritmo y exponencial, presenta carencias de significados, da respuestas de manera directa, no realiza una definición de logaritmo, sólo se limita a dar ejemplos o generalizar utilizando las variables *a,x,y;* realiza adecuadamente el bosquejo de las gráficas y elabora de manera correcta las tablas de Arquímedes pero no hace uso de ellas para responder posterior a las cuestiones. Utiliza en ambos test cambio de base de logaritmos para solucionar ecuaciones exponenciales.

Profesor 4. En la solución de los cuestionarios se observa un acercamiento a la definición formal de logaritmo así como el uso de cambio de base para solucionar actividades. Se observa un mayor número de aciertos en el primer cuestionario a diferencia de los demás, en los cuales son carentes sus respuestas.

Profesor 5. No se logra identificar una conceptualización clara de las funciones logaritmo y exponencial, pues al realizar el comparativo de cuestionarios se presentan respuestas con menor de aciertos en el último test, de lo cual se puede deducir un retroceso en el proceso o una falta de concentración en el desarrollo del curso, se desconoce el motivo de esta situación.

Profesor 6. Se identifica un avance significativo en dichas conceptualizaciones, la diferencia notable es en el acercamiento a la definición formal de logaritmo, dado que el profesor reconoce a la base, y al exponente para obtener un número.

Profesor 7. En comparación de los tres instrumentos, se observa un avance en los exponenciales haciendo uso de las tablas de Arquímedes así como en los ejercicios de multiplicaciones apoyándose de exponentes en la solución, relaciona de cierta manera con sus propias palabras la definición verbal de logaritmo. Además que hace uso de propiedades de exponenciales para resolver la demostración de la actividad 2 del pos-test y no hace un bosquejo de manera adecuada de la función logarítmica.

Profesor 8. Existe una carencia de conceptualizaciones en él deja su primer test casi en blanco, dando respuesta sólo a las gráficas las cuales son erróneas, en el tercer cuestionario relaciona la definición con sus propias palabras a la definición formal de logaritmo y realiza correctamente el bosquejo de ambas funciones, así como la operación $f_o g(x)$ de la actividad 4 aunque se pierde a la variable x. Cabe mencionar que no se encuentra su cuestionario de las tablas de Arquímedes.

Profesor 9. El profesor no asistió en su totalidad al curso, del cual no se puede realizar un análisis completo sobre un aprendizaje, se identifica elementos de dichas funciones como el manejo de cambio de base necesaria para realizar la actividad 3 del tercer cuestionario, así como ambas graficas de la función logaritmo y exponencial dichas funciones se resalta son correctas, por lo demás se tiene carencias sobre ecuaciones así como funciones logaritmo y exponencial.

Profesor 10. No se puede identificar un avance significativo dado que el profesor asistió sólo a la mitad del curso, en él se pueden observar algunos elementos de los cuales utiliza para poder resolver las actividades 1 y 2 del tercer cuestionario; sobre la función exponencial se observa un bosquejo adecuado sobre dicha función así mismo identifica los elementos de la función logarítmica.

En el desarrollo del taller los profesores presentan una cierta inseguridad sobre su participación la cual se ve reflejada en sus resultados, esto se ve reducido en sus intervenciones, además no se logra observar un avance significativo, reflejando una carencia en las conceptualizaciones así como el bagaje de sus conocimientos en el tema.

Capítulo 7.

Reflexiones

Los profesores que imparten matemáticas a nivel medio superior cuentan con un bagaje cultural, prominente de las diversas profesiones en relación a las matemáticas, el cual se puede enriquecer con la comunicación entre estos, dicho flujo de información genera situaciones con relación a problemas reales o de aplicación para un uso dentro del aula. Con la diversidad de ideas, variabilidad de aplicaciones, con diversas experiencias, entre otras, las matemáticas suelen ser fortalecidas.

La definición de logaritmo requiere de una estructura lógica bicondicional de manera tal que si el profesor no la tiene instalada le resulta difícil identificar, la relación bicondicional entre las dos operaciones, exponencial y logaritmo, se cumple por el hecho de ser precisamente operaciones inversas. De manera tal que $log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$ tiene que ser visto como un todo y cuando no es así entonces se manifiesta una restricción conceptual.

En ésta investigación se refleja una carencia de saberes matemáticos sobre las funciones logaritmo y exponencial, de los cuales los profesores deben de apropiarse de elementos esenciales para su enseñanza, por mencionar algunos: concepto de exponencial, logaritmo, operaciones de ecuaciones, operaciones de funciones, funciones inversas y graficación. Estos saberes reflejan las conceptualizaciones y los fundamentos esenciales para dar solución a un problema contextualizado referido al tema.

Por otra parte los profesores reflejan un bagaje sobre su didáctica, en la participación del curso-taller sobresalieron comentarios y/o reflexiones de abordar una situación de aprendizaje, en la cual existieron comentarios al respecto que reflejan esta situación aunque en ningún momento se hizo mención de alguna teoría en específico, lo cual importante recomendar e incluir en su didáctica, lo cual responde a la primer pregunta de investigación, se deben implementar saberes matemáticos y didácticos para ampliar las conceptualizaciones de las funciones logaritmo y exponencial, además de un fortalecimiento del estudio histórico-epistemológico de las funciones. Esta es una recomendación para fomentar su uso y recordar al inicio las leyes de los exponentes, entre otros temas que pueden explotarse sobre el uso adecuado de diversas tablas inmersas.

Para la segunda pregunta de ésta investigación se debe tener presente la incorporación de saberes matemáticos: definición verbal, definición algebraica, propiedades, ecuaciones exponenciales y de logaritmos, funciones inversas, función exponencial y logaritmo, graficación y contextos de uso, lo cual es recomendable involucrar cursos que aviven las conceptualizaciones de las funciones logaritmo y exponencial, para ampliar situaciones de contexto de uso, contribuir a la formación docente, además de que impacte en la enseñanza-aprendizaje.

7.1 Sobre el curso-taller

Cabe mencionar que en la impartición de este curso se tiene como intensión la validación de la institucionalización en la conceptualización de las funciones logaritmo y exponencial teniendo como referencia a la TAD y EOS, el Dr. quién guío en todo momento y dio espacio para el rescate de saberes, comunicación, trabajo colaborativo y demás situaciones que contribuyen a mejorar en el desarrollo, no fue posible concretar en todos los niveles; se observó de manera limitado en cuestiones de participación por los asistentes, entre otros factores.

De manera general se observa que los profesores presentan una actitud pasiva al inicio, desarrollo y conclusión del curso; se cuenta con profesores con diferentes profesiones frente a grupo impartiendo matemáticas, entre ellos se tienen las profesiones de: licenciatura en matemáticas, licenciatura en educación y especialidad en matemáticas a nivel bachillerato, maestrías en matemáticas con orientación educativa, maestría en ingeniera industrial con especialidad en producción, licenciatura en informática, ingeniería en sistemas computacionales, licenciatura en contaduría, maestrante en las TIC'S e ingeniería industrial.

En el desarrollo del curso, los profesores participantes mostraron diferentes actitudes, algunas de las cuales se pueden resaltar, como el buscar un espacio de esparcimiento y el sobre uso de los dispositivos electrónicos. Cabe rescatar algunos comentarios emitidos por parte de los profesores: *"todos tenemos un modelo a seguir, es decir, adaptamos la manera en que un profesor a mí me enseñó, lo tomé como modelo para enseñar y seguir su forma de impartir clase"*. Lo cual encarece el uso de una teoría en la enseñanza-aprendizaje.

Por otra parte, en el diagnóstico se esperaba en la solución del primer cuestionario un mínimo rendimiento, ocasionado por un olvido del tema y/ o falta del manejo; una vez finalizado el primer día se dio respuesta tanto al primero como al segundo cuestionario, de los cuales se utilizan para identificar la conceptualización de las funciones con el apoyo de las teorías (TAD y EOS) y lo esperado fue acertado, pues no existen respuestas argumentadas de manera sólida y muchas de ellas son erróneas, faltando elementos argumentativos en la resolución de estos.

En la segunda parte del curso se observa que los profesores asisten para tener un rato de esparcimiento y relajación en sus actividades diarias, es pasiva la participación de estos en el desarrollo del aprendizaje o al recordar los elementos de las funciones logaritmo y exponencial. Se incorporan al curso dos profesores con la misma intensión de los demás compañeros.

Para el tercer cuestionario se espera una diferencia en la solución de este en comparación de la primera sesión, al revisar las respuestas de éstos no existe un avance significativo, la carencia del tema es reflejado, no se logra observar un cambio de actitud ni la conceptualización del tema, los profesores siguen en una apatía o en un miedo de ser evaluados y/o exhibidos.

Para el análisis de los cuestionarios, se contrastan las teorías EOS y TAD, en estos se quieren identificar el nivel de conceptualización que tienen los profesores, según dichas teorías. Los profesores se localizan en el nivel uno con respecto al Enfoque Ontosemiótico, pues en la resolución de los cuestionarios reflejan la realización del problema pero se carece de articulación de saberes así como ausencia de práctica del significado. Para la Teoría Antropológica de lo Didáctico se encuentran en la praxeología puntual, pues en ellos se logra identificar el uso de diversas técnicas de solución y de manera escasa una transposición didáctica, lo cual refleja cómo se ha ido mencionando una carencia en dichas conceptualizaciones.

En el del desarrollo del curso los profesores se desconcentran fácilmente, se convierten realmente en alumnos, se observa probablemente que existe un síndrome donde el profesor deja de lado el papel de aprender más para mejorar su trabajo y se convierte en un alumno más que sólo asiste por estar de manera desinteresada, lo más importante es que no le dan sentido al cuestionario, se dejan muchas preguntas en blanco, es evidente que existe carencia de conocimientos acerca de los temas tratados por parte de los profesores.

7.2 Sobre los programas de estudio

En la realización de análisis de los programas de estudio se identifica a tres bachilleratos diferentes los cuales sobresalen en el centro del país de México, estos con modalidad presencial, se estructuran con base a la reforma 2008 para el nivel medio superior, en ellos se identifican elementos semejantes sobre las funciones logaritmo y exponencial, la estructura del programa, el objeto de estudio, tiempo en que estudian dichas funciones, entre otros aspectos, Siguiendo a Godino (2012):

> *"Una institución está construida por las persona involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva a la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento".*

Se encuentran considerables diferencias en dos programas de estudio en los subsistemas de Dirección General de Bachillerato y Dirección General de Bachillerato Técnico agropecuario, de los cuales se distancia en su estudio y rezago de las funciones logaritmo y exponencial.

De manera general y con la idea de contar en todos los subsistemas con la misma educación, estos se ven diferenciados en los programas de estudio. Los bachilleratos técnicos limitan una parte de la población estudiantil en el estudio de las funciones logaritmo y exponencial, estos diferenciados por carreras técnicas en los cuales algunos estudiantes no logran una maduración en los conceptos por el escaso tiempo de análisis para su estudio, lo cual implica u obliga al profesor a poner en riesgo sus propias conceptualizaciones en el uso del concepto, graficar, operar y transitar en la materia. Con un empleo directo de las funciones en cálculo diferencial.

Los estudiantes pertenecientes a los Centros de Bachillerato General cuentan con algo parecido a un precálculo denominado Matemáticas IV, abarcando la totalidad de su población estudiantil en el estudio de las funciones logaritmo y exponencial, lo que propicia una madurez en su estudio, posterior su empleo de estas en cálculo diferencial e integral, cada uno en distintos semestres.

7.3 Sobre el análisis de libros de texto

Es fundamental en la construcción de conceptualizaciones contar con material didáctico, con información confiable y fácil acceso, siendo el caso para los profesores de bachillerato un recurso directo los libros escolares, los textos de manera idónea contribuyen a la mejora en formación de profesores en una base de conocimientos para fortalecer la didáctica matemática y saberes matemáticos.

Los textos matemáticos deben marcar epistemología formal, lograr que el profesor tenga una perspectiva de reunir y registrar información en donde pueda aplicarse en una situación de contexto. Los textos didácticos encarecidos de situaciones didácticas conllevan a la memorización y repetición de algoritmos sin significado, limitando la construcción de conceptualizaciones, así como el tener dificultades en la enseñanza-aprendizaje, Font y Godino (2006).

Para el análisis de libros se siguió la metodología de Ruíz (2013) para la identificación de elementos que se consideran ideales para la conceptualización de las funciones logaritmo y exponencial, descritas en el capítulo tres en la sección de 3.5 Conceptualización de las funciones logaritmo y exponencial. Además que se fortalece dicho análisis con las teoría TAD, la cual describe la actividad matemática y, por tanto, la actividad humana y de las instituciones sociales Chevallard (1999).

De manera particular en los libros de texto, se encuentran descontextualizados con referente a las funciones logaritmo y exponencial, se concretan en explicitar definiciones complejas con una serie de ejercicios así como problemas utópicos; con una carencia de construcción de significado. Los problemas de situaciones reales o hipotéticas localizados en los textos escolares tienen el propósito de aplicar la definición de las funciones logaritmo y exponencial, las cuales se encuentran con poco entendimiento para los lectores.

En cada libro expuesto se identifican elementos que permiten observar el uso y aplicaciones de la función logaritmo y la función exponencial, tanto el acceso para profesores como para estudiantes en el nivel medio superior.

Los libros analizados presentan carencia de elementos históricos-epistemológicos acerca de las funciones logaritmo y exponencial, cada libro realiza de manera inmediata una introducción directa al manejo de las ecuaciones exponencial y logaritmo, posteriormente se hace referencia a estas funciones y no realizan adecuadas explicaciones acerca de su condición conceptual de ser funciones inversas. Siguiendo a Godino (2012):

> *“Los currículos y los libros de texto presentan siempre muestras del significado de los conocimientos matemáticos, con frecuencia no representativas y a veces con sesgos difíciles de eliminar. El análisis del entorno de significación que se le ofrece al alumno en la clase de matemáticas se revela como esencial para interpretar correctamente las respuestas de éste”.*

Por otra parte, en la TAD se tiene el siguiente análisis:

Swokowksi, E., y Cole, J. (2002). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* México: Décima Edición, Thomson Learning.	
[T/ô]: Bloque práctico-técnico. Este bloque se identifica con el saber-hacer.	En este libro describe cada situación sobre las conceptualizaciones de las funciones logaritmo y exponencial, tiene definiciones claras, demostraciones, propiedades, ecuaciones y gráficas, donde se explica con entendimiento cada situación, además que presentan ejercicios para fortalecer.
[θ/Θ] Bloque tecnológico- teórico. Este bloque se identifica con el saber".	Lleva una secuencia sobre los diferentes uso de la tecnología y la aplicación de uso de las funciones en diferentes disciplinas y propia de las matemáticas. Presenta el orden deseado para conceptualizar a las funciones logaritmo y exponencial.

Barragán, G. (2011). Bloque VII: Utilizas funciones exponencales y logarítmicas. En G. Barragán, y A. G. Davy Pérez, *Matemáticas IV* (pp. 208-241). México: Book Mart.	
[T/ô]: Bloque práctico-técnico. Este bloque se identifica con el saber-hacer.	Carece de elementos teóricos para el fortalecimiento de las funciones logaritmo y exponencial, presenta definiciones escuetas así como la generalidad de las funciones, plantea problemas de diferentes contextos de uso.
[θ/Θ] Bloque tecnológico- teórico. Este bloque se identifica con el saber".	No se observa el uso de una herramienta para la solución de algún problema en cuestión. Tiene problemas carentes de información y uso de las funciones logaritmo y exponencial.

Barot, O. P. (2007). Funciones exponenciales y logarítmicas. En M. B. Clemente Merodio, *Matemáticas. Geometría analítica (pp.84-124) .* México: Santillán.	
[T/ô]: Bloque práctico-técnico. Este bloque se identifica con el saber-hacer.	Se identifica elementos de transposición didáctica, muestra de manera clara el tratamiento didáctico de las funciones logaritmo y exponencial,

	además de presentar un lenguaje claro y sencillo para el lector.
[θ/Θ] Bloque tecnológico- teórico. Este bloque se identifica con el saber".	Invita al uso de la tecnología y hacer uso de las diferentes herramientas para la solución de problemas contextualizados, presenta el orden deseado para las conceptualizaciones de las funciones logaritmo y exponencial.

7.4 Sobre formación de profesores

Muchos de los profesores de bachillerato que se preparan o continúan su formación suelen tener el compromiso de mejorar la enseñanza. La formación de profesores no sólo debe ser destinada para cumplir una evaluación en el desarrollo de cuestiones políticas, sino para la mejora en la enseñanza-aprendizaje, propiciando todos los recursos necesarios para su desarrollo fundamental.

La formación didáctica de los profesores es importante para el desarrollo de las conceptualizaciones de saberes matemáticos, así como el uso de aplicaciones de estos en diferentes áreas de conocimientos. Con la adecuada didáctica matemática los profesores mejoran sus clases, permitiendo a los estudiantes el acceso a conceptualizaciones adecuadas. Siguiendo a (Honore, 1980):

> *"La formación no se constituirá progresivamente más que por el estudio paciente y asiduo de experiencias provisionalmente llamadas «experiencias de formación». La práctica es un punto de partida en la experiencia, y el concepto es un resultado. Pero existe coordinación, y veremos que la reflexión, como práctica del concepto, es base de la experiencia de teorización".*

De los profesores participantes la mayoría cuentan con una licenciatura y con una experiencia diferida frente a grupo, lo que propició una desventaja para los profesores con poca experiencia con relación a didáctica, pero al mismo tiempo con una ventaja en conocimientos frescos así como la disponibilidad de una mejora de didáctica y aprendizaje que se lleve implementar al aula.

Para la formación de profesores se debe contar con disposición para la adquisición de saberes y de didáctica, la cual se debe ver reflejada en el aula. En específico en las funciones logaritmo y exponencial se debe formar a los profesores, ya que estos presentan carencias de aplicaciones de uso así como de elementos fundamentales de las mismas necesarias para su enseñanza.

7.5 Sobre las conceptualizaciones en los profesores

Se encuentran deficiencias en las conceptualizaciones de las funciones logaritmo y exponencial. Los profesores carecen de elementos matemáticos, los cuales propician el desarrollo de un aprendizaje significativo.

Contar con una conceptualización adecuada de saberes es fundamental para los profesores en el desarrollo de conocimientos, así como contar con la transposición de saberes en la misma disciplina, y tener como resultado el uso de éstos en un contexto de las matemáticas o en diferentes áreas de aplicación.

Las conceptualizaciones pueden perder sentido desde una inadecuada construcción de programas de estudio hasta el centro educativo. De inicio la carencia de elementos de diferentes temas en los programas de estudio, posteriormente si el profesor decide omitir el tema por desconocimiento de este o falta de dominio, en consecuencia se tiene una carencia de significados y conceptos de temas. Al eliminar el estudio de las funciones logaritmo y exponencial en los diferentes niveles de educación se tienen ciertas complicaciones, como ejemplo las operaciones de exponenciales en secundaria provocan dificultades en la aprehensión de semántica, semiótica y operatividad del estudiante en bachillerato, y así sucesivamente para una licenciatura.

Para la construcción de conceptualizaciones de los profesores de bachillerato intervienen varios factores, entre ellos la carrera que eligió en su estudio universitario. Las variantes en la curricula profesional de licenciaturas o ingenierías difieren en el empleo de las matemáticas, así como el uso de éstas en diferentes contextos, lo cual genera un diverso dominio de saberes con diferentes enfoques, teniendo ventajas en ciertos temas con un mayor conocimiento y carencias en otros.

Otro de los aspectos que fortalecen a las conceptualizaciones es la didáctica, la cual interviene en la enseñanza-aprendizaje. Los profesores deben tener presente elementos indispensables para la enseñanza, como puede ser contexto del estudiante, ambiente del aula, problemática del grupo, entre otros, esto con el fin de poder acercarse a la interacción de análisis de temas en diferentes contextos. En el caso de las funciones logaritmo y exponencial es importante tomar los elementos señalados para su estudio, en las conceptualizaciones de éstas, las cuales se deben argumentar y se estudian de acuerdo a las necesidades de cada situación en particular, sin hacer a un lado la integración de dichas funciones esenciales. Para Godino (2012),

> *"El problema didáctico se presenta cuando, en forma innecesaria, el muestreo realizado sobre los componentes del significado tiene un carácter*

sesgado o se añaden prácticas inadecuadas, presentando, no un significado limitado del concepto (lo cual es inevitable), sino otro incorrecto o irrelevante (por ejemplo, cuando ocurre un deslizamiento metadidáctico)”.

Por otra parte, la preparación continua o actualización de formación de profesores permite un fortalecimiento tanto en saberes como en didáctica, los cuales se reflejan en el logro efectivo de la enseñanza-aprendizaje, así como la interacción de aplicaciones del conocimiento dentro de la misma disciplina como en otras áreas de conocimientos. Para las funciones logaritmo y exponencial es necesario tener un gran bagaje de éstas para su análisis y transposición didáctica en la disciplina para su estudio, y fundamentar su conceptualización.

Capítulo 8.

Referencias bibliográficas

Acevedo, J. A. (2009). Conocimiento didático del contenido para la enseñanza de la naturaleza de la ciencia (I): el marco teórico. *Eureka sobre Eseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 6(1). 21-46.

Ausubel, D. (1983). *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo.* México: 2° Edición Trillas.

Ávila, R., García, M., y Rodríguez, M. (2005). *Física Bachillerato*. México, D.F.: ST Distribución, S.A. de C.V.

Barot, O. P. (2007). Funciones exponenciales y logarítmicas. En M. B. Clemente Merodio, *Matemáticas. Geometría analítica (pp.84-124) .* México: Santillán.

Barragán, G. (2011). Bloque VII: Utilizas funciones exponencales y logarítmicas. En G. Barragán, y A. G. Davy Pérez, *Matemáticas IV* (pp. 208-241). México: Book Mart.

Batanero, J. G. (1994). Significado institucional y personal de los objetos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Chehaybar, E. (2006). La percepción que tienen los profesores de educación media superior y superior sobre su formación y su práctica docente. *RLEE (México), XXXVI*, 219-259.

Chevallard, Y. (2005). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* Barcelona: Aique 3a. Edición.

Chevallard, Y., Bosch, M., y Gascón, J. (2009). *Estudiar matemáticas el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* México: Lukambanda Editorial, S.A., de C.V.

Elastak, I. (2007). College students´understanding of rational exponents: A teaching. Tesis doctoral no publicada, The Ohio State University, USA.

García, DE. (Marzo de 2003). El cuestionario como instrumento de investigación/evaluación. Almendrajo, España, España.

Gavilán, J.M. (2005). El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perespectiva cognitiva. Tesis Doctoral. Departamento de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Publicada en 2010 por Edición Digital @tres,S.LL.

Godino, J. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva Ontosemiótica de Investigación en Didáctica de la Matemática. *Universidad de Granada*, 49-68.

Godino, J. D. (01 de 02 de 2003). *Proyecto Edumat-maestros, Matemáticas y su didáctica para maestro,*. (J. C. Godino, Editor, y J. C. Godino, Productor) Recuperado el 29 de 04 de 2015, de Proyecto Edumat-maestros, Matemáticas y su didáctica para maestro: http://www.matesup.utalca.cl/modelos/articulos/fundamentos.pdf

Godino, J., y Batanero, C. (15 de Septiembre de 2015). *Teoría y Metodología de Investigación en Educación Matemática*. Recuperado el 18 de Noviembre de 2016, de Teoría y Metodología de Investigación en Educación Matemática: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/anexo1_significados%20sistemicos.pdf

Godino, J., y Font, V. (16 de 09 de 2015). *Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Recuperado el 2016 de 08 de 09, de Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/anexo2_enfoque%20ontosemi%F3tico%20cognici%F3n.pdf

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (08 de 03 de 2009). *Teoría y Metodología de Investigación en Educación Matemática*. Recuperado el 18 de 11 de 2016, de Teoría y Metodología de Investigación en Educación Matemática: http://www.ugr.es/local/jgodino

González, M. T. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en españa durante el siglo XX. *Enseñanza de las ciencias,* 22 (3), 389-408.

Font V. y Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educ. Mat. Pesqui.*, São Paulo, 8(1), 67-98

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación.* México: McGraw-Hill.

Hidalgo, J. L. (2001). *Didáctica mínima.* México: Castellanos editores, S.A deC.V.

Honore, B. (1980). *Para una teoría de la formación: dinámica de la formatividad.* Madrid: Narcea, S.A. Ediciones.

Ibáñez, B., y Ribes, I. E. (2001). Un análisis interconductal de los procesos educativos. *Revista Mexicana de Psicología*, 18(3), 359-371.

Morales, H. P. (2013). La teoría antropologica de la didáctica de Chevallard y como sustento teoríco para analizar el saber didáctico matemático en la formación de profesores en la Universidad Católica de Concepción. *VII*, 4518-4525.

NCTM, (2000). Principles and standards for school Mathematics, Reston. VA: NTCM.

Otero, M. R. (02 Abril 2014). *La Teoría de los Campos Conceptuales y la conceptualización en el aula de Matemática y Física.* Argentina: Editorial Dunken.

Pérez, I. (2007). Articulación de Saberes Matemáticos y Modelos Conceptuales.Tesis de Maestría. *Articulación de Saberes Matemáticos y Modelos Conceptuales*. Mineral de la Reforma, Hidalgo, México.

Pérez, M. (2011). *Exclusión de saberes Matemáticos en situación escolar. El caso de los logaritmos.*Tesis de Maestría, Pachuca, Hidalgo, México.

Perrenaud, P. (2006). Consecuencias para el trabajo de Profesor. En P. Perrenaud, *Construir competencias desde la escuela.* México: J. C. Sáez Editor.

Portilla, R. A. (2002). La formación docente del profesorado universitario: perfl y líneas de formación. Bellatera, España.

Rondero, C. (2013). Algunos elementos conceptuales sobre la formación de profesores. En C. Rondero, A. Criollo, J. A. María L. Pérez, y O. Kalerin, *La formación de profesores en competencias matemáticas* (pp. 13-51). México: Ediciones Días de Santos.

Ruiz J., Dávila P, Etxeberria J., y Sarasua J. (2013). Los libros de texto de matemáticas del bachillerato en el periodo 1970-2005. *RELIME*, 16(2), 245-276.

Santillán, J. L. (2003). En J. L. Santillán, *Cálculo químicos para la prepración de soluciones* (pp. 20-24). México, D.F.: Trillas.

SEMS. *Acuerdos Secretariales* . Recuperado el 18 de 01 de 2016, de Acuerdos Secretariales : http://www.sems.gob.mx/es_mx/sems/acuerdo_secretarial

SEP. (06 de Octubre de 2015). *Dirección General Tecnológica industrial*. Recuperado el 06 de Octubre de 2015, de Dirección General Tecnológica industrial: http://www.dgeti.sep.gob.mx/index.php?option=com_content&view=article&id=263&Itemid=665

SEP. (08 de Octubre de 2015). *Dirección General Tecnologica y agropecuaria*. Recuperado el 10 de Octubre de 2015, de Dirección General Tecnologica y agropecuaria: http://dgeta.sems.gob.mx/es/dgeta/sistema_escolarizado

Swokowski, E., y Cole, J. (2002). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica. En* México: Décima Edición, Thomson Learning.

Tippens, P. E. (2007). *Física conceptos y aplicaciones.* México: McGraw-Hill.

Tippens, P. E. (2007). Sonido. En P. E. Tippens, *Física conceptos y aplicaciones* (pp. 449-450). México: McGrawHill.

Vargas, J. (2012). Análisis de la práctica del docente universotario de precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca, Salamanca.

Vergnaud G., (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Didáctique des mathématiques*., 10(2,3), pp. 133-170.

Viscarra, y Angulo. (2012). *Diseño e implementación de una propuesta pedagógica para la enseñanza de las funciones exponenciales y logarítmicas.* Tesis de pregrado. Instituto de Ciencias Matemáticas Escuela de Graduados, Guayaquil, Ecuador.

Zepeda, P. (Enero de 2014). *Secretaría de Educación Púbica.* Recuperado el 23 de 10 de 2016, de Secretaría de Educación Púbica: http://www.incorporadas.uson.mx/normatividad/PERFIL_PROFESIOGRAFICO-BACHILLERATO/PERFIL_PROFESIOGRAFICO.pdf

Referencias electrónicas

Godino J. (2013), Matemáticas y su Didáctica para Maestros, Proyecto Edumat-Maestros, Edición 2003.

http://www.matesup.utalca.cl/modelos/articulos/fundamentos.pdf

INEGI, estadísticas de población (24-03-14), se encuentra en la página: http://www.inegi.org.mx/sistemas/mexicocifras/default.aspx?src=487&e=13