



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO  
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA  
**DOCTORADO EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL**

**PROYECTO TERMINAL**

**ESTUDIO SOBRE FAMILIAS POLITÓPICAS CON TÉRMINOS  
TRASCENDENTES: FRAGILIDAD, DESEMPEÑO Y ROBUSTEZ**

Para obtener el grado de  
Doctor en Ciencias en Automatización y Control

PRESENTA

Guillermo Oaxaca Adams

Director:

Dr. Raúl Villafuerte Segura

Codirector:

Dr. Baltazar Aguirre Hernández

Pachuca de Soto, Hidalgo, México 23 de marzo de 2024





Guillermo Oaxaca Adams

Estudio sobre familias  
politópicas con términos  
trascendentes: fragilidad,  
desempeño y robustez

# Agradecimientos

Agradezco a los Sinodales sus comentarios y recomendaciones, que han mejorado esta Tesis.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

School of Engineering and Basic Sciences

Área Académica de Computación y Electrónica

Department of Electronics and Computer Science

Mineral de la Reforma Hidalgo, a 8 de marzo de 2024

Número de control: ICBI-AACyE/365/2024

Asunto: Autorización de impresión de tema de tesis

**MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO  
DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH**

El Comité Tutorial del nombre del producto que indique el documento curricular del programa educativo de posgrado titulado “**ESTUDIO SOBRE FAMILIAS POLITÓPICAS CON TÉRMINOS TRASCENDENTES: FRAGILIDAD, DESEMPEÑO Y ROBUSTEZ**”, realizado por el sustentante **Guillermo Oaxaca Adams** con número de cuenta 435886, perteneciente al programa del Doctorado en Ciencias en Automatización y Control, una vez que se ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente.

**AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN**

Por lo que el sustentante deberá cumplir con los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

Atentamente

“Amor, Orden y Progreso”

**Dr. Raúl Villafuerte Segura  
Director de Tesis**

**Dr. Baltazar Aguirre Hernández  
Codirector de Tesis**

**Comité Tutorial**

Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz	Presidente	UAEH
Dra. Liliam Rodríguez Guerrero	Secretario	UAEH
Dr. Raúl Villafuerte Segura	Vocal 1	UAEH
Dr. Gilberto Ochoa Ortega	Vocal 2	UPVM
Dr. Baltazar Aguirre Hernández	Vocal 3	UAM-I
Dr. Carlos Cuvas Castillo	Suplente	UAEH <u>Carlos Cuvas C.</u>

Ciudad del Conocimiento  
Carretera Pachuca-Tulancingo km 4.5 Colonia  
Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo,  
México. C.P. 42184  
Teléfono: +52 (771) 71 720 00 ext. 2250, 2251  
Fax 2109  
aacye\_icbi@uaeh.edu.mx



[www.uaeh.edu.mx](http://www.uaeh.edu.mx)



# Resumen

El análisis de la estabilidad de un sistema a lazo cerrado ayuda a diseñar y sintonizar leyes de control más eficientes. En este análisis de estabilidad debe considerarse la *robustez* del sistema a cambios en las características del proceso controlado, la *fragilidad* del controlador a cambios en sus parámetros y el *desempeño* a una perturbación o a un cambio en el punto de ajuste [2].

Es importante estudiar la fragilidad de un controlador porque en la práctica los controladores no pueden implementarse con exactitud y debe considerarse el deterioro de la estabilidad del sistema a lazo cerrado producido por la variación en los parámetros del controlador en términos de sus valores de diseño. En [63] se demostró que bajo ciertas condiciones, el controlador menos frágil existe y se propuso un algoritmo para determinar sus parámetros.

En la práctica, el desempeño de un controlador está relacionado con la rapidez con la que el sistema a lazo cerrado puede recuperarse de una perturbación. En el Capítulo 4, se estudia el desempeño de un controlador considerando la rapidez con la que la solución del sistema a lazo cerrado converge a cero y se obtiene la cota máxima de decaimiento [62].

En los Capítulos 5 y 6 se aborda la robustez de un sistema y se estudian, respectivamente, criterios de estabilidad de Hurwitz y estabilidad de Schur para familias de polinomios, y en particular para familias de polinomios de intervalo.

En el Capítulo 7, los resultados obtenidos sobre fragilidad, desempeño y robustez en los Capítulos 3 a 6 se implementan en un robot móvil omnidireccional (OMR).



# Abstract

The stability analysis of a closed-loop system helps to design and tune a control law. In this stability analysis should be considered the *robustness* of the system to changes in the characteristics of the controlled process, the controller *fragility* to changes in its parameters, and its *performace* to a load disturbance or set-point change [2].

It is important to study the fragility of a controller due to in practice controllers cannot be implemented with exactness and must be considered the stability deterioration of the closed-loop system produced by the variation of the controller parameters in terms of its design values. It is proved in [63] that under certain conditions, the least fragile controller exists and an algorithm to find its parameters was proposed.

In practice, the performance of a controller is related to how fast the closed-loop system can recover from a disturbance. In Chapter 4, the performance of a controller is studied taking into account the speed at which the solution of the closed-loop system converges to zero and it is obtained the maximum decay rate [62].

In Chapters 5 and 6 robustness of a system is addressed, it is studied, respectively, Hurwitz stability and Schur stability criteria for families of polynomials, in particular for families of interval polynomials.

In Chapter 7, the results obtained about fragility, performance and robustness in Chapters 3 through 6 are implemented on an omnidirectional movil robot (OMR).

# Acrónimos

- **LMI**: Desigualdad Matricial Lineal
- **LTI**: Lineal Invariante en el Tiempo
- **PIR**: Proporcional Integral Retardado
- **PI**: Proporcional Integral
- **PR**: Proporcional Retardado
- **SISO**: Una Entrada y Una Salida
- **LDS**: Sistema Lineal Discreto
- **LCS**: Sistema Lineal Continuo
- **FOP**: Familia de Polinomios
- **FOIP**: Familia de Polinomios de Intervalo
- **OMR**: Robot Móvil Omnidireccional

# Índice general

Resumen . . . . .	V
Abstract . . . . .	VII
Acrónimos . . . . .	VIII
Índice general . . . . .	IX
Índice de figuras . . . . .	XII
Índice de tablas . . . . .	XV
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos . . . . .	2
1.2. Formulación del problema . . . . .	3
1.3. Hipótesis . . . . .	4
1.4. Justificación . . . . .	4
1.5. Productos obtenidos . . . . .	5
<b>2. Sistemas con retardo</b>	<b>7</b>
2.1. Sistemas no lineales . . . . .	7
2.2. Sistemas lineales . . . . .	10
2.3. Conclusión . . . . .	13
<b>3. Fragilidad de controladores para sistemas a lazo cerrado con retardo</b>	<b>15</b>
3.1. Introducción . . . . .	15
3.2. Formulación del problema . . . . .	18
3.3. Metodología para encontrar los parámetros menos frágiles . . . . .	20
3.3.1. Propiedades del círculo más grande inscrito en una región de estabilidad	20
3.3.2. Procedimiento numérico . . . . .	24
3.4. Implementación y comparación de resultados . . . . .	25
3.4.1. Controlador PI y dos puntos de contacto . . . . .	26
3.4.2. Controlador PI y tres puntos de contacto . . . . .	27
3.4.3. Controlador PR y tres puntos de contacto . . . . .	29
3.4.4. Cotrolador PR y dos puntos de contacto . . . . .	30

3.5. Conclusiones . . . . .	32
<b>4. Desempeño de controladores para sistemas a lazo cerrado con retardo</b>	<b>33</b>
4.1. Introducción . . . . .	33
4.2. Formulación del problema . . . . .	33
4.3. Sistemas lineales con retardo . . . . .	34
4.4. Regiones de $\sigma$ -estabilidad . . . . .	36
4.5. Raíces en los puntos de mejor desempeño . . . . .	38
4.6. Metodología para determinar los puntos de mejor desempeño . . . . .	42
4.7. Ejemplos ilustrativos: puntos de mejor desempeño y cota máxima de decaimiento . . . . .	45
4.7.1. Controlador PI: 1 raíz real simple y 1 raíz compleja simple con su conjugada . . . . .	46
4.7.2. Ecuación de tipo retardado: 1 raíz compleja doble . . . . .	47
4.7.3. Controlador PR: 3 raíces complejas simples . . . . .	48
4.7.4. Controlador PR: 1 raíz real triple . . . . .	50
4.8. Conclusión . . . . .	51
4.9. Apéndice . . . . .	52
<b>5. Estabilidad de Hurwitz para familias de polinomios</b>	<b>55</b>
5.1. Introducción . . . . .	55
5.2. Formulación del problema y contribución . . . . .	55
5.3. Resultados preliminares . . . . .	59
5.4. Resultados principales . . . . .	60
5.4.1. La familia $\mathfrak{F}_A$ . . . . .	60
5.4.2. La familia $\mathfrak{F}_{D_n}$ . . . . .	63
5.4.3. La familia $\mathfrak{F}_{B_n}$ . . . . .	64
5.4.4. La familia $\mathfrak{F}_{S_n}$ . . . . .	71
5.5. Ilustración de resultados . . . . .	72
5.5.1. Ejemplo de familia $\mathfrak{F}_{D_n}$ . . . . .	73
5.5.2. Ejemplos de familias $\mathfrak{F}_{B_n}$ . . . . .	74
5.5.3. Ejemplo de familia $\mathfrak{F}_{S_n}$ . . . . .	76
5.6. Conclusiones . . . . .	77
<b>6. Estabilidad de Schur para familias de polinomios</b>	<b>79</b>
6.1. Introducción . . . . .	79
6.2. Formulación del problema . . . . .	80
6.3. Estabilidad de familias de polinomios . . . . .	82
6.3.1. Estabilidad de la familia $\mathfrak{F}_A$ . . . . .	82

6.3.2. Estabilidad de la familia $\mathfrak{F}_{B_n}$ . . . . .	85
6.3.3. Estabilidad de la familia $\mathfrak{F}_{C_n}$ . . . . .	91
6.4. Ejemplos numéricos . . . . .	94
6.4.1. Sobre la estabilidad de $\mathfrak{F}_{B_2}$ y $\mathfrak{F}_{C_2}$ . . . . .	94
6.4.2. Sobre la estabilidad de $\mathfrak{F}_{B_3}$ y $\mathfrak{F}_{C_3}$ . . . . .	95
6.5. Conclusiones . . . . .	97
<b>7. Implementación de resultados: fragilidad, desempeño y robustez</b>	<b>99</b>
7.1. Cinemática del OMR . . . . .	99
7.2. Notación para fragilidad, desempeño y robustez . . . . .	101
7.3. Regiones de $\sigma$ -estabilidad . . . . .	103
7.4. Fragilidad del OMR . . . . .	104
7.5. Desempeño del OMR . . . . .	106
7.6. Robustez del OMR . . . . .	107
7.7. Fragilidad, desempeño y robustez del OMR . . . . .	108
7.8. Experimentos en tiempo-real . . . . .	109
<b>Bibliografía</b>	<b>115</b>
<b>A. Manuscritos publicados</b>	<b>125</b>
<b>B. Reporte antiplagio</b>	<b>131</b>

# Índice de figuras

3.1.	(a) Región de estabilidad $D$ para el cuasi-polinomio (3.10), y el punto menos frágil $k^*$ . (b) Ampliación de una parte de la gráfica en (a). . . . .	27
3.2.	(a) Región de estabilidad $D$ para el cuasi-polinomio (3.11), y el punto menos frágil $k^*$ . (b) Ampliación de una parte de la gráfica en (a). . . . .	28
3.3.	(a) Región de estabilidad $D$ para el cuasi-polinomio (3.12), y el punto menos frágil $k^*$ . (b) Ampliación de una parte de la gráfica en (a). . . . .	30
3.4.	(a) Región de $\sigma$ -estabilidad $D$ para el cuasi-polinomio (3.16), y el punto menos frágil $k^*$ . (b) Cambio de escala de la gráfica en (a). . . . .	32
4.1.	$E_\sigma$ es la frontera de $D_\sigma$ . . . . .	43
4.2.	(a) Regiones de $\sigma$ -estabilidad $D_\sigma$ para $\sigma = 0, -0.04, -0.15$ y el punto de mejor desempeño $k^*$ correspondientes al cuasi-polinomio (4.16). (b) Gráfica 3D de la función de la abscisa espectral $\alpha = \alpha(k_p, k_i)$ en la región $D_0$ . . . . .	47
4.3.	(a) Regiones de $\sigma$ -estabilidad $D_\sigma$ para $\sigma = 0, -0.1, -0.4$ y el punto de mejor desempeño $k^*$ correspondientes al cuasi-polinomio (4.17). (b) Gráfica 3D de la función de la abscisa espectral $\alpha = \alpha(k_1, k_2)$ en la región $D_0$ . . . . .	48
4.4.	(a) Regiones de $\sigma$ -estabilidad para $\sigma = 0, -0.015, -0.04, -0.065$ y el punto de mejor desempeño $k^*$ correspondientes al cuasi-polinomio (4.18). (b) Gráfica 3D de la función de la abscisa espectral $\alpha = \alpha(k_p, k_r)$ en la región $D_0$ . . . . .	50
4.5.	(a) Regiones de $\sigma$ -estabilidad para $\sigma = -0.1, -0.5, -1$ y el punto de mejor desempeño $k^*$ correspondientes al cuasi-polinomio (4.19). (b) Gráfica 3D de la función de la abscisa espectral $\alpha = \alpha(\tau, k_r)$ en la región $D_0$ . . . . .	51
5.1.	Estabilidad de la familia $\mathfrak{F}_{B_3}$ . . . . .	67
5.2.	Robustez del polinomio (5.27). . . . .	73
5.3.	Signo de las derivadas parciales $\frac{\partial \Delta_4}{\partial \alpha_1}$ y $\frac{\partial \Delta_4}{\partial \alpha_3}$ . . . . .	75
5.4.	La función $d(\omega)$ . . . . .	77
6.1.	Gráfica de las funciones $d_1$ y $d_2$ . . . . .	95

6.2. Gráfica de las funciones $d_1, d_2$ y $d_3$ . . . . .	97
7.1. Notación para el OMR. . . . .	99
7.2. Regiones de $\sigma$ -estabilidad para $a = 33.333$ . . . . .	104
7.3. El punto menos frágil $k^{*,f} = (4.23874, 4.23874)$ para $D \subset K_{a,0}^0$ y $a = 33.333$ . . . . .	105
7.4. El punto menos frágil $k^{*,f}$ en $D \subset K_{a,\sigma}^0$ , donde $a = 33.333$ y $\sigma = -0.27$ . . . . .	106
7.5. Punto de mejor desempeño $k^{*,p} = (0.0766408, 160)$ en $D \subset K_{a,\sigma}^0$ para $\kappa_r = 160, a = 33.333$ y $\sigma = -10$ . . . . .	107
7.6. Funciones $c_1, c_2$ y $\lambda$ . . . . .	108
7.7. Región de estabilidad robusta en el espacio $\tau k_r a$ . . . . .	109
7.8. Robot Móvil Omnidireccional con perturbación. . . . .	110
7.9. Fragilidad del punto $k^{*,p}$ para $k_r = 160$ y $a = 0.03$ . . . . .	110
7.10. Desempeño de la posición $x$ - $y$ del robot, ver Tabla 7.1. Aquí $r = a^{-1} = 0.03\text{m}$ . . . . .	111
7.11. Desempeño de la posición $x$ - $y$ del robot con perturbación. Aquí $r = a^{-1} = 0.03\text{m}$ . . . . .	112
7.12. Robustez de la posición $x$ - $y$ del robot, fijando $k = (0.076, 160)$ y variando $r = a^{-1} \in \{0.03, 0.05, 0.08\}\text{m}$ . . . . .	112
7.13. Robustez de la posición $x$ - $y$ , fijando $k = (0.055, 222)$ y variando $r = a^{-1} \in \{0.03, 0.05, 0.08\}\text{m}$ . . . . .	113
7.14. Fragilidad de la posición $x$ - $y$ del robot para $\sigma = -0.27$ y $-0.48$ , ver Tabla 7.2. Aquí, $r = a^{-1} = 0.03\text{m}$ . . . . .	114



# Índice de tablas

3.1. Comparación del procedimiento propuesto con resultados existentes en la literatura para el Ejemplo 1. . . . .	26
3.2. Comparación del procedimiento propuesto con resultados existentes en la literatura para el Ejemplo 2. . . . .	28
3.3. Comparación del procedimiento propuesto con resultados existentes en la literatura para el Ejemplo 3 . . . . .	29
3.4. Resultados del procedimiento propuesto para el Ejemplo 4 . . . . .	31
4.1. Iteraciones para determinar $k^*$ y $\alpha^*$ del cuasi-polinomio (4.16). . . . .	46
4.2. Iteraciones para determinar $k^*$ y $\alpha^*$ del cuasi-polinomio (4.17). . . . .	48
4.3. Iteraciones para determinar $k^*$ y $\alpha^*$ del cuasi-polinomio (4.18). . . . .	49
7.1. Puntos de mejor desempeño $k^{*,p}$ para $k_r$ y $a = 33.333$ dados. . . . .	111
7.2. Puntos menos frágiles $k^{*,f}$ para un $\sigma$ dado. . . . .	113



# Capítulo 1

## Introducción

La estabilidad del sistema a lazo cerrado es fundamental en el diseño y sintonización de una ley de control. En el análisis de la de estabilidad del sistema a lazo cerrado debe considerarse la *fragilidad* del controlador a variaciones en sus parámetros, su *desempeño* a una perturbación o cambio en el punto de ajuste y la *robustez* que tiene el sistema a cambios en las características del proceso controlado.

Estudiar la fragilidad de un controlador es importante debido a que en la práctica los controladores no pueden implementarse con exactitud y debe considerarse el deterioro de la estabilidad del sistema a lazo cerrado producido por la variación en los parámetros del controlador respecto a sus valores de diseño.

Para controles con retardo, el sistema a lazo cerrado es un sistema con retardos y el estudio de su estabilidad y desempeño conduce a determinar la estabilidad de cuasi-polinomios. Estos cuasi-polinomios pueden formar una familia politópica convexa, y debido a esto, es importante estudiar la estabilidad de familias politópicas con términos trascendentes.

Los sistemas con retardo aparecen en varias áreas de la ciencia y la ingeniería. La característica que define a un sistema con retardo es que la evolución futura del sistema no sólo depende de su estado presente sino también de un periodo de su historia [31].

Los sistemas con retardo pueden modelarse mediante ecuaciones diferencia-diferenciales o más generalmente por ecuaciones diferenciales funcionales [45]. Si los efectos del retardo son pequeños, los sistemas pueden modelarse satisfactoriamente sólo por ecuaciones diferenciales. Pero si el efecto del retardo es grande, éste no puede ignorarse.

Un retardo en un sistema es el tiempo (muerto) que transcurre entre la transmisión y la ejecución de una acción. Muchos de los sistemas reales tienen retardos. Por ejemplo, los procesos de reciclado [80], los modelos de epidemias en biociencias [61, 85] y en robótica,

las interfaces hápticas [18].

El retardo en un sistema puede tener varias fuentes: son inherentes al sistema, son introducidos por el control o un retraso en una medición o surgen de simplificar una ecuación diferencial parcial. Entre los sistemas con retardos inherentes están el maquinado de piezas [24, 31] y los sistemas térmicos e hidráulicos [41, 48, 49, 81, 75].

El control o la medición retardada, son generalmente considerados indeseables porque tienden a deteriorar el desempeño del sistema o incluso a desestabilizar el sistema. Pero en algunos sistemas, como el del resonador retardado [31], se introduce intencionalmente un retardo para mejorar el desempeño del sistema.

En los años 30 y 40 del siglo pasado, la formulación adecuada de un número importante de problemas científicos y técnicos exigía tomar en cuenta la existencia de diferentes retardos. Unos de los primeros problemas de este tipo fueron considerados por Volterra (modelo presa-depredador, 1931), Callender y Stevenson (inestabilidad de sistemas con retardo, 1939) y Gerasimov (sistema retroalimentado para transferencia de calor, 1949). Ver las referencias en [46]. En 1942, Pontryagin [74], obtuvo algunos resultados fundamentales sobre la distribución de las raíces de cuasi-polinomios y en 1940, Chebotarev [17] publicó varios artículos sobre el criterio de Routh-Hurwitz para cuasi-polinomios. En 1949, Neimark [60] estudió la distribución de las raíces de cuasi-polinomios por el método de  $D$ -subdivisiones.

Un resumen del estado del arte y problemas abiertos en sistemas con retardo puede encontrarse en [79].

Recientemente, el método de  $D$ -subdivisiones ha sido aplicado por varios autores para obtener controles estabilizadores [30, 58, 59, 92].

El problema de la estabilidad de Hurwitz para un cuasi-polinomio surge cuando se aplica transformada de Laplace a un sistema lineal continuo con retardos y el problema de la estabilidad de Schur para un polinomio surge cuando se aplica transformada  $\mathcal{Z}$  a un sistema lineal discreto con retardos [28, 34].

## 1.1. Objetivos

### Objetivo general

Analizar una clase de sistemas de tipo retardado para hacer más eficiente el diseño y la sintonización de leyes de control mediante un estudio de la fragilidad, desempeño y robustez del sistema a lazo cerrado.

### Objetivos específicos

- OE1 Estudiar la fragilidad de un sistema, usando el método de  $D$ -particiones de Neimark [60] para obtener una regla de sintonización [56, 59].
- OE2 Determinar el desempeño de un controlador para sistemas a lazo cerrado con un retardo mediante el análisis de la respuesta del sistema para obtener una regla de sintonización.
- OE3 Analizar la robustez de sistemas a lazo cerrado mediante el análisis de una clase de familias de polinomios para obtener una regla de sintonización.

## 1.2. Formulación del problema

En la actualidad el diseño y sintonización de leyes de control más eficientes es uno de los problemas más recurrentes en el área de teoría de control. En Alfaro [2] se propone considerar tres aspectos importantes: fragilidad, desempeño y robustez. Sin embargo, en la literatura existen pocos resultados que proporcionan herramientas para determinar estas propiedades. Una formulación general de lo anterior es la siguiente: consideremos un sistema de la forma

$$\dot{x} = f(a, x, u)$$

y una ley de control

$$u = u(k, x),$$

donde los parámetros  $a$  del sistema varían en un conjunto  $A$  y los parámetros  $k$  del controlador varían en un conjunto  $K$ . El sistema a lazo cerrado es

$$\dot{x} = f(a, x, u(k, x)).$$

**Fragilidad.** Supongamos que el sistema a lazo cerrado es estable para cada  $k \in K$  e inestable para cada  $k \in K^c$ . Entonces, dado  $k \in K$ ,

$$\rho(k) = \text{dist}(k, \partial K) = \inf\{\|l - k\| : l \in \partial K\}$$

es la distancia del punto  $k$  a la región de inestabilidad del sistema, donde  $\partial K$  denota la frontera del conjunto  $K$ . Si existe un punto  $k^{*,f} \in K$  tal que

$$\rho(k^{*,f}) = \sup\{\rho(k) : k \in K\},$$

decimos que  $k^{*,f}$  es el punto *menos frágil* del sistema.

**Desempeño.** Ahora supongamos que tenemos un *índice de desempeño*  $I(k)$  del controlador  $u(k, \cdot)$ . Si existe un punto  $k^{*,p} \in K$  tal que

$$I(k^{*,p}) = \sup\{I(k) : k \in K\},$$

decimos que  $k^{*,p}$  es el punto de *mejor desempeño* del sistema.

**Robustez.** Sea  $k$  fijo y supongamos que el sistema a lazo cerrado

$$\dot{x} = f(a, x, u(k, x))$$

es estable para cada  $a \in A$  e inestable para cada  $a \in A^c$ . Entonces, dado  $a \in A$ ,

$$\delta(a) = \text{dist}(a, \partial A) = \inf\{\|b - a\| : b \in \partial A\}$$

es la distancia del punto  $a$  a la región de inestabilidad del sistema, donde  $\partial A$  denota la frontera del conjunto  $A$ . Si existe un punto  $a^{*,r} \in A$  tal que

$$\delta(a^{*,r}) = \sup\{\delta(a) : a \in A\},$$

decimos que  $a^{*,r}$  es el punto *más robusto* del sistema.

Notamos que teóricamente, fragilidad y robustez pueden considerarse como el mismo problema. Sin embargo, fragilidad se refiere a los parámetros del controlador mientras que robustez se refiere a los parámetros del sistema.

### 1.3. Hipótesis

Los controladores con retardo(s) pueden estabilizar un sistema y tienen un desempeño comparable o mejor que otros controladores (como los PID), además de que ofrecen reglas relativamente simples de sintonización.

### 1.4. Justificación

Determinando la estabilidad de familias politópicas con términos trascendentes pueden construirse controles estabilizadores para sistemas con múltiples retardos. Esto se ha hecho en [58, 92] y esperamos extender de alguna manera esos resultados.

## 1.5. Productos obtenidos

- Guillermo Oaxaca-Adams, Raúl Villafuerte-Segura, and Baltazar Aguirre-Hernández. On non-fragility of controllers for time delay systems: A numerical approach. *Journal of the Franklin Institute*, 358(9):4671-4686, 2021. [63]
- Oaxaca-Adams, G. & Villafuerte-Segura, R. A study on performance and fragility of controllers: PR and PD. *Memorias del 2022 Congreso Nacional de Control Automático 12-14 de Octubre, 2022*. Tuxtla Gutiérrez, México, pp 135-141.
- Guillermo Oaxaca-Adams and Raúl Villafuerte-Segura. On controllers performance for a class of time-delay systems: Maximum decay rate. *Automatica*, 147:110669, 2023. [62]
- Guillermo Oaxaca-Adams, Raúl Villafuerte-Segura and Baltazar Aguirre-Hernández, On Hurwitz stability for families of polynomials, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2024. [64].
- Guillermo Oaxaca-Adams, Raúl Villafuerte-Segura and Baltazar Aguirre-Hernández, On Schur stability for families of polynomials, *Journal of the Franklin Institute*, 361(4):106644, 2024. [65].
- Guillermo Oaxaca-Adams, Gilberto Ochoa-Ortega, Mario Ramírez-Neria, and Raúl Villafuerte-Segura, Performance, fragility and robustness for a class of first-order systems with time delay, sometido.

Cronograma de Objetivos

Objetivos	Semestres							
	1	2	3	4	5	6	7	8
OE1	100 %	100 %						
OE2			100 %	100 %				
OE3					100 %	100 %	100 %	100 %

Avance total de la Tesis: 100 %.



# Capítulo 2

## Sistemas con retardo

En este capítulo definimos los sistemas con retardo y formularemos con precisión el problema de la estabilidad de cuasi-polinomios y de familias politópicas de cuasi-polinomios.

### 2.1. Sistemas no lineales

Supongamos que  $h$  es una constante positiva y sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Una de las ecuaciones con retardo más simple es

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \quad t \geq t_0. \quad (2.1)$$

Notamos que para poder calcular los valores de  $x(t)$  en el intervalo  $[t_0, t_0 + h]$ , necesitamos conocer los valores de  $x(t)$  en el intervalo  $[t_0 - h, t_0]$ . Esto es, necesitamos la *condición inicial*

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0], \quad (2.2)$$

donde  $\phi : [t_0 - h, t_0] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua. Con esta condición inicial, integrando la ecuación (2.1), tenemos que

$$x(t) = \phi(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s), \phi(s-h))ds, \quad t \in [t_0, t_0 + h]. \quad (2.3)$$

Una vez que conocemos  $x(t)$  en el intervalo  $[t_0, t_0 + h]$ , de manera similar, podemos calcular los valores de  $x(t)$  en el intervalo  $[t_0 + h, t_0 + 2h]$ . Esto es,

$$x(t) = x(t_0 + h) + \int_{t_0+h}^t f(s, x(s), x(s-h))ds, \quad t \in [t_0 + h, t_0 + 2h]. \quad (2.4)$$

Repetiendo este procedimiento infinitas veces, podemos calcular  $x(t)$  en el intervalo  $[t_0, +\infty)$ . Este es el *método de pasos* [25, 45].

En este caso, repetir infinitas veces significa que la ecuación (2.1) puede resolverse sucesivamente en los intervalos  $[t_0, t_0 + h]$ ,  $[t_0 + h, t_0 + 2h]$ ,  $[t_0 + 2h, t_0 + 3h]$ ,  $\dots$

**Ejemplo.** La solución de la ecuación  $\dot{x}(t) = ax(t - 1)$ ,  $t > 0$  con la condición inicial  $x(t) = 1$ ,  $t \in [-1, 0]$ , es

$$x(t) = \sum_{k=0}^{[t/h]+1} \frac{a^k}{k!} [t - (k-1)h]^k, \quad t \geq 0, \quad (2.5)$$

donde  $[s]$  denota la parte entera de  $s$ .

El método de pasos no es general, no puede aplicarse a una ecuación con un retardo variante en el tiempo que se anula en algunos puntos. Por ejemplo,

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - h(t))), \quad t > t_0, \quad (2.6)$$

donde  $h(t) \geq 0$  y  $h(t_1) = 0$  para  $t_1 > t_0$ .

Ahora, formularemos con precisión el problema de valores iniciales para un sistema con retardo.

El espacio de todas las funciones continuas del intervalo  $[a, b]$  en  $\mathbb{R}^n$  se denotará por  $\mathcal{C}[a, b]$ . Si  $\phi \in \mathcal{C}[a, b]$ , definimos su norma por

$$\|\phi\| = \max_{s \in [a, b]} |\phi(s)|,$$

donde  $|\cdot|$  denota una norma en  $\mathbb{R}^n$ . Con esta norma,  $\mathcal{C}[a, b]$  es un espacio de Banach [47]. Para  $x \in \mathcal{C}[t_0 - h, t_0 + b]$  y  $t \in [t_0, t_0 + b]$ , definimos la función  $x_t \in \mathcal{C}[-h, 0]$  por  $x_t(s) = x(s + t)$ . Entonces,  $x_t$  es una traslación de  $t$  unidades a la izquierda de la función  $x$ .

Consideremos la función  $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Entonces, dada una función  $\phi \in \mathcal{C}[-h, 0]$ , el problema de valores iniciales para una ecuación con retardo puede escribirse formalmente como

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t \geq t_0 \quad (2.7)$$

$$x_{t_0} = \phi, \quad (2.8)$$

donde  $\dot{x}$  denota derivada por la derecha.

**Teorema 1.** [46, p. 21] Suponer que  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathcal{C}[-h, 0]$  es un conjunto abierto y sea  $f(t, \phi)$  una función continua en  $\Omega$  que toma valores en  $\mathbb{R}^n$  y satisface una condición local de Lipschitz en  $\phi$ . Si  $(t_0, \phi) \in \Omega$ , existe un  $\delta > 0$  tal que el problema (2.7)-(2.8) tiene solución única en el intervalo  $[t_0, t_0 + \delta)$ , y esta solución depende continuamente de la condición inicial.

En el teorema anterior, la función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisface una *condición local de Lipschitz* en  $\phi$  si para cada punto  $(t, \phi) \in \Omega$  existe un conjunto abierto  $S \subset \Omega$  que contiene a  $(t, \phi)$  y una constante  $L$  tal que

$$|f(t, \phi_1) - f(t, \phi_2)| \leq L \|\phi_1 - \phi_2\|$$

para todo  $(t, \phi_1), (t, \phi_2) \in S$ .

Hablaremos ahora de la estabilidad de soluciones. Supongamos que el sistema (2.7) posee la *solución cero* definida por  $0(t) = 0$  para  $t \geq t_0$ . Si esto no sucede y  $y(t)$  es una solución distinta de la solución cero, haciendo el cambio de variable  $z(t) = x(t) - y(t)$ , vemos que el sistema

$$\dot{z}(t) = f(t, y_t + z_t) - f(t, y_t)$$

tiene la solución cero  $z(t) = 0$  para  $t \geq t_0$ .

- (i) Decimos que 0, o que la solución cero, es *estable* si para cada  $t_0 \in \mathbb{R}$  y cada  $\varepsilon > 0$  dados, existe un  $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$  tal que para cualquier solución  $x$  del sistema (2.7) que satisfaga  $\|x_{t_0}\| < \delta$  se tiene que  $|x(t)| < \varepsilon$  para todo  $t \geq t_0$ .
- (ii) 0 es *asintóticamente estable* si 0 es estable y además las soluciones  $x$  de la definición (i) satisfacen que  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .
- (iii) 0 es *uniformemente estable* si 0 es estable y el delta de la definición (i) no depende de  $t_0$ .

Un sistema que no es estable se dice que es *inestable*.

La estabilidad de sistemas sin retardo puede determinarse usando funciones de Lyapunov. En el caso de sistemas con retardo, su estabilidad puede determinarse usando funcionales de Lyapunov-Krasovskii [31].

Sea  $V : \mathbb{R} \times \mathcal{C}[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional continuo y denotemos  $V(t, x_t)$  por  $V(t)$ . La derivada  $\dot{V}$  del funcional  $V(t, x_t)$  sobre las trayectorias del sistema (2.7) está definida por

$$\dot{V}(t) = \limsup_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t}.$$

**Teorema 2.** (Lyapunov-Krasovskii)[45, p. 105] Supongamos que existen tres funciones escalares, continuas y no decrecientes  $\omega_i$  tales que  $\omega_i(0) = 0$  y  $\omega_i(r) > 0$  para  $r > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Si el funcional  $V$  satisface las condiciones

$$(i) \quad V(t, 0) = 0$$

$$(ii) \quad \omega_1(|\phi(0)|) \leq V(t, \phi) \leq \omega_2(\|\phi\|), \quad (t, \phi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}[-h, 0]$$

$$(iii) \quad \dot{V}(t) \leq -\omega_3(|x(t)|),$$

entonces la solución 0 del sistema (2.7) es asintóticamente estable.

## 2.2. Sistemas lineales

Sea  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua. El sistema con retardo

$$\dot{x} = f(t, x, x_t) \tag{2.9}$$

es *lineal* si  $f$  es una función lineal en  $x$  y  $x_t$ . Si además la función de retardo  $x_t$  sólo depende de un estado pasado, el sistema toma la forma

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-h), \tag{2.10}$$

donde  $A(t)$  y  $B(t)$  son matrices continuas de orden  $n \times n$ .

El sistema es *lineal invariante* en el tiempo si las matrices  $A$  y  $B$  son constantes. En este caso, el sistema es de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h). \tag{2.11}$$

Si  $X(s)$  denota la transformada de Laplace de  $x(t)$  y  $x_0 = \phi$  es la condición inicial, entonces tomando transformada de Laplace en ambos lados de (2.11), se obtiene que

$$X(s) = (sI - A - e^{-hs}B)^{-1}[\phi(0) + e^{-hs}\Phi(h, s)],$$

donde  $\Phi(h, s) = \int_{-h}^0 \phi(t)e^{-st}dt$ . La estabilidad del sistema depende de las raíces del determinante de la *matriz característica*  $\Delta(s) = sI - A - e^{-hs}B$ , que es el *cuasi-polinomio*

$$\begin{aligned} q(s) &= |\Delta(s)| \\ &= q_0(s) + q_1(s)e^{-hs} + q_2(s)e^{-2hs} + \dots + q_n(s)e^{-nhs}, \\ &= \sum_{j=0}^n q_j(s)e^{-jhs}, \end{aligned}$$

donde  $q_j(s)$  es un polinomio en  $s$  para  $0 \leq j \leq n$ . A  $q(s) = 0$  se le llama *ecuación característica*.

En general, el sistema lineal invariante en el tiempo con *múltiples* retardos es de la forma

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^k A_j x(t - h_j),$$

donde  $A_j$  es una matriz de orden  $n \times n$  para  $0 \leq j \leq k$  y los retardos  $h_j$  satisfacen la condición  $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_k$ . En este caso, la matriz característica es

$$\Delta(s) = sI - \sum_{j=0}^k e^{-h_j s} A_j$$

y su determinante es el cuasi-polinomio

$$\begin{aligned} q(s) &= |\Delta(s)| \\ &= q_0(s) + q_1(s)e^{-r_1 s} + q_2(s)e^{-r_2 s} + \dots + q_m(s)e^{-r_m s}, \\ &= \sum_{j=0}^m q_j(s)e^{-r_j s}, \end{aligned}$$

donde  $q_j(s)$  es un polinomio en  $s$  para  $0 \leq j \leq m$  y los números  $0 = r_0, r_1, \dots, r_m$  son sumas de los retardos  $0 = h_0, h_1, \dots, h_k$ .

**Teorema 3.** [31] *El sistema (2.12) es estable si todas las raíces de la ecuación característica  $q(s) = 0$  tienen parte real negativa.*

Tenemos la siguiente definición. El polinomio con coeficientes reales

$$q(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n \quad (2.12)$$

es *estable* (o *Hurwitz estable*) si todas sus raíces tienen parte real negativa.

**Teorema 4.** (Routh-Hurwitz)[26] *Suponer que  $a_0 > 0$ . El polinomio (2.12) es estable si y sólo si los  $n$  determinantes*

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

son positivos.

**Ejemplo.** Consideremos el sistema masa-resorte no autónomo

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = u(t),$$

donde  $m$  y  $k$  son constantes positivas y  $u$  es un control proporcional-integral-derivativo (PID) de la forma

$$u(t) = k_p y(t) + k_i \int_0^t y(s) ds + k_d \dot{y}(t),$$

con  $k_p, k_i$  y  $k_d$  constantes.

Sea  $Y(s)$  la transformada de Laplace de  $y(t)$ . Entonces,

$$Y(s) = \frac{my(0)s^2 + [m\dot{y}(0) - k_d y(0)]s}{ms^3 - k_d s^2 + (k - k_p)s - k_i}.$$

(a) Si  $k_i = k_d = 0$ , entonces el control  $u$  sólo tiene acción proporcional. En este caso las raíces del polinomio característico  $q(s) = ms^2 + k - k_p$  son

$$s_{1,2} = \begin{cases} \pm \sqrt{\frac{k_p - k}{m}}, & k_p \geq k \\ \pm i \sqrt{\frac{k - k_p}{m}}, & k_p < k. \end{cases}$$

Como no todas las raíces tienen parte real negativa, el control no puede estabilizar el sistema.

(b) Si  $k_p = k_i = 0$ , entonces el control  $u$  sólo tiene acción derivativa. En este caso las raíces del polinomio característico  $q(s) = ms^2 - k_d s + k$  son

$$s_{1,2} = \begin{cases} \frac{k_d \pm \sqrt{k_d^2 - 4mk}}{2m}, & k_d \geq 2\sqrt{mk} \\ \frac{k_d}{2m} \pm i \frac{\sqrt{4mk - k_d^2}}{2m}, & k_d < 2\sqrt{mk}. \end{cases}$$

El control estabiliza el sistema cuando  $k_d < 0$ .

(c) Si  $k_p = k_d = 0$ , entonces el control  $u$  sólo tiene acción integral. En este caso el polinomio característico es  $q(s) = -k_i + ks + ms^3$ . Si  $k_i < 0$ , tenemos que

$$\Delta_1 = k, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} k & -k_i \\ m & 0 \end{vmatrix} = mk_i \quad \text{y} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} k & -k_i & 0 \\ m & 0 & k \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix} = m^2 k_i.$$

Por el criterio de Hurwitz, no todas las raíces de  $q$  tienen parte real negativa y el control no puede estabilizar el sistema. Si  $k_i > 0$ , el control tampoco puede estabilizar el sistema.

- (d) Si  $k_i = 0$  y la derivada  $\dot{y}(t)$  en el control  $u$  se reemplaza por la aproximación  $\frac{y(t)-y(t-h)}{h}$ , entonces, sumando términos semejantes y renombrando constantes, obtenemos el sistema con retardo

$$m\ddot{y}(t) = k_p y(t) + k_r y(t-h).$$

Esta vez la estabilidad del sistema está determinada por el *cuasi-polinomio*  $q(s) = ms^2 - k_p - k_r e^{-hs}$ .

## 2.3. Conclusión

En este capítulo definimos sistemas con retardo y para sistemas lineales invariantes, hemos relacionado su estabilidad con la localización de las raíces de un cuasi-polinomio. La robustez, fragilidad y desempeño de un sistema pueden determinarse estudiando la estabilidad de una colección de cuasi-polinomios con cierta regularidad.



# Capítulo 3

## Fragilidad de controladores para sistemas a lazo cerrado con retardo

### 3.1. Introducción

En teoría de control, la robustez de los controladores es uno de los temas de mayor interés en la comunidad, porque la robustez de un controlador garantiza el funcionamiento apropiado de un sistema a lazo cerrado cuando existen perturbaciones e incertidumbres [98]. Esto es importante para aquellos que están involucrados en aplicaciones donde ruidos, perturbaciones e incertidumbres del modelo están siempre presentes. Por lo tanto, el conocimiento de la robustez de los controladores usados beneficiará el análisis de estabilización y la síntesis de controladores más eficientes. Sin embargo, no sólo la robustez debe ser considerada al diseñar y sintonizar un controlador, sino que también es necesario determinar la desviación máxima de los parámetros de los controladores que garantizan la estabilidad del sistema a lazo cerrado [40]. Esta desviación paramétrica permite determinar la desestabilización de un sistema a lazo cerrado debido a perturbaciones o incertidumbres en los coeficientes del controlador y se conoce como *fragilidad* [72]. Como se menciona en [8], la necesidad de proveer métodos para diseñar controladores estabilizadores respecto a la incertidumbre de los parámetros y las perturbaciones de los coeficientes del controlador es primordial. Por lo tanto, la obtención de métodos para determinar la fragilidad de un controlador puede contribuir en este contexto.

Sin duda, cuando se mencionan los controladores para sistemas lineales invariantes en el tiempo con retardo, parece que en la literatura existen varios resultados en este sen-

tido. Desde hace varias décadas la comunidad científica ha desarrollado un gran número de propuestas para su diseño, así como para su sintonización. Entre los controladores preferidos, tal vez por su simplicidad y facilidad de implementación, se encuentran aquellos con acciones proporcional, derivativa, integral y/o retardada, ver [1, 4, 6, 11, 22, 33, 39, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 76, 78, 83, 87, 88, 89, 90, 93, 94, 95]. En general, para el diseño y la sintonización de este tipo de controladores, se debe considerar lo siguiente: su *desempeño* a una perturbación o a un cambio en el punto de ajuste, su *robustez* a los cambios en las características del proceso controlado, y su *fragilidad* a la variación de sus propios parámetros [2]. Por lo tanto, la robustez y fragilidad de un controlador deben considerarse independientes, entendiendo que la robustez de un control indica el margen de variación en el que las características de la planta con un controlador fijo pueden variar y la fragilidad de un controlador tiene un significado similar en términos de la variación de sus propios parámetros. Porque existen controladores robustos, diseñados mediante el uso de  $H_2$ ,  $H_\infty$  y  $l_1$ , que a menudo son controladores extremadamente frágiles [40]. Hasta donde sabemos, parece que los estudios para determinar la fragilidad de los controladores no han recibido suficiente atención en la literatura.

En este contexto, algunos de los resultados que se pueden encontrar son los siguientes. La fragilidad de un controlador se ha estudiado en [10] cuando se presenta el problema de controlar de forma robusta el flujo de información en un canal único de comunicación de una red ATM y se muestra que las políticas de control óptimo son frágiles si se permite que el tiempo de retardo varíe (posiblemente en una cantidad arbitrariamente pequeña) respecto al valor nominal en el que se basa el diseño. En [44], se presenta la síntesis de controladores retroalimentados de estado  $H_\infty$  para sistemas lineales con incertidumbre en los parámetros y retardo en el estado. Aquí, la medida de la no fragilidad en el controlador puede calcularse usando el enfoque de LMI's. En [84] el estudio de la no fragilidad para algunas técnicas de sintonización PID se basan en modelos de primer orden con retardos. Aquí, se muestran algunas gráficas que delimitan las variaciones de las ganancias del controlador para las que el sistema permanece estable. En [96] se propone un control real positivo no frágil para sistemas inciertos neutros retardados con norma acotada invariante en el tiempo de los parámetros inciertos. La no fragilidad del controlador se garantiza usando LMI's para los casos de incertidumbres del controlador aditivas y multiplicativas. En [97] se propone, entre otros, el diseño de un controlador de costo garantizado no frágil basado en una solución de un conjunto de LMI's estrictos para sistemas descriptores inciertos con retardos tanto en el estado como en la entrada. Sin embargo, en ninguno de estos, se pueden encontrar métodos

o técnicas generales para determinar la fragilidad o no fragilidad de un controlador.

Algunas ideas para analizar la fragilidad de un controlador sugieren elegir sus parámetros como el conjunto que maximizaría el margen de estabilidad paramétrica (máximo de la norma  $l_2$  del vector de los parámetros del controlador). Sin embargo, el procedimiento propuesto no considera las características de desempeño de la respuesta del sistema a lazo cerrado, véase [2, 21, 35]. Mientras que otros sugieren elegir parámetros del controlador menos frágiles (no frágiles o resilientes) como el centro de la esfera de radio máximo contenida en la región de estabilidad del espacio paramétrico del sistema a lazo cerrado, y el desempeño del control se obtiene mediante el análisis de los parámetros alrededor del centro de la esfera. Sin embargo, no se proponen criterios específicos o metodología para conseguir esto, ver [83].

En [56] se presenta un análisis de fragilidad para controladores PI aplicado a sistemas SISO con retardo usando un enfoque geométrico: dados los parámetros  $(k_p, k_i)$  de un controlador estabilizador, el análisis de fragilidad consiste en encontrar la desviación máxima  $d$  de los parámetros del controlador de tal manera que el sistema a lazo cerrado permanece estable si los parámetros del controlador están dentro del círculo con centro  $(k_p, k_i)$  y radio  $d$ . Esto equivale a encontrar el círculo más grande con centro  $(k_p, k_i)$  que está dentro de la región de estabilidad, aunque  $(k_p, k_i)$  no necesariamente proporciona el valor más grande posible para  $d$ .

En [55] el problema de estabilización de modelos de flujo de fluido con retardo del protocolo de control de transmisión/manejo activo de filas (TCP/AQM) de redes usa un controlador integral proporcional (PI) como estrategia AQM. Aquí, los parámetros del controlador son el centro del círculo más grande que los autores pueden colocar dentro de las regiones de estabilidad. En [59], se presenta un método simple y amigable para el análisis de estabilidad a lazo cerrado y no fragilidad del controlador PID. Mientras que en [33] se presenta el diseño de controladores retardados (controladores PR) para sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) de una entrada y una salida (SISO), así como una propuesta para obtener las ganancias menos frágiles del controlador con una tasa de decaimiento exponencial deseada  $\sigma$ .

En este capítulo presentamos una metodología para determinar los parámetros menos frágiles de controladores para estabilizar sistemas SISO-LTI con retardo. Esta metodología consiste en encontrar el centro del círculo más grande posible inscrito en la región de estabilidad del plano de los parámetros del sistema a lazo cerrado. A diferencia de los resultados encontrados en la literatura, tenemos un algoritmo explícito para obtener los

parámetros menos frágiles del controlador . Además, este algoritmo mejora los resultados reportados hasta ahora en otros trabajos. Lo anterior se corrobora con la aplicación y comparación de la metodología propuesta con varios de los ejemplos más relevantes que se encuentran en la literatura en lo que se refiere a la no fragilidad.

## 3.2. Formulación del problema

En esta sección precisaremos lo que llamamos el punto menos frágil de una región de estabilidad, y derivaremos un método para encontrar este punto. A diferencia de otros resultados encontrados en la literatura, este método tiene como objetivo encontrar el punto menos frágil de una región, y no otro punto.

Consideremos un sistema SISO-LTI a lazo cerrado con un controlador cuya ecuación característica conduce a un cuasi-polinomio de la forma

$$q(k, s) = p_0(\eta, s) + p_1(\eta, s)e^{-\tau s}, \quad (3.1)$$

donde  $p_0$  y  $p_1$  son polinomios con coeficientes reales tales que  $\deg p_0 > \deg p_1$ ,  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1})$ , son parámetros del sistema o el controlador y el retardo  $\tau > 0$  puede ser un parámetro del controlador o un parámetro inherente al sistema. Aquí, el vector  $k = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}, \tau)$  denota todos los parámetros del cuasi-polinomio (3.1). Es bien sabido que la estabilidad del sistema a lazo cerrado está completamente determinada por la ubicación de las raíces de (3.1) en el plano complejo [31]. Además, las raíces tienen variaciones continuas respecto a las variaciones paramétricas del vector  $k$  que pertenece a una región  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ . Esto se conoce como la propiedad de continuidad [57]. Normalmente para determinar los parámetros del controlador que garantizan estabilización del sistema se usa el método geométrico de  $D$ -particiones [60] para obtener las regiones de estabilidad en el plano paramétrico  $k_1$ - $k_2$ , donde  $k_1, k_2 \in \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}, \tau\}$ , (si  $\tau$  es un parámetro del controlador) del sistema a lazo cerrado. Estas regiones de estabilidad se pueden utilizar para determinar los parámetros menos frágiles del controlador que garantizan la estabilización del sistema. Lo anterior consiste en determinar el centro del círculo más grande inscrito en las regiones de estabilidad.

Sea  $\Gamma$  el conjunto de todos los parámetros  $k$  tales que  $q$  tiene al menos una raíz imaginaria, esto es,

$$\Gamma = \{k \in K : q(k, s) = 0 \text{ para algún } s \in \mathbb{C} \text{ y } \operatorname{Re}(s) = 0\}.$$

Puesto que las raíces del cuasi-polinomial (3.1) son funciones continuas de los parámetros [60], el conjunto  $\Gamma$  divide a  $K$  en subregiones con un número constante de raíces complejas con parte real positiva, es decir,

$$K = K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup \dots,$$

donde

$$K_m = \{k \in K : q(k, s) \text{ tiene exactamente } m \text{ raíces con parte real positiva}\}.$$

El conjunto  $K_0$  se denomina la región de estabilidad del cuasi-polinomio (3.1).

Para  $\omega \in \mathbb{R}$ , tenemos que

$$q(k, i\omega) = u(k, \omega) + iv(k, \omega),$$

donde

$$u(k, \omega) = \operatorname{Re}[q(k, i\omega)] \quad \text{y} \quad v(k, \omega) = \operatorname{Im}[q(k, i\omega)].$$

Entonces

$$q(k, i\omega) = 0$$

si y sólo si

$$u(k, \omega) = 0 \quad \text{y} \quad v(k, \omega) = 0. \quad (3.2)$$

Eligiendo dos componentes  $k_1$  y  $k_2$  del vector  $k$  y manteniendo las demás fijas, y suponiendo que se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita [5], es posible resolver localmente el sistema (3.2) para  $(k_1, k_2)$  en términos de  $\omega$ . Por lo tanto, podemos obtener una parametrización de algunas porciones del conjunto  $\Gamma$  para  $a$  fijo. Estamos interesados en las parametrizaciones de las partes de  $\Gamma$  que son la frontera de subconjuntos de la región de estabilidad  $K_0$ .

En lo que sigue podemos suponer que  $k$  tiene sólo dos componentes. Sea  $D$  una subregión compacta de  $K_0$ , y supongamos que su frontera  $\partial D$  puede parametrizarse por la curva cerrada simple  $\gamma(\omega)$  con  $\omega$  en  $I = [\alpha, \beta]$ . Queremos encontrar un punto  $k^* \in D$  tal que

$$\rho(k^*) = \max_{k \in D} \rho(k),$$

donde

$$\rho(k) = \min_{\omega \in I} \varphi(k, \omega), \quad \text{y} \quad \varphi(k, \omega) = \|\gamma(\omega) - k\|.$$

En este contexto,  $k$  denota los parámetros de una ley de control, y llamamos a  $k^*$  el punto *menos frágil* de la región de estabilidad  $D$ .

Puesto que  $\varphi$  es una función continua en el conjunto compacto  $D \times I$ ,  $\rho$  es una función continua en  $D$ , y el punto  $k^*$  existe [23]. Este problema es equivalente a encontrar el círculo más grande que se puede inscribir en la región  $D$ .

### 3.3. Metodología para encontrar los parámetros menos frágiles

En esta sección del capítulo vamos a establecer algunas propiedades generales del círculo más grande inscrito en una región de estabilidad, así como un procedimiento para obtenerlo.

#### 3.3.1. Propiedades del círculo más grande inscrito en una región de estabilidad

Para  $k$  fijo, tenemos que

$$\rho(k) = \min_{\omega \in I} \varphi(k, \omega) = \min_{\omega \in J(k)} \varphi(k, \omega),$$

donde

$$J(k) = \{\omega \in I : \varphi(k, \omega) = \rho(k)\}$$

es el conjunto de todos los puntos donde la función  $\varphi(k, \omega)$  alcanza su valor mínimo. Puesto que  $I$  es un conjunto compacto,  $J(k) \neq \emptyset$ . Denotemos por

$$S(k, r) = \{l \in \mathbb{R}^2 : \|l - k\| = r\}$$

el círculo con centro en  $k$  y radio  $r$ .

Si  $k$  está en  $D$ , el círculo  $S(k, \rho(k))$  está contenido en  $D$  y para cualquier  $\omega \in J(k)$ ,  $\gamma(\omega)$  es un *punto de contacto* del círculo  $S(k, \rho(k))$  con la curva  $\gamma$ . El siguiente resultado establece una propiedad general de los puntos de contacto.

**Proposición 1.** *Si  $k \in D$  y  $\gamma$  es una curva continuamente derivable, el círculo  $S(k, \rho(k))$  es tangente a la curva  $\gamma$  en cada punto de contacto.*

*Demostración.* Tenemos que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}(k, \omega) = \frac{\gamma(\omega) - k}{\|\gamma(\omega) - k\|} \cdot \gamma'(\omega).$$

Si  $\omega \in J(k)$ , entonces necesariamente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}(k, \omega) = 0,$$

y debemos tener que

$$[\gamma(\omega) - k] \cdot \gamma'(\omega) = 0. \quad (3.3)$$

Esto muestra que el círculo  $S(k, \rho(k))$  es tangente a la curva en cada punto de contacto.  $\square$

**Proposición 2.** *El círculo más grande  $S(k^*, \rho(k^*))$  tiene al menos dos puntos de contacto con la curva  $\gamma$ .*

*Demostración.* Por nuestras observaciones anteriores,  $S(k^*, \rho(k^*))$  tiene al menos un punto de contacto con la curva  $\gamma$ , y existe un punto  $\omega^* \in I$  tal que  $\|\gamma(\omega^*) - k^*\| = \rho(k^*)$ . Si  $\gamma(\omega^*)$  fuera el único punto de contacto con la curva, tendríamos que  $J(k^*) = \{\omega^*\}$ .

Ahora, la derivada direccional de  $\rho$  en  $k^*$  en la dirección de un vector unitario  $u$  está dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial u}(k^*) &= - \min_{\omega \in J(k^*)} \{-\nabla \varphi(k^*, \omega) \cdot u\} \\ &= - \min_{\omega \in J(k^*)} \left\{ \frac{\gamma(\omega) - k^*}{\|\gamma(\omega) - k^*\|} \cdot u \right\} \\ &= - \frac{\gamma(\omega^*) - k^*}{\|\gamma(\omega^*) - k^*\|} \cdot u, \end{aligned}$$

ver [23]. Tomando  $u = -\frac{\gamma(\omega^*) - k^*}{\|\gamma(\omega^*) - k^*\|}$ , tenemos que  $\frac{\partial \rho}{\partial u}(k^*) = 1$ . Esto implica que la función  $\rho$  puede crecer más en esta dirección, lo que contradice el hecho de que  $\rho$  alcanza su valor máximo en  $k^*$ . Por lo tanto, el círculo más grande  $S(k^*, \rho(k^*))$  tiene al menos dos puntos de contacto con la curva  $\gamma$ .  $\square$

A continuación se averigua lo que sucede cuando existen exactamente dos puntos de contacto.

**Proposición 3.** Si  $\gamma$  es una curva continuamente derivable y el círculo más grande  $S(k^*, \rho(k^*))$  tiene exactamente dos puntos de contacto con la curva, entonces el centro  $k^*$  y los puntos de contacto están sobre la misma línea recta, y esta recta es ortogonal a la curva en los puntos de contacto.

*Demostración.* Puede probarse [23], que si  $\rho$  alcanza su valor máximo en  $k^*$ , entonces 0 está en la cáscara convexa del conjunto  $H = \{\nabla\varphi(k^*, \omega) : \omega \in J(k^*)\}$ . Por hipótesis,  $J(k^*)$  tiene solamente dos puntos, digamos  $J(k^*) = \{\omega_1, \omega_2\}$ . Puesto que

$$\nabla\varphi(k^*, \omega) = -\frac{\gamma(\omega) - k^*}{\|\gamma(\omega) - k^*\|},$$

existe un  $\lambda \in [0, 1]$  tal que

$$(1 - \lambda) \frac{\gamma(\omega_1) - k^*}{\|\gamma(\omega_1) - k^*\|} + \lambda \frac{\gamma(\omega_2) - k^*}{\|\gamma(\omega_2) - k^*\|} = 0,$$

y tenemos que

$$k^* = (1 - \lambda)\gamma(\omega_1) + \lambda\gamma(\omega_2).$$

Esto significa que  $k^*$  está sobre la recta que pasa por los puntos de contacto  $\gamma(\omega_1)$  y  $\gamma(\omega_2)$ .

De las ecuaciones

$$\begin{aligned} \gamma(\omega_1) - k^* &= \lambda[\gamma(\omega_1) - \gamma(\omega_2)] \\ \gamma(\omega_2) - k^* &= (1 - \lambda)[\gamma(\omega_2) - \gamma(\omega_1)], \end{aligned}$$

obtenemos que  $\lambda = 1/2$ . Por lo tanto,  $k^* = [\gamma(\omega_1) + \gamma(\omega_2)]/2$ .

Ahora, de las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2[\gamma(\omega_1) - k^*] &= \gamma(\omega_1) - \gamma(\omega_2) \\ 2[\gamma(\omega_2) - k^*] &= \gamma(\omega_2) - \gamma(\omega_1), \end{aligned}$$

y por la Proposición 1, obtenemos que

$$\begin{aligned} [\gamma(\omega_1) - \gamma(\omega_2)] \cdot \gamma'(\omega_1) &= 0 \\ [\gamma(\omega_2) - \gamma(\omega_1)] \cdot \gamma'(\omega_2) &= 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Esto prueba que la recta que pasa por los puntos de contacto  $\gamma(\omega_1)$  y  $\gamma(\omega_2)$  es ortogonal a la curva en esos puntos.  $\square$

Ahora, vamos a averiguar lo que sucede cuando existen tres o más puntos de contacto.

**Proposición 4.** *Si el círculo más grande  $S(k^*, \rho(k^*))$  tiene tres o más puntos de contacto con la curva  $\gamma$ , podemos encontrarlo resolviendo un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.*

*Demostración.* Sabemos que el círculo más grande  $S(k^*, \rho(k^*))$  existe, es tangente a la curva en los puntos de contacto, y sólo necesitamos tres puntos para determinarlo. Usando estos hechos podemos plantear un sistema de ecuaciones para encontrar  $S(k^*, \rho(k^*))$ .

Supongamos que  $\gamma(\omega_1)$ ,  $\gamma(\omega_2)$  y  $\gamma(\omega_3)$  son tres puntos de contacto. Puesto que  $S(k^*, \rho(k^*))$  es tangente en esos puntos, las tres rectas normales a la curva en esos puntos deben intersectarse en el centro  $k^*$ . Las ecuaciones de las rectas normales están dadas por

$$\begin{aligned} k^1 &= \gamma(\omega_1) + s^1 n(\omega_1) \\ k^2 &= \gamma(\omega_2) + s^2 n(\omega_2) \\ k^3 &= \gamma(\omega_3) + s^3 n(\omega_3), \end{aligned}$$

donde  $n(\omega_j)$  es el vector normal a la curva en  $\gamma(\omega_j)$ , y  $s^j$  es el parámetro de  $j$ -ésima recta normal para  $j = 1, 2, 3$ .

En el punto de intersección, debemos tener que

$$\begin{aligned} \gamma(\omega_1) + s^1 n(\omega_1) &= \gamma(\omega_2) + s^2 n(\omega_2) \\ \gamma(\omega_1) + s^1 n(\omega_1) &= \gamma(\omega_3) + s^3 n(\omega_3) \\ \gamma(\omega_2) + s^2 n(\omega_2) &= \gamma(\omega_3) + s^3 n(\omega_3), \end{aligned} \tag{3.5}$$

y debido a que este es un círculo

$$\begin{aligned} \|s^1 n(\omega_1)\| &= \|s^2 n(\omega_2)\| \\ \|s^1 n(\omega_1)\| &= \|s^3 n(\omega_3)\| \\ \|s^2 n(\omega_2)\| &= \|s^3 n(\omega_3)\|. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Este es un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas:  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, s^1, s^2$ , y  $s^3$ . Puesto que

$\gamma'(\omega_j) \cdot n(\omega_j) = 0$  para  $j = 1, 2, 3$ , de las ecuaciones normales (3.5), tenemos que

$$\begin{aligned} s^1 &= -\frac{[\gamma(\omega_1) - \gamma(\omega_2)] \cdot \gamma'(\omega_2)}{n(\omega_1) \cdot \gamma'(\omega_2)} = -\frac{[\gamma(\omega_1) - \gamma(\omega_3)] \cdot \gamma'(\omega_3)}{n(\omega_1) \cdot \gamma'(\omega_3)} \\ s^2 &= \frac{[\gamma(\omega_2) - \gamma(\omega_3)] \cdot \gamma'(\omega_3)}{n(\omega_2) \cdot \gamma'(\omega_3)} = \frac{[\gamma(\omega_1) - \gamma(\omega_2)] \cdot \gamma'(\omega_1)}{n(\omega_2) \cdot \gamma'(\omega_1)} \\ s^3 &= \frac{[\gamma(\omega_1) - \gamma(\omega_3)] \cdot \gamma'(\omega_1)}{n(\omega_3) \cdot \gamma'(\omega_1)} = \frac{[\gamma(\omega_2) - \gamma(\omega_3)] \cdot \gamma'(\omega_2)}{n(\omega_3) \cdot \gamma'(\omega_2)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Si el vector normal se elige en dirección contraria al movimiento de las manecillas de un reloj, entonces

$$n(\omega) = R\gamma'(\omega), \quad \text{donde} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

y

$$\gamma'(\omega_j) \cdot n(\omega_k) = -\gamma'(\omega_k) \cdot n(\omega_j) \quad \text{para} \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (3.8)$$

Sustituyendo las ecuaciones de los parámetros (3.7) en las ecuaciones de los radios (3.6) y usando (3.8), obtenemos

$$\begin{aligned} \|[\gamma(\omega_1) - \gamma(\omega_2)] \cdot \gamma'(\omega_2)n(\omega_1)\| &= \|[\gamma(\omega_1) - \gamma(\omega_2)] \cdot \gamma'(\omega_1)n(\omega_2)\| \\ \|[\gamma(\omega_1) - \gamma(\omega_3)] \cdot \gamma'(\omega_3)n(\omega_1)\| &= \|[\gamma(\omega_1) - \gamma(\omega_3)] \cdot \gamma'(\omega_1)n(\omega_3)\| \\ \|[\gamma(\omega_2) - \gamma(\omega_3)] \cdot \gamma'(\omega_3)n(\omega_2)\| &= \|[\gamma(\omega_2) - \gamma(\omega_3)] \cdot \gamma'(\omega_2)n(\omega_3)\|. \end{aligned}$$

Finalmente, debido a que  $\|n(\omega_j)\| = \|\gamma'(\omega_j)\|$  para  $j = 1, 2, 3$  y elevando al cuadrado, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \{[\gamma(\omega_1) - \gamma(\omega_2)] \cdot \gamma'(\omega_2)\}^2 \|\gamma'(\omega_1)\|^2 - \{[\gamma(\omega_1) - \gamma(\omega_2)] \cdot \gamma'(\omega_1)\}^2 \|\gamma'(\omega_2)\|^2 &= 0 \\ \{[\gamma(\omega_1) - \gamma(\omega_3)] \cdot \gamma'(\omega_3)\}^2 \|\gamma'(\omega_1)\|^2 - \{[\gamma(\omega_1) - \gamma(\omega_3)] \cdot \gamma'(\omega_1)\}^2 \|\gamma'(\omega_3)\|^2 &= 0 \\ \{[\gamma(\omega_2) - \gamma(\omega_3)] \cdot \gamma'(\omega_3)\}^2 \|\gamma'(\omega_2)\|^2 - \{[\gamma(\omega_2) - \gamma(\omega_3)] \cdot \gamma'(\omega_2)\}^2 \|\gamma'(\omega_3)\|^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

□

El círculo más grande inscrito en una región  $D$  no necesariamente es único, y hemos probado que puede tener dos o más puntos de contacto con la curva frontera.

### 3.3.2. Procedimiento numérico

En esta sección describimos un procedimiento numérico para obtener aproximaciones del círculo más grande inscrito en una región  $D$ , y de esta manera el punto menos frágil.

- (i) Elegir una aproximación  $k$  de  $k^*$ , y resolver la ecuación (3.3). Sea  $\Omega = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \omega_{i_3}, \dots\}$  el conjunto solución. Algunas de esas soluciones pueden no corresponder a puntos de contacto.
- (ii) Si  $S(k^*, \rho(k^*))$  tiene dos puntos de contacto, elegir  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$  de tal manera que el ángulo entre los vectores  $\gamma(\omega_1) - k$  y  $\gamma(\omega_2) - k$  sea cercano a  $\pi$  radianes. Entonces, tomar esos valores de la frecuencia como aproximación inicial para resolver numéricamente el sistema (3.4). Esta elección se debe a que para la solución exacta los vectores  $\gamma(\omega_1^*) - k^*$  y  $\gamma(\omega_2^*) - k^*$  forman *realmente* un ángulo de  $\pi$  radianes.
- (iii) Si  $S(k^*, \rho(k^*))$  tiene más de dos puntos de contacto, elegir  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega$  de tal manera que el ángulo entre los vectores  $\gamma(\omega_1) - k$ ,  $\gamma(\omega_2) - k$  y  $\gamma(\omega_3) - k$  sea cercano a  $2\pi/3$  radianes. Entonces, tomar esos valores de la frecuencia como aproximación inicial para resolver numéricamente el sistema (3.9). Esta elección se debe a que preferimos puntos  $\gamma(\omega_1^*)$ ,  $\gamma(\omega_2^*)$  y  $\gamma(\omega_3^*)$  que no estén demasiado próximos.
- (iv) Repetir los pasos (i)-(iii) hasta estar satisfecho. Esto quiere decir que los valores que se obtienen de  $k^*$  y las frecuencias no cambian mucho de una iteración a otra.

Los sistemas (3.3), (3.4) y (3.9) pueden resolverse numéricamente usando el método de Newton [29]

**Observación.** Recordar que (3.3) es una condición necesaria. Cuando existen más de dos puntos de contacto, es suficiente elegir tres de ellos, y se recomienda elegir tres de los que tengan una mejor distribución sobre la curva  $\gamma$ . La elección de los puntos de contacto en (iii) se parece a lo que ocurre cuando un círculo es inscrito en un triángulo. Cuando  $D$  es un polígono, el punto  $k^*$  se llama centro de Chebyshev del polígono, ver [14].

### 3.4. Implementación y comparación de resultados

En esta sección presentamos cuatro ejemplos de sistemas para mostrar como usar el procedimiento descrito arriba para obtener el control menos frágil.

### 3.4.1. Controlador PI y dos puntos de contacto

Un sistema de segundo orden descrito por la función de transferencia

$$H(s) = \frac{(s-2)e^{-2s}}{s^2 - \frac{1}{2}s + \frac{13}{4}}$$

conduce al cuasi-polinomio

$$q(k, s) = s^3 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{13}{4}s + (s-2)(k_p s + k_i)e^{-2s}, \quad (3.10)$$

donde el parámetro  $k = (k_p, k_i)$  está formado por las ganancias de un controlador proporcional-integral (PI), ver [56]. En el plano de los parámetros  $k_p k_i$ , la Figura 3.1(a) muestra la región de estabilidad  $D$  y su frontera  $\gamma$ , que estamos considerando para el cuasi-polinomio (3.10).

Suponemos que existen sólo dos puntos de contacto con la frontera. Una vez graficada la región  $D$ , una aproximación de  $k^*$  puede obtenerse usando la aplicación `Get Coordinates` de `Mathematica`. Tomamos  $k = (-0.5, -0.34)$  como una aproximación de  $k^*$ . Resolviendo la ecuación (3.3), obtenemos tres valores de la frecuencia  $\omega$ , los que se muestran en la segunda columna de la Tabla 3.1. Puesto que ángulo entre los vectores  $\gamma(\omega_1) - k$  y  $\gamma(\omega_3) - k$  es cercano a  $\pi$  radianes, elegimos esos valores como la aproximación inicial del método de Newton para resolver numéricamente las ecuaciones (3.4). Los resultados obtenidos se muestran en la tercera columna de la Tabla 3.1. Vemos que el procedimiento propuesto mejora los resultados anteriores. En la Figura 3.1(a), el círculo negro fue graficado usando los datos en [56], y el círculo rojo fue graficado usando el procedimiento propuesto.

Tabla 3.1: Comparación del procedimiento propuesto con resultados existentes en la literatura para el Ejemplo 1.

	Reportado en [56]	Aproximación inicial	Procedimiento propuesto
$k$	(-0.4959,-0.3559)	(-0.5,-0.34)	(-0.503379, -0.372191)
$\omega_1$	1.3294	1.33965	1.31468
$\omega_2$	1.6313	1.63727	1.63172
$\omega_3$	1.9530	1.93838	1.97236
$\rho(k)$	0.1649067	0.15386	0.165342

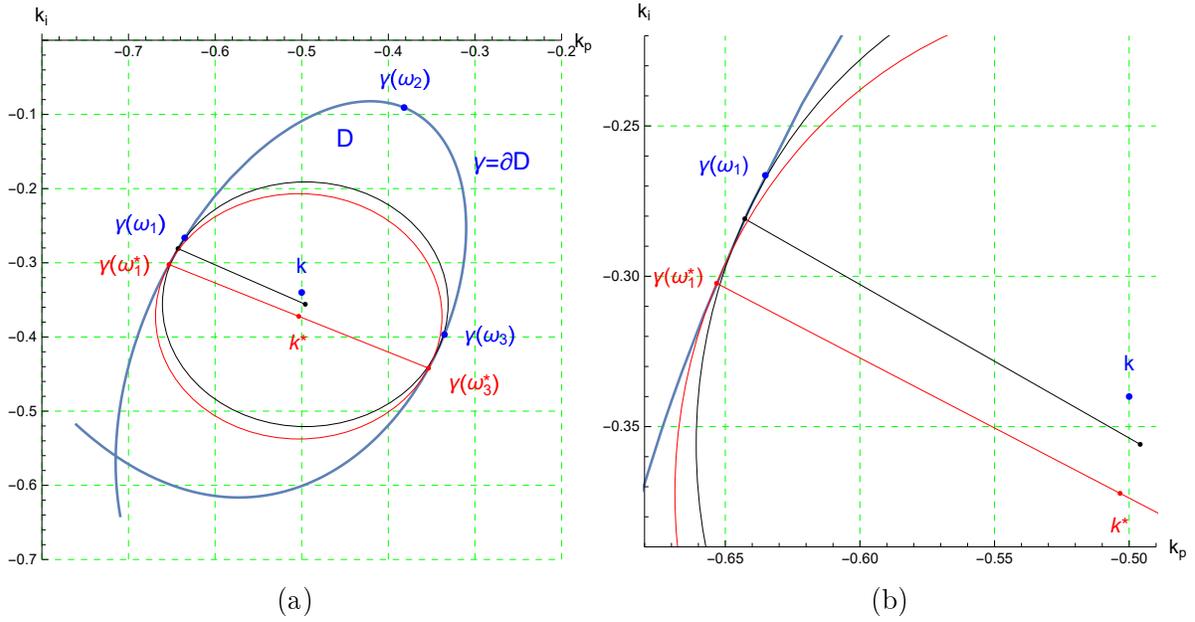


Figura 3.1: (a) Región de estabilidad  $D$  para el cuasi-polinomio (3.10), y el punto menos frágil  $k^*$ . (b) Ampliación de una parte de la gráfica en (a).

### 3.4.2. Controlador PI y tres puntos de contacto

El cuasi-polinomio

$$q(k, s) = s^3 + \frac{1}{\tau} \left(1 + \frac{\nu}{\tau c}\right) s^2 + \frac{2\nu}{\tau^3 c} s + \left[ \frac{\nu}{\tau^2 c} s^2 + \frac{c^2}{2\nu} (k_p s + k_i) \right] e^{-\tau s}, \quad (3.11)$$

donde el parámetro  $k = (k_p, k_i)$  está formado por la ganancias del controlador, se obtiene de linealizar el sistema a lazo cerrado de un modelo de red TCP/AQM sujeto a un controlador proporcional-integral (PI), ver [56]. En el plano de los parámetros  $k_p k_i$ , la Figura 3.2(a) muestra la región de estabilidad  $D$  y su frontera  $\gamma$ , que estamos considerando para el cuasi-polinomio (3.11) con  $\nu = 60$ ,  $c = 3750$  y  $\tau = 0.24$ .

Para aplicar el procedimiento propuesto, primero parametrizamos toda la frontera  $\gamma$  eligiendo un solo parámetro, que podemos seguir llamando  $\omega$ , y suponemos que existen tres puntos de contacto con la frontera. Tomamos  $k = (9.0 \times 10^{-5}, 6.0 \times 10^{-5})$  como aproximación de  $k^*$ . Resolviendo la ecuación (3.3), obtenemos tres valores de la frecuencia  $\omega$  y un valor para  $k_p$ . Esos valores se muestran en la segunda columna de la Tabla 3.2. Puesto que el ángulo entre los vectores  $\gamma(\omega_1) - k$ ,  $\gamma(\omega_3) - k$  y  $(k_p, 0) - k$  es cercano a  $2\pi/3$  radianes, elegimos los correspondientes valores de la frecuencia como la aproximación inicial del método de

Newton para resolver numéricamente las ecuaciones (3.9). Los resultados obtenidos se muestran en la tercera columna de la Tabla 3.2. Vemos que el procedimiento propuesto mejora los resultados anteriores. En la Figura 3.2(a), el círculo negro fue graficado usando los datos en [56], y el círculo rojo fue graficado usando el procedimiento propuesto.

Tabla 3.2: Comparación del procedimiento propuesto con resultados existentes en la literatura para el Ejemplo 2.

	Reportado en [56]	Aproximación inicial	Procedimiento propuesto
$k$	$(9.1044 \times 10^{-5}, 6.8 \times 10^{-5})$	$(9.0 \times 10^{-5}, 6.0 \times 10^{-5})$	$(9.15074 \times 10^{-5}), 6.78693 \times 10^{-5}$
$\omega_1$	1.76	1.67415	1.76594
$\omega_2$	2.75	2.75925	2.75405
$\omega_3$	3.49	3.54364	3.49895
$k_p$	$9.1044 \times 10^{-5}$	$9.0 \times 10^{-5}$	$9.15074 \times 10^{-5}$
$\rho(k)$	$6.7410 \times 10^{-5}$	$6.0 \times 10^{-5}$	$6.78693 \times 10^{-5}$

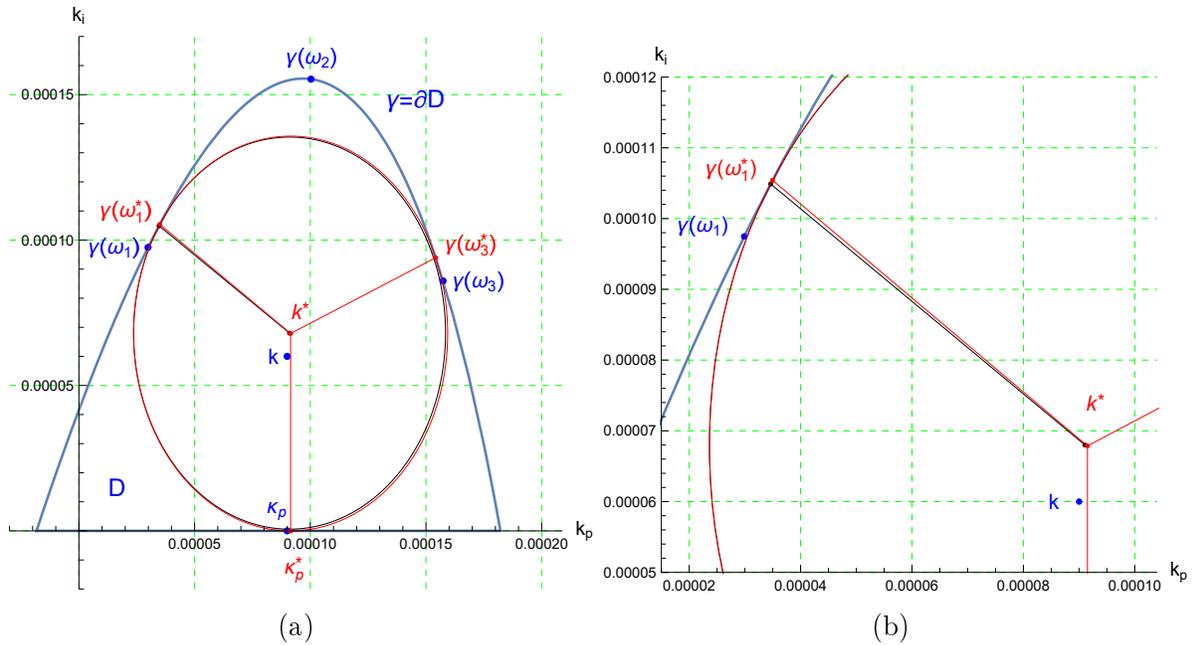


Figura 3.2: (a) Región de estabilidad  $D$  para el cuasi-polinomio (3.11), y el punto menos frágil  $k^*$ . (b) Ampliación de una parte de la gráfica en (a).

### 3.4.3. Controlador PR y tres puntos de contacto

El cuasi-polinomio correspondiente a un sistema marginalmente estable con función de transferencia

$$G(s) = \frac{0.038}{s^4 + 0.1276s^3 + 9.3364s^2 + 1.1484s + 3.0276},$$

sujeto a un controlador PR de la forma

$$C(s) = k_p + k_r e^{-\tau s}$$

es

$$q(k, s) = 0.038(k_p + k_r e^{-\tau s}) + (s^4 + 0.1276s^3 + 9.3364s^2 + 1.1484s + 3.0276), \quad (3.12)$$

donde el parámetro  $k = (k_p, k_r)$  está formado por la ganancias controlador. La Figura 3.3(a) muestra la región de estabilidad  $D$  para el parámetro de retardo  $\tau = 5$ , ver [33].

En este caso, tomamos como aproximación de  $k^*$  el valor reportado en [33]. Resolviendo la ecuación (3.3), obtenemos tres valores para la frecuencia  $\omega$ . Esos valores se muestran en la segunda columna de la Tabla 3.3. Puesto que el ángulo entre los vectores  $\gamma(\omega_1) - k$ ,  $\gamma(\omega_2) - k$  y  $\gamma(\omega_3) - k$  es cercano a  $2\pi/3$  radianes, elegimos esos valores de la frecuencia como la aproximación inicial del método de Newton para resolver numéricamente las ecuaciones (3.9). Los resultados obtenidos se muestran en la tercera columna de la Tabla 3.3. Vemos que el procedimiento propuesto mejora los resultados anteriores. En la Figura 3.3(a), el círculo negro fue graficado usando los datos en [33], y el círculo rojo fue graficado usando el procedimiento propuesto.

Tabla 3.3: Comparación del procedimiento propuesto con resultados existentes en la literatura para el Ejemplo 3

	Reportado en [33]	Aproximación inicial	Procedimiento propuesto
$k$	(135,60)	(135,60)	(138.255, 60.2977)
$\omega_1$	—	0.593113	0.593686
$\omega_2$	—	1.31924	1.32011
$\omega_3$	—	2.89134	2.88837
$\rho(k)$	51.6999	51.6981	53.6615

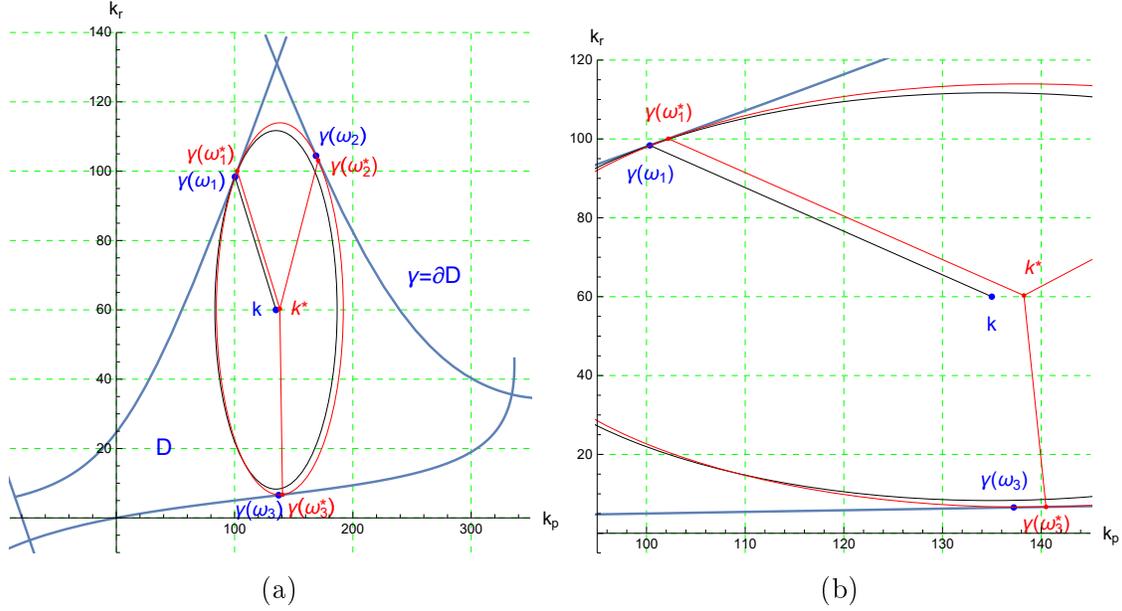


Figura 3.3: (a) Región de estabilidad  $D$  para el cuasi-polinomio (3.12), y el punto menos frágil  $k^*$ . (b) Ampliación de una parte de la gráfica en (a).

### 3.4.4. Cotrolador PR y dos puntos de contacto

Consideremos un sistema de segundo orden de la forma

$$\ddot{y}(t) + 2\delta\nu\dot{y}(t) + \nu^2y(t) = bu(t), \quad (3.13)$$

donde  $\delta$ ,  $\nu$ , y  $b$  son constantes positivas. Si este sistema está sujeto a un control proporcional-retardado (PR) de la forma

$$u(t) = k_p y(t) + k_r y(t - h), \quad (3.14)$$

donde  $k_p$ ,  $k_r$  y  $h$  son números reales con  $h$  positivo, la ecuación característica del sistema a lazo cerrado conduce al cuasi-polinomio

$$p(h, k_r, k_p, s) = s^2 + 2\delta\nu s + \nu^2 + bk_p - bk_r e^{-hs}. \quad (3.15)$$

Dada una constante positiva  $\sigma$ , la región de  $\sigma$ -estabilidad del sistema (3.13)-(3.14) está definida como región de estabilidad  $K_0$  del cuasi-polinomio  $p(h, k_r, k_p, s - \sigma)$ , ver [91]. Para puntos  $(h, k_r, k_p) \in K_0$ , el sistema a lazo cerrado es estable y sus soluciones decaen exponencialmente con constante de decaimiento  $\sigma$ .

Poniendo  $k = (h, k_r)$ , permitimos variar el parámetro de retardo  $h$  y la ganancia del control  $k_r$ , y mantenemos fijos todos los otros parámetros de sintonización. En este caso, el correspondiente cuasi-polinomio es

$$\begin{aligned} q(k, s) &= p(h, k_r, k_p, s - \sigma) \\ &= s^2 + 2(\delta\nu - \sigma)s + (\sigma^2 + \nu^2 - 2\delta\nu\sigma + bk_p) - bk_re^{h\sigma}e^{-hs}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para  $b = 1, \nu = 2.3968, \delta = 0.00055, k_p = 5$ , y  $\sigma = 0.1$ , obtenemos la región de  $\sigma$ -estabilidad  $D$  que se muestra en la Figura 3.4(a), y procedemos a encontrar el punto menos frágil. Suponemos que existen dos puntos de contacto con la frontera, y tomamos  $k = (0.4, 3.0)$  como aproximación de  $k^*$ . Resolviendo la ecuación (3.3), obtenemos tres valores de la frecuencia  $\omega$ , los que se muestran en la primera columna de la Tabla 3.4. Puesto que el ángulo entre los vectores  $\gamma(\omega_1) - k$  y  $\gamma(\omega_3) - k$  es cercano a  $\pi$  radianes, elegimos esos valores de la frecuencia como la aproximación inicial del método de Newton para resolver numéricamente las ecuaciones (3.4). Los resultados obtenidos se muestran en la segunda columna de la Tabla 3.4. Vemos que el procedimiento propuesto mejora la aproximación inicial. En la Figura 3.4(a), el círculo negro muestra la aproximación inicial, y el círculo rojo fue graficado usando el procedimiento propuesto.

Tabla 3.4: Resultados del procedimiento propuesto para el Ejemplo 4

	Aproximación inicial	Procedimiento propuesto
$k$	(0.4,3.0)	(0.414803, 3.50893)
$\omega_1$	2.79156	2.69665
$\omega_2$	3.28091	3.28036
$\omega_3$	3.73077	3.80483
$\rho(k)$	0.334194	0.358611

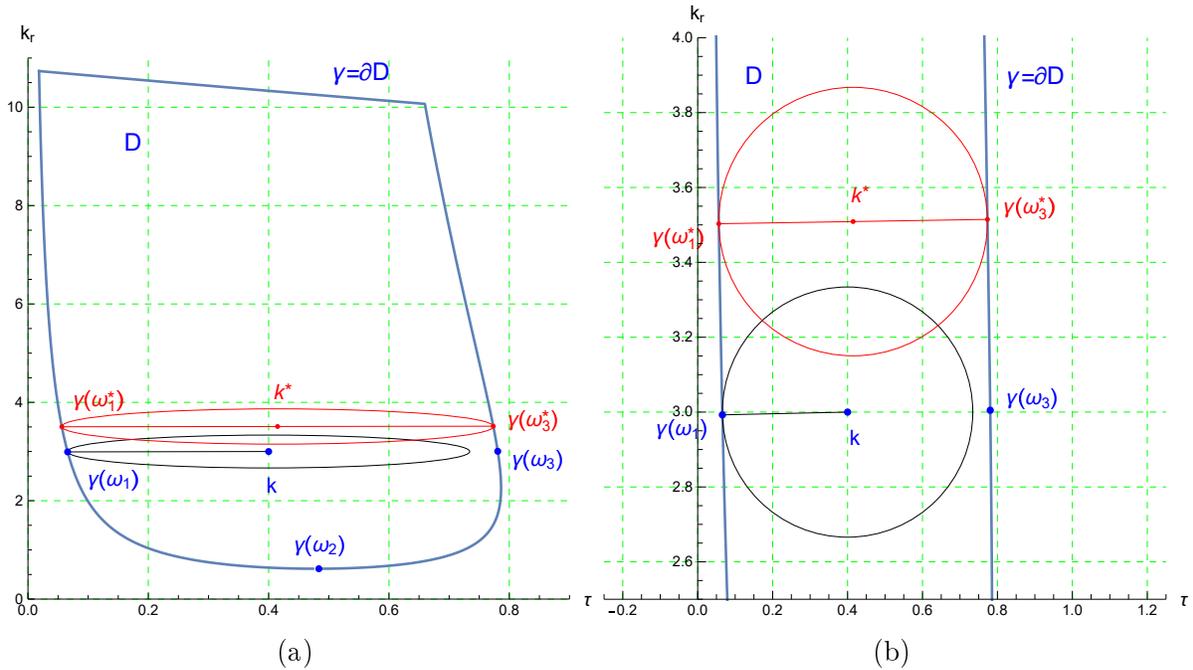


Figura 3.4: (a) Región de  $\sigma$ -estabilidad  $D$  para el cuasi-polinomio (3.16), y el punto menos frágil  $k^*$ . (b) Cambio de escala de la gráfica en (a).

### 3.5. Conclusiones

En este capítulo se ha definido la noción de punto menos frágil de un sistema. Este punto menos frágil se encuentra en la región de estabilidad de un cuasi-polinomio y se ha propuesto un procedimiento numérico para encontrarlo.

El procedimiento numérico ha sido probado y comparado con resultados anteriores. Las tablas de comparación y las figuras muestran que el procedimiento propuesto mejora resultados existentes en la literatura. Además, los resultados que se refieren al círculo más grande pueden aplicarse a cualquier otra región con una frontera suave.

# Capítulo 4

## Desempeño de controladores para sistemas a lazo cerrado con retardo

### 4.1. Introducción

En este capítulo se estudia el desempeño de un controlador considerando la rapidez con la que la solución del sistema a lazo cerrado converge a cero y se obtiene la cota máxima de decaimiento. Para ello, el capítulo está organizado de la siguiente manera.

En la sección 4.2 se formula el problema, que consiste en definir los puntos de mejor desempeño de una región de estabilidad y la abscisa de estabilidad. En la sección 4.3 se establece la clase de sistemas o cuasi-polinomios que vamos a considerar, porque una propiedad importante para los resultados que se obtienen es la continuidad de la función de la abscisa espectral. En la sección 4.4 se definen las regiones de  $\sigma$ -estabilidad y se establecen algunas de sus propiedades. En la sección 4.5 se establecen algunas condiciones necesarias que satisfacen los puntos de mejor desempeño. En la sección 4.6 se calculan numéricamente los puntos de mejor desempeño y la abscisa espectral para algunos ejemplos.

### 4.2. Formulación del problema

En esta sección precisamos lo que se llama puntos de mejor desempeño de una región de estabilidad y abscisa de estabilidad de un cuasi-polinomio.

Sea  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  una región y supongamos que  $q(k, s)$  es un cuasi-polinomio, donde  $s = \sigma + i\omega$  es una variable real cuando  $\omega = 0$  y una variable compleja cuando  $\omega \neq 0$ , y  $k \in K$  denota

los parámetros del cuasi-polinomio  $q(k, s)$ . Definimos  $\Gamma$  como el conjunto de todos los parámetros  $k$  tales que  $q(k, s)$  tiene al menos una raíz puramente imaginaria, esto es,

$$\Gamma = \{k \in K : q(k, s) = 0 \text{ para algún } s \in \mathbb{C} \text{ y } \operatorname{Re}(s) = 0\}.$$

Puesto que las raíces del cuasi-polinomio  $q(k, s)$  son funciones continuas de los parámetros [60], el conjunto  $\Gamma$  divide a  $K$  en subregiones con un número constante de raíces complejas con parte real positiva, esto es,

$$K = K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup \dots,$$

donde

$$K_m = \{k \in K : q(k, s) \text{ tiene exactamente } m \text{ raíces con parte real positiva}\}.$$

Entonces, el conjunto  $K_0$  se denomina *región de estabilidad* del cuasi-polinomio  $q(k, s)$ .

Definimos la *función de la abscisa de estabilidad*  $\alpha : K \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\alpha(k) = \sup\{\operatorname{Re}(s) : q(k, s) = 0\}.$$

Notamos que

$$\alpha(k) \leq 0 \text{ para todo } k \in K_0.$$

Para una subregión  $D \subset K_0$  tal que su frontera  $\partial D$  es un subconjunto de  $\Gamma$ , la *abscisa de estabilidad* del cuasi-polinomio  $q(k, s)$  correspondiente a la región  $D$  está definida por

$$\alpha^* = \inf\{\alpha(k) : k \in D\}.$$

Si existe un punto  $k^* \in D$  tal que

$$\alpha^* = \alpha(k^*),$$

decimos que  $k^*$  es un punto de *mejor desempeño* de la región  $D$ , y si existe una raíz  $s^* = \sigma^* + i\omega^*$  tal que  $\alpha(k^*) = \operatorname{Re}(s^*)$ , entonces  $\alpha^* = \sigma^*$ .

El objetivo es determinar los puntos  $k^*$  de mejor desempeño de una región  $D$  y las raíces  $s^*$  en donde se alcanza la abscisa de estabilidad  $\alpha^*$ .

### 4.3. Sistemas lineales con retardo

En esta sección se explica a qué clase de cuasi-polinomios se aplicarán los conceptos de punto de mejor desempeño y de abscisa de estabilidad.

Consideremos un sistema SISO-LTI a lazo cerrado con un controlador cuya ecuación característica conduce a un cuasi-polinomio de la forma

$$q(k, s) = p_0(\eta, s) + p_1(\eta, s)e^{-\tau s}, \quad (4.1)$$

donde  $p_0$  y  $p_1$  son polinomios con coeficientes reales tales que el grado de  $p_0$  es mayor que el grado de  $p_1$ ,  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1})$  son parámetros del sistema o el controlador y el retardo  $\tau > 0$  puede ser un parámetro del controlador o un parámetro inherente al sistema. Entonces, el vector  $k = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}, \tau)$  denota todos los parámetros del cuasi-polinomio (4.1). La estabilidad del sistema a lazo cerrado está determinada por la ubicación de las raíces de (4.1) en el plano complejo y estas raíces son funciones continuas del vector  $k \in K$ , ver [60].

Puesto que un cuasi-polinomio de la forma (4.1) es la ecuación característica de un sistema lineal invariante con retardo, en este caso, la función de la abscisa de estabilidad recibe el nombre de *función de la abscisa espectral* y la abscisa de estabilidad se llama *abscisa espectral*.

**Lema 1.** [57] *Para el cuasi-polinomio (4.1), la función de la abscisa espectral  $\alpha$  es una función continua.*

**Observación 1.** Cuando  $D$  es un conjunto compacto, existe un punto  $k^* \in D$  tal que

$$\alpha^* = \alpha(k^*),$$

y entonces  $k^*$  es un punto de mejor desempeño de la región  $D$ .

**Lema 2.** [57] *Sea  $y(t)$  la solución de un sistema cuyo cuasi-polinomio es (4.1). Si  $\sigma \geq \alpha^*$ , existe una constante  $L$  tal que*

$$|y(t)| \leq L \|\phi\|_\tau e^{\sigma t} \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

donde  $\phi$  es la condición inicial en el intervalo  $[-\tau, 0]$ ,  $\|\phi\|_\tau = \max\{|\phi(s)| : s \in [-\tau, 0]\}$  y  $|\cdot|$  denota la norma euclídeana.

**Observación 2.** Si la abscisa espectral  $\alpha^* < 0$  y ponemos  $\sigma = \alpha^*$  en el Lema 6, entonces  $y(t) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow +\infty$ , y podemos decir que  $-\alpha^*$  es la *cota máxima de decaimiento* de la solución  $y(t)$ . En este capítulo estamos interesados en encontrar los parámetros  $k^*$  de una región  $D$  en donde el cuasi-polinomio (4.1) tiene raíces que alcanzan la cota máxima de decaimiento.

## 4.4. Regiones de $\sigma$ -estabilidad

En esta sección se definen las regiones de  $\sigma$ -estabilidad y se establecen algunas de las propiedades que permitirán calcular los puntos de mejor desempeño de una región y la abscisa espectral.

Supongamos que  $D$  es una subregión compacta de  $K_0$  tal que  $E = \partial D \subset \Gamma$ . Para  $\sigma \leq 0$ , definimos la *región de  $\sigma$ -estabilidad* del cuasi-polinomio  $q(k, s)$  por

$$D_\sigma = \{k \in D : q(k, s) = 0 \text{ y } \operatorname{Re}(s) \leq \sigma\}. \quad (4.2)$$

En términos de la función de la abscisa espectral, tenemos que

$$D_\sigma = \{k \in D : \alpha(k) \leq \sigma\}. \quad (4.3)$$

Claramente,

$$D_0 = D \quad \text{y} \quad D_{\sigma_1} \subset D_{\sigma_2} \quad \text{para} \quad \sigma_1 < \sigma_2.$$

**Proposición 5.**  $D_\sigma$  es un conjunto compacto para cada  $\sigma \leq 0$ .

*Demostración.*  $D_0 = D$  es un conjunto compacto porque por hipótesis  $D$  es un conjunto compacto.

Supongamos que  $\sigma < 0$ . Sólo tenemos que probar que  $D_\sigma$  es un conjunto cerrado. Sea  $\{k_j\}$  una sucesión de puntos en  $D_\sigma$ . Debemos probar que  $\{k_j\}$  tiene una subsucesión que converge a un punto de  $D_\sigma$ . Como  $\{k_j\} \subset D$  y  $D$  es un conjunto compacto, existe una subsucesión de  $\{k_j\}$  que converge a un punto  $k \in D$ . Para no introducir más notación, podemos asumir que toda la sucesión  $\{k_j\}$  converge a  $k$ . Tenemos que  $\alpha(k_j) \leq \sigma$  para  $j = 1, 2, \dots$ . Haciendo que  $j \rightarrow +\infty$ , obtenemos que  $\alpha(k) \leq \sigma$ . Por lo tanto,  $k \in D_\sigma$  y  $D_\sigma$  es un conjunto compacto.  $\square$

La Proposición 16 implica que para cada  $\sigma \leq 0$ , existe un punto  $k_\sigma^* \in D_\sigma$  tal que

$$\alpha(k_\sigma^*) = \min\{\alpha(k) : k \in D_\sigma\}.$$

Esto significa que cada región de  $\sigma$ -estabilidad tiene al menos un punto de mejor desempeño  $k_\sigma^*$  y una cota máxima de decaimiento  $-\alpha(k_\sigma^*)$ .

**Proposición 6.** Sea  $D \subset K_0$  una subregión compacta con  $\partial D \subset \Gamma$ . Entonces,

(i) los valores de  $\sigma$  de sus regiones de  $\sigma$ -estabilidad satisfacen la desigualdad  $\alpha^* \leq \sigma \leq 0$ ,

(ii)  $k_0^* \in D_\sigma$  para cada  $\sigma \in [\alpha^*, 0]$ , y

(iii)  $\alpha(k_\sigma^*) = \alpha^*$  para cada  $\sigma \in [\alpha^*, 0]$ .

*Demostración.* (i) Para  $\sigma \leq 0$ , sea

$$f(\sigma) = \min\{\alpha(k) : k \in D_\sigma\}$$

la función de las abscisas espectrales. Entonces,

$$f(\sigma) \leq \sigma$$

y como  $D_\sigma \subseteq D_0$  para  $\sigma \leq 0$ , tenemos que

$$f(0) \leq f(\sigma).$$

Por lo tanto,

$$\alpha^* = \alpha(k_0^*) = f(0) \leq \sigma. \quad (4.4)$$

(ii) Esta propiedad se sigue de la desigualdad (4.4).

(iii) Tomemos  $\sigma \in [\alpha^*, 0]$ . Por la parte (ii),  $k_0^* \in D_\sigma$  y debemos tener que  $\alpha(k_\sigma^*) \leq \alpha(k_0^*)$ . Pero como  $k_\sigma^* \in D_0$ , tenemos que  $\alpha(k_\sigma^*) \leq \alpha(k_0^*)$ . Por lo tanto,  $\alpha(k_\sigma^*) = \alpha(k_0^*)$ .  $\square$

De ahora en adelante podemos decir que en cada región de  $\sigma$ -estabilidad estamos buscando el punto de mejor desempeño  $k^* = k_0^*$  y la cota máxima de decaimiento  $\alpha^* = \alpha_0^*$ .

**Proposición 7.** Para cada  $\sigma \leq 0$ ,  $E_\sigma = \{k \in D : \alpha(k) = \sigma\}$  es un conjunto compacto,  $E_\sigma = \partial D_\sigma$  y  $D = \bigcup_{\alpha^* \leq \sigma \leq 0} E_\sigma$ .

*Demostración.* Puede probarse que  $E_\sigma$  es un conjunto compacto de la misma manera que lo hicimos para  $D_\sigma$  en la Proposición 16.

Que la frontera de  $D_\sigma$  se obtiene cuando ocurre la igualdad en la desigualdad de la ecuación (4.3) se debe a que  $\alpha$  es una función continua.

La igualdad  $D = \bigcup_{\alpha^* \leq \sigma \leq 0} E_\sigma$  se sigue de la definición de  $D_\sigma$  y la Proposición 17.  $\square$

## 4.5. Raíces en los puntos de mejor desempeño

En esta sección se establecen algunas condiciones necesarias que satisfacen las raíces del cuasi-polinomio  $q(k, s)$  en los puntos de mejor desempeño.

Por la parte (ii) de la Proposición 17, tenemos que  $k^* \in D_{\alpha^*}$  y estamos interesados en los casos en que  $D_{\alpha^*} = \{k^*\} = E_{\alpha^*}$ .

**Observación 3.** Sea  $A$  la función racional definida por

$$A(\eta, s) = -\frac{p_1(\eta, s)}{p_0(\eta, s)},$$

donde  $p_0$  and  $p_1$  son los coeficientes polinomiales del cuasi-polinomio  $q(k, s)$  en (4.1). Puesto que el grado de  $p_0$  es más grande que el grado de  $p_1$ , entonces para cualquier  $\hat{\eta}$  fijo, tenemos que  $A(\hat{\eta}, s) \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow \infty$ . Puede probarse que para un  $\varepsilon_1 > 0$  dado, existen constantes  $\delta_1 > 0$  y  $M_1 > 0$  tales que

$$|A(\eta, s)| < \varepsilon_1$$

para  $\|\eta - \hat{\eta}\| < \delta_1$  y  $|s| > M_1$ .

Ahora, cualquier raíz  $s$  del cuasi-polinomio  $q(k, s)$  satisface la ecuación

$$e^{\tau s} = A(\eta, s),$$

y recordamos que  $k = (\eta, \tau)$  con  $\tau > 0$ .

Supongamos que  $\hat{k} = (\hat{\eta}, \hat{\tau})$  es fijo y sean  $\sigma_1 < \sigma_2 < 0$  dados. Usando la Observación 3, podemos obtener constantes  $\delta_2 > 0$  y  $M_2 > 0$  tales que si  $\|k - \hat{k}\| < \delta_2$  y  $s$  es una raíz del cuasi-polinomio  $q(k, s)$  que satisface la desigualdad  $\sigma_1 \leq \operatorname{Re}(s) \leq \sigma_2$ , entonces también satisface

$$|\operatorname{Im}(s)| \leq M_2.$$

Puesto que  $q(k, s)$  es una función analítica, tenemos que si  $\|k - \hat{k}\| < \delta_2$ , entonces el cuasi-polinomio  $q(k, s)$  sólo puede tener un número finito de raíces en la franja vertical  $\{s \in \mathbb{C} : \sigma_1 \leq \operatorname{Re}(s) \leq \sigma_2\}$  y están contenidas en el rectángulo con vértices  $\sigma_1 \pm iM_2$  and  $\sigma_2 \pm iM_2$ .

**Proposición 8.** Sea  $\hat{k} \in D$  fijo y denotemos por  $\hat{s}_j$  para  $j = 0, 1, \dots$  las raíces del cuasi-polinomio  $q(\hat{k}, s)$ . Supongamos que  $\hat{s}_0$  es la única raíz simple (real o compleja) que satisface

$$\alpha(\hat{k}) = \sup\{\operatorname{Re}(\hat{s}_j) : j = 0, 1, \dots\} = \operatorname{Re}(\hat{s}_0) < 0.$$

Si  $s_j$ ,  $j = 0, 1, \dots$ , denotan las raíces del cuasi-polinomio  $q(k, s)$ , entonces existe un  $\delta > 0$  tal que  $s_0$  es la única raíz simple (real o compleja) que satisface

$$\alpha(k) = \sup\{\operatorname{Re}(s_j) : j = 0, 1, \dots\} = \operatorname{Re}(s_0)$$

para  $\|k - \hat{k}\| < \delta$ .

*Demostración.* Por hipótesis

$$\varepsilon_0 = \alpha(\hat{k}) - \sup\{\operatorname{Re}(\hat{s}_j) : j = 1, 2, \dots\} > 0,$$

y sea

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min(-\alpha(\hat{k}), \varepsilon_0),$$

que también es positivo. Entonces, el cuasi-polinomio  $q(\hat{k}, s)$  tiene sólo la raíz  $\hat{s}_0$  (y posiblemente su conjugada) en la franja vertical

$$\{s \in \mathbb{C} : \sigma_1 \leq \operatorname{Re}(s) \leq \sigma_2\},$$

donde  $\sigma_1 = \alpha(\hat{k}) - \varepsilon$ , y  $\sigma_2 = \alpha(\hat{k}) + \varepsilon$ . Ahora, por el teorema de Rouché [20], existe un  $\delta > 0$  tal que si  $\|k - \hat{k}\| < \delta$ , el cuasi-polinomio  $q(k, s)$  tiene sólo la raíz  $s_0$  (y posiblemente su conjugada) en el rectángulo con vértices  $\sigma_1 \pm iM_2$  y  $\sigma_2 \pm iM_2$ .  $\square$

Observación 4. Esto nos dice que si un valor de la función de la abscisa espectral se alcanza en una sola raíz simple esta condición se mantiene para pequeñas variaciones de los parámetros.

Los siguientes resultados muestran que la abscisa espectral no puede ser alcanzada en una sola raíz simple del cuasi-polinomio  $q(k^*, s)$ .

**Proposición 9.** *Sea  $D \subset K_0$  una subregión compacta y supongamos que existe una sola raíz real  $s^*$  del cuasi-polinomio  $q(k^*, s)$  tal que  $\alpha(k^*) = s^*$ , donde  $\nabla q(k^*, s^*) \neq 0$ . Entonces,  $s^*$  no puede ser una raíz simple.*

*Demostración.* Supongamos que  $\alpha(k^*)$  se alcanza en una sola raíz real simple  $s^*$  de  $q(k^*, s)$ . Entonces,

$$\alpha(k^*) = \min\{\alpha(k) : k \in D\} = s^*,$$

donde

$$\alpha(k) = \sup\{\operatorname{Re}(s) : q(k, s) = 0\}.$$

Puesto que  $s^*$  es una raíz real simple de  $q(k^*, s)$ , tenemos que  $q(k^*, s^*) = 0$  y  $\frac{\partial q}{\partial s}(k^*, s^*) \neq 0$ . Por el teorema de la función implícita, existe una vecindad  $U$  de  $k^*$  y una función continuamente derivable  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $s^* = \varphi(k^*)$  y  $q(k, s) = 0$ , donde  $s = \varphi(k)$  para todo  $k \in U$ . Eligiendo  $U$  suficientemente pequeño, de la Proposición 8, tenemos que

$$\alpha(k) = \varphi(k) \quad \text{para todo } k \in U.$$

Ahora por la regla de la cadena

$$\nabla\varphi(k^*) = \frac{-1}{\frac{\partial q}{\partial s}(k^*, s^*)} \nabla q(k^*, s^*) \neq 0$$

y la derivada direccional de  $\varphi$  at  $k^*$  en la dirección de un vector unitario  $u$  está dada por

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(k^*) = \nabla\varphi(k^*) \cdot u.$$

Tomando  $u = -\frac{\nabla\varphi(k^*)}{\|\nabla\varphi(k^*)\|}$ , vemos que la función  $\varphi(k)$  puede decrecer un poco más en esta dirección. Esta contradicción prueba que  $s^*$  no puede ser una raíz simple.  $\square$

**Observación 5.** Esto significa que la abscisa espectral no puede ocurrir en una sola raíz real simple.

En lo que sigue, elegimos dos componentes  $k_1$  y  $k_2$  del vector  $k$  y mantenemos fijas las otras componentes. Al hacer esto, estamos asumiendo que  $K$  es un subconjunto del plano  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposición 10.** Sea  $D \subset K_0 \subseteq \mathbb{R}^2$  una subregión compacta y supongamos que existe una sola raíz compleja  $s^*$  del cuasi-polinomio  $q(k^*, s)$  tal que  $\alpha(k^*) = \text{Re}(s^*)$ , donde

$$\text{Im} \left[ \overline{\frac{\partial q}{\partial k_1}}(k^*, s^*) \frac{\partial q}{\partial k_2}(k^*, s^*) \right] \neq 0. \quad (4.5)$$

Entonces,  $s^*$  no puede ser una raíz simple.

*Demostración.* Supongamos que  $\alpha(k^*)$  se alcanza en una sola raíz compleja simple  $s^* = \sigma^* + i\omega^*$  de  $q(k^*, s)$ . Entonces,

$$\alpha(k^*) = \text{mín}\{\alpha(k) : k \in D\} = \sigma^*,$$

donde  $\alpha(k) = \sup\{\text{Re}(s) : q(k, s) = 0\}$ . Puesto que  $s^*$  es una raíz simple de  $q(k^*, s)$ , tenemos que  $q(k^*, s^*) = 0$  y  $\frac{\partial q}{\partial s}(k^*, s^*) \neq 0$ , donde ahora " $\frac{\partial}{\partial s}$ " significa derivada compleja. Si escribimos

$$q(k, s) = u(k_1, k_2, \sigma, \omega) + iv(k_1, k_2, \sigma, \omega),$$

donde  $k = (k_1, k_2)$  y  $s = \sigma + i\omega$ , entonces  $(k_1^*, k_2^*, \sigma^*, \omega^*)$  satisface el sistema

$$u(k_1, k_2, \sigma, \omega) = 0 \quad \text{y} \quad v(k_1, k_2, \sigma, \omega) = 0.$$

El Jacobiano de las funciones  $u$  y  $v$  respecto a las variables  $\sigma$  y  $\omega$  está dado por

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\sigma, \omega)}(k_1, k_2, \sigma, \omega) = \left| \frac{\partial q}{\partial s}(k, s) \right|^2,$$

donde  $|\cdot|$  denota el módulo de un número complejo. Puesto que  $\frac{\partial q}{\partial s}(k^*, s^*) \neq 0$ , por el teorema de la función implícita, existe una vecindad  $U$  de  $k^*$  y dos funciones continuamente derivables  $\varphi, \psi : U \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $(\sigma^*, \omega^*) = (\varphi(k^*), \psi(k^*))$  y

$$u(k, \sigma, \omega) = 0 \quad \text{y} \quad v(k, \sigma, \omega) = 0,$$

donde  $\sigma = \varphi(k)$  y  $\omega = \psi(k)$  para todo  $k \in U$ . Eligiendo  $U$  suficientemente pequeña, de la Proposición 8, tenemos que

$$\alpha(k) = \varphi(k) \quad \text{para todo} \quad k \in U.$$

Ahora, por la condición (4.5) y la regla de la cadena, tenemos que

$$\nabla\varphi(k^*) = \frac{1}{\left| \frac{\partial q}{\partial s}(k^*, s^*) \right|^2} \left( \left( -\frac{\partial v}{\partial k_1} \quad \frac{\partial u}{\partial k_1} \right), \left( -\frac{\partial v}{\partial k_2} \quad \frac{\partial u}{\partial k_2} \right) \right) \Big|_{(k^*, \sigma^*, \omega^*)} \neq 0.$$

La derivada direccional de  $\varphi$  en  $k^*$  en la dirección de un vector unitario  $u$  está dada por

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(k^*) = \nabla\varphi(k^*) \cdot u.$$

Tomando  $u = -\frac{\nabla\varphi(k^*)}{\|\nabla\varphi(k^*)\|}$ , vemos que la función  $\varphi(k)$  puede decrecer un poco más en esta dirección. Esta contradicción prueba que  $s^*$  no puede ser una raíz simple.  $\square$

**Observación 6.** Esto significa que la abscisa espectral no puede ocurrir en una sola raíz compleja simple. Es así que las Proposiciones 9 y 10 complementan el resultado más preciso pero menos general del Teorema 7.6 en [57].

**Observación 7.** De las Proposiciones 9 y 10, tenemos que la abscisa espectral puede ser alcanzada en las siguientes configuraciones de raíces:

- i. una sola raíz múltiple que puede ser real o compleja,
- ii. una combinación de una raíz real y una o más raíces complejas, y
- iii. dos o más raíces complejas.

Este conocimiento nos ayudará a escribir un sistema de ecuaciones para calcular  $k^*$  y  $\alpha^*$ .

## 4.6. Metodología para determinar los puntos de mejor desempeño

En esta sección se analiza la contracción de las regiones de  $\sigma$ -estabilidad para obtener una metodología que ayuda a determinar los puntos de mejor desempeño. Esto es, se estudia el comportamiento de las curvas planas  $E_\sigma$  conforme  $\sigma$  tiende a  $\alpha^*$  y  $D_{\alpha^*}$  consiste de un solo punto:  $D_{\alpha^*} = E_{\alpha^*} = \{k^*\}$ .

Supongamos que  $D$  es una subregión compacta de  $K_0 \subseteq \mathbb{R}^2$  tal que  $E = \partial D \subset \Gamma$ . Una parametrización de los conjuntos  $E_\sigma = \partial D_\sigma$  puede estar formada por varias secciones de los siguientes dos tipos de curvas, ver Figura 4.1.

Sea  $k = (k_1, k_2) \in D$  y  $s = \sigma + i\omega$ , donde  $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ .

(i) Si  $\omega \neq 0$ , podemos escribir

$$q(k, \sigma + i\omega) = u(k_1, k_2, \sigma, \omega) + iv(k_1, k_2, \sigma, \omega),$$

y tenemos que

$$q(k, \sigma + i\omega) = 0$$

si y sólo si

$$u(k_1, k_2, \sigma, \omega) = 0 \text{ y } v(k_1, k_2, \sigma, \omega) = 0.$$

Asumiendo que las condiciones del teorema de la función implícita se satisfacen, podemos resolver  $k_1$  y  $k_2$  en términos de  $\omega$ , y obtener una parametrización de la forma

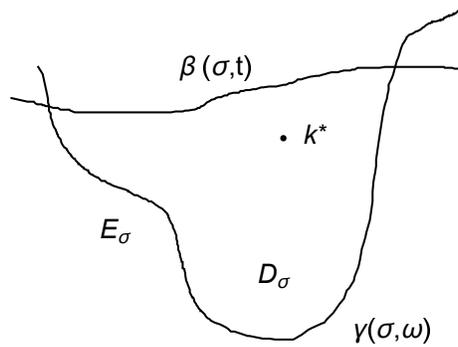
$$k = \gamma(\sigma, \omega), \text{ donde } \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \quad (4.6)$$

(ii) Si  $\omega = 0$ , entonces

$$q(k, \sigma) = u(k_1, k_2, \sigma, 0) = 0.$$

Otra vez, asumiendo que las condiciones del teorema de la función implícita se satisfacen, podemos resolver, digamos,  $k_2$  en términos de  $k_1 = t$  y obtener una parametrización de la forma

$$k = \beta(\sigma, t), \text{ donde } t \in [t_1, t_2]. \quad (4.7)$$

Figura 4.1:  $E_\sigma$  es la frontera de  $D_\sigma$ .

Sean  $a = (a_1, a_2)$  y  $b = (b_1, b_2)$  dos vectores en el plano  $\mathbb{R}^2$ . Se dice que el vector  $b$  está a la *izquierda* del vector  $a$  si el determinante cuyos renglones son los vectores  $a$  y  $b$  en este orden es positivo, esto es,

$$\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} > 0. \quad (4.8)$$

Supongamos que para alguna región  $D$  las fronteras  $E_\sigma$  de las regiones de  $\sigma$ -estabilidad están parametrizadas por las curvas  $\gamma(\sigma, \omega)$  con  $\omega \in [\omega_1(\sigma), \omega_2(\sigma)]$  y  $\sigma \in [\alpha^*, 0]$ . Por la regla de la cadena, tenemos que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial k_1}(k, \sigma, \omega) & \frac{\partial u}{\partial k_2}(k, \sigma, \omega) \\ \frac{\partial v}{\partial k_1}(k, \sigma, \omega) & \frac{\partial v}{\partial k_2}(k, \sigma, \omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \omega}(\sigma, \omega) & \frac{\partial \gamma_1}{\partial \sigma}(\sigma, \omega) \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial \omega}(\sigma, \omega) & \frac{\partial \gamma_2}{\partial \sigma}(\sigma, \omega) \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \omega}(k, \sigma, \omega) & \frac{\partial u}{\partial \sigma}(k, \sigma, \omega) \\ \frac{\partial v}{\partial \omega}(k, \sigma, \omega) & \frac{\partial v}{\partial \sigma}(k, \sigma, \omega) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Tomando traspuesta en ambos lados de (4.9) y usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann [20], obtenemos que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \omega}(\sigma, \omega) & \frac{\partial \gamma_2}{\partial \omega}(\sigma, \omega) \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial \sigma}(\sigma, \omega) & \frac{\partial \gamma_2}{\partial \sigma}(\sigma, \omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial k_1}(k, \sigma, \omega) & \frac{\partial v}{\partial k_1}(k, \sigma, \omega) \\ \frac{\partial u}{\partial k_2}(k, \sigma, \omega) & \frac{\partial v}{\partial k_2}(k, \sigma, \omega) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \sigma}(k, \sigma, \omega) & -\frac{\partial u}{\partial \sigma}(k, \sigma, \omega) \\ -\frac{\partial u}{\partial \sigma}(k, \sigma, \omega) & -\frac{\partial v}{\partial \sigma}(k, \sigma, \omega) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ahora, tomando determinantes en ambos lados de (4.10) y usando la notación introducida en (4.8), podemos escribir

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial \omega}(\sigma, \omega) \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \sigma}(\sigma, \omega) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial(u, v)}{\partial(k_1, k_2)}(k, \sigma, \omega) \end{vmatrix} = - \left| \frac{\partial q}{\partial s}(k, s) \right|^2, \quad (4.11)$$

donde  $\partial(u, v)/\partial(k_1, k_2)$  denota el Jacobiano de las funciones  $u$  y  $v$  respecto a las variables  $k_1$  y  $k_2$ .

El vector  $\frac{\partial \gamma}{\partial \omega}(\sigma, \omega)$  es tangente a la curva  $\gamma(\sigma, \cdot)$  en el punto  $\gamma(\sigma, \omega)$  e indica la dirección en la que el punto  $\gamma(\sigma, \omega)$  se moverá conforme  $\omega$  varía. De manera similar, el vector  $\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma}(\sigma, \omega)$  es tangente a la curva  $\gamma(\cdot, \omega)$  en el punto  $\gamma(\sigma, \omega)$  e indica la dirección en la que el punto  $\gamma(\sigma, \omega)$  se mueve conforme  $\sigma$  varía.

**Proposición 11.** *Supongamos que las curvas  $\gamma(\sigma, \omega)$  orientadas positivamente, donde  $\omega \in [\omega_1(\sigma), \omega_2(\sigma)]$  and  $\sigma \in [\alpha^*, 0]$ , son una parametrización de los conjuntos  $E_\sigma$  y que*

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(k_1, k_2)}(k, \sigma, \omega) < 0 \quad (4.12)$$

para  $k \in D$ ,  $\omega \in [\omega_1(\sigma), \omega_2(\sigma)]$  y  $\sigma \in [\alpha^*, 0]$ . Entonces, los conjuntos  $E_\sigma$  se contraen hasta el conjunto  $E_{\alpha^*}$  conforme  $\sigma \rightarrow \alpha^*$ .

*Demostración.* La ecuación (4.11) y la condición (4.12) implican que el vector  $\frac{\partial \gamma}{\partial \sigma}(\sigma, \omega)$  siempre está a la izquierda del vector  $\frac{\partial \gamma}{\partial \omega}(\sigma, \omega)$ .  $\square$

**Observación 8.** Un cálculo directo muestra que

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(k_1, k_2)}(k, \sigma, \omega) = \text{Im} \left[ \overline{\frac{\partial q}{\partial k_1}}(k, s) \frac{\partial q}{\partial k_2}(k, s) \right],$$

que es el lado izquierdo de (4.5).

Notamos que la curva  $\beta(\sigma, t) = (\beta_1(\sigma, t), \beta_2(\sigma, t))$  satisface la ecuación

$$q[\beta_1(\sigma, t), \beta_2(\sigma, t), \sigma, 0] = 0,$$

y la curva  $\gamma(\sigma, \omega) = (\gamma_1(\sigma, \omega), \gamma_2(\sigma, \omega))$  satisface las ecuaciones

$$q[\gamma_1(\sigma, \omega), \gamma_2(\sigma, \omega), \sigma, \omega] = 0 \quad \text{para } \omega \neq 0.$$

**Proposición 12.** *Si los límites*

$$\gamma_1(\sigma, 0) := \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \gamma_1(\sigma, \omega)$$

y

$$\gamma_2(\sigma, 0) := \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \gamma_2(\sigma, \omega)$$

existen, y el parámetro  $t$  en (4.7) se elige de tal manera que

$$\beta_1(\sigma, t) = \gamma_1(\sigma, 0),$$

entonces

$$\beta_2(\sigma, t) = \gamma_2(\sigma, 0).$$

*Demostración.* El resultado se sigue de la unicidad de la solución dada por el teorema de la función implícita.  $\square$

**Observación 9.** En seguida se describen cuatro formas en las que la frontera  $E_\sigma$  puede contraerse hasta  $k^*$  conforme  $\sigma \rightarrow \alpha^*$ .

- (a) Si para un cuasi-polinomio  $q(k, s)$  la abscisa espectral  $\alpha^*$  se alcanza en una raíz que corresponde a un punto donde las curvas  $\beta(\sigma, t)$  y  $\gamma(\sigma, \omega)$  convergen conforme  $\omega \rightarrow 0+$ , entonces  $\alpha^*$  satisface la ecuación

$$q(k, \sigma) = 0. \quad (4.13)$$

Aquí,  $\alpha^*$  se alcanza en una raíz real.

- (b) Si  $t = \gamma_1(\sigma, \omega)$  y para un cuasi-polinomio  $q(k, s)$  la abscisa espectral  $\alpha^*$  se alcanza en una raíz que corresponde a punto donde las curvas  $\beta(\sigma, t)$  and  $\gamma(\sigma, \omega)$  se intersectan, entonces existe un valor de  $\omega$  tal que  $\alpha^*$  satisface la ecuación

$$f(\sigma, \omega) = 0, \quad (4.14)$$

donde  $f(\sigma, \omega) = \beta_2(\sigma, \gamma_1(\sigma, \omega)) - \gamma_2(\sigma, \omega)$ . Asumiendo que  $\sigma = g(\omega)$  y puesto que  $\alpha^*$  es un valor extremo de esta función, entonces el punto  $(\sigma^*, \omega^*)$ , donde  $\sigma^* = g(\omega^*) = \alpha^*$ , satisface la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(\sigma, \omega) = 0. \quad (4.15)$$

Resolviendo (4.14)-(4.15), podemos obtener  $\alpha^*$ . Aquí  $\alpha^*$  se alcanza en ambas: una raíz real y una raíz compleja.

- (c) Si sólo una sección de la curva  $\gamma(\sigma, \omega)$  converge a  $k^*$ , entonces  $\alpha^*$  se alcanza en una raíz compleja múltiple de  $q(k^*, s)$ .
- (d) Si varias secciones de la curva  $\gamma(\sigma, \omega)$  convergen a  $k^*$ , entonces  $\alpha^*$  se alcanza en varias raíces complejas de  $q(k^*, s)$ .

## 4.7. Ejemplos ilustrativos: puntos de mejor desempeño y cota máxima de decaimiento

En esta sección del capítulo, se aplican los resultados previos para obtener aproximaciones numéricas de los puntos de mejor desempeño y la abscisa espectral de algunos cuasi-polinomios y sus regiones de estabilidad.

### 4.7.1. Controlador PI: 1 raíz real simple y 1 raíz compleja simple con su conjugada

Un sistema de segundo orden descrito por la función de transferencia

$$H(s) = \frac{(s-2)e^{-2s}}{s^2 - \frac{1}{2}s + \frac{13}{4}}$$

conduce al cuasi-polinomio

$$q(k, s) = s^3 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{13}{4}s + (s-2)(k_p s + k_i)e^{-2s}, \quad (4.16)$$

donde el parámetro  $k = (k_p, k_i)$  está formado por las ganancias de un controlador proporcional-integral (PI), ver [56]. En el plano de los parámetros  $k_p k_i$ , la Figura 4.2(a) muestra las regiones de  $\sigma$ -estabilidad  $D_\sigma$  para  $\sigma = 0, -0.04, -0.15$  correspondientes al cuasi-polinomio (4.16).

Para obtener una aproximación de  $k^*$  y  $\alpha^*$  se efectúan los siguientes pasos:

- (i) Determinar y dibujar la región de  $\sigma$ -estabilidad  $D_0$ .
- (ii) Obtener una aproximación inicial  $k^0$  de  $k^*$ , digamos con la herramienta `GetCoordinates` de `Mathematica`.
- (iii) Escribir una subrutina para la función de la abscisa espectral y evaluar en  $k^0$  para obtener una aproximación inicial  $(\sigma^0, \omega^0)$  de  $(\sigma^*, \omega^*)$ .
- (iv) Usar el método de Newton con la aproximación inicial  $(\sigma^0, \omega^0)$  para resolver el sistema de orden  $2 \times 2$ , (4.14)-(4.15). Esto produce una mejor aproximación  $(\sigma^1, \omega^1)$  de  $(\sigma^*, \omega^*)$ . La aproximación requerida para  $\alpha^*$  es  $\sigma^1$ .
- (v)  $k^1 = \gamma(\sigma^1, \omega^1)$  es una mejor aproximación de  $k^*$  que  $k^0$ .

Los resultados numéricos de este procedimiento se muestran en la Tabla 4.1. El punto de mejor desempeño  $k^*$  está graficado en color rojo en las Figuras 4.2(a) y 4.2(b). Aquí,  $\sigma^*$  y  $\sigma^* \pm i\omega^*$  son raíces simples del cuasi-polinomio  $q(k^*, s)$ , con  $\sigma^* = \alpha^* = -0.18183633$  y  $k^* = (-0.42453403, -0.2726568)$ .

Tabla 4.1: Iteraciones para determinar  $k^*$  y  $\alpha^*$  del cuasi-polinomio (4.16).

$n$	$k^n$	$(\sigma^n, \omega^n)$
0	$(-0.4241, -0.2729)$	$(-0.18147035, -2.0045556)$
1	$(-0.42453403, -0.2726568)$	$(-0.18183633, -2.005537)$

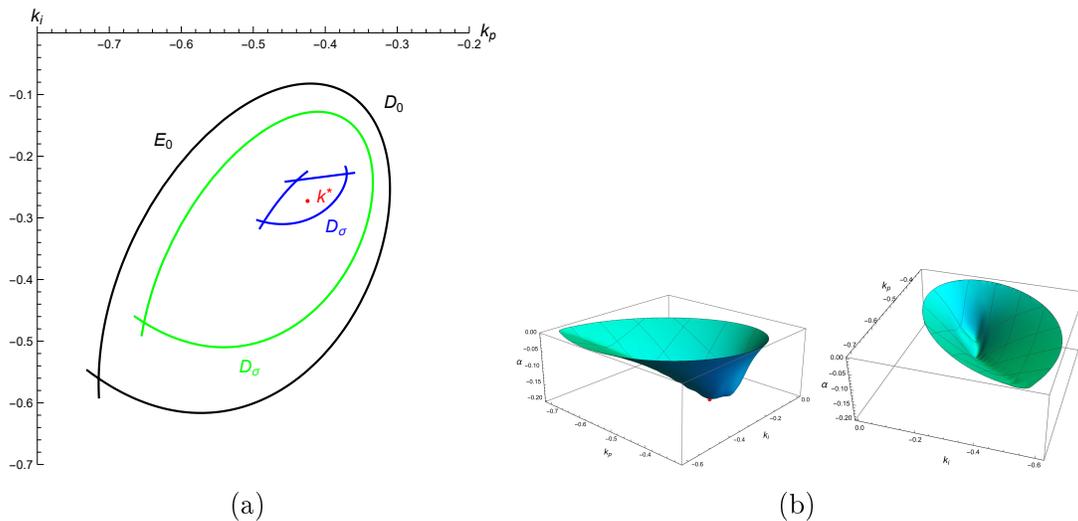


Figura 4.2: (a) Regiones de  $\sigma$ -estabilidad  $D_\sigma$  para  $\sigma = 0, -0.04, -0.15$  y el punto de mejor desempeño  $k^*$  correspondientes al cuasi-polinomio (4.16). (b) Gráfica 3D de la función de la abscisa espectral  $\alpha = \alpha(k_p, k_i)$  en la región  $D_0$ .

### 4.7.2. Ecuación de tipo retardado: 1 raíz compleja doble

La ecuación característica de la ecuación diferencial de tipo retardado

$$\ddot{y}(t) + k_1 \dot{y}(t - 1) + k_2 y(t) = 0$$

es el cuasi-polinomio

$$q(k, s) = s^2 + k_2 + k_1 s e^{-s}, \quad (4.17)$$

donde  $k = (k_1, k_2)$ , ver [46]. En el plano de los parámetros  $k_1 k_2$ , la Figura 4.3(a) muestra las regiones de  $\sigma$ -estabilidad  $D_\sigma$  para  $\sigma = 0, -0.1, -0.4$  correspondientes al cuasi-polinomio (4.17).

En este caso, para obtener una aproximación de  $k^*$  y  $\alpha^*$ , se efectúan los siguientes pasos:

- (i) Determinar y dibujar la región de  $\sigma$ -estabilidad  $D_0$ .
- (ii) Obtener una aproximación inicial  $k^0$  of  $k^*$ , digamos con la herramienta `GetCoordinates` de `Mathematica`.
- (iii) Escribir una subrutina para la función de la abscisa espectral y evaluar en  $k^0$  para obtener una aproximación inicial  $(\sigma^0, \omega^0)$  de  $(\sigma^*, \omega^*)$ .

- (iv) Usar el método de Newton con la aproximación inicial  $(k^0, \sigma^0, \omega^0)$  para el sistema  $4 \times 4$ ,  $q(k, s) = 0$  y  $q'(k, s) = 0$ . Esto produce una mejor aproximación  $(k^1, \sigma^1, \omega^1)$  de  $(k^*, \sigma^*, \omega^*)$ . La aproximación requerida para  $\alpha^*$  es  $\sigma^1$ .

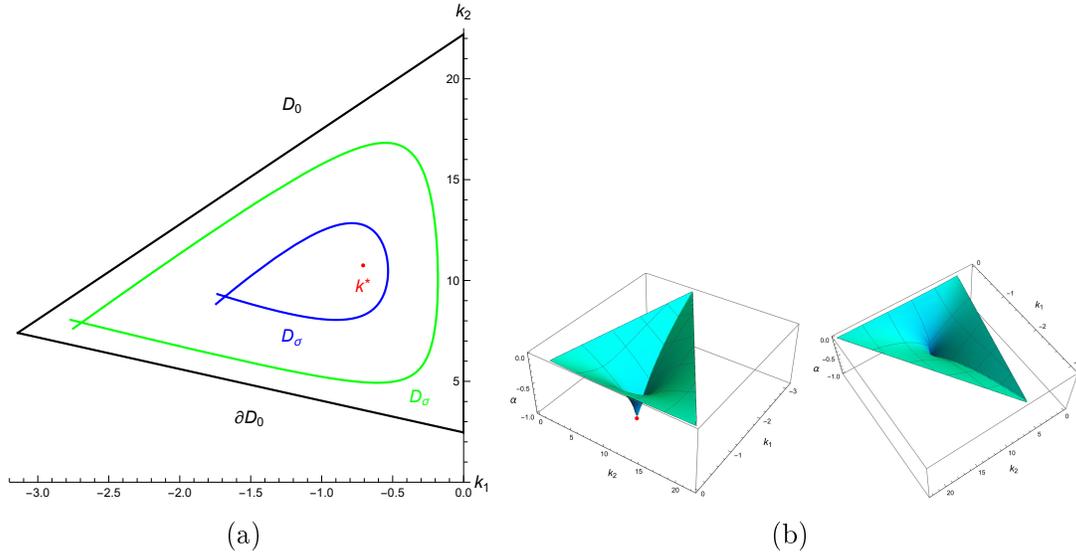


Figura 4.3: (a) Regiones de  $\sigma$ -estabilidad  $D_\sigma$  para  $\sigma = 0, -0.1, -0.4$  y el punto de mejor desempeño  $k^*$  correspondientes al cuasi-polinomio (4.17). (b) Gráfica 3D de la función de la abscisa espectral  $\alpha = \alpha(k_1, k_2)$  en la región  $D_0$ .

Los resultados numéricos de este procedimiento se muestran en la Tabla 4.2. El punto de mejor desempeño  $k^*$  está graficado en color rojo en las Figuras. 4.3(a) y 4.3(b). Aquí,  $\sigma^* \pm i\omega^*$  son raíces dobles del cuasi-polinomio  $q(k^*, s)$ , con  $\sigma^* = \alpha^* = -0.93438980$  y  $k^* = (-0.70786186, 10.749195)$ .

Tabla 4.2: Iteraciones para determinar  $k^*$  y  $\alpha^*$  del cuasi-polinomio (4.17).

$n$	$k^n$	$(\sigma^n, \omega^n)$
0	(-0.7037, 10.73)	(-0.83763516, -3.3548124)
1	(-0.70786186, 10.749195)	(-0.93438980, -3.3911160)

### 4.7.3. Controlador PR: 3 raíces complejas simples

El cuasi-polinomio correspondiente al sistema marginalmente estable con función de transferencia

$$G(s) = \frac{0.038}{s^4 + 0.1276s^3 + 9.3364s^2 + 1.1484s + 3.0276},$$

sujeto a un controlador PR de la forma

$$C(s) = k_p + k_r e^{-\tau s}$$

es

$$\begin{aligned} q(k, s) = & s^4 + 0.1276s^3 + 9.3364s^2 + 1.1484s \\ & + 3.0276 + 0.038(k_p + k_r e^{-\tau s}), \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde el parámetro  $k = (k_p, k_r)$  consiste de las ganancias controlador. En el plano de los parámetros  $k_p k_r$ , la Figura 4.4(a) muestra las regiones de  $\sigma$ -estabilidad  $D_\sigma$  para  $\sigma = 0, -0.015, -0.04, -0.065$  con parámetro de retardo  $\tau = 5$ , ver [33].

En este caso, para obtener una aproximación de  $k^*$  y  $\alpha^*$ , se efectúan los siguientes pasos:

- (i) Determinar y dibujar la región de  $\sigma$ -estabilidad  $D_0$ .
- (ii) Obtener una aproximación inicial  $k^0$  of  $k^*$ , digamos con la herramienta `GetCoordinates` de `Mathematica`.
- (iii) Escribir una subrutina para la función de la abscisa espectral y evaluar en  $k^0$  para obtener una aproximación inicial  $(\sigma^0, \omega_1^0, \omega_3^0, \omega_3^0)$  de  $(\sigma^*, \omega_1^*, \omega_3^*, \omega_3^*)$ .
- (iv) Usar el método de Newton con la aproximación inicial  $(k^0, \sigma^0, \omega_1^0, \omega_3^0, \omega_3^0)$  para resolver el sistema  $6 \times 6$ ,  $q(k, \sigma + i\omega_1) = 0$ ,  $q(k, \sigma + i\omega_2) = 0$ ,  $q(k, \sigma + i\omega_3) = 0$ . Esto produce una mejor aproximación  $(k^1, \sigma^1, \omega_1^1, \omega_3^1, \omega_3^1)$  de  $(k^*, \sigma^*, \omega_1^*, \omega_3^*, \omega_3^*)$ . Las aproximaciones requeridas para  $\alpha^*$  y  $k^*$  son  $\sigma^1$  y  $k^1$ , respectivamente.

Los resultados numéricos de este procedimiento se muestran en la Tabla 4.3. El punto de mejor desempeño  $k^*$  está graficado en color rojo en las Figuras 4.4(a) y 4.4(b). Aquí,  $\sigma^* \pm i\omega_1^*$ ,  $\sigma^* \pm i\omega_2^*$  y  $\sigma^* \pm i\omega_3^*$  son raíces complejas simples del cuasi-polinomio  $q(k^*, s)$ , con  $\sigma^* = \alpha^* = -0.0713859$  y  $k^* = (130.231, 80.5469)$ .

Tabla 4.3: Iteraciones para determinar  $k^*$  y  $\alpha^*$  del cuasi-polinomio (4.18).

$n$	$k^n$	$(\sigma^n, \omega_1^n, \omega_2^n, \omega_2^n)$
0	(131, 80.39)	(-0.0707666, 0.632489, 1.26097, 2.95299)
1	(130.231, 80.5469)	(-0.0713859, 0.631815, 1.26049, 2.95395)

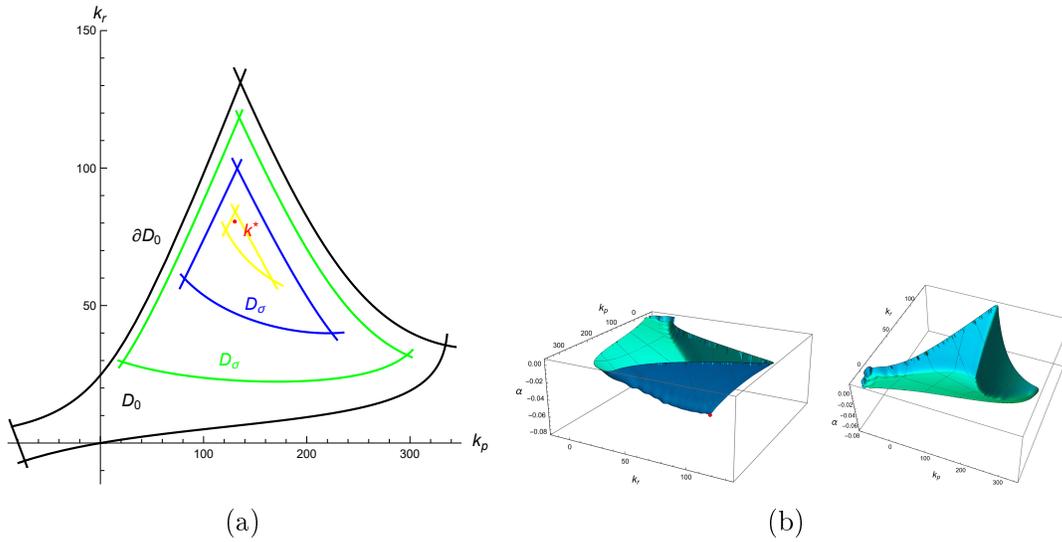


Figura 4.4: (a) Regiones de  $\sigma$ -estabilidad para  $\sigma = 0, -0.015, -0.04, -0.065$  y el punto de mejor desempeño  $k^*$  correspondientes al cuasi-polinomio (4.18). (b) Gráfica 3D de la función de la abscisa espectral  $\alpha = \alpha(k_p, k_r)$  en la región  $D_0$ .

#### 4.7.4. Controlador PR: 1 raíz real triple

Sean  $\delta, \nu$  y  $b$  constantes positivas. El cuasi-polinomio

$$q(k, s) = s^2 + 2\delta\nu s + \nu^2 + bk_p - bk_r e^{-\tau s} \quad (4.19)$$

es la ecuación característica del sistema de segundo orden

$$\ddot{y}(t) + 2\delta\nu\dot{y}(t) + \nu^2 y(t) = bu(t)$$

sujeto a un control proporcional-retardado (PR) de la forma

$$u(t) = k_p y(t) + k_r y(t - \tau),$$

donde  $k_p, k_r$  y  $\tau$  son números reales con  $\tau$  positivo.

Haciendo  $k = (\tau, k_r)$ , se permite que el parámetro del retardo  $\tau$  y la ganancia del control  $k_r$  varíen, mientras que los otros parámetros permanecen fijos, ver [91].

Sean  $b = 1, \nu = 2.3968, \delta = 0.00055$  y  $k_p = 5$ . En el plano de los parámetros  $\tau k_r$ , la Figura 4.5(a) muestra la regiones de  $\sigma$ -estabilidad  $D_\sigma$  para  $\sigma = -0.1, -0.5, -1$  correspondientes al cuasi-polinomio (4.19).

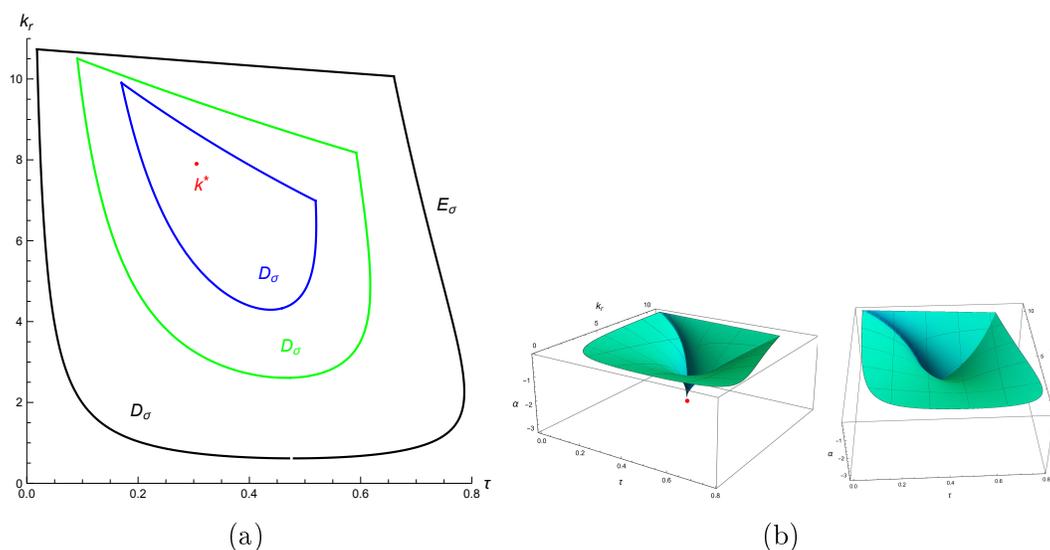


Figura 4.5: (a) Regiones de  $\sigma$ -estabilidad para  $\sigma = -0.1, -0.5, -1$  y el punto de mejor desempeño  $k^*$  correspondientes al cuasi-polinomio (4.19). (b) Gráfica 3D de la función de la abscisa espectral  $\alpha = \alpha(\tau, k_r)$  en la región  $D_0$ .

Bajo ciertas condiciones [12], el cuasi-polinomio (4.19) tiene una raíz real triple dominante que reúne las condiciones de la Observación 9. Una demostración alternativa al resultado en [12] está en el Apéndice 4.9. Usando las fórmulas (4.27)-(4.29), podemos ver que el punto de mejor desempeño es  $k^* = (\tau^*, k_r^*) = (0.305073, 7.90229)$  y  $\alpha^* = -3.27922$ . En las Figuras. 4.5(a) y 4.5(b), el punto de mejor desempeño  $k^*$  está graficado en color rojo.

## 4.8. Conclusión

En este capítulo se presenta un análisis para determinar los parámetros (incluyendo el retardo) de un controlador que proporciona la cota máxima de decaimiento de la respuesta del sistema a lazo cerrado para un sistema lineal invariante en el tiempo con retardo. Este análisis conduce a una metodología para obtener los puntos de mejor desempeño para controladores que se usan para estabilizar sistemas a lazo cerrado cuya ecuación característica es un cuasi-polinomio. Lo anterior depende de resultados que ayudan a entender el comportamiento de la función de la abscisa espectral. Para ilustrar la variedad de aplicación de los resultados obtenidos, se presentan con éxito algunos ejemplos en los que las metodologías actuales no puede ser aplicadas.

## 4.9. Apéndice

### Controlador PR: 1 raíz real triple

En este ejemplo, para encontrar una raíz que reúna las condiciones necesarias de la Obervación 9, se relacionan los resultados obtenidos con los conceptos de grado de un cuasi-polinomio, raíz dominante y multiplicidad maximal [52, 54]. Para probar la dominancia de la raíz de multiplicidad maximal, se usa el teorema de Taylor como demostración alternativa a la dada en [12].

El *grado* del cuasi-polinomio

$$q(s) = s^2 + As + B + Ce^{-\tau s}, \quad (4.20)$$

donde  $A, B, C$  y  $\tau$  son constantes con  $C \neq 0$  y  $\tau > 0$  es 3 y todas sus raíces tienen multiplicidad  $\leq 3$ , ver [73], p. 144.

Una raíz  $s^*$  del cuasi-polinomio (4.20) es de *multiplicidad maximal* si tiene multiplicidad 3.

Una raíz  $s_0$  del cuasi-polinomio (4.20) es *dominante* si para cualquier otra raíz  $s$ , se tiene que  $\text{Re}(s) \leq \text{Re}(s_0)$ .

Notamos que una raíz en la que la se alcanza la abscisa espectral es necesariamente dominante.

**Proposición 13.** *Si el cuasi-polinomio (4.20) tiene una raíz de multiplicidad maximal, entonces esta raíz es dominante.*

*Demostración.* Resolviendo para  $A, B$  y  $C$  el sistema

$$q(s) = 0, \quad q'(s) = 0 \quad \text{y} \quad q''(s) = 0,$$

se obtiene que

$$A = -\frac{2(1 + \tau s)}{\tau}, \quad B = \frac{\tau^2 s^2 + 2\tau s + 2}{\tau^2} \quad (4.21)$$

y

$$C = -\frac{2e^{\tau s}}{\tau^2}. \quad (4.22)$$

Sea

$$s_0 = -\frac{A}{2} - \frac{1}{\tau}. \quad (4.23)$$

Haciendo un cambio de escala y una traslación, se define el cuasi-polinomio

$$\begin{aligned} p(s) &= \tau^2 q\left(\frac{s}{\tau} + s_0\right) \\ &= s^2 - 2s + 1 + B\tau^2 - \frac{A^2\tau^2}{4} + C\tau^2 e^{\frac{A\tau}{2}-s+1}. \end{aligned}$$

Si las ecuaciones (4.21)-(4.22) se satisfacen,  $p$  tiene una raíz triple en  $s = 0$ , y

$$p^{(n)}(s) = (-1)^n C\tau^2 e^{\frac{A\tau}{2}-s+1} \quad \text{para } n = 3, 4, \dots$$

Por el teorema de Taylor,

$$\begin{aligned} p(s) &= p(0) + p'(0)s + \frac{1}{2}p''(0)s^2 + \frac{1}{2} \int_0^s p^{(3)}(t)(s-t)^2 dt \\ &= -\frac{1}{2}C\tau^2 e^{\frac{A\tau}{2}+1} \int_0^s e^{-t}(s-t)^2 dt. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $t = us$ , se tiene que

$$p(s) = -\frac{1}{2}C\tau^2 s^3 e^{\frac{A\tau}{2}+1} \int_0^1 e^{-us}(1-u)^2 du. \quad (4.24)$$

De (4.24), se ve que si  $p(s) = 0$  y  $s \neq 0$ , entonces  $s \in \mathbb{C}$ . Sea  $s = \sigma + i\omega$ , donde  $\omega \geq 0$ . Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-us}(1-u)^2 du &= \int_0^1 e^{-u(\sigma+i\omega)}(1-u)^2 du \\ &= \int_0^1 e^{-\sigma u}(1-u)^2 \cos \omega u du + i \int_0^1 e^{-\sigma u}(1-u)^2 \sen \omega u du. \end{aligned}$$

Si  $p(s) = 0$  y  $s \neq 0$ , entonces

$$\int_0^1 e^{-\sigma u}(1-u)^2 \cos \omega u du = 0 \quad (4.25)$$

y

$$\int_0^1 e^{-\sigma u}(1-u)^2 \sen \omega u du = 0. \quad (4.26)$$

La ecuación (4.25) implica que  $\omega \geq \frac{\pi}{2}$  y la ecuación (4.26) implica que  $\omega \geq \pi$ . Es así que  $\omega \geq \pi$ .

Ahora, puesto que

$$\int_0^1 e^{-us}(1-u)^2 du = \frac{s^2 - 2s + 2 - 2e^{-s}}{s^3},$$

de (4.24), se tiene que

$$p(s) = -\frac{1}{2}C\tau^2 e^{\frac{\sigma\tau}{2}+1}(s^2 - 2s + 2 - 2e^{-s}).$$

Si  $p(s) = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} s^2 - 2s + 2 - 2e^{-s} &= 0, \\ 2e^{-s} &= (s - 1)^2 + 1, \\ |2e^{-s}| &= |(s - 1)^2 + 1| \geq |(s - 1)^2| - 1 = |s - 1|^2 - 1, \\ 2e^{-\sigma} &\geq (\sigma - 1)^2 + \omega^2 - 1 \geq \pi^2 - 1 > 8, \\ e^\sigma &< \frac{1}{4} \end{aligned}$$

y

$$\sigma < -\ln(4) < 0.$$

Por lo tanto,  $s = 0$  es una raíz dominante para  $p$  y  $s_0$  es una raíz dominante para  $q$ .  $\square$

Resolviendo para  $\tau$  las ecuaciones (4.21), se obtiene que

$$\tau = \frac{2}{\sqrt{4B - A^2}}. \quad (4.27)$$

De (4.23),

$$\sigma = -\frac{A}{2} - \frac{1}{\tau}, \quad (4.28)$$

y de la ecuación (4.22),

$$C = -\frac{2e^{\tau\sigma}}{\tau^2}. \quad (4.29)$$

# Capítulo 5

## Estabilidad de Hurwitz para familias de polinomios

### 5.1. Introducción

La estabilidad de Hurwitz está relacionada con sistemas continuos, mientras que la estabilidad de Schur está relacionada con sistemas discretos. Puesto que existe una función biyectiva, como la transformación de Möebius  $w = (z + 1)/(z - 1)$ , que convierte el círculo unitario en el semiplano izquierdo, teóricamente los mismos criterios de estabilidad pueden ser aplicados en ambos casos pero se prefieren criterios específicos para cada uno [38].

### 5.2. Formulación del problema y contribución

Ahora se formula el problema a estudiar, con una breve descripción de la contribución.

Una función de la forma

$$f(\alpha, x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n, \quad (5.1)$$

donde  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  y  $\alpha_n \neq 0$ , se llama *polinomio de grado  $n$  con coeficientes reales*. Se dice que el polinomio (6.1) es *estable (o Hurwitz estable)* si y sólo si todas sus raíces están en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo.

Para un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ,

$$\mathfrak{F}_A = \{f(\alpha, x) : \alpha \in A\}$$

es la familia de polinomios de la forma (6.1) cuyos coeficientes están en  $A$ . El estudio de la familia  $\mathfrak{F}_A$  depende del conjunto  $A$  y de la norma que se elija para  $\mathbb{R}^{n+1}$ . En particular:

- Si  $D_n$  es una bola  $(n + 1)$ -dimensional (*diamante*) respecto a la 1-norma [37] con centro  $c = (c_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  y radio  $r > 0$  de la forma

$$D_n = \{\alpha \in \mathbb{R}^{n+1} : |\alpha_0 - c_0| + |\alpha_1 - c_1| + \dots + |\alpha_n - c_n| \leq r\}, \quad (5.2)$$

la colección  $\mathfrak{F}_{D_n}$  se conoce como *familia de polinomios diamante*. El diamante  $D_n$  tiene  $2(n + 1)$  vértices de la forma  $(c_0, \dots, c_{j-1}, c_j \pm r, c_{j+1}, \dots, c_n)$  para  $j = 0, 1, \dots, n$ .

- Si  $B_n$  es una *caja*  $(n + 1)$ -dimensional de la forma

$$\begin{aligned} B_n &= [l_0, u_0] \times [l_1, u_1] \times \dots \times [l_n, u_n] \\ &= \{\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : l_j \leq \alpha_j \leq u_j \text{ para } j = 0, 1, \dots, n\}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

la colección  $\mathfrak{F}_{B_n}$  se conoce como *familia de polinomios de intervalo*. Los intervalos  $[l_j, u_j]$  representan la incertidumbre paramétrica en los coeficientes del polinomio (6.1). La caja  $B_n$  tiene  $2^{n+1}$  vértices de la forma  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , donde  $\alpha_j \in \{l_j, u_j\}$  para  $j = 0, 1, \dots, n$ .

- Si  $S_n$  es una bola  $(n + 1)$ -dimensional (*esfera sólida*) respecto a la 2-norma [37] con centro  $c = (c_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  y radio  $r > 0$  de la forma

$$S_n = \{\alpha \in \mathbb{R}^{n+1} : (\alpha_0 - c_0)^2 + (\alpha_1 - c_1)^2 + \dots + (\alpha_n - c_n)^2 < r^2\}, \quad (5.4)$$

la colección  $\mathfrak{F}_{S_n}$  se llama *familia de polinomios bola*. La bola  $S_n$  no tiene vértices.

**Definición 1.** [8] Una familia  $\mathfrak{F}_A$  es *estable* (o *Hurwitz estable*) si y sólo si cada uno de sus elementos es un polinomio estable.

Un criterio para determinar la estabilidad de una familia de polinomios diamante es el siguiente.

**Teorema 5.** (Barmish [7]) Sean  $q^j$ ,  $j = 1, \dots, 8$ , los puntos (vértices) del diamante  $D_n$  definidos por

$$\begin{aligned} q^{1,2} &= (c_0 \pm r, c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, c_{n-1}, c_n), \\ q^{3,4} &= (c_0, c_1 \pm r, c_2, \dots, c_{n-2}, c_{n-1}, c_n), \\ q^{5,6} &= (c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, c_{n-1} \pm r, c_n), \quad y \\ q^{7,8} &= (c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, c_{n-1}, c_n \pm r). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Asumir que  $|c_j| > r$  para  $j = 0, 1, \dots, n$ . La familia  $\mathfrak{F}_{D_n}$  es estable si y sólo si los ocho polinomios

$$\begin{aligned} f(q^{1,2}, x) &= f(c, x) \pm r, & f(q^{3,4}, x) &= f(c, x) \pm rx \\ f(q^{5,6}, x) &= f(c, x) \pm rx^{n-1} & y & f(q^{7,8}, x) = f(c, x) \pm rx^n \end{aligned} \quad (5.6)$$

son estables.

El criterio más conocido para determinar estabilidad de una familia de polinomios de intervalo es el siguiente.

**Teorema 6.** (Kharitonov [43]) Sean  $k^j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , los puntos (vértices) de la caja  $B_n$  definidos por

$$\begin{aligned} k^1 &= (l_0, l_1, u_2, u_3, l_4, l_5, \dots), & k^2 &= (u_0, u_1, l_2, l_3, u_4, u_5, \dots) \\ k^3 &= (l_0, u_1, u_2, l_3, l_4, u_5, \dots) & y & k^4 = (u_0, l_1, l_2, u_3, u_4, l_5, \dots). \end{aligned} \quad (5.7)$$

La familia  $\mathfrak{F}_{B_n}$  es estable si y sólo si los cuatro polinomios

$$\begin{aligned} f(k^1, x) &= l_0 + l_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + l_4x^4 + l_5x^5 + \dots, \\ f(k^2, x) &= u_0 + u_1x + l_2x^2 + l_3x^3 + u_4x^4 + u_5x^5 + \dots, \\ f(k^3, x) &= l_0 + u_1x + u_2x^2 + l_3x^3 + l_4x^4 + u_5x^5 + \dots, & y \\ f(k^4, x) &= u_0 + l_1x + l_2x^2 + u_3x^3 + u_4x^4 + l_5x^5 + \dots \end{aligned} \quad (5.8)$$

son estables.

El siguiente resultado dice cómo encontrar la bola estable más grande con centro en un polinomio estable.

**Teorema 7.** (Soh [86]) Suponer que el polinomio  $f(c, x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$  es estable y escribir

$$f(c, x) = f_e(x) + xf_o(x),$$

donde

$$f_e(x) = c_0 + c_2x^2 + c_4x^4 + \dots \quad y \quad xf_o(x) = c_1x + c_3x^3 + c_5x^5 + \dots$$

consisten de los términos pares e impares del polinomio  $f$ , respectivamente. Entonces, el radio  $r$  de la bola  $S_n$  más grande tal que la familia  $\mathfrak{F}_{S_n}$  es estable está dada por

$$r = \min\{c_0, c_n, d_{\min}\},$$

donde

$$d_{min} = \inf\{d(\omega), \omega \geq 0\}$$

y

$$[d(\omega)]^2 = \begin{cases} \frac{[f_e(i\omega)]^2}{1+\omega^4+\dots+\omega^{4p}} + \frac{[f_o(i\omega)]^2}{1+\omega^4+\dots+\omega^{4(p-1)}}, & n = 2p \\ \frac{[f_e(i\omega)]^2 + [f_o(i\omega)]^2}{1+\omega^4+\dots+\omega^{4p}}, & n = 2p + 1. \end{cases}$$

De los Teoremas 5, 6 y 7 se sigue que:

- Existen ocho puntos (vértices) del diamante  $D_n$  que determinan la estabilidad de la familia  $\mathfrak{F}_{D_n}$ .
- Existen cuatro puntos (vértices) de la caja  $B_n$  que determinan la estabilidad de la familia  $\mathfrak{F}_{B_n}$ .
- Los polinomios sobre la frontera de la bola  $S_n$  determinan la estabilidad de la familia  $\mathfrak{F}_{S_n}$ , lo que parece implicar un número infinito de puntos.

Surgen las siguientes preguntas:

- ¿Dado un conjunto  $A$ , es posible determinar condiciones necesarias y suficientes que aseguren la estabilidad de toda una familia  $\mathfrak{F}_A$ ?
- ¿Es posible reducir el número de polinomios (o puntos) necesarios para determinar la estabilidad de  $\mathfrak{F}_{D_n}$ ,  $\mathfrak{F}_{B_n}$  o  $\mathfrak{F}_{S_n}$ ?
- ¿Para  $\mathfrak{F}_{D_n}$  o  $\mathfrak{F}_{B_n}$ , son necesariamente vértices de un diamante o una caja, respectivamente, los puntos (o polinomios) que determinan la estabilidad de esas familias?

**Observación 1.** Hasta donde sabemos, uno de los mejores intentos para reducir el número de polinomios de Kharitonov necesarios para probar la estabilidad de una familia  $\mathfrak{F}_{B_n}$  es el de Anderson [3]. En este artículo, para  $n = 3, 4$  y  $5$ , el número de polinomios de Kharitonov que se requiere para probar estabilidad de  $\mathfrak{F}_{B_n}$  es uno, dos y tres, respectivamente, en lugar de cuatro. Esto es, la estabilidad de  $\mathfrak{F}_{B_{3,4,5}}$ , está determinada por uno, dos y tres puntos de la forma (5.7), respectivamente. También se demuestra que para  $n \geq 6$  se requieren los cuatro polinomios de Kharitonov [o los cuatro puntos (5.7)]. Mientras que para la familia  $\mathfrak{F}_{S_n}$  no parece haber un resultado equivalente.

## Contribuciones de este capítulo

- La evidencia de este estudio sugiere la existencia de un *punto extremo*  $\alpha^* \in A$ , donde  $A$  es un conjunto compacto, tal que la estabilidad del polinomio  $f(\alpha^*, x)$ , que llamaremos *polinomio extremo*, determina la estabilidad de toda la familia  $\mathfrak{F}_A$ .
- Un resultado muestra que el *punto extremo*  $\alpha^*$  está en la frontera del conjunto  $A$ .
- De acuerdo con lo anterior, el estudio apunta hacia la idea de que la estabilidad de familias tales como  $\mathfrak{F}_{D_n}$ ,  $\mathfrak{F}_{B_n}$  y  $\mathfrak{F}_{S_n}$  puede ser garantizada por la existencia de al menos un *polinomio extremo*  $f(\alpha^*, x)$  o por algunas desigualdades simples, cuando  $n$  es pequeño.
- El polinomio  $f(\alpha^*, x)$  se obtiene al minimizar unos determinantes y algunas veces  $f(\alpha^*, x)$  coincide con un polinomio de Kharitonov. Así, obtenemos otra propiedad extrema para algunos polinomios de Kharitonov.
- Para ilustrar los resultados, se obtienen condiciones necesarias y suficientes que determinan la estabilidad de  $\mathfrak{F}_{D_n}$ ,  $\mathfrak{F}_{B_n}$  y  $\mathfrak{F}_{S_n}$  para  $n \leq 5$ . Los resultados sugieren que este enfoque puede contribuir al entendimiento y relajamiento de las condiciones para determinar estabilidad de familias de polinomios.

## 5.3. Resultados preliminares

En esta sección se enuncian los teoremas requeridos para probar los resultados principales.

**Lema 3.** (Stodola [77]) *Si  $f(\alpha, x)$  es un polinomio estable de la forma (6.1), entonces todos sus coeficientes tienen el mismo signo.*

**Observación 2.** En lo que sigue, asumiremos que  $\alpha_j > 0$  para  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Los *determinantes principales* de Hurwitz  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  asociados al polinomio (6.1) están

definidos por

$$\Delta_k(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{2k-3} & \alpha_{2k-4} & \alpha_{2k-5} & \cdots & \alpha_{k-2} \\ \alpha_{2k-1} & \alpha_{2k-2} & \alpha_{2k-3} & \cdots & \alpha_k \end{vmatrix}, \quad (5.9)$$

donde  $\alpha_{2i-j} = 0$  para  $2i - j < 0$  o  $2i - j > n$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, k$  y  $k = 1, 2, \dots, n$ . Usando la Observación 2, uno de los criterios clásicos de estabilidad para polinomios puede ser escrito de la siguiente manera.

**Teorema 8.** (*Liénard-Chipart criterion*[27]) *El polinomio (6.1) es estable si y solo si los determinantes*

$$\Delta_1(\alpha), \Delta_3(\alpha), \Delta_5(\alpha), \dots$$

o

$$\Delta_2(\alpha), \Delta_4(\alpha), \Delta_6(\alpha), \dots$$

son todos positivos.

Enseguida usaremos este criterio para obtener un punto  $\alpha^* \in A$  tal que su correspondiente polinomio (extremo)  $f(\alpha^*, x)$  determina la estabilidad de toda la familia  $\mathfrak{F}_A$ .

## 5.4. Resultados principales

En esta sección se usa lo anterior para obtener condiciones necesarias condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de una familia  $\mathfrak{F}_A$ , donde  $A$  es un conjunto compacto. Este resultado será aplicado a familias de polinomios diamante  $\mathfrak{F}_{D_n}$ , de polinomios de intervalo  $\mathfrak{F}_{B_n}$  y de polinomios bola  $\mathfrak{F}_{S_n}$ .

### 5.4.1. La familia $\mathfrak{F}_A$

Ahora definimos lo que es un polinomio extremo para una familia de polinomios  $\mathfrak{F}_A$ .

**Definición 2.** Se dice que un polinomio  $f(\alpha^*, x)$  de la forma (6.1) es un *polinomio extremo* para la familia  $\mathfrak{F}_A$  si y sólo si la estabilidad de  $f(\alpha^*, x)$  determina la estabilidad de toda la familia  $\mathfrak{F}_A$ .

Notemos que obtener un polinomio extremo  $f(\alpha^*, x)$  en  $\mathfrak{F}_A$  es equivalente a obtener un *punto extremo*  $\alpha^*$  en  $A$ . Para obtener un polinomio extremo o un punto extremo se requiere un criterio de estabilidad, y nosotros usaremos el criterio de Liénard-Chipart.

Supongamos que los coeficientes del polinomio (6.1) pertenecen a un conjunto compacto  $A$  cuyos elementos tienen componentes positivas. Puesto que los determinantes (5.9) son funciones continuas de  $\alpha$ , existen puntos  $a^1, a^2, \dots, a^n \in A$  tales que

$$\begin{aligned}\Delta_1(a^1) &= \min\{\Delta_1(\alpha) : \alpha \in A\}, \\ \Delta_2(a^2) &= \min\{\Delta_2(\alpha) : \alpha \in A\}, \\ &\vdots \\ \Delta_n(a^n) &= \min\{\Delta_n(\alpha) : \alpha \in A\}.\end{aligned}\tag{5.10}$$

Ahora, se muestra que los puntos  $a^1, a^2, \dots, a^n$  no pueden ser puntos interiores del conjunto  $A$ . Entonces, esos puntos están sobre la frontera de  $A$ . Un resultado más preciso pero menos general puede encontrarse en Bialas[9]: para una familia estable  $\mathfrak{F}_{B_n}$ , se demuestra que  $a^n$  corresponde a un vértice de la caja  $B_n$ .

**Teorema 9.** *Suponer que los determinantes (5.10) son positivos. Entonces, estos valores mínimos no pueden alcanzarse en puntos interiores del conjunto  $A$ .*

*Demostración.* Sea  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  y supongamos que  $a^k = (a_0^k, a_1^k, \dots, a_n^k)$  es un punto interior de  $A$ . Entonces, existe un  $\varepsilon > 0$  en el intervalo abierto  $(0, \|a^k\|)$  tal que  $B_\varepsilon(a^k) \subset A$ , donde  $B_\varepsilon(a^k)$  denota la bola con centro  $a^k$  y radio  $\varepsilon$ , respecto a la norma euclídeana.

Sea

$$\alpha = \lambda a^k,$$

donde  $\lambda = 1 - \frac{\varepsilon}{2\|a^k\|}$ . Debido a esta elección,  $0 < \lambda < 1$  y

$$\|\alpha - a^k\| = (1 - \lambda)\|a^k\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Es así que  $\alpha \in B_\varepsilon(a^k)$ . Puesto que el determinante  $\Delta_k$  es una función homogénea de grado  $k$ , tenemos que

$$\Delta_k(\alpha) = \lambda^k \Delta_k(a^k),$$

y como  $\lambda < 1$ , obtenemos que  $\Delta_k(\alpha) < \Delta_k(a^k)$ . Esta contradicción prueba el resultado.  $\square$

Usando el Teorema 8, definimos

$$\Delta_o(\alpha) = \text{mín}\{\Delta_1(\alpha), \Delta_3(\alpha), \Delta_5(\alpha), \dots\} \quad (5.11)$$

y

$$\Delta_e(\alpha) = \text{mín}\{\Delta_2(\alpha), \Delta_4(\alpha), \Delta_6(\alpha), \dots\}. \quad (5.12)$$

Puesto que  $\Delta_o$  y  $\Delta_e$  son funciones continuas, existen puntos  $\alpha_o^*, \alpha_e^* \in A$  tales que

$$\Delta_o(\alpha_o^*) = \text{mín}\{\Delta_o(\alpha) : \alpha \in A\}$$

y

$$\Delta_e(\alpha_e^*) = \text{mín}\{\Delta_e(\alpha) : \alpha \in A\}.$$

**Teorema 10.** *Sea  $A$  un conjunto compacto. La familia  $\mathfrak{F}_A$  es estable si y sólo si el polinomio  $f(\alpha^*, x)$ , donde  $\alpha^*$  es  $\alpha_o^*$  o  $\alpha_e^*$ , es estable. Esto es,  $f(\alpha^*, x)$  es un polinomio extremo para la familia  $\mathfrak{F}_A$ .*

*Demostración.* Notamos que

$$\Delta_o(\alpha_o^*) = \text{mín}\{\Delta_1(a^1), \Delta_3(a^3), \Delta_5(a^5), \dots\},$$

y

$$\Delta_e(\alpha_e^*) = \text{mín}\{\Delta_2(a^2), \Delta_4(a^4), \Delta_6(a^6), \dots\}.$$

Entonces, la familia  $\mathfrak{F}_A$  es estable si y sólo si  $\Delta_o(\alpha_o^*) > 0$  o  $\Delta_e(\alpha_e^*) > 0$ . El resultado se sigue de la Definición 2.  $\square$

**Observación 3.** Puesto que un polinomio extremo se puede obtener resolviendo una de las desigualdades  $\Delta_o(\alpha_o^*) > 0$  o  $\Delta_e(\alpha_e^*) > 0$ , o una desigualdad equivalente, en lo que sigue usaremos la desigualdad que más convenga. También, en lo que resta del Capítulo,  $\Delta$  se usará para denotar  $\Delta_o$  o  $\Delta_e$  y  $\alpha^*$  se usará para denotar  $\alpha_o^*$  o  $\alpha_e^*$ , respectivamente.

### 5.4.2. La familia $\mathfrak{F}_{D_n}$

En esta sección consideramos un conjunto compacto  $A$  que es un diamante o una bola en la 1-norm de la forma (5.2).

Definimos el conjunto finito

$$Q = \{q^1, q^2, q^3, q^4, q^5, q^6, q^7, q^8\} \subset D_n,$$

donde  $q^j$  para  $j = 1, \dots, 8$ , están dados por (5.5). Entonces, existen puntos  $q^* \in Q$  y  $\alpha^* \in D_n$  tales que

$$\Delta(q^*) = \min\{\Delta(q) : q \in Q\}$$

y

$$\Delta(\alpha^*) = \min\{\Delta(\alpha) : \alpha \in D_n\}.$$

Notamos que los puntos  $q^*$  y  $\alpha^*$  no son necesariamente iguales. Debido a esto los polinomios extremos  $f(q^*, x)$  y  $f(\alpha^*, x)$  no son necesariamente el mismo polinomio, pero cualquiera de ellos determina la estabilidad de la familia  $\mathfrak{F}_{D_n}$ .

**Teorema 11.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *La familia  $\mathfrak{F}_{D_n}$  es estable*
- (ii) *El polinomio extremo  $f(\alpha^*, x)$  es estable*
- (iii) *El polinomio  $f(q^*, x)$  es estable.*

*Demostración.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Si todos los polinomios de la familia  $\mathfrak{F}_{D_n}$  son estables, en particular  $f(\alpha^*, x)$  es estable.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si  $f(\alpha^*, x)$  es estable, entonces  $\Delta(\alpha^*) > 0$ . Puesto que

$$\Delta(\alpha^*) \leq \Delta(q^*),$$

el polinomio  $f(q^*, x)$  es estable.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Si  $f(q^*, x)$  es estable, por el Teorema de Barmish 5, la familia  $\mathfrak{F}_{D_n}$  es estable.  $\square$

**Observación 4.** Notemos que una prueba directa de la implicación (iii) $\Rightarrow$ (ii), proporcionaría una nueva demostración del Teorema de Barmish.

**Proposición 14.** *Las familias  $\mathfrak{F}_{D_1}$  y  $\mathfrak{F}_{D_2}$  son estables si y sólo si los polinomios extremos  $f(\alpha^*, x) = \alpha_0 + (c_1 - r)x$  y  $f(\alpha^*, x) = \alpha_0 + (c_1 - r)x + \alpha_2 x^2$  son estables, respectivamente.*

*Demostración.* En ambos casos, el valor mínimo del determinante  $\Delta_1(\alpha) = \alpha_1$  se alcanza cuando  $\alpha_1 = c_1 - r$ . Así que  $\alpha^* = \alpha_0^*$ .  $\square$

**Proposición 15.** *La familia  $\mathfrak{F}_{D_3}$  es estable si y sólo si los 4 polinomios  $\{q^1, q^4, q^6, q^8\}$  son estables, y la familia  $\mathfrak{F}_{D_4}$  es estable si y sólo si los 7 polinomios  $\{q^1, q^3, q^4, q^5, q^6, q^7, q^8\}$  son estables.*

*Demostración.* Explicamos el caso  $\mathfrak{F}_{D_3}$ , el otro caso es similar. Por la Observación 3, elegimos el determinante par  $\Delta_2(\alpha) = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_3$ . Debido a que  $\alpha_j > 0$ ,  $\Delta_2(\alpha)$  es una función creciente en las variables  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , y una función decreciente en las variables  $\alpha_0$  y  $\alpha_3$ . El conjunto donde estamos buscando un valor mínimo de  $\Delta_2(\alpha)$  es

$$D_3 = \{\alpha \in \mathbb{R}^4 : |\alpha_1 - c_1| + |\alpha_2 - c_1| + |\alpha_0 - c_0| + |\alpha_3 - c_3| \leq r\}.$$

Si para algún punto  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  en  $D_3$ , tenemos que  $\alpha_1 > c_1$ , entonces el punto simétrico  $\alpha' = (\alpha_0, 2c_1 - \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  está también en  $D_3$  pero  $\Delta_2(\alpha') < \Delta_2(\alpha)$ . Lo mismo es cierto para la variable  $\alpha_2$ . Ahora, si para algún punto  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  en  $D_3$ , tenemos que  $\alpha_0 < c_0$ , entonces el punto simétrico  $\alpha' = (2c_0 - \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  también está en  $D_3$  pero  $\Delta_2(\alpha') < \Delta_2(\alpha)$ . Otra vez, lo mismo es cierto para la variable  $\alpha_3$ . Es así que podemos descartar los vértices donde  $c_1 + r$ ,  $c_2 + r$ ,  $c_0 - r$  o  $c_3 - r$  aparece.  $\square$

### 5.4.3. La familia $\mathfrak{F}_{B_n}$

Como la mayoría de la comunidad científica ha dirigido su atención hacia las familias de la forma (6.2), se enfatizará nuestra contribución con varios resultados para esta clase de familias.

Definimos el conjunto finito

$$K = \{k^1, k^2, k^3, k^4\} \subset B_n,$$

donde  $k^j$  para  $j = 1, \dots, 4$ , están dados por (5.7). Entonces, existen puntos  $k^* \in K$  y  $\alpha^* \in B_n$  tales que

$$\Delta(k^*) = \min\{\Delta(k) : k \in K\}$$

y

$$\Delta(\alpha^*) = \min\{\Delta(\alpha) : \alpha \in B_n\}.$$

Análogamente a la Sección anterior, la estabilidad de la familia  $\mathfrak{F}_{B_n}$  está determinada por cualquiera de los dos polinomios extremos  $f(k^*, x)$  o  $f(\alpha^*, x)$ , que no son necesariamente iguales.

**Teorema 12.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *La familia  $\mathfrak{F}_{B_n}$  es estable*
- (ii) *El polinomio extremo  $f(\alpha^*, x)$  es estable*
- (iii) *El polinomio  $f(k^*, x)$  es estable.*

*Demostración.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Si todos los polinomios de la familia  $\mathfrak{F}_{B_n}$  son estables, en particular  $f(\alpha^*, x)$  es estable.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si  $f(\alpha^*, x)$  es estable, entonces  $\Delta(\alpha^*) > 0$ . Puesto que

$$\Delta(\alpha^*) \leq \Delta(k^*),$$

el polinomio  $f(k^*, x)$  es estable.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Si  $f(k^*, x)$  es estable, por el Teorema de Kharitonov 6, la familia  $\mathfrak{F}_{B_n}$  es estable.  $\square$

**Observación 5.** En algunos casos,  $\alpha^*(= k^*)$  corresponde a coeficientes de un polinomio de Kharitonov. Es así que estos polinomios tienen otra propiedad extrema además de la observada por Chapellat [16]. Sin embargo, siempre existe un polinomio de Kharitonov extremo que determina la estabilidad de toda la familia  $\mathfrak{F}_{B_n}$ , lo que complementa el resultado obtenido por Anderson [3].

Enseguida obtenemos condiciones necesarias y suficientes explícitas para estabilidad de la familia  $\mathfrak{F}_{B_n}$ , cuando  $n \leq 5$ .

**Proposición 16.** *Las familias  $\mathfrak{F}_{B_1}$ ,  $\mathfrak{F}_{B_2}$  y  $\mathfrak{F}_{B_3}$  son estables si y sólo si los polinomios extremos  $f(\alpha^*, x) = \alpha_0 + l_1x$ ,  $f(\alpha^*, x) = \alpha_0 + l_1x + l_2x^2$  y  $f(\alpha^*, x) = u_0 + l_1x + l_2x^2 + u_3x^3$  son estables, respectivamente.*

*Demostración.* Si  $n = 1$ , entonces  $B_1 = [l_0, u_0] \times [l_1, u_1]$ ,  $\Delta_o = \Delta_1$  y

$$\Delta_o(\alpha_o^*) = l_1.$$

En este caso  $\alpha^* = \alpha_o^* = (\alpha_0, l_1)$ , y el polinomio extremo es  $f(\alpha^*, x) = \alpha_0 + l_1x$ .

Si  $n = 2$ , entonces  $B_2 = [l_0, u_0] \times [l_1, u_1] \times [l_2, u_2]$ ,  $\Delta_o = \Delta_1$  y  $\Delta_e = \Delta_2$ . Por la Observación 3, elegimos  $\Delta_e$ . Así,

$$\Delta_e(\alpha_e^*) = l_1l_2.$$

Para este caso,  $\alpha^* = \alpha_e^* = (\alpha_0, l_1, l_2)$ , y el polinomio extremo es  $f(\alpha^*, x) = \alpha_0 + l_1x + l_2x^2$ .

Si  $n = 3$ , entonces  $B_3 = [l_0, u_0] \times [l_1, u_1] \times [l_2, u_2] \times [l_3, u_3]$ ,  $\Delta_o = \min\{\Delta_1, \Delta_3\}$ , y  $\Delta_e = \Delta_2$ . Por la Observación 3, elegimos  $\Delta_e$ . Así

$$\Delta_e(\alpha_e^*) = l_1l_2 - u_0u_3.$$

En este caso,  $\alpha^* = \alpha_e^* = (u_0, l_1, l_2, u_3)$ , y el polinomio extremo es  $f(\alpha^*, x) = u_0 + l_1x + l_2x^2 + u_3x^3$ .  $\square$

**Observación 6.** Como un hecho interesante, notamos que las componentes del punto  $\alpha^*$  corresponden a los coeficientes del polinomio de Kharitonov  $f(k^4, x) = u_0 + l_1x + l_2x^2 + u_3x^3$ . Una conclusión equivalente se presenta en [3], ver Observación 1.

**Proposición 17.** Para  $n \geq 3$ , un condición necesaria para la estabilidad de la familia  $\mathfrak{F}_{B_n}$  es

$$l_1l_2 - u_0u_3 > 0. \quad (5.13)$$

*Demostración.* Para  $n \geq 3$ , los determinantes

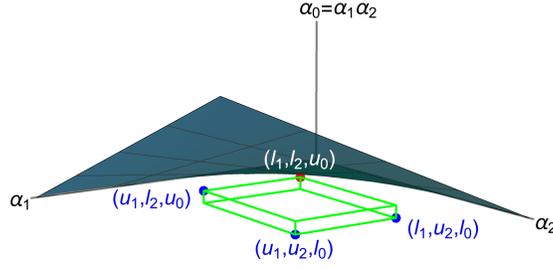
$$\Delta_2(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_3$$

permanecen sin cambio. Puesto que

$$\min_{\alpha \in B_n} \Delta_2(\alpha) = l_1l_2 - u_0u_3, \quad (5.14)$$

la familia  $\mathfrak{F}_{B_n}$  es estable si (5.14) es positivo.  $\square$

Si  $l_3 = u_3 = 1$ , las condiciones enunciadas en la Proposición 16 pueden verse geoméricamente en la Figura 5.1. Cuatro de los ocho vértices de la caja  $B_3$  (un punto rojo y tres puntos azules) corresponden a coeficientes de polinomios de Kharitonov. El vértice rojo es  $\alpha^* = (u_0, l_1, l_2, u_3)$ . Se observa que en tanto la caja  $B_3$  esté entre las superficies del paraboloides hiperbólico  $\alpha_0 = \alpha_1\alpha_2$  y el plano  $\alpha_0 = 0$ , la familia  $\mathfrak{F}_{B_3}$  es estable.

Figura 5.1: Estabilidad de la familia  $\mathfrak{F}_{B_3}$ .

**Teorema 13.** Sea  $d = l_2^2 - 4u_0u_4 > 0$ . La familia de polinomios de intervalo  $\mathfrak{F}_{B_4}$  es estable si y sólo si el polinomio extremo  $f(\alpha^*, x)$ , donde  $\alpha^* = (u_0, u_1, l_2, l_3, u_4)$ ,  $(u_0, l_1, l_2, u_3, u_4)$  o  $(u_0, l_1, l_2, l_3, u_4)$ , es estable o equivalentemente una de las siguientes desigualdades

$$\frac{l_2 - \sqrt{d}}{2u_0}u_1 < l_3 \leq u_3 < \frac{l_2 + \sqrt{d}}{2u_0}l_1 \quad (5.15)$$

o

$$\min \{ \Delta_3(u_0, u_1, l_2, l_3, u_4), \Delta_3(u_0, l_1, l_2, u_3, u_4), \Delta_3(u_0, l_1, l_2, l_3, u_4) \} > 0 \quad (5.16)$$

se satisface.

*Demostración.* De (5.11) tenemos que

$$\Delta_o(\alpha) = \min \{ \Delta_1(\alpha), \Delta_3(\alpha) \}.$$

Como se mencionó en la Observación 3, para obtener un polinomio extremo, omitimos  $\Delta_1$  porque este determinante siempre es positivo, y minimizamos una función relacionada con  $\Delta_3$ . Por el Teorema 9, la familia  $\mathfrak{F}_{B_4}$  es estable si y sólo si

$$\Delta_3(\alpha) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_0\alpha_3^2 - \alpha_1^2\alpha_4 > 0 \quad \text{para todo } \alpha \in B_4.$$

Sea  $F_3(\alpha) = \Delta_3(u_0, \alpha_1, l_2, \alpha_3, u_4) = l_2\alpha_1\alpha_3 - u_0\alpha_3^2 - u_4\alpha_1^2$ . Puesto que

$$\min_{\alpha \in B_4} \Delta_3(\alpha) = \min_{\alpha \in B_4} F_3(\alpha),$$

podemos minimizar  $F_3$  en lugar de  $\Delta_3$ .

Se verifica fácilmente que

$$F_3(\alpha) = \left(\frac{d}{4u_0}\right) \alpha_1^2 - u_0 \left(\alpha_3 - \frac{l_2}{2u_0} \alpha_1\right)^2. \quad (5.17)$$

Entonces,

$$F_3(\alpha) > 0 \iff \frac{l_2 - \sqrt{d}}{2u_0} \alpha_1 < \alpha_3 < \frac{l_2 + \sqrt{d}}{2u_0} \alpha_1 \text{ para todo } \alpha \in B_4,$$

y tenemos que

$$\Delta_3(\alpha) > 0 \text{ para todo } \alpha \in B_4 \iff \frac{l_2 - \sqrt{d}}{2u_0} u_1 < l_3 \leq u_3 < \frac{l_2 + \sqrt{d}}{2u_0} l_1,$$

que es la condición de estabilidad (5.15).

Ahora, puesto que

$$\frac{\partial F_3}{\partial \alpha_1}(\alpha) = l_2 \alpha_3 - 2u_4 \alpha_1 < (>) 0 \iff \alpha_3 < (>) \frac{2u_4}{l_2} \alpha_1,$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \alpha_3}(\alpha) = l_2 \alpha_1 - 2u_0 \alpha_3 < (>) 0 \iff \alpha_3 > (<) \frac{l_2}{2u_0} \alpha_1,$$

y

$$\frac{l_2 - \sqrt{d}}{2u_0} < \frac{2u_4}{l_2} < \frac{l_2}{2u_0} < \frac{l_2 + \sqrt{d}}{2u_0},$$

obtenemos la ecuación (5.16). □

**Observación 7.** Los coeficientes  $(u_0, u_1, l_2, l_3, u_4)$  y  $(u_0, l_1, l_2, u_3, u_4)$  corresponden a los polinomios de Kharitonov  $f(k^2, x)$  y  $f(k^4, x)$ , respectivamente, mientras que los coeficientes  $(u_0, l_1, l_2, l_3, u_4)$  no.

El polinomio que determina la estabilidad de la familia  $\mathfrak{F}_{B_4}$  se obtiene a partir de la ecuación (5.16) evaluando el determinante  $\Delta_3$  en tres puntos. Sin embargo, este resultado puede mejorarse reduciendo el número de evaluaciones a dos. Para lograrlo, se necesita el siguiente Lema elemental.

**Lema 4.** Sean  $\varphi, \psi : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas, donde  $B$  es un conjunto compacto. La afirmación

$$\varphi(\alpha) > 0 \iff \psi(\alpha) > 0 \text{ para todo } \alpha \in B,$$

es equivalente a

$$\min_{\alpha \in B} \varphi(\alpha) > 0 \iff \min_{\alpha \in B} \psi(\alpha) > 0.$$

*Demostración.* Se sigue de la definición de mínimo y el Teorema de Weierstrass.  $\square$

Ahora usamos el Lema 6 para reducir el número de evaluaciones en  $\Delta_3$ .

**Teorema 14.** Sea  $d = l_2^2 - 4u_0u_4 > 0$ . La familia de polinomios de intervalo  $\mathfrak{F}_{B_4}$  es estable si y sólo si el polinomio extremo  $f(\alpha^*, x)$ , donde  $\alpha^* = (u_0, l_1, l_2, u_3)$  o  $(u_0, u_1, l_2, l_3)$ , es estable o equivalentemente

$$\min\{G_3(u_0, l_1, l_2, u_3, u_4), G_3(u_0, u_1, l_2, l_3, u_4)\} > 0, \quad (5.18)$$

donde

$$G_3(\alpha) = \sqrt{d}\alpha_1 - 2u_0 \left| \alpha_3 - \frac{l_2}{2u_0}\alpha_1 \right|.$$

*Demostración.* De (5.17), obtenemos la equivalencia

$$\Delta_3(\alpha) > 0 \iff G_3(\alpha) > 0 \text{ para todo } \alpha \in B_4.$$

Puesto que

$$\frac{\partial G_3}{\partial \alpha_1}(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{d} + l_2, & \alpha_3 > \frac{l_2}{2u_0}\alpha_1 \\ \sqrt{d} - l_2, & \alpha_3 < \frac{l_2}{2u_0}\alpha_1 \end{cases}$$

y

$$\frac{\partial G_3}{\partial \alpha_3}(\alpha) = \begin{cases} -2u_0, & \alpha_3 > \frac{l_2}{2u_0}\alpha_1 \\ 2u_0, & \alpha_3 < \frac{l_2}{2u_0}\alpha_1 \end{cases}$$

vemos que

$$\min_{\alpha \in B_4} G_3(\alpha) = \min\{G_3(u_0, u_1, l_2, l_3, u_4), G_3(u_0, l_1, l_2, u_3, u_4)\}.$$

Por el Lema 6, obtenemos la ecuación (5.18).  $\square$

**Observación 8.** Notamos que:

- Los coeficientes  $(u_0, u_1, l_2, l_3, u_4)$  y  $(u_0, l_1, l_2, u_3, u_4)$  corresponden a los polinomios de Kharitonov  $f(k^2, x)$  y  $f(k^4, x)$ , respectivamente.
- Como se mencionó en la Observación 1, en [3] la estabilidad de  $\mathfrak{F}_{B_4}$  está determinada por dos polinomios de Kharitonov. Sin embargo, de acuerdo al Teorema 13, la estabilidad de  $\mathfrak{F}_{B_4}$  está determinada sólo por la desigualdad (5.15).

**Corolario 1.** *La familia de polinomios de intervalo  $\mathfrak{F}_{B_5}$  es estable si y sólo si el polinomio extremo  $f(\alpha_e^*, x)$  es estable, donde  $\alpha_e^* = a^2$  o  $a^4$ .*

*Demostración.* Observamos que  $\Delta_e(\alpha_e^*) > 0$  si y sólo si  $\Delta_2(a^2) > 0$  y  $\Delta_4(a^4) > 0$ . Por el Teorema 10, tenemos que  $\alpha_e^* = a^2$  o  $a^4$ .  $\square$

Debido a la complejidad de los cálculos, pocos investigadores han abordado este problema para  $n \geq 5$ . Enseguida, se proporciona una condición necesaria para la estabilidad de la familia  $\mathfrak{F}_{B_5}$ , mientras que en el Ejemplo 3, se obtiene  $f(\alpha_e^*, x)$  para una familia particular  $\mathfrak{F}_{B_5}$ .

**Proposición 18.** *Una condición necesaria para la estabilidad de la familia  $\mathfrak{F}_{B_5}$  es*

$$l_3^2 - 4u_1u_5 > 0 \quad \text{y} \quad l_2^2 - 4u_0u_4 > 0. \quad (5.19)$$

*Demostración.* Asumir que  $\Delta_4(\alpha) > 0$  para todo  $\alpha \in B_5$ . El determinante

$$\Delta_4(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_5 & \alpha_4 \end{vmatrix} = (\alpha_3\alpha_4 - \alpha_2\alpha_5)(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_3) - (\alpha_0\alpha_5 - \alpha_1\alpha_4)^2$$

es una parábola que abre hacia abajo en cada variable  $\alpha_j$  para  $j = 0, 1, \dots, 5$ . Usando un sistema de algebra por computadora, se puede probar que el valor máximo de estas parábolas es positivo. Entonces,

$$\alpha_3^2 - 4\alpha_1\alpha_5 > 0 \quad \text{y} \quad \alpha_2^2 - 4\alpha_0\alpha_4 > 0 \quad \text{para todo} \quad \alpha \in B_5, \quad (5.20)$$

y obtenemos la condición necesaria (5.19).  $\square$

#### 5.4.4. La familia $\mathfrak{F}_{S_n}$

En esta Sección consideramos un conjunto compacto  $A$  que es una bola respecto a la 2-norm de la forma (5.4).

**Proposición 19.** *Las familias  $\mathfrak{F}_{S_1}$  y  $\mathfrak{F}_{S_2}$  son estables si y sólo si los polinomios extremos  $f(\alpha^*, x) = \alpha_0 + (c_1 - r)x$  y  $f(\alpha^*, x) = \alpha_0 + (c_1 - r)x + \alpha_2 x^2$  son estables, respectivamente.*

*Demostración.* En ambos casos, elegimos el determinante impar  $\Delta_1(\alpha) = \alpha_1$ . El valor mínimo de  $\Delta_1$  se alcanza cuando  $\alpha_1 = c_1 - r$ . Así que  $\alpha^* = \alpha_o^*$ .  $\square$

**Proposición 20.** *Podemos encontrar un polinomio extremo  $f(\alpha^*, x)$  para la familia  $\mathfrak{F}_{S_3}$ .*

*Demostración.* Sea  $\varphi(\alpha) = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3$  el segundo determinante y definamos  $g(\alpha) = \|\alpha - c\|^2 - r^2$ , donde  $\|\cdot\|$  denota la norma euclídeana. Por el Teorema 9,  $\varphi$  alcanza su valor mínimo sobre la frontera de la bola  $S_3$ . Es así que queremos minimizar  $\varphi(\alpha)$  sujeto a la restricción  $g(\alpha) = 0$ . El lagrangiano de este problema es  $L(\alpha, \lambda) = \varphi(\alpha) + \lambda g(\alpha)$ . Los puntos críticos del lagrangiano satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_{\alpha} L(\alpha, \lambda) &= \nabla \varphi(\alpha) + \lambda \nabla g(\alpha) \\ &= R\alpha + 2\lambda(\alpha - c) \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$= (R + 2\lambda I)\alpha - 2\lambda c = M\alpha - 2\lambda c \tag{5.22}$$

$$0 = \nabla_{\lambda} L(\alpha, \lambda) = g(\alpha) = \|\alpha - c\|^2 - r^2, \tag{5.23}$$

donde  $M = R + 2\lambda I$ ,  $I$  es la matriz identidad y  $R$  está dada por

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De la ecuación (5.22), obtenemos que

$$M\alpha = 2\lambda c$$

o

$$\alpha = 2\lambda M^{-1}c = \frac{2\lambda}{4\lambda^2 - 1}(2\lambda c_0 + c_3, 2\lambda c_1 - c_2, 2\lambda c_2 - c_1, 2\lambda c_3 + c_0), \tag{5.24}$$

donde puede verificarse que  $\lambda \neq 0, \pm\frac{1}{2}$ . De las ecuaciones (5.21) y (5.23), tenemos que

$$\|\alpha\| = \|R\alpha\| = 2|\lambda|r.$$

Resolviendo la ecuación algebraica

$$\|M^{-1}c\| = r, \tag{5.25}$$

obtenemos el multiplicador de Lagrange  $\lambda$ , que puede sustituirse en (5.24). □

### Observación.

- La ecuación (5.25) es el polinomio en  $\lambda$  de grado cuatro,

$$(2\lambda c_0 + c_3)^2 + (2\lambda c_1 - c_2)^2 + (2\lambda c_2 - c_1)^2 + (2\lambda c_3 + c_0)^2 = (4\lambda^2 - 1)^2 r^2. \tag{5.26}$$

Esto implica que existen a lo más cuatro candidatos a ser un polinomio extremo.

- Puesto que los determinantes (5.9) y la frontera de una bola  $S_n$  están definidos por funciones polinomiales en las variables  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ , entonces el número de candidatos a ser un polinomio extremo que determine la estabilidad de la familia  $\mathfrak{F}_{S_n}$  es a lo más finito.
- En general, si la frontera de la región  $A$  está definida por una función polinomial en las variables  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ , la estabilidad de la familia  $\mathfrak{F}_A$  está determinada por un polinomio extremo, que puede obtenerse a partir de un número finito de candidatos.

## 5.5. Ilustración de resultados

En esta sección presentamos algunas aplicaciones de los resultados previos. Primero, tomamos una familia  $\mathfrak{F}_{D_n}$  de la literatura para corroborar la efectividad y ventajas de nuestro enfoque. Segundo, dos ejemplos muestran que los resultados también pueden usarse para obtener cajas de máxima robutez  $B_3$  y  $B_4$  para polinomios de grado 3 y 4. Tercero, se propone una familia  $\mathfrak{F}_{B_5}$  cuyo polinomio extremo no es un polinomio de Kharitonov. Finalmente, se usa una familia  $\mathfrak{F}_{S_3}$  para ejemplificar que el número de candidatos a ser un polinomio extremo es a lo más 4.

### 5.5.1. Ejemplo de familia $\mathfrak{F}_{D_n}$

**Ejemplo 1.** Sea  $D_4$  el diamante con centro  $c = (3.49, 7.98, 6.49, 3, 1)$  y radio  $r = 0.5$ , ver [7]. La familia  $\mathfrak{F}_{D_4}$  es estable si y sólo si el polinomio extremo  $f(q^*, x) = 3.49 + 7.48x + 6.49x^2 + 3x^3 + x^4$  es estable.

En efecto, para el polinomio

$$f(c, x) = 3.49 + 7.98x + 6.49x^2 + 3x^3 + x^4 \quad (5.27)$$

se tiene que

$$Q = \{q^{1,2} = (3.49 \pm r, 7.98, 6.49, 3, 1), q^{3,4} = (3.49, 7.98 \pm r, 6.49, 3, 1), \\ q^{5,6} = (3.49, 7.98, 6.49, 3 \pm r, 1), q^{7,8} = (3.49, 7.98, 6.49, 3, 1 \pm r)\}.$$

Si  $r = 0.5$ , usando el Teorema 11, Proposición 15 y evaluando  $\Delta_o(\alpha) = \min\{\Delta_1(\alpha), \Delta_3(\alpha)\}$  o  $\Delta_e(\alpha) = \min\{\Delta_2(\alpha), \Delta_4(\alpha)\}$  en los 7 puntos de  $Q \setminus \{q^2\}$ , se verifica que el punto extremo es  $q^* = \alpha_o = \alpha_e = q^4 = (3.49, 7.48, 6.49, 3, 1)$ , y el resultado se sigue.

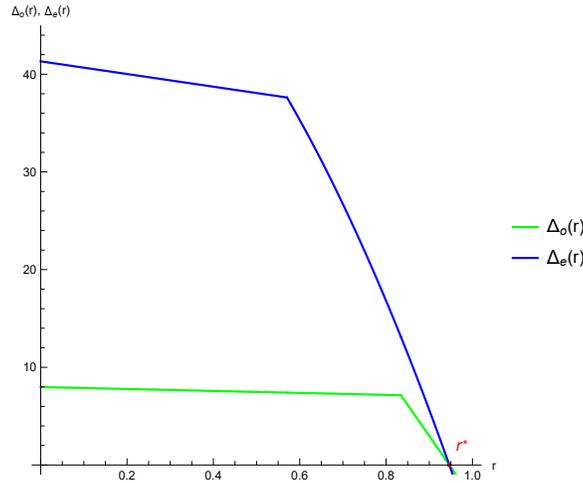


Figura 5.2: Robustez del polinomio (5.27).

Por otra parte, si  $r = 0.7$ , los puntos extremos (polinomios extremos) de la familia  $\mathfrak{F}_{D_4}$  son:

$$q^* = \alpha_o = q^4 = (3.49, 7.28, 6.49, 3, 1) \Rightarrow f(q^*, x) = 3.49 + 7.28x + 6.49x^2 + 3x^3 + x^4, \text{ y} \\ q^* = \alpha_e = q^7 = (3.49, 7.98, 6.49, 3, 1.7) \Rightarrow f(q^*, x) = 3.49 + 7.98x + 6.49x^2 + 3x^3 + 1.7x^4,$$

lo que muestra que un polinomio extremo no es único ni fijo.

Además, notamos que una vez que se elige el centro  $c$  del diamante, los determinantes  $\Delta_o$  y  $\Delta_e$  sólo dependen del radio  $r$ . Este parámetro puede incrementarse hasta que se pierde la estabilidad de uno de los polinomios  $f(\alpha, x)$ , donde  $\alpha \in Q$ . Así obtenemos una medida de la robustez del polinomio (5.27), que podemos llamar  $r^*$ . Usando un método numérico se obtiene la aproximación  $r^* = 0.9466052$ . La Figura 5.2 muestra el comportamiento de las funciones  $\Delta_o(r)$  y  $\Delta_e(r)$  conforme  $r$  crece.

### 5.5.2. Ejemplos de familias $\mathfrak{F}_{B_n}$

**Ejemplo 2.** Consideremos un polinomio de la forma

$$f(x) = -4r - (4s + 30)x + x^2 + x^3, \quad (5.28)$$

donde  $r$  y  $s$  son dos parámetros. Entonces, la máxima variación de los parámetros sin perder estabilidad es

$$r \in \left[ -\frac{u_0}{4}, -\frac{l_0}{4} \right] \quad \text{y} \quad s \in \left[ -\frac{u_1 + 30}{4}, -\frac{l_1 + 30}{4} \right],$$

donde  $l_1 > u_0$ . En efecto, aplicando (5.13) de la Proposición 17, vemos que el polinomio (5.28) es estable si y sólo si

$$0 < l_0 \leq -4r \leq u_0, \quad 0 < l_1 \leq -(4s + 30) \leq u_1 \quad \text{y} \quad l_1 > u_0.$$

Notamos que  $\alpha_2 = l_2 = u_2 = 1$  y  $\alpha_3 = l_3 = u_3 = 1$ . Eligiendo  $l_0 = 4, u_0 = 8, l_1 = 10$  y  $u_1 = 50$ , tenemos que

$$-2 \leq r \leq -1 \quad \text{y} \quad -20 \leq s \leq -10.$$

**Ejemplo 3.** Consideremos un polinomio de la forma

$$f(x) = -4r - (4s + 30)x + 5x^2 + tx^3 + x^4, \quad (5.29)$$

donde  $r, s$  y  $t$  son parámetros. Entonces, la máxima variación de los parámetros sin perder estabilidad es

$$r \in \left[ -\frac{u_0}{4}, -\frac{l_0}{4} \right], \quad s \in \left[ -\frac{u_1 + 30}{4}, -\frac{l_1 + 30}{4} \right] \quad \text{y} \quad t \in \left( \frac{l_2 - \sqrt{d}}{2u_0}u_1, \frac{l_2 + \sqrt{d}}{2u_0}l_1 \right),$$

donde  $d = l_2^2 - 4u_0u_4 > 0$ . En efecto, aplicando el resultado (5.15) del Teorema 13, vemos que el polinomio (5.29) es estable si y sólo si

$$l_0 \leq -4r \leq u_0, \quad l_1 \leq -(4s + 30) \leq u_1 \quad \text{y} \quad \frac{l_2 - \sqrt{d}}{2u_0}u_1 < l_3 \leq u_3 < \frac{l_2 + \sqrt{d}}{2u_0}l_1, \quad (5.30)$$

donde  $d = l_2^2 - 4u_0u_4 > 0$ . Notamos que  $\alpha_2 = l_2 = u_2 = 5$  y  $\alpha_4 = l_4 = u_4 = 1$ . Eligiendo  $l_0 = 1$ ,  $u_0 = 4$ ,  $l_1 = 4$  y  $u_1 = 8$ , tenemos que

$$-1 \leq r \leq -0.25, \quad -9.5 \leq s \leq -8.5 \quad \text{y} \quad 2 < t \leq 4.$$

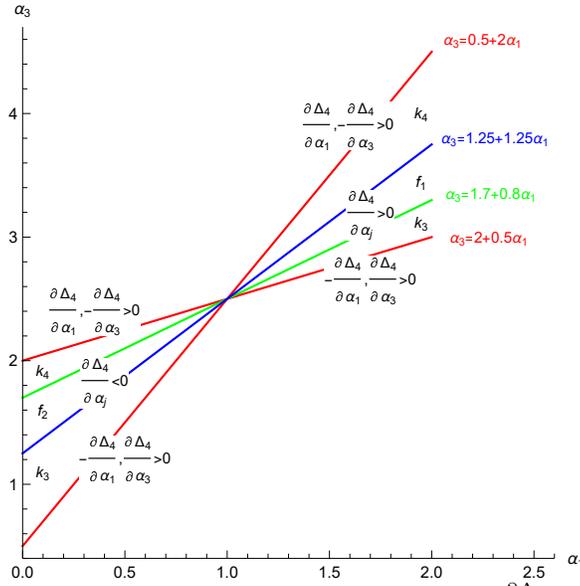


Figura 5.3: Signo de las derivadas parciales  $\frac{\partial \Delta_4}{\partial \alpha_1}$  y  $\frac{\partial \Delta_4}{\partial \alpha_3}$ .

**Ejemplo 4.** En este ejemplo se propone un caso particular de  $\mathfrak{F}_{B_5}$  donde el polinomio extremo no es un polinomio de Kharitonov. Consideremos un polinomio de forma

$$f(\alpha, x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + x^5. \quad (5.31)$$

Es claro que

$$\min_{\alpha \in B_4} \Delta_2(\alpha) = \Delta_2(a^2),$$

donde  $a^2 = (u_0, l_1, l_2, u_3, \alpha_4, 1)$ , y definimos el polinomio

$$f_0(x) = u_0 + l_1 x + l_2 x^2 + u_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + x^5. \quad (5.32)$$

Ahora, vamos a mostrar que el punto  $a^4$  donde el determinante  $\Delta_4$  alcanza su valor mínimo no necesariamente corresponde a los coeficientes de un polinomio de Kharitonov.

Escribiendo

$$\Delta_4(\alpha) = -\alpha_4^2\alpha_1^2 + \alpha_2\alpha_4\alpha_1\alpha_3 - \alpha_0\alpha_4\alpha_3^2 + (2\alpha_0\alpha_4 - \alpha_2^2)\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2\alpha_3 - \alpha_0^2$$

y usando la condición necesaria (5.20), vemos que  $\Delta_4$  es una hipérbola en las variables  $\alpha_1$  y  $\alpha_3$ . Asumiendo que  $\alpha_4 = \alpha_0 = 2$  y  $\alpha_2 = 5$ , tenemos que

$$\Delta_4(\alpha) = \frac{1}{2} \left( \alpha_3 + \alpha_1 - \frac{7}{2} \right)^2 - \frac{9}{2} \left( \alpha_3 - \alpha_1 - \frac{3}{2} \right)^2. \quad (5.33)$$

La Figura 5.3 muestra el signo de las derivadas parciales  $\frac{\partial \Delta_4}{\partial \alpha_1}(\alpha)$  y  $\frac{\partial \Delta_4}{\partial \alpha_3}(\alpha)$ . Las líneas rojas lines acotan la región donde  $\Delta_4(\alpha) > 0$ . Si la caja  $[l_1, u_1] \times [l_3, u_3]$  está dentro de una de las seis regiones triangulares, los símbolos  $f_1, f_2, f_3$  y  $f_4$  indican que en esa región el valor mínimo de  $\Delta_4(\alpha)$  se alcanza en los coeficientes de los polinomios

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2 + l_1x + 5x^2 + l_3x^3 + 2x^4 + x^5, \\ f_2(x) &= 2 + u_1x + 5x^2 + u_3x^3 + 2x^4 + x^5, \\ f_3(x) &= f(k^3, x) = 2 + u_1x + 5x^2 + l_3x^3 + 2x^4 + x^5, \quad \text{y} \\ f_4(x) &= f(k^4, x) = 2 + l_1x + 5x^2 + u_3x^3 + 2x^4 + x^5, \end{aligned} \quad (5.34)$$

respectivamente. Notamos que  $f_1$  y  $f_2$  no son polinomios de Kharitonov, y puesto que  $\alpha_4$  es fijo,  $f_0 = f_4$ . Así, el polinomio extremo es uno de los polinomios dados en (5.34). Para la caja  $l_1 = 2, u_1 = 2.5, l_3 = 1.7 + 0.8u_1$  y  $u_3 = 1.25 + 1.25l_1$ , el polinomio extremo es  $f_1$  porque  $2.5 = \Delta_2(2, l_1, 5, u_3, 2, 1) > \Delta_4(2, l_1, 5, l_3, 2, 1) = 2.24$ .

### 5.5.3. Ejemplo de familia $\mathfrak{F}_{S_n}$

**Ejemplo 5.** Esta es una ilustración de la Proposición 20. Consideremos una bola  $S_3$  con centro  $c = (2, 4, 5, 2)$  y radio  $r = 1$ . La ecuación polinomial de cuarto grado (5.26) tiene dos raíces reales y dos raíces complejas conjugadas. Eligiendo  $\lambda = 3.25169$ , obtenemos que  $\Delta(\alpha^*) = \Delta_2(\alpha_e^*) = 9.27728$ , donde  $\alpha^* = \alpha_e^* = (2.36341, 3.30942, 4.49112, 2.36341)$ . Así, el polinomio extremo que determina la estabilidad de la familia  $\mathfrak{F}_{S_3}$  es  $f(\alpha^*, x) = 2.36341 + 3.30942x + 4.49112x^2 + 2.36341x^3$ .

Para corroborar lo dicho arriba, usamos el Teorema 7 para encontrar el radio  $r$  de la bola de estabilidad más grande con centro en el polinomio  $f(c, x) = 2 + 4x + 5x^2 + 2x^3$ . Aquí,

$$p = 1, f_e(x) = 2 + 5x^2, f_o(x) = 4 + 2x^2, y$$

$$d(\omega) = \sqrt{\frac{(2 - 5\omega^2)^2 + (4 - 2\omega^2)^2}{1 + \omega^4}}, \quad \omega \geq 0.$$

Una gráfica de esta función se muestra en la Figura 5.4. Puesto que  $d_{min} = 2.43845$ , tenemos que el radio  $r$  de la bola de estabilidad más grande con centro  $c$  es

$$r = \min\{c_0, c_3, d_{min}\} = \min\{2, 2.43845, 2\} = 2.$$

Este número concuerda con el resultado previo.

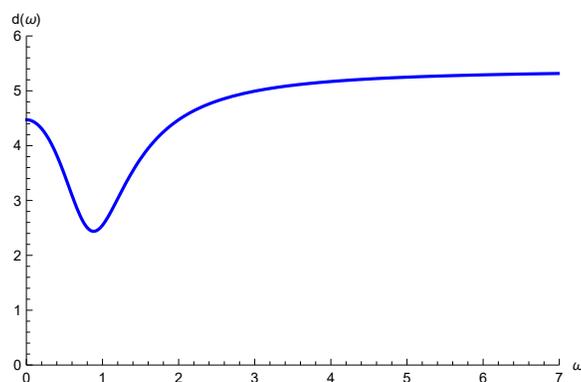


Figura 5.4: La función  $d(\omega)$ .

## 5.6. Conclusiones

En este capítulo se presenta un análisis de robustez para una clase de sistemas cuya ecuación característica es un polinomio de grado  $n$  con coeficientes reales que varían en un conjunto compacto  $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . La evidencia de este estudio indica que la estabilidad de toda la familia  $\mathfrak{F}_A$  puede determinarse por la estabilidad de un solo polinomio extremo  $f(\alpha^*, x)$  cuyos coeficientes corresponden a las coordenadas de un *punto extremo*  $\alpha^* = \alpha_o^*$  o  $\alpha_e^*$ . También, se muestra que este punto  $\alpha^*$  está sobre la frontera de  $A$ . En este caso,  $f(\alpha^*, x)$  se obtiene minimizando determinantes y algunas veces  $\alpha^*$  coincide con los coeficientes de un polinomio de Kharitonov, lo que muestra que se ha encontrado otra propiedad extrema de los polinomios de Kharitonov. La versatilidad del enfoque propuesto permite aplicarlo a *familias de polinomios diamante*  $\mathfrak{F}_{D_n}$  y *familias de polinomios de intervalo*  $\mathfrak{F}_{B_n}$  para  $n \leq 5$ , y a *familias de polinomios bola*  $\mathfrak{F}_{S_3}$ , que tienen a lo más 4 candidatos a ser polinomios

extremos. Debe apuntarse que la estabilidad de la familia  $\mathfrak{F}_{S_n}$  está casi siempre determinada por un número finito de candidatos a ser polinomios extremos. Los resultados confirman que en algunos casos las condiciones necesarias y suficientes para determinar la estabilidad de familias de polinomios encontradas en la literatura pueden ser relajadas o reducidas, ya sea obteniendo un polinomio extremo o satisfaciendo desigualdades simples. También, el estudio puede usarse para obtener la máxima robustez de un polinomio, como se describe en los Ejemplos 1-3. Contrario a lo esperado, para una familia  $\mathfrak{F}_{B_5}$  es posible encontrar un polinomio extremo que no es un polinomio de Kharitonov. Finalmente, si la frontera de la región  $A$  está definida por una función polinomial en las variables  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ , entonces bajo ciertas condiciones la estabilidad de la familia  $\mathfrak{F}_A$  está determinada por un polinomio extremo con un número finito elecciones.

# Capítulo 6

## Estabilidad de Schur para familias de polinomios

### 6.1. Introducción

La estabilidad de Schur está relacionada con sistemas discretos y la estabilidad de Hurwitz con sistemas continuos. Puesto que existe una función biyectiva, como la transformación de Möebius  $w = (z + 1)/(z - 1)$ , que convierte el círculo unitario en el semiplano izquierdo, teóricamente los mismos criterios de estabilidad pueden ser aplicados en ambos casos pero criterios específicos para cada caso son preferidos [38].

En este capítulo se estudia la estabilidad de Schur para familias de polinomios, y mostraremos que la estabilidad de Schur puede abordarse casi de la misma manera como lo hicimos para la estabilidad de Hurwitz en el Capítulo 5.

En ocasiones un análisis de robustez de un sistema lineal discreto (LDS) implica un estudio de estabilidad debido a variaciones paramétricas en un conjunto  $A$ . Esto conduce a un análisis de estabilidad de una familia de polinomios (FOP) denotada por  $\mathfrak{F}_A$ . Algunas de estas familias son la conocida familia de polinomios de intervalo  $\mathfrak{F}_{B_n}$ , donde  $B_n$  es una *caja*  $(n + 1)$ -dimensional y la familia de polinomios de un parámetro denotada por  $\mathfrak{F}_{C_n}$ , donde  $C_n$  es una *curva*  $(n + 1)$ -dimensional. Actualmente, existen varios resultados para garantizar la estabilidad de estas familias. Sin embargo, suelen ser procesos laboriosos, especialmente si la dimensión de  $A$  es grande y desafortunadamente para LDS no existe un resultado análogo al Teorema de Kharitonov para sistemas lineales continuos (LCS). En este artículo se propone un análisis para determinar las condiciones necesarias y suficientes

de estabilidad de Schur en  $\mathfrak{F}_A$ . Probamos la existencia de un *punto extremo*  $\alpha^* \in A$  tal que la estabilidad del correspondiente *polinomio extremo*  $f(\alpha^*, x)$  determina la estabilidad de toda la familia  $\mathfrak{F}_A$ , cuando  $A$  es un conjunto compacto. También se muestra que  $\alpha^*$  no puede ser un punto interior de  $A$ , por lo que  $\alpha^* \in \partial A$ . Para algunas familias  $\mathfrak{F}_{B_n}$  y  $\mathfrak{F}_{C_n}$  encontramos un polinomio extremo o desigualdades simples. Este análisis y algunos ejemplos numéricos dados sugieren que las condiciones obtenidas son una alternativa a los resultados encontrados en la literatura.

## 6.2. Formulación del problema

En esta sección formularemos el problema que vamos a estudiar. Una función de la forma

$$f(\alpha, x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n, \quad (6.1)$$

donde  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  y  $\alpha_n \neq 0$ , se llama *polinomio de grado  $n$  con coeficientes reales*. Se dice que el polinomio (6.1) es *estable* (o *Schur estable*) si todas sus raíces están en el círculo unitario abierto.

Para un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ,

$$\mathfrak{F}_A = \{f(\alpha, x) : \alpha \in A\}$$

es la *familia* de todos los polinomios de la forma (6.1) cuyos coeficientes están en  $A$ . Se dice que familia  $\mathfrak{F}_A$  es *estable* si cada uno de sus elementos es un polinomio estable.

Si  $A = B_n$ , donde  $B_n$  es una *caja*  $(n+1)$ -dimensional de la forma

$$\begin{aligned} B_n &= [l_0, u_0] \times [l_1, u_1] \times \cdots \times [l_n, u_n] \\ &= \{\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : l_j \leq \alpha_j \leq u_j \text{ para } j = 0, 1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

la colección  $\mathfrak{F}_{B_n}$  se llama *familia de polinomios de intervalo* (FOIP). Los conjuntos  $[l_j, u_j]$  representan los intervalos de variación de los coeficientes del polinomio (6.1). Para probar estabilidad de Schur de esta familia el Teorema de Kharitonov no es válido, ver [36] y [19]. Por lo tanto, se suele emplear el siguiente resultado.

Definir las aristas  $E$  del la caja  $B_n$  como

$$E = \bigcup_{k=0}^n E_k,$$

donde  $E_k = \{\alpha \in \mathbb{R}^{n+1} : \alpha_k \in [l_k, u_k] \text{ y } \alpha_j \in \{l_j, u_j\} \text{ para } j = 0, 1, \dots, n, j \neq k\}$ . Por otro lado, sea  $E^*$  el subconjunto de  $E$  llamado de *aristas superiores* obtenido permitiendo que sólo un coeficiente superior varíe a la vez dentro de sus límites del intervalo mientras que todos los demás coeficientes están fijos en sus límites superiores o inferiores. Las correspondientes familias de polinomios de *aristas* y de *aristas superiores* están definidas por

$$\mathfrak{F}_E = \{f(\alpha, x) : \alpha \in E\},$$

y

$$\mathfrak{F}_{E^*} = \{f(\alpha, x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_k x^k + \dots + \alpha_n x^n : \alpha_k = \lambda l_k + (1 - \lambda) u_k, 0 \leq \lambda \leq 1, \text{ y } \alpha_j \in \{l_j, u_j\}, j = 0, \dots, n, j \neq k, k \in N_u\},$$

donde

$$N_u = \begin{cases} \{\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \dots, n\}, & n \text{ par} \\ \{\frac{n+1}{2} + 1, \frac{n+1}{2} + 2, \dots, n\}, & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Para una familia  $\mathfrak{F}_{B_n}$  de grado constante, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 15.** [8] *La familia  $\mathfrak{F}_{B_n}$  es estable si y sólo si la familia de polinomios de aristas  $\mathfrak{F}_E$  o de aristas superiores  $\mathfrak{F}_{E^*}$  es estable.*

Estos son los criterios más conocidos y utilizados para determinar la estabilidad en una (FOIP). Sin embargo, son procedimientos tediosos, especialmente si el número de elementos de  $E$  es grande [42]. Para polinomios de intervalo de grado  $n$ , la familia de polinomios de arista  $\mathfrak{F}_E$  tiene  $(n+1)2^n$  aristas, mientras que la familia de polinomios de aristas superiores  $\mathfrak{F}_{E^*}$  tiene  $(n/2)2^n$  aristas superiores cuando  $n$  es par y  $((n+1)/2)2^n$  aristas superiores cuando  $n$  es impar. Por lo tanto, la estabilidad de una familia de segundo orden  $\mathfrak{F}_{B_2}$  está determinada por 12 aristas de  $\mathfrak{F}_E$  y 4 aristas superiores de  $\mathfrak{F}_{E^*}$ . Mientras que para la familia de sexto orden  $\mathfrak{F}_{B_6}$  la estabilidad requiere el análisis de 448 aristas de  $\mathfrak{F}_E$  y 192 aristas superiores de  $\mathfrak{F}_{E^*}$ , [8]. Por lo tanto, surgen las siguientes preguntas:

- ¿Para un conjunto  $A$ , es posible determinar condiciones necesarias y suficientes que aseguren la estabilidad de toda la familia  $\mathfrak{F}_A$ ?
- ¿Es posible mejorar las condiciones necesarias y suficientes para determinar la estabilidad de  $\mathfrak{F}_{B_n}$ ?

En este capítulo se obtienen condiciones necesarias y suficientes para determinar la estabilidad de Schur de las familias  $\mathfrak{F}_A$ ,  $\mathfrak{F}_{B_n}$  y  $\mathfrak{F}_{C_n}$ , donde  $A$  es un conjunto compacto arbitrario,  $B_n$  es una caja y  $C_n$  es una determinada curva  $(n+1)$ -dimensional, respectivamente. Como resultado de este estudio podemos afirmar lo siguiente:

- Usando el criterio de Schur-Cohn, se demuestra que existe un *punto extremo*  $\alpha^* \in A$  tal que la estabilidad del correspondiente *polinomio extremo*  $f(\alpha^*, x)$  determina la estabilidad de toda la familia  $\mathfrak{F}_A$ , y viceversa. También se demuestra que este *punto extremo*  $\alpha^*$  no está en el interior de  $A$ , por lo que  $\alpha^* \in \partial A$ .
- Los resultados anteriores se utilizan para obtener condiciones necesarias y suficientes en términos de un polinomio extremo o desigualdades simples para determinar la estabilidad de las familias  $\mathfrak{F}_{B_n}$  y  $\mathfrak{F}_{C_n}$ , cuando  $n = 1, 2, 3$ .
- Para ilustrar la efectividad y simplicidad de los resultados obtenidos, se dan algunos ejemplos numéricos para  $\mathfrak{F}_{B_n}$  y  $\mathfrak{F}_{C_n}$ , cuando  $n = 2, 3$ .

## 6.3. Estabilidad de familias de polinomios

En esta sección se presentan los principales resultados. Primero se estudia la estabilidad de  $\mathfrak{F}_A$  para un conjunto compacto arbitrario  $A$  y después este resultado se utiliza para obtener condiciones necesarias y suficientes sobre la estabilidad de las familias  $\mathfrak{F}_{B_n}$  y  $\mathfrak{F}_{C_n}$ .

### 6.3.1. Estabilidad de la familia $\mathfrak{F}_A$

Empezamos con una definición.

**Definición 1.** Si existe un punto  $\alpha^* \in A$  tal que toda la familia  $\mathfrak{F}_A$  es estable si y sólo si el polinomio  $f(\alpha^*, x)$  es estable, entonces decimos que  $f(\alpha^*, x)$  es un *polinomio extremo* para la familia  $\mathfrak{F}_A$ , y llamamos a  $\alpha^*$  un *punto extremo* de  $A$ .

Es claro que los puntos extremos  $\alpha^*$  y sus correspondientes polinomios extremos  $f(\alpha^*, x)$  pueden obtenerse de varias maneras, y en general no tienen que ser únicos. Las condiciones y la complejidad dependerán del criterio de estabilidad utilizado. Nosotros, a continuación, usaremos el criterio de Schur-Cohn para probar la existencia de polinomios extremos.

**Teorema 16** (Criterio de Schur-Cohn, [50]). *El polinomio (6.1) es estable si y sólo si los  $n$  determinantes de tamaño  $2k \times 2k$  dados por*

$$\Delta_k(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-k+1} \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_n & \cdots & \alpha_{n-k+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k-1} & \alpha_{k-2} & \cdots & \alpha_0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_n & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{k-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_n & \cdots & 0 & 0 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_{k-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n-k+1} & \alpha_{n-k+2} & \cdots & \alpha_n & 0 & 0 & \cdots & \alpha_0 \end{vmatrix} \quad (6.2)$$

satisfacen las desigualdades

$$(-1)^k \Delta_k(\alpha) > 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.3)$$

Puesto que los determinantes (6.2) son funciones continuas de  $\alpha$ , si  $A$  es un conjunto compacto, existen  $n$  puntos  $a^1, a^2, \dots, a^n \in A$  tales que

$$(-1)^k \Delta_k(a^k) = \min\{(-1)^k \Delta_k(\alpha) : \alpha \in A\} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.4)$$

**Teorema 17.** *La familia  $\mathfrak{F}_A$  es estable si y sólo si los  $n$  determinantes (6.4) satisfacen las desigualdades  $(-1)^k \Delta_k(a^k) > 0$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ .*

*Demostración.* Supongamos que los mínimos  $(-1)^k \Delta_k(a^k)$  para  $k = 1, 2, \dots, n$  son valores positivos. Entonces, para  $k = 1, 2, \dots, n$  y cada  $\alpha \in A$ , los determinantes  $(-1)^k \Delta_k(\alpha)$  son también valores positivos. Por el criterio de Schur-Cohn, cada polinomio  $f(\alpha, x)$  de la familia  $\mathfrak{F}_A$  es estable, y la familia  $\mathfrak{F}_A$  es estable.

Supongamos ahora que la familia  $\mathfrak{F}_A$  es estable. Entonces, cada uno de sus elementos es un polinomio estable. En particular, los polinomios correspondientes a los puntos en los que se alcanzan los mínimos  $(-1)^k \Delta_k(a^k)$  para  $k = 1, 2, \dots, n$  y, por el criterio de Schur-Cohn, tenemos que  $(-1)^k \Delta_k(a^k) > 0$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ .  $\square$

**Teorema 18.** *Para una familia estable  $\mathfrak{F}_A$ , los valores mínimos (6.4) no se pueden alcanzar en puntos interiores del conjunto  $A$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathfrak{F}_A$  una familia estable y supongamos que  $a^k$  es un punto interior de  $A$ . Puesto que  $a^k \neq 0$ , existe un  $\varepsilon \in (0, 2\|a^k\|)$  tal que  $B_\varepsilon(a^k) \subset A$ , donde  $B_r(p)$  denota la bola euclídeana con centro  $p$  y radio  $r$ .

Ahora tomemos  $\alpha = \lambda a^k$ , donde  $\lambda = 1 - \frac{\varepsilon}{2\|a^k\|}$ . Entonces,  $0 < \lambda < 1$  y

$$\|\alpha - a^k\| = (1 - \lambda)\|a^k\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Por lo tanto,  $\alpha \in B_\varepsilon(a^k)$ . Por la multilinealidad del determinante  $\Delta_k$ , tenemos que

$$(-1)^k \Delta_k(\alpha) = \lambda^{2k} (-1)^k \Delta_k(a^k) < (-1)^k \Delta_k(a^k),$$

lo que contradice la definición de  $a^k$ . Esto prueba el Teorema.  $\square$

Reformulamos ahora el resultado del Teorema 17 como uno en el que aparece la existencia de un polinomio extremo para la familia  $\mathfrak{F}_A$ . Sea

$$\Delta(\alpha) = \min \{(-1)^k \Delta_k(\alpha) : k = 1, 2, \dots, n\}.$$

Puesto que  $\Delta$  es una función continua de  $\alpha$ , existe un punto  $\alpha^* \in A$  tal que

$$\Delta(\alpha^*) = \min \{\Delta(\alpha) : \alpha \in A\}. \quad (6.5)$$

**Teorema 19.** *Sea  $\alpha^* \in A$  que satisface (6.5). Entonces,  $\alpha^* \in \partial A$  y  $f(\alpha^*, x)$  es un polinomio extremo para la familia  $\mathfrak{F}_A$ .*

*Demostración.* Notamos que

$$\Delta(\alpha^*) = \min \{(-1)^k \Delta_k(a^k) : k = 1, 2, \dots, n\}. \quad (6.6)$$

Entonces,  $f(\alpha^*, x)$  es un polinomio estable si y sólo si  $\Delta(\alpha^*) > 0$ . De acuerdo con el Teorema 17,  $f(\alpha^*, x)$  es un polinomio extremo para la familia  $\mathfrak{F}_A$ . Por del Teorema 18 y la ecuación (6.6), tenemos que  $\alpha^*$  es un punto de la frontera del conjunto  $A$ .  $\square$

Por lo tanto, la estabilidad de  $f(\alpha^*, x)$  determina la estabilidad de toda la familia  $\mathfrak{F}_A$ . Aunque encontrar un punto extremo  $\alpha^*$  en (6.5) no es una tarea fácil, podemos usar algunas desigualdades equivalentes a (6.3) para encontrar *otros* puntos extremos y sus correspondientes polinomios extremos. Esto lo precisamos en la siguiente Proposición.

**Proposición 21.** *Sea  $d_k : A \rightarrow \mathbb{R}$  para  $k = 1, 2, \dots, n$  una función continua. Supongamos que cada función  $d_k$  satisface una desigualdad de la forma*

$$(-1)^k \Delta_k(\alpha) > 0 \iff d_k(\alpha) > 0 \text{ para todo } \alpha \in A. \quad (6.7)$$

Definir

$$d(\alpha) = \min \{d_k(\alpha) : k = 1, 2, \dots, n\}. \quad (6.8)$$

Si  $A$  es un conjunto compacto, entonces existe un punto  $\beta^* \in A$  tal que

$$d(\beta^*) = \min \{d(\alpha) : \alpha \in A\}, \quad (6.9)$$

y  $f(\beta^*, x)$  es otro polinomio extremo para la familia  $\mathfrak{F}_A$ .

*Demostración.* De las definiciones de valor mínimo y del Teorema de Weierstrass [51], se deduce que  $\Delta(\alpha^*) > 0$  si y solo si  $d(\beta^*) > 0$ . Por lo tanto,  $\beta^*$  es un punto extremo y  $f(\beta^*, x)$  es otro polinomio extremo para la familia  $\mathfrak{F}_A$ .  $\square$

**Observación.** Notamos que a diferencia de  $\alpha^*$ , el punto extremo  $\beta^*$  no tiene que estar en la frontera de  $A$ .

En cierto sentido, las funciones  $d_k$  sustituyen a los determinantes  $(-1)^k \Delta_k$  y facilitan la obtención de polinomios extremos.

### 6.3.2. Estabilidad de la familia $\mathfrak{F}_{B_n}$

A continuación se obtienen algunos resultados para encontrar polinomios extremos y condiciones de estabilidad necesarias y suficientes un poco más simples para la familia  $\mathfrak{F}_{B_n}$ , donde  $n = 1, 2$  y  $3$ . Pero primero necesitamos dos resultados elementales.

**Proposición 22.** Sean  $l$  y  $u$  números reales con  $l \leq u$ . Entonces,

$$\max_{t \in [l, u]} |t| = \max(|l|, |u|) = \begin{cases} u, & l > 0 \text{ o } l \leq 0 \leq -l \leq u \\ -l, & u < 0 \text{ o } l \leq 0 \leq u \leq -l \end{cases}$$

y

$$\begin{aligned} \text{dist}(0, [l, u]) &= \min_{t \in [l, u]} |t| = \begin{cases} 0, & 0 \in [l, u] \\ \min(|l|, |u|), & 0 \notin [l, u] \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & l \leq 0 \leq u \\ l, & l > 0 \\ -u, & u < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

donde  $\text{dist}(p, S)$  denota la distancia del punto  $p$  al conjunto  $S$ .

*Demostración.* Esto se obtiene de la definición de función de valor absoluto.  $\square$

**Proposición 23.** Sea  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $\varphi(t_1, t_2) = t_2^2 - t_1^2$ , y supongamos que  $B = [l_1, u_1] \times [l_2, u_2]$  con  $0 \notin [l_1, u_1]$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \max_{(t_1, t_2) \in B} \varphi(t_1, t_2) = \varphi(m_1, m_2) < 0 &\iff (l_1 > 0 \text{ y } -l_1 < l_2 \leq u_2 < l_1) \\ &\text{o } (u_1 < 0 \text{ y } u_1 < l_2 \leq u_2 < -u_1) \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\iff \max(|l_2|, |u_2|) < \min(|l_1|, |u_1|),$$

donde

$$m_1 = \begin{cases} l_1, & l_1 > 0 \\ u_1, & u_1 < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad m_2 = \begin{cases} l_2, & u_2 < 0 \text{ o } l_2 \leq 0 \leq u_2 \leq -l_2 \\ u_2, & l_2 > 0 \text{ o } l_2 \leq 0 \leq -l_2 \leq u_2 \end{cases}. \quad (6.11)$$

*Demostración.* Puesto que  $\varphi(t_1, t_2) < 0$  si y sólo si  $(t_1, t_2)$  está en la región

$$H = \{(t_1, t_2) : t_1 < 0, t_1 < t_2 < -t_1\} \cup \{(t_1, t_2) : t_1 > 0, -t_1 < t_2 < t_1\},$$

las desigualdades se obtienen colocando la caja  $B$  dentro de esta región. Ahora, para cada  $t_2$ , la función  $\varphi(\cdot, t_2)$  es una parábola que abre hacia abajo, y para cada  $t_1$ , la función  $\varphi(t_1, \cdot)$  es una parábola que abre hacia arriba. La igualdad se obtiene examinando todas las posiciones posibles de la caja  $B$  dentro de  $H$ .  $\square$

**Observación.** Notamos que la hipótesis de que  $0 \notin [l_1, u_1]$  en la Proposición 23 es una condición que se requiere para que el número  $\varphi(m_1, m_2)$  sea negativo.

Aplicamos ahora los resultados anteriores para obtener algunos polinomios extremos.

**Teorema 20.** Supongamos que  $0 \notin [l_1, u_1]$ . Entonces, la familia

$$\mathfrak{F}_{B_1} = \{f(\alpha, x) = \alpha_0 + \alpha_1 x : \alpha_j \in [l_j, u_j], j = 0, 1\} \quad (6.12)$$

es estable si y sólo si

$$[l_0, u_0] \subset \begin{cases} [-l_1, l_1], & l_1 > 0 \\ [u_1, -u_1], & u_1 < 0 \end{cases}. \quad (6.13)$$

*Demostración.* Aquí,  $B_1 = [l_0, u_0] \times [l_1, u_1]$ . El polinomio

$$f(\alpha, x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$$

es estable si y sólo si

$$\Delta_1(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 \end{vmatrix} = \alpha_0^2 - \alpha_1^2 < 0 \iff |\alpha_1| - |\alpha_0| > 0. \quad (6.14)$$

De la ecuación (6.10), tenemos que

$$\begin{aligned} \min_{\alpha \in A_1} \{-\Delta_1(\alpha)\} &> 0 \\ \iff (l_1 > 0 \text{ y } -l_1 < l_0 \leq u_0 < l_1) \text{ o } (u_1 < 0 \text{ y } u_1 < l_0 \leq u_0 < -u_1), \end{aligned}$$

que es lo mismo que (6.13).  $\square$

**Proposición 24.** *Supongamos (6.13). Entonces, un polinomio extremo para la familia  $\mathfrak{F}_{B_1}$  dada en (6.12) es  $f(\alpha^*, x) = \alpha_0^* + \alpha_1^* x$ , donde el punto extremo  $\alpha^* = (\alpha_0^*, \alpha_1^*) \in \partial B_1$  está dado por*

$$\alpha_0^* = \begin{cases} u_0, & l_0 > 0 \text{ o } l_0 \leq 0 \leq -l_0 \leq u_0 \\ l_0, & u_0 < 0 \text{ o } l_0 \leq 0 \leq u_0 \leq -l_0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \alpha_1^* = \begin{cases} l_1, & l_1 > 0 \\ u_1, & u_1 < 0 \end{cases}.$$

*Demostración.* Esto se sigue de la ecuación (6.11).  $\square$

**Observación.** Este resultado proporciona un polinomio extremo explícito. Notamos que los puntos extremos  $(l_0, l_1)$ ,  $(l_0, u_1)$ ,  $(u_0, l_1)$  y  $(u_0, u_1)$  corresponden a los coeficientes de los polinomios de Kharitonov. Por lo tanto, el teorema de Kharitonov se cumple en este caso, como lo señala Cieslik [19].

**Teorema 21.** *Supongamos que  $0 \notin [l_2, u_2]$  y  $0 \notin [l_0 + l_2, u_0 + u_2]$ . Entonces, la familia*

$$\mathfrak{F}_{B_2} = \{f(\alpha, x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 : \alpha_j \in [l_j, u_j], j = 0, 1, 2\} \quad (6.15)$$

es estable si y sólo si

$$\begin{aligned} \min_{\alpha \in A_2} \{-\Delta_1(\alpha)\} > 0 &\iff \max(|l_0|, |u_0|) < \min(|l_2|, |u_2|) \\ &\iff (l_2 > 0 \text{ y } -l_2 < l_0 \leq u_0 < l_2) \\ &\quad \text{o} \quad (u_2 < 0 \text{ y } u_2 < l_0 \leq u_0 < -u_2), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \min_{\alpha \in A_2} \Delta_2(\alpha) > 0 &\iff \max(|l_1|, |u_1|) < \min(|l_0 + l_2|, |u_0 + u_2|) \\ &\iff (l_0 + l_2 > 0 \text{ y } -l_0 - l_2 < l_1 \leq u_1 < l_0 + l_2) \\ &\quad \text{o } (u_0 + u_2 < 0 \text{ y } u_0 + u_2 < l_1 \leq u_1 < -u_0 - u_2). \end{aligned}$$

*Demostración.* El polinomio

$$f(\alpha, x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

es estable si y sólo si

$$\Delta_1(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_0 \end{vmatrix} = \alpha_0^2 - \alpha_2^2 < 0, \quad (6.16)$$

y

$$\begin{aligned} \Delta_2(\alpha) &= \begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & \alpha_0 \end{vmatrix} \\ &= (\alpha_0 - \alpha_2)^2 [(\alpha_0 + \alpha_2)^2 - \alpha_1^2] > 0 \iff \alpha_1^2 - (\alpha_0 + \alpha_2)^2 < 0. \end{aligned} \quad (6.17)$$

De la Proposición 23, tenemos que

$$\min_{\alpha \in A_2} \{-\Delta_1(\alpha)\} > 0 \iff \max(|l_0|, |u_0|) < \min(|l_2|, |u_2|)$$

y

$$\min_{\alpha \in A_2} \Delta_2(\alpha) > 0 \iff \max(|l_1|, |u_1|) < \min(|l_0 + l_2|, |u_0 + u_2|).$$

Por lo tanto, el resultado es válido.  $\square$

**Proposición 25.** *Supongamos que  $l_0, l_2 > 0$ . Sean*

$$\begin{aligned} d_1(\alpha) &= |\alpha_2| - |\alpha_0|, & \text{y} \\ d_2(\alpha) &= |\alpha_0 + \alpha_2| - |\alpha_1|. \end{aligned} \quad (6.18)$$

*Entonces, un polinomio extremo para la familia  $\mathfrak{F}_{B_2}$  dada en (6.15) es  $f(\beta^*, x)$ , donde*

$$\beta^* = \arg \min \{d_1(u_0, \alpha_1, l_2), d_2(l_0, l_1, l_2), d_2(l_0, u_1, l_2)\}. \quad (6.19)$$

*Demostración.* De las ecuaciones (6.16)-(6.17), tenemos que

$$\begin{aligned} -\Delta_1(\alpha) > 0 &\iff d_1(\alpha) > 0, & \text{y} \\ \Delta_2(\alpha) > 0 &\iff d_2(\alpha) > 0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

para todo  $\alpha \in B_2$ . Como el rectángulo  $[l_2, u_2] \times [l_0, u_0]$  está dentro de la región  $0 < \alpha_0 < \alpha_2$ , y el rectángulo  $[l_0 + l_2, u_0 + u_2] \times [l_1, u_1]$  está dentro de la región  $-s < \alpha_1 < s$ , donde  $s = \alpha_0 + \alpha_2 > 0$ , de las Proposiciones 21 y 23, obtenemos (6.19).  $\square$

**Teorema 22.** *Supongamos que  $0 \notin [l_3, u_3]$  y  $0 \notin [l_1 + l_3, u_1 + u_3]$ . Entonces, la familia*

$$\mathfrak{F}_{B_3} = \{f(\alpha, x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 : \alpha_j \in [l_j, u_j], j = 0, 1, 2, 3\} \quad (6.21)$$

*es estable si y sólo si*

$$\min_{\alpha \in A_3} \{-\Delta_1(\alpha)\} > 0 \iff \max(|l_0|, |u_0|) < \min(|l_3|, |u_3|), \quad (6.22)$$

$$\min_{\alpha \in A_3} \Delta_2(\alpha) > 0, \quad (6.23)$$

y

$$\begin{aligned} \min_{\alpha \in A_3} \{-\Delta_3(\alpha)\} &> 0 \\ \iff \max(|l_0 + l_2|, |u_0 + u_2|) &< \min(|l_1 + l_3|, |u_1 + u_3|). \end{aligned} \quad (6.24)$$

*Demostración.* El polinomio

$$f(\alpha, x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

es estable si y sólo si

$$\begin{aligned} -\Delta_1(\alpha) &= - \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_0 \end{vmatrix} = \alpha_3^2 - \alpha_0^2 > 0, \\ \Delta_2(\alpha) &> 0, \end{aligned} \quad (6.25)$$

y

$$\begin{aligned} -\Delta_3(\alpha) &= - \begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_0 \end{vmatrix} \\ &= (\alpha_3^2 - \alpha_0^2 + \alpha_0 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_3)^2 [(\alpha_1 + \alpha_3)^2 - (\alpha_0 + \alpha_2)^2] > 0 \\ \iff (\alpha_0 + \alpha_2)^2 - (\alpha_1 + \alpha_3)^2 &< 0. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Las desigualdades (6.22)-(6.24) se siguen del Teorema 17 y la Proposición 23.  $\square$

**Observación.** Para obtener algunas desigualdades útiles para el determinante

$$\Delta_2(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \alpha_0 \end{vmatrix} = (\alpha_3^2 - \alpha_0^2)^2 - (\alpha_1\alpha_3 - \alpha_0\alpha_2)^2, \quad (6.27)$$

vamos a hacer algunas suposiciones.

**Lema 5.** Sean  $r(t) = \frac{1}{2}\sqrt{4t^2 - 4u_1t + u_2^2}$ ,  $s(t) = \frac{1}{2}\sqrt{4t^2 + 4u_1t + u_2^2}$  y  $a = \frac{1}{2}\sqrt{u_1^2 - u_2^2}$ .

(i) Si  $0 < l_0 \leq u_0 < l_3$  y  $u_1 = -l_1 = u_2 = -l_2$ , entonces

$$\min_{\alpha \in A_3} \Delta_2(\alpha) > 0 \iff l_3 > u_0 + u_1.$$

(ii) Si  $u_3 < l_0 \leq u_0 < 0$  y  $u_1 = -l_1 = u_2 = -l_2$ , entonces

$$\min_{\alpha \in A_3} \Delta_2(\alpha) > 0 \iff u_1 + u_3 < l_0.$$

(iii) Si  $0 < l_0 \leq u_0 < l_3$  y  $u_1 = -l_1 > u_2 = -l_2 > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \min_{\alpha \in A_3} \Delta_2(\alpha) > 0 &\iff \left[ u_3 < \frac{u_1}{2} - a \text{ y } -\frac{u_2}{2} - r(u_3) < l_0 \leq u_0 < -\frac{u_2}{2} + r(u_3) \right] \\ &\text{o } \left[ \frac{u_1}{2} + a < l_3 \text{ y } -\frac{u_2}{2} - r(l_3) < l_0 \leq u_0 < -\frac{u_2}{2} + r(l_3) \right]. \end{aligned}$$

(iv) Si  $u_3 < l_0 \leq u_0 < 0$  y  $u_1 = -l_1 > u_2 = -l_2 > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \min_{\alpha \in A_3} \Delta_2(\alpha) > 0 &\iff \left[ u_3 < -\frac{u_1}{2} - a \text{ y } \frac{u_2}{2} - s(u_3) < l_0 \leq u_0 < \frac{u_2}{2} + s(u_3) \right] \\ &\text{o } \left[ -\frac{u_1}{2} + a < l_3 \text{ y } \frac{u_2}{2} - s(l_3) < l_0 \leq u_0 < \frac{u_2}{2} + s(l_3) \right]. \end{aligned}$$

*Demostración.* Probamos la parte (i). Una prueba de la parte (ii) es similar. De la Proposición 23, tenemos que

$$0 < l_0 \leq u_0 < l_3 \iff -\Delta_1(\alpha), \alpha_0, \alpha_3 > 0 \text{ para todo } \alpha \in A_3. \quad (6.28)$$

Suponer (6.28). De (6.27), tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta_2(\alpha) > 0 &\iff |\alpha_1\alpha_3 - \alpha_0\alpha_2| < \alpha_3^2 - \alpha_0^2 \\
&\iff -(\alpha_3^2 - \alpha_0^2) < \alpha_1\alpha_3 - \alpha_0\alpha_2 < \alpha_3^2 - \alpha_0^2 \\
&\iff \frac{\alpha_0}{\alpha_3}\alpha_2 - \frac{\alpha_3^2 - \alpha_0^2}{\alpha_3} < \alpha_1 < \frac{\alpha_0}{\alpha_3}\alpha_2 + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_0^2}{\alpha_3}.
\end{aligned} \tag{6.29}$$

La desigualdad (6.29) es válida para todo  $\alpha_j \in [l_j, u_j]$  con  $j = 1, 2$  si y sólo si

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_3}u_2 - \frac{\alpha_3^2 - \alpha_0^2}{\alpha_3} < l_1 \leq u_1 < \frac{\alpha_0}{\alpha_3}l_2 + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_0^2}{\alpha_3}. \tag{6.30}$$

Si además asumimos que  $u_1 = -l_1 = u_2 = -l_2$ , obtenemos la única desigualdad

$$\alpha_3^2 - \alpha_0^2 - u_1\alpha_3 - u_1\alpha_0 > 0 \quad \text{o} \quad \alpha_3 > \alpha_0 + u_1,$$

que es válida para todo  $\alpha_i \in [l_i, u_i]$  con  $i = 0, 3$  si y sólo si  $l_3 > u_0 + u_1$ . De esta manera obtenemos (i).

Ahora demostramos la parte (iii). Una prueba de la parte (iv) es similar. Supongamos que  $u_1 = -l_1 > u_2 = -l_2 > 0$ . De (6.30), obtenemos la única desigualdad

$$\alpha_3^2 - \alpha_0^2 - u_1\alpha_3 - u_2\alpha_0 > 0 \quad \text{o} \quad \left(\alpha_3 - \frac{u_1}{2}\right)^2 - \left(\alpha_0 + \frac{u_2}{2}\right)^2 > \frac{u_1^2}{4} - \frac{u_2^2}{4}. \tag{6.31}$$

Cambiando la desigualdad en (6.31) por una igualdad y resolviendo la ecuación resultante para  $\alpha_0$ , obtenemos la hipérbola

$$\alpha_0 = -\frac{u_2}{2} \pm \sqrt{\alpha_3^2 - u_1\alpha_3 + \frac{u_2^2}{4}} = -\frac{u_2}{2} \pm r(\alpha_3), \tag{6.32}$$

con vértices  $(\frac{u_1}{2} \pm a, -\frac{u_2}{2})$ . Poniendo la caja  $[l_0, u_0] \times [l_3, u_3]$  dentro de la hipérbola (6.32), obtenemos (iii).  $\square$

### 6.3.3. Estabilidad de la familia $\mathfrak{F}_{C_n}$

A continuación definimos una clase particular de FOP, cuyo conjunto paramétrico  $A$  es una curva.

Para un vector fijo  $c = (c_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , definimos el conjunto

$$C_n = \{\alpha \in \mathbb{R}^{n+1} : \alpha = (c_0 + t, c_1 + t, \dots, c_n + t), t \in \mathbb{R}\}.$$

La correspondiente familia se llama *familia de polinomios de un parámetro* y, de acuerdo con nuestra notación, se denota por

$$\mathfrak{F}_{C_n} = \{f(\alpha, x) : \alpha \in C_n\}.$$

**Proposición 26.** *Sea*

$$\mathfrak{F}_{C_1} = \{f(\alpha, x) = (c_0 + t) + (c_1 + t)x : t \in \mathbb{R}\} \quad (6.33)$$

una familia de polinomios de un parámetro. Si  $c_1 > c_0$  y  $t \in [t_0, t_1]$  con  $t_0 > -\frac{c_1+c_0}{2}$ , entonces un polinomio extremo para la familia  $\mathfrak{F}_{C_1}$  es  $f(\beta^*, x)$ , donde  $\beta^* = (c_0 + t_0, c_1 + t_0)$ . Si  $c_1 < c_0$  y  $t \in [t_0, t_1]$  con  $t_1 < -\frac{c_1+c_0}{2}$ , entonces un polinomio extremo para la familia  $\mathfrak{F}_{C_1}$  es  $f(\beta^*, x)$ , donde  $\beta^* = (c_0 + t_1, c_1 + t_1)$ .

*Demostración.* Sea

$$d_1(\alpha) = |\alpha_1| - |\alpha_0|.$$

De la ecuación (6.14), obtenemos la desigualdad equivalente

$$-\Delta_1(\alpha) > 0 \iff d_1(\alpha) > 0. \quad (6.34)$$

Sustituyendo los coeficientes  $\alpha = (c_0 + t, c_1 + t)$  en la función  $d_1$ , obtenemos que

$$d_1(t) = |c_1 + t| - |c_0 + t|.$$

Resolviendo la desigualdad (6.34), se determina la estabilidad de la familia  $\mathfrak{F}_{C_1}$ . Usando la Proposición 21, se encuentra un polinomio extremo.  $\square$

**Proposición 27.** *Sea*

$$\mathfrak{F}_{C_2} = \{f(\alpha, x) = (c_0 + t) + (c_1 + t)x + (c_2 + t)x^2 : t \in \mathbb{R}\} \quad (6.35)$$

una familia de polinomios de un parámetro. Entonces, resolviendo el sistema de desigualdades lineales

$$\begin{aligned} |c_2 + t| - |c_0 + t| &> 0, & y \\ |2t + c_0 + c_2| - |c_1 + t| &> 0, \end{aligned} \quad (6.36)$$

se puede determinar la estabilidad de la familia  $\mathfrak{F}_{C_2}$  y se puede encontrar un polinomio extremo  $f(\beta^*, x)$ .

*Demostración.* Sustituyendo los coeficientes  $\alpha = (c_0 + t, c_1 + t, c_2 + t)$  en las funciones  $d_1$  y  $d_2$  dadas en (6.18), obtenemos que

$$\begin{aligned} d_1(t) &= |c_2 + t| - |c_0 + t|, \quad y \\ d_2(t) &= |2t + c_0 + c_2| - |c_1 + t|, \end{aligned}$$

lo que convierte (6.20) en las desigualdades lineales (6.36). Resolviendo estas desigualdades, se puede determinar la estabilidad de la familia  $\mathfrak{F}_{C_2}$  y mediante la Proposición 21, se puede encontrar un polinomio extremo.  $\square$

**Proposición 28.** *Sea*

$$\mathfrak{F}_{C_3} = \{f(\alpha, x) = (c_0 + t) + (c_1 + t)x + (c_2 + t)x^2 + (c_3 + t)x^3 : t \in \mathbb{R}\} \quad (6.37)$$

*una familia de polinomios de un parámetro. Entonces, resolviendo el sistema de desigualdades lineales*

$$\begin{aligned} |c_3 + t| - |c_0 + t| &> 0 \\ |2(c_3 - c_0)t + c_3^2 - c_0^2| - |(c_0 + c_2 - c_1 - c_3)t + c_0c_2 - c_1c_3| &> 0, \quad y \\ |2t + c_1 + c_3| - |2t + c_0 + c_2| &> 0, \end{aligned}$$

*la estabilidad de la familia  $\mathfrak{F}_{C_3}$  se puede determinar y se puede encontrar un polinomio extremo  $f(\beta^*, x)$ .*

*Demostración.* Sean

$$\begin{aligned} d_1(\alpha) &= |\alpha_3| - |\alpha_0|, \\ d_2(\alpha) &= |\alpha_3^2 - \alpha_0^2| - |\alpha_1\alpha_3 - \alpha_0\alpha_2|, \quad y \\ d_3(\alpha) &= |\alpha_1 + \alpha_3| - |\alpha_0 + \alpha_2|. \end{aligned}$$

De las ecuaciones (6.25)-(6.27), obtenemos las desigualdades equivalentes

$$\begin{aligned} -\Delta_1(\alpha) > 0 &\iff d_1(\alpha) > 0, \\ \Delta_2(\alpha) > 0 &\iff d_2(\alpha) > 0, \quad y \\ -\Delta_3(\alpha) > 0 &\iff d_3(\alpha) > 0 \end{aligned} \quad (6.38)$$

para todo  $\alpha \in B_3$ . Sustituyendo los coeficientes  $\alpha = (c_0 + t, c_1 + t, c_2 + t, c_3 + t)$  en las funciones  $d_j$  para  $j = 1, 2, 3$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} d_1(t) &= |c_3 + t| - |c_0 + t| \\ d_2(t) &= |2(c_3 - c_0)t + c_3^2 - c_0^2| - |(c_0 + c_2 - c_1 - c_3)t + c_0c_2 - c_1c_3|, \quad y \\ d_3(t) &= |2t + c_1 + c_3| - |2t + c_0 + c_2|, \end{aligned}$$

lo que convierte (6.38) en desigualdades lineales. Resolviendo estas desigualdades se puede determinar la estabilidad de la familia  $\mathfrak{F}_{C_3}$  y, mediante la Proposición 21, se puede encontrar un polinomio extremo.  $\square$

## 6.4. Ejemplos numéricos

En esta sección se presentan algunos ejemplos que corroboran la efectividad y simplicidad de los resultados teóricos propuestos. Los resultados de estos ejemplos sugieren que la nueva propuesta es una alternativa a los resultados encontrados en la literatura.

### 6.4.1. Sobre la estabilidad de $\mathfrak{F}_{B_2}$ y $\mathfrak{F}_{C_2}$

A continuación, la estabilidad de las familias  $\mathfrak{F}_{B_2}$  y  $\mathfrak{F}_{C_2}$  se determina usando el Teorema 21 y la Proposición 27.

**Ejemplo 1.** Como dijimos anteriormente, usando el Teorema 15, la estabilidad de una familia de segundo orden  $\mathfrak{F}_{B_2}$  está determinada por la estabilidad de 12 aristas de  $\mathfrak{F}_E$  y 4 aristas superiores de  $\mathfrak{F}_{E^*}$ , respectivamente. Ahora, aplicamos los resultados propuestos al Ejemplo 5.11, p. 261, de Bhattacharyya [8], para mostrar su efectividad y simplicidad.

Consideremos la familia  $\mathfrak{F}_{B_2}$ ,

$$f(\alpha, x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2, \quad (6.39)$$

donde  $\alpha_0 \in [l_0, u_0] = [0.2, 0.8]$ ,  $\alpha_1 \in [l_1, u_1] = [-0.1, 0.25]$  y  $\alpha_2 \in [l_2, u_2] = [2.5, 4]$ . Puesto que

$$\max(|l_0|, |u_0|) = 0.8 < 2.5 = \min(|l_2|, |u_2|)$$

y

$$\max(|l_1|, |u_1|) = 0.25 < 2.7 = \min(|l_0 + l_2|, |u_0 + u_2|),$$

por el Teorema 21, la familia de polinomios de intervalo (6.39) es estable.

Por otro lado, usando la Proposición 25 y debido a que  $d_1(u_0, \alpha_1, l_2) = 1.7$ ,  $d_2(l_0, l_1, l_2) = 2.6$  y  $d_2(l_0, u_1, l_2) = 2.45$ , tenemos que un polinomio extremo es

$$f(\beta^*, x) = 0.8 + 2.5x^2, \quad (6.40)$$

donde  $\beta^* = (u_0, 0, l_2)$ . Por lo tanto, la familia (6.39) es estable si y sólo si el polinomio extremo (6.40) es estable.

**Ejemplo 2.** Consideremos la familia de un parámetro

$$\tilde{\mathfrak{F}}_{C_2} = \{f(\alpha, x) = (-1 + t) + (-2 + t)x + (2 + t)x^2 : t \in I\},$$

donde  $I$  es un intervalo,  $c = (-1, -2, 2)$  y  $\alpha = (-1 + t, -2 + t, 2 + t)$  para  $t \in I$ . Por la Proposición 27, tenemos

$$\begin{aligned} d_1(t) &= |2 + t| - |t - 1|, & y \\ d_2(t) &= |2t + 1| - |t - 2|. \end{aligned}$$

La figura 6.1 muestra el comportamiento de las funciones  $d_1$  y  $d_2$ . Resolviendo el sistema  $d_1(t) > 0$  y  $d_2(t) > 0$ , encontramos que la familia  $\tilde{\mathfrak{F}}_{C_2}$  es estable para cualquier intervalo de la forma  $I = [t_0, t_1]$  con  $t_0 > \frac{1}{3}$ . Para el intervalo  $I = [\frac{1}{2}, \frac{4}{3}]$ , el polinomio extremo es  $f(\beta^*, x) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}x^2$ , donde  $\beta^* = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ ; y para el intervalo  $I = [2, 4]$ , un polinomio extremo es  $f(\beta^*, x) = 1 + 4x^2$ , donde  $\beta^* = (1, 0, 4)$ .

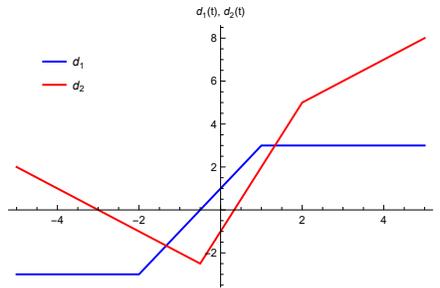


Figura 6.1: Gráfica de las funciones  $d_1$  y  $d_2$ .

### 6.4.2. Sobre la estabilidad de $\tilde{\mathfrak{F}}_{B_3}$ y $\tilde{\mathfrak{F}}_{C_3}$

La simplicidad y eficiencia de los resultados mostrados en el ejemplo anterior también se pueden apreciar en familias de orden superior y con algunas características particulares, como se observa a continuación.

**Ejemplo 3.** Consideremos el polinomio estable

$$f(x) = -0.2 + 0.1x + 0.2x^2 - x^3. \quad (6.41)$$

Aquí,  $\alpha_3 = l_3 = u_3 = -1 < 0$  y suponemos que  $u_1 = -l_1 = u_2 = -l_2 > 0$ . Por el Teorema 22 y la parte (ii) del Lema 5, vemos que el polinomio (6.41) sigue siendo estable si sus coeficientes  $\alpha_0, \alpha_1$  y  $\alpha_2$  varían de tal manera que

$$\begin{aligned} -1 < l_0 \leq u_0 < 0, \\ u_1 + u_3 < l_0, \quad y \\ \text{máx}(|l_0 + l_2|, |u_0 - l_2|) < \text{mín}(|l_1 + 1|, |-l_1 + 1|). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Eligiendo  $l_0 = -0.3, u_0 = -0.1$  y  $u_1 = 0.3$ , se satisfacen las desigualdades (6.42). Por lo tanto, toda la familia  $\mathfrak{F}_{B_3}$  de los polinomios de intervalo (6.41) es estable si y sólo si

$$\alpha_0 \in [l_0, u_0] = [-0.3, -0.1] \quad y \quad \alpha_1 \in [l_1, u_1] = [-0.3, 0.3] = [l_2, u_2] \ni \alpha_2.$$

**Ejemplo 4.** Considere la familia de polinomios del Ejercicio 512, p. 266, en [8],

$$f(\alpha, x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3,$$

donde  $\alpha_0 \in [\frac{3}{16} - \varepsilon, \frac{3}{16} + \varepsilon], \alpha_1 \in [-\frac{3}{4} - \varepsilon, -\frac{3}{4} + \varepsilon], \alpha_2 \in [-\frac{1}{4} - \varepsilon, -\frac{1}{4} + \varepsilon]$  y  $\alpha_3 \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$  con  $\varepsilon > 0$ . Haciendo un cambio de variable, esta familia puede escribirse como

$$\mathfrak{F}_{C_3} = \{f(\alpha, x) = (3 + t) + (-12 + t)x + (-4 + t)x^2 + (16 + t)x^3, t \in I\}, \quad (6.43)$$

donde  $I = [-16\varepsilon, 16\varepsilon]$  y  $\alpha = (3 + t, -12 + t, -4 + t, 16 + t)$ . Usando la Proposición 28, tenemos que

$$\begin{aligned} d_1(t) = |t + 16| - |t + 3| > 0 & \iff t > -\frac{19}{2}, \\ d_2(t) = |247 + 26t| - |180 - 5t| > 0 & \iff t < -\frac{61}{3} \quad \text{o} \quad t > -\frac{67}{31}, \quad y \\ d_3(t) = |2t + 4| - |2t - 1| > 0 & \iff t > -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la familia  $\mathfrak{F}_{C_3}$  es estable para cualquier intervalo de la forma  $I = [t_0, t_1]$ , donde  $t_1 > t_0 > -\frac{3}{4}$ , y en este caso el polinomio extremo es  $f(\beta^*, x)$ , donde  $\beta^* = (3 + t_0, -12 + t_0, -4 + t_0, 16 + t_0)$ . La figura 6.2 muestra el comportamiento de las funciones  $d_1, d_2$  y  $d_3$ . La familia  $\mathfrak{F}_{C_3}$  es estable para cualquier  $\varepsilon < \frac{3}{64}$ .

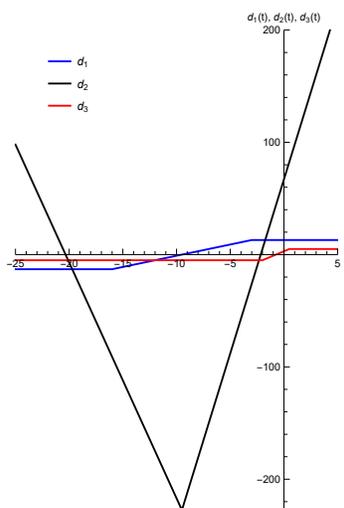


Figura 6.2: Gráfica de las funciones  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$ .

**Observación.** Notamos que si  $t_0 \geq \frac{1}{2}$ , entonces el polinomio extremo no es único. También notamos que la familia (6.43) es más general que la dada en [8].

## 6.5. Conclusiones

En este capítulo se realiza un análisis para obtener condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de Schur de una familia de polinomios  $\mathfrak{F}_A$ , donde  $A$  es un conjunto compacto, usando el criterio de Schur-Cohn. Este análisis proporciona la existencia de un *punto extremo*  $\alpha^* \in \partial A$  tal que la estabilidad del correspondiente *polinomio extremo*  $f(\alpha^*, x)$  determina la estabilidad de toda la familia  $\mathfrak{F}_A$ , y viceversa. Estos resultados se utilizan para determinar la estabilidad de las familias  $\mathfrak{F}_{B_n}$  y  $\mathfrak{F}_{C_n}$  en términos de desigualdades o la existencia de un *polinomio extremo*. Notamos que en algunos casos el *punto extremo* corresponde a los coeficientes de un polinomio de Kharitonov, es decir, a un vértice de la caja  $B_n$ . Como se mencionó anteriormente, este *punto extremo* parece que puede obtenerse de varias maneras y la dificultad de encontrarlo depende del criterio de estabilidad de Schur que se emplee. Los resultados obtenidos sugieren que las condiciones propuestas son un poco menos complicadas que las encontradas en la literatura. Además, estos resultados pueden ser modificados y adaptados a otras familias de polinomios.



# Capítulo 7

## Implementación de resultados: fragilidad, desempeño y robustez

En este capítulo se describe la implementación de los resultados de fragilidad, desempeño y robustez obtenidos en capítulos anteriores para un Robot Móvil Omnidireccional (OMR).

### 7.1. Cinemática del OMR

El modelo matemático del OMR de la Figura 7.1

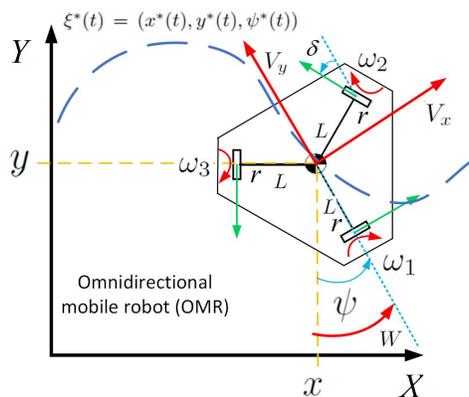


Figura 7.1: Notación para el OMR.

es de la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}}_{\dot{\xi}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}(\psi)} \underbrace{\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ W \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}, \quad (7.1)$$

donde  $(x, y)$  representa la posición del robot en el plano,  $\psi$  es el ángulo de orientación del robot, y  $V_x$ ,  $V_y$  y  $W$  son las velocidades longitudinal, lateral y angular, respectivamente [15, 82]. El término  $\mathbf{R}(\psi)$  representa la matriz de rotación alrededor del eje  $Z$  y  $\mathbf{U}$  es el vector de control.

Para implementar un control, se transforman las velocidades traslacionales  $\mathbf{U}$  del robot en velocidades angulares  $\mathbf{\Omega}$  de las ruedas del OMR:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Omega}} = \frac{1}{r} \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin(\delta) & \cos(\delta) & L \\ -\sin(\delta) & -\cos(\delta) & L \\ 1 & 0 & L \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}(\delta)} \underbrace{\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ W \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}}, \quad (7.2)$$

donde  $L$  es la distancia desde cualquier rueda al centro de masa del robot,  $r$  es el radio de la rueda y  $\delta = \frac{\pi}{6}$ . Resolviendo (7.2) para  $\mathbf{U}$  y sustituyendo en (7.1), obtenemos que

$$\dot{\xi} = r\mathbf{R}(\psi)\mathbf{R}(\delta)^{-1}\mathbf{\Omega}. \quad (7.3)$$

Para este sistema, se propone el control retardado

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{R}(\delta)\mathbf{R}(\psi)^{-1} \left[ \frac{1}{r}\dot{\xi}^* + \mathbf{K}_r\mathbf{e}_\xi(t - \tau) \right], \quad (7.4)$$

donde  $\tau \in \mathbb{R}^+$  es el retardo y  $\mathbf{K}_r = k_r\mathbf{I}_3$ , con  $k_r \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{I}_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz identidad. El error  $\mathbf{e}_\xi$  está definido como  $\mathbf{e}_\xi(t) = \xi(t) - \xi^*(t)$ , donde  $\xi^*(t)$  es el vector deseado de posición y orientación del robot. La dinámica del error del sistema a lazo cerrado usando (7.4) en (7.3) es

$$\dot{\xi}(t) = \dot{\xi}^*(t) + r\mathbf{K}_r\mathbf{e}_\xi(t - \tau)$$

o

$$a\dot{\mathbf{e}}_\xi(t) + \mathbf{K}_r\mathbf{e}_\xi(t - \tau) = \mathbf{0}, \quad (7.5)$$

donde  $a = 1/r$ . La ecuación característica de la dinámica del error es

$$\det(a s \mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_r e^{-\tau s}) = [q(a, k, s)]^3 = 0,$$

donde el cuasi-polinomio  $q$  está definido por

$$q(a, k, s) = a s + k_r e^{-\tau s}. \quad (7.6)$$

La constante  $a \in A \subset \mathbb{R}^+$  es un *parámetro* del proceso y  $k = (\tau, k_r) \in K \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  denota las *ganancias* del controlador.

## 7.2. Notación para fragilidad, desempeño y robustez

Debido a que vamos a encontrar los parámetros de menor fragilidad, mejor desempeño y mayor robustez para el cuasi-polinomio (7.6), usaremos la siguiente notación que es consistente con la introducida en los capítulos anteriores.

Para  $a \in A$  fijo y  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $\Gamma_{a,\sigma}$  denota el conjunto de todas las ganancias  $k \in K$  tales que (7.6) tiene al menos una raíz sobre la recta vertical  $\text{Re}(s) = \sigma$  del plano complejo, esto es

$$\Gamma_{a,\sigma} = \{k \in K : q(a, k, s) = 0 \text{ para algún } s = \sigma + i\omega, \omega \in \mathbb{R}\}.$$

La curva  $\Gamma_{a,\sigma}$  divide a  $K$  en subregiones que tienen un número constante de raíces complejas con parte real mayor que  $\sigma$ , esto es,

$$K = K_{a,\sigma}^0 \cup K_{a,\sigma}^1 \cup K_{a,\sigma}^2 \cup \dots,$$

donde

$$K_{a,\sigma}^m = \{k \in K : q(a, k, s) \text{ tiene exactamente } m \text{ raíces con parte real mayor que } \sigma\}.$$

El conjunto  $K_{a,\sigma}^0$  se llama  $\sigma$ -*región de estabilidad* del cuasi-polinomio (7.6). En particular,  $K_{a,0}^0$  se conoce como la *región de estabilidad* del cuasi-polinomio (7.6) y  $\Gamma_{a,0} = \partial K_{a,0}^0$ .

Sea  $D \subset K_{a,0}^0$ , donde  $a \in A$  es fijo. La *función de la abscisa espectral*  $\alpha : K_{a,0}^0 \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por

$$\alpha(k) = \sup\{\text{Re}(s) : q(a, k, s) = 0\}. \quad (7.7)$$

Esta función determina la localización de las raíces dominantes del cuasi-polinomio  $q(a, k, s)$ . Si  $\alpha$  está acotada inferiormente en  $D$ , entonces la *abscisa espectral* de  $q(a, k, s)$  correspondiente a la región  $D$  está dada por

$$\alpha^* = \inf\{\alpha(k) : k \in D\}. \quad (7.8)$$

Como se mencionó en el Capítulo 3, el siguiente resultado relaciona los dominios de la frecuencia y el tiempo con la localización de las raíces dominantes.

**Lema 6.** [57] Sea  $y(t)$  la solución de un sistema cuyo cuasi-polinomio es (7.6). Si  $\sigma \geq \alpha^*$ , existe una constante  $L$  tal que

$$|y(t)| \leq L \|\phi\|_\tau e^{\sigma t} \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

donde  $\phi$  es la condición inicial en el intervalo  $[-\tau, 0]$ ,  $\|\phi\|_\tau = \max\{|\phi(s)| : s \in [-\tau, 0]\}$  y  $|\cdot|$  denota la norma euclidiana.

En este caso, podemos definir *desempeño*, *fragilidad* y *robustez* de la siguiente manera.

**Desempeño.** Sea  $D \subset K_{a,0}^0$ , donde  $a \in A$  es fijo, y supongamos que la función  $\alpha$  está acotada inferiormente en  $D$ . Un punto de *mejor desempeño* es un conjunto de ganancias  $k \in D$  del controlador que proporcionan la máxima cota de decaimiento exponencial  $\alpha^*$  en la respuesta  $y(t)$  del sistema a lazo cerrado. Este punto se denotará por  $k^{*,p} \in D$ , y es tal que

$$\alpha^* = \alpha(k^{*,p}) = \sigma^*,$$

donde  $\sigma^*$  es la parte real de una raíz  $s^* = \sigma^* + i\omega^*$  del cuasi-polinomio  $q(a, k^{*,p}, s)$ .

**Fragilidad.** Sea  $D \subset K_{a,0}^0$ , donde  $a \in A$  es fijo, tal que  $\partial D \cap \Gamma_{a,0} \neq \emptyset$ . Un punto *menos frágil* es un conjunto de ganancias  $k \in D$  de un controlador con la distancia más grande a la frontera  $\partial D$ . Este punto se denotará por  $k^{*,f} \in D$ , y es tal que

$$\rho(k^{*,f}) = \sup\{\rho(k) : k \in D\},$$

donde  $\rho(k) = \inf\{\|l - k\| : l \in \partial D\}$  es la distancia del punto  $k$  a la frontera  $\partial D$ .

Ahora, tratando al parámetro  $a$  de manera similar a las ganancias  $k$ , notamos que para  $k \in K$  fijo, los conjuntos

$$\Gamma_k = \{a \in A : q(a, k, s) = 0 \text{ para algún } s = \sigma + i\omega, \omega \in \mathbb{R}\}$$

separan a  $A$  en subregiones con un número constante de raíces con parte real positiva. Esto es,

$$A = A_k^0 \cup A_k^1 \cup A_k^2 \cup \dots,$$

donde

$$A_k^m = \{a \in A : q(a, k, s) \text{ tiene exactamente } m \text{ raíces con parte real positiva}\}.$$

El conjunto  $A_k^0$  es la *región de robustez* del cuasi-polinomio (7.6) respecto al parámetro  $a \in A$ , y  $\Gamma_k = \partial A_k^0$ .

**Robustez.** Sea  $E \subset A_k^0$ , donde  $k \in K$  es fijo, tal que  $\partial E \subset \Gamma_k = \partial A_k^0$ . Un punto de *mayor robustez* es un parámetro  $a \in E$  de un proceso con la mayor distancia a la frontera  $\partial E$ . Este punto se denotará por  $a^{*,r} \in E$ , y es tal que

$$\rho(a^{*,r}) = \sup\{\rho(a) : a \in E\},$$

donde  $\rho(a) = \inf\{\|l - a\| : l \in \partial E\}$  es la distancia del punto  $a$  a la frontera  $\partial E$ .

### 7.3. Regiones de $\sigma$ -estabilidad

Para determinar la fragilidad y el desempeño del OMR fijamos el parámetro del sistema.

**Proposición 29.** *Sea  $a \in A$  fijo.*

(a) *Las ecuaciones que determinan la frontera  $\Gamma_{a,0}$  de la región de estabilidad  $K_{a,0}^0$  del cuasi-polinomio (7.6) son las siguientes:*

(i) *Si  $\omega = 0$ , se obtiene la línea recta  $(\tau, k_r) = (\tau, 0)$ ,  $\tau > 0$ .*

(ii) *Si  $\omega > 0$ , obtenemos la hipérbola  $(\tau, k_r) = (\frac{\pi}{2\omega}, a\omega)$ .*

(b) *Las ecuaciones que determinan la frontera  $\Gamma_{a,\sigma}$  de la región de  $\sigma$ -estabilidad  $K_{a,\sigma}^0$  del cuasi-polinomio (7.6) son las siguientes:*

(iii) *Si  $\omega = 0$ , se obtiene  $(\tau, k_r) = (\tau, -a\sigma e^{\sigma\tau})$ ,  $\tau > 0$ .*

(iv) *Si  $\omega > 0$ , obtenemos  $(\tau, k_r) = (-\frac{1}{\omega} \tan^{-1}(\frac{\omega}{\sigma}), a\sqrt{\sigma^2 + \omega^2} e^{\sigma\tau})$ .*

Para  $\sigma < 0$ , haciendo que  $\omega \rightarrow 0$ , obtenemos que las curvas (iii) y (iv) se intersectan en el *punto singular*  $p_s = (-\frac{1}{\sigma}, -\frac{a\sigma}{e})$ .

**Observación.** En [13] y [53] se demuestra que si  $\tau > 0$ , el cuasi-polinomio (7.6) tiene una raíz negativa doble dominante  $\sigma = -\frac{1}{\tau}$ . Esta raíz doble ocurre en el punto singular  $p_s$  de las regiones de  $\sigma$ -estabilidad  $K_{a,\sigma}^0$ , ver Figura 7.2.

Por la observación anterior, tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 30.** *Dado un valor de desempeño  $\sigma < 0$ , las ganancias del controlador  $k = (\tau, k_r)$  que proporcionan una raíz doble dominante  $\sigma$  son*

$$\tau = -\frac{1}{\sigma} \quad y \quad k_r = \frac{a}{\tau} e^{\sigma\tau}. \quad (7.9)$$

*Demostración.* Resolver para  $\tau$  y  $k_r$  las ecuaciones  $q(a, k, \sigma) = 0$  y  $q'(a, k, \sigma) = 0$ .  $\square$

Notamos que si el punto (7.9) está dentro de un conjunto compacto  $D \subset K_{a,0}^0$  con  $\partial D \subset \Gamma_{a,0}$ , entonces éste proporciona la cota máxima de decaimiento  $\alpha^* \in D$  de la solución de un sistema a lazo cerrado cuyo cuasi-polinomio es de la forma (7.6).

La Figura 7.2 muestra la frontera  $\Gamma_{a,0}$  de la región de estabilidad  $K_{a,0}^0$  y algunas de las fronteras  $\Gamma_{a,\sigma}$  de las regiones de  $\sigma$ -estabilidad  $K_{a,\sigma}^0$ , donde se observan los puntos singulares  $p_s$ .

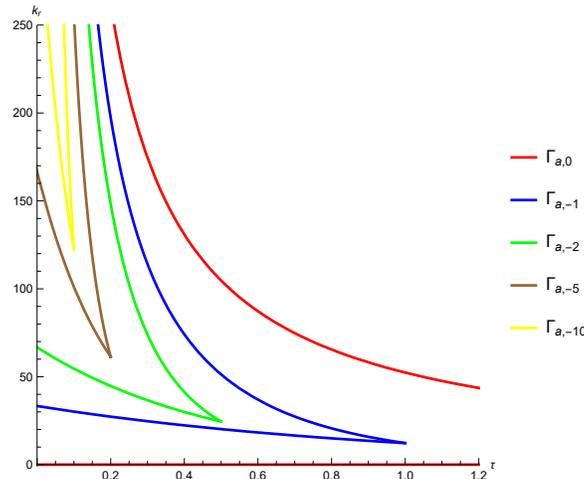


Figura 7.2: Regiones de  $\sigma$ -estabilidad para  $a = 33.333$ .

## 7.4. Fragilidad del OMR

Es claro que las ganancias  $\tau$  y  $k_r$  del controlador deben ser cantidades positivas.

**Proposición 31.** *Sea  $a$  fijo. Si elegimos  $D$  como el subconjunto de la región de estabilidad  $K_{0,a}^0$  que está acotado por los ejes  $\tau$  y  $k_r$  y la hipérbola (ii), entonces el punto menos frágil es  $k^{*,f} = (\tau, k_r) = (\rho, \rho)$ , donde  $\rho = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\pi a}$  es el radio del círculo inscrito más grande en  $D$ .*

*Demostración.* El número  $\rho$  se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\tau = \frac{\pi a}{2\rho} \quad \text{y} \quad 2(\tau - \rho)^2 = \rho^2.$$

$\square$

**Ejemplo 1.** Si  $a = 33.333$ , entonces  $k^{*,f} = (4.23874, 4.23874)$  y  $\rho = 4.23874$ . La Figura 7.3 muestra este punto y el círculo inscrito más grande en la región  $D$ .

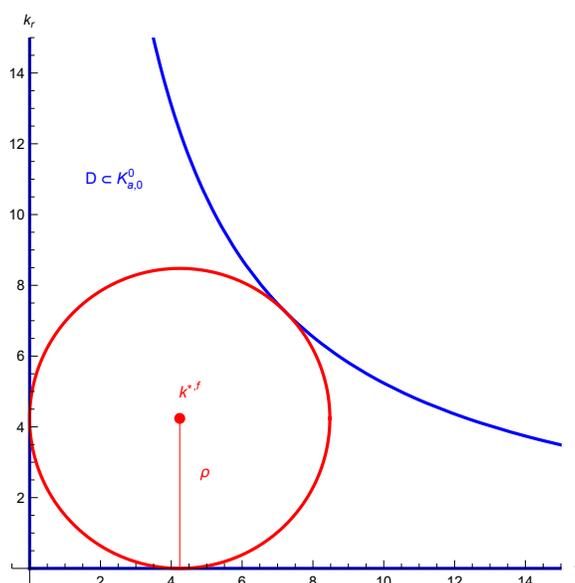


Figura 7.3: El punto menos frágil  $k^{*,f} = (4.23874, 4.23874)$  para  $D \subset K_{a,0}^0$  y  $a = 33.333$ .

**Ejemplo 2.** Ahora elegimos la subregion  $D$  acotada por el eje  $k_r$  y las curvas (iii) y (iv), que está dentro de la región de  $\sigma$ -estabilidad  $K_{a,\sigma}^0$  con  $a = 33.333$  y  $\sigma = -0.27$ . Usando la Proposición 4 del Capítulo 3, se obtiene que el punto menos frágil es  $k^{*,f} = (1.15273, 9.23038)$  y  $\rho = 1.15273$ . Este punto se muestra en la Figura 7.4.

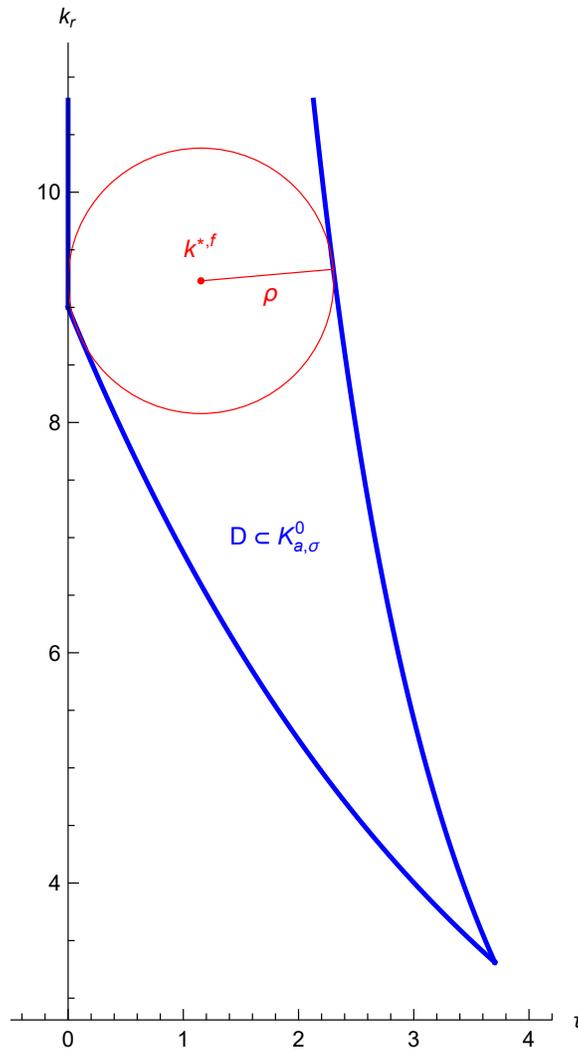


Figura 7.4: El punto menos frágil  $k^{*,f}$  en  $D \subset K_{a,\sigma}^0$ , donde  $a = 33.333$  y  $\sigma = -0.27$ .

## 7.5. Desempeño del OMR

Debido a que las regiones de  $\sigma$ -estabilidad  $K_{a,\sigma}^0$  no son acotadas, para calcular puntos de mejor desempeño  $k^{*,p}$  y la correspondiente cota de máximo decaimiento exponencial  $\alpha^*$ , construimos conjuntos compactos  $D$  dentro de estas regiones.

**Proposición 32.** Sean  $\kappa_r$  y  $a$  dados, y supongamos que  $\sigma > -\frac{\kappa_r e}{a}$ . Si  $D$  es la región acotada por la recta horizontal  $\kappa_r = \kappa_r$  y las curvas (iii) y (iv), entonces  $D$  está dentro de la región de  $\sigma$ -estabilidad  $K_{a,\sigma}^0$ , el punto de mejor desempeño es  $k^{*,p} = (\frac{a}{\kappa_r e}, \kappa_r)$  y la

máxima cota de decaimiento es  $\sigma^* = -\frac{\kappa_r e}{a}$ . En este caso,  $k^{*,p}$  corresponde al punto singular de la curva  $\Gamma_{a,\sigma^*}$ .

**Ejemplo 3.** Para  $\kappa_r = 160$  y  $a = 33.333$ , se tiene que  $k^{*,p} = (0.0766408, 160)$  y  $\sigma^* = -13.0479$ . En la Figura 7.5 el punto  $k^{*,p}$  aparece en rojo.

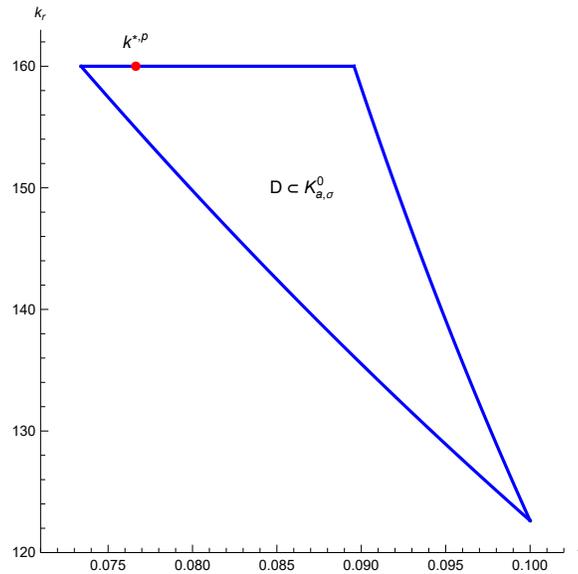


Figura 7.5: Punto de mejor desempeño  $k^{*,p} = (0.0766408, 160)$  en  $D \subset K_{a,\sigma}^0$  para  $\kappa_r = 160$ ,  $a = 33.333$  y  $\sigma = -10$ .

## 7.6. Robustez del OMR

Para encontrar un conjunto de robustez  $E \subset A_k^0$  del cuasi-polinomio (7.6) usamos el siguiente resultado de Hayes [32].

**Lema 7.** *Todas las raíces de la ecuación  $z = ce^z$  están a la derecha de  $\operatorname{Re}(z) = \lambda$  si y sólo si  $\lambda < 1$  y  $\lambda e^{-\lambda} < c < \lambda e^{-\lambda} \sqrt{\lambda^2 + \nu^2}$ , donde  $\nu$  es la única solución de  $\nu \cot \nu = \lambda$  en el intervalo  $(0, \pi)$ .*

Es fácil ver que para  $\nu$  en el intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ , podemos definir  $\lambda$  de manera única en el intervalo  $(0, 1)$  por  $\lambda = \nu \cot \nu$ . Ahora, haciendo el cambio de variable  $z = -\tau s$  con  $\tau > 0$ , obtenemos que todas las raíces del cuasi-polinomio (7.6) están a la izquierda de  $\operatorname{Re}(s) = -\frac{\lambda}{\tau}$  si y sólo si

$$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{\tau \kappa_r} < r = \frac{1}{a} < \frac{\lambda e^{-\lambda} \sqrt{\lambda^2 + \nu^2}}{\tau \kappa_r} \quad (7.10)$$

o

$$\frac{c_1(\nu)}{\tau k_r} < r = \frac{1}{a} < \frac{c_2(\nu)}{\tau k_r},$$

donde  $c_1(\nu) = \lambda e^{-\lambda}$  y  $c_2(\nu) = \lambda e^{-\lambda} \sqrt{\lambda^2 + \nu^2}$ . La Figura 7.6 muestra el comportamiento de las funciones  $c_1(\nu)$ ,  $c_2(\nu)$  y  $\lambda = \nu \cot \nu$  para  $\nu \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

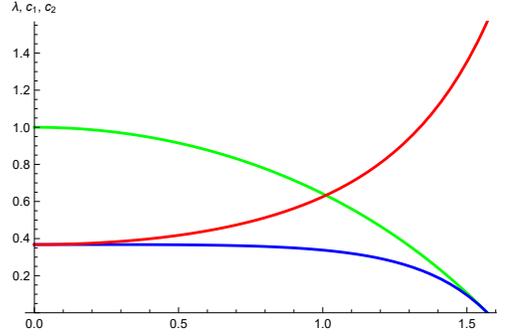


Figura 7.6: Funciones  $c_1$ ,  $c_2$  y  $\lambda$ .

**Proposición 33.** Sean  $k = (\tau, k_r)$  y  $\nu \in (0, \frac{\pi}{2})$  fijos. Si  $E = \left( \frac{\tau k_r}{c_2(\nu)}, \frac{\tau k_r}{c_1(\nu)} \right)$ , entonces el punto más robusto  $a^{*,r}$  es el punto medio del intervalo  $E$ .

## 7.7. Fragilidad, desempeño y robustez del OMR

Usando la desigualdad (7.10) podemos escribir siguiente resultado de robustez en el espacio tridimensional  $\tau k_r a$ .

**Proposición 34.** Sea  $\nu \in (0, \frac{\pi}{2})$  fijo. Si los parámetros  $\tau, k_r$  y  $a$  satisfacen la desigualdad

$$\frac{1}{c_2(\nu)} < \frac{a}{\tau k_r} < \frac{1}{c_1(\nu)},$$

entonces el sistema es estable.

**Ejemplo 4.** La Figura 7.7 muestra una región de estabilidad robusta en el espacio tridimensional  $\tau k_r a$  cuando  $\nu = 1.34$ .

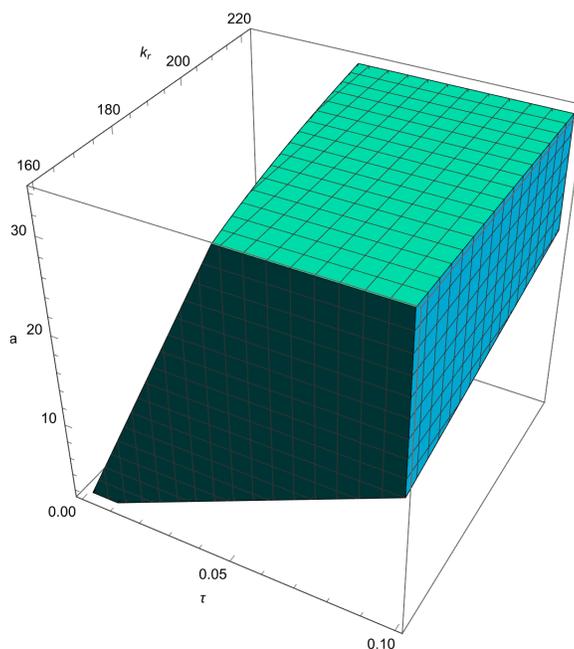


Figura 7.7: Región de estabilidad robusta en el espacio  $\tau k_r a$ .

## 7.8. Experimentos en tiempo-real

El OMR está construido usando tres motores con engranaje 12V POLOLU 37D, escala 1:70 y sensor rotativo (encoder) con resolución de 64 orificios por revolución, ver Figura 7.8. Una tarjeta STM32F4 Discovery se usa como tarjeta de adquisición de datos y la comunicación entre la computadora y el robot se efectúa en tiempo-real usando la biblioteca (toolbox) "waijung1504" de Matlab/Simulink<sup>©</sup> vía Bluetooth mediante un microcontrolador ESP32. El robot funciona en un ambiente intramuros con un conjunto de 10 cámaras infrarojas VICON<sup>©</sup> con precisión de 0.5[mm] que miden la posición y orientación del robot en un área de  $5 \times 4$ [m<sup>2</sup>] con tiempo de muestreo de 0.005[s]. Para lograr esto, el robot tiene varios marcadores reflejantes con diferentes patrones que son detectados por el software TRACKER<sup>©</sup> de las cámaras, visitar <https://www.vicon.com>.



Figura 7.8: Robot Móvil Omnidireccional con perturbación.

Sea  $D$  el subconjunto de la región de estabilidad  $K_{0,a}^0$  que está acotado por los ejes  $\tau$  y  $k_r$  y la hipérbola (ii), ver Figura 7.3. Para  $k_r$  y  $a$  dados, la Tabla 1 muestra una lista de puntos de mejor desempeño  $k^{*,p} = (\frac{a}{k_r e}, k_r) \in D$ . La fragilidad de un punto  $k^{*,p}$  se obtiene como la distancia  $\rho(k^{*,p})$  de ese punto a la frontera de  $D$ . El intervalo de robustez se obtiene usando la desigualdad (7.10) con  $\nu = 1.34$ . La Figura 7.9 muestra el círculo  $S(k^{*,p}, \rho(k^{*,p}))$  para  $k_r = 160$  y  $a = 33.333$ .

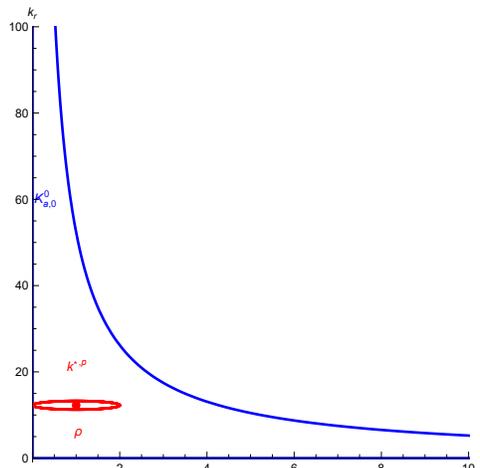


Figura 7.9: Fragilidad del punto  $k^{*,p}$  para  $k_r = 160$  y  $a = 0.03$ .

La Figura 7.10 muestra el desempeño del robot usando los datos de la Tabla 7.1, sin

Tabla 7.1: Puntos de mejor desempeño  $k^{*,p}$  para  $k_r$  y  $a = 33.333$  dados.

$k^{*,p}$	Desempeño $\sigma^*$	Fragilidad de $k^{*,p}$ $\rho(k^{*,p})$	Robustez del controlador (7.4) $r = a^{-1}$
(0.076, 160)	-13.0479	0.076	$r \in (0.03, 0.082)$
(0.066, 184)	-15.0051	0.066	$r \in (0.03, 0.082)$
(0.061, 201)	-16.3914	0.061	$r \in (0.03, 0.081)$
(0.060, 204)	-16.6361	0.060	$r \in (0.03, 0.081)$
(0.055, 222)	-18.1039	0.055	$r \in (0.03, 0.081)$

perturbación/rampa. Se muestran sólo tres puntos.

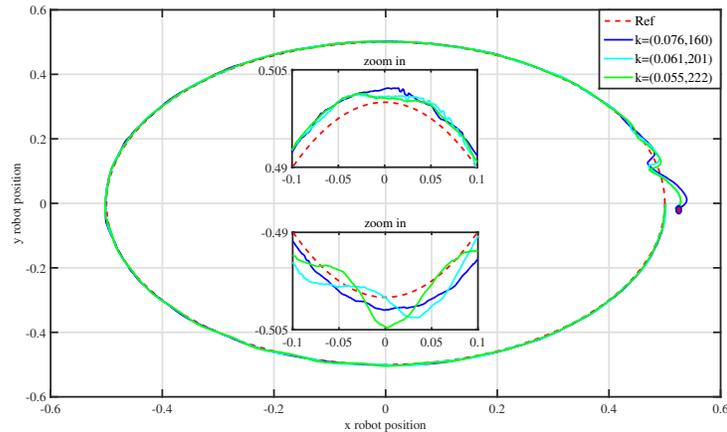


Figura 7.10: Desempeño de la posición  $x$ - $y$  del robot, ver Tabla 7.1. Aquí  $r = a^{-1} = 0.03\text{m}$ .

La Figura 7.11 muestra el desempeño del robot usando los datos de la Tabla 7.1, pero se coloca una rampa para perturbar el camino recorrido por el robot, ver Figura 7.8. Se muestran los mismos tres puntos de la Figura 7.10.

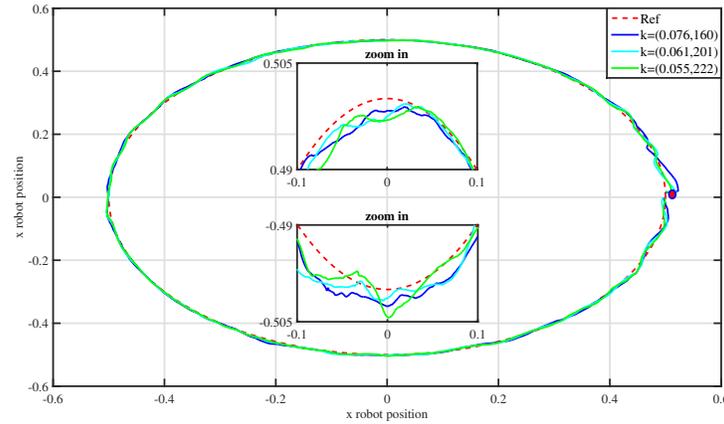


Figura 7.11: Desempeño de la posición  $x$ - $y$  del robot con perturbación. Aquí  $r = a^{-1} = 0.03\text{m}$ .

La Figura 7.12 muestra la robustez de la posición  $x$ - $y$  del robot para  $k = (0.076, 160)$  dado en la Tabla 7.1 y variando el parámetro  $r = a^{-1} \in \{0.03, 0.05, 0.08\}\text{m}$ .

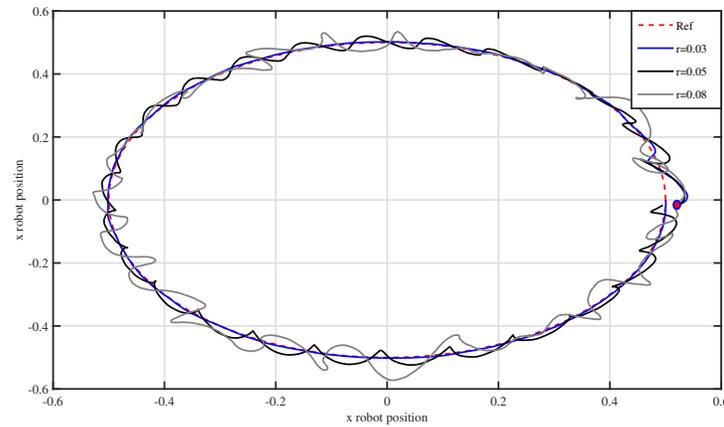


Figura 7.12: Robustez de la posición  $x$ - $y$  del robot, fijando  $k = (0.076, 160)$  y variando  $r = a^{-1} \in \{0.03, 0.05, 0.08\}\text{m}$ .

La Figura 7.13 muestra la robustez de la posición  $x$ - $y$  del robot para  $k = (0.055, 222)$  dado en la Tabla 7.1 y variando el parámetro  $r = a^{-1} \in \{0.03, 0.05, 0.08\}\text{m}$ .

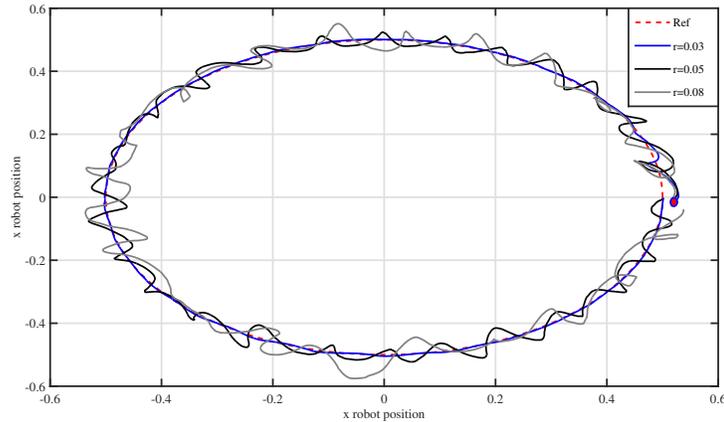


Figura 7.13: Robustez de la posición  $x$ - $y$ , fijando  $k = (0.055, 222)$  y variando  $r = a^{-1} \in \{0.03, 0.05, 0.08\}$ m.

Dadas las ganancias  $k = (\tau, k_r)$ , el desempeño se obtiene resolviendo para  $\sigma$  las ecuaciones (iii) o (iv) de la Proposición 29.

Tabla 7.2: Puntos menos frágiles  $k^{*,f}$  para un  $\sigma$  dado.

$\sigma$	$k^{*,f}$	Fragilidad de $k^{*,f}$ $\rho(k^{*,f})$	Desempeño $\sigma$	Robustez del controlador (7.4) $r = a^{-1}$ , $k^{*,f}$ es fijo
0	(4.23874, 4.23874)	4.23874	-0.175325	$r \in (0.0127914, 0.0559181)$
-10	(0.0814868, 159.992)	0.00808579	-11.77	$r \in (0.0176282, 0.077062)$

La Figura 7.14 muestra la posición del robot usando los puntos menos frágiles de la Tabla 7.2. Como se esperaba, el desempeño es pobre debido a que la velocidad de convergencia es baja. Sin embargo, el análisis realizado garantiza menor fragilidad respecto a variaciones de las ganancias  $\tau$  y  $k_r$  del controlador (7.4).

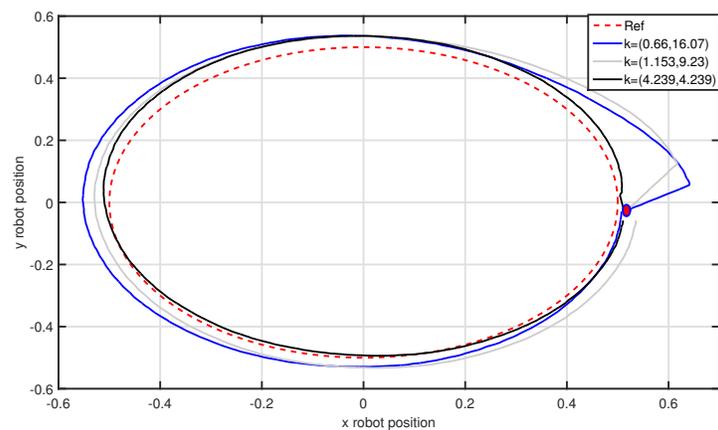


Figura 7.14: Fragilidad de la posición  $x$ - $y$  del robot para  $\sigma = -0.27$  y  $-0.48$ , ver Tabla 7.2. Aquí,  $r = a^{-1} = 0.03\text{m}$ .

# Bibliografía

- [1] C Abdallah, Peter Dorato, J Benites-Read, and R Byrne. Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems. In *American Control Conference, 1993*, pages 3106–3107. IEEE, 1993.
- [2] Victor M. Alfaro. PID controllers’ fragility. *ISA transactions*, 46(4):555–559, 2007.
- [3] B Anderson, E Jury, and M Mansour. On robust hurwitz polynomials. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(10):909–913, 1987.
- [4] Robert J Anderson and Mark W Spong. Bilateral control of teleoperators with time delay. *IEEE Transactions on Automatic control*, 34(5):494–501, 1989.
- [5] T. Apostol. *Mathematical analysis*, 2nd edition, 1974.
- [6] Karl Johan Åström and Tore Hägglund. *PID controllers: theory, design, and tuning*, volume 2. Instrument society of America Research Triangle Park, NC, 1995.
- [7] B Ross Barmish, Roberto Tempo, Christopher V Hollot, and Hwan Il Kang. An extreme point result for robust stability of a diamond of polynomials. In *29th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 37–38. IEEE, 1990.
- [8] Shankar P Bhattacharyya and Lee H Keel. Robust control: the parametric approach. In *Advances in control education 1994*, pages 49–52. Elsevier, 1995.
- [9] Stanislaw Bialas. On certain properties of hurwitz determinants of interval polynomials. *Computing*, 30:149–155, 1983.
- [10] F Blanchini, R Lo Cigno, and R Tempo. Control of atm networks: Fragility and robustness issues. In *Proceedings of the 1998 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No. 98CH36207)*, volume 5, pages 2847–2851. IEEE, 1998.

- 
- [11] Michael E Bleich and Joshua ES Socolar. Stability of periodic orbits controlled by time-delay feedback. *Physics Letters A*, 210(1-2):87–94, 1996.
- [12] I. Boussaada, S. Tliba, S. Niculescu, Hakki Ulas Unal, and T. Vyhlídal. Further remarks on the effect of multiple spectral values on the dynamics of time-delay systems. application to the control of a mechanical system. *Linear Algebra and its Applications*, 542:589–604, 2017.
- [13] Islam Boussaada, Hakki Ulaş Unal, and Silviu-Iulian Niculescu. Multiplicity and stable varieties of time-delay systems: A missing link. In *22nd International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*, 2016.
- [14] Stephen Boyd, Stephen P Boyd, and Lieven Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [15] Guy Champion, Georges Bastin, and Brigitte Dandrea-Novel. Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. *IEEE transactions on robotics and automation*, 12(1):47–62, 1996.
- [16] Hervé Chapellat, Lee H Keel, and Shankar P Bhattacharyya. Extremal robustness properties of multilinear interval systems. *Automatica*, 30(6):1037–1042, 1994.
- [17] Nikolai Grigor’evich Chebotarev and Naum Natanovich Meiman. The routh-hurwitz problem for polynomials and entire functions. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova*, 26:3–331, 1949.
- [18] Joono Cheong, Silviu-Iulian Niculescu, Anuradha Annaswamy, and Mandayam A Srinivasan. Synchronization control for physics-based collaborative virtual environments with shared haptics. *Advanced Robotics*, 21(9):1001–1029, 2007.
- [19] J Cieslik. On possibilities of the extension of kharitonov’s stability test for interval polynomials to the discrete-time case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(3):237–238, 1987.
- [20] J.B. Conway. *Functions of One Complex Variable I*. Springer, 1978.
- [21] Aniruddha Datta, Ming-Tzu Ho, and Shankar P Bhattacharyya. *Structure and synthesis of PID controllers*. Springer Science & Business Media, 2013.

- 
- [22] M de Sousa Vieira and AJ Lichtenberg. Controlling chaos using nonlinear feedback with delay. *Physical Review E*, 54(2):1200, 1996.
- [23] V. F. Dem'yanov and V. N. Malozemov. *Introduction to minimax*. Dover Publications, Inc., New York, 1990.
- [24] Naren Deshpande and MS Fofana. Nonlinear regenerative chatter in turning. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 17(1-2):107–112, 2001.
- [25] L.E. El'sgol'ts and S.B. Norkin. *Introduction to the theory and applications of differential equations with deviating arguments*. Academic Press, New York, 1973.
- [26] Feliks Ruvimovič Gantmacher and Joel Lee Brenner. *Applications of the Theory of Matrices*. Courier Corporation, 2005.
- [27] FR Gantmacher. *The theory of matrices*. Vol. II. Chelsea Publishing Company, New York, 1959.
- [28] F. Ricardo García, Baltazar Aguirre, and Rodolfo Suárez. Stabilization of linear sampled-data systems by a time-delay feedback control. *Mathematical Problems in Engineering*, 2008, 2008.
- [29] Walter Gautschi. *Numerical analysis*. Springer Science & Business Media, 1997.
- [30] Elena N. Gryazina and Boris T. Polyak. Stability regions in the parameter space: D-decomposition revisited. *Automatica*, 42(1):13–26, 2006.
- [31] K. Gu, J. Chen, and V.L. Kharitonov. *Stability of Time-Delay Systems*. Control Engineering. Birkhäuser Boston, 2003.
- [32] ND36426 Hayes. Roots of the transcendental equation associated with a certain difference-differential equation. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(3):226–232, 1950.
- [33] J-E Hernández-Díez, C-F Méndez-Barrios, S Mondié, S-I Niculescu, and EJ González-Galván. Proportional-delayed controllers design for LTI-systems: a geometric approach. *International Journal of Control*, 91(4):907–925, 2018.

- 
- [34] BL Hernández-Galván, JA López-Rentería, B Aguirre-Hernández, and G Fernández-Anaya. Robust stability in discrete control systems via linear controllers with single and delayed time. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018, 2018.
- [35] Ming-Tzu Ho. Non-fragile pid controller design. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 00CH37187)*, volume 5, pages 4903–4908. IEEE, 2000.
- [36] C Hollot and A Bartlett. Some discrete-time counterparts to kharitonov’s stability criterion for uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(4):355–356, 1986.
- [37] Roger A Horn and Charles R Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge university press, 2012.
- [38] Ying J Huang and Yuan-Jay Wang. Robust pid tuning strategy for uncertain plants based on the kharitonov theorem. *ISA transactions*, 39(4):419–431, 2000.
- [39] Wolfram Just, Thomas Bernard, Matthias Ostheimer, Ekkehard Reibold, and Hartmut Benner. Mechanism of time-delayed feedback control. *Physical Review Letters*, 78(2):203, 1997.
- [40] Lee H Keel and Shankar P Bhattacharyya. Robust, fragile, or optimal? *IEEE transactions on automatic control*, 42(8):1098–1105, 1997.
- [41] Sofiane Khadraoui, Hazem N Nounou, Mohamed N Nounou, Aniruddha Datta, and Shankar P Bhattacharyya. A measurement-based technique for designing fixed-order rst controllers and application to a coupled water tank system. *Systems Science & Control Engineering: An Open Access Journal*, 2(1):484–492, 2014.
- [42] Vladimir L Kharitonov and Alexei P Zhabko. Robust stability of time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(12):2388–2397, 1994.
- [43] Vladimir Leonidovich Kharitonov. The asymptotic stability of the equilibrium state of a family of systems of linear differential equations. *Differentsial’nye Uravneniya*, 14(11):2086–2088, 1978.

- 
- [44] Jong Hae Kim, Sang Kyung Lee, and Hong Bae Park. Robust and non-fragile  $H^\infty$  control of parameter uncertainties time-varying delay systems. In *SICE'99. Proceedings of the 38th SICE Annual Conference. International Session Papers (IEEE Cat. No. 99TH8456)*, pages 927–932. IEEE, 1999.
- [45] V. Kolmanovskii and A. Myshkis. *Applied theory of functional differential equations*, volume 85. Springer Science & Business Media, 2012.
- [46] Vladimir Borisovich Kolmanovskii and Valerij Romanovič Nosov. *Stability of functional differential equations*, volume 180. Elsevier, 1986.
- [47] Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*, volume 1. John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [48] KL Ku, JS Liaw, MY Tsai, and TS Liu. Automatic control system for thermal comfort based on predicted mean vote and energy saving. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 12(1):378–383, 2014.
- [49] Jose SB Lopes, G Oscar Filho, Fabio MU Araujo, Anderson LO Cavalcanti, and Andre L Maitelli. An LMI robust predictive control approach applied in a coupled tanks systems. In *IECON 2011-37th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, pages 480–485. IEEE, 2011.
- [50] Morris Marden. *Geometry of polynomials*. Number 3 in Mathematical Surveys. American Mathematical Soc., 1966.
- [51] Jerrold E Marsden, Michael J Hoffman, et al. *Elementary classical analysis*. Macmillan, 1993.
- [52] Guilherme Mazanti, Islam Boussaada, and Silviu-Iulian Niculescu. On qualitative properties of single-delay linear retarded differential equations: Characteristic roots of maximal multiplicity are necessarily dominant. *arXiv preprint arXiv:2002.06146*, 2020.
- [53] Guilherme Mazanti, Islam Boussaada, and Silviu-Iulian Niculescu. Multiplicity-induced-dominancy for delay-differential equations of retarded type. *Journal of Differential Equations*, 286:84–118, 2021.

- [54] Guilherme Mazanti, Islam Boussaada, Silviu-Iulian Niculescu, and Yacine Chitour. Effects of roots of maximal multiplicity on the stability of some classes of delay differential-algebraic systems: The lossless propagation case. *arXiv preprint arXiv:2002.00078*, 2020.
- [55] Daniel Melchor-Aguilar and Silviu-Iulian Niculescu. Computing non-fragile PI controllers for delay models of TCP/AQM networks. *International Journal of Control*, 82(12):2249–2259, 2009.
- [56] César Méndez-Barrios, Silviu-Iulian Niculescu, Constantin-Irinel Morarescu, and Keqin Gu. On the fragility of pi controllers for time-delay siso systems. In *2008 16th mediterranean conference on control and automation*, pages 529–534. IEEE, 2008.
- [57] Wim Michiels and Silviu-Iulian Niculescu. *Stability and stabilization of time-delay systems: an eigenvalue-based approach*. SIAM, 2007.
- [58] Sabine Mondie, Raul Villafuerte, and R Garrido. Tuning and noise attenuation of a second order system using proportional retarded control. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1):10337–10342, 2011.
- [59] Irinel-Constantin Morărescu, César-Fernando Méndez-Barrios, Silviu-Iulian Niculescu, and Keqin Gu. Stability crossing boundaries and fragility characterization of pid controllers for siso systems with i/o delays. In *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, pages 4988–4993. IEEE, 2011.
- [60] Ju I Neimark. D-decomposition of the space of quasi-polynomials (on the stability of linearized distributive systems). *American Mathematical Society Translations*, 102:95–131, 1973.
- [61] Silviu-Iulian Niculescu, Constantin-Irinel Morărescu, Wim Michiels, and Keqin Gu. Geometric ideas in the stability analysis of delay models in biosciences. In *Biology and control theory: Current challenges*, pages 217–259. Springer, 2007.
- [62] Guillermo Oaxaca-Adams and Raúl Villafuerte-Segura. On controllers performance for a class of time-delay systems: Maximum decay rate. *Automatica*, 147:110669, 2023.
- [63] Guillermo Oaxaca-Adams, Raúl Villafuerte-Segura, and Baltazar Aguirre-Hernández. On non-fragility of controllers for time delay systems: A numerical approach. *Journal of the Franklin Institute*, 358(9):4671–4686, 2021.

- 
- [64] Guillermo Oaxaca-Adams, Raúl Villafuerte-Segura, and Baltazar Aguirre-Hernández. On hurwitz stability for families of polynomials. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2024.
- [65] Guillermo Oaxaca-Adams, Raúl Villafuerte-Segura, and Baltazar Aguirre-Hernández. On schur stability for families of polynomials. *Journal of the Franklin Institute*, 361(4):106644, 2024.
- [66] Aidan O’Dwyer. A summary of PI and PID controller tuning rules for processes with time delay. part 1: PI controller tuning rules. *IFAC Proceedings Volumes*, 33(4):159–164, 2000.
- [67] Aidan O’Dwyer. A summary of PI and PID controller tuning rules for processes with time delay. part 2: PID controller tuning rules. *IFAC Proceedings Volumes*, 33(4):211–216, 2000.
- [68] Aidan O’Dwyer. *Handbook of PI and PID controller tuning rules*. Imperial college press, 2009.
- [69] Nejat Olgac and Rifat Sipahi. An exact method for the stability analysis of time-delayed linear time-invariant (LTI) systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(5):793–797, 2002.
- [70] Nejat Olgac and Rifat Sipahi. Direct method for analyzing the stability of neutral type LTI-time delayed systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 36(19):29–34, 2003.
- [71] Nejat Olgac and Rifat Sipahi. The cluster treatment of characteristic roots and the neutral type time-delayed systems. In *ASME 2004 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, pages 1359–1368. American Society of Mechanical Engineers, 2004.
- [72] MM Pertti. Comments on robust, fragile, or optimal. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43:1265–1267, 1998.
- [73] George Pólya and Gabor Szegő. *Problems and theorems in analysis I: Series. Integral calculus. Theory of functions*. Springer Science & Business Media, 1998.
- [74] LS Pontryagin. On the zeros of some elementary transcendental functions. *American Mathematical Society Translations, series, 2*, 1955.

- 
- [75] Kody M Powell and Thomas F Edgar. Modeling and control of a solar thermal power plant with thermal energy storage. *Chemical Engineering Science*, 71:138–145, 2012.
- [76] Kestutis Pyragas. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics letters A*, 170(6):421–428, 1992.
- [77] Qazi Ibadur Rahman and Gerhard Schmeisser. *Analytic theory of polynomials*. Number 26 in London Mathematical Society Monographs., Oxford University Press, 2002.
- [78] Adrián Ramírez, Sabine Mondié, Rubén Garrido, and Rifat Sipahi. Design of proportional-integral-retarded (PIR) controllers for second-order LTI systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(6):1688–1693, 2016.
- [79] Jean-Pierre Richard. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10):1667–1694, 2003.
- [80] JF Marquez Rubio, Basilio del Muro Cuéllar, and Olivier Sename. Control of delayed recycling systems with an unstable pole at forward path. In *2012 American Control Conference (ACC)*, pages 5658–5663. IEEE, 2012.
- [81] Jihoon Seung, F Amir Atiya, Alexander G Parlos, and Kiltto Chong. Parameter estimation for coupled tank using estimate filtering. *International Journal of Control and Automation*, 6(5):91–102, 2013.
- [82] Roland Siegwart, Illah Reza Nourbakhsh, and Davide Scaramuzza. *Introduction to autonomous mobile robots*. MIT press, 2011.
- [83] Guillermo J Silva, Aniruddha Datta, and Shankar P Bhattacharyya. *PID controllers for time-delay systems*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [84] Guillermo J Silva, Aniruddha Datta, and SP Bhattacharyya. Pid tuning revisited: Guaranteed stability and non-fragility. In *Proceedings of the 2002 American Control Conference (IEEE Cat. No. CH37301)*, volume 6, pages 5000–5006. IEEE, 2002.
- [85] Hal L Smith. *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*, volume 57. Springer New York, 2011.
- [86] C Soh, C Berger, and K Dabke. On the stability properties of polynomials with perturbed coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(10):1033–1036, 1985.

- [87] H Suh and Zeungnam Bien. Use of time-delay actions in the controller design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(3):600–603, 1980.
- [88] I Suh and Z Bien. Proportional minus delay controller. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(2):370–372, 1979.
- [89] George M Swisher and Shing Tenqchen. Design of proportional-minus-delay action feedback controllers for second-and third-order systems. In *American Control Conference, 1988*, pages 254–260. IEEE, 1988.
- [90] A Galip Ulsoy. Time-delayed control of SISO systems for improved stability margins. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 137(4):041014, 2015.
- [91] R Villafuerte, S Mondié, C Vazquez, and J Collado. Proportional retarded control of a second order system. In *2009 6th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, pages 1–6. IEEE, 2009.
- [92] Raúl Villafuerte, Sabine Mondié, and Rubén Garrido. Tuning of proportional retarded controllers: theory and experiments. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 21(3):983–990, 2012.
- [93] Raul Villafuerte, Sabine Mondié, and Ruben Garrido. Tuning of proportional retarded controllers: Theory and experiments. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 21(3):983–990, 2013.
- [94] Vito Volterra. Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 7:249–298, 1928.
- [95] K Walton and JE Marshall. Direct method for tds stability analysis. In *IEE Proceedings D-Control Theory and Applications*, volume 134, pages 101–107. IET, 1987.
- [96] Shengyuan Xu, James Lam, Jianliang Wang, and Guang-Hong Yang. Non-fragile positive real control for uncertain linear neutral delay systems. *Systems & Control Letters*, 52(1):59–74, 2004.
- [97] Dong Yue and James Lam. Non-fragile guaranteed cost control for uncertain descriptor systems with time-varying state and input delays. *Optimal Control Applications and Methods*, 26(2):85–105, 2005.

- [98] Kemin Zhou and John Comstock Doyle. *Essentials of robust control*, volume 104. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 1998.

# Apéndice A

## Manuscritos publicados



Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

**ScienceDirect**

Journal of the Franklin Institute 358 (2021) 4671–4686

[www.elsevier.com/locate/jfranklin](http://www.elsevier.com/locate/jfranklin)



# On non-fragility of controllers for time delay systems: A numerical approach

Guillermo Oaxaca-Adams<sup>a</sup>, Raúl Villafuerte-Segura<sup>b,\*</sup>,  
Baltazar Aguirre-Hernández<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa, México*

<sup>b</sup>*Centro de Investigación en Tecnologías de Información y Sistemas, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Hidalgo, México*

Received 8 November 2020; received in revised form 24 January 2021; accepted 28 March 2021

Available online 13 April 2021

---

## Abstract

In this paper an explicit numerical procedure is proposed to determine the non-fragility of parameters of controllers used to stabilize a class of time delay systems. The proposed procedure finds the largest possible circle inscribed in a stability subregion delimited by a simple closed curve in the plane of the controller parameters. The center of this circle is declared to be the controller's least fragile parameters. The obtained theoretical results are applied and compared with some of the most relevant examples found in the literature. This illustrates that the proposed procedure improves previous results found in the literature so far.

© 2021 The Franklin Institute. Published by Elsevier Ltd. All rights reserved.

---

## 1. Introduction

In the framework of control theory, the robustness of controllers is one of the topics of greatest interest to the scientific community. The robustness of a controller guarantees the proper functioning of a closed-loop system when there are disturbances and uncertainties [1]. The above is paramount for those who are involved in applications where noises, disturbances,

---

\* Corresponding author.

E-mail addresses: [oag@xanum.uam.mx](mailto:oag@xanum.uam.mx) (G. Oaxaca-Adams), [villafuerte@uaeh.edu.mx](mailto:villafuerte@uaeh.edu.mx) (R. Villafuerte-Segura), [bahe@xanum.uam.mx](mailto:bahe@xanum.uam.mx) (B. Aguirre-Hernández).



## Brief paper

# On controllers performance for a class of time-delay systems: Maximum decay rate<sup>☆</sup>

Guillermo Oaxaca-Adams<sup>a</sup>, Raúl Villafuerte-Segura<sup>b,\*</sup><sup>a</sup> Department of Mathematics, Metropolitan Autonomous University, Mexico City, C.P. 09310, Mexico<sup>b</sup> Research Center on Information Technology and Systems, Hidalgo State University, Pachuca-Hidalgo, C.P. 42184, Mexico

## ARTICLE INFO

## Article history:

Received 24 August 2021

Received in revised form 6 May 2022

Accepted 3 September 2022

Available online xxxx

## Keywords:

Performance analysis

Time-delay systems

Maximum decay rate

Spectral abscissa

Control theory

## ABSTRACT

This paper states some results aiming at finding the parameters of a controller that provides the maximum decay rate of the closed-loop response for a linear time-invariant time-delay system. These results help to understand the behavior of dominant roots and the spectral abscissa under parametric variations, including the delay. The controller parameters or points of best performance are obtained for compact subsets of the system's stability region. In addition, it is shown that these points are not always related to obtaining a multiple dominant root or the existence of a root of maximal multiplicity. To illustrate the effectiveness and diversity of application of the proposed results, four key examples from the literature were chosen and the points of best performance were found.

© 2022 Elsevier Ltd. All rights reserved.

## 1. Introduction

In the control theory framework, the design and tuning of a controller that ensures the efficient handling of a system is undoubtedly of great relevance. In this sense, three important aspects must be considered (Alfaro, 2007): its *fragility* to the variation of its own parameters, its *performance* to a load disturbance or set-point change, and its *robustness* to the changes in the controlled process characteristics.

In the context of time-delay systems, there are several papers in which the fragility of a controller is determined, among them are (Hernández-Díez, Méndez-Barrios, Mondié, Niculescu, & González-Galván, 2018; Melchor-Aguilar & Niculescu, 2009; Méndez-Barrios, Niculescu, Morarescu, & Gu, 2008; Morarescu, Méndez-Barrios, Niculescu, & Gu, 2011). Recently, in Oaxaca-Adams, Villafuerte-Segura, and Aguirre-Hernández (2021) was proposed an explicit methodology to determine the fragility of a controller and was used to stabilize this type of systems. Regarding performance, there are many papers in which the closed-loop response for a system with a control law is analyzed, among them are (Abdallah, Dorato, Benites-Read, & Byrne, 1993; Anderson & Spong, 1989; Åström & Hägglund, 1995; Bleich & Socolar, 1996; Hernández-Díez et al., 2018; Just, Bernard, Ostheimer, Reibold, &

Benner, 1997; O'Dwyer, 2000a, 2000b, 2009; Olgac & Sipahi, 2002, 2003, 2004; Pyragas, 1992; Ramírez, Mondié, Garrido, & Sipahi, 2016; Silva, Datta, & Bhattacharyya, 2007; de Sousa Vieira & Lichtenberg, 1996; Suh & Bien, 1979, 1980; Swisher & Tenqchen, 1988; Ulsoy, 2015; Villafuerte, Mondié, & Garrido, 2013; Volterra, 1928; Walton & Marshall, 1987).

Although the performance of a controller applied to a system can be understood in many different ways according to requirements, it seems that, in the case of controls for time-delay systems, the most popular is the one that has to do with the decay rate for the closed-loop response of a system, known as  $\sigma$ -stability. In this context, recent results focus on determining the controller parameters that produce the maximum decay rate for the closed-loop response of a system. For linear time-invariant time-delay systems (LTI-TDS), it is well known that this decay rate is determined by the real part of the dominant roots of its characteristic equation (quasi-polynomial), known as spectral abscissa.

In Villafuerte, Mondié, and Garrido (2012), Villafuerte, Mondié, Vazquez, and Collado (2009), the tuning of a delayed controller known as proportional retarded (PR) control is proposed. A parameter  $\mathbf{k} = (k_p, k_r, \tau)$  is selected to place a real dominant root of multiplicity three at the abscissa  $-\sigma < 0$ . Here, a tuning based on a geometrical method yields  $\sigma$ -stabilization for a class of second-order systems, and an algebraic procedure yields analytic expressions to compute the triple dominant real root. In this approach, two assumptions were made: (i) existence of a triple dominant real root, and (ii) root multiplicity implies dominance, i.e. it is assumed that placement of a triple real root implies finding the point of best performance.

<sup>☆</sup> The material in this paper was not presented at any conference. This paper was recommended for publication in revised form by Associate Editor Sorin Olaru under the direction of Editor Sophie Tarbouriech.

\* Corresponding author.

E-mail addresses: [oag@xnum.uam.mx](mailto:oag@xnum.uam.mx) (G. Oaxaca-Adams), [villafuerte@uaeh.edu.mx](mailto:villafuerte@uaeh.edu.mx) (R. Villafuerte Segura).

# A study on performance and fragility of controllers: PR and PD<sup>\*</sup>

Guillermo Oaxaca-Adams<sup>\*</sup> Raúl Villafuerte-Segura<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> *Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana, Ciudad de México, CP 09310, México (e-mail: oag@xanum.uam.mx)*

<sup>\*\*</sup> *Centro de Investigación en Tecnologías de Información y Sistemas, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Pachuca-Hidalgo, CP 42184, México (e-mail: villafuerte@uaeh.edu.mx)*

---

**Abstract:** This paper presents a study on the fragility and performance of two linear controllers for second-order systems: proportional retarded control (PR) and proportional derivative control (PD). The study is carried out through an analysis of the corresponding characteristic equation of the closed-loop system. In the case of the PR control, Taylor's theorem is used to show that if there exists a root of multiplicity three, it is necessarily dominant.

*Keywords:* PD control, PR control, fragility, performance, 2nd order systems.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

En el marco de la teoría de control, el diseño y la sintonización de leyes de control cada vez más eficientes es un objetivo primordial. Actualmente, existe en la literatura una gran cantidad de trabajos que aseguran proponer controladores con esta característica. En ocasiones, esta aseveración se realiza después de comparaciones arbitrarias y/o en condiciones desiguales de operación. En Alfaro (2007) se menciona que en un controlador debe considerarse su *desempeño*, *fragilidad* y *robustez*. Por lo que, resulta razonable establecer su eficiencia a partir de estas consideraciones. Además de compararlo con uno de los controladores más empleados y aceptados por la comunidad científica y la industria, aquellos del tipo PID, proporcional-integral-derivativo.

La *fragilidad* de un controlador se puede determinar a partir del margen de variación de sus propias ganancias (parámetros). Mientras que su *desempeño* se puede establecer por medio de la respuesta del sistema en lazo cerrado. Finalmente, la *robustez* de un controlador se puede decretar sabiendo los cambios permisibles en las características o parámetros del proceso o planta a controlar. Por lo tanto, la *robustez* y la *fragilidad* de un controlador deben considerarse de forma diferente e independiente, entendiendo que la *robustez* de un control indica el margen de variación permitido en los parámetros del proceso, con ganancias fijas del controlador, para no perder estabilidad; y la fragilidad de un controlador tiene un significado similar en términos de la variación de sus propias ganancias/parámetros. Por consiguiente, un controlador puede ser muy robusto, pero muy frágil a la vez. En este contexto, existen varios trabajos en los que

se determina la fragilidad de un controlador, entre ellos se encuentran Méndez-Barrios et al. (2008); Melchor-Aguilar and Niculescu (2009); Morărescu et al. (2011); Hernández-Díez et al. (2018) y Oaxaca-Adams et al. (2021).

En el marco de los controladores del tipo PID, hoy en día existen numerosas contribuciones respecto a su sintonización, desempeño e implementación, (Åström and Hägglund, 2001; Silva et al., 2005; Berner et al., 2018). Es una de las áreas de investigación más antiguas, aún activa y con mayor número de usuarios satisfechos al momento de implementarla; a pesar de los extraordinarios progresos que otras áreas de la teoría de control han tenido en las últimas décadas.

En el marco de los controladores retardados de tipo PR, se emplean deliberadamente retardos artificiales para estabilizar un sistema (Abdallah et al., 1993; Ulsoy, 2015). En algunos ocasiones a este tipo de controladores se les llama controladores retardados (delayed controllers), controladores con acciones retardadas, control de retroalimentación con retardo o retroalimentación retardada, entre otros. En Suh and Bien (1979, 1980), se propone un control proporcional con un retardo apropiado que puede reemplazar un control PD. Aquí los autores afirman que la respuesta del sistema es más rápida e insensible al ruido de alta frecuencia cuando se emplea el control retardado, en comparación con el uso del PD. En Pyragas (1992) se propone un esquema de control denominado time-delayed feedback control (TDFC), que da origen a diferentes investigaciones, Bleich and Socolar (1996); Just et al. (1997); de Sousa Vieira and Lichtenberg (1996); Swisher and Tenqchen (1988). En Kokame and Mori (2002), se discute la preservación de la estabilidad de lazo cerrado, cuando una retroalimentación derivada es reemplazada por una retroalimentación retardada (difference feedback), y se presenta un resultado favorable para la

---

<sup>\*</sup> Este artículo es financiado mediante el Programa Anual Operativo 2022 (PAO,2022) con clave 0503 de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

# On Hurwitz stability for families of polynomials

Guillermo Oaxaca-Adams<sup>1</sup> | Raúl Villafuerte-Segura<sup>2</sup>  | Baltazar Aguirre-Hernández<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics,  
Metropolitan Autonomous University,  
Mexico City, Mexico

<sup>2</sup>Research Center on Information  
Technology and Systems, Hidalgo State  
University, Mineral de la Reforma,  
Hidalgo, Mexico

## Correspondence

Raúl Villafuerte-Segura, Research Center on Information Technology and Systems, Hidalgo State University, Ciudad del Conocimiento. Carr. Pachuca - Tulancingo Km. 4.5 s/n, Col. Carboneras, Mineral de la Reforma, 42184, Hidalgo, Mexico.  
Email: [villafuerte@uaeh.edu.mx](mailto:villafuerte@uaeh.edu.mx)

## Abstract

The robustness of a linear system in the view of parametric variations requires a stability analysis of a family of polynomials. If the parameters vary in a compact set  $A$ , then obtaining necessary and sufficient conditions to determine stability of the family  $\mathfrak{F}_A$  is one of the most important tasks in the field of robust control. Three interesting classes of families arise when  $A$  is a *diamond*, a *box* or a ball of dimension  $n + 1$ . These families will be denoted by  $\mathfrak{F}_{D_n}$ ,  $\mathfrak{F}_{B_n}$ , and  $\mathfrak{F}_{S_n}$ , respectively. In this article, a study is presented to contribute to the understanding of Hurwitz stability of families of polynomials  $\mathfrak{F}_A$ . As a result of this study and the use of classical results found in the literature, it is shown the existence of an extremal polynomial  $f(\alpha^*, x)$  whose stability determines the stability of the entire family  $\mathfrak{F}_A$ . In this case  $f(\alpha^*, x)$  comes from minimizing determinants and in some cases  $f(\alpha^*, x)$  coincides with a Kharitonov's polynomial. Thus another extremal property of Kharitonov's polynomials has been found. To illustrate our approach, it is applied to families such as  $\mathfrak{F}_{D_n}$ ,  $\mathfrak{F}_{B_n}$ , and  $\mathfrak{F}_{S_n}$  with  $n \leq 5$ . The study is also used to obtain the maximum robustness of the parameters of a polynomial. To exemplify the proposed results, first, a family  $\mathfrak{F}_{D_n}$  is taken from the literature to compare and corroborate the effectiveness and the advantage of our perspective. Followed by two examples where the maximum robustness of the parameters of polynomials of degree 3 and 4 are obtained. Lastly, a family  $\mathfrak{F}_{B_5}$  is proposed whose extreme polynomial is not necessarily a Kharitonov's polynomial. Finally, a family  $\mathfrak{F}_{S_3}$  is used to exemplify that if the boundary of  $A$  is given by a polynomial equation in several variables, the number of candidates to be an extremal polynomial is finite.

## KEYWORDS

diamond polynomials, extremal property, Hurwitz stability, interval polynomials, polynomial family, robust stability

## 1 | INTRODUCTION

In the control theory framework, the design and tuning of a controller that ensures the efficient handling of a system is undoubtedly of great relevance. In this sense, three important aspects must be considered<sup>1</sup>: its *fragility* to the variation of its own parameters, its *performance* to a load disturbance or set-point change, and its *robustness* to the changes in the controlled process characteristics.



Contents lists available at ScienceDirect

Journal of the Franklin Institute

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/fi](http://www.elsevier.com/locate/fi)

## On Schur stability for families of polynomials

Guillermo Oaxaca-Adams<sup>a</sup>, Raúl Villafuerte-Segura<sup>b,\*</sup>, Baltazar Aguirre-Hernández<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Department of Mathematics, Metropolitan Autonomous University, Ave. San Rafael Atlixco 186, Mexico city 09310, Mexico

<sup>b</sup> Research Center on Information Technology and Systems, Hidalgo State University, Ciudad del Conocimiento. Carr. Pachuca - Tulancingo Km. 4.5 s/n, Col. Carboneras, Mineral de la Reforma, 42184, Hidalgo, Mexico

### ARTICLE INFO

#### Keywords:

Polynomial family  
Convex polytope  
Interval polynomials  
Robust stability

### ABSTRACT

Sometimes a robustness analysis of a linear discrete system (LDS) implies a study of stability in view of parametric variations in a set  $A$ . This leads to a stability analysis of a family of polynomials (FOP) denoted by  $\mathfrak{F}_A$ . Some of these families are the well-known family of interval polynomials (FOIP) denoted by  $\mathfrak{F}_{B_n}$ , where  $B_n$  is an  $(n + 1)$ -dimensional *box*, and the one-parameter family of polynomials denoted by  $\mathfrak{F}_{C_n}$ , where  $C_n$  is an  $(n + 1)$ -dimensional *curve*. Currently, there are several results to ensure the stability of these families. However, they are usually laborious processes, especially if the dimension of  $A$  is large and unfortunately for LDS there is not an analogous result to Kharitonov's Theorem for linear continuous systems (LCS). This paper proposes necessary and sufficient conditions to determine Schur stability of  $\mathfrak{F}_A$ . We prove the existence of an *extreme point*  $\alpha^* \in A$  such that the stability of the corresponding *extremal polynomial*  $f(\alpha^*, x)$  determines the stability of the entire family  $\mathfrak{F}_A$ , where  $A$  is a compact set. It is also shown that  $\alpha^*$  cannot be an interior point of  $A$ , so that  $\alpha^* \in \partial A$ . For some  $\mathfrak{F}_{B_n}$  and  $\mathfrak{F}_{C_n}$ , it is obtained an extremal polynomial or simple inequalities. This analysis and numerical examples suggest that the conditions proposed are a prominent alternative to results found in the literature.

### 1. Introduction

In the framework of control theory, proposing robust controllers is one of the current challenges for the scientific community of the area. Even more so, when an experimental platform is controlled using a digital process under the premise of variations and/or parametric uncertainties. In this framework, a robustness study of the corresponding closed-loop system leads to the search for necessary and sufficient stability conditions of a FOP. Undoubtedly, proposing less restrictive and simpler conditions than those currently found in the literature is an opportunity field.

Concepts and criteria to determine stability of a FOP depend on the type of system considered in the analysis: continuous or discrete. Regarding LCS, it is well-known that the stability is completely determined by the Hurwitz stability of its corresponding characteristic polynomial. When the parameters of this polynomial vary in a set  $A$ , the robustness of the polynomial is determined by the stability of its FOP, whose analysis and criteria depend on the topology of the set  $A$ . If  $A$  is a box, the best known criterion to determine stability of a FOIP is the Kharitonov's theorem. While for LDS, its stability is completely determined by the Schur's concept of stability of its corresponding characteristic polynomial. Just like for LCS, the robustness of the polynomial is determined by the Schur stability of its FOP, whose analysis and criteria depend on the topology of the set  $A$ . When  $A$  is a box, unfortunately there is not an analogous criterion to Kharitonov's theorem for LDS. However, the Edge Theorem is one of the best known criteria used by the community of the area.

\* Corresponding author.

E-mail addresses: [oag@xanum.uam.mx](mailto:oag@xanum.uam.mx) (G. Oaxaca-Adams), [villafuerte@uaeh.edu.mx](mailto:villafuerte@uaeh.edu.mx) (R. Villafuerte-Segura), [bahe@xanum.uam.mx](mailto:bahe@xanum.uam.mx) (B. Aguirre-Hernández).

<https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2024.01.045>

Received 27 June 2023; Received in revised form 12 December 2023; Accepted 24 January 2024

Available online 1 February 2024

0016-0032/© 2024 The Franklin Institute. Published by Elsevier Inc. All rights reserved.

# Apéndice B

## Reporte antiplagio

El siguiente reporte fue generado por Scribbr, <https://www.scribbr.com>

PAPER NAME

**LibroF.pdf**

AUTHOR

-

WORD COUNT

**34876 Words**

CHARACTER COUNT

**154008 Characters**

PAGE COUNT

**142 Pages**

FILE SIZE

**3.9MB**

SUBMISSION DATE

**Mar 20, 2024 2:16 PM CST**

REPORT DATE

**Mar 20, 2024 2:18 PM CST****● 8% Overall Similarity**

The combined total of all matches, including overlapping sources, for each database.

- 8% Internet database
- 0% Publications database

**● Excluded from Similarity Report**

- Bibliographic material
- Small Matches (Less than 9 words)