UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

TESIS

"ANÁLISIS DE LOS CONCEPTOS DE VALORES Y VECTORES PROPIOS QUE PRESENTAN DIVERSOS LIBROS DE TEXTO"

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

PRESENTA:

HUMBERTO ROBLES GUZMÁN

DIRECTOR:

Dr. FERNANDO BARRERA MORA

Enmarcada en el proyecto CONACyT "Bases Teóricas y Conceptuales en la Construcción del Conocimiento Matemático y el Empleo de Herramientas Digitales" con registro 61996

Pachuca de Soto, Hgo., 2010.

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es identificar las características didácticas de los diversos enfoques que presentan seis autores de libros de álgebra lineal, respecto al tema de valores y vectores propios. Se busca reportar si los conceptos de base, dimensión, dependencia e independencia lineal, entre otros, aparecen como eje al discutir los resultados y métodos cuando se discuten los temas de valores y vectores propios. Así mismo, se reportan algunas características de los ejemplos y tareas de aprendizaje que se relacionan con los conceptos citados. Estos libros de texto se toman como bibliografía base de la materia de álgebra lineal en diversas universidades del país.

SUMMARY

The aim of this study is to identify the didactic approach presented by six authors of linear algebra textbooks, on the subject of eigenvalues and eigenvectors. We seek to report if the concepts of base, dimension, linear dependence and linear independence, among others, appear as a fundamental idea to discuss the results and methods when discussing the issues of eigenvalues and eigenvectors. Likewise, we report some features of the examples and learning tasks that relate to the concepts mentioned. These textbooks are used as basic bibliography in linear algebra courses in various universities in the country.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

El álgebra lineal es una de las materias que se incluye en muchos programas de estudio a nivel licenciatura, por lo que un número considerable de estudiantes deben cursar y aprobar una asignatura básica en esta temática. Este curso incluye una cantidad de conceptos nuevos y abstractos para los estudiantes. Derivado de esto, se tiene que un porcentaje alto de estudiantes no tenga un resultado satisfactorio en tales cursos, lo cual ha dado origen a que se lleve a cabo un estudio sistemático del problema del aprendizaje del álgebra lineal. Al respecto, diversos estudios han documentado que los estudiantes enfrentan muchas dificultades en el aprendizaje de los conceptos fundamentales que se imparten en los cursos, como son: solución de un sistema de ecuaciones, dependencia lineal, dimensión, transformación lineal, entre muchos otros. El problema se torna más complicado cuando se deben utilizar estos y otros conceptos para el estudio de valores y vectores característicos. Para abordar la problemática del álgebra lineal, en 1990 se creó el “Linear Algebra Curriculum Study Group” (LACSG) que tenía por finalidad hacer un estudio para identificar algunos de los problemas en el aprendizaje y elaborar una propuesta para mejorar, tanto el aprendizaje como la enseñanza del álgebra lineal. Uno de los resultados del LACSG, fue la elaboración de un reporte en el que sugieren propuestas para mejorar la enseñanza de la asignatura.

A raíz del reporte del LACSG se han publicado varios trabajos [(Dorier, 2000), (Carlson 1997), entre otros] dedicados al estudio sobre el aprendizaje del álgebra lineal con la idea de incorporar las sugerencias y observaciones que se plantean en dicho reporte. También se han ampliado los grupos de investigación que tienen entre sus objetivos analizar e identificar causas que originan bajo aprovechamiento en los cursos de álgebra lineal.

Por ejemplo, varios estudios publicados en Dorier (2000) abordan el tema del aprendizaje del álgebra lineal desde dos perspectivas. La primera, con un carácter histórico y un análisis epistemológico, en donde se hace una descripción del desarrollo de los conceptos fundamentales del álgebra lineal de los siglos XVII al XX. En este estudio se pone de manifiesto la relevancia de las ideas geométricas inherentes al álgebra lineal. Por ejemplo, de acuerdo con los trabajos de Fermat y Descartes (Dorier 2000), los cuales amplían la geometría tradicional a la geometría en coordenadas o geometría analítica, aparece un vínculo entre la geometría y el álgebra lineal, al incorporar los métodos algebraicos a la solución de problemas geométricos. Se tuvo así una nueva variedad de objetos geométricos los cuales se podían identificar por sus ecuaciones, además, otro aspecto fundamental, es que la linealidad en geometría se hizo mucho más esencial. Por otra parte, la investigación en geometría analítica referente a invariantes (ecuaciones que fueran invariantes por cambios de coordenadas) condujo naturalmente a un análisis de los efectos de los cambios de coordenadas; esto es, lo que fue entonces referido como una sustitución lineal, hoy en día, más comúnmente conocido como transformación lineal sobre las curvas. En la segunda perspectiva de abordar el tema del aprendizaje del álgebra lineal (Dorier, 2000), se revisan los trabajos de varios grupos de investigadores en donde se plantean los diversos problemas relacionados con el aprendizaje y enseñanza del álgebra lineal. Un grupo francés, integrado por Dorier, Robert, Robinet y Rogalski llevaron a cabo diversos estudios sobre la enseñanza del álgebra lineal en universidades de Francia. En estos trabajos, se ha centrado la atención en el tipo de errores y dificultades de los estudiantes. Para entender estos aspectos, Robert introduce el concepto de *nivel de conceptualización* (elaboración detallada y organizada de un concepto a partir de datos concretos o abstractos), Rogalski da una descripción global de un *proyecto de enseñanza* con el cual experimentó durante varios años. Posteriormente, este grupo se dedica a la presentación de *meta nivel* (ubicarse en un plano de mayor perspectiva con la finalidad de encontrar nuevas vías de solución a un problema)*:* una nueva herramienta de enseñanza, elaborada para intentar hacer que los estudiantes superen los obstáculos del formalismo.

En Norteamérica, Harel (1997) presenta las recomendaciones hechas por el grupo LACSG, dando una interpretación personal de dichas recomendaciones a través de tres principios de enseñanza/aprendizaje: el principio de concreción, el principio de necesidad y el principio de generalización. Por su parte Hillel (2000) distingue varios modos de descripción (o lenguajes) usados en álgebra lineal: el modo abstracto, el modo algebraico y el modo geométrico. (Véase el tema 2.2 “Estudios sobre el aprendizaje del algebra lineal” de este trabajo).

En Canadá, Sierpinska (1999) analiza algunos aspectos del razonamiento de los estudiantes en el álgebra lineal. Ella basa su trabajo en varios experimentos de enseñanza realizados en la Universidad de Concordia, en Montreal. En su análisis, hace una distinción entre un pensamiento práctico y un pensamiento teórico. En la segunda etapa de su trabajo, Sierpinska distingue tres modos de razonamiento en álgebra lineal, correspondiendo a sus tres lenguajes interactivos: el lenguaje geométrico-visual, el lenguaje aritmético y el lenguaje estructural.

Todos estos trabajos tienen en común el tratar de identificar los obstáculos en el proceso de aprendizaje del álgebra lineal y con base en esto, elaborar propuestas de enseñanza y aprendizaje que permitan mejorar el aprovechamiento de los estudiantes.

Como se mencionó, se han elaborado un gran número de investigaciones referentes a las dificultades que tienen los alumnos al aprender el álgebra lineal, sin embargo, escasas investigaciones hacen alusión a que uno de los principales obstáculos que tienen los estudiantes es poder relacionar los conceptos matemáticos previamente estudiados con los del álgebra lineal. Uno de esos conceptos fundamentales es el de proporcionalidad. El desarrollar la habilidad de un pensamiento proporcional entre los estudiantes de los niveles básicos y medio ha sido de gran importancia en todos los sistemas educativos, la razón es que las relaciones lineales son la base para el planteamiento de numerosos problemas teóricos y prácticos en diversas situaciones dentro de las matemáticas y de las ciencias.

Desde un punto de vista epistemológico, tener un entendimiento profundo de los conceptos de razones y proporciones ha sido tomado en cuenta por diversos investigadores. Por ejemplo:

Lesh, Post, y Behr (1988) argumentan que el razonamiento proporcional es un concepto matemático fundamental, ya que es la parte más importante de la matemática elemental y a su vez es piedra angular de la matemática de nivel superior.

Confrey y Harel (1994) argumentan que el entendimiento de procesos multiplicativos (esto es, razones) es fundamental para un desarrollo exitoso del programa de matemáticas en el nivel medio.

El pensamiento proporcional es una parte importante de las matemáticas en el nivel básico y “conecta muchos de los conceptos matemáticos estudiados en el nivel medio y superior” (NCTM 2000, p. 217).

El concepto de linealidad permea diversas áreas de las matemáticas, desde la idea de medir magnitudes, el concepto de razones y la aplicación de la “regla de tres” en el nivel elemental, al uso de modelos lineales en cálculo y estadística, empleados en el nivel medio superior, hasta el álgebra lineal y sus generalizaciones pasando por los conceptos de espacio vectorial.

En lo que respecta a los conceptos de valores y vectores propios, también llamados valores y vectores característicos o eigenvalores y eigenvectores, se han elaborado diversos trabajos, centrando la atención en la comprensión de algoritmos para su cálculo, entre los que destacan un artículo de Axler (1995) argumentando la eliminación de determinantes del álgebra lineal y presentando una discusión de los conceptos de valores y vectores propios sin hacer uso de determinantes. Otro artículo de McWorter y Meyers (1998), también proporciona un algoritmo para el cálculo de valores y vectores propios sin determinantes. Esto se ha hecho desde diferentes enfoques, sin embargo, son escasas las investigaciones que se han realizado sobre la problemática de su aprendizaje. Parte de la problemática en el aprendizaje de los conceptos de valor y vector propio tiene su origen en la relación con los conceptos fundamentales del álgebra lineal, tales como dependencia lineal, bases y dimensión.

En este trabajo se desarrolla un análisis de los diversos enfoques que se presentan al discutir los conceptos de valores y vectores propios. Se toma un conjunto de seis diferentes textos que se usan como bibliografía básica y de consulta en los cursos de álgebra lineal en instituciones de educación superior del país como la Universidad Nacional Autónoma de México, la Universidad Autónoma Metropolitana, el Instituto Politécnico Nacional, entre otras. Se eligieron estas instituciones por considerarse representativas del nivel superior en México

Se realiza la comparación de los enfoques tomando como referencia los que se basan en el polinomio característico y aquellos que parten del polinomio mínimo. Otro elemento de análisis, es revisar si en su discusión hacen uso sistemático de los conceptos fundamentales del álgebra lineal como lo son dependencia lineal, base y dimensión, además de ver si llevan un nivel gradual en su discusión tanto del tema como de los ejemplos y ejercicios propuestos.

Todo esto se hace con la finalidad de identificar posibles características en el aprendizaje de los conceptos de valores y vectores característicos en los cursos de álgebra lineal.

Por todo ello, los objetivos de este trabajo son:

Objetivo general: Analizar los diversos enfoques que se presentan en las discusiones de los conceptos de valores y vectores propios en diversos libros de textos que se emplean como bibliografía principal en diversas universidades del país en las materias de álgebra lineal.

Objetivo específico: Analizar si el autor, al orientar la discusión de los conceptos de valores y vectores propios a través del polinomio característico y/o del polinomio mínimo, la sustenta en forma directa con los conceptos fundamentales del álgebra lineal como es dependencia lineal, base y dimensión.

2. ANTECEDENTES

2.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS

El álgebra lineal es una de las ramas de las matemáticas que tiene una gran cantidad de conceptos que se emplean tanto en aspectos teóricos como aplicados. Los conceptos y métodos son usados en diferentes áreas de la matemática y otras disciplinas. Es por ello que no es sorprendente el que los conceptos y resultados tengan conexiones estrechas con diversas áreas tales como: teoría de números, geometría, álgebra abstracta (grupos, anillos, campos, teoría de Galois), análisis (ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales, análisis funcional), y física. Entre los conceptos fundamentales del álgebra lineal se encuentran los de: ecuaciones lineales, matrices, determinantes, transformaciones lineales, independencia lineal, dimensión, formas bilineales, formas cuadráticas y espacios vectoriales. Puesto que estos conceptos están interconectados estrechamente, varios de ellos aparecen usualmente en un contexto dado (por ejemplo, ecuaciones lineales y matrices) y no es posible desligarse de ellos.

Los primeros rudimentos de lo que hoy conocemos como álgebra lineal se han encontrado en el documento matemático más antiguo que ha llegado hasta nuestros días: el papiro del Rhind, conservado en el British Museum con algunos fragmentos en el Brooklyn Museum, y conocido también como el Libro de Cálculo, el cual fue escrito por el sacerdote egipcio Ahmés hacia el año 1650 a.C. (Colette, 1986). En este documento se consideran las ecuaciones de primer grado, donde la incógnita aparece representada por un “ibis" que significa “escarbando en el suelo”, posiblemente por su aplicación a la agrimensura. Además, contiene 85 problemas redactados en escritura hierática y fue concebido originalmente como un manual práctico para los no iniciados. Según el propio Ahmés, el texto es una copia de uno más antiguo (2000-1800 a.C.), algunos de cuyos documentos proceden quizá de períodos anteriores (Colette, 1986).

Los babilonios sabían como resolver problemas concretos que involucraban ecuaciones de primer y segundo grado, usando el método de sustitución y el de completar cuadrados respectivamente. También conocían algunos métodos para resolver casos especiales de ecuaciones cúbicas y bicuadráticas, así como métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales y no lineales tales como:

$$\begin{cases} x \pm y = a \\ x^2 \pm y^2 = b \end{cases}, \qquad \begin{cases} x \pm y = a \\ xy = b \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} ax + y + cz = d \\ mx + ny + p = h \\ rx + sy + qz = 0 \end{cases}$$

Un ejemplo concreto de una tal situación que ha llegado hasta nuestros días es el siguiente problema:

"Existen dos campos cuyas áreas suman 1800 yardas cuadradas. Uno produce granos en razón de 2/3 de saco por yarda cuadrada, mientras que el otro produce granos en razón de 1/2 saco por yarda cuadrada. Si la producción total es de 1100 sacos, ¿cuál es el tamaño de cada campo?" (Collette, 1986)

Por su parte, los matemáticos chinos durante los siglos III y IV a.C. continuaron la tradición de los babilonios y nos legaron los primeros métodos del pensamiento lineal. Por ejemplo, en el tratado *Nueve capítulos sobre el Arte Matemático*, publicado durante la Dinastía Han, aparece el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

así como un método para su solución, conocido como la regla "fan-chen", la cual, en esencia, es el conocido método de eliminación gaussiana. Es interesante recordar el problema que dio origen a este sistema lineal, el cual es similar al planteado por los babilonios:

"Hay tres clases de granos; tres gavillas de primera clase, dos de la segunda clase y una de la tercera hacen 39 medidas; dos de la primera, tres de la segunda y una

de la tercera hacen 34 medidas; y una de la primera, dos de segunda y tres de la tercera hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de granos están contenidas en una gavilla de cada clase?"

Esta obra, *Nueve capítulos sobre el Arte Matemático,* fue compuesta por el hombre de estado y científico Chuan Tsanom en el año 152 a.C. y en él se incluyeron sistemáticamente todos los conocimientos matemáticos de la época (Ríbnikov, p. 31). Es oportuno recordar que dicha obra fue consultada por Carl Friederich Gauss (1777-1855) en un estudio sobre la órbita del asteroide Pallas. Usando observaciones de Pallas, tomadas entre los años 1803 y 1809, Gauss obtiene un sistema de seis ecuaciones lineales en seis incógnitas y da un método sistemático para resolver tales ecuaciones, hoy día conocido como *eliminación gaussiana* (Kleiner, 2007).

Luego vendrían los aportes de los matemáticos islámicos y europeos, quienes siguieron cultivando el pensamiento lineal (Kleiner, 2007). Por ejemplo, Leonardo de Pisa (1180-1250), mejor conocido como Fibonacci, en su obra *Liber Quadratorum* publicada en 1225, estudió el sistema no lineal:

$$\begin{cases} x^2 + a = y^2 \\ x^2 - a = z^2 \end{cases}$$

el cual es una generalización de un problema que le había propuesto Giovanni da Palermo (con a = 5).

Los matemáticos griegos, por su parte, no profundizaron en los problemas lineales, a pesar de poseer un reconocido pensamiento lineal en sus consideraciones geométricas de origen pitagórico y de reminiscencias babilónicas (Babini, 1980). No obstante, en sus trabajos se aprecian algunas tentativas del análisis diofántico, especialmente en el estudio de las magnitudes (Euclides 1991, Libro V) y las propiedades aritméticas de los números enteros (Euclides 1991, Libro VII). No olvidemos que la solución general de la ecuación de segundo grado aparece en los *Elementos* de Euclides (Euclides, 1991).

Lenguaje de vectores

El álgebra lineal tuvo un fuerte impulso gracias al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, tal como señalamos, y posteriormente, con los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y sus aplicaciones. En ambos contextos subyacen los importantes conceptos de *vector* y *espacio vectorial*.

A finales del siglo XVII fueron nuevamente analizadas y desarrolladas las ideas originales de los babilonios, y principalmente de los chinos, sobre el pensamiento lineal. Por ejemplo, el matemático y filósofo francés, y uno de los iniciadores de la *Enciclopedia*, D'Alembert descubre que las soluciones de un sistema $Ax = b$ forman una variedad lineal. Asimismo, Euler, Lagrange y el propio D'Alembert se dan cuenta que la solución general del sistema homogéneo $Ax = 0$ es una combinación lineal de algunas soluciones particulares.

En esa época aparecen con Hamilton, Arthur Cayley (1821-1895) y Hermann Günther Grassmann (1809-1877) las nociones de *vector* y de *espacio vectorial*, como una axiomatización de la idea de “vector" manejada por los estudiosos de la Mecánica desde fines del siglo XVII, un hecho que representó la génesis del *Cálculo vectorial*. Además, Grassmann introduce el producto geométrico y lineal, siendo el primero de éstos equivalente a nuestro *producto vectorial*. Asimismo, introduce las nociones de *independencia lineal* de un conjunto de vectores, así como el de *dimensión* de un espacio vectorial (Grassmann, 1844).

Álgebra de matrices

El primero en usar el término “matriz" fue el matemático inglés James Joseph Sylvester (1814-1897) en 1850 (Sylvester, 1912 vol. 3 p 72-87), quien definió una matriz como un “*oblong arrangement of terms*" (arreglo cuadrilongo de términos). A su regreso a Inglaterra en 1851, luego de un período migratorio en América, Sylvester establece contacto con Cayley, un joven abogado quien compartía su interés por la matemática y que pronto se dedicaría exclusivamente a ella. Cayley rápidamente entendería la importancia del concepto de matriz y por el año de

1853 publica una nota en donde aparece por vez primera la inversa de una matriz (Cayley, 1898 vol. 2 p 475). Más tarde, en 1858, publica su *Memoir on the theory of matrices*, la cual contiene la primera definición abstracta de matriz y donde se muestra que los arreglos de coeficientes estudiados anteriormente para las formas cuadráticas y las transformaciones lineales son casos especiales de este concepto general. Asimismo, Cayley desarrolla el álgebra matricial definiendo las operaciones básicas de suma, multiplicación y multiplicación por escalares, así como la inversa de una matriz invertible, junto con una construcción de la inversa de una matriz invertible en términos de su determinante y prueba que, en el caso de matrices 2×2, una matriz satisface su propia ecuación característica. Además, señala que se verificó este resultado para matrices 3×3, indicando su demostración, pero afirma: *"I have not thought it necessary to undertake the labour of a formal proof of the theorem in the general case of a matrix of any degree".*

En 1870, el matemático francés Camille Jordan (1838-1922) publica su *Traité des substitutions et des équations algébriques* (Jordan, 1957), en donde estudia una forma canónica para sustituciones lineales sobre cuerpos finitos de orden primo. En este contexto aparece por vez primera lo que hoy conocemos como la *forma canónica de Jordan*. Una presentación clásica de este importante resultado sobre un cuerpo arbitrario puede verse en Herstein (1964) y Hoffman (1961).

Arthur Cayley es considerado como el fundador de la teoría de matrices, aunque históricamente fueron los matemáticos chinos los pioneros en esta materia y el término matriz es debido a Sylvester (Kleiner, 2007). Uno de los principales méritos de Cayley fue la introducción de las operaciones básicas de suma y multiplicación de matrices, aunque indicios de éstas ya aparecen en trabajos anteriores de Euler, Lagrange y Gauss. Cayley probó además que la multiplicación de matrices es asociativa e introduce las potencias de una matriz, así como las matrices simétricas y antisimétricas. Por tanto, siendo fiel a la *Historia de la Matemática*, Cayley merece ser considerado como el fundador del *álgebra de matrices*.

Los orígenes del determinante

Aunque hoy en día se habla del determinante de una matriz, los dos conceptos tuvieron diferentes orígenes. En particular, el concepto "*determinante*" aparece antes que el de matriz (Kleiner, 2007), y en las primeras etapas, el determinante fue estrechamente ligado a ecuaciones lineales. Subsecuentes problemas que dieron lugar a nuevos usos del determinante incluye la teoría de eliminación (encontrar condiciones bajo las cuales dos polinomios tienen una raíz común, este concepto es el resolvente), transformación de coordenadas para simplificar expresiones algebraicas (por ejemplo, formas cuadráticas), cambios de variables en integrales múltiples, solución de sistemas de ecuaciones diferenciales, y mecánica celeste (Muir, 1960).

Cardano en su *Ars Magna*, muestra una regla para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, a la cual llama *regula de modo,* que esencialmente, es la conocida *regla de Cramer* para resolver sistemas lineales 2×2. Sin embargo, a pesar de que Cardano no ofrece una definición formal del determinante, en su método se pueden apreciar las primeras luces en esta dirección (Luzardo, 2006).

Tal como se apuntó antes, los inicios de la teoría de determinantes de matrices datan del siglo II a.C. con los matemáticos chinos. La idea de determinante apareció en Japón y Europa casi al mismo tiempo. En Japón, fue Takakasu Seki Kowa (1642-1708) el primero en publicar un trabajo sobre este tema. En efecto, en 1683, Seki escribió un manuscrito titulado *Método de resolver los problemas disimulados*, en el cual se incluyen algunos métodos matriciales expuestos en forma de tablas, al más puro estilo de los matemáticos chinos de esa época. Sin contar con un término que corresponda a la idea de determinante, Seki introduce los determinantes y ofrece métodos generales para calcularlos basados en ejemplos concretos, siendo capaz de calcular el determinante de matrices cuadradas de hasta orden 5.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) (Kleiner, 2007)

La aparición de la noción de determinante en Europa fue durante ese mismo año de 1683, en una carta de Leibniz a Guillaume de l‟Hôpital (1661-1704) en donde le explica que cierto sistema de ecuaciones lineales tiene solución. El estudio moderno de sistemas de ecuaciones lineales tuvo su origen con Leibniz, quien en 1693 inventó la noción de determinante para su propósito, aunque sus investigaciones permanecieron ocultas por algún tiempo. Leibniz usó la palabra “resultante" para ciertas sumas combinatorias de términos de un determinante y probó varias operaciones realizadas sobre éstos “resultantes”, incluyendo uno que, en esencia, es la conocida *regla de Cramer*. Leibniz también conocía que un determinante se puede expandir usando columnas, lo que hoy se conoce como la *expansión de Laplace*, y estudió los sistemas de coeficientes de ecuaciones, principalmente aquellos ligados a las formas cuadráticas en donde usó los determinantes (Kleiner, 2007).

En los años de 1730, Colin Maclaurin (1698-1746) escribió su *Tratado de álgebra*, el cual fue publicado en 1748, dos años después de su muerte. En este trabajo aparecen los primeros resultados sobre determinantes, se prueba la regla de Cramer para sistemas pequeños 2×2 y 3×3, y se indica como deducir el caso

4×4 (Kleiner, 2007). El propio Gabriel Cramer (1704-1752) anunció la regla general para sistemas $n \times n$ en su *Introduction a l'analyse des lignes courbes algébriques*, publicado en 1750 (Cramer 1750). Sin embargo, ésta sólo aparece enunciada en un Apéndice y sin ofrecer prueba alguna de tal hecho, conformándose el autor con señalar: *"Uno da el valor de cada incógnita formando n fracciones de las cuales el común denominador tiene tantos términos como existan permutaciones de n cosas"*. Cramer dirigió sus estudios a sistemas de ecuaciones lineales mientras intentaba resolver problemas geométricos, determinando una curva algebraica de grado „n" pasando a través de $(1/2)n^2 + (3/2)n$ puntos fijos (Bashmakova, 2000).

Los trabajos sobre determinantes empezaban a surgir con más regularidad, por ejemplo, en 1764, Etienne Bézout (1730-1783) muestra nuevos métodos para calcular determinantes, así como también Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) en 1771, Vandermonde se considera el primero en ofrecer una exposición consistente de la teoría de determinantes. Al respecto, en 1772, Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) generalizó algunos resultados de Vandermonde, Cramer y Bézout, y lanza una fuerte crítica a los métodos de Cramer y Bézout señalándolos de ser imprácticos y en un artículo en el que estudia las órbitas de los planetas, describe un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales sin necesidad de calcularlos explícitamente. Además, Laplace usa el término "resultante" para señalar lo que conocemos como determinante, y como apuntamos antes, éste es el mismo término usado por Leibniz. Laplace daba la expansión de un determinante como se conoce actualmente y por ello lleva su nombre "expansión de Laplace" (Luzardo, 2006).

Por su parte, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), en un artículo sobre Mecánica publicado en 1773, estudia identidades para determinantes funcionales 3×3. En este trabajo aparece por primera vez la interpretación del determinante como un volumen. En efecto, se prueba que el tetraedro formado por el origen $O(0,0,0)$ y los tres puntos $M = (x, y, z)$, $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ tiene volumen

$\frac{1}{6}\left|z(x_1 y_2 - y_1 x_2) + z_1(yx_2 - xy_2) + z_2(xy_1 - yx_1)\right|$. Este resultado también es atribuido a Grassmann, quien prueba que el valor absoluto del determinante del arreglo

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

representa el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores fila.

El uso de determinantes también se dio para encontrar raíces comunes a dos polinomios de grado *m* y *n*; un tema que había investigado tanto Newton como Euler, aunque fue un método de eliminación elaborado por Bézout el que se aceptó plenamente por los matemáticos (Luzardo, 2006).

El término “determinante" fue usado por vez primera por Gauss en sus *Disquisitiones arithmeticae* publicadas en 1801, en las cuales estudia formas cuadráticas en dos variables. Gauss usó este término para “determinar" completamente las propiedades de la forma cuadrática $ax^2 + 2bxy + cy^2$. Sin embargo, el concepto de determinante dado por Gauss no es el mismo que hoy conocemos, ya que Gauss calcula el descriminante de una ecuación cuadrática para “determinar” sus propiedades, y lo que conocemos hoy como determinante de una matriz *A* $n \times n$ se calcula mediante el cálculo de la expansión de cofactores a través de un renglón o bajando por alguna columna, para solución de un sistema de ecuaciones (Collette, 1986).

En este trabajo, Gauss considera los coeficientes de las formas cuadráticas en arreglos rectangulares y describe la multiplicación matricial (la cual considera sólo como una *composición*, lo que implica que no había alcanzado aún el concepto de álgebra de matrices), así como la inversa de una matriz en el contexto de los arreglos de coeficientes de formas cuadráticas.

En 1815, Gauss publica su memoria sobre determinantes. Años antes, en 1812, Cauchy introduce el término “determinante" en el sentido moderno. Este trabajo de

Cauchy es el más completo de la época sobre determinantes, en donde no sólo se prueban algunos resultados bien conocidos, sino también otras nuevas propiedades sobre menores y adjuntos. Asimismo, se prueba por primera vez el *teorema de la multiplicación* para determinantes, det(AB) = det(A) det(B). Cauchy también probó que los valores propios de una matriz simétrica con entradas complejas son números reales e introduce la *ecuación característica* de una matriz cuadrada.

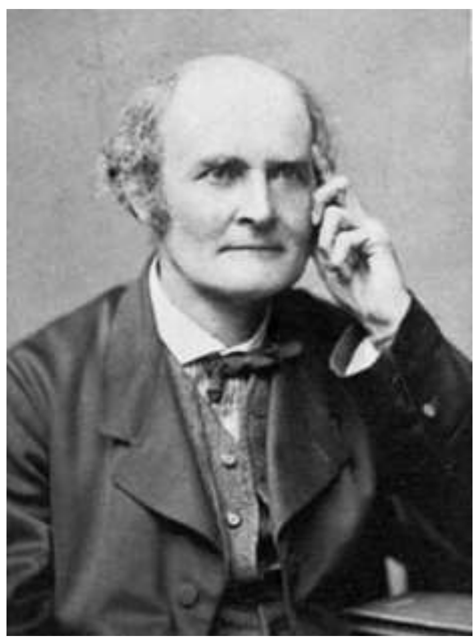
Por otra parte, Cauchy en 1826 y en el contexto de las formas cuadráticas en n variables, usó el término "tabla" ("tableau") para la matriz de coeficientes, introdujo los valores propios de este tipo de matrices y probó algunos resultados sobre diagonalización de una matriz con el propósito de convertir una forma cuadrática en una suma de cuadrados. También, Cauchy introduce la idea de matrices similares (pero no así el término) y prueba que si dos matrices son similares, entonces éstas tienen la misma ecuación característica, lo cual había sido probado anteriormente por Hamilton durante el desarrollo de su teoría de cuaterniones. Asimismo, y de nuevo en el contexto de las formas cuadráticas, Cauchy prueba que cada matriz real simétrica es diagonalizable (Luzardo, 2006).

Jacques Sturm (1803-1855) da una generalización del problema de los valores propios en el contexto de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. El concepto de un valor propio aparece varios años antes, también en trabajos sobre sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, en contribuciones de D'Alembert sobre la generalización del movimiento de una cuerda con masas atadas a ésta en varios puntos.

Ni Cauchy ni Sturm realizarón la generalidad de las ideas que estaban introduciendo, ya que las mostraron sólo en los contextos específicos en que ellos estaban trabajanado. Fue Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) alrededor de 1830 y más tarde Kronecker y Weierstrass durante los años 1850 y 1860, quienes trabajaron con matrices y valores propios, pero, de nuevo, en un contexto especial, esta vez relativo a la idea de una transformación lineal (Luzardo, 2006).

En 1841, Jacobi publicó tres tratados sobre determinantes, los cuales alcanzaron singular importancia, pues en ellos aparecen por vez primera una definición algorítmica del determinante y con la novedad de que las entradas en el determinante no sean especificadas, con lo cual sus resultados son igualmente aplicables tanto al caso en que las entradas eran números como cuando éstas sean funciones. Estos tres escritos de Jacobi hicieron la idea de determinante ampliamente conocido.

En 1843, Cayley publicó la primera contribución en idioma Inglés de la teoría de determinantes (Cayley, 1889). En este artículo se usan dos líneas verticales sobre ambos lados del arreglo de los coeficientes de la matriz para denotar el determinante, una costumbre que se conserva hasta hoy. Cayley también probó que una matriz cuadrada *A* es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$ (Luzardo, 2006).



Arthur Cayley (1821-1895) (Wikipedia)

La definición axiomática del determinante que hoy conocemos como la (única) función multilineal alternada y que toma el valor 1 en la matriz identidad se debe a Kronecker y Weierstrass. Algunas de las conferencias de Weiertrass fueron publicadas después de su muerte (1897), por ejemplo, en el año de 1903 se publicó la nota *Sobre la teoría de determinantes*. En ese mismo año, las conferencias de Kronecker sobre determinantes fueron publicadas, también como obra póstuma, y donde se introduce el *producto tensorial* de espacios vectoriales. Con estas dos contribuciones la teoría moderna de determinantes comenzó a ocupar un lugar preponderante en la teoría de matrices. Uno de los primeros libros publicados en el siglo XX en donde se trata a las matrices por su propio interés es *Introduction to higher algebra*, escrito por Bôcher en 1907. Asimismo, Turnbull y Airen escribieron influyentes libros sobre esta materia durante los años 1930, mientras que Sir Thomas Muir (1844-1934) nos legó una descripción general de la historia de la teoría de determinantes, desde su descubrimiento por Seki y Leibniz en 1683 hasta 1920 (Luzardo, 2006).

No podemos olvidar los aportes de Sylvester a la teoría de determinantes. Sylvester introdujo gran parte del lenguaje moderno del álgebra lineal y probó la llamada *Ley de inercia*, la cual establece que si una forma cuadrática $X^t\ AX$ se reduce a suma de cuadrados de dos formas diferentes (es decir, si se obtienen dos formas canónicas diferentes para dicha forma cuadrática), el número de coeficientes positivos es el mismo en ambas expresiones, y lo mismo ocurre con el número de coeficientes negativos y con el número de coeficientes nulos, aunque ésta ley ya había sido descubierta por Jacobi (Luzardo, 2006).

A Sylvester se debe el término matriz, como hemos mencionado, así como los primeros progresos de la teoría de valores propios de un operador lineal. En particular, Sylvester probó que los valores propios del operador lineal T^n son las potencias *n*-ésimas de los valores propios de *T*. En los cimientos del álgebra lineal también destacan las contribuciones de Henrich Sherz, quien demostró algunas de las propiedades básicas de los determinantes, tales como la linealidad en cada columna:

$$\det\begin{bmatrix} a_1+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & c_2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

Y

$$\det\begin{bmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{bmatrix} = k\det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

entre otras. Otro aporte de Sylvester a la teoría de matrices es el concepto de *nulidad* de una matriz cuadrada *A*, denotada por *n*(*A*), introducido en 1884, como el mayor número entero positivo *i* tal que cada menor de *A* de orden $n-i+1$ es cero, y probó que

$$máx\left\{n(A), n(B)\right\} \leq n(AB) \leq n(A) + n(B)$$

El camino de las investigaciones de Sylvester, junto con Cayley y Charles Hermite (1822-1901), siempre estuvo dirigido hacia la búsqueda de *invariantes* de matrices, es decir, propiedades que no cambian bajo ciertas transformaciones, siendo la nulidad uno de éstos invariantes (Luzardo, 2006).

Teoría espectral

Los valores propios son introducidos en el contexto del álgebra lineal o teoría de matrices y pertenecen a los temas de mayor utilidad del álgebra lineal. Se usan en varias áreas de las matemáticas, física, mecánica, ingeniería eléctrica y nuclear, hidrodinámica, aerodinámica, etc., de hecho, es raro encontrar un área de la ciencia aplicada donde nunca se hayan usado.

Puede parecer muy extraño, pero los conceptos de valores propios de las matrices fueron utilizados antes de definir el concepto de matriz. Esto se debe al hecho insólito de que, según Cayley, la teoría de las matrices estaba bien desarrollada (a través de la teoría de los determinantes) antes de que siquiera se definieran las matrices. Históricamente, los valores propios se originaron en el contexto de formas cuadráticas, ecuaciones diferenciales y en la mecánica celeste (el movimiento de los planetas), conociéndose como *raíces características de la ecuación escalar*.

El tema de los valores propios apareció cuando Euler, en el primer tercio del siglo XVIII, estudió sistemáticamente la ecuación general de segundo grado en dos y tres variables en el plano y en el espacio respectivamente. Posteriormente en 1760 en su libro *Recherches sur la courbure des surfaces*, al estudiar las secciones normales de una superficie en un punto encuentra que hay dos planos mutuamente ortogonales cuyas secciones proporcionan las curvas de máxima y mínima curvatura. Posteriormente se vio que estas dos situaciones son casos particulares del hecho de que una matriz simétrica sea ortogonalmente diagonalizable (Kline, 2002).

Polinomio Característico

La noción de polinomio característico aparece explícitamente en el trabajo de Lagrange en 1774 donde realiza el estudio de un sistema de seis ecuaciones diferenciales del movimiento de los planetas (sólo se conocían seis) y de ahí dedujo una ecuación polinomial de sexto grado, cuyas raíces eran los valores propios de una matriz 6×6. Además, dicho concepto también está en un trabajo de Laplace de 1775 (Kline, 2002).

Fourier usó el trabajo de Laplace y Lagrange para resolver la ecuación de calor por separación de variables en su famoso libro de 1822 *Théorie analytique de la chaleur*. Sturm fomentó las ideas de Fourier y atrajo la atención de Cauchy.

Cauchy reconoció el problema del valor propio en la obra de Euler, Lagrange y Laplace. En 1826 tomó el problema de la reducción de la forma cuadrática en tres variables y demostró que la ecuación característica es invariante para cualquier cambio en los ejes rectangulares, en lenguaje moderno, si A es una matriz cuadrada y si S es invertible, entonces $\det(A-\lambda I)=\det(SAS^{-1}-\lambda I)$.

En 1829 Cauchy prueba que los valores propios de una matriz simétrica son reales. Esto fue extendido por Hermite (1822-1901), quien en 1855 introduce lo que hoy conocemos como matrices hermitianas $(A=\overline{A}^{T})$. Alrededor del mismo tiempo, Brioschi demostró que los Eigenvalores de matrices ortogonales están sobre el círculo unitario (Kline, 2002).

Frobenius en 1878 prueba la diagonalizabilidad de las matrices ortogonales, extendiendo en 1883 la demostración a matrices unitarias $(A\overline{A}^{T} = I)$. El teorema espectral para matrices normales $(A\overline{A}^{T} = \overline{A}^{T}A)$ es debido a Toeplitz (1881-1940).

Jacobi (1804-1851) dio la solución del sistema de ecuaciones diferenciales $Y' = AY$ siendo A una matriz diagonalizable. Jordan resolvió el caso no diagonalizable usando los conceptos de matrices similares (dos matrices A y B se dicen similares si existe una matriz invertible S tal que $A = SBS^{-1}$) y de ecuación característica. En el libro *Traité des substitutions* (1870) demostró que una matriz puede ser transformada a una forma canónica hoy llamada forma canónica de Jordan (Kline, 2002).

Un paso simultáneo hacia el concepto de valor y vector propio en un espacio vectorial abstracto lo dieron Sturm y Liouville al estudiar las ecuaciones que hoy llevan su nombre. Observaron que si ϕ es cierto operador diferencial, entonces existe una sucesión de valores λ_n tales que existen funciones y_n no nulas ortogonales entre sí verificando $\phi(y_n) = \lambda_n y_n$.

Desde 1904 hasta 1910, Hilbert estudió la ecuación integral $u(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy$ en donde supone que K es simétrico y define lo que es un operador autoadjunto $(T = T^*)$ para un espacio de funciones, lo que le permite hacer uso de las propiedades de las matrices simétricas en el caso finito. En concreto demuestra que el operador $\phi(u)(x) = \int_a^b K(x, y)u(y)dy$ es autoadjunto. Las autofunciones asociadas a los distintos autovalores son perpendiculares dos a dos. Con estos resultados Hilbert puede demostrar lo que se conoce como el teorema de los ejes principales generalizado en espacios de dimensión infinita. Hilbert llevó a cabo un proceso de paso al límite que le permitió generalizar resultados sobre sistemas finitos de ecuaciones lineales. Sobre esta base decidió que un tratamiento de las formas cuadráticas infinitas "*vendría a completar de una manera esencial la teoría bien conocida de las formas cuadráticas con un número finito de variables*".

Hilbert fue el primero en usar la palabra germana "Eigen" para denotar los Eigenvalores y eigenvectores en 1904, aunque pudo haber sido después de un uso relacionado por Helmholtz (Kline, 2002).

Teorema de Cayley-Hamilton

El que cada matriz cuadrada con entradas en un campo (conmutativo) arbitrario *K* satisfaga su propia ecuación característica, introducida por Cauchy como antes mencionamos, se conoce hoy día como el *teorema de Cayley-Hamilton*, es decir, si *A* es una tal matriz cuadrada, *I* es la matriz identidad de igual orden que *A* (y con entradas en *K*) y $p(x) = \det(xI - A) \in K[x]$ (llamado el *polinomio característico de A en K*[*x*]), entonces $p(A) = 0$.

Este teorema de Cayley-Hamilton es un resultado medular para la teoría de matrices y fue probado originalmente por Cayley para matrices 2×2, como mencionamos antes, y posteriormente por Hamilton para matrices 3×3.

En 1878, Frobenius publica una de las más valiosas contribuciones a la teoría de matrices titulada *Sobre sustituciones lineales y formas bilineales*, en la cual trabaja con coeficientes de formas cuadráticas sin usar el término matriz (Frobenius 1878). Sin embargo, prueba importantes resultados sobre matrices canónicas como representantes de clases de equivalencia de matrices y cita a Kronecker y Weiertrass por haber considerado casos especiales de este resultado en 1874 y 1868, respectivamente. Frobenius también prueba el resultado general de que cada matriz cuadrada satisface su ecuación característica. A pesar del hecho que Cayley y Hamilton sólo probaron casos pequeños del teorema de Cayley-Hamilton, Frobenius generosamente atribuyó este resultado a Cayley, a pesar de que fuese él mismo quien probó el teorema en su forma general. Años más tarde, en 1896, Frobenius habría de conocer la *Memoir on the theory of matrices* de Cayley de 1858 y a partir de entonces comienza a usar el término matriz.

Georg Ferdinand Frobenius (1849-1917) (Kleiner, 2007)

Se debe destacar igualmente la influencia de Frobenius sobre el desarrollo de la noción de *transformación lineal*, la cual venía evolucionando desde el siglo XVIII con los trabajos de Cauchy, Weierstrass y Kronecker, entre otros, y que adoptaría su forma actual en 1918 de la mano del matemático alemán Hermann Weyl (1885-1955). A Frobenius también debemos las nociones de rango de una matriz (la cual usa en su trabajo sobre formas canónicas, así como la definición de *matrices ortogonales*), equivalencia y congruencia de matrices. En tal sentido, Frobenius probó que si A y B son matrices semejantes y f es un polinomio con coeficientes matriciales (y del mismo orden de A y B), entonces las matrices $f(A)$ y $f(B)$ también lo son (Kleiner, 2007).

2.2 ESTUDIOS SOBRE EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA LINEAL

La investigación sistemática sobre el problema del aprendizaje del álgebra lineal tiene su inicio en el siglo XX, más precisamente en los años ochenta del siglo pasado, y gradualmente convertido en tema de mayor interés desde los noventa. (Dorier, 2000).

Un amplio número de estudios relacionados con el entendimiento del álgebra lineal en el nivel superior se han realizado en los últimos años. Haremos una revisión de algunos trabajos desarrollados por diversos grupos de investigadores. En estos trabajos se hace énfasis sobre la didáctica del álgebra lineal, y al hacer esto se identifican diversos obstáculos que pudiesen ser la causa del bajo aprovechamiento de los estudiantes; a la vez se proponen algunas recomendaciones para abordar el problema del aprendizaje.

Dorier (Dorier 2000 Parte II capitulo 1) argumenta que se puede hacer una clasificación del tipo de dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del álgebra lineal: su misma naturaleza (*dificultades conceptuales*), y el tipo de pensamiento requerido para la comprensión de los conceptos que involucra (*dificultades cognoscitivas*). Enseguida se describe cada una de dichas dificultades, en donde además, se percibe la necesidad que tienen los estudiantes de involucrarse, a lo largo de su trabajo matemático, en un análisis reflexivo de los conceptos del álgebra lineal y con ello desarrollar una red conceptual con la finalidad de lograr un aprendizaje con entendimiento[1]

1. Carpenter y Lehrer (1999). El entendimiento no es un fenómeno de todo o nada. Virtualmente todas las ideas complejas o procesos pueden entenderse en un número de niveles y de manera diferente. Por lo que, es más apropiado pensar que el entendimiento surge o se desarrolla en lugar de considerar que alguien entiende o no entiende algún tópico, idea o proceso. Como consecuencia, caracterizan el entendimiento en términos de una actividad mental que contribuye al desarrollo del entendimiento en lugar de un atributo estático del conocimiento de un individuo.
Han propuesto cinco formas de actividad mental a partir de las cuales surge el entendimiento matemático:
a) Construcción de relaciones, b) extendiendo y aplicando el conocimiento matemático, c) reflexionando sobre experiencias matemáticas, d) articulando lo que uno ya conoce, y e) hacer conocimiento matemático por uno mismo.
El entendimiento produce confianza y compromiso; el no entendimiento conduce a desilusión y desvinculación.

2.2.1 DIFICULTADES CONCEPTUALES

El grupo de investigadores formado por Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (Dorier, 2000) hace un diagnóstico de la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal en las universidades de Francia. Dan un punto de vista de los principales errores y dificultades de los estudiantes y, en relación con el análisis histórico, les permite un mejor entendimiento de cómo la naturaleza de unificación y generalización del álgebra lineal es una fuente de dificultades de su aprendizaje y enseñanza.

Robert y Robinet (1989) indican que la principal crítica que hacen los alumnos que cursan álgebra lineal es que no es más que un gran catálogo de conceptos muy abstractos que representan con gran dificultad. En resumen, están sumergidos en una avalancha de nuevas palabras, nuevos símbolos, nuevas definiciones, nuevos teoremas y sobre todo, la falta de conexión de todo ello con lo que ya conocen de matemáticas.

Por otra parte, los maestros consideran que el operar y encontrar significado a las nuevas definiciones, formas de expresión y representaciones de los conceptos del álgebra lineal, requiere por parte de los alumnos usar ciertas herramientas básicas de lógica o teoría de conjuntos, de las que en ocasiones carecen, por lo que se convierte también en un obstáculo del aprendizaje.

Dentro de las dificultades conceptuales que son específicas al álgebra lineal se considera el desarrollo de los diversos lenguajes o modos de descripción o representación:

A) Lenguaje formal

Varios estudios de diagnóstico dirigidos por Dorier, Robert, Robinet y Rogalski entre 1987 y 1994 (Dorier, Robert , Robinet y Rogalski , 2000) apuntan a un solo obstáculo bien fundado que aparece en todas las sucesivas generaciones de estudiantes y para casi todos los modos de enseñar, a saber, lo que los autores llamaron el *obstáculo del formalismo.*

El formalismo establece que todo concepto matemático nuevo debe ser presentado a través de definiciones puramente axiomáticas y que toda demostración matemática debe ser llevada a través de los procesos de deducción basados en los principios y axiomas.

Las dificultades de los estudiantes con el aspecto formal de la teoría de los espacios vectoriales no es sólo un problema general con el formalismo sino principalmente una dificultad de entender el uso específico del formalismo dentro de esta teoría y la interpretación de los conceptos formales en relación con los contextos más intuitivos como el geométrico o sistemas de ecuaciones lineales en que ellos surgieron históricamente.

B) Lenguaje abstracto, algebraico y geométrico

Hillel (2000) distinguió tres lenguajes o representaciones básicos usados en el álgebra lineal:

1. El "*lenguaje abstracto*". Usa el lenguaje y conceptos de la teoría general formalizada incluye el espacio vectorial, dimensión, las transformaciones lineales de espacios vectoriales, la teoría general de eigenvalores, etcétera.

El álgebra lineal, como parte de las matemáticas, basa gran parte de su contenido en forma de expresiones aritméticas, expresiones simbólicas que propician un conocimiento más abstracto. Se trata por tanto de una disciplina que goza de un elevado grado de abstracción, en la que existe una cierta mediación semiótica del conocimiento de tal forma que podemos afirmar que "*los signos representan objetos que son signos"* (Sierpinska, Dreyfus e Hillel, 1999). En consecuencia un conocimiento teórico adecuado del álgebra lineal está fuertemente ligado a la identificación de estos objetos abstractos bajo diferentes representaciones simbólicas. Ese formalismo presente en el álgebra lineal es quizá un obstáculo muy frecuente que causa una de las principales dificultades para el aprendizaje de esta área del conocimiento.

2. El “*lenguaje algebraico*”. La principal función del lenguaje algebraico es proporcionar una estructura que ayude a generalizar las diferentes operaciones que se desarrollan dentro del álgebra lineal, donde se incluyen las diversas operaciones con n-uplas, producto, suma, resta, inversa y rango de matrices, la solución de sistemas de ecuaciones lineales, transformaciones lineales, etcétera. El lenguaje algebraico es el que usamos para "esquematizar" o "abreviar" cualquier situación problemática real o hipotética, lo que nos permite resolverla en forma eficiente. Además, para saber el orden en el que se solicitan y realizan las operaciones se necesita habilidad, es decir, saber diferenciar las operaciones correctas y tener la habilidad para desarrollarlas es parte principal de un lenguaje algebraico.

3. El “*lenguaje geométrico*”, se usa para describir y clasificar las formas y maneras de esquematizar los espacios de dos y tres dimensiones que incluyen los segmentos de línea dirigidos, los puntos, las rectas, los planos, las transformaciones de figuras geométricas, entre otros.

Además, los estudiantes tienen que enfrentarse a un cierto tipo de reflexión en el uso de sus conocimientos y competencias anteriores en relación con los nuevos conceptos formales. Dorier, Robert, Robinet y Rogalski introducen lo que ellos llamaron actividades de “meta lever” (Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 2000). Con la palabra “meta” ellos se refieren a armar actividades a través de las cuales se espera una actitud reflexiva en las tareas matemáticas del estudiante y con “lever” apuntan hacia algo que tiene que ser usado en el momento correcto en el lugar correcto para ayudar al estudiante a entrar en esta actividad reflexiva mientras va realizando una tarea matemática que se ha preparado cuidadosamente.

C) Registro gráfico, tabular y simbólico

Según Duval (1995), hay al menos dos consideraciones a tomar en cuenta en la actividad cognitiva implicadas en las estrategias matemáticas. Por una parte, no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación, pero se requiere del manejo de estas representaciones para comprender el objeto. Se busca entonces la formación, tratamiento y conversión de los registros semióticos de representación del objeto para lograr su aprendizaje; y por otra, los objetos matemáticos no son accesibles mediante la percepción, como pudiera ocurrir en algunos de los objetos de otras disciplinas.

A partir de aquí, Duval plantea dos interrogantes claves en relación con el aprendizaje: ¿cómo aprender a cambiar de registro? y ¿cómo aprender a no confundir un objeto con la representación que se hace de él?

Duval definió las *representaciones semióticas* como producciones hechas por el uso de signos que pertenecen a un sistema de representación que tiene sus propias restricciones de significado y funcionamiento. Las representaciones semióticas, según él, son completamente necesarias en la actividad matemática, porque sus objetos no pueden percibirse directamente y deben, por consiguiente, ser representados. Es más, las representaciones semióticas no sólo son un medio de externar las representaciones mentales para comunicar, sino que ellas también son esenciales para la actividad cognoscitiva de pensar. De hecho, juegan un papel en las representaciones mentales en vías de desarrollo, logrando funciones cognoscitivas diferentes (la comprensión de los conceptos, el cálculo, etc.), así como producir conocimiento. Duval enfatizó la distinción entre *semiosis* o la comprensión o producción de una representación por signos, de *noesis* o la comprensión conceptual de un objeto, mientras afirma que los dos actos no pueden separarse en los procesos cognoscitivos verdaderos.

En lo referente a la actividad cognoscitiva unida a la semiosis, Duval distingue tres tipos de actividades:

-La formación de una representación que puede identificarse como perteneciente a un registro dado.
-El proceso y transformación de una representación dentro del registro donde fue creado.

-La conversión, es decir, la transformación de una representación semiótica de un registro a otro.

Él enfatizó la importancia de la tercera actividad describiéndola como un pasaje necesario para coordinar los registros ligados al mismo concepto y afirmó que, mientras las dos primeras actividades parecen tomarse en cuenta en la enseñanza de la matemática, el tercero normalmente se ignora.

En otras investigaciones, Pavlopoulou e Hillel muestran la importancia, en el entendimiento del álgebra lineal, de las habilidades de traducir de un registro o lenguaje a otro. En su trabajo, Pavlopoulou (1993) utilizó las representaciones semióticas definidas por Duval (1995) en el contexto del álgebra lineal. Ella distinguió entre tres registros de representación semióticos de vectores:

Registro gráfico (las flechas)
Registro por tabla (las columnas de coordenadas)
Registro simbólico (la teoría axiomática de los espacios vectoriales)

Identificó varios errores de los estudiantes que podrían interpretarse como una confusión entre un objeto y su representación (sobre todo un vector y su representación geométrica) o como una dificultad de conversión de un registro a otro.

2.2.2 DIFICULTADES COGNOSCITIVAS

Durante el proceso de aprendizaje, un comportamiento inestable es posible, ya que las ideas anteriores pueden entran en conflicto con los nuevos conocimientos. Piaget usa el término *asimilación* para describir el proceso mediante el cual los individuos fijan la nueva información en las estructuras cognitivas existentes y *acomodación* al proceso mediante el cual la estructura cognitiva de los individuos debe ser modificada, alterando las estructuras existentes o creando nuevas. Él vio la asimilación y la acomodación como complementarias. Skemp(1979) da ideas similares en una manera diferente, distinguiendo entre el caso donde el proceso de aprendizaje causa una simple expansión de la estructura cognitiva del individuo y el caso donde existe un conflicto cognitivo, requiriendo una reconstrucción mental. Es este proceso de reconstrucción el cual provoca las dificultades que ocurren durante la fase de transición.

Diversos trabajos sobre las dificultades cognoscitivas del álgebra lineal han sido desarrollados, entre los que se cuentan los siguientes:

a) La flexibilidad cognoscitiva

Alves (1998) probó que la flexibilidad o acomodo de los diversos cambios de registro no es suficiente, es necesario un control sobre un nivel más conceptual. Ella mostró que en los libros de texto y en las clases, en general, las tareas ofrecidas a los estudiantes están muy limitadas en términos de flexibilidad. Sobre un nivel más general, un entendimiento de álgebra lineal requiere tanto de una "*flexibilidad cognitiva*" entre varios lenguajes (el lenguaje de la teoría de matrices, y el lenguaje de la teoría de espacios vectoriales), como de los registros semióticos.

El alumno con una flexibilidad cognoscitiva es capaz de un pensamiento divergente, es decir, examina un objeto desde varias perspectivas, además de establecer relaciones ocultas. Por ejemplo, el resolver un problema en diversos contextos, donde su solución es a través de un sistema de ecuaciones lineales, lo podrá resolver aplicando diferentes métodos (regla de Cramer, eliminación de Gauss), además, realizar una representación geométrica de las ecuaciones y analizar el tipo de solución obtenida según el contexto dado.

b) El nivel trans-objeto de pensamiento

Hillel y Sierpinska (1994), enfatizaron que un curso de álgebra lineal que es más teórico que computacional requiere de un nivel de pensamiento que está basado en lo que ha sido llamado por Piaget y García (1989) como el "nivel trans-objeto de análisis" que consiste en construir estructuras conceptuales de los que, en niveles anteriores, eran objetos individuales, las acciones sobre estos objetos, y transformaciones de ambos (los objetos y las acciones). Una afirmación similar hizo Harel (2000), en sus aserciones de que un sustancial rango de procesos mentales debe inducir en objetos conceptuales cuando los estudiantes consigan estudiar el álgebra lineal, como por ejemplo, las funciones no deben ser sólo reglas para producir números de otros números sino objetos en sí mismos, que pueden sumarse, pueden multiplicarse por escalares, y pueden combinarse.

La dificultad de pensar al nivel trans-objeto lleva a algunos estudiantes a desarrollar “mecanismos de defensa” (a “sobrevivir” el curso), que consiste en intentar producir un discurso formalmente escrito similar al del libro de texto o de la clase pero sin asir el significado de los símbolos y la terminología.

Esto aparecía como un problema mayor para Sierpinska, Dreyfus e Hillel (Sierpinska, Dreyfus & Hillel, 1999), por lo que comenzaron a diseñar una introducción al álgebra lineal que haría este comportamiento o actitud menos probable de aparecer en los estudiantes.

c) El pensamiento teórico y práctico.

Sierpinska (2000), a partir de una serie de experiencias de proyectos de enseñanza, identifica que la tendencia de los estudiantes es tener en cuenta su pensamiento práctico (caracterizado por intuiciones que dependen de un contexto), más que el pensamiento teórico en álgebra lineal y ésta es una de las razones de muchas de las dificultades, especialmente con los aspectos estructurales de la teoría. Aclara Sierpinska que el planteamiento del pensamiento teórico y del pensamiento práctico fue inspirado por la distinción de Vygotski entre conceptos cotidianos y conceptos científicos.

Para Sierpinska, el *pensamiento teórico* es una actividad mental especializada en sí mismo y el *pensamiento práctico* es una actividad auxiliar que acompaña y guía otras actividades. Ella asume que el pensamiento teórico se caracteriza por una reflexión concienzuda sobre significados semióticos de representación del conocimiento, así como sobre sistemas de conceptos y no solo de acumulación de ideas. Supone además que en el pensamiento teórico el razonamiento está basado en conexiones semánticas y lógicas entre conceptos dentro de un sistema; las conexiones entre los conceptos se hacen con base en sus relaciones hacia conceptos más generales, de los cuales los anteriores son casos especiales, en lugar de asociaciones empíricas. Las relaciones entre los conceptos y los objetos se dan a través de las relaciones entre unos y otros conceptos. En particular, las definiciones de los conceptos, comparaciones entre ellos y sus diferencias se construyen sobre la base de las relaciones entre estos conceptos con conceptos más generales y no sobre la base de sus ejemplos más comunes (Sierpinska, 2000).

A partir de esta primera aproximación, Sierpinska y su grupo se dan a la tarea de describir más precisamente el pensamiento teórico versus pensamiento práctico, así como a identificar cuáles son sus características específicas para el aprendizaje del álgebra lineal.

Caracterizaron el pensamiento teórico en tres categorías principales, aclarando que el pensamiento teórico es reflexivo, sistémico y analítico.

Reflexivo. Consiste en pensar por el afán de pensar. El pensador es consciente de pensar en sus propios pensamientos, no en pensamientos impuestos por una autoridad.

Sistémico. Consiste en pensar acerca de estructuras de conceptos, donde el significado de un concepto está basado en sus relaciones con otros conceptos y no con cosas o eventos.

Analítico. Consiste en comprender una situación dividiéndola en partes pequeñas o determinando las implicaciones de una situación paso a paso estableciendo causalidades.

Podemos argumentar al respecto que cuando el alumno tiene un pensamiento teórico es consciente de los conceptos con los que opera, mientras que con un pensamiento práctico centra su atención en los objetos concretos y no repara en sus conceptos ya aprendidos para relacionarlos. Entonces, la conexión entre diversos conceptos sólo podrá hacerse cuando el estudiante tome conciencia de los conceptos con los que opera; es decir, cuando adquieran significado para él.

Por otro lado, Sierpinska y su grupo muestran la interacción necesaria entre tres modos de razonamiento diferentes, denominados respectivamente como sintético y geométrico, analítico y aritmético, y, analítico y estructural.

En el modo sintético, los objetos matemáticos son, de alguna forma, accesibles directamente a la mente, que intenta asimilarlos y describirlos. En el modo analítico, los objetos matemáticos se presentan indirectamente: construidos a través de definiciones y propiedades de sus elementos. Este modo analítico es dividido por los investigadores en dos sub-modos distintos: el analítico aritmético, donde los objetos vienen dados por una fórmula que hace posible calcularlos, y el analítico estructural, donde los objetos se definen por un conjunto de propiedades.

2.2.3 PROCESO DE ENSEÑANZA

La enseñanza es una actividad realizada conjuntamente mediante la interacción de tres elementos: un profesor o docente, uno o varios alumnos y el objeto de estudio. El docente transmite sus conocimientos sobre el objeto de estudio al o a los alumnos a través de diversos medios, técnicas y herramientas de apoyo, y el alumno busca el entendimiento de dicho objeto de estudio a través de relacionar sus conocimientos anteriores con los proporcionados por el maestro, sin embargo, en dicho proceso se encuentran algunas dificultades que le impiden llevarase a cabo de una manera satisfactoria.

Para subsanar algunas de las dificultades en el proceso de la enseñanza del álgebra lineal, se han realizados diversos trabajos, entre los que destacan los siguientes:

** En el verano de 1990, Guershon Harel, juntó un grupo de 16 educadores de los departamentos de matemáticas de Estados Unidos (llamado Linear Algebra Curriculum Study Group LACSG), cuyo objetivo principal estaba referido al aprendizaje y enseñanza del álgebra lineal, generó una serie de recomendaciones las cuales fueron basadas sobre una combinación de tres fuentes principales:

La primer fuente es en base a diversas investigaciones para conocer el cómo aprenden los estudiantes, el cómo se debe enseñar la matemática y que consideraciones pedagógicas y epistemológicas están involucradas en la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal.

La segunda fuente fue la enorme experiencia individual que cada uno de los miembros del grupo LACSG tenía en la enseñanza del álgebra lineal.

La tercer fuente fue la consulta de una gran variedad de disciplinas quienes hablaban del papel del álgebra lineal en sus planes de estudio y su punto de vista de cómo podía mejorar su disciplina.

Harel interpreta las recomendaciones del grupo LACSG desde su propia perspectiva del aprendizaje y enseñanza del álgebra lineal, y discute una estructura teórica en la cual basa sus perspectivas. El corazón de esta estructura son tres principios básicos en la enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal: principio de concretización, principio de necesidad y principio de generalización (Harel, 1990). Sugiere una progresiva aproximación al álgebra lineal de acuerdo con estos tres principios pedagógicos.

Harel (1990) formula el *principio de concretización* de la siguiente manera: Para los estudiantes abstraer una estructura matemática a partir de un modelo dado de esa estructura, es considerar los elementos de ese modelo como entidades conceptuales; es decir que los estudiantes realicen procedimientos mentales que puedan tomar dichos objetos como entradas.

La idea de formación de una entidad conceptual fue sugerida por Piaget (1978) en su distinción entre forma y contenido. Este proceso es un ejemplo de abstracción reflexiva, en la cual "una acción mental o física es reconstruida y reorganizada en un nivel alto de pensamiento y así llega el entendimiento por el conocimiento".

Para Greeno (1983) una entidad conceptual es un objeto de conocimiento para el cual el sistema mental tiene procedimientos que pueden tomar dicho objeto como un argumento, como una entrada.

El *principio de necesidad* indica: Para que los estudiantes aprendan, deben tener una necesidad de lo que están aprendiendo. Por necesidad significa una necesidad intelectual, no una necesidad social o económica.

Este principio está de acuerdo con la teoría Piagetiana y de educadores matemáticos Franceses (Balacheff, 1990; Brousseau 1994 y 1997). Este principio establece como herramienta principal actividades de resolución de problemas donde el estudiante aplica sus ideas para resolver el problema y modifica dichas ideas cuando encuentra conflictos con sus conocimientos. Tales conflictos o desequilibrios como los llama Piaget, pueden conducir al estudiante a preguntarse por sus acciones realizadas y buscar nuevos caminos para resolver su problema.

Estos dos principios de aprendizaje son complementados por un tercer principio, llamado el *principio de Generalización*, el cual establece que: cuando el proceso de enseñanza está interesado en un modelo „concreto‟, esto es, un modelo que satisface el Principio de Concreción, la actividad de enseñanza dentro de este modelo deberá permitir y fomentar la generalización de conceptos.

Este principio ayuda a los estudiantes a abstraer conceptos que aprenden de un modelo específico.

** Hillel manifiesta que la "complicación" de las representaciones parece ser ignorada por los profesores universitarios. Él se refiere a una investigación en la cual cinco maestros experimentados fueron grabados en video cuando abordaban el tema de eigenvalores y eigenvectores en sus cursos. Esa cinta ilustra como los profesores fueron constantemente cambiando la notación y los modos de descripción. Además, esos cambios fueron usualmente realizados sin una pausa y sin algún intento de alertar a los estudiantes de algún modo explicito. No fue siempre claro cuando la descripción geométrica fue usada para ilustrar un caso específico. Por mucho, el caso de mayor confusión para los estudiantes es el cambio de la representación abstracta a la algebraica cuando el espacio vectorial subyacente es $\Re^n$. En este caso, una n-tupla es representada por otra n-tupla relativa a una base. Así el objeto y su representación son la misma “cosa”, es decir, tienen exactamente la misma lista de valores. Lo mismo es cierto para una transformación matricial A, primero la considera como un operador lineal, y después teniendo una representación matricial (posiblemente diferente) relativa a una base dada. Esta confusión conduce a errores persistentes en la solución que dan los estudiantes en lo que se refiere a las lecturas de los valores de una transformación lineal dada por una matriz en una base (Hillel y Sierpinska 1994).

** Robert, Robinet y Tenaud (1987) diseñaron y experimentaron con una entrada geométrica al álgebra lineal. El objetivo era superar el obstáculo del formalismo dando un significado más “concreto” a los conceptos de álgebra lineal, en particular, a través de figuras geométricas que podrían usarse como las metáforas para las situaciones lineales generales en los espacios vectoriales más complejos. Sin embargo, al igual que en el estudio de Harel, la conexión con la geometría demostró ser problemática. Primeramente, la geometría se limita por consiguiente a tres dimensiones en algunos conceptos como el rango, por ejemplo, o incluso la dependencia lineal, tienen un campo bastante limitado de representación en el contexto geométrico.

** Chartier (2000) mostró que el uso de la geometría como una entrada privilegiada al álgebra lineal, debe ser cuidadosamente planeada. En su trabajo, hizo un estudio epistemológico de la conexión entre la geometría y el álgebra lineal, usando la evidencia de los textos históricos y modernos. Una de sus metas principales era caracterizar lo que significa la intuición geométrica en la relación con el álgebra lineal. En la segunda parte de su trabajo, se interesó en el aspecto didáctico de la cuestión. Analizó varios libros de texto de diferentes países y periodos diferentes y diseñó encuestas para profesores y alumnos en varios niveles de la universidad. Encontró que la necesidad de la intuición geométrica es muy a menudo postulada por los libros de texto o profesores al enseñar álgebra lineal, sin embargo, en la realidad, el uso de geometría era con frecuencia muy superficial.

2.3 EL PORQUÉ DEL ANÁLISIS DE VALORES Y VECTORES PROPIOS

El estudio de valores y vectores propios constituye un pilar dentro de la enseñanza del álgebra lineal, motivo por el cual se realiza el análisis de algunos libros de texto, en donde vislumbraremos las características (bondades y dificultades) de los diversos enfoques presentados por los diferentes autores para un entendimiento de tales conceptos, de esta forma tener los elementos necesarios para realizar alguna comparación entre dichos enfoques y con base en ello, elegir el método más conveniente para su enseñanza según el objetivo perseguido en el curso de álgebra lineal.

Con esto en mente y tomando en cuenta los procesos del aprendizaje, surgen de manera natural las siguientes preguntas de investigación:

¿En qué medida, los textos de álgebra lineal presentan la discusión del tema de valores y vectores propios, haciendo énfasis en conceptos fundamentales como dependencia lineal, bases y dimensión?

Como se ha manifestado en renglones anteriores, para tener un aprendizaje con entendimiento es necesario construir relaciones e ir articulando lo que uno ya conoce con los conocimientos nuevos, esto es, necesitamos saber en qué medida los autores relacionan los conceptos previamente vistos de dependencia lineal, base y dimensión para el aprendizaje de valores y vectores propios.

¿Qué características presentan los ejemplos que discuten tales textos para que los estudiantes tengan la oportunidad de reflexionar en torno a la estructura conceptual de dichos temas?

En el aprendizaje de la matemática es importante plantear actividades, ejercicios, así como problemas en diversos contextos y con distintos niveles de complejidad para que el estudiante ponga en juego sus facultades inventivas y pueda ir descubriendo los nuevos conceptos matemáticos.

¿Qué diversidad de herramientas pedagógicas emplea el autor cuando aborda el tema de valores y vectores propios?

Las herramientas pedagógicas deben ser instrumentos que permitan involucrar y motivar al alumno en su proceso de aprendizaje. Se revisarán las herramientas pedagógicas establecida por el autor, las cuales le permitan generar una dinámica de trabajo al alumno, lo que le facilitará superar los obstáculos cognitivos del tema.

En este trabajo se trata de dar respuesta a estas preguntas identificando las características que cada autor realiza al discutir el concepto de valores y vectores propios.

Como se ha observado en las investigaciones realizadas por diversos grupos en lo que respecta a las dificultades de la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, se pone de manifiesto que los estudiantes tienen conocimientos de cómo desarrollar ciertos algoritmos, pero no adquieren el entendimiento relacionado con el conocimiento conceptual del álgebra lineal y sus conexiones con otros contenidos que se han estudiado en niveles previos. Es por ello que diversas investigaciones se han enfocado a encontrar las dificultades del aprendizaje del álgebra lineal y en base a ello, proponen ciertas metodologías, representaciones y diversos lenguajes para su enseñanza, los cuales pudieran contribuir a mejorar el proceso de entendimiento de los alumnos respecto a diferentes temas del álgebra lineal, y por consecuencia, propiciar que los alumnos adquieran una mayor habilidad para aplicar sus conocimientos matemáticos a la solución de diversos problemas.

En lo referente a la enseñanza y aprendizaje específicos de los conceptos y cálculo de valores y vectores propios dentro del álgebra lineal, no se han presentado muchos estudios, sin embargo, revisando diversos libros de textos y programas de estudio de la asignatura de álgebra lineal que se cursan en diversas universidades del país, observamos que su enseñanza se basa generalmente en el aspecto algorítmico de encontrar el polinomio característico de una matriz a través de determinantes y posteriormente encontrar las raíces de dicho polinomio. Encontrar las raíces de un polinomio, en ocasiones no es tan fácil y si a eso le agregamos el uso de raíces complejas, provocan una mayor dificultad para los estudiantes. Este enfoque, predominantemente algorítmico, establece poca relación con los conceptos centrales del álgebra lineal, como son dependencia lineal, base y dimensión.

Además, diversos trabajos se han escrito sobre el cálculo de valores y vectores propios sin determinantes, entre los que destacan un artículo de Axler (1995) argumentando la eliminación de determinantes del álgebra lineal y presentando una discusión de los conceptos de valores y vectores propios sin hacer uso de determinantes. Otro artículo de McWorter y Meyers (1998) proporciona un algoritmo para el cálculo de valores y vectores propios sin determinantes. Estos artículos son interesantes debido a que su enfoque para los cálculos difiere de los usuales, sin embargo, no analizan la articulación de sus métodos expuestos con los conocimientos matemáticos previos que el alumno ha adquirido en su formación matemática, como lo son los conceptos de base, dimensión y linealmente dependiente.

Por otro lado, en el libro: "Álgebra Lineal" (Barrera 2007, Capitulo 6), se presenta la teoría de valores y vectores propios por medio del polinomio mínimo de una matriz. Por un lado, el usar el polinomio mínimo para desarrollar la teoría de valores y vectores propios pone de manifiesto el uso sistemático de conceptos centrales como son los de dependencia e independencia lineal y por otro, al usar el polinomio mínimo se tienen los elementos necesarios y suficientes para describir propiedades importantes de una matriz como son triangulación y diagonalización. Un elemento adicional es que el polinomio característico puede ser definido a partir de los resultados que se obtienen partiendo del polinomio mínimo y además, se presenta una prueba corta del teorema de Cayley-Hamilton, todo esto sin el concepto de determinante.

3. MARCO CONCEPTUAL

Para fundamentar este trabajo, resulta conveniente localizar, obtener y consultar estudios donde se discuten diversos aspectos de los conceptos de valores y vectores propios, dichos conceptos son parte fundamental del álgebra lineal, además de revisar la manera en que se discuten tales conceptos en diversos libros de texto, los cuales son base en diversos cursos de álgebra lineal de distintas instituciones de educación superior del país.

Se analiza y expone porqué el pensamiento proporcional es parte importante para entender los conceptos de dependencia lineal y combinación lineal, y éstos, a su vez, son los fundamentos que se consideran en la discusión de los conceptos de valores y vectores propios, además de revisar las características de un libro de texto.

3.1 PENSAMIENTO PROPORCIONAL, COMBINACIÓN LINEAL Y DEPENDENCIA LINEAL

En las últimas dos décadas, las investigaciones que abordan temas de aprendizaje del álgebra lineal se ha incrementado considerablemente, aunque sólo unos pocos se refieren a conceptos específicos como combinación lineal, dependencia lineal, base, dimensión, entre otros. En el capitulo anterior, se mencionaron algunos trabajos de investigación de Dubinsky, Carlson, Dorier, Harel, Sierpinska, Hillel, (Dorier 2000), entre otros; en general, la atención que plantean los investigadores se ve centrada en el formalismo y la generalización que es intrínseca al álgebra lineal, y además, centran sus discusiones en la reducción o no de los tópicos en un primer curso a nivel universitario o bien, en cómo se encara el inicio a esta materia. Todos coinciden en la dificultad que tienen los alumnos al plantearles temas abstractos con una diversidad de representaciones, lenguajes, modos de pensamiento, entre otros. Muchos de los documentos indican que los estudiantes usualmente dominan las habilidades algorítmicas involucradas en el álgebra lineal, pero carecen de un entendimiento conceptual, además, no aplican conceptos del álgebra lineal a sistemas físicos.

Entendimiento conceptual o de conceptos, se define como la habilidad que tienen los estudiantes para reconocer, interpretar, explicar e ilustrar adecuadamente las conexiones y interconexiones entre los conceptos subordinados de un macroconcepto y entre éstos con otros conceptos relacionados (Aguirre, 1998).

Por ejemplo, Carlson (1997) declara que resolver sistemas de ecuaciones lineales y realizar operaciones con matrices es fácil para los estudiantes, pero cuando ellos abordan los temas de subespacios, generadores e independencia lineal confunden los conceptos y se pierde la relación e interpretación de los mismos, manifiesta que "es como si una niebla espesa estuviera avanzando sobre ellos y no pudieran ver en dónde están y hacia dónde van". A su vez, Robert y Robinet (1989) muestran que la principal opinión hecha por los estudiantes hacia el álgebra lineal es referente al uso del formalismo, la abrumadora cantidad de nuevas definiciones y sobre todo, que no se efectúan las relaciones adecuadas con lo que ellos ya conocen de matemáticas y los conceptos involucrados.

Durante el aprendizaje escolar suele ocurrir que los estudiantes se apropian de los conceptos de manera aislada y no de manera estructurada, es decir, no relacionan los conocimientos previamente aprendidos con los nuevos temas de aprendizaje, propiciando con esto que tengan dificultades cuando abordan situaciones completamente nuevas, cuya resolución no se puede realizar sólo recordando algún procedimiento previamente enseñado por un profesor. Poseer una estructura conceptual, es decir, tener un conjunto de conceptos coherentemente relacionados, da lugar a que el estudiante no únicamente trabaje con los conceptos como objetos aislados y aplique procedimientos, sino también a que reflexione de manera general sobre ellos. Esta forma integradora de pensar está relacionada con el pensamiento teórico (Sierpinska, 2000) descrito en páginas anteriores.

A partir de este enfoque, nos preguntamos ¿cuáles son los conceptos base que requiere un estudiante para jerarquizar y organizar sus conocimientos previamente adquiridos en matemáticas con los nuevos conceptos fundamentales del álgebra lineal? Para contestar esta pregunta, analizamos algunos conceptos de la materia, por ejemplo, observamos que para comprender la definición de elementos generadores se requiere del entendimiento de combinación lineal, la definición de base depende de las ideas de independencia lineal y generadores y para entender el concepto de dependencia e independencia lineal, tomamos como base la idea de proporcionalidad o linealidad. Esto es, podemos considerar que un elemento para comprender diversos conceptos fundamentales del álgebra lineal reside en tener un pensamiento proporcional desarrollado, el cual implica poder comparar cantidades empleando multiplicación o división, es decir, usar razones para comparar cantidades.

El desarrollar la habilidad de un pensamiento proporcional o lineal entre los estudiantes de los niveles básico y medio superior ha sido de gran importancia en la educación matemática contemporánea del sistema educativo, por lo que se le dedica bastante tiempo y esfuerzo para asegurar su entendimiento. Esto es debido a que las relaciones lineales son la base para el planteamiento de numerosos problemas teóricos y prácticos en diversas situaciones dentro de las matemáticas y de las ciencias, sin embargo, en el nivel superior este concepto queda aislado, ya que no se considera para construir el conocimiento del concepto de dependencia y combinación lineal dentro del álgebra lineal. Los estudiantes que desarrollan un pensamiento proporcional tienen una base para relacionarla con los nuevos conceptos matemáticos de nivel superior (Dirk, 2007).

La linealidad (pensamiento proporcional) pasa por gran parte de la edificación matemática, desde la idea de medir magnitudes, el concepto de razones y la aplicación de la “regla de tres” en los niveles básicos (primaria y secundaria), el uso de modelos lineales en cálculo y estadística empleados en el nivel medio superior, hasta llegar, con el álgebra lineal, a la formulación abstracta de espacios vectoriales, en el nivel superior.

No es sorprendente que diversos trabajos de investigación en educación matemática, hayan centrado la atención en lo referente al desarrollo del pensamiento lineal o proporcional de los estudiantes, sobre problemas que pueden ocurrir en su aprendizaje y sobre enfoques didácticos de su enseñanza; por ejemplo, mencionaremos algunos de ellos:

Lesh, Post, y Behr (1988) declaran que el razonamiento proporcional es un proceso matemático fundamental, ya que es la parte más importante de la matemática elemental y a su vez es piedra angular de la matemática de nivel superior, que juega un rol de cambio en el desarrollo matemático de los estudiantes. El razonamiento proporcional es una forma de razonamiento matemático que involucra un sentido de covariación (relación existente entre dos magnitudes, de manera que todo aumento o disminución de una de ellas se traduce en un aumento o disminución de la otra) y de comparaciones múltiples, y la habilidad para procesar y almacenar mentalmente diversas piezas de información. El razonamiento proporcional está muy relacionado con inferencias y predicciones, además incluye métodos de pensamiento cualitativo y cuantitativo.

Confrey y Harel (1994) recalcan que el entendimiento del concepto multiplicativo (esto es, razones) es crítico para una realización exitosa del programa de matemáticas en el nivel medio. Lo presentan como un campo conceptual multiplicativo (multiplicative conceptual field MCF), y es presentado en términos de interrelación y dependencia con y entre conceptos de multiplicación.

Para Vergnaud (1990), un campo conceptual es un conjunto informal y heterogéneo de situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y, probablemente entrelazados durante el proceso de adquisición. Por ejemplo, el campo conceptual de las estructuras aditivas es el conjunto de situaciones que requieren una adición o una sustracción o una combinación de dichas operaciones y, también, el conjunto de conceptos y teoremas que permiten hacer un análisis de esas situaciones como tareas matemáticas. Aquí, el concepto de situación no tiene el sentido de situación didáctica de Brousseau sino, más bien, el de tarea. Considera que toda situación compleja se puede analizar como una combinación de tareas.

El pensamiento proporcional es una parte importante de las matemáticas en el nivel básico y "conecta muchos de los conceptos matemáticos estudiados en el nivel medio y superior" (NCTM, 2000, p. 217).

Esfuerzos previos para evaluar la habilidad de un pensamiento proporcional (Karplus, Pulos & Stage, 1983a, 1983b; Noelting, 1980a, 1980b) se han enfocado largamente sobre respuestas individuales en problemas de valor faltante. Aquellos estudiantes quienes fueron capaces de resolver exitosamente las situaciones numéricas "difíciles" que contiene múltiples números racionales con y entre el par de razones, fueron considerados estudiantes con un pensamiento proporcional alto. Lesh, Post and Behr (1988) consideraron que dicha perspectiva estaba limitada, ya que lo realizado era una condición necesaria para un pensamiento proporcional, puesto que en dichos problemas su solución era puramente algorítmica.

Para Piaget e Inhelder (1975), sin embargo, la característica esencial de un razonamiento proporcional es que debe considerar una proporción entre dos razones equivalentes $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ más que una simple relación entre dos objetos concretos (o dos cantidades perceptibles directamente). De hecho, Piaget argumenta que en las primeras fases del razonamiento proporcional de un niño, éste involucra "razonamiento aditivo" de la forma $A - B = C - D$.

Karplus (1983a, 1983b) propone una tercera perspectiva, la cual establece que un razonamiento proporcional debe involucrar una relación lineal entre dos variables, esto es, caracterizarlas por la ecuación $y = mx$, la que considera una razón proporcional (la cual por supuesto es), aunque los dos lados de la ecuación no se asemejan. Además, considera que las tareas caracterizadas por la ecuación $y = mx + b$ deben ser diferenciadas de la situación proporcional.

Lamon (1993b) identifica cuatro tipos diferentes de problemas con proporciones:

1) Problemas tipo parte-parte-conjunto, un subconjunto de un conjunto es comparado con su complemento o con el conjunto mismo. Por ejemplo, la maestra

Alma pone a sus alumnos en grupos de 5. Cada grupo tiene tres niñas. Si ella tiene 25 alumnos, ¿cuántos niños y cuántas niñas habrá en su clase?

2) Problemas que incluyen conjuntos asociados relacionando dos cantidades, las cuales no son ordinariamente asociadas, a través de un problema en contexto. Por ejemplo, Esther, Jaime y Olivia compraron tres globos y pagaron $20.00 por los tres globos. Ellos deciden regresar a la tienda y comprar globos para todos sus compañeros de grupo. ¿Cuánto deben pagar por 24 globos?

3) Problemas que involucran relaciones expresadas con mediciones bien conocidas. Por ejemplo, Daniel conduce durante 156 kilómetros y gasta 6 litros de gasolina. ¿Puede conducir 561 km. con un tanque de 21 litros de gasolina?

4) Problemas de crecimiento los cuales expresan relaciones entre dos cantidades continuas, tales como peso, altura, ancho, entre otros, e involucran ya sea un escalamiento hacia arriba, esto es estiramiento o alargamiento, o un escalamiento hacia abajo, esto es, reducir o encoger. Por ejemplo, Una fotografía de 6cm de largo X 8cm de ancho fue ampliada de tal forma que su ancho cambio de 8cm a 12cm. ¿Cuál es la altura de la nueva fotografía?

Diferentes tipos de problemas producen diferentes estrategias de solución, independientes del nivel del entendimiento de razonamiento proporcional de los estudiantes (Lamon 1993b).

Langrall y Swafford (2000) han clasificado las estrategias de solución con razonamiento proporcional de los estudiantes en cuatro niveles:

a) Nivel 0: No usan alguna estrategia de razonamiento proporcional.

-Tienden a usar estrategias aditivas.
-Suponen o usan pistas visuales.
-Incapaces de reconocer estrategias multiplicativas.
- Emplea aleatoriamente números, operaciones y estrategias.
-Incapaz para ligar dos mediciones.

-Si llega a una solución correcta es por casualidad favorable.

b) Nivel 1: Razonamiento informal sobre situaciones proporcionales.

-Usa dibujos, modelos, o material manipulable para resolver un problema proporcional.
-Hace comparaciones cualitativamente.

c) Nivel 2: Razona cuantitativamente.

-Emplean unidades compuestas.
-Encuentran y usan una razón unitaria.
-Identifican o usan factores de escala o tablas
-Usan fracciones equivalentes.
-Construyen ambas medidas o cantidades.

d) Nivel 3: Razonamiento proporcional formal.

-Establecen proporciones usando variables y las resuelven empleando la regla del producto cruzado o a través de fracciones equivalentes.
-Entienden completamente las relaciones de invariante y covariante.

El razonamiento proporcional es una manera de pensar, no un algoritmo para emplearse en la solución de problemas, ya que nos permite utilizar una relación matemática cierta para deducir una segunda relación. Sin embargo, es necesario hacer hincapié en la diferencia entre adquirir la mecánica operatoria que permite aplicar correctamente una ecuación a una solución de un problema, a asimilar la noción de proporcionalidad aplicada a diferentes ámbitos lógicos. Esta noción es una de las habilidades o facultades cognitivas fundamentales que el alumno adquiere a través de la observación, la reflexión y la experimentación.

3.1.1 PROPORCIONALIDAD Y VECTORES

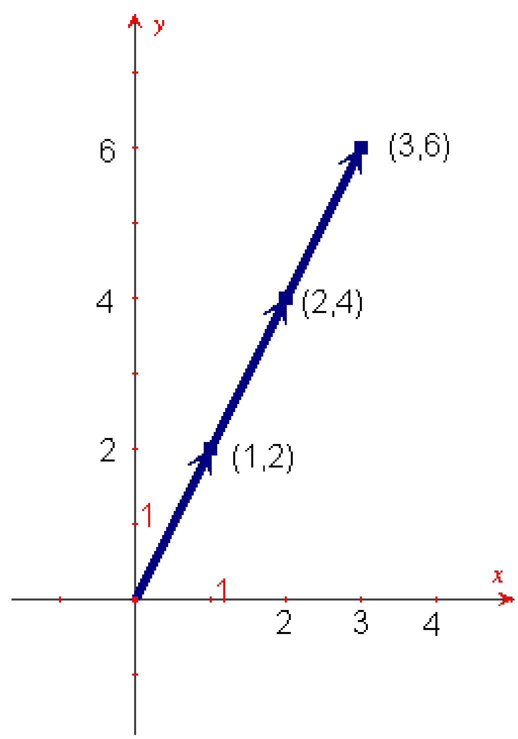
Diversos autores han establecido los términos lineal y proporción directa como sinónimos, los cuales hacen referencia a funciones de la forma $f(x) = ax$ con

$a \neq 0$. La representación gráfica de este tipo de función es bien conocida: una línea recta que pasa por el origen. Además, existe una relación muy estrecha entre proporcionalidad directa que es un caso de las variaciones lineales $(y = kx)$ y los conceptos de razón y proporción. Una razón se refiere a un cociente entre dos cantidades $(\frac{y_1}{x_1}) = k$. Una proporción se refiere a la igualdad de dos razones $\frac{y_1}{x_1} = k = \frac{y_2}{x_2}$.

Por otra parte, podemos considerar la relación *"ser proporcional con"* en términos de vectores, esto es: si consideramos los vectores

$v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ ... $v_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ en el plano, entonces las igualdades

$k = \dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = \ldots = \dfrac{x_n}{y_n}$ expresan la relación que existe entre las coordenadas de éstos. Geométricamente esto significa que los vectores están sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas.



Una situación de esta naturaleza da lugar a uno de los conceptos fundamentales del álgebra lineal: dependencia lineal. Un par de vectores v_i, v_k se dice que son *linealmente dependientes* si uno de ellos es múltiplo del otro, es decir, si sus componentes son proporcionales. Si, $v_i = \vec{0}$ entonces el par v_i, v_k es linealmente dependiente, puesto que $\vec{0} = 0 * v_k$. Si $x \neq 0$ y el par v_i, v_k es linealmente dependiente, entonces $v_k = tv_i$ para algún escalar t. Si $v_i \neq \vec{0}$ y $v_k \neq \vec{0}$, tenemos que $v_k = tv_i$ y $(1/t)v_k = v_i$, por lo que cada uno de los vectores es múltiplo del otro. Notemos que la proporcionalidad $v_k = tv_i$ la podemos representar como: $\lambda_k v_k - \lambda_i v_i = \vec{0}$, para algunos escalares λ_k y λ_i no ambos cero.

Por lo observado antes, si v_i y v_k, son *diferentes*; para que estos sean linealmente dependientes, debemos encontrar λ_k y λ_i, no ambos cero, tales que:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} \lambda_1 x_i \\ \lambda_1 y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_2 x_r \\ \lambda_2 y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} \lambda_1 x_i + \lambda_2 x_r \\ \lambda_1 y_i + \lambda_2 y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

expresándolo en forma matricial: $\begin{bmatrix} x_i & x_r \\ y_i & y_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Para que los vectores sean linealmente dependientes, la matriz $\begin{bmatrix} x_i & x_r \\ y_i & y_r \end{bmatrix}$ debe ser una matriz no invertible, por lo que su determinante debe ser cero, es decir:

$\begin{vmatrix} x_i & x_r \\ y_i & y_r \end{vmatrix} = x_i y_r - x_r y_i = 0$, entonces: $x_i y_r = x_r y_i$. Suponiendo que ninguno de y_i y y_r es cero, se tiene:

$$\frac{x_i}{y_i} = \frac{x_r}{y_r} = k,$$

la cual es la relación de proporcionalidad.

Un ejemplo que ilustra la situación descrita se tiene con La ley de Hooke, la cual establece que al estirar o deformar un objeto elástico, la magnitud de la deformación es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza deformante (la ley de Hooke se aplica únicamente a la región elástica), esto es:

$$K = \frac{L(deformación)}{F(\,fuerza)}.$$

La ecuación anterior es equivalente a $L = KF$.

Un resorte elástico se estira (deforma) 4mm al colgarle una carga de 120Kg. ¿Qué carga se debe aplicar al resorte si deseamos que se estire 5mm?

Por la ley de Hooke y prescindiendo de unidades se tiene 4=120K, en donde K es la constante de proporcionalidad. Si denotamos por F a la magnitud de la fuerza desconocida se tiene también 5=KF. Dado que K es la misma en ambas ecuaciones y la magnitud de la fuerza no es cero, de las ecuaciones anteriores obtenemos $K = \frac{4}{120} = \frac{5}{F}$. De esta ecuación se tiene que F=150 Kg. Observe que esta ecuación se puede escribir usando vectores. Por ejemplo, se pueden tomar: $v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 120 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ F \end{bmatrix}$, y la ecuación $K = \frac{4}{120} = \frac{5}{F}$ garantiza que éstos son linealmente dependientes por lo que deben existir λ_1 y λ_2 no ambos cero tales que:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 120 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 5 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Al representar el sistema en forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 120 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Recordemos que para que los vectores sean linealmente dependientes, el determinante de la matriz de coeficientes debe ser cero. Por lo tanto, tenemos:

$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 120 & y \end{vmatrix} = 4y - 5*120 = 0$, entonces: *4y=5*120* y de esto, $y = \dfrac{5*120}{4} = 150$

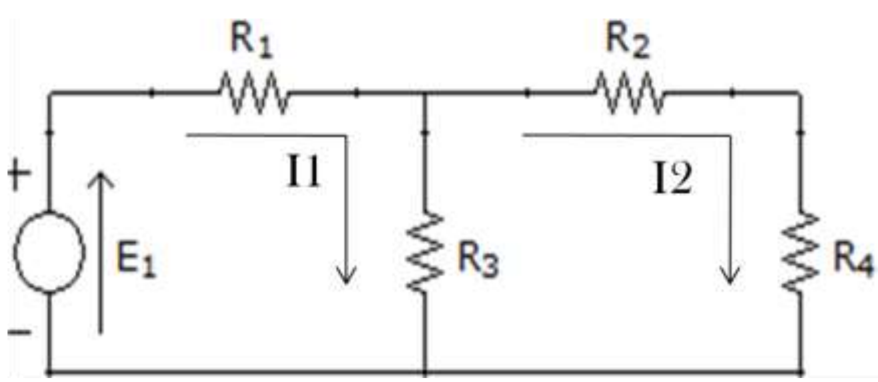
Lo que muestra que para estirar el resorte 5mm se debe colocar una carga de150 kg. Este resultado es consistente con el obtenido antes.

Veamos otro ejemplo, en donde aplicaremos dos leyes importantes:

La ley de Ohm, la cual establece que el voltaje entre los extremos de muchos tipos de materiales conductores es directamente proporcional a la corriente que fluye a través del conductor $E = RI$, en donde R *(resistencia)* es la constante de proporcionalidad.

Ley de Kirchhoff de los voltajes, establece que la suma algebraica de los voltajes alrededor de cualquier trayectoria cerrada en un circuito es cero.

Considere el siguiente circuito eléctrico, el cual consta de dos trayectorias cerradas (mallas), una fuente de alimentación y elementos resistivos.



En donde se desea encontrar el valor de las corrientes I_1, I_2 conociendo el valor del voltaje aplicado y de las resistencias.

Para la malla 1:

$$E_1 = R_1 I_1 + R_3(I_1 - I_2).$$

Para la malla 2:

$$0 = R_2 I_2 + R_3(I_2 - I_1) + R_4 I_2.$$

Poniendo las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$E = RI.$$

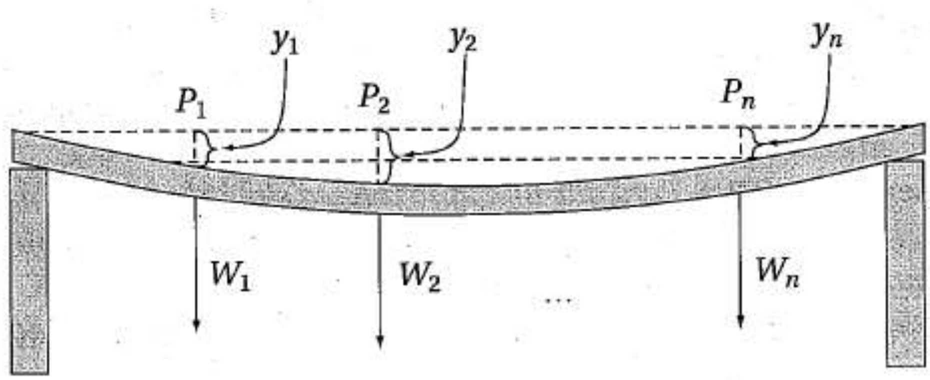
Como observamos, la ley de Ohm se cumple en la forma matricial, el voltaje es proporcional a la corriente.

Si la matriz R tiene inversa, tenemos que la corriente es proporcional al voltaje e inversamente proporcional a la resistencia:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 + R_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I = R^{-1}E.$$

Un ejemplo en el que se extienden las ideas anteriores es el de deformación de vigas (Barrera, 2007, p. 46). Supongamos que se tiene una viga elástica en la que se aplican pesos de magnitudes $W_1, W_2, \ldots, W_n$ en los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$, respectivamente.



Denotemos por Y_i a la magnitud del desplazamiento del punto P_i por la acción de las cargas. Supongamos que la viga obedece a la ley de Hooke para materiales elásticos. De acuerdo con dicha ley, el peso W_i produce un desplazamiento igual a $d_{ij}W_j$ en el punto P_i, en donde d_{ij} es una constante de proporcionalidad que depende de las propiedades de elasticidad de la viga y de la distancia del punto P_i al punto P_j.

De estas consideraciones se tiene que Y_i es la suma de los desplazamientos originados por cada uno de los pesos, es decir, se tiene:

$$Y_i = d_{i1}W_1 + d_{i2}W_2 + \ldots + d_{in}W_n, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

En forma matricial estas ecuaciones se pueden escribir como:

$$DF = Y \text{, en donde } Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ Y_n \end{bmatrix} \text{ y } F = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ . \\ . \\ W_n \end{bmatrix}.$$

A la matriz D se le llama matriz de flexibilidad y sus columnas se interpretan de la siguiente forma:

Supongamos que en el punto P_i se aplica un peso unitario y en los restantes puntos el peso es cero, entonces $F = \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ 1 \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$, por lo que

$$Y = \begin{bmatrix} d_{11} & . & . & . & d_{1n} \\ d_{21} & . & . & . & d_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ d_{n1} & . & . & . & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ 1 \\ . \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{1i} \\ d_{2i} \\ . \\ . \\ d_{ni} \end{bmatrix}.$$

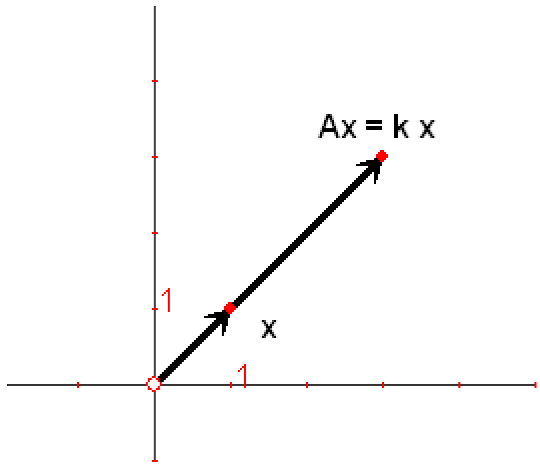
El significado de la ecuación anterior es que la columna *i*-ésima de la matriz D representa la deformación cuando se aplica un peso unitario en el punto P_i, es decir, un peso unitario aplicado en el punto *i* produce desplazamientos proporcionales $d_{1i}, d_{2i}, ..., d_{ni}$ en los correspondientes puntos $P_1, P_2, ..., P_n$.

3.2 VALORES Y VECTORES PROPIOS

Según Orzech y Hillel (2001), los objetos de estudio del álgebra lineal pueden ser discutidos desde dos enfoques: Análisis matricial y espacios vectoriales. El enfoque matricial está más dirigido al aspecto operativo, quizás sea apropiado como un curso introductorio, ya que no hace mucho énfasis en la parte conceptual del álgebra lineal. Por otro lado, el enfoque vía espacios vectoriales hace más énfasis sobre el desarrollo conceptual del álgebra lineal.

Para entender el concepto de espacio vectorial, se requiere de los conceptos fundamentales que constituyen la parte medular del álgebra lineal: dependencia e independencia lineal, generadores, base y dimensión.

Por otra parte, dos conceptos muy importantes y básicos en gran cantidad de aplicaciones, son los de valores y vectores propios. Estos conceptos surgen de una extensión de la idea de proporcionalidad. Por ejemplo, si A es una matriz cuadrada que puede estar asociada a un proceso de producción y X representa un vector de inversión, nos preguntamos si existe un tal $X \neq 0$ que satisfaga $AX = \lambda X$, para algún escalar λ. Al vector X se le llama un vector característico y al escalar λ, un valor característico (Barrera, 2007 p. 135).



En la discusión de este problema se considera la ecuación $(A - \lambda I)X = 0$, que es equivalente a la anterior y dada la condición sobre X se tiene que la matriz $A - \lambda I$ es singular, lo cual equivale a que su determinante es cero. Al desarrollar el determinante de esta matriz se tiene un polinomio, llamado el *polinomio característico*. La forma usual de abordar el problema de valores y vectores propios es estudiando el polinomio característico, pues una vez encontradas sus raíces se pueden encontrar los vectores característicos. Una de las desventajas de esta aproximación es que los conceptos de dependencia lineal y dimensión no se relacionan de manera explícita, además, la mayoría de los resultados relacionados con las propiedades fundamentales de un operador en cuanto a diagonalización, triangulación, etc., no se obtienen a partir del polinomio característico.

En contraparte con esto, una posible ruta es discutir los valores y vectores característicos por medio del *polinomio mínimo*, en donde no hay necesidad de hacer referencia a los determinantes (aunque su estudio es importante en el estudio del álgebra lineal) y en la cual como veremos se hace énfasis al concepto de independencia lineal, a su vez, se estudia el operador asociado a la matriz, respecto a otra base seleccionada adecuadamente, obteniendo con esto la ventaja natural que se tiene al estudiar, de manera intrínseca, al operador.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita $n > 0$ sobre un campo K(R reales o C complejos) y $\mathrm{L}_K(V)$ el espacio de los operadores de V, el cual también es de dimensión finita, y más precisamente, si V tiene dimensión n, entonces $\dim(\mathrm{L}_K(V)) = n^2$. Sea $T \in \mathrm{L}_K(V)$, entonces el conjunto $\left\{I, T, T^2, ..., T^{n^2}\right\}$ es linealmente dependiente, por lo que existen escalares $a_0, a_1, ..., a_{n^2}$ no todos cero tales que $a_0 I + a_1 T + ... + a_{n^2} T^{n^2} = 0$. Esto se traduce diciendo que existe un polinomio no cero, $f(x)$ tal que $f(T) = 0$. En este caso decimos que T es un cero del polinomio $f(x)$.

Sea S la colección de todos los polinomios que son anulados por T, en S se puede escoger un polinomio no nulo $q(x)$ que tenga grado mínimo, además se puede suponer que el coeficiente de $q(x)$ correspondiente al término de mayor grado es 1, es decir, $q(x)$ es mónico. Con estas condiciones para $q(x)$ se puede demostrar que cualquier otro polinomio $p(x)$ de S es múltiplo de $q(x)$, esto implica que si en S existiera otro polinomio $r(x)$ mónico del mismo grado de $q(x)$, es decir de grado mínimo, entonces $r(x) = q(x)$. Se ha encontrado entonces un polinomio especial asociado a la transformación T, dicho polinomio se llamará polinomio mínimo de T y se denotará por $q_T(x)$.

Sea $p(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \cdots + a_1 t^1 + a_0$, un polinomio de grado m con coeficientes a_m, a_{m-1}, $\cdots$, a_0 en un campo $\mathbb{K}(\mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$, y $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$. Al sustituir la variable t por la matriz A, se tiene la siguiente matriz cuadrada de dimensión n:

$$p(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A^1 + a_0 \mathrm{I_n}.$$

Definición: Diremos que un polinomio *p(t)* anula la matriz *A* si *p(A)* es la matriz nula. Se denotará el conjunto de todos los polinomios que anulan la matriz *A* mediante *An(A).*

Obsérvese que, si $p(t), q(t) \in An(A)$, entonces $p(t) + q(t) \in An(A)$ y $p(t) * q(t) \in An(A)$.

Definición: Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{(n,n)}$, se dice que un polinomio *q(t)* anula a un vector $v \in \mathbb{K}^n$ si $q(A)v = \bar{0}_n$. En particular, el polinomio de grado mínimo que anula a *v* se denomina polinomio mínimo del vector *v*.

Empleando el concepto de polinomio anulador de un vector, se puede determinar el polinomio mínimo de una matriz como el mínimo común múltiplo de los polinomios mínimos de los vectores de una base.

Sea *v* cualquier vector en $\mathbb{F}^n$. Puesto que $\mathbb{F}^n$ tiene dimensión finita *n,* los *n+1* vectores $v, Av, A^2v, \cdots, A^n v$ son linealmente dependientes. Sea *k* el entero positivo más pequeño tal que $a_0v + a_1Av + a_2A^2v + \cdots + a_kA^kv = 0$, para algunas $a_0, \cdots, a_k \in \mathbb{F}$ con $a_k \neq 0$. La cerradura algebraica del campo asegura que existe un λ en el campo, tal que el polinomio $a_o + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_k t^k$ en $\mathbb{F}(t)$ es factorizable como $(t - \lambda)Q(t)$ para algún $\lambda \in \mathbb{F}$ y algún polinomio *Q(t)* en $\mathbb{F}(t)$. Por lo tanto, tenemos que $(A - \lambda\mathrm{I})Q(A)v = 0$. El valor mínimo de *k* implica que el vector $Q(A)v$ es no cero, por lo tanto es un vector propio de *A* para el valor propio λ.

3.3 USO DE HERRAMIENTAS COMPUTACIONALES EN EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA LINEAL

Es indudable que el desarrollo y evolución de las matemáticas y su aprendizaje dependen en gran medida de aquellas herramientas disponibles que permiten representar y operar con los objetos matemáticos. En particular, el desarrollo de software para realizar cálculos simbólicos y numéricos, así como aquel que permite desarrollar representaciones dinámicas, ha influido notablemente en el quehacer de la disciplina y sobre todo nos suministra un gran número de oportunidades de aprendizaje para los estudiantes. Por ejemplo, herramientas como DERIVE, MAPLE, MATHEMATICA[1], Excel, Software de Geometría Dinámica, y Fathom, entre otros, ofrecen una gama amplia de posibilidades a los estudiantes para representar objetos y relaciones matemáticas de varias maneras. La existencia de una gran variedad de artefactos tecnológicos con distintas características para representar y tratar información hace necesaria una reflexión profunda que permita identificar el potencial que una herramienta puede ofrecer al estudiante durante las experiencias de aprendizaje.

En la enseñanza de las matemáticas esta revolución informática ha venido acompañada de numerosas experiencias didácticas, de múltiples manifestaciones y formas de uso, todas ellas basadas en la introducción de la computadora en la enseñanza y aprendizaje de las mismas, y en particular, del álgebra lineal.

Por otra parte, los problemas intrínsecos a la educación matemática no se resuelven de forma automática con el uso de nuevas herramientas didácticas, de hecho *"la naturaleza de la herramienta no explica o justifica su resultado, más bien el uso que se ha hecho del instrumento; más que el medio o herramienta en sí, son los contextos y el uso de los recursos quienes determinan el efecto que estos causan sobre el pensamiento de quienes los utilizan"* (Bautista, 1994).

Esto es, no basta con proporcionar a los alumnos una computadora dotada de un determinado programa para tener garantizado un aprendizaje con entendimiento. Debemos tener muy en cuenta los tipos de conocimiento que se pretenden transmitir así como sus formas de transmisión; así pues es necesario considerar con detenimiento las posibilidades y las restricciones educativas que nos proporcionan el uso de las computadoras en el salón de clase. Es indudable que las computadoras han cambiado y cambiarán la visión de las Matemáticas; por ejemplo podemos afirmar que los aspectos experimentales de las Matemáticas adquieren un protagonismo superior, debido a la rapidez de cálculo de la computadora. Este hecho supone que los estudiantes adquieran habilidades en

[1] En la literatura especializada se considera a todos ellos como Computer Algebra Systems (CAS)

torno a la observación, la exploración, la intuición matemática y la comprobación de hipótesis. Pero también es necesario asegurar que las actividades tradicionales tales como la generalización y la abstracción no se vean perjudicadas por un uso desmesurado de las habilidades anteriores. Necesitamos en consecuencia un punto de equilibrio entre las Matemáticas formales y las Matemáticas experimentales.

La tarea o actividad matemática también puede verse mejorada por la aparición de los nuevos sistemas de representación propios de las nuevas tecnologías (Bautista, 1994). En este sentido la computadora permite manipular sistemas gráficos y algebraicos de forma indistinta ofreciendo la posibilidad de representar los objetos y procesos matemáticos en diferentes sistemas de representación, circunstancia que puede facilitar una mayor profundidad en la comprensión de los contenidos matemáticos; además, todas estas posibilidades provocan un pensamiento activo en Matemáticas, objetivo que no es fácil de lograr, pero que con la ayuda de las computadoras podemos facilitar proponiendo tareas o actividades más amplias y profundas para los estudiantes de Matemáticas.

Barrera (2009), declara que *una tarea de aprendizaje matemático debe considerar el conocimiento previo del estudiante y proveerle de elementos para el desarrollo de nuevos conceptos que se articulen con los ya existentes en una red conceptual robusta. De forma más específica, una tarea de aprendizaje matemático incluirá los siguientes elementos: (i) un objetivo de aprendizaje, (ii) un conjunto de recursos matemáticos estructurados en torno al objetivo de aprendizaje, (iii) un escenario para desarrollar la tarea, el cual incluye a las herramientas disponibles para abordar la actividad y, (iv) un proceso inquisitivo para desarrollarla.*

El objetivo de aprendizaje*. Es un enunciado en el que se establecen los elementos conceptuales a ser desarrollados y articulados durante la ejecución de la tarea. En el ejemplo de la construcción del cuadrado, dado uno de sus vértices y el punto medio de uno de los lados no concurrente al vértice dado, el objetivo de aprendizaje puede consistir en “identificar propiedades relevantes de una* *configuración geométrica, de forma que el estudiante conceptualice a un cuadrado en términos de sus propiedades".*

***Los elementos matemáticos estructurados por el objetivo de aprendizaje**. En esta parte se identifican dos clases de elementos: (1) los externos a la actividad, también llamados recursos matemáticos, que se conectan directamente con los que pertenecen al enunciado del problema y (2) los elementos propios del problema.*

***Los escenarios para desarrollar la tarea**. Por un escenario para desarrollar la tarea entenderemos, un lugar físico provisto de los elementos apropiados para realizarla, así como una comunidad (compañeros, profesor) que permita al estudiante interactuar con sus miembros con la finalidad de fomentar el proceso inquisitivo y de esta forma desarrollar los elementos que le ayuden a comunicar ideas matemáticas y a valorar el desarrollo de una forma de pensar congruente con el quehacer de la disciplina.*

***El proceso inquisitivo**. Una componente importante el ejecutar una tarea de aprendizaje matemático consiste en formular preguntas o dilemas tendientes a articular los elementos matemáticos iniciales con aquellos que conduzcan a la consecución de lo planteado en el objetivo de aprendizaje; así como posibles extensiones o conexiones con otras áreas de las matemáticas o del conocimiento. Durante el proceso inquisitivo, el tipo de preguntas o dilemas que se formulen darán lugar al surgimiento de diferentes trayectorias potenciales de instrucción.*

Las matemáticas es una disciplina en la que se requiere emplear el mayor número de técnicas y herramientas auxiliares para facilitar y acercar su aprendizaje. En este sentido, las computadoras y muy especialmente los programas de cálculo simbólico, desarrollados en torno a las nuevas tecnologías, son otra herramienta que favorece la comprensión de conceptos a través de diversas tareas en las que podamos destacar las múltiples representaciones de los objetos matemáticos.

3.4 DEFINICIONES Y CARACTERÍSTICAS DE LOS LIBROS DE TEXTO

Un aspecto importante a considerar en el análisis, es saber qué se entiende por libro de texto y qué características debe cumplir, para poder establecer qué función debe desempeñar.

A) Qué son los libros de texto

El *Diccionario de Ciencias de la Educación* (Mesanza, 1983) define el libro de texto como “el recurso didáctico que ofrece al alumno la información relevante de un nivel, curso o disciplina sistematizada y adecuada al currículo en el que se inscribe”.

En palabras de Richaudeau (1981, p. 51), “el manual escolar es un material impreso, estructurado, destinado a utilizarse en un determinado proceso de aprendizaje y formación”.

Navarro (1985, p. 94) lo define como “aquel recurso técnico educativo, legalmente reconocido, que abre al usuario a la realidad cultural, científica y social-personal de su tiempo”.

Para Kerr (1990, p. 194) los materiales, en sus formas más desarrolladas, no son simples colecciones de información organizada, sino verdaderas herramientas: incorporan contenido, permiten al estudiante analizar y plantear preguntas, resolver problemas, comprobar resultados y diagnosticar dificultades de aprendizaje.

Gimeno (1991, p. 10) define los materiales como "cualquier instrumento u objeto que pueda servir como recurso para que, mediante su manipulación, observación o lectura se ofrezcan oportunidades de aprender algo, o bien con su uso se intervenga en el desarrollo de alguna función de la enseñanza".

Selander (1995, p. 131) afirma que un libro de texto es el material básico para la clase e igualmente la herramienta curricular más genuina: el material más importante para el profesor y para el alumno: no es ni más ni menos que la casi totalidad del currículum; es el lugar donde se encuentra realmente el conocimiento, no trata sobre "cómo habría que exponer la materia X" sino "qué hay que hablar sobre la materia X".

Para García y Beas (1995, p. 13) un libro de texto es la expresión de un lenguaje que dice algo, desde alguien para alguien, es un sistema de comunicación de una persona que transmite una información a otra persona con una intencionalidad y unos mediadores específicos, y puesto que nace del contexto personal está cargado del principio de subjetividad. Y por otra parte el libro de texto es también la expresión-resultado de una operación empresarial en donde se mezclan elementos de orden mercantil: es un producto destinado a la venta y al consumo que se rige por las leyes del mercado libre y la competitividad, independientes y a veces contrarias a los criterios científicos o pedagógicos.

B) Qué características deben cumplir los libros de texto

Para Richaudeau (1981), los manuales que presentan una progresión sistemática (diferenciándolos de las obras de consulta y de referencia) deben satisfacer los siguientes criterios mínimos:

1. Valor de la información (cantidad, elección, valor científico).

2. Adaptación de esta información al medio ambiente y a la situación cultural e ideológica.

3. Disponibilidad de esta información: existencia de cuadros, índices analíticos, facilidades de señalización, inteligibilidad de la información, legibilidad material (claridad tipográfica) y legibilidad lingüística.

4. Coherencia pedagógica: coherencia interna (orden y desglose de las unidades, equilibrio de los aportes de información, ejercicios, instrumentos de control, etc.),

pero también, una coherencia más general con los modelos pedagógicos preconizados por las autoridades escolares y los profesores, teniendo en cuenta tanto el nivel de los alumnos como el de los maestros.

Navarro (1985) afirma que los libros de texto deben formular los objetivos educativos que pretenden, pero preferentemente expuestos al final en vez de al principio ("la localización de los objetivos en el comienzo del pasaje informativo reduce la motivación del lector y disminuye la eficacia de la respuesta emitida, mientras que la localización de los objetivos al final del pasaje aumenta la eficacia de la respuesta, probablemente porque los sujetos se ven obligados a analizar de forma especial la información").

Para Fernández (1989) son dos las condiciones básicas que debe cumplir un libro de texto: "ayudar al profesor- proporcionándole modelos- a organizar sus explicaciones, a plantear actividades significativas y a adecuar contenidos y actividades a las particularidades de los alumnos, y ser susceptible de utilización autónoma por parte del alumno"

Marchesi y Martín (1991), dan numerosas e importantes características que deben cumplir los libros de texto:

- Deben ofrecer a los profesores vías de análisis y reflexión para que puedan adaptarlos con más facilidad a las condiciones sociales y culturales en las que van a desarrollar su trabajo.

- Los materiales no pueden ser propuestas cerradas, inflexibles y lineales, sino que deben ofrecer perspectivas amplias dentro de las cuales haya posibilidades distintas de concreción, por lo que es conveniente que los materiales hagan explícitos los principios didácticos que fundamentan la propuesta, y los contenidos han de ponerse en relación con estos objetivos, incorporando esta reflexión en cada unidad didáctica.

- Deben incluir los tres tipos de contenidos (conceptuales, procedimentales y de actitudes y valores), los cuales se deben trabajar en forma interrelacionada.

- Ofrecer una amplia gama de actividades didácticas que respondan a diferentes grados de aprendizaje, o bien en cada unidad didáctica o bien ordenadas secuencialmente como un banco de actividades graduadas.

- Los materiales deben ayudar a consolidar la organización curricular de ciclos elegida, salvo en los últimos dos años, para toda la Educación Obligatoria.

- Deben también recibir especial atención los "temas transversales".

- Deben señalarse los criterios de evaluación de los aprendizajes de los alumnos e indicadores de evaluación del proceso de enseñanza (material utilizado, tiempo previsto, organización de la clase, papel del profesor en las distintas fases del proyecto, diversidad de las actividades, etc.).

Para Martin (1992) las prioridades para elegir un libro de texto son:

- Que el texto sea principalmente una ayuda al estudiante.

- Que la visión pedagógica del profesor se ajuste al papel del libro de texto (hay dos posiciones extremas:

  seguir el texto, enseñar el texto y examinar el texto;

  utilizar el texto como una fuente de referencia para los estudiantes).

- Adaptarse a la estrategia de valores del profesor.

- El texto debe ser relevante para los estudiantes y estar relacionado con el mundo real (es importante demostrar que la teoría ayuda a explicar la realidad).

Para DeBolt (1992) los profesores deberían ver libros que:

- Sean flexibles para que los usen alumnos con una gran variedad de necesidades.

- Estén escritos claramente y sean atractivos.

- Sean interactivos.

- Estén integrados en el currículum.

DeBolt piensa que los libros son útiles a profesores y estudiantes si incluyen:

Modos alternativos de explicar los conceptos esenciales y generalizaciones.
Mapas, gráficos, tablas.
Imágenes que se integren con la lectura.

Johnsen (1996) se refiere específicamente al ámbito del lenguaje, y sintetiza el libro de texto ideal como aquél que en cada materia tenga un lenguaje ordinario y un lenguaje para propósitos especiales, de una forma capaz de inspirar a la mayoría de los alumnos el deseo de leer y usar tal lenguaje, describiendo a los individuos, la naturaleza y la sociedad de forma que transmita a la mayoría de los alumnos comprensión e interés por las conexiones que, de otro modo, a muchos les resultaría difícil descubrir por su cuenta fuera del ambiente de la escuela.

Las características de los recursos que Prats (1997) considera más importantes son:

1) Que contengan la explicitación de sus finalidades didácticas (ya no expresar los objetivos formulados con lenguaje propio de las programaciones oficiales sino que el alumno sepa lo que se pretende que aprenda, el sentido que tienen las estrategias y los ejercicios que se van a realizar y la utilidad de estos conocimientos en su contexto inmediato de aprendizaje).

2) La capacidad de motivación (incentivar el deseo de aprender, no siendo la presentación formal el elemento más destacable en este aspecto, sino que viene dada por el interés que despierta lo contenido en el libro, ligado a las preocupaciones y curiosidades del alumnado).

3) Que traten correctamente la información (legibilidad, comprensividad y correcta formulación de las cuestiones; el tratamiento adecuado de los contenidos o las propuestas de trabajo no pueden suponer una simplificación o una vulgarización de los saberes y de las técnicas y métodos).

4) Que permitan estructurar la actividad de la clase (un buen libro de texto debe ser susceptible de adaptarse a ritmos, secuencias o variedades de actividades de manera poco forzada).

5) Que promuevan el crecimiento del conocimiento.

6) Que permitan tratar aspectos metodológicos y técnicos (los libros de texto deben ser contemplados como instrumentos y nunca como elementos predominantes en la plasmación diaria de la acción didáctica. El libro de texto ideal o el material curricular más adecuado es aquel que facilita el aprendizaje de habilidades intelectuales, el dominio de las técnicas usadas en las disciplinas y el planteamiento de prototipos que simulen la construcción del conocimiento -metodología- de los distintos saberes, todo ello en una dirección educadora que relacione los contenidos académicos con los problemas y los elementos ligados a la realidad).

Borsese, Colomer, García, Llitjós, Gil, Morales y Sánchez (1997), bajo la opinión de que en general los textos son inadecuados y quien los escribe debería tener competencias en tres vertientes: pedagógica, lingüística y científica, dan las siguientes condiciones que deben contemplar los libros de texto:

-Tratamiento adecuado de los contenidos básicos, para asegurar un nivel de preparación científica suficiente.

-Acercamiento de los contenidos al entorno del alumnado, fomentando el estudio de materiales y procesos del propio medio, lo cual contribuye a aumentar el interés por la materia a estudiar y también la integración con contenidos de otras materias, es decir, a la realización de estudios interdisciplinares.

-Propuesta de un cambio metodológico en estos textos que intente no separar los aspectos teóricos de los prácticos, de modo que las actividades experimentales se conviertan en "investigaciones" de los propios alumnos sobre aspectos que consideren relevantes.

-Las actividades que se pueden proponer son de carácter general o concreto, muy variadas, adaptadas a distintas circunstancias y que puedan efectuarse en el aula, taller, laboratorio o fuera del centro. Los procedimientos a desarrollar son: observación, montaje de laboratorio, recogida de datos, comunicación de resultados, búsqueda de explicaciones, elaboración de conclusiones, etcetera.

Izquierdo y Rivera (1997) creen que el libro de ciencias "debe ser estructurado de acuerdo con su finalidad, debe progresar sin perder la conexión con sus referentes externos y debe ser coherente. Por otra parte, y para conseguir sus objetivos, ha de ser también convincente.

Un texto concreto puede ser útil para el alumnado sólo si puede vincularse a experiencias vividas y discutidas en clase; sólo así puede comprender que el lenguaje no es la realidad, que es un acto creativo pero no arbitrario (Izquierdo, 2001).

De Posada (2001) da una tabla con los requerimientos más frecuentes citados en la bibliografía, relacionados con la estructura lógica y psicológica de un texto:

Estructura de un texto:
-Estructura lógica: relación racional entre las distintas partes del texto; presentación en orden creciente de dificultad; los nuevos conceptos introducidos deben ser justificados; debe evitar ambigüedades; evitar errores conceptuales; debe tener una fácil lectura; debe explicar evidencias, no sólo información.

-Estructura psicológica: el texto debe conectar con conocimientos previos de los alumnos; debe proporcionar una diferenciación progresiva de los conceptos; debe proporcionar elementos para la integración de conceptos diferentes; uso adecuado de analogías y metáforas; uso adecuado de modelos científicos.

En el análisis de los libros de texto, se buscará ver si el autor relaciona en forma directa los conceptos matemáticos de proporcionalidad y dependencia lineal en el desarrollo del tema de valores y vectores propios, además, saber si su discusión la aborda a través del polinomio mínimo, del polinomio característico o de ambos. A su vez, se revisará si el libro de texto cumple con la estructura lógica y psicológica según De Posada (2001), citada en párrafos anteriores.

4. METODOLOGÍA

4.1 TIPO DE ESTUDIO.

Acorde con Barrera (2007), el álgebra lineal puede formularse diciendo que es el área de las matemáticas que estudia las ecuaciones: $AX = B$ y $AX = \lambda B$, es decir, por una parte se analiza la solución de sistema de ecuaciones lineales, elementos básicos de la teoría de espacios vectoriales y determinantes, y por otra, se estudia la teoría de valores y vectores propios.

Considerando todo ello, vemos que el estudio de valores y vectores propios es un pilar dentro de la enseñanza del álgebra lineal, motivo por el cual, en este trabajo se realiza un análisis sobre el contenido y modo de abordar los conceptos matemáticos de valores y vectores propios que presentan algunos libros de texto de álgebra lineal que son tomados como referencia principal en el plan de estudios de diversas licenciaturas de nivel universitario, dichos conceptos están contenidos como un tema importante en los libros de texto de álgebra lineal, considerando que el libro de texto no es lo esencial en la enseñanza, pero si un gran instrumento de ayuda

En nuestro trabajo consideramos que los libros de texto, además de ser un campo de acceso inmediato para los alumnos, resulta fundamental dentro del aprendizaje del álgebra lineal, ya que los libros de texto son de gran importancia dentro del sistema educativo universitario principalmente por la calidad y el tratamiento de los contenidos que éste aporte.

El libro de texto es uno de los principales materiales educativos que el maestro utiliza en el salón de clases, con la perspectiva de que contiene los ejercicios necesarios para la aplicación práctica de los planes y programas educativos formulados por diversas universidades, y además, sugiere elementos y estrategias que los docentes pueden retomar en la actividad didáctica de los planes y programas educativos para la enseñanza del álgebra lineal.

4.2 METODOLOGÍAS DE ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

Son muchas las metodologías empleadas para analizar libros de texto, muchas las clasificaciones de dichas metodologías, y muchas las variantes dentro del mismo método. A continuación se señalan descripciones de distintos métodos de análisis encontrados en diversas bibliografías, así como aspectos particulares de posibles aplicaciones de esos métodos; el objetivo es solamente mostrar aspectos tratados de distintas maneras que se realizan sobre este tema.

4.2.1. METODOLOGÍAS GENERALES

4.2.1.1 ANÁLISIS DE CONTENIDO

Muchas de las metodologías empleadas, como veremos a continuación, utilizan la técnica de *análisis de contenido;* algunas de las declaraciones de esta técnica encontradas en la bibliografía son:

- El análisis de contenido, específicamente utilizado en el análisis de los libros de texto, considera todo mensaje como una secuencia de elementos aislables, susceptibles de ser ordenados por categorías y tratados de manera estadística (Rodríguez, Escudero y Bolívar, 1978)

- El análisis de contenido consiste en el análisis cuantitativo sistemático de materiales de enseñanza (Tamir y García,1992)

- El análisis de contenido es la evaluación de un cuerpo de material de comunicación (libros de texto) para determinar su significado (Jeffery y Roach, 1994); estos mismos autores citan a continuación la definición dada por Krippendorfy Wandersee, quienes consideran una técnica de análisis de contenido aceptable aquella en la que el investigador aplica un esquema de clasificación al material analizado con respecto al contenido de interés.

A su vez este análisis de contenido puede tener distintos enfoques y propósitos: el análisis de la estructura sintáctica (conceptos presentes, secuencia de los contenidos), semántica (comprensión de textos, argumentaciones utilizadas), simbólica (ilustraciones presentes), curricular (errores conceptuales, tipos de actividades incluidas), secuencial (integra el análisis sintáctico y el curricular), evolutiva (variaciones temporales) o grado de dificultad de los contenidos (desarrollo cognitivo necesario) (Jiménez y Perales, 2001), enfoques que se muestran en diversas investigaciones como las siguientes.

Eltinge y Roberts (1993) hablan del análisis de contenido lingüístico, definiéndolo como el método de codificar los datos textuales caracterizando las palabras e identificando las relaciones entre palabras.

Sánchez (1997) explica la diferencia entre el análisis de contenido (mantiene que la estructura lógica de la materia es razón primaria en la secuenciación), el análisis de tareas (enfatiza la ejecución de actividades como lo más importante en el aprendizaje del contenido) y la teoría que pretende aunar estas dos técnicas: la teoría de la elaboración (que origina como propuesta la "secuencia elaborativa" para organizar los contenidos de enseñanza).

Comenta también los dos tipos de organización del contenido que suelen presentar los libros de texto: lineal (desde lo simple a lo complejo y con un grado de dificultad uniforme que aumenta según avanza el texto) y espiral (mantiene el criterio de ir aumentando la dificultad, pero con la particularidad de retomar contenidos ya explicados desde un grado de dificultad más elaborado), así como los criterios a tener en cuenta a la hora de tomar decisiones sobre el tipo de recursos y las estrategias a emplear para mostrar el contenido (comentados también en Navarro, 1985) : criterio científico, axiológico (todo mensaje científico lleva implícito un conjunto de valores morales), criterio de la universalidad, de la aproximación al ambiente, de la actualización, que pueden concretarse en los criterios lógico-inductivo, de comprensibilidad, didáctico y psicológico [Navarro incluye también el criterio de la homogeneidad (exige una seriedad científica paralela que haga posible la ausencia de lagunas y contradicciones) y de la interdisciplinariedad].

4.2.1.2 OTROS MÉTODOS

- Rodríguez, Escudero y Bolívar (1978) exponen además del método de análisis de contenidos, otros métodos utilizados para el análisis de los libros de texto: asociativo (análisis de temas y relaciones, y asociaciones semánticas que mantienen entre sí), estudio del contenido ideológico-sociológico, sociología histórica, sociología de la ciencia, medida del contenido informacional, estudio de los códigos utilizados por otros mensajes semiológicos, estudio de la estructura interna que sigue un texto en sus técnicas de secuenciación, en la presentación de nociones mediante la seriación lógica de contenidos, y estructura narrativa.

- Johnsen (1996) [que afirma que los análisis de contenido han dominado la investigación del libro de texto, teniendo primordialmente un carácter ideológico, con el objetivo de mejorar la capacidad de los libros para infundir tolerancia y comprensión internacional, aunque se hayan empleado una amplia variedad de métodos diferentes, que van desde análisis impresionista-polémicos hasta precisos estudios matemático-estadísticos] distingue, además del análisis cuantitativo del contenido (basado en la sociología, que produce resultados verificables), el método hermenéutico, o descriptivo- analítico (el método histórico tradicional); los análisis espaciales, que miden el número de líneas/páginas dedicadas a un tema concreto, que proporciona una medida absoluta y relativa de la importancia que concede una publicación concreta al tema en cuestión; los análisis de frecuencia, que miden el número de veces que se mencionan ciertos fenómenos, aportando un buen complemento para los análisis espaciales, y el método cualitativo, que se basa en un sistema detallado de categorización que puede incluir contenido, fuentes, presentación, atractivos extratextuales y cometidos (el término categorización, en su sentido más amplio, se refiere al proceso, a los aspectos de uso o relacionados con la producción del fenómeno del libro de texto en cuestión, aunque se utiliza con mayor frecuencia en sentido restringido, siendo las categorías excluyentes y estando bien definidas, de modo que cuanto más estrecha sea la categorización, mayor será la fiabilidad y mayor la correspondiente reducción en la perspectiva).

- López (1986) propone la técnica del nivel de comprensión lectora para valorar libros de texto, que corresponde a las llamadas "fórmulas de lecturabilidad", consistentes en el recuento de aquellos aspectos, tales como número de comas, de palabras por frase, etc. que hayan resultado ser los mejores indicadores de la dificultad de comprensión. Permiten conocer el grado de dificultad de un material sin recurrir para ello a grupos de lectores, y predicen la dificultad, mientras que las pruebas tradicionales lo que hacen es medirla.

No obstante, hay otras opiniones, como la de Newton (1984a) que opina que juzgar los libros de texto solamente por la fórmula de la lecturabilidad puede crear presiones de mercado que lleven a una visión trivial del lenguaje del texto expositivo.

- Armbruster (1997) sugiere el uso de tramas (entendidas como la representación visual de la organización de los contenidos importantes de un texto, que muestran las ideas centrales de un texto y las relaciones que vinculan esas ideas) como criterio para la evaluación de un libro de texto, puesto que ha encontrado una relación directa entre el grado de dificultad para la elaboración de tramas y la organización del libro de texto (si el libro está deficientemente organizado es difícil generar tramas).

Pueden realizarse incluso métodos de análisis ideológicos (Clemente,1983).

El tipo de análisis que se realizará a los libros de texto, será de análisis de contenido, con un enfoque semántico (comprensión de textos, argumentaciones utilizadas) y el grado de dificultad de los contenidos (Jiménez y Perales, 2001), debido a que se revisará si el tipo de contenido es lineal (el contenido y los ejercicios van desde lo simple a lo complejo y con un grado de dificultad uniforme que aumenta según avanza el texto) o bien espiral (mantiene el criterio de ir aumentando la dificultad, pero con la particularidad de retomar contenidos ya explicados desde un grado de dificultad más elaborado). (Sánchez, 1997).

4.3 DESCRIPCIÓN DEL ESTUDIO.

Dado que la teoría de valores y vectores propios es una de las componentes fundamentales del álgebra lineal, en este trabajo analizaremos la forma de aproximarse a la teoría de valores y vectores característicos que se realiza en diversos textos. Por un lado, la mayoría de los libros de álgebra lineal abordan este tema por medio del polinomio característico, en donde no establecen una relación directa con los conceptos básicos de independencia lineal, base y dimensión. Por otro, surgen formas de aproximarse al aprendizaje de la teoría de valores y vectores característicos mediante el polinomio mínimo de una matriz, este enfoque tiene entre otras características el hacer uso sistemático de los conceptos de independencia lineal y dimensión.

Se analizarán seis textos de álgebra lineal, de los cuales cinco presentan la teoría de valores y vectores característicos usando el polinomio característico y uno que lo hace mediante el polinomio mínimo.

Una idea central es identificar los elementos que permitan distinguir las diferencias entre los diversos enfoques que se presentan al abordar la teoría de valores y vectores propios. Esto daría elementos para elaborar una propuesta de aprendizaje acorde con el objetivo propuesto en el curso de álgebra lineal, además, el análisis nos permitirá identificar las características de cada enfoque dado por los diversos autores.

4.4 METODOLOGÍA PROPUESTA

En esta sección describiremos la metodología empleada en el trabajo, en la que podemos distinguir tres fases importantes, las cuales se describen en forma sintética.

4.4.1 FASES DE ESTUDIO.

La *primera fase* del trabajo tuvo un carácter exploratorio, la cual se realizó visitando las páginas de internet de diversas universidades e institutos de educación superior de nuestro país, entre los que destaca la UNAM, IPN, Institutos Tecnológicos y Universidades de diversos estados, entre otras, en donde se revisó la bibliografía fundamental y de referencia utilizada en el programa de la asignatura de álgebra lineal de los diversos programas de sus licenciaturas de ciencias e ingeniería, esto con la finalidad de obtener información sobre cuáles son los libros de texto utilizados con mayor frecuencia en los diversos cursos de álgebra lineal.

Por ejemplo, la Universidad Autónoma de Yucatán, Facultad de Matemáticas, en su curso de álgebra lineal II de cuarto semestre de las licenciaturas en matemáticas y en actuaría, propone la siguiente bibliografía:

BIBLIOGRAFÍA:

1. **Anton, Howard**. Introducción al Álgebra Lineal, 2a edición. Limusa, México 1998.
2. Fraleigh, John B. Álgebra Abstracta. Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. 1987.
3. **Grossman, Stanley I.** Álgebra Lineal, 5a edición. McGraw-Hill Interamericana de México, S.A. de C.V. 1996.
4. Hartfiel, D.J. Matrix Theory and Applications With Matlab, Crc Press, 2000
5. Herstein, I.N. Álgebra Moderna. Trillas, México, 1970.
6. Hill, D.R. Linear Algebra Labs with Matlab. 2ª edición. Prentice-Hall, 1996.
7. Hoffman, Kenneth et al. Álgebra Lineal. México: Prentice-Hall, 1984.
8. Kreider, Donald et al. An introduction to Linear Analysis. EEUU: Adisson Wesley, 1971.
9. Lancaster, Peter and Tismenetsky, M. The Theory of Matrices, 2aedición. Academic Press, 1997.
10. **Lang, Serge**. Álgebra Lineal. México: Fondo Educativo Iberoamericano, 1976.
11. Lax, P. Linear Algebra. Willey-Interscience, 1996.
12. Leon, Steven J. Linear Algebra with Applications, 5aedición. Prentice-Hall, 1998.
13. Meyer, Carl D. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. Society For Industrial, 2000.
14. Noble, Ben y Daniel, James W. Álgebra Lineal Aplicada, 3a edición. México: Prentice Hall Hispanoamericana, 1989.
15. Pita Ruiz, Claudio. Álgebra Lineal. México: Mc Graw-Hill, 1991.
16. Rincón Mejía, Hugo A. Álgebra Lineal. Coordinación de Servicios Editoriales, Facultad de Ciencias. UNAM, 2001.
17. Sadun Lorenzo, Applied Linear Algebra: The Decoupling Principle. Pearson (Mex), 2000.
18. Sahai Vivek, Linear Algebra, Crc Press, 2002.
19. **Strang, G.** Introduction to Linear Algebra, 3ª ed. Wesley-Cambridge Press, 2003
20. Lara Rodríguez, Alejandro y Rubio Barrios, Carlos Jacob. Notas del curso de álgebra lineal. Facultad de Matemáticas, UADY.

El término de la fase exploratoria condujo a la *segunda fase*, que consistió en seleccionar para su análisis a cuatro libros de texto con mayor incidencia en la bibliografía recomendada en los programas de estudio de las asignaturas de álgebra lineal, el libro de texto de Seymour Lipschutz, el cual es considerado como bibliografía de referencia, en el que encontramos una diversidad de ejercicios, y por último, un libro de reciente creación escrito por Fernando Barrera Mora, quien es investigador del Área Académica de Matemáticas y Física de la UAEH, el cual es un libro que se toma como bibliografía en los cursos de algebra lineal de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y de la Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica de la UAEH.

Los libros de texto seleccionados son:

1) Introduction to Linear Algebra.
3rd Edition (2003)
Gilbert Strang
Wellesley- Cambridge Press.

2) Álgebra Lineal
Quinta Edición (1996)
Stanley I. Grossman
McGraw Hill.

3) Introducción al Álgebra Lineal.
3° Edición (2003)
Howard Anton
Limusa Wiley

4) Linear Algebra
Third Edition (1987)
Serge Lang
Springer

5) Teoría y Problemas de Álgebra Lineal
Traducción de la primera edición en inglés de Linear Algebra (1971)
Seymour Lipschutz
McGraw Hill

6) Álgebra Lineal
Primera Edición (2007)
Fernando Barrera Mora
Grupo Editorial Patria

La *tercera fase* consistió en analizar el capítulo de valores y vectores propios de cada libro seleccionado, con la finalidad de examinar si en su explicación del tema hacen uso en forma directa de los conceptos base del álgebra lineal como es dependencia lineal, base y dimensión, saber si la discusión de los conceptos se realiza a través del polinomio mínimo y/o polinomio característico, en qué contextos manejan los nuevos conocimientos, cuáles aspectos didácticos utilizan para comprender tales conceptos, y si se refuerzan las explicaciones con ejemplos, ejercicios y resolución de problemas de distinto nivel de complejidad.

5. ANÁLISIS COMPARATIVO DEL TEMA DE VALORES Y VECTORES PROPIOS QUE SE PRESENTA EN DIVERSOS LIBROS

Se revisó la bibliografía empleada para la asignatura de Álgebra Lineal, la cual es impartida en diversas instituciones de educación superior, de donde se seleccionaron los seis libros según la metodología propuesta.

El análisis se efectuó con la finalidad de identificar las características fundamentales del enfoque empleado en la presentación del tema. Por ejemplo, se trata de identificar si los autores hacen uso sistemático de conceptos tales como dependencia lineal, base, dimensión, entre otros, los cuales son fundamentales del álgebra lineal, revisar los diversos contextos bajo los cuales describen la discusión de valores y vectores propios y por supuesto, revisar bajo qué técnica realizan el enfoque de dicho tema.

En el análisis se pretende identificar el propósito del autor al presentar el tema de valores y vectores propios, bajo qué bases (antecedentes) se relaciona el tema con conocimientos previos del alumno, forma del lenguaje empleado para expresar los conceptos e ideas y bajo qué contexto, además, qué herramientas pedagógicas emplea al presentar dicho tema.

5.1 ANÁLISIS DE LA DISCUSIÓN DE LOS CONCEPTOS DE VALORES Y VECTORES PROPIOS QUE SE PRESENTAN EN ALGUNOS LIBROS DE ÁLGEBRA LINEAL.

5.1.1 ÁLGEBRA LINEAL (quinta edición 1996) autor: STANLEY I. GROSSMAN

En el capítulo 6 de este libro, titulado: Eigenvalores, Eigenvectores y Formas Canónicas, el autor da la definición de los conceptos de eigenvalor y eigenvector, considerando, que el propósito de dicho capítulo es discutir las propiedades de los vectores y valores propios. Desde esta perspectiva, se observa que el interés del autor es mostrar al estudiante dichos conceptos en diversos contextos; esto puede constatarse con los ejercicios propuestos; por ejemplo en la página 554, en el ejercicio 11 plantea un problema sobre teoría de gráficas en la que usa los valores propios de la matriz de adyacencia de la gráfica para encontrar cotas sobre los números cromáticos de la gráfica; en la página 555, ejercicio 12, plantea un problema sobre geología en donde maneja las deformaciones de rocas a través de matrices y sus valores propios; en la página 556 plantea un modelo de crecimiento de población.

En la discusión de los primeros ejemplos, no considera suficientes motivaciones para que los estudiantes descubran la idea de vector propio. Por ejemplo, en la página 534, muestra un caso de una matriz 2X2. La discusión inicia con algo como: sea $A=\begin{pmatrix}10 & -18\\ 6 & -11\end{pmatrix}$. Entonces $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -18\\ 6 & -11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Así, $\lambda_1=1$ es un valor propio de *A* con el correspondiente vector propio $v_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. De forma similar $A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -18\\ 6 & -11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ de manera que $\lambda_2=-2$ es un valor propio de *A* con el correspondiente vector propio $v_2=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

Obsérvese que desarrolla el ejemplo sin motivar la solución, pues no es claro el porqué propone multiplicar la matriz A por el vector que toma. Esto deja en desconcierto a los estudiantes, pues no se les indica cómo encontrar los valores y vectores propios de una matriz.

Después del ejemplo mencionado, indica un método para calcular los valores y vectores propios a través del polinomio característico, por medio del Teorema 1: Sea *A* una matriz de $n\times n$. Entonces λ es un valor propio de *A* si y sólo si $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=0$.

El autor hace referencia a que cualquier valor propio de la matriz *A* es una raíz del polinomio característico.

Se observa que el enfoque dado por el autor en este tema, es presentar la discusión haciendo énfasis en aplicaciones hipotéticas y aspectos algorítmicos, dejando poco espacio para abordar la discusión en términos conceptuales relacionados con dependencia lineal, base y dimensión.

Considera el teorema fundamental del álgebra para garantizar que una matriz de orden $n \times n$, tiene exactamente *n* valores característicos, contando multiplicidades.

Posteriormente da un procedimiento algorítmico para calcular valores y vectores propios (página 537):

i) Encuentra $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

ii) Calcula las raíces $\lambda_{1,}, \lambda_2, ..., \lambda_m$ de $p(\lambda) = 0$

iii) Resuelve el sistema homogéneo $(A - \lambda_i I)v = 0$, correspondiente a cada valor propio λ_i.

Para este método, hace la observación de que por lo general el paso ii) es el más difícil. El autor no propone algún método para encontrar las raíces de un polinomio, ya que sus ejemplos son de polinomios de grado 2 ó 3, y posiblemente considera que el lector tiene el conocimiento algebraico para encontrarlas.

Una vez dado el algoritmo, desarrolla diversos ejercicios poniendo en práctica dicho algoritmo. Consideremos uno de ellos: en la página 538, muestra el ejemplo 4 para encontrar los valores propios de una matriz 3x3.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3)$$

Por lo tanto, los valores propios de *A* son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ y $\lambda_3 = 3$. Después encuentra los vectores propios para cada valor propio. Para $\lambda_1 = 1$ se tiene

$$(A - I)v = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Reduciendo renglones se obtiene, sucesivamente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{produce} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Así, $x_1 = -x_3$, $x_2 = 4x_3$,por lo que un vector propio es $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

El autor propone diversos ejercicios con los cuales se espera que el estudiante encuentre valores propios iguales a cero, repetidos y/o complejos conjugados, en donde emplea diversos símbolos y un vocabulario fácil de entender por lector.

Debido al método de polinomio característico que emplea para el cálculo de valores propios, no relaciona los conceptos de independencia lineal, base y dimensión, previamente aprendidos, en el aprendizaje de dicho concepto, abocándose a dar una definición de los conceptos y posteriormente la manera algorítmica para calcularlos; es así como el alumno debe aprenderlos.

En la discusión de los conceptos de valores y vectores propios, el autor hace referencia a conceptos tales como: determinante de una matriz, polinomios, raíces de polinomios, matriz singular, entre otros, sin embargo no presenta una discusión que tenga como eje los conceptos de independencia lineal y dimensión. Esto puede inducir al lector a considerar que los diversos conceptos del álgebra lineal no estén plenamente enlazados, perdiendo el objetivo de precisar la esencia del objeto de estudio. Desde el punto de vista algorítmico, calcula el determinante de una matriz; calcula las raíces de un polinomio, utiliza el Teorema Fundamental del Álgebra y resuelve un sistema de ecuaciones lineales homogéneo para encontrar los valores y vectores propios de una matriz dada.

Es importante señalar que el autor hace uso de los conceptos básicos del álgebra lineal como son dependencia lineal, base y dimensión para diagonalizar matrices, por ejemplo, en la página 545, presenta el teorema 6: *Sea A una matriz* $n \times n$*; entonces A tiene n vectores propios linealmente independientes si y sólo si la multiplicidad geométrica de cada valor propio es igual a su multiplicidad algebraica*. En particular, *A* tiene *n* vectores propios linealmente independientes si todos los valores propios son distintos (ya que entonces la multiplicidad algebraica de cada valor propio es 1). Con este resultado garantiza la diagonalización de A.

Como se observa en su discusión y en el desarrollo de sus ejemplos, el autor utiliza un lenguaje formal (Dorier, 2000), abstracto y algebraico, y muy poco el geométrico (Hillel, 2000). Utiliza una representación semiótica del tipo de registro simbólico (Duval, 1995) de fácil comprensión para el alumno. Los ejemplos y ejercicios propician un pensamiento práctico, dejando de lado un pensamiento teórico (Sierpinska, 2000), y llevan una organización de contenido lineal, esto es, van de lo simple a lo complejo según avanza el tema (Sánchez, 1997).

En el análisis se observa que el libro puede ser de gran ayuda para el profesor en la organización de sus explicaciones en la transmisión de contenidos, a su vez, pudiera auxiliarlo a plantear actividades significativas y a adecuar contenidos y tareas a las particularidades de los alumnos, ya que el tema de discusión es parte de los contenidos programáticos de los cursos de álgebra lineal, además, es susceptible de utilización autónoma por parte del alumno ya que su lenguaje es claro y al nivel universitario (Fernández, 1989).

5.1.2 LINEAR ALGEBRA (Third Edition 1987) autor: SERGE LANG

En el capítulo VIII de este libro: Eigenvectors and Eigenvalues (valores y vectores propios), el autor considera que el propósito de este capítulo es dar las propiedades elementales básicas de valores y vectores propios, además, considera como una aplicación de los determinantes el cálculo del polinomio característico.

Inicia el capítulo con la definición de los conceptos de valor y vector propio:

Sea V un espacio vectorial y sea $A:V \to V$ una transformación lineal de V sobre sí mismo. Un elemento $v \in V$ es llamado un vector propio de A si existe un número λ tal que $Av = \lambda v$. Si $v \neq 0$ entonces λ es determinado en forma única, debido a que $\lambda_1 v = \lambda_2 v$ implica $\lambda_1 = \lambda_2$. En este caso, se dice que λ es un valor propio de A correspondiente al vector propio v. También se dice que v es un vector propio con el valor propio λ. Recordemos que en lugar de eigenvalor y eigenvector, también se pueden emplear los términos *valor y vector característico* o *valor y vector propio*.

Posteriormente, propone algunos ejemplos interesantes en su cálculo, sin considerar algún contexto, es decir, no establece ningún vínculo entre la matemática y otras disciplinas de la ciencia y/o humanidades.

El ejemplo 1, pág. 195, plantea: *Sea V un espacio vectorial sobre $\Re$ que consiste de todas las funciones infinitamente diferenciables. Sea $\lambda \in \Re$. Entonces la función f, donde $f(t) = e^{\lambda t}$, es un vector propio de la derivada d/dt ya que $df/dt = \lambda e^{\lambda t}$.*

Ejemplo 2. Sea $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ una matriz diagonal.

Entonces, todo vector unitario $E^i\ (i = 1, \ldots, n)$ es un vector propio de A. En efecto, tenemos que $AE^i = a_i E^i$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es importante notar que en la discusión de estos ejemplos, encuentra los valores y vectores propios a través de la definición, ya que aún no muestra alguna metodología para su cálculo, como se ve en los ejemplos citados anteriormente.

Presenta algunos teoremas para mostrar las características de valores y vectores propios, como por ejemplo el siguiente:

Teorema 1.2. Sea V un espacio vectorial sobre K y sea $A:V \to V$ un mapeo lineal. Sean $v_1,\ldots,v_m$ vectores propios de A, con valores propios $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ respectivamente. Asumimos que esos valores propios son distintos, es decir, $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Entonces $v_1,\ldots,v_m$ son linealmente independientes.

Hasta este punto, el autor no proporciona en forma directa, la oportunidad de ir descubriendo la idea de vector propio a través de los conceptos previamente vistos en el curso de álgebra lineal, sino que presenta la definición y por medio de ejercicios y teoremas construye los conceptos.

Posteriormente, en un subtema del capítulo VIII titulado: VIII.2. THE CHARACTERISTIC POLYNOMIAL (EL POLINOMIO CARACTERÍSTICO), muestra como usar los determinantes para encontrar los valores propios de una matriz.

Su discusión la inicia con el siguiente teorema:

Teorema 2.1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y sea λ un número. Sea $A:V \to V$ un mapeo lineal. Entonces λ es un eigenvalor de A si y sólo si $A-\lambda I$ no es invertible.

Posteriormente define el polinomio característico de una matriz A $n \times n$ de la siguiente manera:

$$P_A(t) = Det(tI - A)$$

Escrito en forma explícita:

$$P(t) = \begin{vmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t - a_{nn} \end{vmatrix}$$

Presenta otro teorema: **Teorema 2.2** Sea A una matriz $n \times n$. Un número λ es un valor propio de A si y sólo si λ es una raíz del polinomio característico de A.

Hace énfasis en que el Teorema 2.2 proporciona una manera clara para determinar los valores propios de una matriz, siempre y cuando se puedan determinar en forma explícita las raíces del polinomio característico. Considera que esto es algunas veces fácil y en otros casos es considerablemente difícil, por ello en el libro aparecen ejercicios en donde las matrices se ajustan de tal forma que se puedan obtener fácilmente las raíces del polinomio.

Se observa que el enfoque dado por el autor en este tema, es presentar la discusión haciendo énfasis en la definición y aspectos algorítmicos, dejando poco espacio para abordar la discusión en términos conceptuales relacionados con dependencia lineal, base y dimensión. Lo que sí discute, es el subespacio V_λ, llamado eigenespacio de A perteneciente a λ, como se ve en el ejemplo 2 de la página 202.

Ejemplo 2. Encontrar los valores propios y una base para los eigenespacios de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

El polinomio característico es el determinante:

$$\begin{vmatrix} t-1 & -4 \\ -2 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)(t-3)-8 = t^2-4t-5 = (t-5)(t+1)$$

Por lo tanto los valores propios son 5 y -1.

Para cualquier valor propio λ, un vector propio correspondiente es un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{aligned} x+4y &= \lambda x \\ 2x+3y &= \lambda y \end{aligned}$$

o su equivalente

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x+4y &= 0 \\ 2x+(3-\lambda)y &= 0 \end{aligned}$$

Damos algún valor a x, por ejemplo $x=1$, y resolvemos para y a partir de cualquier ecuación, por ejemplo, de la segunda ecuación obtenemos $y=-2/(3-\lambda)$
Esto da el vector propio:

$$X(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2/(3-\lambda) \end{pmatrix}$$

Substituyendo $\lambda=5$ y $\lambda=-1$ se obtienen los siguientes dos vectores

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{para } \lambda=5 \qquad \text{y } X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad \text{para } \lambda=-1.$$

El eigenespacio para $\lambda=5$ tiene la base $\{X_1\}$ y el eigenespacio para $\lambda=-1$ tiene la base $\{X_2\}$. Nótese que cualquier escalar no cero que multiplique a esos vectores puede también ser una base. Por ejemplo, en lugar de X_2 podemos considerar

$$2X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

En la discusión de los conceptos de valores y vectores propios, el autor hace referencia a conceptos tales como: determinante de una matriz, polinomios, raíces de polinomios, matriz singular, entre otros, sin embargo no presenta una discusión que tenga como eje los conceptos de independencia lineal y dimensión. Esto puede inducir al lector a considerar que los diversos conceptos del álgebra lineal no estén plenamente enlazados, perdiendo el objetivo de precisar y relacionar los conceptos del álgebra lineal.

Desde el punto de vista algorítmico, calcula el determinante de una matriz; calcula las raíces de un polinomio, utiliza el Teorema Fundamental del Álgebra, resuelve un sistema de ecuaciones lineales homogéneo para encontrar los valores y vectores propios de una matriz dada y una base para los eigenespacios de la matriz.

El autor presenta diversos ejercicios de matrices cuadradas con elementos reales, las cuales tienen valores propios reales diferentes, reales con cierta multiplicidad y complejos. Los ejemplos se presentan con un nivel de complejidad lineal (van de lo simple a lo complejo con un grado de dificultad uniforme que aumenta según avanza el texto) (Sánchez, 1997) y un vocabulario adecuado a los estudiantes universitarios, sin embargo, hace muy poco uso en forma directa de los conceptos básicos del algebra lineal como son dependencia lineal, base y dimensión, lo que pudiera ser una desventaja desde el punto de vista didáctico del álgebra lineal, ya que como hemos mencionado, el alumno pudiera tener un mejor entendimiento si puede relacionar lo ya aprendido con los nuevos conceptos.

Se observa que en su discusión y explicación de sus ejemplos, el autor utiliza un lenguaje formal (Dorier, 2000), abstracto y algebraico, y muy poco el geométrico (Hillel, 2000), ya que por ejemplo, podría haber realizado una representación geométrica del ejemplo 2 de la página 202. A su vez, utiliza una representación semiótica del tipo de registro simbólico (Duval, 1995) de fácil comprensión para el alumno. Los ejemplos y ejercicios propician un pensamiento práctico, netamente algorítmicos, dejando de lado un pensamiento teórico (Sierpinska, 2000).

El análisis muestra que el libro utiliza un lenguaje muy claro y entendible, por lo que se hace susceptible de utilizarse en forma autónoma por parte del alumno, además, puede ser de gran ayuda para el profesor en la organización de sus explicaciones en la transmisión de contenidos, a plantear actividades significativas, así como adecuar contenidos y tareas a la peculiaridad del grupo de alumnos, ya que el tema de discusión forma parte de los contenidos programáticos de los cursos de álgebra lineal (Fernández, 1989).

5.1.3 LINEAR ALGEBRA (3° edition 2003) autor: GILBERT STRANG

El capítulo 5 de este libro, titulado: Eigenvalues and Eigenvectors (Eigenvalores y Eigenvectores o Valores propios y Vectores propios), el autor lo considera el inicio de la "segunda mitad" de la teoría de matrices. La primera parte estuvo casi toda relacionada con los sistemas lineales $Ax = b$ y la técnica principal fue la eliminación. A partir de este capítulo, esta técnica jugará sólo un papel secundario. Manifiesta que a partir de este capítulo, se resolverán nuevos problemas mediante la simplificación de una matriz, convirtiéndola en diagonal o en triangular superior, pero el paso básico ya no será sustraer de una fila el múltiplo de otra. Ya no interesa preservar el espacio fila de una matriz, sino preservar sus valores propios. Las operaciones elementales en renglones no lo hacen. Considera que el capítulo sobre determinantes (capitulo 4) fue una transición del problema $Ax = b$ al nuevo problema de los valores propios. En ambos casos el determinante conduce a una "solución formal": a la regla de Cramer en el caso $Ax = b$ y al polinomio $\det(A - \lambda I)$, cuyas raíces serán los valores propios. (Enfatiza que todas las matrices ahora deben ser cuadradas, ya que los valores propios de una matriz rectangular no tienen sentido). Manifiesta que *si $n = 2$ ó 3, puede usarse realmente el determinante para resolver el problema; el cálculo de los valores propios para n grande es una tarea mucho más complicada que resolver $Ax = b$, e incluso el mismo Gauss no aportó mucho.*

Manifiesta que el primer paso es entender lo que son los valores propios y cómo pueden ser útiles. Para este propósito no considera los conceptos de dependencia lineal, base y dimensión, fundamentales del álgebra lineal, sino que los analiza a través de la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Como un ejemplo específico, considera el par de ecuaciones

$$\frac{dv}{dt} = 4v - 5w \,, \quad v = 8 \quad \text{en} \quad t = 0$$

$$\frac{dw}{dt} = 2v - 3w \,, \quad w = 5 \quad \text{en} \quad t = 0.$$

Este es un problema con valores iníciales.

Lo escribe en forma matricial:

$$u(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, \qquad u_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

En esta notación, el sistema se transforma en

$$\frac{du}{dt} = Au \,, \quad u = u_0 \quad \text{en} \quad t = 0.$$

La sustitución de $u = e^{\lambda t} x$ en $\frac{du}{dt} = Au$ da $\lambda e^{\lambda t} x = A e^{\lambda t} x$, y la cancelación produce

$$Ax = \lambda x.$$

Esta es la ecuación fundamental para el valor propio λ y el vector propio x. Nótese que es no lineal, ya que involucra el producto de ambas incógnitas λ y x. Si pudiéramos descubrir el número λ, entonces la ecuación para x se volvería lineal; de hecho, podríamos escribir $\lambda I x$ en lugar de λx, y pasar este término al lado izquierdo:

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Evidentemente el vector propio x está en el espacio nulo de la matriz

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}4-\lambda & -5\\ 2 & -3-\lambda\end{bmatrix}.$$

Para estas ecuaciones, sólo se está interesado en aquellos valores particulares λ para los cuales existe algún vector propio x distinto de cero (convirtiéndose en una ecuación lineal). Para poder ser útil, el espacio nulo de $A-\lambda I$ debe contener algún vector diferente de cero. En forma breve, $A-\lambda I$ debe ser singular. Para esto, el determinante da un criterio definitivo.

El número λ será un valor propio de A, con un vector propio correspondiente distinto de cero, si y sólo si $\det(A-\lambda I)=0$. Esta es la ecuación característica para la matriz A. El cálculo del determinante es un polinomio en λ de grado n y se conoce como el polinomio característico de A, y sus raíces $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ son los valores propios de A.

En el ejemplo

$$det\begin{pmatrix}4-\lambda & -5\\ 2 & -3-\lambda\end{pmatrix}=(4-\lambda)(-3-\lambda)+10=\lambda^2-\lambda-2.$$

Los factores del polinomio característico $\lambda^2-\lambda-2=0$ son $(\lambda+1)(\lambda-2)$, y la matriz *A* tiene dos valores propios distintos: $\lambda_1=-1$ y $\lambda_2=2$. A cada uno de esos valores especiales, le corresponde un espacio de eigenvectores, los cuales satisfacen $Ax=\lambda x$ ó $(A-\lambda I)=0$. Los cálculos para λ_1 y λ_2 se realizan por separado:

$$\lambda_1=-1:\qquad (A-\lambda_1 I)x=\begin{bmatrix}5 & -5\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},$$

Y la solución es cualquier múltiplo de

$$x_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix};$$

$$\lambda_2=2:\qquad (A-\lambda_2 I)x=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},$$

y la solución es cualquier múltiplo de

$$x_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Los vectores propios no están determinados únicamente; cualquier vector en el espacio nulo de $A - \lambda I$ (el cual le llamamos el correspondiente eigenespacio de λ) es un eigenvector, y que deseamos sea base para el espacio. En este ejemplo, ambos eigenespacios son de una dimensión (el número de vectores que generan el eigenespacio es uno), y son generados por x_1 y x_2, respectivamente.

El autor manifiesta la importancia del tema de valores y vectores propios, en donde la ecuación principal es $Ax = \lambda x$. Considera que la mayoría de los vectores x no satisfacen esta ecuación, ya sea λ un valor propio o no. Una x típica cambia de dirección cuando se multiplica por A, así que Ax no es un múltiplo de x. Esto significa que *sólo ciertos números especiales λ son valores propios y que sólo ciertos vectores especiales son vectores propios.* Por supuesto que si A fuera un múltiplo de la matriz identidad, entonces ningún vector cambiaría de dirección y todos los vectores serían vectores propios. Pero en el caso usual los vectores propios son pocos y separados.

Resume su introducción al tema diciendo:

Cada una de las siguientes condiciones es necesaria y suficiente para que el número λ sea un valor propio de *A*:

(1) Existe un vector *x* no cero, tal que $Ax = \lambda x$.
(2) La matriz $A - \lambda I$ es singular.
(3) La ecuación $\det(A - \lambda I) = 0$ es la ecuación característica. Este determinante es un polinomio en λ de grado *n*, conocido como el polinomio característico de *A*, y sus raíces $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (los cuales pueden o no pueden ser números reales, y pueden o no incluir algunas repeticiones de la misma λ) son los valores propios de la matriz *A*.

Presenta ejemplos numéricos y establece que el problema de los valores propios es algebraicamente y computacionalmente mucho más difícil que $Ax = b$, ya que para un sistema lineal, un número finito de pasos de eliminación produce la respuesta exacta en un tiempo finito. En el caso de valores propios, no hay pasos ni fórmulas, o Galois pudiera tener un susto en su tumba: el polinomio característico de una matriz 5×5 es un polinomio de grado 5, y él probó que no hay una fórmula algebraica para encontrar las raíces de tal polinomio. De hecho, el comentario anterior debe precisarse pues hay matrices que tienen por polinomio mínimo a $x^5 - 1$ y éste polinomio se puede resolver por fórmula.

Discute algunas propiedades de los valores propios como por ejemplo:

La suma de los n valores propios es igual a la suma de las n entradas de la diagonal de A: $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Esta suma es la traza de A. Además, el producto de los n valores propios es igual al determinante de A.

Si la matriz *A* es triangular -ya sea triangular superior o inferior, y en particular puede ser diagonal- entonces los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son exactamente los mismos que las entradas en la diagonal $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$.

El autor en su discusión de valores y vectores propios, no la relaciona en forma directa con los conceptos básicos del álgebra lineal como lo es dependencia lineal, base y dimensión. Sus ejemplos y ejercicios son muy claros, ya que emplea una simbología y un lenguaje comprensible por alumnos universitarios, además, su nivel de complejidad se va dando en forma gradual.

Presenta algunos teoremas para mostrar las características de valores y vectores propios relacionados con los conceptos básicos del álgebra lineal, como por ejemplo:

Teorema: Supóngase que *A* es una matriz $n \times n$ y tiene *n* vectores propios linealmente independientes. Entonces, si esos vectores se eligen a ser columnas de una matriz S, entonces $S^{-1}AS$ es una matriz diagonal $\mathbf{\Lambda}$, con los valores propios de A a lo largo de su diagonal:

$$S^{-1}AS = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Teorema: Si los vectores propios $x_1, x_2, \ldots, x_n$ diferentes de cero corresponden a diferentes valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, entonces los vectores propios son linealmente independientes.

En la discusión de los conceptos de valores y vectores propios, el autor hace referencia a conceptos tales como: determinante de una matriz, polinomios, raíces de polinomios, matriz singular, entre otros, sin embargo no presenta una discusión que tenga como eje los conceptos de independencia lineal y dimensión, esto puede inducir al lector a considerar que los diversos conceptos del álgebra lineal no estén plenamente enlazados, perdiendo el objetivo de precisar y relacionar los conceptos del álgebra lineal.

Desde el punto de vista algorítmico, calcula el determinante de una matriz; calcula las raíces de un polinomio, utiliza el Teorema Fundamental del Álgebra, resuelve un sistema de ecuaciones lineales homogéneo para encontrar los valores y vectores propios de una matriz dada y una base para los eigenespacios de la matriz.

En el análisis se aprecia que los ejemplos y ejercicios que presenta el autor, tienen un nivel de complejidad lineal, es decir, van de lo simple a lo complejo con un grado de dificultad uniforme que aumenta según avanza el texto (Sánchez, 1997), además, emplea un lenguaje adecuado a los estudiantes de nivel universitario, sin embargo, hace poco uso en forma directa de los conceptos previos del álgebra lineal.

El análisis nos permite ver que el autor utiliza un lenguaje formal (Dorier, 2000), abstracto y algebraico, y en poca medida, el lenguaje geométrico (Hillel, 2000).

Utiliza una representación semiótica del tipo de registro simbólico (Duval, 1995) de fácil comprensión para el alumno. A su vez, los ejemplos y ejercicios que muestra en su discusión, favorecen el pensamiento práctico para el alumno, dejando de propiciar un pensamiento teórico (Sierpinska, 2000).

Se aprecia en el análisis del libro que éste puede ser de gran ayuda para el profesor en la organización de sus explicaciones en la transmisión de contenidos, además, le puede auxiliar a plantear actividades significativas y a adecuar contenidos y tareas a las particularidades de los alumnos, ya que el tema de discusión es parte de los contenidos programáticos de los cursos de álgebra lineal, además, debido a que utiliza un lenguaje claro y al nivel universitario, puede ser utilizado en forma autónoma por parte del alumno (Fernández, 1989).

5.1.4 INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL (3° Edición 2003) autor: HOWARD ANTON

En el capítulo 7 de este libro, titulado: Eigenvalores, Eigenvectores, el autor establece que estos conceptos surgen de manera natural en el estudio de vibraciones, sistemas eléctricos, genética, reacciones químicas, mecánica cuántica, esfuerzo mecánico, economía y geometría. El propósito del autor en este capítulo es cómo encontrar los valores y vectores propios y abordar algunas de sus aplicaciones.

Inicia el capítulo con la definición de los conceptos de valor y vector propio:

Si *A* es una matriz $n \times n$, entonces un vector *x* diferente de cero en $\Re^n$ se denomina ***eigenvector*** de *A* si *Ax* es un múltiplo escalar de *x;* es decir,

$$Ax = \lambda x$$

para algún escalar λ. El escalar λ se denomina ***eigenvalor*** de *A,* y se dice que *x* es un eigenvector de *A* correspondiente a λ.

Posteriormente realiza un ejemplo con una matriz 2×2 en donde propone un vector para encontrar un valor propio. (No indica cómo encontrarlo, sólo lo propone).

Ejemplo 1: El vector $x=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ es un eigenvector de $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\8 & -1\end{bmatrix}$ correspondiente al eigenvalor $\lambda=3$, ya que $Ax=\begin{bmatrix}3 & 0\\8 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=3x$.

Manifiesta que para encontrar los valores propios de una matriz A $n\times n$, $Ax=\lambda x$ se vuelve a escribir como:

$$Ax=\lambda Ix$$

o bien, de manera equivalente,

$$(\lambda I-A)x=0.$$

Para que λ sea un valor propio, debe existir una solución diferente de cero para esta ecuación. Dicha ecuación tiene una solución diferente de cero si y sólo si:

$$\det(\lambda I-A)=0.$$

A esta ecuación la denomina ecuación característica de A; los escalares que satisfacen esta ecuación son los valores propios de A. Al desarrollar $\det(\lambda I-A)$ se obtiene un polinomio en λ, denominado polinomio característico de A.

$$\det(\lambda I-A)=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\dots+c_n=0.$$

Las raíces del polinomio característico son los valores propios de la matriz A.

Por el teorema fundamental del álgebra, la ecuación característica

$$\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\dots+c_n=0$$

tiene cuando mucho *n* soluciones distintas, por lo que una matriz $n \times n$ tiene a lo sumo *n* valores propios distintos.

Muestra diversos ejemplos con diferentes grados de dificultad para su cálculo numérico a través del polinomio característico.

Presenta los siguientes teoremas para resumir lo visto hasta el momento:

Teorema 7.1.1. Si *A* es una matriz triangular (triangular superior, triangular inferior o diagonal) $n \times n$, entonces los eigenvalores de *A* son los elementos de la diagonal principal de *A.*

Teorema 7.1.2. Si *A* es una matriz $n \times n$ y λ es un número real, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes

a) λ es un eigenvalor de *A*:
b) El sistema de ecuaciones $(\lambda I - A)x = 0$ tiene soluciones no triviales.
c) en $\Re^n$ existe un vector *x* diferente de cero tal que $Ax = \lambda x$.
d) λ es una solución de la ecuación característica $\det(\lambda I - A) = 0$.

Hace una observación: En problemas reales, la matriz A a menudo es tan grande que el cálculo de la ecuación característica no es práctico. Como resultado, para obtener valores propios se aplican varios métodos de aproximación.

Se observa que el enfoque dado por el autor para analizar los conceptos de valores y vectores propios, es presentar la discusión haciendo énfasis en el aspecto algorítmico (solución de la ecuación característica). Aborda conceptos de base y dependencia lineal para saber características de los vectores propios encontrados. Por ejemplo, en el ejercicio 5 de la página 430 pide encontrar bases para los eigenespacios de una matriz.

Ejemplo 5. Encontrar bases para los eigenespacios de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

La ecuación característica de A es $\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=0$ o bien en forma factorizada, $(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$; así los valores propios de A son $\lambda=1$ y $\lambda=2$, de modo que existen dos eigenespacios de A.

Por definición, $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ es un vector propio de A correspondiente a λ si y sólo si x es una solución no trivial de $(\lambda I-A)x=0$; es decir, de

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Si $\lambda=2$, entonces (3) se convierte en

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo este sistema se obtiene

$x_1=-s, \quad x_2=t, \quad x_3=s.$

Así, los vectores propios de A correspondientes a $\lambda=2$ son los vectores diferentes de cero de la forma

$$x=\begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}=s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ son linealmente independientes, estos vectores forman una base para el eigenespacio correspondiente a $\lambda=2$.

Se hace un procedimiento similar para $\lambda = 1$, en donde se encuentra el vector

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El cual es una base para el eigenespacio correspondiente a $\lambda = 1$.

Presenta algunos teoremas para mostrar las características de valores y vectores propios, como por ejemplo:

Teorema 7.1.3. Si k es un entero positivo, λ es un eigenvalor de una matriz A y x es un eigenvector correspondiente, entonces λ^k es un eigenvalor de A^k y x es un eigenvector correspondiente.

Posteriormente, analiza otros conceptos en base a valores y vectores propios, como el subtema del capítulo 7 titulado: 7.2. DIAGONALIZACIÓN, en donde aplica conceptos de vectores linealmente independientes, base y dimensión para su comprensión.

Se observa que el autor presenta diversos ejemplos y ejercicios con una dosificación gradual para que se desarrolle una comprensión de los valores y vectores propios. Relaciona los conceptos de independencia lineal y dimensión para comprender diversas propiedades de los vectores propios, pero en su discusión para comprender tales conceptos, no los emplea en forma directa.

En la discusión de los conceptos de valores y vectores propios, el autor hace referencia a conceptos tales como: determinante de una matriz, polinomios, raíces de polinomios, matriz singular, entre otros, sin embargo no presenta una discusión que relacione y tenga como eje los conceptos de independencia lineal y dimensión.

Desde el punto de vista algorítmico, calcula el determinante de una matriz; calcula las raíces de un polinomio, utiliza el Teorema Fundamental del Álgebra, resuelve un sistema de ecuaciones lineales homogéneo para encontrar los valores y vectores propios de una matriz dada y una base para los eigenespacios de la matriz.

El análisis muestra que el autor utiliza un lenguaje formal (Dorier, 2000), abstracto y algebraico, y considera algo el geométrico (Hillel, 2000), ya que quizas, el ejemplo 5 de la página 430 podría concebirse mejor con una representación gráfica. Además, emplea una representación semiótica del tipo de registro simbólico (Duval, 1995) de fácil comprensión para el alumno. Sus ejemplos y ejercicios propician un pensamiento práctico, dejando de lado el pensamiento teórico, el cual es fundamental para un aprendizaje con entendimiento (Sierpinska, 2000), a su vez, éstos llevan una organización de contenido lineal, esto es, van de lo simple a lo complejo según avanza el tema (Sánchez, 1997).

El análisis del tema permite considerar que el libro puede ser de gran ayuda para organizar las explicaciones del profesor en la transmisión de contenidos, también pudiera utilizarlo para plantear actividades significativas y a adecuar contenidos y tareas acorde a las particularidades de los alumnos, ya que el tema de discusión es parte de los contenidos programáticos de los cursos de álgebra lineal, además, el lenguaje empleado por el autor al hacer su discusión, es claro y al nivel universitario, lo que lo hace susceptible de poder utilizarse en forma autónoma por parte del alumno (Fernández, 1989).

5.1.5 ÁLGEBRA LINEAL (1° Edición 1971) autor: SEYMOUR LIPSCHUTZ.

En el capítulo 9 de este libro, titulado: Valores Propios y Vectores Propios, el autor presenta una introducción a Polinomios de Matrices y Operadores Lineales, en donde considera un polinomio $f(t)$ sobre un cuerpo K: $f(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$.

Si A es una matriz cuadrada sobre K, entonces definimos $f(t) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I$ donde I es la matriz identidad. En particular, decimos que A es una *raíz* o un *cero* del polinomio $f(t)$ si $f(A) = 0$.

Por ejemplo: Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, y $f(t) = 2t^2 - 3t + 7$, $g(t) = t^2 - 5t - 2$. Entonces

$$f(A) = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 21 & 39 \end{pmatrix}$$

$$g(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 - 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego *A* es un cero de $g(t)$.

Posteriormente, da la definición de los conceptos de valor y vector propio:

"Sea $T\colon V \to V$ un operador lineal sobre un espacio vectorial *V* sobre un cuerpo *K*. Un escalar $\lambda \in K$ se llama un *valor propio* de *T* si existe un vector diferente de cero $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$."

Todo vector que satisface esta relación se llama un *vector propio* de *T* perteneciente al valor propio λ. Observe que cada múltiplo escalar kv es también un vector propio:

$$T(kv) = kT(v) = k(\lambda v) = \lambda(kv).$$

El conjunto de todos estos vectores forman un subespacio de *V* llamado el *espacio propio* de λ.

Realiza algunos ejemplos recordando que un sistema homogéneo tiene una solución diferente de cero si y sólo si el determinante de la matriz de los coeficientes es cero. Sus ejemplos y ejercicios no los relaciona con algún contexto, es decir, únicamente presenta los ejercicios numéricos.

Veamos su ejemplo 9.5: Hallar los valores propios y los vectores propios diferentes de cero asociados a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Buscamos un escalar t y un vector diferente de cero $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tal que $AX = tX$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La ecuación matricial anterior es equivalente al sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x + 2y = tx \\ 3x + 2y = ty \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} (t-1)x - 2y = 0 \\ -3x + (t-2)y = 0 \end{cases}$$

Recordamos que el sistema homogéneo tiene una solución diferente de cero si y sólo si el determinante de la matriz de los coeficientes es cero:

$$\begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -3 & t-2 \end{vmatrix} = t^2 - 3t - 4 = (t-4)(t+1) = 0$$

Luego t es un valor propio de A si y sólo si $t = 4$ o $t = -1$.

Para $t = 4$ encuentra el vector propio $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y cualquier otro vector propio perteneciente a $t = 4$ es un múltiplo de v.

Para $t = -1$ el vector propio es: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Se observa en el ejemplo que el enfoque dado por el autor en este tema, es presentar la discusión haciendo énfasis en la definición y aspectos algorítmicos, dejando poco espacio para abordar la discusión en términos conceptuales relacionados con dependencia lineal, base y dimensión.

Presenta algunos teoremas para especificar algunas de las características de valores y vectores propios, empleando los conceptos de dependencia lineal, base y dimensión del álgebra lineal, como por ejemplo en los siguientes teoremas:

Teorema 9.3: Vectores propios diferentes de cero pertenecientes a valores propios diferentes son linealmente independientes.

Posteriormente, abre el subtema de diagonalización y vectores propios en donde menciona el siguiente:

Teorema 9.4: Un operador lineal $T : V \to V$ puede representarse por una matriz diagonal B si y sólo si V tiene una base formada por vectores propios de T. En este caso, los elementos de la diagonal de B son los valores propios correspondientes.

En el teorema anterior, si hacemos *P* la matriz cuyas columnas son los *n* vectores propios independientes de *A,* entonces $B = P^{-1}AP$.

Ejemplo 9.7: Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. La matriz *A* tiene dos vectores propios independientes $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Sea $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, y por tanto, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix}$.

Entonces *A* es similar a la matriz diagonal

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como se esperaba, los elementos de la diagonal 4 y -1 de la matriz diagonal *B* son los valores propios correspondientes a los vectores propios dados.

Enseguida habla del Polinomio característico y del teorema de Caley-Hamilton:

Teorema 9.5 (Caley-Hamilton): Toda matriz es un cero de su polinomio característico.

La relación íntima que existe entre el polinomio característico y los valores propios se da en el siguiente teorema:

Teorema 9.6: Sea A una *n*-ésima matriz cuadrada sobre un campo K. Un escalar $\lambda \in K$ es un valor propio de A si y sólo si λ es una raíz del polinomio característico $\Delta(t)$ de A.

Un tema importante que discute el autor es el de Polinomio Mínimo o polinomio minimal de la siguiente manera: Sea A una *n*-ésima matriz cuadrada sobre un cuerpo K. Existen polinomios diferentes de cero $f(t)$ tales que $f(A) = 0$; por ejemplo el polinomio característico de *A.* Entre estos polinomios consideramos los de grado mínimo y de ellos seleccionamos uno cuyo coeficiente principal sea 1, esto es que sea mónico. Este polinomio $m(t)$ existe y es único, al cual lo llamaremos el *polinomio mínimo (o polinomio minimal)* de *A.*

En este apartado, da algunas características del polinomio mínimo, sin embargo no profundiza en el concepto y mucho menos en un método algorítmico para su cálculo. Esto lo apreciamos en los teoremas 9.10, 9.11 y el ejemplo 9.11 de la página 203.

Teorema 9.10: El polinomio mínimo $m(t)$ de A divide a cualquier polinomio que tiene a A como un cero. En particular, $m(t)$ divide al polinomio característico $\Delta(t)$ de A.

Existe una relación más fuerte entre $m(t)$ y $\Delta(t)$:

Teorema 9.11: Los polinomios característico y mínimo de una matriz A tienen los mismos factores irreducibles.

Ejemplo 9.11: Hallar el polinomio mínimo $m(t)$ de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

El polinomio característico de A es $\Delta(t) = |tI - A| = (t-2)^3(t-5)$. Por el teorema 9.11, $t-2$ y $t-5$ deben ser factores de $m(t)$. Por el teorema 9.10, $m(t)$ debe dividir a $\Delta(t)$; luego $m(t)$ debe ser uno de los siguientes tres polinomios:

$$m_1(t) = (t-2)(t-5), \qquad m_2(t) = (t-2)^2(t-5), \qquad m_3(t) = (t-2)^3(t-5).$$

Sabemos del teorema de Caley-Hamilton que $m_3(A) = \Delta(A) = 0$. Se puede verificar que $m_1(A) \neq 0$ pero $m_2(A) = 0$. En consecuencia, $m_2(t) = (t-2)^2(t-5)$ es el polinomio mínimo de A.

El autor no relaciona en forma directa los conceptos de independencia lineal, base y dimensión cuando realiza la discusión sobre los conceptos de valores y vectores propios, pero plantea diversos ejercicios y ejemplos con diversos niveles de complejidad, empleando un vocabulario y una simbología al nivel universitario.

En la discusión de los conceptos de valores y vectores propios, el autor hace referencia a conceptos tales como: determinante de una matriz, polinomio mínimo, polinomio característico, raíces de polinomios, matriz singular, entre otros, sin embargo no presenta una discusión que tenga como eje los conceptos de independencia lineal y dimensión.

Desde el punto de vista algorítmico, calcula el determinante de una matriz; calcula las raíces de un polinomio, utiliza el Teorema Fundamental del Álgebra, resuelve un sistema de ecuaciones lineales homogéneo para encontrar los valores y vectores propios de una matriz dada.

Es importante señalar que el libro tiene un contenido conceptual básico y una gama muy amplia de ejercicios numéricos.

El análisis muestra que el autor utiliza un lenguaje formal (Dorier, 2000), abstracto y algebraico, y muy poco el geométrico (Hillel, 2000), ya que como hemos descrito algunos de sus ejemplos, no muestra representación geométrica alguna. Utiliza una representación semiótica del tipo de registro simbólico (Duval, 1995) de fácil comprensión para el alumno. Sus ejemplos y ejercicios propician un pensamiento práctico, es decir, algorítmico, dejando de lado un pensamiento teórico (Sierpinska, 2000), y llevan una organización de contenido lineal, esto es, van de lo simple a lo complejo según avanza el tema (Sánchez, 1997).

Debido a que el libro cuenta con una gama amplia de problemas, le puede ayudar al profesor a plantear diversidad de tareas y ejercicios según las particularidades de los alumnos, además, es posible su utilización de forma autónoma por parte del alumno ya que su lenguaje es claro y al nivel universitario (Fernández, 1989).

5.1.6 ÁLGEBRA LINEAL (primera edición 2007) autor: FERNANDO BARRERA MORA

En el capítulo 6 de este libro, titulado: Eigenteoría: estructura de operadores, el autor considera que el propósito de este capítulo es formular matemáticamente diversos problemas de economía, física, ingeniería, entre otras, de tal forma que se tenga la ecuación: $AX = \lambda X$ para una $X \neq 0$.

Manifiesta que la forma usual de abordar la ecuación $AX = \lambda X$, es considerando que si $X \neq 0$, entonces la matriz $A - \lambda I$ es singular, y esta última condición se puede formular a través del determinante de la matriz $A - \lambda I$, dando lugar al concepto de polinomio característico.

El autor estima que el usar determinantes tiene algunas desventajas, entre las que se encuentra el hacer una presentación más o menos exhaustiva de las propiedades del determinante. También se tiene que el polinomio característico no proporciona condiciones necesarias y suficientes para que una matriz sea diagonalizable o triangulable.

La alternativa que presenta es a través del polinomio mínimo, por lo que inicia definiendo el polinomio mínimo de una matriz u operador y establece propiedades relacionadas con la estructura de la matriz u operador. Además, a partir del polinomio mínimo define el polinomio característico y da una prueba muy corta del importante teorema de Cayley-Hamilton.

En sus definiciones, inicia considerando que el problema de valores característicos se aborda estudiando soluciones de la ecuación $AX = \lambda X$, en donde lo plantea de la siguiente manera: ¿Para qué valores de λ es singular la matriz $A - \lambda I$?

Tomando la ruta vía de determinantes, considera que se debe cumplir que $f(\lambda) := |A - \lambda I| = 0$. Entonces, la existencia de valores característicos de A equivale a la existencia de raíces de $f(x)$, y esto a la vez equivale a que $f(x)$ admita factores lineales, lo cual no siempre queda garantizado.

La ruta que toma el autor, parte de la misma condición de que la matriz $A - \lambda I$ es singular. La existencia de valores característicos toma otro camino, en donde hace uso de aspectos relacionados con la matriz u operador y el espacio en donde actúa.

Realiza el siguiente desarrollo para mostrar la existencia del polinomio mínimo. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, sabemos que el espacio de los operadores, $\mathcal{L}(V;V)$ también tiene dimensión finita, más precisamente, si V tiene dimensión n, entonces $\dim(\mathcal{L}(V;V)) = n^2$. Sea T un operador en V, entonces el conjunto $\left\{ I, T, T^2, \ldots, T^{n^2} \right\}$ es linealmente dependiente, por lo que existen escalares, $a_0, a_1, \ldots, a_{n^2}$, no todos cero, tales que $a_0 I + a_1 T + \cdots + a_{n^2} T^{n^2} = 0$. Esto se traduce diciendo que existe un polinomio no cero, $f(x)$ tal que $f(T) = 0$. En este caso decimos que T es un cero del polinomio $f(x)$. De todos los polinomios que tienen a T como cero, existe uno de mínimo grado y mónico, al cual se le llama polinomio mínimo.

El autor muestra algunos ejemplos numéricos, en donde es importante resaltar el uso de los conceptos básicos del álgebra lineal para calcular los valores y vectores propios a través del polinomio mínimo, es decir, tal parece que el propósito del autor en este capítulo es hacer uso de los conceptos básicos del álgebra lineal para el cálculo y manejo de los vectores y valores propios, para su entendimiento.

El ejemplo 6.1.1 es un ejercicio en donde antes de presentar las propiedades generales e importantes del polinomio mínimo de un operador, se discute el caso en que el espacio tiene dimensión dos.

Ejemplo 6.1.1 Sea V un espacio vectorial de dimensión 2, T un operador en V. Entonces el polinomio mínimo de T tiene grado a lo más dos.

Caso I. *Para todo $\alpha \in V$ los vectores α y $T(\alpha)$ son linealmente dependientes. La condición equivale a que para cada α existe un escalar c_α tal que $T(\alpha) = c_\alpha \alpha$. Mostraremos que el escalar c_α no depende de α. Para esto es suficiente demostrar que si α y β son linealmente independientes, entonces $c_\alpha = c_\beta$.*

Se tiene $T(\alpha+\beta) = c(\alpha+\beta)$. Por otro lado, $T(\alpha+\beta) = T(\alpha)+T(\beta) = c_\alpha \alpha + c_\beta \beta$. De estas ecuaciones se concluye que $c\alpha + c\beta = c_\alpha \alpha + c_\beta \beta$. Como α y β son linealmente independientes, entonces $c = c_\alpha = c_\beta$.

Resumiendo, hemos probado que existe una constante c tal que $T(\alpha) = c\alpha$ para todo $\alpha \in V$; esto equivale a $(T - cI)(\alpha) = 0$ para toda $\alpha \in V$, es decir, $T - cI$ es el operador cero. Entonces el polinomio mínimo de T es $x - c$.

Caso II. *Existe una $\alpha \in V$ tal que α y $T(\alpha)$ son linealmente independientes. Como V tiene dimensión dos, α, $T(\alpha)$, $T^2(\alpha)$ son linealmente dependientes, entonces existen escalares a y b tales que $T^2(\alpha) = aT(\alpha) + b\alpha$.*

Afirmamos que el polinomio mínimo de T es $x^2 - ax - b$. Esto equivale a probar que $S = T^2 - aT - bI$ es el operador cero, para lo cual basta probar que $S(\alpha) = S(T(\alpha)) = 0$.

De la ecuación $T^2(\alpha) = aT(\alpha) + b\alpha$ se obtiene $S(\alpha) = T^2(\alpha) - aT(\alpha) - b\alpha = 0$.

También tenemos que

$S(T(\alpha)) = (T^2 - aT - bI)(T(\alpha)) = T(T^2(\alpha) - aT(\alpha) - b\alpha) = T(0) = 0,$ probando lo afirmado. De los casos discutidos se concluye que $m_T(x)$ tiene grado a lo más dos, como afirmamos.

Veamos el ejemplo numérico: Ejemplo 6.1.2. Encuentre el polinomio mínimo del operador $T:\Re^2 \to \Re^2$ dado por $T(x,y)=(2x-y,3x+y)$

Se tiene $T(1,0)=(2,3)$ por lo que (1,0) y $T(1,0)=(2,3)$ son linealmente independientes. También tenemos $T^2(1,0)=T(T(1,0))=T(2,3)=(1,9)$. Como (1,0) y $T(1,0)=(2,3)$ son linealmente independientes, deseamos encontrar escalares a y b tales que $T^2(1,0)=aT(1,0)+b(1,0)$. Resolviendo esta ecuación se encuentra que $a=3$ y $b=-5$, por lo que el polinomio mínimo de T es $m_T(x)=x^2-3x+5$.

Muestra a través de definiciones, teoremas y corolarios diversas propiedades del polinomio mínimo y de los valores y vectores propios, haciendo siempre énfasis en los conceptos fundamentales del álgebra lineal. Por ejemplo, presenta un concepto que generaliza al de vector característico y es de gran utilidad para subsiguientes discusiones del polinomio mínimo, el cual es el de subespacio invariante.

Definición 6.1.3. Sea V un espacio vectorial, $T:V\to V$ un operador. El subespacio U de V se llama $T-in\mathrm{var}iante$, si $T(U)\subseteq U$.

Lema 6.1.1. Sea V un espacio de dimensión $n\geq 1$, T un operador en V y W un subespacio $T-in\mathrm{var}iante$ de dimensión $k\geq 1$. Entonces existe un polinomio $g(x)$ de grado a lo más $n-k$ tal que $g(T)(V)\subseteq W$.

Teorema 6.2.2. Sea V un espacio de dimensión n, T un operador en V. Entonces T es triangulable $\Leftrightarrow$ el polinomio mínimo de T es producto de factores lineales.

En la discusión de los conceptos de valores y vectores propios, el autor hace referencia a conceptos tales como: polinomio mínimo, raíces de polinomios, matriz singular, entre otros. Lo que es importante recalcar que el autor de este libro analiza a fondo y de una manera muy entendible los conceptos de valores y vectores propios, ya que a través de su análisis por medio del polinomio mínimo hace un uso constante y con notoria claridad y certeza de los conceptos fundamentales del álgebra lineal, como lo son dependencia lineal, base y dimensión. Esto induce al lector a considerar que los diversos conceptos del álgebra lineal están plenamente enlazados, lo que induce a un mejor entendimiento de sus objetivos.

Por ejemplo, para seguir los pasos que el autor propone para encontrar el polinomio mínimo de una matriz, los realizaremos a través del siguiente ejemplo:

Sea la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, encontrar su polinomio mínimo.

Consideramos un vector $X=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$, entonces $AX=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$, vemos que los vectores X y AX son linealmente independientes. Además, tenemos que: $A^2X=A(AX)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}$.

Observamos que los vectores X, AX y A^2X son linealmente dependientes. Acomodando la ecuación: $\begin{bmatrix}a+b+c\\ b+4c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$. En forma de ecuaciones tenemos Por lo tanto debemos buscar constantes a, b y c tales que: $a\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} a+b+c&=0\\ b+4c&=0 \end{aligned}$$

considerando a $c=1$, $a=3$ y $b=-4$ encontramos que: $3X-4AX+A^2X=0$. Por lo tanto, el polinomio mínimo es: $h(x)=x^2-4x+3=0$.

Descomponiendo en factores, tenemos: $h(x)=(x-3)(x-1)=0$, en donde vemos que los valores propios de la matriz A son 3 y 1.

Por otra parte, el autor, en la prueba de los teoremas de éste capítulo, hace uso de manera sistemática de los conceptos de independencia lineal, base y dimensión. Por ejemplo:

Teorema 6.1.6. Sea *V* un espacio vectorial sobre los reales de dimensión $n \geq 1$, *T* un operador en *V.* Entonces, *T* tiene un subespacio invariante de dimensión uno o dos.

Demostración. Sea $\alpha \in V \setminus \{0\}$, entonces el conjunto $\{\alpha, T(\alpha), \cdots, T^n(\alpha)\}$ es linealmente dependiente, es decir, existen escalares $a_0, a_1, \cdots, a_n$, no todos cero, tales que $a_0\alpha + a_1T(\alpha) + \cdots + a_n T^n(\alpha) = 0$. Sea $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_n x^n$. Note que la hipótesis sobre α garantiza que *p(x)* tiene grado positivo. Por el teorema fundamental del álgebra, *p(x)* se factoriza como producto de factores lineales y cuadráticos, es decir, $p(x) = p_1(x)p_2(x) \cdots p_t(x)$, con cada $p_i(x)$ lineal o cuadrático.

Como *p(T)* es singular, entonces al menos uno de los $p_i(T)$ también es singular. Si $p_i(x) = ax + b$, con $a \neq 0$, entonces existe un $\beta \neq 0$ tal que $aT(\beta) + b\beta = 0$, de esto concluimos que el subespacio generado por β es invariante. Si $p_i(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, entonces existe un $\beta \neq 0$ tal que $aT^2(\beta) + bT(\beta) + c\beta = 0$. De esto se tiene que el subespacio generado por $\{\beta, T(\beta)\}$ es invariante y tiene dimensión uno o dos, terminado la prueba del teorema.

También es importante mencionar que el cálculo del polinomio mínimo el autor lo hace mediante operaciones elementales en las filas y columnas de la matriz $A - xI$ que esencialmente representan combinaciones lineales de las filas y columnas de esa matriz, el cual esta implementado en el siguiente algoritmo:

Algoritmo 6.2.1
Requiere una matriz cuadrada *A* $n \times n$.

1. Construya la matriz $A_1 = A - x\mathrm{I}$.
2. Con operaciones elementales en las filas y columnas de A_1 se obtiene $B = diag\{p(x), C\}$, en donde *p(x)* es el máximo común divisor de los elementos de la primera fila y la primera columna de A_1, y *C* es cuadrada.

3. **Mientras** *p(x)* no divida a todas las entradas de *C* **haga**
4. encuentre la primera columna, de izquierda a derecha, que contiene un elemento no divisible por *p(x)* y sume esta columna a la primera de *B.*
5. Aplique el paso 2 a *B.*
6. **Fin mientras.**
7. Haga $A_1 = C$ y aplique este mismo procedimiento.

En un número finito de iteraciones llegará a una matriz de la forma

$$diag\{m_1(x), m_2(x), \cdots, m_k(x), 1, \cdots, 1\},$$

en donde $m_i(x)$ divide a $m_{i+1}(x)$. El polinomio mínimo de *A* es $m_k(x)$.

Nota: Este algoritmo esta implementado en Maple para consulta del lector.

Para ilustrar el desarrollo del algoritmo, se muestra el ejemplo 6.2. el cual dice:

Encuentre el polinomio mínimo de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sea $A_1 = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{pmatrix}$. Multiplicando la segunda fila de A_1 por $1-x$ y

sumándola a la primera se obtiene:

$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & (1-x)^2 & -1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ 0 & -1 & 1-x \end{pmatrix}$. Multiplicando la segunda fila de A_2 por -1 e intercambiándola con la uno se tiene: $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & x-1 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{pmatrix}$.

Multiplicando la primer columna de A_3 por $-(x-1)$ y sumándola a la segunda se tiene: $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1-x)^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{pmatrix}$. Multiplicando la tercera fila de A_4 por $(1-x)^2$ y sumándola a la segunda se obtiene: $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 1-x \end{pmatrix}$.

Multiplicando la segunda columna de A_5 por $(1-x)$ y sumándola a la tercera se obtiene: $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+(1-x)^3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Multiplicando las columnas dos y tres de A_6 por -1 e intercambiando las filas dos y tres se obtiene:

$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^3+1 \end{pmatrix}$. Con este proceso hemos obtenido la siguiente información:

1. El polinomio mínimo de A es $(x-1)^3+1 = x(x^2-3x+3) = x^3-3x^2+3x$.
2. La matriz A es diagonalizable, pues su polinomio mínimo tiene raíces diferentes.
3. La forma racional de A es $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
4. La matriz A es singular.

Es importante resaltar que el autor considera en todo momento de su discusión sobre eigenteoría los conceptos fundamentales del álgebra lineal como son dependencia lineal, base y dimensión, empleando un lenguaje y simbología adecuados al nivel universitario, además, ejemplifica y resuelve ejercicios con distinto nivel de complejidad y para su solución se requiere de relacionar conceptos previamente estudiados, es decir, lleva una organización de contenido espiral (mantiene el criterio de ir aumentando la dificultad, pero con la particularidad de retomar contenidos ya explicados desde un grado de dificultad más elaborado) (Sánchez, 1997), lo cual contribuye a mejorar el aprendizaje del tema.

El análisis muestra que el autor utiliza un lenguaje formal (Dorier, 2000), abstracto y algebraico, y muy poco el geométrico (Hillel, 2000). Utiliza una representación semiótica del tipo de registro simbólico (Duval, 1995) de fácil comprensión para el alumno. El planteamiento de los ejemplos y ejercicios propician un pensamiento práctico y un pensamiento teórico (Sierpinska, 2000), lo que pude favorecer al aprendizaje con entendimiento.

Acorde al análisis, se considera que el libro puede ser de gran ayuda para el profesor en lo referente a la organización de sus explicaciones en la transmisión de contenidos, además, podría permitirle plantear actividades significativas y a adecuar contenidos y tareas acorde a las características de los alumnos, ya que el tema de discusión es parte de los contenidos programáticos de los cursos de álgebra lineal, a su vez, se podría considerar su utilización de forma autónoma por parte del alumno ya que el lenguaje empleado en su discusión es claro y al nivel universitario (Fernández, 1989).

5.2 TABLA COMPARATIVA DEL ANÁLISIS.

Una forma de resumir el análisis, es a través de una tabla comparativa de los textos, como la que se muestra en seguida.

TABLA COMPARATIVA DE LOS DIVERSOS TEXTOS PARA SU ANÁLISIS DE LOS CONCEPTOS DE EIGENVALORES Y EIGENVECTORES.

LIBRO	DEFINICIÓN DE EIGENVALORES Y EIGENVALORES	RELACIONA LOS PRINCIPIO BÁSICOS DEL A.L.CON LA DEFINICIÓN	EJEMPLOS EN DIFERENTES CONTEXTOS	CÁLCULOS A TRAVÉS DEL POLINOMIO CARACTERÍSTICO	CÁLCULOS A TRAVÉS DEL POLINOMIO MÍNIMO	¿PLANTEA PROBLEMAS PARA APRENDER HABILIDADES?	¿PLANTEA PROBS. PARA DESARROLLAR EL ENTENDIMIENTO?
1) ÁLGEBRA LINEAL (quinta edición) Autor: Stanley I. Grossman Editorial: McGraw Hill	¤		¤	¤		¤	
2) LINEAR ALGEBRA (Third Edition) Autor: Serge Lang Editorial: Springer	¤			¤		¤	
3) LINEAR ALGEBRA Autor: Gilbert Strang Editorial: Academic Press	¤		¤	¤		¤	
4) INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL (Tercera Edición) Autor: Howard Anton Editorial: Limusa Wiley	¤		¤	¤			
5) ÁLGEBRA LINEAL Autor: Seymour Lipschutz, Ph. D. Editorial: McGraw Hill	¤		¤	¤	±	¤	
6) ÁLGEBRA LINEAL Autor: Fernando Barrera Mora Editorial: Patria	¤	¤	¤	±	¤	¤	¤

Se considera la **habilidad** como la destreza para realizar los cálculos de valores y vectores propios de una matriz cuadrada, sin ser necesario entender los conceptos.

El **entendimiento** se da cuando se relaciona o se conecta el conocimiento nuevo con lo que ya se sabe o se conoce (Carpenter 1999).

6. CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

Observamos que todos los autores de los libros de texto analizados, en el capítulo de vectores y valores propios dan sus propiedades básicas, manifestando que su estudio constituye la parte más profunda e importante del álgebra lineal, aclarando que el análisis se trabaja únicamente bajo espacios vectoriales de dimensión finita. Además, suponen que en la discusión del tema de valores y vectores propios, los lectores ya comprenden los conceptos básicos del álgebra lineal como son dependencia lineal, base y dimensión, puesto que son discutidos en capítulos anteriores y los emplean para describir diversas características de los vectores propios.

Después de haber realizado el análisis de los libros de texto, estamos en condición de responder las preguntas de investigación realizadas. En lo que respecta a la primer pregunta, saber en qué medida los autores hacen énfasis en los conceptos fundamentales del álgebra lineal, podemos responder en términos generales, que los autores inician definiendo los conceptos de valores y vectores propios sin relacionarlos con conceptos previos del álgebra lineal como son dependencia lineal, base y dimensión, excepto en el libro de Fernando Barrera Mora, en donde siempre se hace énfasis de tales conceptos como se aprecia en el tema 6.1.1. polinomio mínimo, pág. 136. Recordemos que el aprendizaje con entendimiento es un proceso de construcción del conocimiento y no de mera retención y absorción del mismo (el memorizar y repetir los conceptos de algún objeto matemático, no significa que se ha adquirido su conocimiento), por lo que debemos partir de conceptos conocidos y, a su vez, relacionarlos para adquirir un nuevo conocimiento, esto tiende a dar mejores resultados en el proceso de aprendizaje de los alumnos.

Todos los libros de texto analizados hacen referencia al cálculo de valores y vectores propios a través del polinomio característico, los únicos libros que incorporan el cálculo por medio del polinomio mínimo son los libros de Álgebra Lineal de Seymor Lipschutz y el libro Álgebra Lineal de Barrera Mora, destacando que en el segundo, se hace un análisis profundo del tema.

Realizar diversas representaciones de un concepto, diversos procedimientos o algoritmos para realizar operaciones, entre otros, permite que una persona pueda llegar a entender un concepto matemático. Es por ello que de acuerdo con el análisis realizado, se observa que si los conceptos de valor y vector propio se analizan, además del polinomio característico, a través del concepto de polinomio mínimo, el alumno podrá estructurar los conceptos de dependencia lineal, base y dimensión para entender estos nuevos conceptos, y por supuesto, propicia un aprendizaje con entendimiento que permitirá entender otros conceptos del álgebra lineal.

Algunos autores plantean el empleo de valores y vectores propios a partir de diversos contextos y usos, sin embargo, todos ellos tienden a manejar los conceptos y propiedades de los valores y vectores propios para llegar principalmente a la diagonalización de matrices.

Es de notar que ningún autor toma en cuenta en forma directa el concepto de proporción para discutir conceptos del álgebra lineal, el cual es fundamental para su entendimiento, entre los que se cuentan los valores y vectores propios.

En lo que respecta a la segunda pregunta de investigación, relacionada con las características que se presentan en los ejemplos y ejercicios del aprendizaje de valores y vectores propios, podemos decir que en términos generales, todos los autores plantean en forma gradual la dificultad de los ejemplos y la resolución de ejercicios, empleando un lenguaje y una simbología adecuada para el estudiante universitario. Sin embargo, no tienen la particularidad de retomar contenidos ya explicados para tener un grado de dificultad más elaborado, como en el caso del libro de Barrera Mora, en donde tienen que relacionar conceptos previamente vistos para vislumbrar la solución del problema planteado, lo cual contribuyen al mejor entendimiento de los conceptos, lo que pudiera propiciar en el alumno un aprendizaje con entendimiento.

La tercer pregunta, referente a la diversidad de herramientas pedagógicas empleadas para la discusión de los valores y vectores propios, vemos que los autores hacen poco por evitar las dificultades de aprendizaje que tienen los alumnos al enfrentarse a dichos conceptos, ya que los alumnos son atestados de definiciones de conceptos, demostración de teoremas, entre otros, pero les falta relacionar todo ello con lo que ya conocen de matemáticas, es decir, los autores no plantean actividades a través de las cuales los estudiantes puedan tener una actitud reflexiva para con los nuevos conceptos.

Una de las limitaciones del trabajo, es haber realizado el análisis a un número pequeño de libros de texto, además de sólo haber revisado un tema en lugar de la estructura global del libro de texto. Por ello, un trabajo posterior podría ser el análisis del tema en otros libros y/o realizar el análisis de la estructura global de los libros de texto.

Por otra parte, con base en este análisis, se les recomienda a los diversos maestros que imparten la materia de álgebra lineal, no caigan en los errores planteados en el tema 2.2 Estudios sobre el aprendizaje del álgebra lineal, de este trabajo, esto es, que las nuevas definiciones, nuevos teoremas, nuevos símbolos, entre otros, los den con las conexiones necesarias de los temas de matemáticas que los alumnos ya conocen, es decir, permitirles a los alumnos relacionar los conceptos nuevos con sus conocimientos previos de matemáticas.

REFERENCIAS

1. Aguirre, M. (1998). *Open-ended questions: An alternative mode to assess the students' performance in concept development and use of scientific vocabulary.* Unpublished dissertation, State University of New York at Buffalo.

2. Alves Dias y Artigue (1995) Articulation Problems Between Different Systems of Symbolic Representations in Linear Algebra. *In The Proceedings of the 19th International Conference on the Psychology of Mathematics Education, (*Volume 2, pp. 34-41). Universidad Federal de Pernambuco, Recife, Brazil.

3. Alves Dias, M. (1998). Les problemes d‟articulation entre points de vue cartesien et parametrique dans l‟enseignement de algebre lineaire. Tesis Doctoral. Université Paris 7.

4. Armbruster, B. B. (1997). Tramas: una técnica para aprender mejor de los libros de texto de ciencias. En C. M. Santa y D. E. Alvermann (Comp.), *Una didáctica de las ciencias. Procesos y aplicaciones* (pp. 211-228). Buenos Aires: Aique.

5. Axler, S. (1995) ¡down with Determinants!. The American Mathematical Monthly, 102, 139-154.

6. Babini, J. (1980), *Historia de las ideas modernas en Matemática*, 3ra. edición, Colección de Monografías Científicas, Serie de Matemática, No. 4, Organización de Estados Americanos, Washington, D.C.

7. Balacheff, (1990) Towards a Problematique for research on mathematics teaching, *Journal for Research in Mathematics Education 21, 258-272.*

8. Barrera Mora, Fernando (2007). *Álgebra Lineal.* Grupo Editorial Patria.

9. Barrera Mora, Fernando (2009). Reporte de la segunda etapa del proyecto de CONACyT: BASES TEÓRICAS Y CONCEPTUALES EN LA CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO Y EL EMPLEO DE HERRAMIENTAS DIGITALES, número de proyecto 61996, pág. 25.

10. I. G. Bashmakova and G. S. Smirnova (2000). *The Beginnings and Evolution of Algebra*, The Mathematical Association of America, 2000. (Translated from the Russian by A. Shenitzer.)

11. Bauersfeld H. (1994). "*Perspectives on classroom Interaction"* in Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline, pp. 117-146.

12. Bautista, A. García-Vera (1994). *"Las nuevas tecnologías en la capacitación docente",* Aprendizaje Visor, 1994, Madrid.

13. Borsese, A., Colomer, M., García, P., Llitjós, A., Gil, J.J., Morales, M.J. y Sánchez, Ma. D. (1997). Recursos didácticos en la enseñanza de las ciencias (Ponencia). En R. Jiménez Pérez y A. Mª. Wamba Aguado (Eds.). *Avances en la Didáctica de las Ciencias Experimentales* (pp. 369-396). Huelva: Universidad de Huelva.

14. Brousseau (1997). *Theory of Didactics Situations in Mathematics,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

15. Carlson, D. (1993).Teaching linear algebra: must the fog always roll in?, College Mathematics Journal 24 (special issue about linear algebra), 29-40.

16. Carlson David, Charles R. Johnson, David C. Lay, A. Duane Porter, Ann Watkins, William Watkins, Eds. (1997). *Resources for Teaching Linear Algebra* MAA Notes Volume 42. Mathematical Association of America, 1997.

17. Carpenter, T. P. & Lehrer R. (1999) Teaching and learning Mathematics with understanding. In E. Fennema & T. A. Romberg (Eds). Mathematics classrooms that promote understanding.

18. Cayley, A. (1889-1898). Collected mathematical papers, 13 Vols., Cambridge University Press, Cambridge.

19. Chartier, (2000) "Rôle du géométric dans l‟enseignement et l‟apprentissage de l‟algèbre linéaire", Thèse de doctorat, laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier, Grenoble.

20. Clemente Linuesa, Mª (1983). Los sistemas de valores en los textos escolares: un modelo de análisis. *Enseñanza, 1,* 159-174.

21. Collette, J.-P. (1986), *Histoire des mathematiques*, 2 Vols., Editiones du renouveau pedagogique, Montreal, 1979. Versión castellana: *Historia de las Matemáticas*, 2 Vols., 2da. edición, Siglo XXI Editores, México, 1986.

22. Confrey Jere and Guershon Harel (1994). "Introduction". In *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics,* edited by Guershon Harel and Jere Confrey, pp. vii-xxviii. Albany: State University of New York, 1994.

23. D‟Amore, B. (1997). Problemas, Pedagogía y Psicología de la Matemática en la actividad de resolución de problemas. Madrid: Síntesis.

24. DeBolt, G. P. (1992). Consumers of Textbooks: Concerns from the Classroom. En J. G. Herlihy (Ed.). *The Textbook Controversy: Issues, Aspects and Perspectives.* (pp. 137-145). Norwood: Ablex Publishing Corporation.
25. Dirk De Bock, Wim Van Dooren, Dirk Janssens, Lieven Verschaffel (2007). The Illusion of Linearity from analysis to Improvement. Springer 2007.

26. Dorier, J. L. (1998). The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces, *Linear Algebra and its Applications* (275) 1(4), 1998, 141-160.

27. Dorier, Jean Luc (2000). On the Teaching of Linear Algebra. Kluwer Academic Publishers.

28. Dorier, J. L., Robert A., Robinet J. and Rogalski M. (2000) On a Research Program about the Teaching and Learning of Linear Algebra in first year of French Science University. *International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology.*

29. Duval, R. (1995) Semiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals, Bern: Peter Lang.

30. Eltinge, E. M. and Roberts, C. W. (1993). Linguistic content analysis: a method to measure science as inquiry in textbooks. *Journal of Research in Science Teaching, 30, 1, 65-83.*

31. Euclides, *Euclidis Elementa*, 5 Vols., ed. J.L. Heiderg, Lipsiae (Taubner), 1883-1888. Versión castellana: Euclides, *Elementos*, Biblioteca Clásica Gredos, Vols. 155 y 191, Editorial Gredos, Madrid, 1991 y 1994.

32. Fernández, M. (1989). El libro de texto en el desarrollo del currículum. *Cuadernos de Pedagogía, 168,* 56-59.

33. García Mínguez, J. y Beas Miranda, M. (1995). Análisis histórico del libro de texto. En J. García Mínguez y M. Beas Miranda (Comp.), *Libros de texto y construcción de materiales curriculares* (pp. 13-46). Granada: Proyecto Sur de Ediciones.

34. Gimeno Sacristán, J. (1991). Los materiales y la enseñanza. *Cuadernos de Pedagogía*, 194, pp. 10-15.

35. Grassmann, Hermann Günther (1844). Die Lineare Ausdehnungslehre, ein never zweig der Mathematik (La teoría de extensión lineal, una nueva rama de las Matemáticas).

36. Greeno, G. J. (1983). Conceptual entities, in D. Gentner & A. L. Stevens (eds.), *Mental Models,* Hilsdale, N-J: Lawrence Erlbaum, pp. 227-252.

37. Halmos, P. R. (1991). “Is computer teaching Harmful?”, Notices of the A.M.S., 38, 5, 420-423.

38. Harel, G. (1990). Using geometric models and vector arithmetic to teach high school students basic notions in linear algebra, *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology 21, 387-392.*

39. Harel, G. (1997). The linear algebra curriculum study group recommendations: moving beyond concept definition, in Carlson, D. et al. (eds), *Ressousrces for teaching linear algebra,* pp. 107-126, MAA Notes, vol. 42.

40. Harel, G. (2000). Principles of learning and teaching mathematics, with particular reference to the learning and teaching of linear algebra: old and new observations, in J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra.* Kluwer Academic Publishers.

41. Heinz Karen and Blair Esterba-Boatwright (2008). “The when and why of using proportions”, pp 528-533. National Council of Teachers of Mathematics, march 2008.

42. Herstein, I. N. (1970), *Topics in algebra*, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Mass., 1964. Versión castellana: *Álgebra moderna*, Trillas, México.

43. Hillel, (2000) Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. In J. I. Dorier (Ed), *On the Teaching of Linear Algebra.*; Kluwer Academic Publishers.

44. Hillel & Sierpinska, (1994) On One Persistent Mistake in Linear Algebra, in *The Proceedings PME 18, University of Lisbon, Portugal, 1994, 65-72.*

45. Hodgson B. (1997). “Implications of research on CAS in Collage Algebra”, 1997.

46. Hoffman, K., and Kunze, R. (1961), *Linear algebra*, Prentice-Hall, New York, 1961. Versión castellana: *Álgebra lineal*, Prentice-Hall Internacional, Madrid, 1973.

47. Izquierdo, M. (2001). Hablar y escribir para aprender. En M. Martín Sánchez y J. G. Morcillo Ortega (Eds.). *Actas de los XIX Encuentros de Didáctica de las Ciencias Experimentales* (pp. 17-29). Madrid: Gráficas Artext.

48. Izquierdo, M. y Rivera, L. (1997). La estructura y la comprensión de los textos de ciencias. *Alambique**,** 11,* 24-33.

49. Jeffery, K. R. and Roach, L. E. (1994). A study of the presence of evolutionary protoconcepts in pre-high school textbooks. *Journal of Research in Science Teaching, 31,* 5, 507-518.

50. Jiménez Valladares, J. D. y Perales Palacios, F. J. (2001). Aplicación del análisis secuencial al estudio del texto escrito e ilustraciones de los libros de Física y Química de la ESO. *Enseñanza de las Ciencias, 19,* 1, 3-19.

51. Johnsen, E. B. (1996). *Libros de texto en el caleidoscopio. Estudio crítico de la literatura y la investigación sobre los textos escolares.* Barcelona: Ediciones Pomares- Corredor.

52. Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983a). Early adolescents' proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics,* 14, 219-234.

53. Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983b). Proportional reasoning in early adolescents. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90). New York: Academic Press.

54. Kerr, S. T. (1990). Alternative Technologies as Textbooks and the Social Imperatives of Educational Change. En D. L. Elliot, and A. Woodward, (Ed.). *Textbooks and Schooling in the United States.* Chicago: The National Society for the Study of Education. (p. 194- 221).

55. Kleiner, Israel (2007). A History of Abstract Algebra. Birkhäuser Boston.

56. Kline, Morris (2002). El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. Alianza Editorial, 2002.

57. Lamon, Susan J. (1993a). “Ratio and Proportion: Children‟s Cognitive and Metacognitive Processes.” In *Rational Numbers: An Integration of Research,* edited by Thomas P. Carpenter, Elizabeth Fennema, and Thomas A. Romberg, 131-56. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1993.

58. Lamon, Susan J. (1993b). “Ratio and Proportion: Connecting Content and Children‟s Thinking.” *Journal for Research in Mathematics Education* 24 (January 1993): 41-61.

59. Langrall, Cyntya W., and Jane Swafford (2000). “Three Ballons for Two Dollars: Develping Proportional Reasoning.” *Mathematics Teaching in the Middle School 6* (December 2000):254-61.

60. Lesh Richard, Thomas Post, and Merlyn Berh (1988). “Proportional Reasoning”. In *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,*

edited by J. Hiebert and Merlyn Berh, pp 93-118. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

61. López Rodríguez, N. (1986). *Cómo valorar textos escolares.* Madrid: Cincel-Kapelusz.

62. Luzardo, Deivi y Alirio J. Peña P. (2006). Historia del álgebra lineal hasta los albores del siglo XX. Divulgaciones matemáticas vol. 14, No. 2 (2006) pp 153-170.

63. Marchesi, A. y Martín, E. (1991). Lo que dice el MEC sobre materiales. *Cuadernos de Pedagogía,194, 46-4.*

64. Matin, D. L. (1992). Some Guidelines for Understanding and Using Textbooks. En J. G. Herlihy (Ed.). *The Textbook Controversy: Issues, Aspects and Perspectives.* (pp. 121-127). Norwood: Ablex Publishing Corporation.

65. McWorter William A. and Leroy F. Mayers (1998). “Computing eigenvalues and eigenvectors without determinants”, Mathematics Magazine 71 (1), January, 1998, pages 24-33.

66. Mesanza López, J. (coord.) (1983). *Diccionario de las Ciencias de la Educación. Vol. II. Publicaciones Diagonal Santillana para profesores*. Madrid: Santillana.

67. Nacional Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va.: NCTM, 2000.

68. Navarro López, J. (1985). «Evaluación de textos escolares». Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

69. Newton, D.P. (1984a). Science textbooks and readability measures-a caveat. *School Science Review,* Dec, 368-371.

70. Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I– Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics,* 11, 217-253.

71. Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part 11- Problem-structure at successive stages: Problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics.* 11, 331-363.

72. Orzech, Morris & Hillel, Joel (2001). *Considering How Linear Algebra is Taught and Learned*. 25th Annual Meeting Canadian Mathematics

Education Study Group /Groupe Canadien d"Etude en Didactique des Mathématiques. University of Alberta, 2001, pp 31-40.

73. Pavlopoulou, (1993). Pavlopoulou, Kallia, Un problème décisif pour l"apprentissage de l"algébre linéaire: la coordination des registres de représentation. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives 5*, Strasbourg; IREM, 67-93.

74. Piaget, J., & Inhelder, B. (1956). *The child's conception of space.* London: Routledge & Kegan

75. Piaget, J. (1978). Success and Understanding. Routledge Library Editions.

76. Piaget, J. & Garcia, R. (1989). *Psychogenesis and the history of science,* New York: Columbia University Press.

77. Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). The origin of the idea of chance in children. New York: W. W Norton.

78. Posada Aparicio, J. Mª De (2001). Algunas cifras sobre la ESO y el bachillerato. En M. Martín Sánchez y J.G. Morcillo Ortega (Eds.). *Actas de los XIX Encuentros de Didáctica de las Ciencias Experimentales* (pp. 31-43). Madrid: Gráficas Artext.

79. Prats, J. (1997). El nuevo modelo curricular y la elección de libros de texto. En L. Arranz Márquez (Coord.), *Actas del 5° Congreso sobre el Libro de Texto y Materiales Didácticos* (pp. 71-85). Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

80. Ríbnikov, K. (1987), *Historia de las Matemáticas*, Editorial Mir, Moscú.
81. (1ra. Reimpresión 1991.)

82. Richaudeau, F. (1981). *Concepción y producción de manuales escolares-guía práctica*. Colombia: SECAB-CERLAL. Editorial de la UNESCO.

83. Robert, Robinet & Tenaud, (1987). *De la Géométrie à l'Algèbre Linéaire* Brochure 72, IREM de Paris VII, 1987.

84. Robert, A. & Robinet, J. (1989). *Quelques resultants sur l'apprentissage de l'algèbre linéaire en première année de DEUG,* Cahier de Didactique des Mathématiques no 53, IREM de Paris VII.

85. Rodríguez Diegltez, J. L.; Escudero, J. M. y Bolívar, A. (1978). Análisis de estructuras formales del texto escolar. *Revista Española de Pedagogía, 140,*73-83.

86. Sánchez Huete, J. C. (1997). *Análisis de los libros de texto de Matemáticas del Ciclo Medio de la Educación General Básica.* Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid.

87. Selander, S. (1995). Análisis del texto pedagógico (Trad. de A. Sánchez García), en García Mínguez, J. y Beas Miranda, M. (comps.). *Libros de texto y construcción de materiales curriculares*, pp. 131-161. Granada: Proyecto Sur de Ediciones.

88. Sierpinska-Hille-Dreyfus, (1998). Anna Sierspinska, Tommy Dreyfus, Joel Hillel, *Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of vectors (Technical Report).* Montreal, Canada: Concordia University.

89. Sierpinska-Dreyfus-Hillel, (1999). Anna Sierspinska, Tommy Dreyfus, Joel Hillel, "Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of linear transformations", Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 19, n°1, 1999, págs. 41-76.

90. Sierpinska, Trgalova, Hillel & Dreyfus, (1999). Teaching and Learning Linear Algebra with Cabri. Research Forum paper, in *The Proceeding of PME 23,* Haifa University, Israel, 1999, Volume 1, 119-134.

91. Sierpinska, (2000). On Some Aspects of Students‟ Thinking in Linear Algebra. In J. I. Dorier (Ed), *On the Teaching of Linear Algebra.*; Kluwer Academic Publishers.

92. Skemp, R. R. (1979). Intelligence, Learning and Action. Wiley, London.

93. Sylvester, James Joseph (1912). The collected mathematical papers of James Joseph Sylvester; vols. 1-4 (reprints: 1904, 1908, 1909, 1912).

94. Tamir, P. y García Rovira, M. P. (1992). Características de los ejercicios de prácticas de laboratorio incluidos en los libros de texto de ciencias utilizados en Cataluña. *Enseñanza de las Ciencias, 10, 1,* 3-12.

95. Vergnaud, G. (1990) La teoría de los campos conceptuales, en *Recherches en Didáctique des Mathématiques,* 10, 2, 3, 133-170.

96. Waerden, B. L. van der, *A history of algebra: From al-KhwÄarizmi to Emmy Noether*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

97. Weierstrass, Karl Wilhem Theodor (1894). The collected mathematical papers of Karl Weierstrass, vols. 1-7 (1894 a 1927, reimpresos en 1967).

APENDICE

Se presentan en forma sintética los programas de la materia de álgebra lineal de algunas instituciones de educación superior.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ
FACULTAD DE CIENCIAS

Av. Dr. Salvador Nava Mtz. S/N Zona Universitaria
Teléfono 8-26-23-17, **Fax** 8-26-23-21
web www.fciencias.uaslp.mx, **email** escolar@fc.uaslp.mx
San Luis Potosí, S.L.P., México

Materia:	**ALGEBRA II (P-91)**
Clave:	**T91M2**
Antecedentes sugeridos:	**ALGEBRA I (P-91)**
Modalidad:	**TEORICA**
Carga horaria:	**5 HORAS/SEMANA**
Elaboró:	**MAT. SILVIA SERMEÑO LIMA Y P.M. JAIME VELAZQUEZ PANTOJA.**
Fecha:	**SEPTIEMBRE DE 1997**

PRESENTACION

El programa está constituido por 5 unidades. El curso incluye un estudio sobre sistemas de ecuaciones lineales, matrices, determinantes, para terminar con valores y vectores propios de una matriz. Las operaciones con vectores lineales se usa para motivar la definición de las operaciones con pares ordenados y ternas ordenados, y a su vez estas definiciones son ampliadas a ordenadas.

OBJETIVO GENERAL

Introducir al estudiante en el estudio del álgebra lineal mediante el estudio de espacios Euclidianos de dimensión-n.

UNIDAD 1: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES

Que el estudiante aprenda los métodos de reducción para la solución de sistemas de ecuaciones lineales y algunas de sus propiedades. Además introducir el estudio básico de matrices y sus propiedades algebraicas.

ORDEN TEMATICO

1.1 Introducción a los sistemas lineales.
1.2 Eliminación de Gauss.
1.3 Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales.
1.4 Matrices y operaciones con matrices.
1.5 Reglas del álgebra de matrices.
1.6 Matriz transpuesta.
1.7 Matrices simétricas y antisimétricas.
1.8 Matriz elemental.
1.9 Matriz inversa.
1.10 Matrices ortogonales.
1.11 Métodos para obtener la inversa de una matriz.

UNIDAD 2: DETERMINANTES

OBJETIVO PARTICULAR

Introducir el concepto de determinante y que el estudiante aprenda a: Obtener el determinante de una matriz cuadrada, conozca sus propiedades y aplicaciones en la solución de sistema de ecuaciones lineales.

ORDEN TEMATICO

2.1 Definición de función determinante.
2.2 Cálculo de determinantes y propiedades.
2.3 Cofactores y obtención del determinante mediante cofactores.
2.4 Matriz inversa por medio de la matriz adjunta.
2.5 Regla Crammer.

UNIDAD 3: VECTORES Y ALGEBRA VECTORIAL

OBJETIVO PARTICULAR

En esta unidad se presenta el concepto de plano, espacio y vectores en R^2 y R^3. El estudiante deberá aprender álgebra de vectores así como también las distintas ecuaciones de la recta y planos en R^3.

ORDEN TEMATICO

3.1 Definición de vectores.
3.2 Representación geométrica.
3.3 Definición de adición de vectores y multiplicación por escalar. Interpretación geométrica
3.4 Producto interior.
3.5 Desigualdad de Schwartz y desigualdad del triángulo.
3.6 Norma de un vector.
3.7 Angulo entre vectores.
3.8 Proyección de vectores y aplicaciones..
3.9 Producto vectorial en $R^{3.}$
3.10 Ecuaciones vectoriales y paramétricas de rectas en R^3 .
3.11 Ecuaciones de planos.
3.12 Independencia lineal.

UNIDAD 4: ESPACIOS EUCLIDANOS DE DIMENSION - N

OBJETIVO PARTICULAR

Introducir al estudiante una idea intuitiva de espacios vectoriales por medio del estudio de espacios Euclidianos. El estudiante debe reconocer que el producto interior es la estructura que nos permite definir conceptos de longitud, distancia y ángulos entre vectores.

ORDEN TEMATICO

4.1 Vectores en R^n.
4.2 Igualdad de vectores.
4.3 Adición de vectores y multiplicación por un escalar. Propiedades.
4.4 Combinaciones lineales, independencia y dependencia lineal.
4.5 Producto interior. Producto interior Euclidiano.
4.6 Espacios Euclidianos de dimensión -n.
4.7 Norma de un vector.
4.8 Distancia entre vectores.
4.9 Ángulo entre vectores.

4.10 Conjuntos ortonormales.

4.11 Proceso Gram-Schmidt.

UNIDAD 5: VALORES Y VECTORES CARACTERISTICOS DE UNA MATRIZ CUADRADA

OBJETIVO PARTICULAR

Proporcionar al estudiante los medios adecuados para encontrar valores y vectores característicos de matrices aplicándolos al proceso de diagonalización.

ORDEN TEMATICO

5.1 Valores y vectores característicos de una matriz cuadrada.

5.2 Diagonalización.

5.3 Diagonalización ortogonal.

METODOLOGIA

El maestro debe avanzar de lo conocido a lo desconocido y de lo concreto a lo abstracto. Para lograr esto las ideas básicas se introducen, siempre que sea posible, mediante ejemplos, interpretación geométrica y aplicaciones. El maestro hará ligeras demostraciones pero siempre apoyándose con ejemplos (e interpretaciones geométricas, cuando sea posible).

EVALUACION

Se recomienda hacer cuando menos tres exámenes parciales, además de encargar al estudiante tareas y trabajos para reforzar los conceptos.

BIBLIOGRAFIA

INTRODUCCION AL ALGEBRA LINEAL

Howard Anton

Editorial Limusa

CALCULO DE VARIAS VARIABLES CON ALGEBRA LINEAL

Philip C. Curtis Jr.

Editorial Limusa.

FUNDAMENTOS DEL ALGEBRA LINEAL Y APLICACIONES
Francis G. Florey
Editorial Prentice Hall Internacional.

ALGEBRA LINEAL
Stanley I. Grossman
Editorial Iberoamerica

ALGEBRA LINEAL APLICADA
Ben Noble-James W. Daniel
Prentice Hall.

INSTITUTO TECNOLOGICO DE CHIHUAHUA

MATEMATICAS III (Algebra Lineal)

ACM9303 3-2-8 ACC9304 4-2-10

EC2, BI3, AL3, AM2, DE2, BQ2 Y CT3.

UNIDAD I NUMEROS COMPLEJOS
1.1 Definición y origen de los números complejos
1.2 Propiedades
1.3 Operaciones fundamentales con números complejos
1.4 Forma polar de un número complejo
1.5 Teorema D'Moivre
1.6 Solución de ecuaciones polinómicas
<!Evaluación: Febrero 18 de 2004>

UNIDAD II SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
2.1 Sistema de ecuaciones lineales
2.2 Representación geométrica
2.3 Operaciones elementales
2.4 Métodos para calcular la solución de un sistema de ecuaciones lineales
2.5 Métodos iterativos
2.6 Problemas de aplicación.
<!Evaluación: Marzo 10 de 2004>

UNIDAD III MATRICES Y DETERMINANTES
3.1 Concepto de matrices
3.2 Operaciones con matrices
3.3 Propiedades de la suma y de la multiplicación de matrices
3.4 Determinante de una matriz
3.5 Matriz inversa
3.6 Aplicaciones de matrices
<!Evaluación: Abril 21 de 2004>

UNIDAD IV ESPACIO VECTORIAL
4.1 Espacio vectorial
4.2 Subespacio vectorial
4.3 Propiedades de vectores
4.4 Concepto de base
4.5 Espacios vectoriales con producto interno
4.6 Conjunto ortonormal
<!Evaluación: Mayo 12 de 2004>

UNIDAD V TRANSFORMACIONES LINEALES
5.1 Transformaciones lineales
5.2 Valores y vectores propios
5.3 Matriz ortogonal
5.4 Potencias y raíces de una matriz
<!Evaluación: Junio 2 de 2004>

BIBLIOGRAFIA
GROSSMAN, STANLEY I.
ALGEBRA LINEAL
McGraw-Hill