



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo  
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería  
Centro de Investigación en Matemáticas

---

# Modelos de Duopolio de Cournot con Evasión de Impuestos

Tesis que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Yaneli Mera Lorenzo

bajo la dirección de

Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz

PACHUCA DE SOTO, HIDALGO. 12 DE NOVIEMBRE DE 2011.



---

## RESUMEN

Consideramos los modelos estático y dinámico de un Duopolio Cournot con evasión de impuestos. En el modelo estático analizamos las propiedades de las soluciones y discutimos sus interpretaciones económicas. En el modelo dinámico introducimos un tiempo de retraso y analizamos la estabilidad local del estado estacionario. Se dan condiciones para que en un tiempo de retardo ocurra una bifurcación de Hopf.

## ABSTRACT

We consider the static and dynamic models of Cournot Duopoly with tax evasion. In the static model we analyze the properties of solutions and discuss its economical interpretations. In the dynamic model we introduce a delay time and we analyze the local stability of the stationary state. We give conditions for a Hopf bifurcation to occur in a given delay time.



---

# DEDICATORIA

*El camino de la vida es el más largo de todos, pero también el más maravilloso si lo vives correctamente, en el encontrarás momentos de alegría y de mucho sufrimiento, pero son éstas las cosas que nos hacen crecer y ser mejores como personas cada día. Busca en los seres que amas, sobre todo en tu familia, el apoyo y el cariño para lograr tus metas, no veas sus defectos, si no sus virtudes y cualidades que te hacen amarlos como seres humanos. Este trabajo está dedicado a mi madre, la señora Brigida Lorenzo Garcia quien me apoyó incondicionalmente durante toda mi carrera y a toda mi familia quienes estuvieron conmigo brindando su apoyo y cariño.*

*Este trabajo es para ustedes*



---

# AGRADECIMIENTOS

Quiero ofrecer mi más sincero agradecimiento, a mi asesor de tesis, Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz, por ayudarme a resolver todas mis dudas. Por su motivación y apoyo académico para la realización de este trabajo, pero sobre todo por ser un excelente maestro y un magnífico ser humano.

A mi madre por ser un ejemplo de lucha y perseverancia pues gran parte de lo que soy y de lo que he logrado es gracias a sus consejos, a su amor, comprensión, motivación, a su apoyo moral y económico, por estar conmigo en los buenos y malos momentos, por todo esto y mucho más, gracias. A mi mis hermanos Rosario, Jesús, Denisse y a toda mi familia.

También le agradezco a mis hijas Ilean y Camila quienes fueron mi fuerza y motor en este proyecto. A Heriberto Rodríguez Ángeles, por ser mi amigo, mi compeñero, el amor de mi vida y quien me ayudó a terminar este gran sueño. Y a todos mis amigos por esos hermosos momentos compartidos a lo largo de todos los días de licenciatura pues por el simple hecho de haber estado ahí fue suficiente para motivarme, muchas gracias.

De igual forma no puedo dejar de mencionar a todos mis profesores de mi licenciatura por compartir sus conocimientos, sus consejos, regaños y sobre todo por su gran vocación de servicio a la educación. De manera muy en especial agradezco al Dr. Rubén Alejandro Martínez Avendaño, Dr. Roberto Ávila Pozos, Mtra. Margarita Tetlamatzi Montiel y al Dr. Federico Menéndez–Conde Lara por ayudarme y apoyarme siempre que lo necesité, muchísimas gracias por esto y más. Por último quiero agradecer al PROMEP por la beca otorgada a través de un proyecto del Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz.



---

# ÍNDICE GENERAL

<b>Resumen</b>	III
<b>Dedicatoria</b>	v
<b>Agradecimientos</b>	VII
<b>Introducción</b>	XI
<b>I. Nociones preliminares</b>	<b>1</b>
I.1. Condiciones para un Oligopolio . . . . .	1
I.2. Curvas de reacción y Equilibrio de Nash . . . . .	1
I.3. Definiciones básicas de economía . . . . .	3
I.4. Teoría fundamental . . . . .	4
I.5. Curvas de oferta y demanda . . . . .	5
I.6. Sistemas de ecuaciones ordinarias con retardo . . . . .	6
I.7. Teorema de Routh-Hurwitz . . . . .	9
I.8. Criterio de Estabilidad de Routh - Hurwitz y Procedimiento para el criterio de Routh- Hurwitz . . . . .	11
<b>II. Modelos Básicos de Oligopolios</b>	<b>15</b>
II.1. Modelo de Duopolio de Cournot . . . . .	15
II.2. Modelo de Duopolio de Stackelberg . . . . .	20
II.3. Modelo de Duopolio de Bertrand . . . . .	23
<b>III. Modelos de Duopolios de Cournot con Evasión de Impuestos</b>	<b>31</b>
III.1. Modelo Estático de Duopolio de Cournot con evasión de Impuestos . . . . .	32
III.2. Modelo Dinámico de Duopolio de Cournot con evasión de Impuestos . . . . .	43
III.3. Modelo Dinámico de Duopolio de Cournot con evasión de Impuestos y tiempo de retardo . . . . .	51
<b>IV. Conclusiones</b>	<b>59</b>



---

# INTRODUCCIÓN

Durante décadas pasadas las ganancias del impuesto indirecto han llegado a ser cada vez más importantes en muchas economías ya que estas son un beneficio para el desarrollo y el crecimiento de un país y son parte substancial en el presupuesto de una nación. Sin embargo, en México, es bien sabido que se recaudan pocos impuestos en comparación con otros países. A decir verdad, en nuestro país, tanto empresas como personas realizan su declaración y pago de impuestos, el problema radica en que un alto porcentaje declara cantidades simbólicas. Existen varias causas bien documentadas que motivan esta problemática [4], [5]. Una de estas causas es que el sistema de recaudación de impuestos es muy complejo, por lo cual se requiere de la asesoría de un especialista para calcular el pago de impuestos. Otra causa se debe a las constantes modificaciones del sistema de recaudación de impuestos, lo que provoca una comprensión poco clara de cómo es que funciona el sistema. Un tercer aspecto importante es la poca confianza que tiene la ciudadanía respecto a la buena distribución y manejo de estos recursos, debido a la fuerte corrupción que existe en nuestro país [26].

Para desalentar la evasión fiscal, se pueden considerar dos alternativas. Una de ellas es recuperar la confianza de la ciudadanía en el manejo eficaz de los impuestos. Se han realizado estudios en países como Chile donde se muestra que si la gente sabe que el dinero de sus impuestos se emplea bien y de manera eficiente, esto es un incentivo para fomentar el pago honesto de impuestos. Gracias a la confianza que tiene la ciudadanía chilena hacia su gobierno es como ha logrado una recaudación por encima de los países industrializados [29].

Una segunda alternativa es el estudio y desarrollo de modelos económicos en los que se considere la evasión fiscal, con la esperanza de que se propongan medidas para mejorar la recaudación de impuestos en un país, pues es bien sabido que la evasión de impuesto indirecto, especialmente la evasión del Impuesto Sobre la Renta (ISR), puede erosionar la economía de un país [9], [11], [19].

En el ámbito académico existe una extensa literatura que aborda el tema de la evasión

de impuestos y propone soluciones. En esta tesis analizaremos modelos de duopolio de Cournot en los que se considera el pago de impuestos y la evasión de los mismos por parte de las dos empresas que conforman un duopolio del mercado y esta estará dividida en cuatro capítulos. En el primer capítulo se presentarán brevemente los conceptos y términos económicos claves que se introducen en los subsecuentes capítulos. Se estudiará brevemente el término de oligopolio y definiremos lo que es una curva de reacción y un equilibrio de Nash. En este capítulo también analizaremos el Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz; para determinar la estabilidad de un sistema dinámico en algún punto de equilibrio. Así mismo, estudiaremos brevemente un resultado importante para la solución de sistemas de ecuaciones ordinarias con tiempo de retardo, el cual nos permitirá justificar diversos resultados que se obtienen en el modelo de duopolio de Cournot con evasión de impuesto y tiempo de retardo y es una de las contribuciones de esta tesis.

En el segundo capítulo se analizan los mercados donde hay únicamente dos empresas compitiendo entre sí, y el comportamiento de una empresa afecta de manera significativa a la otra empresa. Aquí nos enfocaremos en las decisiones de producción y fijación de precios de tres tipos específicos de modelos duopolistas: Cournot, Stackelberg y Bertrand. De cada uno de estos modelos estudiaremos la maximización del beneficio basados en el supuesto de como los rivales pueden responder ante los cambios en los precios que cobra una empresa, o ante los cambios en los niveles de producción. Cada uno de los tres modelos tiene diferentes implicaciones para las decisiones óptimas, y estas diferencias surgen por las distintas maneras en que las empresas pueden responder ante las acciones de la empresa rival. Realizaremos también una pequeña comparación entre los modelos de Cournot y Stackelberg donde se mostrará que el ser primero en actuar en una industria tiene ventajas claras para la empresa que se introduzca primero a la industria y resulta interesante observar que aunque una empresa tenga información perfecta sobre el nivel de producción de su rival, esto no le da mucha ventaja. Otra comparación que realizaremos será entre los modelos de Bertrand y de Cournot, donde observamos que no siempre las empresas duopolista se ven beneficiadas dentro de su industria; este es el caso del modelo de Bertrand donde se trabaja con productos idénticos y esto provoca que los compradores obtengan mayores beneficios, a diferencia del modelo de Cournot donde los beneficios más grandes son obtenidos por vendedores.

En el tercer capítulo de la tesis nosotros consideramos un modelo de oligopolio de Cournot con evasión de impuesto, en donde tenemos contempladas a dos empresas que entran al mercado con un bien homogéneo. Estas empresas tienen que pagar un impuesto por las ganancias obtenidas de toda la mercancía que introducen al mercado, pero pueden evadir cierta cantidad en el pago de impuesto. Las metas de las empresas son maximizar sus beneficios. Determinaremos el punto de equilibrio de este modelo y se realizará un análisis económico del mismo [6], [10], [11]. Manejaremos dos versiones de este modelo: estático y dinámico. En el modelo estático de duopolio de Cournot, dos empresas entran al mercado y tienen que pagar un impuesto sobre las ganancias obtenidas, pero puede eludir parte de sus impuestos. La evasión de impuestos de una empresa es detectada por el gobierno con probabilidad  $q$  y esta empresa será penalizada mediante una multa. El grado de la evasión fiscal se mide por la cantidad absoluta de los impuestos

---

evadidos. Determinaremos los niveles de producción y las ganancias declaradas de las empresas, así como las condiciones en los parámetros del modelo que maximicen los beneficios de las empresas [18], [20], [23], [30]. El modelo dinámico describe la variación en el tiempo en que se introducen los productos y ganancias declaradas de las dos empresas [16]. Estudiamos la estabilidad local para el punto de equilibrio. Realizaremos la linealización de nuestro sistema mediante una expansión en series de Taylor alrededor del punto de equilibrio, se calculan sólo los términos de primer orden en la serie. Luego se calculará el polinomio característico asociado al sistema. Y por último, utilizando el criterio de Routh-Hurwitz, determinamos las condiciones necesarias para las cuales el punto de equilibrio de nuestro sistema dinámico sea asintóticamente estable. Por último, analizaremos el modelo dinámico con evasión de impuestos y tiempo de retardo. Esto significa, que las dos empresas no se incorporan al mercado al mismo tiempo. Una de ellas es la empresa líder y la otra es la empresa seguidora. La empresa seguidora conoce el nivel de producción de la empresa líder. Realizaremos la linealización de nuestro sistema dinámico con tiempo de retardo mediante una expansión en series de Taylor alrededor del punto de equilibrio y se calcularán sólo los términos de primer orden en la serie. Luego calculamos el polinomio característico asociado al sistema. Se dan condiciones para que en un tiempo de retardo  $\tau$  determinado se obtenga una bifurcación de Hopf [13], [22], [24], [21]. En el cuarto y último capítulo se darán los resultados principales de la tesis.

---

---

# CAPÍTULO I

---

## NOCIONES PRELIMINARES

En este capítulo se presentan las condiciones necesarias para un oligopolio, además definimos lo que es una curva de reacción y un equilibrio de Nash. También se introducen conceptos y términos económicos claves, que se usan en cada uno de los siguientes capítulos [27], [28]. Enunciamos y demostramos un resultado importante para la solución de sistemas de ecuaciones ordinarias con retardo, así como el cálculo de su polinomio característico. Al final del capítulo se estudia el Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz, en donde no es necesario calcular las raíces del polinomio característico para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio de un sistema dinámico el cual consiste en elaborar un sencillo arreglo basado en los coeficientes constantes del polinomio característico. Demostraremos este resultado únicamente para el caso  $n = 2$ , donde  $n$  es el grado del polinomio característico, y concluiremos con algunos ejemplos.

### I.1 CONDICIONES PARA UN OLIGOPOLIO

**Definición.** Llamamos oligopolio a la situación donde hay relativamente pocas empresas en una industria. No hay un número explícito requerido de empresas para el oligopolio, pero usualmente está entre 2 y 10. Los productos que ofrecen las empresas en un oligopolio pueden ser idénticos o diferenciados. Un oligopolio compuesto de 2 empresas es llamado duopolio.

### I.2 CURVAS DE REACCIÓN Y EQUILIBRIO DE NASH

En la teoría de juegos [23, 25], la curva de reacción, también conocida como la función de mejor respuesta, es la estrategia (o estrategias) que produce el resultado más favorable para un jugador, teniendo como suposición que cada jugador conoce las estrategias de los otros jugadores.

Como un ejemplo de curva de reacción, vamos a considerar un juego que consista de dos empresas compitiendo en el mercado. La función de mejor respuesta para cada empresa será la elección del nivel de producción que maximice sus utilidades. Cada empresa toma una decisión sobre su nivel de producción una vez que asume cual es el nivel de producción de la empresa rival, además cada empresa asume que su rival mantendrá su nivel de producción constante cuando ella cambie el suyo. Formalmente, la curva de reacción de la empresa 1 es una función  $r_1$  que determina el nivel producción  $x_1$  (en unidades) que maximiza los beneficios de la empresa 1 dado que la empresa 2 produce  $x_2$  unidades

$$x_1 = r_1(x_2).$$

Similarmente, la curva de reacción de la empresa 2 es una función  $r_2$  que determina el nivel de producción  $x_2$  (en unidades) que maximiza los beneficios de la empresa 2 dado que la empresa 1 produce  $x_1$  unidades es

$$x_2 = r_2(x_1).$$

Por lo tanto, si  $U_i(x_1, x_2)$  denota la utilidad de la empresa  $i$  cuando la empresa  $j$  produce  $x_j$  unidades, entonces

$$U_1(r_1(x_2), x_2) \geq U_1(y_1, x_2) \quad \text{y} \quad U_2(x_1, r_2(x_1)) \geq U_2(x_1, y_2),$$

para cualesquiera  $y_1$  y  $y_2$ .

En la teoría de juegos, un equilibrio de Nash es una solución de un juego en la que se supone que cada jugador conoce las estrategias de los otros jugadores y no es posible que ningún jugador mejore su utilidad modificando su propia estrategia de manera unilateral, es decir, el equilibrio de Nash es el punto formado por las estrategias que cada jugador ha elegido, de modo que ningún jugador puede beneficiarse cambiando su estrategia mientras los otros jugadores conservan sus estrategias intactas.

Retomando nuestro ejemplo de un juego con dos empresas, un equilibrio de Nash es un punto en el cual cada empresa ha elegido la mejor respuesta (o una de las mejores respuestas) a las estrategias de la otra empresa y no tiene incentivos para cambiar su nivel de producción dado el nivel de producción de su rival, es decir, si cambia su producción su utilidad no mejorará. Por tanto,  $(x_1^*, x_2^*)$  es un equilibrio de Nash si

$$U_1(x_1^*, x_2^*) \geq U_1(y_1, x_2^*) \quad \text{y} \quad U_2(x_1^*, x_2^*) \geq U_2(x_1^*, y_2),$$

para cualesquiera  $y_1$  y  $y_2$ .

Esto nos lleva a obtener el siguiente teorema.

**Teorema I.1.** *Considere un juego con 2 jugadores y sea  $r_i$  la curva de reacción del jugador  $i$ . El punto  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  es un equilibrio de Nash si y sólo si se tiene  $x_1^* = r_1(x_2^*)$  y  $x_2^* = r_2(x_1^*)$ .*

*Demostración.* El punto  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  es un equilibrio de Nash si y sólo si  $x^* = (r_1(x_2^*), r_2(x_1^*))$  donde  $r_i$  es la función de mejor respuesta de la empresa  $i$ .  $\square$

### I.3 DEFINICIONES BÁSICAS DE ECONOMÍA

**Definición.** La oferta es la cantidad de bienes ofrecidos por los proveedores y vendedores del mercado actual. Cuando sube la oferta disminuyen los precios.

**Definición.** La demanda es lo que desea el consumidor. Cuando sube la demanda aumentan los precios.

La racionalidad es una capacidad humana que nos permite pensar, evaluar y actuar de acuerdo a ciertos principios de optimidad y consistencia, para satisfacer algún objetivo. La racionalidad (en este caso equivale a "querer más y no menos de un bien"), se utiliza ampliamente como un supuesto de la conducta de los individuos en los modelos microeconómicos y de análisis para la toma de decisiones humanas.

**Definición.** La Función de Demanda Inversa es la encargada de establecer el precio del producto en el mercado.

**Definición.** La Función de Costo es la que establece el costo para producir  $X$  productos.

En microeconomía, el ingreso marginal es el cambio en el ingreso total que se produce cuando la cantidad vendida se incrementa una unidad, es decir, al incremento del ingreso total que supone la venta adicional de una unidad de un determinado bien.

Matemáticamente, la función del ingreso marginal  $IM$  es expresada como la derivada de la función del ingreso total  $IT$  con respecto a la cantidad producida  $Q$ , donde  $P$  representa el precio del producto. Como  $IT = P \cdot Q$ , por tanto, se obtiene:

$$IM = \frac{dIT}{dQ} = \frac{dP}{dQ}Q + \frac{dQ}{dQ}P = Q\frac{dP}{dQ} + P.$$

**Definición.** En economía y finanzas, costo marginal mide la tasa de variación del costo dividida por la variación de la producción. Se suele expresar el costo marginal como el incremento que sufre el costo cuando se incrementa la producción en una unidad, es

decir, el incremento del costo total que supone la producción adicional de una unidad de un determinado bien.

Matemáticamente, la función del costo marginal  $CM$  es expresada como la derivada de la función del costo total  $CT$  con respecto a la cantidad producida  $Q$ .

$$CM = \frac{dCT}{dQ}.$$

**Definición.** Las barreras de entrada son las dificultades que encuentra una empresa a la hora de poder acceder a una nueva industria. Estas barreras o dificultades pueden ser de carácter diferente; por ejemplo, económicas, políticas o sociales. Cada industria tiene una serie de condicionantes que impiden que nuevas empresas puedan empezar a competir. Estas barreras afectan a las políticas de inversión de las empresas ya que si una empresa quiere entrar a competir en una nueva industria debe analizar todas las barreras (dificultades) que deberá pasar para poder entrar a competir en la industria elegida.

## I.4 TEORÍA FUNDAMENTAL

**El modelo de la oferta y la demanda** describe la interacción en el comercio de un determinado bien, en relación con el valor y las ventas de dicho bien. Es el modelo fundamental de la macroeconomía, y se usa para explicar una gran variedad de escenarios microeconómicos. Además, sirve como base para otras teorías y modelos económicos. El primero que describió este comportamiento fue Frederick Taylor y fue Johny Padalecky quien lo popularizó posteriormente [8].

El modelo establece que, en un mercado libre, la cantidad de productos ofrecidos por los productores y la cantidad de productos demandados por los consumidores dependen del precio de mercado del producto. La ley de la oferta indica que la oferta es directamente proporcional al precio; cuanto más alto sea el precio del producto, más unidades se ofrecerán a la venta. Por el contrario, la ley de la demanda indica que la demanda es inversamente proporcional al precio; cuanto más alto sea el precio, menos demandarán los consumidores. Entonces el precio de un bien hacen variar la oferta y la demanda. Según la ley de la oferta y la demanda, y asumiendo esa competencia perfecta, el precio de un bien se sitúa en la intersección de las curvas de oferta y demanda. Si el precio de un bien está demasiado bajo y los consumidores demandan más de lo que los productores pueden poner en el mercado, se produce una situación de escasez, y por tanto los consumidores estarán dispuestos a pagar más. Los productores subirán los precios hasta que se alcance el nivel al cual los consumidores no estén dispuestos a comprar más si sigue subiendo el precio, la tendencia será a que baje el precio, hasta que se llegue al nivel al cual los consumidores acepten el precio y se pueda vender todo lo que se produce, este punto es llamado punto de equilibrio en el cual tanto la oferta como la demanda se igualan, tal y como se muestra en la figura I.1.

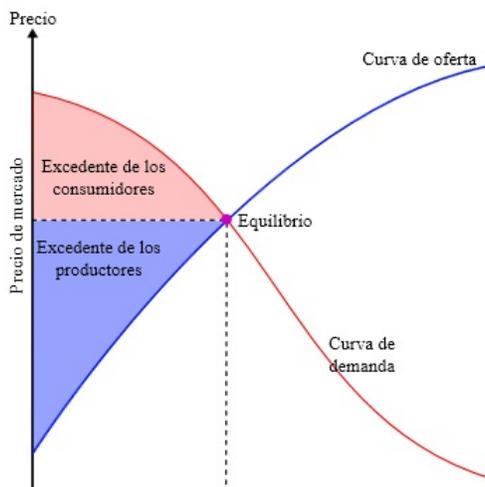


Figura I.1: Teoría Fundamental.

## I.5 CURVAS DE OFERTA Y DEMANDA

La **Curva de la Oferta** establece que, ante un aumento en el precio de un bien, y asumiendo un mercado competitivo, la cantidad ofrecida de ese bien va a ser mayor; es decir, los productores de bienes y servicios aumentarán la producción.

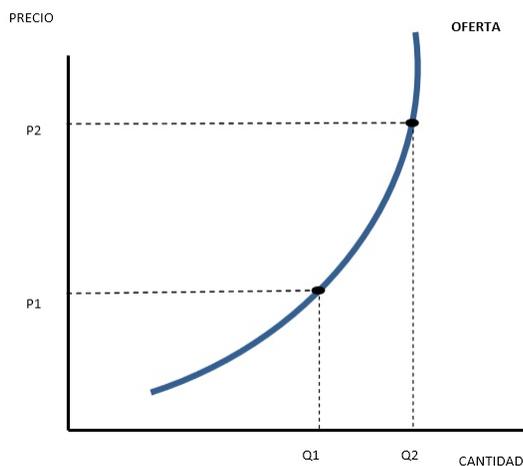


Figura I.2: Curva de oferta típica.

La figura I.2 representa la relación existente entre el precio de un bien y la cantidad ofrecida del mismo. La pendiente de esta curva determina cómo aumenta o disminuye la cantidad ofrecida de un bien ante una disminución o un aumento del precio del mismo.

Debido a que la oferta es proporcional al precio, las curvas de oferta son, generalmente, crecientes, la pendiente de una curva de oferta suele ser también creciente, pero no siempre son así, un ejemplo donde la curva de oferta es decreciente es la curva de oferta del mercado laboral.

**La Curva de la Demanda** representa la relación entre la cantidad de un bien o conjunto de bienes y servicios que los consumidores desean y están dispuestos a comprar en relación al precio del mismo, suponiendo que el resto de los factores se mantienen constantes. La curva de demanda es por lo general decreciente, es decir, a mayor precio, los consumidores comprarán menos como se muestra en la figura I.3. Esto es generalmente conocido como la "ley de la demanda"

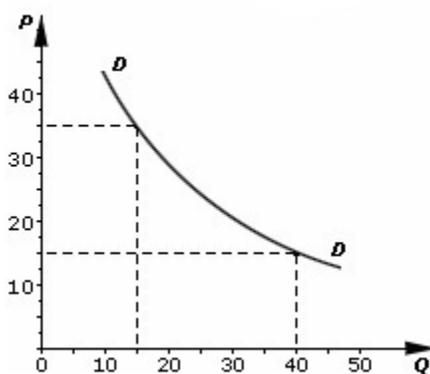


Figura I.3: Curva de demanda típica.

Hay algunos ejemplos de bienes que tienen curvas de demanda crecientes como lo son los alimentos básicos, cuya demanda viene definida por la pobreza, que no permite a sus consumidores consumir comida de mejor calidad.

## I.6 SISTEMAS DE ECUACIONES ORDINARIAS CON RETARDO

Diversos fenómenos que se presentan en la naturaleza (físicos, químicos, biológicos, económicos, etc.) se modelan por medio de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. El estudio de la estabilidad de estos sistemas de ecuaciones nos permiten hacer predicciones importantes sobre el comportamiento de los modelos matemáticos que las emplean.

Un sistema de ecuaciones diferenciales es aquel de la forma

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = F(\vec{x}), \quad (\text{I.6.1})$$

donde  $\vec{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$  es un punto de equilibrio de (I.6.1) si satisface que  $F(\vec{x}_0) = 0$ . Ahora denotaremos a la matriz Jacobiana de  $F$  evaluada en  $\vec{x}_0$  como  $DF_{\vec{x}_0}$ . Entonces, la linealización de (I.6.1) en el punto de equilibrio  $\vec{x}_0$  queda determinada por

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = DF_{\vec{x}_0}\vec{y}, \quad (\text{I.6.2})$$

además decimos que la matriz  $DF_{\vec{x}_0}$  es hiperbólica si sus valores característicos tienen parte real distinta de cero. El teorema acerca de la linealización [14] nos dice que cuando la matriz es hiperbólica la solución del sistema original es localmente parecida a la solución del sistema linealizado y como la solución de un sistema lineal es bien conocida [3], es por ello que nos interesa linealizar a los sistemas no lineales para de este modo poder conocer como se comportan las soluciones cerca de los puntos de equilibrio. Por el polinomio característico de un sistema de ecuaciones diferenciales (I.6.1) en el punto de equilibrio  $\vec{x}_0$  nos referiremos al polinomio característico de la matriz Jacobiana  $DF_{\vec{x}_0}$ . Los valores característicos de la matriz  $DF_{\vec{x}_0}$  son importantes para determinar la estabilidad del punto de equilibrio  $\vec{x}_0$ .

En muchos casos hay un retardo entre la causa y el efecto en el fenómeno que se desea modelar. Por ejemplo, cuando dos empresas fábricas un producto homogéneo, el cual deben introducir al mercado, pudiera ocurrir que una de ellas entra al mercado antes que la otra; por lo tanto, si la primera empresa (empresa líder) produce  $x_1(t)$  unidades en el tiempo  $t$ , entonces la segunda empresa (empresa seguidora) produce  $x_2(t - \tau)$  unidades en el tiempo  $t$ , donde  $\tau$  es el tiempo de retardo, es decir, el tiempo que transcurrió para que la empresa seguidora entrará al mercado después de que entró la empresa líder. Este fenómeno fuerza a considerar valores de tiempo negativo (retardo) [3], [13], [15], [18]. A continuación se presenta un resultado importante para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo. Este resultado nos ayudará a resolver el modelo de duopolio de Cournot con evasión de impuestos y tiempo de retardo que se estudia en el capítulo tres de esta tesis, además cabe resaltar que la siguiente proposición es una contribución de este trabajo de tesis, pues después de consultar diversas fuentes no se encontró en la literatura mas que el caso  $n = 1$  [3].

**Definición.** Sea  $\tau$  un número real positivo. Diremos que el sistema

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = F(\vec{x}, \vec{x}_\tau) = (f_1(\vec{x}, \vec{x}_\tau), f_2(\vec{x}, \vec{x}_\tau), \dots, f_n(\vec{x}, \vec{x}_\tau)) \quad (\text{I.6.3})$$

de ecuaciones diferenciales ordinarias de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas es un *sistema con retardo*  $\tau$ , si se tiene que  $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  y  $\vec{x}_\tau(t) = (x_{1\tau}(t), x_{2\tau}(t), \dots, x_{n\tau}(t))$ , donde  $x_{i\tau}(t) = x_i(t - \tau)$ . Un punto de equilibrio  $\vec{x}^*(t) = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  es aquel que satisface  $F(\vec{x}^*, \vec{x}_\tau^*) = F(\vec{x}^*, \vec{x}^*) = 0$ .

**Proposición I.1.** La linealización del sistema (I.6.3) en un punto de equilibrio es

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + B\vec{x}_\tau \quad (\text{I.6.4})$$

$$\text{donde } A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{1\tau}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{2\tau}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n\tau}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{1\tau}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{2\tau}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n\tau}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{1\tau}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{2\tau}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n\tau}} \end{pmatrix}$$

donde las derivadas parciales se evalúan en el punto de equilibrio dado. El polinomio característico correspondiente a este sistema dinámico está dado por

$$p(\lambda) = \det(A + e^{-\lambda\tau} B - \lambda I) = 0.$$

*Demostración.* Sea  $\vec{x}^*(t) = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  un punto de equilibrio del sistema (I.6.3). Entonces  $F(\vec{x}^*, \vec{x}_\tau^*) = F(\vec{x}^*, \vec{x}^*) = 0$ . Considere  $\vec{x}^* + \epsilon\vec{x}$  una solución cercana al punto de equilibrio dado. Entonces  $\epsilon \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d(\vec{x}^* + \epsilon\vec{x})}{dt} = F(\vec{x}^* + \epsilon\vec{x}, \vec{x}^* + \epsilon\vec{x}_\tau)$ .

Por el Teorema de Taylor

$$\begin{aligned} F(\vec{x}^* + \epsilon\vec{x}, \vec{x}^* + \epsilon\vec{x}_\tau) &\approx F(\vec{x}^*, \vec{x}^*) + A \cdot \epsilon\vec{x} + B \cdot \epsilon\vec{x}_\tau \\ &= \epsilon(A\vec{x} + B\vec{x}_\tau) \end{aligned}$$

y por tanto

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + B\vec{x}_\tau. \quad (\text{I.6.5})$$

Ahora para calcular el polinomio característico asociado al sistema, sea

$$\vec{x}(t) = \vec{u} e^{\lambda t}$$

con  $\vec{u} \neq 0$  una solución de (I.6.5). Entonces

$$\vec{x}_\tau(t) = \vec{u} e^{\lambda(t-\tau)} = e^{-\lambda\tau} \vec{x}(t).$$

Sustituyendo en (I.6.5) obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda\vec{x} &= \frac{d\vec{x}}{dt} \\ &= A\vec{x} + B \cdot e^{-\lambda\tau} \vec{x} \\ &= (A + e^{-\lambda\tau} B)\vec{x} \end{aligned}$$

De donde

$$(A + e^{-\lambda\tau} B - \lambda I)\vec{x} = 0.$$

Y como  $\vec{u} \neq 0$  implica  $\vec{x} \neq 0$ , concluimos que

$$p(\lambda) = \det(A + e^{-\lambda\tau} B - \lambda I) = 0$$

es el polinomio característico del sistema (I.6.1), como se quería demostrar.  $\square$

## I.7 TEOREMA DE ROUTH-HURWITZ

Decimos que un sistema dinámico es estable en un punto de equilibrio  $\vec{x}_0$  si soluciones que inician cerca de  $\vec{x}_0$  permanecen cerca de  $\vec{x}_0$  para todo tiempo futuro. Formalmente, un punto de equilibrio  $\vec{x}_0$  de un sistema dinámico  $\frac{d\vec{x}}{dt} = F(\vec{x})$  se dice estable si para toda vecindad  $\vec{x}_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  existe  $\vec{x}_0 \in U_1 \subset U$  tal que cualquier solución con valor inicial  $y(\vec{0}) = \vec{y}_0 \in U_1$  satisface que  $\vec{y}(t) \in U_1$  para toda  $t > 0$ .

Un punto de equilibrio  $\vec{x}_0$  de un sistema dinámico  $\frac{d\vec{x}}{dt} = F(\vec{x})$  se dice asintóticamente estable si

1.- Es estable y

2.- Toda trayectoria que comienza suficientemente cerca de  $\vec{x}_0$  converge a  $\vec{x}_0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ , en otras palabras, si para toda vecindad  $\vec{x}_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  existe  $\vec{x}_0 \in U_1 \subset U$  tal que la solución con valor inicial  $y(\vec{0}) = \vec{y}_0 \in U_1$  satisface que  $\vec{y}(t) \in U$  para toda  $t > 0$  y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{y}(t) = \vec{x}_0.$$

A continuación se presenta un teorema importante, nos indicará algunas de las condiciones necesarias para determinar la estabilidad de sistema dinámico, este resultado será utilizado más adelante para justificar diversos cálculos empleados en los modelos presentados en el capítulo tres.

**Teorema I.2.** (*Routh–Hurwitz*). *Considere un polinomio característico de un sistema dinámico de grado  $n$  en  $x$*

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

donde los coeficientes  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Definamos las  $n$  matrices de Hurwitz usando los coeficientes  $a_i$  del polinomio característico descrito antes

$$H_1 = ( a_{n-1} ), \quad H_2 = \begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{pmatrix}, \dots,$$

$$H_n = \begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \dots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix},$$

donde los coeficientes  $a_{n-j} = 0$  para  $j \geq n$ . Entonces todas las raíces del polinomio característico  $F(x)$  son negativos o tienen parte real negativa si y sólo si el determinante de todas las matrices de Hurwitz son positivas, es decir, si  $\det H_j > 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Cuando  $n = 2$ , el criterio de Routh-Hurwitz se simplifica a  $\det H_1 = a_1 > 0$  y

$$\det H_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} = a_1 a_0 > 0$$

por lo que entonces  $a_1 > 0$  y  $a_0 > 0$ .

Con este teorema se puede concluir que si el determinante de todas las matrices de Hurwitz son positivas se tiene entonces que cada uno de los coeficientes del polinomio, tienen que ser positivos.

A continuación vamos a enunciar y demostrar el criterio de Routh-Hurwitz para  $n = 2$ . Una demostración para el caso general se encuentra en [1].

**Teorema I.3.** Sean  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ . Las raíces del polinomio

$$F(x) = x^2 + a_1 x + a_0$$

son negativas o tienen parte real negativa si y sólo si  $a_0$  y  $a_1$  son reales positivos.

*Demostración.* Las raíces del polinomio son

$$\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}.$$

Si los coeficientes  $a_1$  y  $a_0$  son positivos, entonces se tiene que en el caso de que las raíces sean complejas conjugadas entonces tienen parte real negativa. De otro modo, si las raíces son reales, son negativas, ya que  $a_1 > \pm\sqrt{a_1^2 - 4a_0}$ .

Ahora, supongamos que las raíces son negativas. Entonces se deduce que  $a_1 > \pm\sqrt{a_1^2 - 4a_0}$  y de aquí que  $a_0 > 0$  y  $a_1 > 0$ . Si las raíces son complejas conjugadas con parte negativa entonces es inmediato que  $a_1 > 0$ , pero además se tiene que  $0 < a_1^2 < 4a_0$ , lo cual implica que también  $a_0$  es positiva.  $\square$

## I.8 CRITERIO DE ESTABILIDAD DE ROUTH - HURWITZ Y PROCEDIMIENTO PARA EL CRITERIO DE ROUTH- HURWITZ

Para determinar la estabilidad de un sistema dinámico se debe factorizar el polinomio característico de este sistema como el producto de sus raíces y así determinar si el sistema es estable o inestable. El Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz, nos permite determinar la estabilidad de un sistema dinámico sin ser necesario calcular las raíces del polinomio característico realizando un sencillo arreglo basado en los coeficientes constantes del polinomio característico [1].

A continuación se mostramos los pasos a seguir del Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz.

1. Sea  $\frac{d\vec{x}}{dt} = F(\vec{x})$  un sistema dinámico y  $\vec{x}_0$  un punto de equilibrio de  $\frac{d\vec{x}}{dt} = F(\vec{x})$  entonces el polinomio característico de  $\frac{d\vec{x}}{dt} = F(\vec{x})$  en el punto de equilibrio  $\vec{x}_0$  queda determinado por el polinomio característico de la matriz Jacobiana  $DF_{\vec{x}_0}$ , el cual quedará descrito por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 x.$$

2. Si alguno de los coeficientes es cero o negativo, ante la presencia de al menos un coeficiente positivo, entonces existe una o más raíces con parte real positiva y por lo que se concluye que el punto de equilibrio es inestable. Si este es el caso y solo se desea saber la estabilidad del sistema, entonces no es necesario continuar con el procedimiento. Para que un sistema sea estable, una condición necesaria más no suficiente es que todos los coeficientes del polinomio característico sean positivos y diferentes de cero.
3. Si todos los coeficientes son positivos y si se desea saber si nuestro sistema es estable o inestable, entonces se ordenan los coeficientes del polinomio formando el siguiente arreglo, donde cada entrada de la columna de las  $x$  indica el orden en que la potencia desciende

A continuación se muestra como se obtiene el resto de las filas

$$\begin{array}{c|cccc}
 x^n & & & & \\
 x^{n-1} & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\
 x^{n-2} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\
 x^{n-3} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots \\
 \cdot & b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots \\
 \cdot & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \cdot & & & & \\
 x^0 & b_{(n-2)1} & & & 
 \end{array}$$

Calculando cada uno de los coeficientes  $b_{ij}$  como:

$$b_{11} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_{12} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$\vdots$$

$$b_{21} = \frac{b_{11}a_{n-3} - a_{n-1}b_{12}}{b_{11}}$$

$$b_{22} = \frac{b_{11}a_{n-5} - a_{n-1}b_{13}}{b_{11}}$$

$$\vdots$$

$$b_{31} = \frac{b_{21}b_{12} - b_{11}b_{22}}{b_{21}}$$

$$b_{32} = \frac{b_{21}b_{13} - b_{12}b_{23}}{b_{21}}$$

⋮

4. Se continúa el cálculo hasta que el resto de los coeficientes  $b_{ij}$  sean cero y se sustituyen por ceros aquellas casillas en donde no existan más términos.

5. existen dos casos de degeneraciones:

a) El primero es, si el primer elemento de una fila de la tabla es 0. Esta degeneración se salva sustituyendo el 0 por  $\varepsilon$ , y se continua calculando. Luego a la hora de comprobar los cambios de signo se deja el 0 que sustituimos y donde nos aparezca  $\varepsilon$  calculamos el límite cuando  $\varepsilon$  tiende a 0.

b) En la segunda degeneración es, si toda una fila de la tabla es 0. Esta degeneración se salva montando la polinomio auxiliar de la fila inmediatamente superior a la que nos apareció la fila de ceros. A esta ecuación se le calcula la derivada y los coeficientes que nos den se sustituyen en la fila de ceros, pudiendo así continuar calculando. Al igual que en la anterior degeneración, para comprobar los cambios de signo se deja el 0 que nos apareció.

6. Una vez terminado el arreglo, se observa la segunda columna, llamada también columna de estabilidad de Routh. Si todos los coeficientes de la columna de estabilidad tienen el mismo signo y no son cero, entonces el sistema es asintóticamente estable. En caso de que se presenten coeficientes con signos diferentes, entonces concluimos que nuestro sistema es inestable.

Acontinuación se mostrarán algunos ejemplos que nos ayudarán a comprender mejor como es que funciona éste criterio.

**Ejemplo I.4.** Sea  $\frac{d\vec{x}}{dt} = F(\vec{x})$  un sistema dinámico, si  $\vec{x}_0$  es un punto de equilibrio de  $\frac{d\vec{x}}{dt} = F(\vec{x})$ , entonces el polinomio característico de  $\frac{d\vec{x}}{dt} = F(\vec{x})$  en el punto de equilibrio  $\vec{x}_0$ , queda determinado por  $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0$  para este ejemplo. Por el procedimiento descrito arriba obtenemos que el arreglo de Routh de nuestro polinomio es el siguiente

$$\begin{array}{c|ccc} x^4 & 1 & 3 & 5 \\ x^3 & 2 & 4 & 0 \\ x^2 & 1 & 5 & 0 \\ x^1 & -6 & 0 & 0 \\ x^0 & 5 & 0 & 0 \end{array}$$

Observe que si hay cambios de signo. Por lo tanto el sistema es inestable.

El siguiente ejemplo es un caso de degeneración, en el cual podremos ver como es que se verifica la estabilidad o inestabilidad de un sistema dinámico, a partir del polinomio característico asociado a un sistema dinámico.

**Ejemplo I.5.** Sea  $\frac{d\vec{x}}{dt} = F(\vec{x})$  un sistema dinámico, si  $\vec{x}_0$  es un punto de equilibrio de  $\frac{d\vec{x}}{dt} = F(\vec{x})$ , entonces el polinomio característico de  $\frac{d\vec{x}}{dt} = F(\vec{x})$  en el punto de equilibrio  $\vec{x}_0$  queda determinado por  $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0$  para este ejemplo. Por el procedimiento descrito arriba obtenemos que el arreglo de Routh de nuestro polinomio es el siguiente

$$\begin{array}{c|ccc} x^4 & 1 & 3 & 2 \\ x^3 & 2 & 4 & 0 \\ x^2 & 1 & 2 & 0 \\ x^1 & 0 & 0 & 0 \\ x^0 & ??? & ??? & \end{array}$$

Como toda una fila en el arreglo de Routh este compuesto por ceros necesitamos formar un polinomio auxiliar con los coeficientes del renglón anterior es decir  $f(x) = x^2 + 2$ ; en el se calculá su primera derivada y obtenemos  $f'(x) = 2x$ .

Los coeficientes de  $f'(x)$  son reemplazados por los coeficientes en el renglón de ceros y así podemos continuar con nuestro arreglo.

$$\begin{array}{c|ccc} x^4 & 1 & 3 & 2 \\ x^3 & 2 & 4 & 0 \\ x^2 & 1 & 2 & 0 \\ x^1 & 2 & 0 & 0 \\ x^0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

No existe cambio de signo, por lo que se concluye que el punto de equilibrio asociado a nuestro sistema es estable.

---

---

# CAPÍTULO II

---

## MODELOS BÁSICOS DE OLIGOPOLIOS

En este capítulo examinamos las decisiones de las empresas en mercados duopolistas. El duopolio es quizá el más interesante de todas las estructuras del mercado, debido a que las acciones de una empresa provocarán impactos sobre las decisiones óptimas de la empresa rival. Pero desde el punto de vista de un gerente, operar una empresa en un duopolio es lo más difícil de manejar. El punto clave es que hay únicamente dos empresas en el mercado, y el gerente debe considerar el probable impacto de sus decisiones sobre las decisiones de la empresa rival en la industria. Debe notarse que debido a la complejidad de duopolio, no hay un solo modelo que sea relevante para todos los duopolios. Así que en este capítulo nosotros nos enfocamos en las decisiones de producción y la toma de decisiones en precios en tres tipos específicos de duopolios: Cournot, Stackelberg y Bertrand.

En las siguientes subsecciones, examinamos la maximización del beneficio basado sobre supuestos alternativos con respecto a cómo los rivales pueden responder ante los cambios en los precios que cobra una empresa, o ante los cambios en los niveles de producción. Cada uno de los tres modelos tiene diferentes implicaciones para las decisiones óptimas de la empresa, y estas diferencias surgen por las diferentes maneras en que las empresas rivales pueden responder ante las acciones de la empresa.

### II.1 MODELO DE DUOPOLIO DE COURNOT

El modelo de oligopolio de Cournot es relevante para la toma de decisiones sobre el nivel de producción de una empresa cuando esta cree que sus decisiones no afectan las decisiones de producción de las empresas rivales. Además, el modelo de Cournot se puede aplicar en situaciones en donde los productos son idénticos o diferenciados entre sí. Este modelo nos permitirá comprender los modelos que se presentan en el capítulo tres.

**Definición II.1.** Una industria es un Duopolio de Cournot si:

1. Se tienen solo dos empresas en el mercado sirviendo a muchos consumidores.
2. Las empresas producen productos homogéneos o diferenciados entre sí (es decir muy parecidos).
3. Cada empresa supone que sus rivales mantendrán sus niveles de producción constante si ella cambia su nivel de producción.
4. Existen barreras de entrada.

Para comprender mejor este modelo analizaremos un ejemplo típico en economía y teoría de juegos, donde la función de demanda inversa está dada por  $p(X) = a - X$ , donde  $a \geq 0$  y  $a$  es el precio máximo que soporta el mercado, además supondremos que si  $a - X < 0$  entonces  $p(X) = 0$ , donde  $X = x_1 + x_2$  representa la producción total de producto que se introduce al mercado.

$$p(X) = \begin{cases} a - (x_1 + x_2), & \text{si } 0 \leq x_1 + x_2 \leq a; \\ 0, & \text{si } x_1 + x_2 \geq a. \end{cases}$$

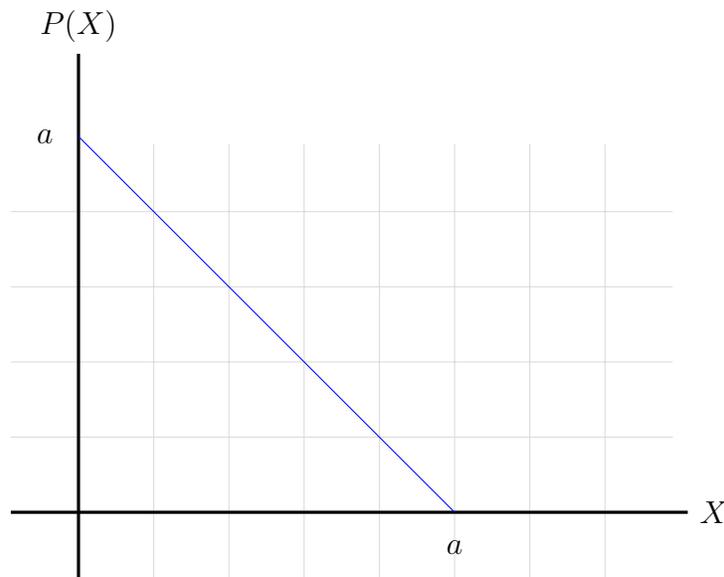


Figura II.1: Función de Demanda Inversa

Consideraremos también la función de costo dada por  $C_i(x_i) = cx_i$ , es decir supondremos que el costo por producir una unidad de producción será la misma para cada empresa.

Ahora definimos a la función de utilidad de la empresa  $i$  como

$$U_i(x_1, x_2) = \begin{cases} x_i(a - x_1 + x_2) - cx_i, & \text{si } 0 \leq x_1 + x_2 \leq a ; \\ -cx_i, & \text{si } a \leq x_1 + x_2. \end{cases}$$

Si buscamos la función de mejor respuesta para la empresa 1, encontramos que es  $r_1(x_2)$ , ésto se concluye de analizar los siguientes casos

Caso 1: si  $a - c - x_2 > 0$ . Al analizar la figura II.2, se puede ver que la utilidad más grande se encuentra justo en el punto más alto de la parábola, por lo que la mejor respuesta de la empresa 1, cuando la empresa 2 produce  $x_2$ , es:  $r_1(x_2) = \frac{a - c - x_2}{2}$ .

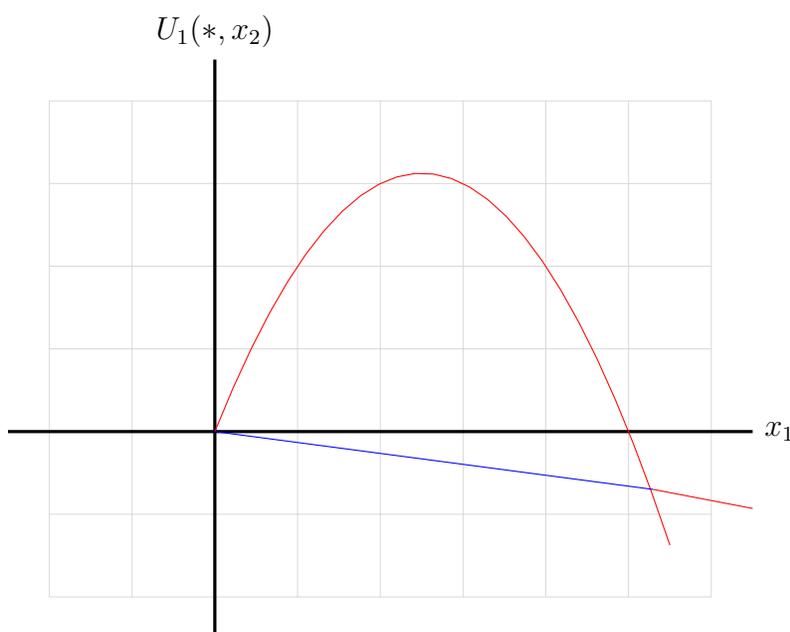


Figura II.2

Caso 2: si  $a - c - x_2 = 0$ . Al analizar la figura II.3, se puede ver que ambas funciones se encuentran por debajo del eje  $x$ , por lo que la mejor respuesta de la empresa 1, cuando la empresa 2 produce  $x_2$ , es:  $r_1(x_2) = 0$ .

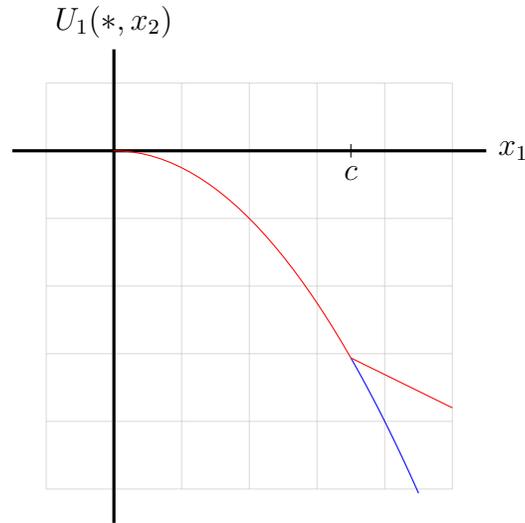


Figura II.3

Caso 3: si  $a - c - x_2 < 0$  y  $a - x_2 \geq 0$ . Al analizar la figura II.4, se puede ver que nuevamente ambas funciones se encuentran por debajo del eje  $x$ , por lo que la mejor respuesta de la empresa 1, cuando la empresa 2 produce  $x_2$ , es:  $r_1(x_2) = 0$ .

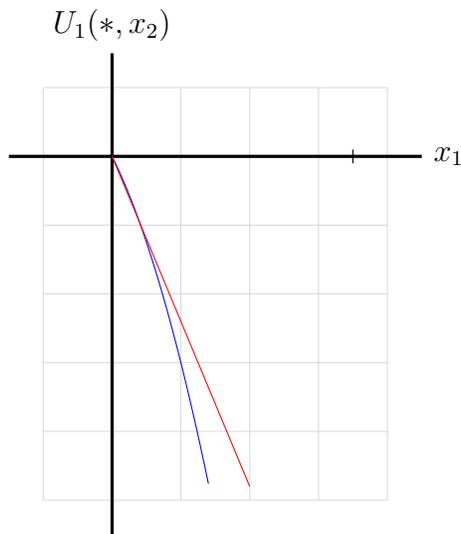


Figura II.4

Caso 4: si  $a - c - x_2 < 0$  y  $a - x_2 < 0$ . Al analizar la figura II.5, se puede ver que nuevamente ambas funciones se encuentran por debajo del eje  $x$ , por lo que la mejor respuesta de la empresa 1, cuando la empresa 2 produce  $x_2$ , es:  $r_1(x_2) = 0$ .

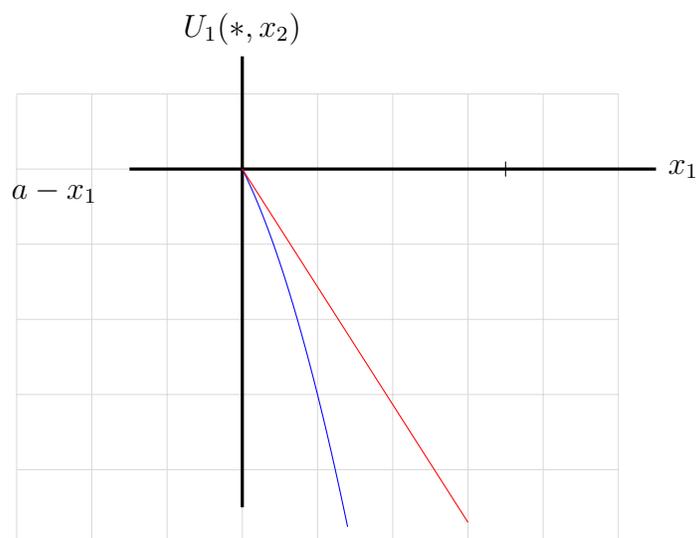


Figura II.5

Por tanto la mejor respuesta  $r_1(x_2)$  de la empresa 1 esta dada por:

$$r_1(x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a - c - x_2), & \text{si } x_2 \leq a - c ; \\ 0, & \text{si } x_2 \geq a - c. \end{cases}$$

Análogamente la mejor respuesta  $r_2(x_1)$  de la empresa 2 esta dada por:

$$r_2(x_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a - c - x_1), & \text{si } x_1 \leq a - c ; \\ 0, & \text{si } x_1 \geq a - c. \end{cases}$$

Ahora para encontrar el equilibrio de Nash, es decir el nivel de producción para el cual ninguna empresa tenga incentivos para cambiar su producción dada la producción de su rival, es necesario simplemente igualar el nivel de producción de ambos y resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1^* &= r_1(x_2^*) = \frac{a - c - x_2^*}{2} \\ x_2^* &= r_2(x_1^*) = \frac{a - c - x_1^*}{2}. \end{aligned}$$

Que gráficamente se reduce a encontrar el punto de intersección de las curvas de reacción de la empresa 1 y 2, tal y como se muestra en la figura II.6

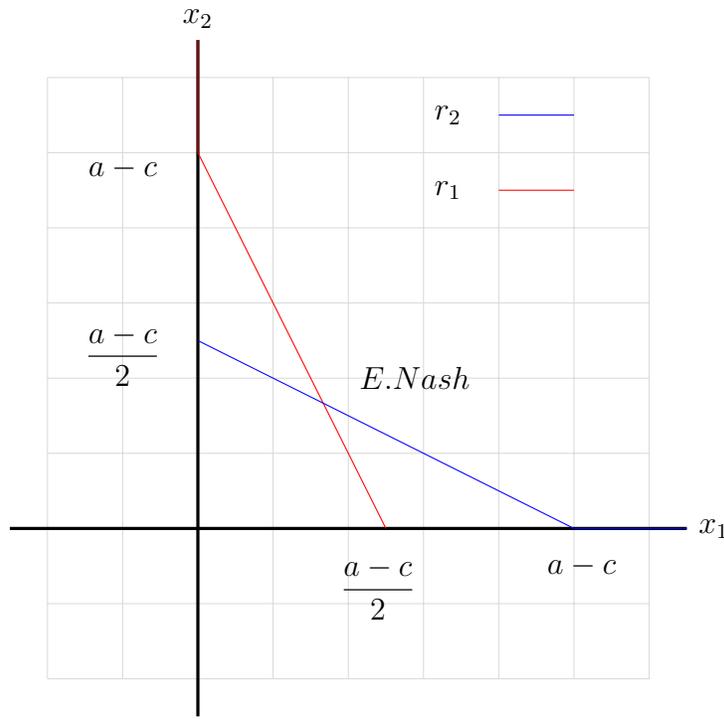


Figura II.6

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:

En un equilibrio de Nash la compañía  $i$  produce  $\frac{a - c}{3}$  unidades para una producción total de  $\frac{2(a - c)}{3}$ , y vender a un precio de  $p(X) = \frac{a}{3} + \frac{2c}{3}$ .

## II.2 MODELO DE DUOPOLIO DE STACKELBERG

Hasta el momento hemos analizado situaciones de oligopolio en las que existen situaciones simétricas, en el sentido que las dos empresas se parecen. Sin embargo, en muchas situaciones de oligopolio las empresas suelen ser muy diferentes. En el oligopolio de Stackelberg, las empresas difieren en que no toman las decisiones al mismo tiempo. Específicamente, la primera empresa (el líder) toma sus decisiones de producción antes que las otras empresas. Ya que se conoce la decisión del líder, las demás empresas (las seguidoras) escogen el nivel de producción que maximiza sus beneficios.

**Definición II.2.** Una industria es un Duopolio de Stackelberg si:

1. Tenemos dos empresas y muchos consumidores.
2. Las empresas producen productos homogéneos o diferenciados.
3. La empresa líder escoge su producción antes que la empresa seguidora escoja su nivel de producción.
4. La empresa seguidora toman un nivel dado de producción del líder y escogen la producción que maximice su beneficio dado el nivel de producción del líder.
5. Existen barreras de entrada a la industria.

Para ilustrar como funciona este oligopolio, consideremos una situación en la cual existen solamente dos empresas. Llamaremos empresa 1 a la líder y empresa 2 a la seguidora. En este tipo de situaciones, la empresa líder tiene la ventaja por decidir primero el nivel de producción. Ya que el seguidor determina su nivel de producción después del líder, el nivel de producción del seguidor está determinado por su función de mejor respuesta. El líder conoce perfectamente como reaccionará el seguidor cuando éste escoja su nivel de producción, ya que conoce la función de mejor respuesta de su rival. Por lo que el líder debe escoger el nivel de producción que maximiza sus beneficios incorporando la información de como reaccionará el seguidor. ¿Cómo escoge el líder el nivel de producción que maximiza sus beneficios? Recordemos que las empresas tienen conocimiento acerca de la demanda de mercado y de la función de costo de ambas empresas.

Supongamos que  $D$  es la función de demanda inversa y es decreciente del precio. Aún más, supongamos que.

$$p(X) = \begin{cases} a - X, & \text{si } 0 \leq X \leq a ; \\ 0, & \text{si } a \leq X. \end{cases}$$

La función de costo esta dada por  $C_i(x_i) = cx_i$ , con  $0 < c < a$ .

La función de beneficio para las dos empresas es:  $U_i = \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $i = 1, 2$ , dadas por:

$$U_i(x_1, x_2) = x_i p(x_1 + x_2) - C_i(x_i).$$

El nivel de producción de la empresa 2 está dado por la siguiente curva de reacción:

$$r_2(x_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a - c - x_1), & \text{si } 0 \leq x_1 \leq a - c ; \\ 0, & \text{si } a - c \leq x_1. \end{cases}$$

La función de beneficio de la empresa 1 a maximizar es:

$$U_1(x_1, r_2(x_1)) = x_1 p(x_1 + r_2(x_1)) - cx_1$$

$$U_1(x_1, r_2(x_1)) = \begin{cases} x_1(a - c - x_1 + r_2(x_1)), & \text{si } x_1 + r_2(x_1) \leq a ; \\ -cx_1, & \text{si } x_1 + r_2(x_1) \geq a. \end{cases}$$

$$U_1(x_1, r_2(x_1)) = \begin{cases} \frac{1}{2}x_1(a - c - x_1), & \text{si } x_1 + r_2(x_1) \leq a ; \\ x_1(a - c - x_1), & \text{si } a - c \leq x_1 \leq a. \\ -cx_1, & \text{si } a \leq x_1. \end{cases}$$

Por lo tanto el máximo ocurre en  $x_1^* = \frac{(a - c)}{2}$ .

Por lo tanto el equilibrio de Nash es:

La empresa 1 produce  $\frac{(a - c)}{2}$  unidades.

La empresa 2 produce  $r_2\left(\frac{a - c}{2}\right) = \frac{(a - c)}{4}$  unidades.

Duopolio	Cournot	Stackelberg
Producción de la empresa 1	$\frac{a - c}{3}$	$\frac{a - c}{2}$
Producción de la empresa 2	$\frac{a - c}{3}$	$\frac{a - c}{4}$
Producción Total	$\frac{2(a - c)}{3}$	$\frac{3(a - c)}{4}$
Precio Unitario	$\frac{1a}{3} + \frac{2c}{3}$	$\frac{1a}{4} + \frac{3c}{4}$
Utilidad de la empresa 1	$\frac{(a - c)^2}{9}$	$\frac{(a - c)^2}{8}$
Utilidad de la empresa 2	$\frac{(a - c)^2}{9}$	$\frac{(a - c)^2}{16}$

Un resultado central del modelo de Stackelberg es la diferencia en el resultado de producción total de las empresas, en comparación con el modelo de Cournot. Recordemos que en ambos modelos las preferencias del consumidor y las técnicas de producción

son las misma para ambas empresas. Sin embargo, en el modelo de Stackelberg, hecho de que la empresa líder introduzca su producto al mercado antes que la empresa seguidora, hace que la empresa líder consiga una participación en el mercado mucho más grande y con mayores utilidades que la empresa seguidora. Es evidente observar de la tabla anterior que el actuar primero tiene ventajas claras para la empresa líder. Además otro aspecto interesante que se obtiene del modelo de Stackelberg es el hecho de que aunque la empresa seguidora tenga información perfecta con respecto al nivel de producción de la empresa líder, esto no le da mucha venta al momento de elegir su nivel de producción ya que esta tiene que ajustar su nivel de producción en base al nivel de producción de la empresa líder, por lo contrario en el modelo de duopolio de Cournot, la empresa rival no tiene una información tan concreta acerca del nivel de producción de la empresa rival, así que el análisis que realizan las empresas es en base a acciones simultáneas, cada empresa sólo puede conjeturar mediante un análisis lo más racional posible, sobre la decisión en el nivel de producción de su rival. Resulta paradójico pensar que la empresa seguidora obtenga peores resultados cuando cuenta con información completa sobre las decisiones de producción de la empresa líder, que cuando dispone de información menos perfecta. Esto se debe a que en el modelo de Stackelberg, para el momento en el que actúa la empresa seguidora, la empresa líder ya ésta completamente comprometida con su nivel de producción y en el modelo de Cournot esto no ocurre, por lo tanto la modificación que tiene el modelo de Stackelberg, bastante interesante. Es una forma útil de captar la característica de que a menudo una empresa tiene una posición dominante o de liderazgo en el mercado. El modelo de Stackelberg revela, que moverse primero puede tener grandes ventajas y puede, en consecuencia, ser un elemento fundamental de la interacción estratégica.

### II.3 MODELO DE DUOPOLIO DE BERTRAND

Para resaltar el hecho que no existe un único modelo que describa todos los casos de industrias duopólicas, e ilustrar que el poder duopolico no garantiza que las empresas obtengan siempre beneficios positivos, trataremos ahora el duopolio de Bertrand.

**Definición II.3.** Una industria es un Duopolio de Bertrand si:

1. Tenemos dos empresas y muchos consumidores.
2. Las empresas producen bienes idénticos.
3. Las empresas compiten con fijación en precios.
4. Los consumidores tienen información perfecta y no existen costos de transacción.
5. Existen barreras de entrada.

El duopolio de Bertrand es indeseable, ya que implica que las empresas obtengan beneficios económicos iguales a cero, aun si sólo existen dos empresas en el mercado. Es decir, conduce al mismo resultado que la competencia perfecta.

Así que estamos en el caso de dos empresas que venden el mismo producto, ya que los consumidores tienen información perfecta y no existen costos de transacción, todos los consumidores comprarán de la empresa que venda más barato. Asuma que la empresa 1 cobra el precio de monopolio, si la empresa 2 pone un precio un poco menor al de la 1 obtendrá todo el mercado y obtendrá beneficios económicos positivos, y la empresa 1 no venderá nada. Por lo tanto la empresa 1 puede reaccionar recortando sus precios a unos centavos por debajo del de la empresa 2, y de esta manera recapturar todo el mercado.

¿Cuándo terminaría esta guerra de precios?

Las compañías deciden su producción dependiendo del precio. Existe una función de demanda  $D_i(p_i)$ ,  $i = 1, 2$  donde  $p_i$  es el precio fijado por la compañía  $i$ . Si  $p_i$  es el menor precio, toda la demanda es satisfecha por el proveedor  $i$ . Si hay empates, se dividen la demanda equitativamente.

La función de costo está dada por  $C_i(x) = cx$ , es decir los costos para ambas empresas serán iguales, pues supondremos que  $c_1 = c_2$ .

Supongamos que  $D$  es la función de demanda inversa y es decreciente del precio. Aún más, supongamos que

$$D(y) = \begin{cases} a - y, & \text{si } 0 \leq y \leq a ; \\ 0, & \text{si } a \leq y. \end{cases}$$

La función de beneficio para las dos empresas es:  $U_i = \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $i = 1, 2$ , dadas por:

Función de beneficio de la empresa 1 es:

$$U_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_1 - c)(a - p_1), & \text{si } p_1 < p_2, 0 \leq p_1 \leq a ; \\ \frac{(p_1 - c)(p_1 - a)}{2}, & \text{si } p_1 = p_2, 0 \leq p_1 \leq a ; \\ 0, & \text{si } p_1 > p_2, p_1 \geq a. \end{cases}$$

Función de beneficio de la empresa 2 es:

$$U_2(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_2 - c)(a - p_2), & \text{si } p_2 < p_1, 0 \leq p_2 \leq a ; \\ \frac{(p_2 - c)(p_2 - a)}{2}, & \text{si } p_1 = p_2, 0 \leq p_2 \leq a ; \\ 0, & \text{si } p_2 > p_1, p_2 \geq a. \end{cases}$$

Caso 1: Si  $p_2 < c < a$ , analizando la figura II.7, se puede ver que la mejor respuesta de la empresa 1, cuando la empresa 2 fija un precio de  $p_2$ ; es:  $r_1(p_2) = (p_2, \infty)$ .

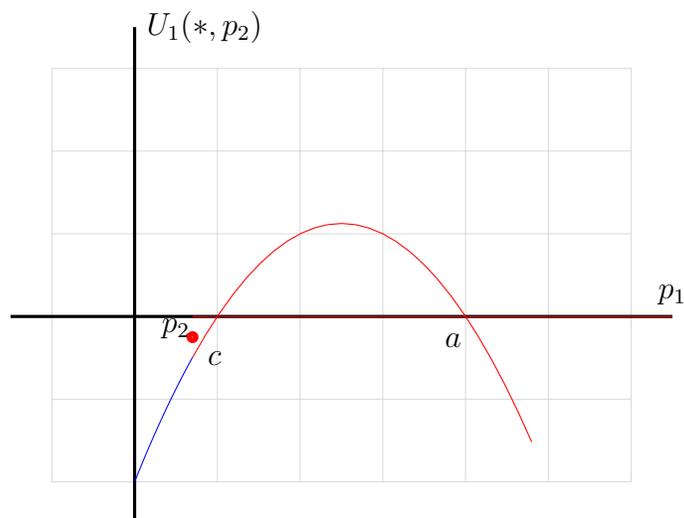


Figura II.7

Caso 2: Si  $p_2 = c$  y  $c < a$ , analizando la figura II.8, se puede ver que la mejor respuesta de la empresa 1, cuando la empresa 2 fija un precio de  $p_2$ ; es:  $r_1(c) = [c, \infty)$ .

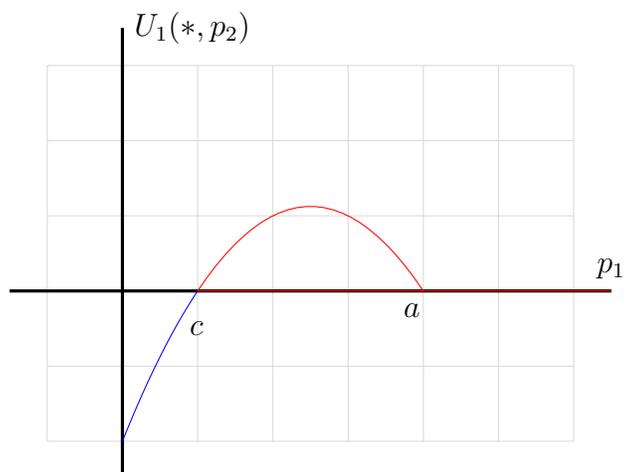


Figura II.8

Caso 3: Si  $c < p_2 < \frac{(a+c)}{2}$  y  $p_2 > c$ , analizando la figura II.9, se puede ver que la mejor respuesta de la empresa 1, cuando la empresa 2 fija un precio de  $p_2$ ; es:  $r_1(p_2) = \emptyset$ .

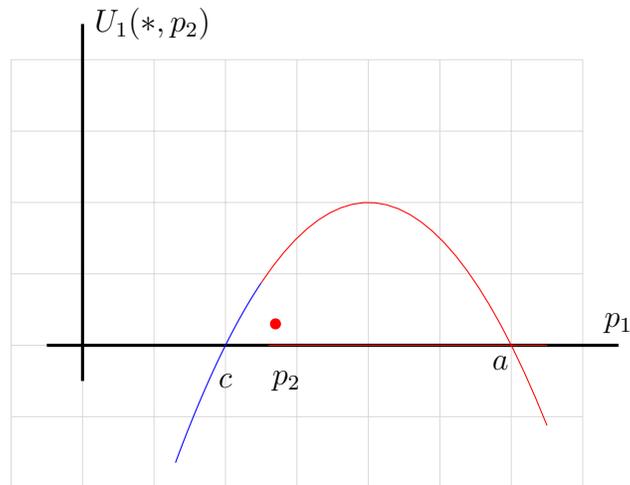


Figura II.9

Caso 4: Si  $\frac{(a+c)}{2} < p_2 \leq a$  y  $p_2 > c$ , analizando la figura II.10, se puede ver que la mejor respuesta de la empresa 1, cuando la empresa 2 fija un precio de  $p_2$ ; es:  $r_1(p_2) = \frac{(a+c)}{2}$ .

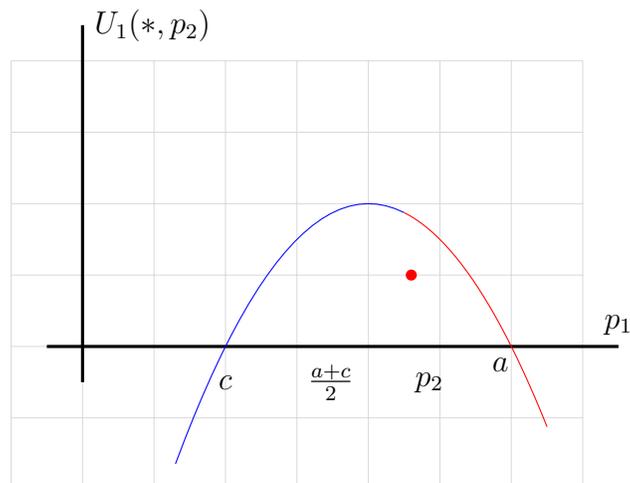


Figura II.10

Caso 5: Si  $p_2 > a$ , analizando la figura II.11, se puede ver que la mejor respuesta de la empresa 1, cuando la empresa 2 fija un precio de  $p_2$ ; es:  $r_1(p_2) = \frac{(a+c)}{2}$ .

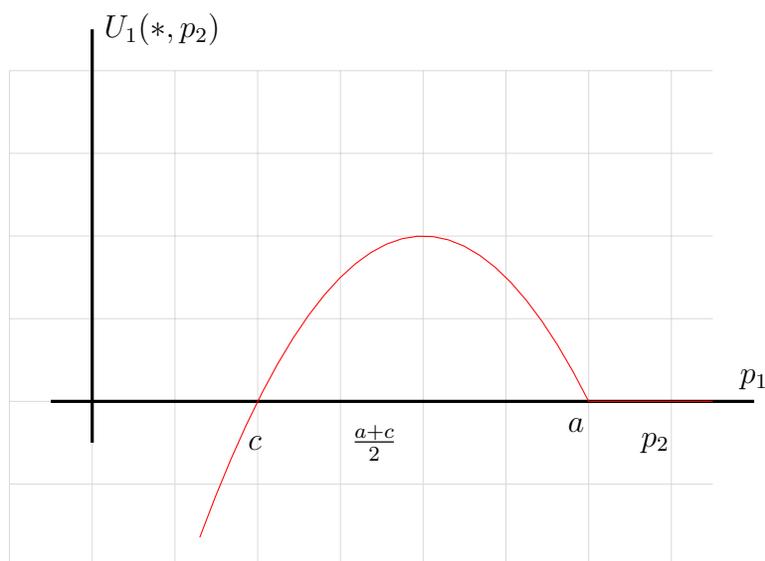


Figura II.11

Así que la función de mejor respuesta de la empresa 1 es:

$$r_1(p_2) = \begin{cases} (p_2, \infty), & \text{si } p_2 < c ; \\ (c, \infty), & \text{si } p_2 = c ; \\ \emptyset, & \text{si } c < p_2 \leq \frac{(a+c)}{2}. \\ \frac{(a+c)}{2}, & \text{si } \frac{(a+c)}{2} < p_2. \end{cases}$$

Por lo tanto la función de mejor respuesta de la empresa 2 es:

$$r_2(p_1) = \begin{cases} (p_1, \infty), & \text{si } p_1 < c; \\ (c, \infty), & \text{si } p_1 = c; \\ \emptyset, & \text{si } c < p_1 \leq \frac{(a+c)}{2}. \\ \frac{(a+c)}{2}, & \text{si } \frac{(a+c)}{2} < p_1. \end{cases}$$

¿Cuál será entonces, si es que existe, el equilibrio de Nash?

Observando la siguiente figura II.12 y analizando las figuras anteriores, podemos contestar la pregunta anterior.

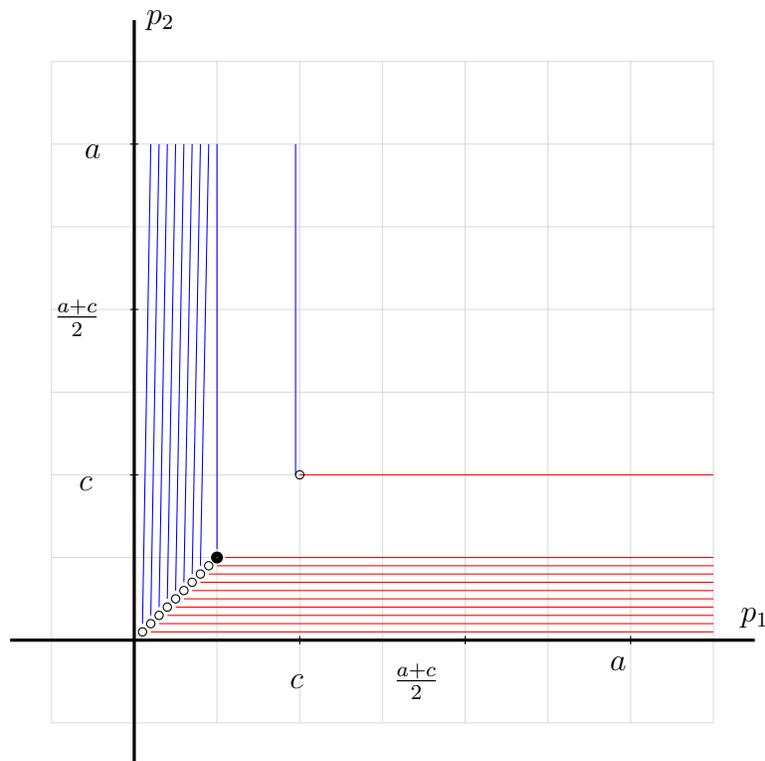


Figura II.12

Entonces el único equilibrio de Nash es  $(c, c)$

Duopolio	Cournot	Bertrand
Producción individual	$\frac{a - c}{3}$	$\frac{a - c}{2}$
Precio	$\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}c$	c
	Mercado de Vendedores	Mercado de Compradores

Una característica importante en el modelo de Bertrand y el modelo de Cournot es el resultado acerca de el nivel producción individual de ambas empresas ya que puede observarse de la tabla anterior que la oferta es más grande en el modelo de Bertrand, en comparación con la del modelo de Cournot dentro de un mercado, lo que origina una disminución en el precio del producto. Un aspecto clave en el Modelo de Bertrand es que ambas empresas compiten en la fijación de precios y de esta forma determinan su nivel de producción. Se puede observa también que los beneficios mas grandes que presentan en este mercado se da para los compradores debido a que los supuestos de este modelo, lleva a que las empresas a obtengan beneficios económicos iguales a cero, esto se da porque las empresas producen bienes idénticos, lo que ocasiona que los consumidores compren con la empresa cuyo precio sea el más barato. Por lo tanto ambas empresas reaccionarán recortando sus precios cada vez que la empresa rival lo haga, de esta manera recapturar todo el mercado. Esta forma de actuar de ambas empresas las lleva a vender su producto a su costo marginal, caso contrario en el modelo de Cournot el precio está determinado por la cantidad de producto en el mercado, lo que nos lleva a un análisis donde el nivel de producción en el mercado es menor y por tal motivo origina un precio mas elevado de su mercancía dentro del mercado, este pequeño estudio muestra claramente que sin importar que el mercado este en manos de tan sólo dos empresas, esto no siempre resulta favorable para ellas. En resumidas cuentas podemos concluir que el modelo de Duopolio de Cournot los beneficios más grandes los obtienen los vendedores y en el modelo de Bertrand los mayores beneficios los obtienen los compradores.



---

---

## CAPÍTULO III

---

# MODELOS DE DUOPOLIOS DE COURNOT CON EVASIÓN DE IMPUESTOS

En este capítulo consideramos el modelo de Cournot del capítulo anterior pero ahora con evasión de impuestos, es decir, consideramos a dos empresas que entran al mercado con un bien homogéneo. Estas firmas tienen que pagar un impuesto por anuncio de ventas, pero pueden evadir cierta cantidad de su deber del impuesto. Las metas de las firmas son maximizar sus beneficios. Vamos a analizar a tres modelos de duopolio de Cournot con evasión de impuestos. El primer modelo que analizaremos es el modelo estático. Se determina el punto de equilibrio y se hace un análisis económico. Esto nos lleva a concluir cual es el nivel de producción y las ganancias a declarar para que las firmas maximizan sus beneficios, así como las condiciones para los parámetros del modelo en los cuales se obtienen los beneficios máximos. El segundo modelo que se analizará es el modelo dinámico. Se describe la variación en el tiempo del nivel de producción y ganancias a declarar de las firmas de modo que se maximice el beneficio. También estudiamos la estabilidad local para el punto de equilibrio y las condiciones bajo las cuales este es asintóticamente estable. Y por último se estudiará el modelo dinámico con evasión de impuestos y tiempo retardo. Esto significa que las dos firmas no se incorporan al mercado al mismo tiempo. Una de ellas es la firma líder y la otra es la seguidora. La empresa seguidora entonces conoce el nivel de producción de la empresa líder al momento de entrar al mercado. Usando los métodos clásicos investigaremos la estabilidad local del punto de equilibrio analizando la correspondiente ecuación característica del sistema linealizado.

### III.1 MODELO ESTÁTICO DE DUOPOLIO DE COURNOT CON EVASIÓN DE IMPUESTOS

El modelo estático de duopolio de Cournot describe un juego económico, donde

1. Dos firmas entran al mercado.
2. Las firmas producen un producto homogéneo.
3. Cada empresa cree que sus rivales mantendrán sus niveles de producción constante si ellos cambian su nivel de producción.
4. Existen barreras de entrada.

Denotaremos a  $x_i$  como el nivel de producción de la empresa  $i$ ,  $i = 1, 2$ , donde  $x_i \geq 0$ .

La función de demanda inversa  $p$  determina el costo del producto y depende de la cantidad total  $x = x_1 + x_2$  de producción que se introduce al mercado, de modo asumimos que la función  $p: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , es diferenciable y su primera derivada es negativa (decreciente). Además existen  $a_1 \geq 0$  y  $b_1 \geq 0$  (pueden ser infinito) tales que

$$\lim_{x \rightarrow a_1} p(x) = 0$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} p(x) = b_1,$$

donde  $a_1$  es la producción máxima que soporta el mercado, antes de que el precio del producto se desplome, y  $b_1$  es el precio más alto que los consumidores están dispuestos a pagar por adquirir dicho bien antes de dejar de consumir el producto, es decir puede interpretarse también como el precio al que tiende un producto cuando este comienza a desaparecer del mercado.

La función de costo está dada por  $C_i(x_i)$ , tal que  $C_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , la cual asumimos diferenciable con  $C'_i(x_i) > 0$  (creciente),  $i = 1, 2$ .

El gobierno cobra un impuesto a la empresa  $i$  sobre sus ganancias obtenidas, las cuales están determinadas por la fórmula  $x_i p(x_1 + x_2)$ . Sin embargo la empresa  $i$  decide declarar ganancias por la cantidad  $z_i$ , de tal modo que  $x_i p(x_1 + x_2) \geq z_i$ . Note que se permite que la empresa  $i$  reporte pérdidas al gobierno. El impuesto que impone el gobierno es del  $0 < t_1 < 1$ , mientras que la probabilidad de ser detectado evadiendo impuestos es  $0 \leq q \leq 1$ . Así que  $1 - q$  representa la probabilidad de no ser detectado evadiendo impuestos.

En caso de detectar que la empresa  $i$  declaró ganancias inferiores a las realmente obtenidas, el gobierno procede a cobrar una penalidad sobre las ganancias evadidas  $x_i p(x_1 + x_2) - z_i$ , además de que la empresa  $i$  tiene que pagar el impuesto sobre las ganancias reales  $x_i p(x_1 + x_2)$ . Denotaremos por  $F$  a esta función de penalidad, y asumiremos que esta función  $F: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $F$  es una función diferenciable con primera y segunda

derivadas positivas y  $F(0) = 0$  de tal modo que si la empresa  $i$  declara cantidades reales esta no tiene por que pagar penalidad alguna.

La función de beneficio para las dos empresas es  $P_i: \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $i = 1, 2$ , dadas por el siguiente sistema

$$P_i(x_1, x_2, z_1, z_2) = (1 - q)[x_i p(x_1 + x_2) - C_i(x_i) - t_1 z_i] + q[(1 - t_1)x_i p(x_1 + x_2) - C_i(x_i) - F(x_i p(x_1 + x_2) - z_i)]. \quad (\text{III.1.1})$$

El beneficio está dado por la probabilidad de que no detecten a la empresa  $i$  por la ganancia total menos el costo total menos el impuesto a pagar por la ganancia declarada más la probabilidad de que de ser detectado por la ganancia total menos el pago del impuesto sobre la ganancia total, menos el costo total, menos la multa establecida por la ganancia no declarada.

Las firmas deben de maximizar la expresión anterior en base a las cantidades de producción  $x_i$  y las ganancias declaradas. Lo anterior se reduce a un problema de optimización, dado por

$$\max_{\{x_i, z_i\}} P_i, i = 1, 2.$$

De las hipótesis sobre  $p, F, C_i$ ,  $i = 1, 2$  tenemos que

**Proposición III.1.** *La solución del problema (III.1.1) esta dada por la solución del siguiente sistema*

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_i} = [1 - qt_1 - qF'(x_i p(x_1 + x_2) - z_i)][p(x_1 + x_2) + x_i p'(x_1 + x_2)] - C'_i(x_i) = 0.$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial z_i} = -(1 - q)t_1 + qF'(x_i p(x_1 + x_2) - z_i) = 0,$$

(III.1.2)

donde  $i = 1, 2$ .

*Demostración.* Para encontrar la solución, se deben resolver las ecuaciones  $\frac{\partial P_i}{\partial x_i} = 0$  y  $\frac{\partial P_i}{\partial z_i} = 0$ , para  $i = 1, 2$ ; eso es exactamente lo que afirma la proposición en cuestión. Note que aquí se ocupan las hipótesis la diferenciabilidad de las funciones involucradas, puesto que se necesitan las derivadas de las funciones involucradas.  $\square$

**Teorema III.1.** *El sistema de ecuaciones (III.1.2) satisface las siguientes expresiones ( $i = 1, 2$ ).*

$$p(x_1 + x_2) + x_i p'(x_1 + x_2) = \frac{C'_i(x_i)}{1 - t_1}$$

$$F'(x_i p(x_1 + x_2) - z_i) = \frac{(1 - q)t_1}{q}$$
(III.1.3)

Más aún, el sistema de ecuaciones (III.1.2) induce el siguiente sistema de ecuaciones ( $i = 1, 2$ ).

$$\log(x_i p(x_1 + x_2)) = \frac{1}{1 - t_1} \int \frac{C'_i(x_i)}{x_i p(x_1 + x_2)} dx_i$$

$$F(x_i p(x_1 + x_2) - z_i) = \left( \frac{t_1}{1 - t_1} \right) \left( \frac{1 - q}{q} \right) C_i(x_i).$$
(III.1.4)

*Demostración.* Para  $i = 1, 2$ , de la segunda ecuación del sistema (III.1.2) obtenemos

$$F'(x_i p(x_1 + x_2) - z_i) = \frac{1 - q}{q} t_1, \quad (III.1.5)$$

y sustituyendo (III.1.5) en la primera ecuación del sistema (III.1.2) se deduce

$$p(x_1 + x_2) + x_i p'(x_1 + x_2) = \frac{C'_i(x_i)}{1 - t_1}. \quad (III.1.6)$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación anterior por  $x_i p(x_1 + x_2)$ , se obtiene

$$\frac{p(x_1 + x_2) + x_i p'(x_1 + x_2)}{x_i p(x_1 + x_2)} = \frac{1}{1 - t_1} \frac{C'_i(x_i)}{x_i p(x_1 + x_2)}$$

y ahora integrando ambos lados con respecto a  $x_i$ ,

$$\int \frac{p(x_1 + x_2) + x_i p'(x_1 + x_2)}{x_i p(x_1 + x_2)} dx_i = \frac{1}{1 - t_1} \int \frac{C'_i(x_i)}{x_i p(x_1 + x_2)} dx_i$$

es decir

$$\log(x_i p(x_1 + x_2)) = \frac{1}{1 - t_1} \int \frac{C'_i(x_i)}{x_i p(x_1 + x_2)} dx_i.$$

como se quería.

Para terminar con la demostración, multiplicamos (III.1.5) y (III.1.6) para obtener

$$F'(x_i p(x_1 + x_2) - z_i)(p(x_1 + x_2) + x_i p'(x_1 + x_2)) = \frac{C'_i(x_i)(1 - q)t_1}{1 - t_1} \frac{1}{q}$$

integrando de ambos lados respecto de  $x_i$  y sustituyendo  $F(0) = 0 = C_i(0)$ , concluimos que

$$F(x_i p(x_1 + x_2) - z_i) = \left( \frac{t_1}{1 - t_1} \right) \left( \frac{1 - q}{q} \right) C_i(x_i).$$

□

El teorema anterior es una de las contribuciones de esta tesis y nos muestra dos aspectos cruciales en el comportamiento de las dos empresas que conforman el duopolio cuando se tiene por hipótesis que se quiere maximizar la función beneficio :

- El logaritmo de las entradas  $x_i p(x_1 + x_2)$  de la empresa  $i$  es inversamente proporcional al cobro de impuesto, sin embargo, no depende de la probabilidad de ser detectado evadiendo impuestos.
- La penalidad a pagar de la empresa  $i$  sobre el monto de la evasión es directamente proporcional al costo de producción. Las constantes de proporcionalidad son dos: una constante depende del impuesto que impone el gobierno, de modo que a mayor impuesto mayor penalidad, mientras que la otra constante depende de la probabilidad de ser descubierto evadiendo impuestos, de modo que mientras más se prevea que van a ser descubiertos menor la penalidad.

Ahora nos enfocaremos a resolver un caso particular con funciones específicas, las cuales nos facilitaran varios cálculos. Este es uno de tantos de los ejemplos que existen economía en el cual se intenta explicar el comportamiento de los mercados de oligopolio. Por lo tanto consideremos la siguiente función de penalidad  $F(x) = \frac{1}{2} s t_1 x^2$ ,  $s \geq 1$  en la cual hemos introducido el impuesto que impone el gobierno, pues como ya observamos es un factor determinante en el cobro de la penalidad.

También consideremos la siguiente función de costo  $C_i(x_i) = c_i x_i$ ,  $c_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Y sea  $p(x) = \frac{1}{x}$  la función de demanda inversa.

En la siguiente proposición se determinan las condiciones para valores de  $x_1, x_2, z_1$  y  $z_2$ , los cuales dan solución al problema (III.1.2) en el cual obtenemos como resultado un equilibrio de Nash.

**Proposición III.2.** Si  $\frac{1-q}{qs+q-1}c_1 \leq c_2 \leq \frac{qs+q-1}{1-q}c_1$ , entonces la solución del sistema (III.1.2) esta dado por

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{c_2(1-t_1)}{(c_1+c_2)^2}, \\ x_2^* &= \frac{c_1(1-t_1)}{(c_1+c_2)^2}, \\ z_1^* &= \frac{c_2}{c_1+c_2} - \frac{1-q}{qs}, \\ z_2^* &= \frac{c_1}{c_1+c_2} - \frac{1-q}{qs}. \end{aligned} \tag{III.1.7}$$

*Demostración.* Resolveremos el sistema (III.1.2), comenzando con la tercera ecuación correspondiente a este sistema

$$\frac{\partial P_1}{\partial z_1} = -(1-q)t_1 + qF'(x_1p(x_1+x_2) - z_1) = 0.$$

Sustituyendo las funciones descritas en nuestro modelo en la tercera ecuación del sistema (III.1.2) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial z_1} &= -(1-q)t_1 + qst_1 \left( \frac{x_1}{x_1+x_2} - z_1 \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Despejando de esta ecuación a  $z_1$  se tiene

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{(1-q)t_1}{qst_1} + \frac{x_1}{x_1+x_2} \\ &= -\frac{(1-q)}{qs} + \frac{x_1}{x_1+x_2}. \end{aligned}$$

Ahora debido a la simetría de nuestro sistema tenemos que

$$z_2 = -\frac{(1-q)}{qs} + \frac{x_2}{x_1 + x_2}.$$

Sustituyendo estas dos relaciones en la primera ecuación del sistema (III.1.2).

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} &= \left[ 1 - qt_1 - \left( \frac{qst_1x_1}{x_1 + x_2} - qst_1z_1 \right) \right] \left[ \frac{x_1 + x_2 - x_1}{(x_1 + x_2)^2} \right] - c_1 \\ &= \left[ 1 - qt_1 - \left[ \frac{qst_1x_1}{x_1 + x_2} - qst_1 \left( -\frac{(1-q)}{qs} + \frac{x_1}{x_1 + x_2} \right) \right] \right] \left[ \frac{x_2}{(x_1 + x_2)^2} \right] - c_1 \\ &= \left[ 1 - qt_1 - \left[ \frac{qst_1x_1}{x_1 + x_2} + \frac{qst_1(1-q)}{qs} - \frac{qst_1x_1}{x_1 + x_2} \right] \right] \left[ \frac{x_2}{(x_1 + x_2)^2} \right] - c_1 \\ &= (1 - qt_1 - t_1 + t_1q) \frac{x_2}{(x_1 + x_2)^2} - c_1 \\ &= (1 - t_1) \frac{x_2}{(x_1 + x_2)^2} - c_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego despejando

$$\frac{(1-t_1)x_2}{c_1} = (x_1 + x_2)^2$$

Análogamente de la ecuación dos del sistema (III.1.2) se tiene la siguiente ecuación

$$\frac{(1-t_1)x_1}{c_2} = (x_1 + x_2)^2.$$

Igualando estas dos últimas ecuaciones

$$\frac{(1-t_1)x_2}{c_1} = \frac{(1-t_1)x_1}{c_2}.$$

Luego, si  $t_1 \neq 1$ , se sigue que  $\frac{c_1}{c_2}x_1 = x_2$ . Sustituyendo  $x_2$  en  $z_1$  se obtiene

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{(1-q)}{qs} + \frac{x_1}{x_1 + \frac{c_1}{c_2}x_1} \\ z_1 &= -\frac{(1-q)}{qs} + \frac{c_2}{c_1 + c_2}. \end{aligned}$$

Similarmente

$$z_2 = -\frac{(1-q)}{qs} + \frac{c_1}{c_1 + c_2}.$$

Luego sea  $x > 0$ , se tiene

$$(1 - t_1)x_1 = \left(x_1 + \frac{c_1}{c_2}x_1\right)^2$$

$$(1 - t_1)x_1 = x_1^2(c_1 + c_2)^2 \frac{c_2}{c_2^2}$$

$$x_1 = \frac{(1 - t_1)c_2}{(c_1 + c_2)^2}.$$

Análogamente

$$x_2 = \frac{(1 - t_1)c_1}{(c_1 + c_2)^2}.$$

Por lo tanto una solución de (III.1.2) esta dado por

$$\begin{aligned}x_1^* &= \frac{c_2(1 - t_1)}{(c_1 + c_2)^2}, \\x_2^* &= \frac{c_1(1 - t_1)}{(c_1 + c_2)^2}, \\z_1^* &= \frac{c_2}{c_1 + c_2} - \frac{1 - q}{qs}, \\z_2^* &= \frac{c_1}{c_1 + c_2} - \frac{1 - q}{qs}.\end{aligned}$$

Ahora se analizará el beneficio de ambas empresas con esta solución y demostraremos que este punto es un equilibrio de Nash, para esto realizaremos varios pasos, el primero sera evaluar (III.1.7) en (III.1.1).

$$\begin{aligned}
P_1 &= (1-q) \left[ \frac{x_1}{x_1+x_2} - c_1x_1 - t_1z_i \right] \\
&\quad + q \left[ (1-t_1) \frac{x_1}{x_1+x_2} - c_1x_1 - \frac{1}{2}st_1 \left( \frac{x_1}{x_1+x_2} - z_1 \right)^2 \right] \\
&= (1-q) \left[ \frac{c_2}{c_1+c_2} - c_1 \frac{(1-t_1)c_2}{(c_1+c_2)^2} - t_1 \left( \frac{c_2}{c_1+c_2} - \frac{1-q}{qs} \right) \right] \\
&\quad + q \left[ (1-t_1) \frac{c_2}{c_1+c_2} - c_1 \left( \frac{(1-t_1)c_2}{(c_1+c_2)^2} \right) - \frac{1}{2}st_1 \left( \frac{c_2}{c_1+c_2} - \left( \frac{c_2}{c_1+c_2} - \frac{1-q}{qs} \right) \right)^2 \right] \\
&= (1-q) \left[ \frac{c_2(c_1+c_2) - c_1c_2(1-t_1) - t_1c_2(c_1+c_2)}{(c_1+c_2)^2} + \frac{t_1(1-q)}{qs} \right] \\
&\quad + q \left[ \frac{(1-t_1)c_2(c_1+c_2) - c_1c_2(1-t_1)}{(c_1+c_2)^2} - \frac{1}{2}st_1 \left( \frac{1-q}{qs} \right)^2 \right] \\
&= (1-q) \left[ \frac{c_1c_2 + c_2^2 - c_1c_2 + t_1c_1c_2 - t_1c_1c_2 - t_1c_2^2}{(c_1+c_2)^2} + \frac{t_1(1-q)}{qs} \right] \\
&\quad + q \left[ \frac{c_2c_1 + c_2^2 - t_1c_1c_2 - t_1c_2^2 - c_1c_2 + t_1c_1c_2}{(c_1+c_2)^2} - \frac{1}{2}st_1 \left( \frac{1-q}{qs} \right)^2 \right] \\
&= (1-q) \left[ \frac{c_2^2(1-t_1)}{(c_1+c_2)^2} + \frac{t_1(1-q)}{qs} \right] + q \left[ \frac{c_2^2(1-t_1)}{(c_1+c_2)^2} - \frac{1}{2}st_1 \left( \frac{1-q}{qs} \right)^2 \right] \\
&= (1-q+q) \frac{c_2^2(1-t_1)}{(c_1+c_2)^2} + \frac{t_1(1-q)^2}{qs} - \frac{1}{2}st_1 \left( \frac{1-q}{qs} \right)^2 \\
&= \frac{c_2^2(1-t_1)}{(c_1+c_2)^2} + \frac{t_1(1-q)^2}{qs} - \frac{t_1(1-q)^2}{2qs} \\
&= \frac{c_2^2(1-t_1)}{(c_1+c_2)^2} + \frac{t_1(1-q)^2}{2qs}.
\end{aligned} \tag{III.1.8}$$

Por lo tanto el beneficio de ambas empresas está dada

$$P_1 = \frac{c_2^2(1-t_1)}{(c_1+c_2)^2} + \frac{t_1(1-q)^2}{2qs}.$$

$$P_2 = \frac{c_1^2(1-t_1)}{(c_1+c_2)^2} + \frac{t_1(1-q)^2}{2qs}.$$

(III.1.9)

Ahora bien, de las desigualdades en la hipótesis deducimos que si

$$c_2 \leq \frac{qs + q - 1}{1 - q} c_1 = \frac{qs}{1 - q} c_1 - c_1$$

es decir

$$c_1 + c_2 \leq \frac{qs}{1 - q} c_1$$

quedando

$$0 \leq \frac{c_1}{c_1 + c_2} - \frac{1 - q}{qs}$$

así

$$0 \leq z_2^*$$

y si

$$\frac{1 - q}{qs + q - 1} c_1 \leq c_2 \implies c_1 \leq \frac{qs + q - 1}{1 - q} c_2 = \frac{qs}{1 - q} c_2 - c_2$$

es decir

$$c_1 + c_2 \leq \frac{qs}{1 - q} c_2$$

quedando

$$0 \leq \frac{c_2}{c_1 + c_2} - \frac{1 - q}{qs}$$

así

$$0 \leq z_1^*$$

Ahora demostraremos que (III.1.7) es un equilibrio de Nash mostrando que la función de beneficio alcanza su máximo en dicho punto. Como la función de beneficio tiene un sólo punto crítico, bastará con evaluarla en otro punto cercano a (III.1.7) y verificar que se obtiene un beneficio menor. Consideremos entonces

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{c_2(1 - t_1)}{(c_1 + c_2)^2}, \\ x_2^* &= \frac{c_1(1 - t_1)}{(c_1 + c_2)^2}, \\ z_1^* &= \frac{c_2}{c_1 + c_2}, \\ z_2^* &= \frac{c_1}{c_1 + c_2}. \end{aligned} \tag{III.1.10}$$

un punto cercano a (III.1.7), por lo tanto evaluando en (III.1.1) se tiene

$$P_1 = \frac{c_2^2(1-t_1)}{(c_1+c_2)^2} + \frac{t_1(1-q)^2}{2qs} > \frac{c_2^2(1-t_1)}{(c_1+c_2)^2}.$$

$$P_2 = \frac{c_1^2(1-t_1)}{(c_1+c_2)^2} + \frac{t_1(1-q)^2}{2qs} > \frac{c_1^2(1-t_1)}{(c_1+c_2)^2}.$$

(III.1.11)

Por lo tanto (III.1.7) es un equilibrio de Nash.  $\square$

En el caso particular para los parámetros  $c_1 = 0.3$ ,  $c_2 = 0.6$ , las variaciones de las variables  $z_1$ ,  $z_2$ , están dadas en las siguientes figuras III.1 y III.2, para las probabilidades  $q = 0.1$  y  $q = 0.9$ .

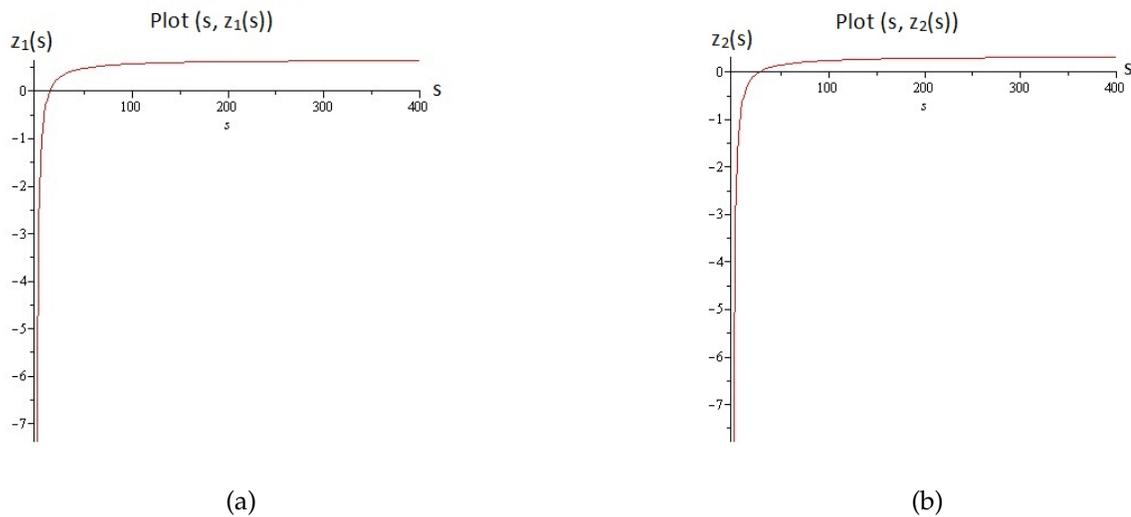


Figura III.1

Concluimos que las empresas tienden a declarar ganancias reales cuando la multa tiende a ser más grande, pero además se observa que si la probabilidad de que sean detectados es pequeña las empresas incluso se atreven a declarar pérdidas. Si la probabilidad de que sean detectados es cada vez más grande, pero la multa que se aplica es pequeña, entonces nos encontramos que en estas condiciones las empresas tienden a declarar ganancias simbólicas, a menos que la probabilidad de ser detectados sea cercana o igual a uno. Así que se puede concluir que la multa es un factor determinante para que la empresa  $i$  evada impuestos. Se observa que se debe de aplicar multas elevadas para que las empresas tiendan a declarar ganancias reales, observemos que nuestras conclusiones son consistentes con III.1.4.

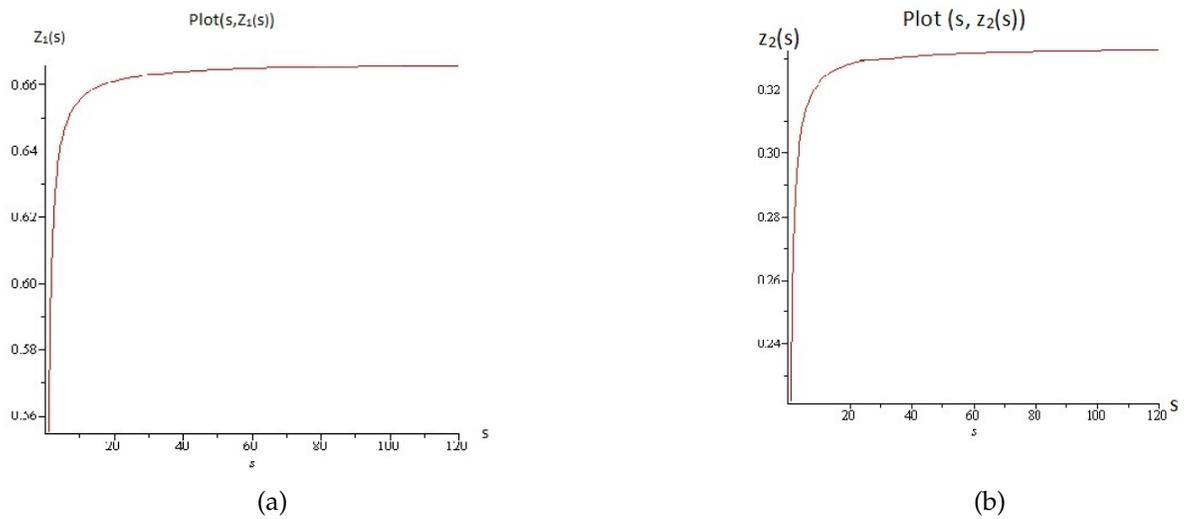


Figura III.2

En el caso particular para los parámetros  $c_1 = 0.3$ ,  $c_2 = 0.6$  y  $t_1 = 0.1$  las variaciones de las variables  $P_1$ ,  $P_2$ , están dadas en las siguientes figuras III.3 Y III.4, para una probabilidad de  $q = 0.1$  y  $q = 0.9$ :

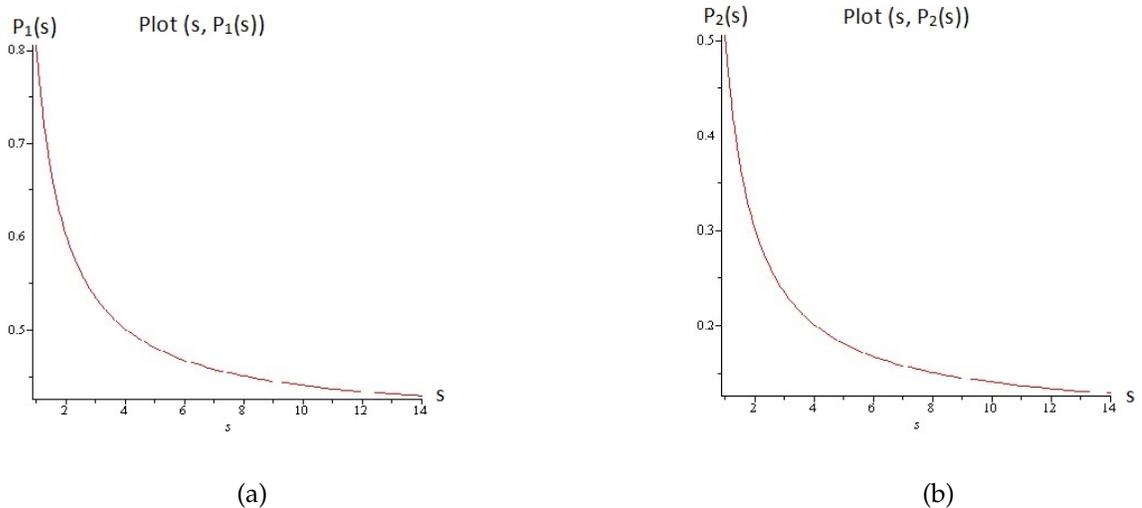


Figura III.3

Se concluye que las ganancias de las empresas tienden a disminuir cuando la multa tiende a ser mucho más grande, caso contrario, se observa que si la multa es pequeña las empresas tienden a tener mayores ganancias, pues tienden a declarar perdidas y por lo tanto evaden la responsabilidad del pago de sus impuestos. Si la probabilidad de que la evasión de impuestos se detecte es cada vez más grande las ganancias disminuyen y ante

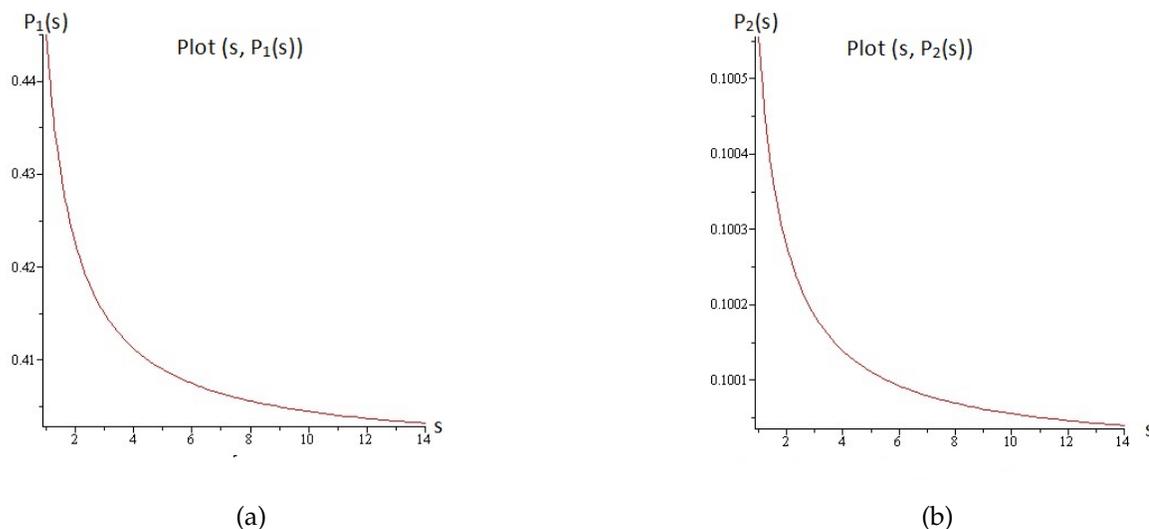


Figura III.4

una menor probabilidad de ser detectada la evasión las ganancias aumentan, observemos que nuestras conclusiones son consistentes nuevamente con III.1.4.

### III.2 MODELO DINÁMICO DE DUOPOLIO DE COURNOT CON EVASIÓN DE IMPUESTOS

Para formular un modelo dinámico del duopolio de Cournot con evasión de impuestos, nosotros consideraremos el modelo de la sección anterior pero comenzaremos asumiendo que la empresa  $i$  ( $i = 1, 2$ ) tiene un nivel de producción  $x_i(t)$  que varía continuamente con respecto al tiempo  $t$  y es una función diferenciable. Asumimos que las ganancias declaradas por la empresa  $i$  en el instante  $t$  están dadas por  $z_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ . Por hipótesis, la razón de cambio  $\frac{dx_i}{dt}$  del nivel de producción  $x_i(t)$  con respecto al tiempo  $t$ , será directamente proporcional a las ganancias marginales  $\frac{\partial P_i}{\partial x_i}$ , es decir, a la razón de cambio de las ganancias con respecto al nivel de producción. Análogamente, la razón de cambio  $\frac{dz_i}{dt}$  de lo que declara la empresa al gobierno con respecto al tiempo, es directamente proporcional a  $\frac{\partial P_i}{\partial z_i}$ , la razón de cambio de las ganancias con respecto a lo que se declara, por lo tanto el modelo dinámico está dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_i}{\partial x_i} &= [1 - qt_1 - qF'(x_i(t))p(x_1(t) + x_2(t)) - z_i(t)] \\ &\quad \cdot [p(x_1(t) + x_2(t)) + x_i(t)p'(x_1(t) + x_2(t))] - C'_i(t)(x_i(t)). \\ \frac{\partial P_i}{\partial z_i} &= -(1 - q)t_1 + qF'(x_i(t))p(x_1(t) + x_2(t)) - z_i(t), i = 1, 2. \end{aligned} \quad (\text{III.2.1})$$

Con condición inicial  $x_i(0) = x_{i0}$ ,  $z_i(0) = z_{i0}$ ,  $i = 1, 2$  y  $h_i > 0$ ,  $k_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ . Para  $F(x) = \frac{1}{2}st_1x^2$ ,  $s \geq 1$  y  $C_i(x_i) = c_ix_i$ ,  $c > 0$ ,  $i = 1, 2$  nuestro sistema esta dado por.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= k_1[1 - qt_1 - qst_1(x_1(t))p(x_1(t) + x_2(t)) - z_1(t)] \\ &\quad \cdot [p(x_1(t) + x_2(t)) + x_1(t)p'(x_1(t) + x_2(t))] - c_1. \\ \dot{x}_2(t) &= k_2[1 - qt_1 - qst_1(x_2(t))p(x_1(t) + x_2(t)) - z_2(t)] \\ &\quad \cdot [p(x_1(t) + x_2(t)) + x_2(t)p'(x_1(t) + x_2(t))] - c_2. \\ \dot{z}_1(t) &= h_1[-(1 - q)t_1 + qst_1(x_1(t))p(x_1(t) + x_2(t)) - z_1(t)]. \\ \dot{z}_2(t) &= h_2[-(1 - q)t_1 + qst_1(x_2(t))p(x_1(t) + x_2(t)) - z_2(t)]. \end{aligned} \quad (\text{III.2.2})$$

El sistema (III.2.2) tiene un punto estacionario estable en  $(x_1^*, x_2^*, z_1^*, z_2^*)$  dado por (III.1.9). Sea  $u_1(t) = \dot{x}_1(t) - x_1^*$ ,  $u_2(t) = \dot{x}_2(t) - x_2^*$ ,  $u_3(t) = \dot{z}_1(t) - z_1^*$ ,  $u_4(t) = \dot{z}_2(t) - z_2^*$ .

Realizaremos una expansión de (III.2.2) en series de Taylor alrededor del punto estacionario estable  $(x_1^*, x_2^*, z_1^*, z_2^*)$ , y calculando sólo los términos de primer orden en la serie para obtener una aproximación lineal del sistema.

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \\ \dot{u}_3(t) \\ \dot{u}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(t)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1(t)}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1(t)}{\partial z_1} & \frac{\partial u_1(t)}{\partial z_2} \\ \frac{\partial u_2(t)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2(t)}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2(t)}{\partial z_1} & \frac{\partial u_2(t)}{\partial z_2} \\ \frac{\partial u_3(t)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3(t)}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3(t)}{\partial z_1} & \frac{\partial u_3(t)}{\partial z_2} \\ \frac{\partial u_4(t)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_4(t)}{\partial x_2} & \frac{\partial u_4(t)}{\partial z_1} & \frac{\partial u_4(t)}{\partial z_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{pmatrix}$$

Primero calculamos las derivadas parciales de primer orden de la tercera fila.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= h_1 q s t_1 (p(x_1^* + x_2^*) + x_1^* p'(x_1^* + x_2^*)) \\
\frac{\partial u_3}{\partial x_2} &= h_1 q s t_1 (x_1^* p'(x_1^* + x_2^*)) \\
\frac{\partial u_3}{\partial z_1} &= -h_1 q s t_1 \\
\frac{\partial u_3}{\partial z_2} &= 0.
\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de la proposición III.2:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= h_1 q s t_1 (p(x_1^* + x_2^*) + x_1^* p'(x_1^* + x_2^*)) \\
&= h_1 q s t_1 \left( \frac{1}{x_1^* + x_2^*} + x_1^* \frac{-1}{(x_1^* + x_2^*)^2} \right) \\
&= h_1 q s t_1 \frac{x_2^*}{(x_1^* + x_2^*)^2} \\
&= h_1 q s t_1 \frac{\frac{c_1(1-t_1)}{(c_1+c_2)^2}}{\frac{(c_1+c_2)^2(1-t_1)^2}{(c_1+c_2)^4}} \\
&= h_1 q s t_1 \frac{c_1}{1-t_1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_3}{\partial x_2} &= h_1 q s t_1 x_1^* p'(x_1^* + x_2^*) \\
&= h_1 q s t_1 \frac{-x_1^*}{(x_1^* + x_2^*)^2} \\
&= -h_1 q s t_1 \frac{\frac{c_2(1-t_1)}{(c_1+c_2)^2}}{\frac{(c_1+c_2)^2(1-t_1)^2}{(c_1+c_2)^4}} \\
&= -h_1 q s t_1 \frac{c_2}{1-t_1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\dot{u}_3(t) = h_1 q s t_1 \left[ \frac{c_1}{1-t_1} (x_1 - x_1^*) - \frac{c_2}{1-t_1} (x_2 - x_2^*) - (z_1 - z_1^*) \right].$$

Análogamente por la simetría del sistema se tiene que  $\dot{u}_4(t)$  es igual a la siguiente ecuación:

$$\dot{u}_4(t) = h_2 q s t_1 \left[ -\frac{c_1}{1-t_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{c_2}{1-t_1}(x_2 - x_2^*) - (z_2 - z_2^*) \right].$$

Ahora calculamos las derivadas parciales de primer orden de la primera fila.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(t)}{\partial x_1} &= k_1 [-q s t_1 [p(x_1(t) + x_2(t)) + x_1(t)p'(x_1(t) + x_2(t))]^2 \\ &\quad + k_1 [1 - q t_1 - q s t_1 (x_1(t)p(x_1(t) + x_2(t)) - z_1(t))] \\ &\quad \cdot [2p'(x_1(t) + x_2(t)) + x_1(t)p''(x_1(t) + x_2(t))]. \end{aligned}$$

Por los resultados anteriores se tiene:

$$\begin{aligned} p(x_1^* + x_2^*) + x_1^* p'(x_1^* + x_2^*) &= \frac{c_1}{1-t_1}. \\ [p(x_1^* + x_2^*) + x_1^* p'(x_1^* + x_2^*)]^2 &= \frac{c_1^2}{(1-t_1)^2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de la proposición III.2:

$$\begin{aligned} 1 - q t_1 - q s t_1 (x_1^* p(x_1^* + x_2^*) - z_1^*) &= 1 - q t_1 - q s t_1 \left( \frac{x_1^*}{x_1^* + x_2^*} - z_1^* \right) \\ &= 1 - q t_1 - q s t_1 \left( \frac{c_2}{c_1 + c_2} - \frac{c_2}{c_1 + c_2} + \frac{1-q}{q s} \right) \\ &= 1 - q t_1 - q s t_1 \left( \frac{1-q}{q s} \right) \\ &= 1 - q t_1 - t_1 (1-q) \\ &= 1 - t_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2p'(x_1^*(t) + x_2^*(t)) + x_1^*(t)p''(x_1^*(t) + x_2^*(t)) &= -2 \frac{(c_1 + c_2)^4}{(c_1 + c_2)^2 (1-t_1)^2} + 2 \frac{(c_1 + c_2)^6}{(c_1 + c_2)^3 (1-t_1)^2} \\ &= -2 \frac{(c_1 + c_2)^2}{(1-t_1)^2} + 2 \frac{(c_1 + c_2)^3}{(1-t_1)^2} \\ &= 2 \frac{(c_1 + c_2)^2 (c_1 + c_2 - 1)}{(1-t_1)^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto sustituyendo todos nuestros resultados obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(t)}{\partial x_1} &= k_1 q s t_1 \left[ \frac{c_1^2}{(1-t_1)^2} + 2(1-t_1) \frac{(c_1 + c_2)^2 (c_1 + c_2 - 1)}{(1-t_1)} \right] \\ &= k_1 q s t_1 \left[ \frac{c_1^2}{(1-t_1)^2} + 2(c_1 + c_2)^2 (c_1 + c_2 - 1) \right]. \end{aligned}$$

Ahora calculando  $\frac{\partial u_1(t)}{\partial x_2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(t)}{\partial x_2} &= k_1[-qst_1[x_1(t)p'(x_1(t) + x_2(t))] \\ &\quad \cdot [p(x_1(t) + x_2(t)) + x_1(t)p'(x_1(t) + x_2(t))] \\ &\quad + k_1[1 - qt_1 - qst_1(x_1(t)p(x_1(t) + x_2(t)) - z_1(t))] \\ &\quad \cdot [p'(x_1(t) + x_2(t)) + x_1(t)p''(x_1(t) + x_2(t))]. \end{aligned}$$

Evaluando en la siguiente expresión los valores obtenidos en (III.1.7)

$$\begin{aligned} p'(x_1^* + x_2^*) + x_1^*p''(x_1^* + x_2^*) &= -\frac{(c_1 + c_2)^4}{(c_1 + c_2)^2(1 - t_1)^2} + 2\frac{(c_1 + c_2)^6}{(c_1 + c_2)^3(1 - t_1)^2} \\ &= -\frac{(c_1 + c_2)^2}{(1 - t_1)^2} + 2\frac{(c_1 + c_2)^3}{(1 - t_1)^2} \\ &= \frac{(c_1 + c_2)^2(2c_1 + 2c_2 - 1)}{(1 - t_1)^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(t)}{\partial x_2} &= k_1qst_1 \left[ \frac{c_1c_2}{(1 - t_1)^2} + (1 - t_1)\frac{(c_1 + c_2)^2(2c_1 + 2c_2 - 1)}{(1 - t_1)} \right] \\ &= k_1qst_1 \left[ \frac{c_1c_2}{(1 - t_1)^2} + (c_1 + c_2)^2(2c_1 + 2c_2 - 1) \right]. \end{aligned}$$

Por último calculando las derivadas parciales de  $\frac{\partial u_1(t)}{\partial z_1}$  y  $\frac{\partial u_1(t)}{\partial z_2}$  se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(t)}{\partial z_1} &= -k_1qst_1(p(x_1^* + x_2^*) + x_1^*p'(x_1^* + x_2^*)) \\ &= \frac{k_1qst_1c_1}{(1 - t_1)}. \\ \frac{\partial u_1(t)}{\partial z_2} &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente es claro que resolviendo las derivadas parciales del segundo renglón, obtenemos por simetría del sistema.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_2(t)}{\partial x_1} &= k_2 x_2(t) p'(x_1(t) + x_2(t)) \\
&\quad \cdot [p(x_1(t) + x_2(t)) + x_2(t) p'(x_1(t) + x_2(t))] \\
&\quad + k_2 [1 - qt_1 - qst_1(x_2(t)p(x_1(t) + x_2(t)) - z_2(t))] \\
&\quad \cdot [p'(x_1(t) + x_2(t)) + x_2(t)p''(x_1(t) + x_2(t))] \\
&= -k_2 qst_1 \left[ \frac{c_1 c_2}{(1 - t_1)^2} + (c_1 + c_2)^2 (2c_1 + 2c_2 - 1) \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_2(t)}{\partial x_2} &= k_2 [p(x_1(t) + x_2(t)) + x_2(t) p'(x_1(t) + x_2(t))]^2 \\
&\quad + k_2 [1 - qt_1 - qst_1(x_2(t)p(x_1(t) + x_2(t)) - z_2(t))] \\
&\quad \cdot [2p'(x_1(t) + x_2(t)) + x_2(t)p''(x_1(t) + x_2(t))] \\
&= -k_2 qst_1 \left[ \frac{c_2^2}{(1 - t_1)^2} + 2(c_1 + c_2)^2 (c_1 + c_2 - 1) \right]
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_2(t)}{\partial z_1} = 0.$$

$$\frac{\partial u_2(t)}{\partial z_2} = \frac{k_2 qst_1 c_2}{(1 - t_1)}.$$

Por tanto se tiene la siguiente aproximación lineal del sistema (III.2.2):

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1(t) &= k_1 a_{11} u_1(t) + a_{12} u_2(t) + a_{13} u_3(t). \\
\dot{u}_2(t) &= k_2 a_{21} u_1(t) + a_{22} u_2(t) + a_{24} u_4(t). \\
\dot{u}_3(t) &= h_1 a_{31} u_1(t) + a_{32} u_2(t) + a_{33} u_3(t). \\
\dot{u}_4(t) &= h_2 a_{41} u_1(t) + a_{42} u_2(t) + a_{44} u_4(t).
\end{aligned}$$

(III.2.3)

Donde

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -qst_1 \frac{c_1^2}{(1-t_1)^2} + 2(c_1 + c_2)^2(c_1 + c_2 - 1), \\
a_{12} &= -qst_1 \frac{c_1 c_2}{(1-t_1)^2} + (c_1 + c_2)^2(2c_1 + 2c_2 - 1), \\
a_{13} &= \frac{qst_1 c_1}{1-t_1}, b_{24} = \frac{qst_1 c_2}{1-t_1}, \\
a_{33} &= a_{44} = -qst_1, a_{31} = \frac{qst_1 c_1}{1-t_1}, \\
a_{21} &= -qst_1 \frac{c_1 c_2}{(1-t_1)^2} + (c_1 + c_2)^2(2c_1 + 2c_2 - 1), \\
a_{22} &= -qst_1 \frac{c_2^2}{(1-t_1)^2} + 2(c_1 + c_2)^2(c_1 + c_2 - 1), \\
a_{42} &= \frac{qst_1 c_2}{1-t_1}, \\
a_{32} &= -qst_1 \frac{c_2}{(1-t_1)}, a_{41} = -qst_1 \frac{c_1}{(1-t_1)}.
\end{aligned} \tag{III.2.4}$$

El polinomio característico asociado al sistema anterior esta dado por:

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(t)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1(t)}{\partial u_2(t)} & \frac{\partial u_1(t)}{\partial z_1} & \frac{\partial u_1(t)}{\partial z_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2(t)} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2(t)} & \frac{\partial z_1}{\partial u_2(t)} & \frac{\partial z_2}{\partial u_2(t)} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_3(t)} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3(t)} & \frac{\partial z_1}{\partial u_3(t)} & \frac{\partial z_2}{\partial u_3(t)} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_4(t)} & \frac{\partial x_2}{\partial u_4(t)} & \frac{\partial z_1}{\partial u_4(t)} & \frac{\partial z_2}{\partial u_4(t)} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{\partial z_1}{\partial z_1} & \frac{\partial z_2}{\partial z_2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| =$$

$$\left| \begin{pmatrix} k_1 a_{11} & k_1 a_{12} & k_1 a_{13} & 0 \\ k_2 a_{21} & k_2 a_{22} & 0 & k_2 a_{24} \\ h_1 a_{31} & h_1 a_{32} & h_1 a_{33} & 0 \\ h_2 a_{41} & h_2 a_{42} & 0 & h_2 a_{44} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| =$$

$$\left| \begin{pmatrix} k_1 a_{11} - \lambda & k_1 a_{12} & k_1 a_{13} & 0 \\ k_2 a_{21} & k_2 a_{22} - \lambda & 0 & k_2 a_{24} \\ h_1 a_{31} & h_1 a_{32} & h_1 a_{33} - \lambda & 0 \\ h_2 a_{41} & h_2 a_{42} & 0 & h_2 a_{44} - \lambda \end{pmatrix} \right| =$$

$$\lambda^4 + m_3\lambda^3 + m_2\lambda^2 + m_1\lambda + m_0 = 0 \quad (\text{III.2.5})$$

Donde:

$$m_3 = -k_1a_{11} - k_2a_{22} - h_1a_{33} - h_2a_{44}.$$

$$m_2 = k_1k_2a_{11}a_{22} + (k_1a_{11} + k_2a_{22})(h_1a_{33} + h_2a_{44}) \\ - h_1k_1a_{13}a_{31} - k_2h_2a_{24}a_{42} + h_1h_2a_{33}a_{44} - k_1k_2a_{12}a_{21}.$$

$$m_1 = k_1k_2a_{11}a_{22}(h_1a_{33} - h_2a_{44}) - k_2h_1h_2a_{33}a_{44}a_{22} \\ + h_1k_1a_{31}a_{13}(k_2a_{22} + h_2a_{44}) - k_1k_2h_2a_{24}a_{12}a_{41} + k_1k_2h_2a_{11}a_{24}a_{42} \\ + k_2h_1h_2a_{24}a_{33}a_{42} + k_1k_2a_{12}a_{21}(h_2a_{44} + h_1a_{33}) - k_1k_2h_1a_{13}a_{21}a_{32}.$$

$$m_0 = k_1k_2h_1h_2(a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\ + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}).$$

(III.2.6)

Utilizando el criterio de Routh-Hurwitz determinaremos si el estado estacionario del sistema dinámico (III.2.2) es asintóticamente estable.

Sea  $\lambda^4 + m_3\lambda^3 + m_2\lambda^2 + m_1\lambda + m_0 = 0$  el polinomio característico del sistema dinámico con evasión de impuestos descrito en (III.2.2).

$$\begin{array}{c|ccc} \lambda^4 & 1 & m_2 & m_0 \\ \lambda^3 & m_3 & m_1 & \\ \lambda^2 & \frac{m_3m_2 - m_1}{m_3} & m_0 & \\ \lambda^1 & \frac{D_1m_1 - m_0m_3}{D_1} & & \\ \lambda^0 & D_1 & & \\ & m_0 & & \end{array}$$

Una condición necesaria y suficiente para que la ecuación característica con parte real negativa está dada por el criterio de Routh-Hurwitz:

$$D_0 = m_3 > 0, D_1 = \frac{m_3m_2 - m_1}{m_3} > 0, D_2 = \frac{m_1D_1 - m_0m_3}{D_1} > 0, D_3 = m_0 > 0. \quad (\text{III.2.7})$$

Utilizando el criterio de Routh-Hurwitz nosotros obtenemos el siguiente teorema

**Proposición III.3.** *El estado estacionario del sistema (III.2.2) es asintóticamente estable si y sólo si se tiene la condición (III.2.7).*

Utilizando la proposición anterior podemos decir que la solución de nuestro modelo se puede interpretar de la siguiente manera: las dos empresas del duopolio comienzan declarando una cantidad de ganancia cercana al punto de equilibrio, pero después de un período de tiempo estas dos empresas terminarán declarando justamente la cantidad de ganancia que determina el punto de equilibrio.

### III.3 MODELO DINÁMICO DE DUOPOLIO DE COURNOT CON EVASIÓN DE IMPUESTOS Y TIEMPO DE RETARDO

En la presente sección nosotros analizaremos Modelo Dinámico de Duopolio de Cournot con evasión de impuestos y tiempo de retardo [21], [2]. Para  $\tau = 0$  se obtiene el modelo de la sección anterior [6]. Vamos a considerar el modelo de la sección anterior donde ahora nosotros introducimos un retraso en el tiempo  $\tau$ . Supondremos que la empresa líder es la primera en introducir al mercado el producto y la empresa seguidora introduce el producto después. La empresa seguidora conoce la cantidad de producción de la empresa líder,  $x_1(t - \tau)$  es la producción que entro al mercado al momento  $t - \tau$ ,  $\tau > 0$  y en base a este nivel de producción es que la empresa seguidora decide su nivel de producción. El sistema diferencial que describe éste modelo esta dado por:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= k_1[1 - qt_1 - qst_1(x_1(t)p(x_1(t) + x_2(t)) - z_1(t))] \\
 &\quad \cdot [p(x_1(t) + x_2(t)) + x_1(t)p'(x_1(t) + x_2(t))] - c_1. \\
 \dot{x}_2(t) &= k_2[1 - qt_1 - qst_1(x_2(t)p(x_1(t - \tau) + x_2(t)) - z_2(t))] \\
 &\quad \cdot [p(x_1(t - \tau) + x_2(t)) + x_2(t)p'(x_1(t - \tau) + x_2(t))] - c_2. \\
 \dot{z}_1(t) &= h_1[-(1 - q)t_1 + qst_1(x_1(t)p(x_1(t) + x_2(t)) - z_1(t))]. \\
 \dot{z}_2(t) &= h_2[-(1 - q)t_1 + qst_1(x_2(t)p(x_1(t) + x_2(t)) - z_2(t))].
 \end{aligned}
 \tag{III.3.1}$$

$$x_1(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-\tau, 0], x_2(0) = x_{20}, z_i(0) = z_{i0} \text{ y } h_i > 0, k_i > 0, i = 1, 2.$$

Para  $p(x) = \frac{1}{x}$  el estado estacionario del sistema (III.3.1) esta dado por el punto de equilibrio (III.1.10).

Con respecto a la transformación  $u_1(t) = \dot{x}_1(t) - x_1^*$ ,  $u_2(t) = \dot{x}_2(t) - x_2^*$ ,  $u_3(t) = \dot{z}_1(t) - z_1^*$ ,  $u_4(t) = \dot{z}_2(t) - z_2^*$ , donde  $u_{1\tau} = \dot{x}_1(t - \tau) - x_1^*$ ,  $u_{2\tau} = \dot{x}_2(t - \tau) - x_2^*$ ,  $u_{3\tau} = \dot{z}_1(t - \tau) - z_1^*$ ,  $u_{4\tau} = \dot{z}_2(t - \tau) - z_2^*$ , y realizaremos una expansión de (III.3.1) en series de Taylor alrededor del punto estacionario estable  $(x_1^*, x_2^*, z_1^*, z_2^*)$ , y calculando sólo los términos de primer orden en la serie, obtenemos la siguiente aproximación lineal del sistema (III.3.1).

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \\ \dot{u}_3(t) \\ \dot{u}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(t)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1(t)}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1(t)}{\partial z_1} & \frac{\partial u_1(t)}{\partial z_2} \\ \frac{\partial u_2(t)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2(t)}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2(t)}{\partial z_1} & \frac{\partial u_2(t)}{\partial z_2} \\ \frac{\partial u_3(t)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3(t)}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3(t)}{\partial z_1} & \frac{\partial u_3(t)}{\partial z_2} \\ \frac{\partial u_4(t)}{\partial x_1} & \frac{\partial u_4(t)}{\partial x_2} & \frac{\partial u_4(t)}{\partial z_1} & \frac{\partial u_4(t)}{\partial z_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1(t)}{\partial x_{1\tau}} & \frac{\partial u_1(t)}{\partial x_{2\tau}} & \frac{\partial u_1(t)}{\partial z_{1\tau}} & \frac{\partial u_1(t)}{\partial z_{2\tau}} \\ \frac{\partial u_2(t)}{\partial x_{1\tau}} & \frac{\partial u_2(t)}{\partial x_{2\tau}} & \frac{\partial u_2(t)}{\partial z_{1\tau}} & \frac{\partial u_2(t)}{\partial z_{2\tau}} \\ \frac{\partial u_3(t)}{\partial x_{1\tau}} & \frac{\partial u_3(t)}{\partial x_{2\tau}} & \frac{\partial u_3(t)}{\partial z_{1\tau}} & \frac{\partial u_3(t)}{\partial z_{2\tau}} \\ \frac{\partial u_4(t)}{\partial x_{1\tau}} & \frac{\partial u_4(t)}{\partial x_{2\tau}} & \frac{\partial u_4(t)}{\partial z_{1\tau}} & \frac{\partial u_4(t)}{\partial z_{2\tau}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1\tau}(t) \\ u_{2\tau}(t) \\ u_{3\tau}(t) \\ u_{4\tau}(t) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{12} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1\tau}(t) \\ u_{2\tau}(t) \\ u_{3\tau}(t) \\ u_{4\tau}(t) \end{pmatrix}$$

Por lo anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(t) &= k_1 a_{11} u_1(t) + a_{12} u_2(t) + a_{13} u_3(t), \\ \dot{u}_2(t) &= k_2 a_{21} u_1(t - \tau) + a_{22} u_2(t) + a_{24} u_4(t), \\ \dot{u}_3(t) &= h_1 a_{31} u_1(t) + a_{32} u_2(t) + a_{33} u_3(t), \\ \dot{u}_4(t) &= h_2 a_{41} u_1(t) + a_{42} u_2(t) + a_{44} u_4(t). \end{aligned}$$

(III.3.2)

Donde  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{24}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{41}, a_{42}$  y  $a_{44}$  son los dados por (III.2.4).

Ahora calcularemos el polinomio característico asociado al siguiente sistema:

$$\dot{u}(t) = Au(t) + Bu(t - \tau) \quad (\text{III.3.3})$$

Donde  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))^T$  y  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$ , con:

$$P(\lambda) = \left| \left[ \begin{pmatrix} k_1 a_{11} & k_1 a_{12} & k_1 a_{13} & 0 \\ 0 & k_2 a_{22} & 0 & k_2 a_{24} \\ h_1 a_{31} & h_1 a_{32} & h_1 a_{33} & 0 \\ h_2 a_{41} & h_2 a_{42} & 0 & h_2 a_{44} \end{pmatrix} + e^{-\lambda \tau} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_2 a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$\begin{vmatrix} k_1 a_{11} - \lambda & k_1 a_{12} & k_1 a_{13} & 0 \\ e^{-\lambda \tau} k_2 a_{21} & k_2 a_{22} - \lambda & 0 & k_2 a_{24} \\ h_1 a_{31} & h_1 a_{32} & h_1 a_{33} - \lambda & 0 \\ h_2 a_{41} & h_2 a_{42} & 0 & h_2 a_{44} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$e^{-\lambda \tau} k_2 a_{21} \begin{vmatrix} k_1 a_{12} & k_1 a_{13} & 0 \\ h_1 a_{32} & h_1 a_{33} - \lambda & 0 \\ h_2 a_{42} & 0 & h_2 a_{44} - \lambda \end{vmatrix} +$$

$$k_2 a_{22} - \lambda \begin{vmatrix} k_1 a_{11} - \lambda & k_1 a_{13} & 0 \\ h_1 a_{31} & h_1 a_{33} - \lambda & 0 \\ h_2 a_{41} & 0 & h_2 a_{44} - \lambda \end{vmatrix} +$$

$$k_2 a_{24} \begin{vmatrix} k_1 a_{11} - \lambda & k_1 a_{12} & k_1 a_{13} \\ h_1 a_{31} & h_1 a_{32} & h_1 a_{33} - \lambda \\ h_2 a_{41} & h_2 a_{42} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\lambda\tau}[-k_1k_2a_{12}a_{21}(h_1a_{33} - \lambda)(h_2a_{44} - \lambda) + k_1k_2h_1h_2a_{13}a_{32}a_{21}(h_2a_{44} - \lambda)] \\
&\quad + (\lambda - a_{11}k_1)(\lambda - a_{22}k_2)(\lambda - a_{33}h_1)(\lambda - a_{44}h_2) - a_{42}a_{24}k_2h_2(\lambda - a_{11}k_1)(\lambda - a_{33}h_1) \\
&\quad - a_{12}a_{24}a_{41}k_1k_2h_2(\lambda - a_{33}h_1) - a_{31}a_{13}k_1h_1(\lambda - a_{22}k_2)(\lambda - a_{44}h_2) \\
&\quad + a_{31}a_{13}a_{24}a_{42}k_1k_2h_1h_2 - a_{41}a_{32}a_{13}a_{24}k_1k_2h_1h_2 \\
&= e^{-\lambda\tau}[(-k_1k_2a_{12}a_{21})\lambda^2 + (k_1k_2a_{12}a_{21}(h_2a_{44} + h_1a_{33}) - k_1k_2h_1a_{13}a_{21}a_{32})\lambda \\
&\quad - k_1k_2h_1h_2(a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44})] + x^4 + (-k_1a_{11} - k_2a_{22} - h_1a_{33} \\
&\quad - h_2a_{44})\lambda^3 + (k_1k_2a_{11}a_{22} + (k_1a_{11} + k_2a_{22})(h_1a_{33} + h_2a_{44}) - h_1k_1a_{13}a_{31} \\
&\quad - k_2h_2a_{24}a_{42} + h_1h_2a_{33}a_{44})\lambda^2 + (k_1k_2a_{11}a_{22}(h_1a_{33} - h_2a_{44}) - k_2h_1h_2a_{33}a_{44}a_{22} \\
&\quad + h_1k_1a_{31}a_{13}(k_2a_{22} + h_2a_{44}) - k_1k_2h_2a_{24}a_{12}a_{41} + k_1k_2h_2a_{11}a_{24}a_{42} + k_2h_1h_2a_{24}a_{33}a_{42})\lambda^3 \\
&\quad + k_1k_2h_1h_2(a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\
&\quad - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}).
\end{aligned} \tag{III.3.4}$$

Se sigue entonces que el polinomio característico asociado al sistema anterior está dado por:

$$\lambda^4 + n_3\lambda^3 + n_2\lambda^2 + n_1\lambda + n_0 + e^{-\lambda\tau}(l_2\lambda^2 + l_1\lambda + l_0) = 0. \tag{III.3.5}$$

Donde:

$$m_3 = n_3, m_2 = n_2 + l_2, m_1 = n_1 + l_1, m_0 = n_0 + l_0. \tag{III.3.6}$$

Si  $\tau \neq 0$ . Considerando  $\tau$  como un parámetro,

Para que nuestro sistema tenga una bifurcación de Hopf, forzamos a que tenga una solución imaginaria pura, entonces hacemos  $\lambda = i\omega$ . Sustituyendo  $\lambda = i\omega$  en el polinomio característico, obtenemos.

$$\begin{aligned}
&\omega^4 - in_3\omega^3 - n_2\omega^2 + in_1\omega + n_0 + e^{-i\omega\tau}(-l_2\omega^2 + il_1\omega + l_0) \\
&= \omega^4 - in_3\omega^3 - n_2\omega^2 + in_1\omega + n_0 \\
&\quad + (\cos \omega\tau - i \operatorname{sen} \omega\tau)(-l_2\omega^2 + il_1\omega + l_0) \\
&= \omega^4 - in_3\omega^3 - n_2\omega^2 + in_1\omega + n_0 - l_2\omega^2 \cos \omega\tau \\
&\quad + il_1\omega \cos \omega\tau + l_0 \cos \omega\tau + l_2\omega^2 i \operatorname{sen} \omega\tau \\
&\quad + l_1\omega \operatorname{sen} \omega\tau - l_0 i \operatorname{sen} \omega\tau \\
&= \omega^4 - n_2\omega^2 + n_0 + (-l_2\omega^2 + l_0) \cos \omega\tau + l_1\omega \operatorname{sen} \omega\tau \\
&\quad + i(-n_3\omega^3 + n_1\omega + (l_2\omega^2 - l_0) \operatorname{sen} \omega\tau + l_1\omega \cos \omega\tau) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{III.3.7}$$

Como el número imaginario es cero, quiere decir que tanto su parte real como imaginaria es cero, por lo tanto se tiene el siguiente sistema.

$$\omega^4 - n_2\omega^2 + n_0 + (-l_2\omega^2 + l_0) \cos \omega\tau + l_1\omega \sin \omega\tau = 0.$$

$$-n_3\omega^3 + n_1\omega + (l_2\omega^2 - l_0) \sin \omega\tau + l_1\omega \cos \omega\tau = 0. \quad (\text{III.3.8})$$

Resolvemos el sistema de arriba para  $\cos \omega\tau$  y  $\sin \omega\tau$ , multiplicando la primera por  $-l_1\omega$  y la segunda por  $-l_2\omega^2 + l_0$

$$-l_1\omega(\omega^4 - n_2\omega^2 + n_0) - l_1\omega(-l_2\omega^2 + l_0) \cos \omega\tau - l_1^2\omega^2 \sin \omega\tau = 0$$

$$(-l_2\omega^2 + l_0)(-n_3\omega^3 + n_1\omega) + (-l_2\omega^2 + l_0)^2 \sin \omega\tau + (-l_2\omega^2 + l_0)l_1\omega \cos \omega\tau = 0.$$

Sumando lo anterior se tiene:

$$\begin{aligned} & -l_1\omega(\omega^4 - n_2\omega^2 + n_0) - l_1^2\omega^2 \sin \omega\tau + (-l_2\omega^2 + l_0)(-n_3\omega^3 + n_1\omega) \\ & + (-l_2\omega^2 + l_0)^2 \sin \omega\tau \\ & = l_1\omega(-\omega^4 + n_2\omega^2 - n_0) + (l_2\omega^2 - l_0)(n_3\omega^3 - n_1\omega) \\ & - ((-l_2\omega^2 + l_0)^2 + l_1^2\omega^2) \sin \omega\tau \\ & = ((-l_2\omega^2 + l_0)^2 + l_1^2\omega^2) \sin \omega\tau \\ & = l_1\omega(-\omega^4 + n_2\omega^2 - n_0) + (l_2\omega^2 - l_0)(n_3\omega^3 - n_1\omega). \end{aligned}$$

Despejando de la expresión anterior a  $\sin \omega\tau$  se tiene

$$\sin \omega\tau = \frac{l_1\omega(n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0)}{(-l_2\omega^2 + l_0)^2 + l_1^2\omega^2} + \frac{(n_3\omega^3 - n_1\omega)(l_2\omega^2 - l_0)}{(-l_2\omega^2 + l_0)^2 + l_1^2\omega^2}. \quad (\text{III.3.9})$$

Ahora multiplicando la segunda por  $-l_1\omega$  y la primera por  $-l_2\omega^2 + l_0$

$$(-l_2\omega^2 + l_0)(\omega^4 - n_2\omega^2 + n_0) + (-l_2\omega^2 + l_0)^2 \cos \omega\tau + (-l_2\omega^2 + l_0)l_1\omega \sin \omega\tau = 0$$

$$-l_1\omega(-n_3\omega^3 + n_1\omega) - l_1\omega(-l_2\omega^2 + l_0) \sin \omega\tau - l_1^2\omega^2 \cos \omega\tau = 0.$$

Sumando lo anterior se tiene:

$$\begin{aligned} & (-l_2\omega^2 + l_0)(\omega^4 - n_2\omega^2 + n_0) + (-l_2\omega^2 + l_0)^2 \cos \omega\tau \\ & - l_1\omega(-n_3\omega^3 + n_1\omega) - l_1^2\omega^2 \cos \omega\tau = 0 \\ & = (-l_2\omega^2 + l_0)(\omega^4 - n_2\omega^2 + n_0) + ((-l_2\omega^2 + l_0)^2 + l_1^2\omega^2) \cos \omega\tau \\ & - l_1\omega(-n_3\omega^3 + n_1\omega) = 0 \\ & = (-l_2\omega^2 + l_0)(\omega^4 - n_2\omega^2 + n_0) - l_1\omega(-n_3\omega^3 + n_1\omega) \\ & = ((-l_2\omega^2 + l_0)^2 + l_1^2\omega^2) \cos \omega\tau. \end{aligned}$$

Despejando de la expresión anterior a  $\cos \omega\tau$  se tiene

$$\cos \omega\tau = \frac{(n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0)(-l_2\omega^2 + l_0)}{(-l_2\omega^2 + l_0)^2 + l_1^2\omega^2} + \frac{l_1\omega(n_3\omega^3 - n_1\omega)}{(-l_2\omega^2 + l_0)^2 + l_1^2\omega^2}. \quad (\text{III.3.10})$$

Utilizando la siguiente identidad trigonométrica  $\sin \omega\tau^2 + \cos \omega\tau^2 = 1$ , y sustituyendo (III.3.9) y (III.3.10) se tiene.

$$\begin{aligned} \cos^2 \omega\tau + \sin^2 \omega\tau &= \frac{[(n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0)(-l_2\omega^2 + l_0) + l_1\omega(n_3\omega^3 - n_1\omega)]^2}{[(-l_2\omega^2 + l_0)^2 + l_1^2\omega^2]^2} \\ &\quad + \frac{[l_1\omega(n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0) + (n_3\omega^3 - n_1\omega)(l_2\omega^2 - l_0)]^2}{((-l_2\omega^2 + l_0)^2 + l_1^2\omega^2)^2} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (\text{III.3.11})$$

Acontinuación desarrollaremos la ecuación (III.3.11)

$$\begin{aligned} &[(n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0)(-l_2\omega^2 + l_0) + l_1\omega(n_3\omega^3 - n_1\omega)]^2 \\ &\quad + [l_1\omega(n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0) + (n_3\omega^3 - n_1\omega)(l_2\omega^2 - l_0)]^2 \\ &= (n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0)^2(-l_2\omega^2 + l_0)^2 \\ &\quad + 2[(n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0)(-l_2\omega^2 + l_0)l_1\omega(n_3\omega^3 - n_1\omega)] \\ &\quad + l_1^2\omega^2(n_3\omega^3 - n_1\omega)^2 + l_1^2\omega^2(n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0)^2 \\ &\quad + 2[l_1\omega(n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0)(n_3\omega^3 - n_1\omega)(l_2\omega^2 - l_0)] \\ &\quad + (n_3\omega^3 - n_1\omega)^2(l_2\omega^2 - l_0)^2 \\ &= (n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0)^2(-l_2\omega^2 + l_0)^2 \\ &\quad + 2[(n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0)(-l_2\omega^2 + l_0)l_1\omega(n_3\omega^3 - n_1\omega)] \\ &\quad + l_1^2\omega^2(n_3\omega^3 - n_1\omega)^2 + l_1^2\omega^2(n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0)^2 \\ &\quad - 2[l_1\omega(n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0)(n_3\omega^3 - n_1\omega)(-l_2\omega^2 + l_0)] \\ &\quad + (n_3\omega^3 - n_1\omega)^2(l_2\omega^2 - l_0)^2 \\ &= (n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0)^2(-l_2\omega^2 + l_0)^2 \\ &\quad + l_1^2\omega^2(n_3\omega^3 - n_1\omega)^2 + l_1^2\omega^2(n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0)^2 \\ &\quad + (n_3\omega^3 - n_1\omega)^2(l_2\omega^2 - l_0)^2 \\ &= (-l_2\omega^2 + l_0)^2[(n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0)^2 \\ &\quad + (n_3\omega^3 - n_1\omega)^2] + l_1^2\omega^2[(n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0)^2 + (n_3\omega^3 - n_1\omega)^2] \\ &= [(-l_2\omega^2 + l_0)^2 + l_1^2\omega^2][(n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0)^2 + (n_3\omega^3 - n_1\omega)^2] \end{aligned} \quad (\text{III.3.12})$$

De (III.3.11) sigue

$$\begin{aligned} [(-l_2\omega^2 + l_0)^2 + l_1^2\omega^2][(n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0)^2 + (n_3\omega^3 - n_1\omega)^2] &= [(-l_2\omega^2 + l_0)^2 + l_1^2\omega^2]^2 \\ (n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0)^2 + (n_3\omega^3 - n_1\omega)^2 &= (-l_2\omega^2 + l_0)^2 + l_1^2\omega^2 \end{aligned} \quad (\text{III.3.13})$$

Luego pasamos todos los términos de un solo lado de la igualdad

$$(n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0)^2 + (n_3\omega^3 - n_1\omega)^2 - (-l_2\omega^2 + l_0)^2 + l_1^2\omega^2 = 0.$$

Quedando finalmente.

$$\omega^8 + (n_3^2 - 2n_2)\omega^6 + (n_2^2 + 2n_0 - 2n_3n_1 - l_2^2)\omega^4 + (n_1^2 - 2n_2n_0 + 2l_2l_0 - l_1^2)\omega^2 + n_0^2 - l_0^2 = 0.$$

$$\omega^8 + r_6\omega^6 + r_4\omega^4 + r_2\omega^2 + r_0 = 0. \quad (\text{III.3.14})$$

Donde

$$\begin{aligned} r_6 &= n_3^2 - 2n_2, r_4 = n_2^2 + 2n_0 - 2n_3n_1 - l_2^2 \\ r_2 &= n_1^2 - 2n_2n_0 + 2l_2l_0 - l_1^2, r_0 = n_0^2 - l_0^2. \end{aligned} \quad (\text{III.3.15})$$

Si  $\omega_0$  es una raíz positiva de (III.3.14), entonces hay una bifurcación de Hopf y el valor de  $\tau_0$  está dada por:

$$\tau_0 = \frac{1}{\omega_0} \arctan \frac{l_1\omega(n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0) + (n_3\omega^3 - n_1\omega)(l_2\omega^2 - l_0)}{(n_2\omega^2 - \omega^4 - n_0)(-l_2\omega^2 + l_0) + l_1\omega(n_3\omega^3 - n_1\omega)} \quad (\text{III.3.16})$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= \omega_0^4 - n_2\omega_0^2 + n_0, \\ a_2 &= -n_3\omega_0^3 + n_1\omega_0, \\ a_3 &= l_2\omega_0^2 - l_0, \\ a_4 &= l_1\omega_0. \end{aligned} \quad (\text{III.3.17})$$

Podemos concluir con el siguiente teorema.

### **Teorema III.2.**

(i) Si  $\omega_0$  es una raíz positiva de (III.3.14) y  $\text{Re}(\frac{d\lambda}{d\tau})\lambda = i\omega_0, \tau = \tau_0$ , dónde  $\tau_0$  esta dado por (III.3.16), entonces se produce una bifurcación de Hopf en el estado estacionario  $(x_1^*, x_1^*, z_1^*, z_2^*)$ , cuando  $\tau$  pasa a través de  $\tau_0$ .

(ii) Por el criterio Routh-Hurwitz sobre los coeficientes de (III.3.5) y  $n_0 > 0$ , se obtienen condiciones para que un estado estacionario sea asintóticamente estable para cualquier retardo  $\tau > 0$ .

Utilizando este teorema podemos dar condiciones para que un modelo de duopolio de Cournot con evasión de impuestos y tiempo de retardo presente una bifurcación de Hopf en un tiempo  $t_0$ . Para este caso, aparecerá una solución periódica. Una solución periódica en nuestro modelo se puede interpretar de la siguiente manera: las dos empresas del duopolio comienzan declarando cierta cantidad de ganancias y después de un período de tiempo volverán a declarar esta misma cantidad de ganancias.

---

---

# CAPÍTULO IV

---

## CONCLUSIONES

En esta tesis analizamos tres variaciones al modelo de duopolio de Cournot con evasión de impuestos: un modelo dinámico, uno estático y uno con tiempo de retardo.

En el modelo estático se concluye que el tamaño de la multa puede considerarse como el mayor disuasorio para la evasión de impuestos, pues logramos mostrar que cuando la multa es lo suficientemente elevada las empresas tienden a ser más honestas en la declaración de impuestos. Por otro lado, si la probabilidad de evitar ser descubierto evadiendo impuestos es alta, entonces tienden a no declarar honestamente y por lo tanto aumentan los beneficios de las empresas. En resumen, el análisis efectuado en esta tesis nos permite el estudiar la relación que guardan las ganancias declaradas por las empresas con la multa que aplica un gobierno por evasión fiscal y con la probabilidad de que las empresa sean descubiertas evadiendo impuestos. El teorema III.1 nos dice de manera general como se comporta la función de penalidad con respecto al impuesto y la probabilidad de ser descubierto y los ejemplos desarrollados en la tesis corroboran este resultado.

Utilizando la proposición III.3 y el criterio de Routh-Hurwitz podemos dar condiciones para que un modelo dinámico de duopolio de Cournot con evasión de impuestos tenga un punto de equilibrio que sea asintóticamente estable. La solución en nuestro modelo se puede interpretar de la siguiente manera: las dos empresas del duopolio comienzan declarando una cantidad de ganancia cercana al punto de equilibrio, pero después de un período de tiempo estas dos empresas terminarán declarando justamente la cantidad de ganancia que determina el punto de equilibrio.

Para el modelo dinámico con evasión de impuestos y tiempo de retardo, usando a  $\tau$  como parámetro nosotros encontramos una bifurcación de Hopf cuando  $\tau$  pasa a través de  $\tau_0$  puede interpretar de la siguiente manera: las dos empresas del duopolio comienzan declarando una determinada cantidad de ganancia, pero después de un período de tiempo estas dos empresas terminarán declarando esta misma cantidad de ganancias.

Finalmente un resultado importante que se logra concluir con este trabajo es que se requiere de una multa lo suficientemente elevada, para que las empresas declaren correctamente sus ganancias, pues nuestros cálculos muestran que el tamaño de la multa es un factor clave para disuadir la evasión de impuestos.

---

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. J. ANAGNOST, C. A. DESOER, *An elementary proof of the Routh-Hurwitz stability criterion*, Circuits, systems, and signal processing, 10(1), 101-114 (1991).
- [2] T. M. APOSTOL, *Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades*, editorial Reverté, 2da Edición, (2001).
- [3] E. ÁVILA, A. ESTRELLA, G. GARCÍA, *Estabilidad local de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo y aplicaciones*, Miscelánea Matemática, 73-92, 51(2010).
- [4] C. Bardán Esquivel, Coordinador Ejecutivo. *Modelos de recaudación Fiscal*, Instituto de Investigaciones Legislativas del Senado de la República, (2003). Disponible en <http://www.senado.gob.mx/iilsen/content/lineas/docs/varios/Recaudacion.Fiscal.pdf>
- [5] I. BONILLA LÓPEZ, *Sistema tributario Mexicano (1990)-(2001)* (La reforma hacendaria de la presente administración). Tesis de licenciatura. Facultad de Economía de la UNAM, (2002), en Internet: <http://www.economia.unam.mx/secss/docs/tesisfe/BonillaLI/cap3.pdf>
- [6] C. CHIARELLA, F. SZIDAROVSKY, *On the asymptotic behavior of dynamic rent-seeking games*, electronic Journal: Southwest Journal of Pure and Applied Mathematics. FinanzArchiv, (2005).
- [7] R. C. DORE, *Modern Control Systems*, 3rd end, Addison-Wesley, Reading, MA, (1995).
- [8] J. FERNANDEZ DE CASTRO, J. TUGORES QUES, *Microeconomía*, Mc Graw Hill, (2000).
- [9] C. GEBAUER, W. ÑAM, R. PARSCHE VAT, *evasion and its consequence for macroeconomic clearing in the EU*, Fondo de Cultura Económica, (1995).
- [10] L. GOERKE, M. RUNKEL, *Indirect Tax Evasion and Globalization*, FinanzArchiv, (2006).
- [11] R. H. GORDON, S. B. ÑIELSEN, *Tax evasion in an open economy: value-added vs. income taxation*, Journal of Public Economics, 66, 173-197, (1997).

- [12] J. K. HALE, H. KOCAK, *Dynamics and Bifurcations*, Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg, (1991).
- [13] J. K. HALE, S. M. VERDUYN LUNEL, *Introduction to functional differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, (1993).
- [14] M. W. HIRSCH, S. SMALE, R. L. DEVANEY, *Differential Equations, Dynamical Systems An Introduction to Chaos*, Elsevier Academic Press, Amsterdam Boston, (2004).
- [15] A. HURWITZ, *Math. Ann.*, 46, 273-284, (1895). También en *Selected Papers on Mathematical Trends in Control Theory*, Dover, New York, 70-80.
- [16] S. INVERNIZZI, A. MEDIO, *On lags and chaos in economic dynamic models*, *Journal of Mathematical Economics*, 20, 521-550, (1991).
- [17] P. E. KLOEDEN, E. PLATEN, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, (1995).
- [18] A. MATSUMOTO, F. SZIDAROVSKY, *Delayed dynamics in heterogeneous competition with product differentiation*, *Real World Applications*, 11, 601-611, (2010).
- [19] K. MATTHEWS, J. LLOYD-WILLIAMS, *The VATevading firm and VATevasion: an empirical analysis*, *International Journal of the Economics of Business*, 8, 39-49, (2001).
- [20] G. MIRCEA, M. ÑEAMTU, A. L. CIURDARIU AND D. OPRIS, *Numerical simulations for dynamic stochastic and hybrid models of internet networks*, *WSEAS Transactions on Mathematics*, 12(8), 679-688, (2009).
- [21] G. MIRCEA, M. ÑEAMTU AND D. OPRIS, *The Study of some Discrete IS-LM Models with Tax Revenues and Time Delay*, *WSEAS Transactions on Mathematics*, 2(8), 51-62, (2009).
- [22] M. ÑEAMTU, *Deterministic and stochastic Cournot duopoly games with tax evasion*. West University of Timisoara. Department of Economic Informatics and Statistics, 8, 618-627, (2010).
- [23] M. ÑEAMTU, D. OPRIS, *Economic Games. Discrete economic dynamics. Applications* (in Romanian), Mirton Pringting House, Timisoara, (2008).
- [24] M. ÑEAMTU, D. OPRIS AND C. CHILARESCU, *Hopf bifurcation in a dynamic IS-LM model with time delay*, *Chaos, Solitons and Fractals*, 34(2), 519-530, (2007).
- [25] M. J. OSBOURNE, *An Introduction to Game Theory*, Oxford University, (2003).
- [26] M. REYES TÉPACH *Problemas estructurales del sistema tributario en México*, en Internet: <http://www.cddhcu.gob.mx/bibliot/publica/inveyana/econycom/reportes/refribu/2problem.htm>.
- [27] E. J. ROUTH *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion*, London Macmillan, (1877).

- [28] ROY GARDNER, *Games for Business and Economics Segunda Edición*, Wiley and Sons, (2003).
- [29] P. SERRANO, J. TORO *¿Es eficiente el sistema tributario chileno*, Cuadernos de Economía, 94, 423–448, (1994).
- [30] L. XU, F. SZIDAROVSKY, *The Stability of Dynamic Rent-Seeking Games*, International Game Theory Reviews, 1, 87-102, (1999).