



Universidad Autónoma del Estado de
Hidalgo

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Maestría en Matemáticas

Tipo de homotopía de complejos
simpliciales de completas de una
gráfica

T E S I S

que para obtener el título de:

Maestro en Matemáticas

presenta

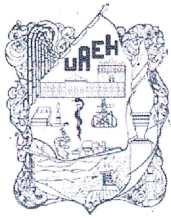
Lic. Mauricio Islas Gómez

bajo la dirección de

Dr. Rafael Villarroel Flores

Mineral de la Reforma, Hidalgo.

Noviembre 2023



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

School of Engineering and Basic Sciences

Área Académica de Matemáticas y Física

Department of Physics and Mathematics

Mineral de la Reforma, Hgo., a 4 de julio de 2023

Número de control: ICBI-AAMyF/2188/2023

Asunto: Autorización de impresión de tesis.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

El Comité Tutorial de la tesis titulada “**Tipo de homotopía de complejos simpliciales de completas de una gráfica**”, realizada por el sustentante **Mauricio Islas Gómez**, con número de cuenta **294777**, perteneciente a la **Maestría en Matemáticas**, una vez que ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el Artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente:

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

Atentamente
“Amor, Orden y Progreso”

El Comité Tutorial

Dr. Rafael Villarroel Flores
Director

Dr. Jorge Viveros Rogel
Miembro del comité

Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz
Miembro del comité

Dr. Federico Menéndez Conde Lara
Miembro del comité



Ciudad del Conocimiento
Carretera Pachuca-Tulancingo km 4.5 Colonia
Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo,
México. C.P. 42184
Teléfono: +52 (771) 71 720 00 ext. 2531
aamyf_icbi@uaeh.edu.mx



www.uaeh.edu.mx

Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo a toda mi familia, principalmente a mis hermanos y mis padres, quienes siempre han creído en mí y me han alentado a cumplir todas mis metas, su amor y respaldo incondicional han sido el motor que me ha impulsado a llegar hasta aquí.

Por su puesto, agradezco a mis compañeros, por la amistad, el apoyo y la colaboración que compartimos a lo largo de estos años.

A mis queridos profesores, quiero agradecerles por su dedicación y orientación a lo largo de esta travesía. Sus conocimientos, paciencia y sabias palabras fueron una fuente inagotable de inspiración y aprendizaje. A mis sinodales, por las observaciones realizadas para la mejora de esta tesis. Principalmente a mi asesor, el doctor Rafael Villarroel, estoy profundamente agradecido por su compromiso y por compartir su experiencia y conocimiento conmigo, además de estar siempre pendiente durante el desarrollo de este trabajo.

Finalmente, quiero agradecer al CONACYT, por el apoyo económico brindado para poder llevar a cabo mis estudios de maestría.

M. I. G.

“La esencia de las matemáticas no es complicar las cosas simples, sino simplificar las cosas complicadas.”
- Stan Gudder

Índice general

Introducción	1
1. Gráficas	3
1.1. Conceptos de teoría de gráficas	3
1.2. Isomorfismos en gráficas	8
1.3. Gráficas de clanes y gráficas clan-Helly	9
1.4. Octaedros	12
2. Complejos simpliciales y homotopía	15
2.1. Complejos simpliciales	15
2.2. Homotopía en gráficas	19
3. Invariancia homotópica en gráficas	25
3.1. Resultados sobre homotopía	25
3.2. Invariancia homotópica en gráficas clan-Helly	28
4. Gráficas de grado bajo	35
4.1. Preliminares del capítulo	36
4.2. Tipo de homotopía de gráficas de grado bajo	41
4.3. Una gráfica de grado bajo es homotópicamente invariante	41
4.4. La gráfica de clanes de una gráfica de grado bajo es homotópicamente invariante	42
5. Gráficas de grado máximo cinco	47
5.1. Resultados preliminares	47
5.2. Complejos CW	59
5.3. Tipo de homotopía	64
Conclusión	71
A. Prueba del teorema 4.1.2	73
A.1. Demostración del teorema 4.1.2	73
Bibliografía	84

Introducción

En este trabajo de tesis, comenzamos estudiando algunos de los conceptos de teoría de gráficas, y de cómo asociarle un espacio topológico a cada gráfica. Específicamente abordamos solo las denominadas gráficas simples y le asociamos un espacio topológico a través del complejo simplicial de completas de dicha gráfica. Es de esta forma que asociamos conceptos topológicos a objetos combinatorios. El problema que más nos interesa es de el de averiguar el tipo de homotopía que tienen las gráficas simples de grado máximo acotado. Es decir, quisiéramos saber si el espacio topológico asociado a una gráfica es homotópico a un espacio topológico conocido (una cuña de esferas, un toro, una cuña de circunferencias, el plano proyectivo, etcétera).

También estamos interesados en otras cuestiones como el comportamiento de una gráfica y el tipo de homotopía bajo un cierto operador que conocemos como el operador de clanes. Si G es una gráfica denotamos a su gráfica de clanes como $K(G)$, donde $K(G)$ es la gráfica de intersección de las subgráficas completas maximales de G . Luego, K es conocido como el operador de clanes, y podemos iterarlo, para $n \geq 1$ definimos de manera recursiva $K^n(G) = K(K^{n-1}(G))$, donde $K^0(G) = G$. Por ejemplo, un problema de interés es averiguar si una gráfica G es *K-homotópicamente permanente*, es decir, si G es homotópica a $K^m(G)$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Otro ejemplo de un problema de interés es el de determinar si una gráfica G es *K-convergente*, es decir, si existen $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$, tal que $K^m(G) \cong K^n(G)$, en otras palabras, si la órbita de G bajo K contiene un número finito de gráficas salvo isomorfismo.

En el capítulo 1, se presentan los principales conceptos y definiciones de teoría de gráficas que se van a usar para el desarrollo de este trabajo. Así como también se presenta la definición de que una gráfica tenga la propiedad de ser clan-Helly.

Luego, en el capítulo 2 se explica la forma de asociarle un espacio topológico a un complejo simplicial y como es que se le asocia un espacio topológico a una gráfica a través del complejo simplicial de completas. También se presenta la relación de homotopía entre dos gráficas.

Una vez estudiado el concepto de homotopía en gráficas, en el capítulo 3 se presentan unos resultados sobre la homotopía entre gráficas, así como invariancia homotópica en gráficas que tienen la propiedad de ser clan-Helly.

Uno de los resultados principales de la tesis se encuentra en el capítulo 4. En [19] se mostró que una gráfica G conexa de grado máximo menor o igual a cuatro (es decir, cada vértice en la gráfica tiene a lo más cuatro vecinos) es convergente, y se realizó mostrando que $K^2(G)$ tiene la propiedad de ser clan-Helly, lo cual implica que $K^2(G)$

es convergente y por lo tanto G también. Luego, nosotros logramos demostrar que G , $K(G)$ y $K^2(G)$ son homotópicas, lo cual junto con el resultado probado en [19] se muestra que G es K -homotópicamente permanente. Y más aún, se logró demostrar que G tiene el tipo de homotopía una cuña de circunferencias, con una única excepción, que es el octaedro.

De esta forma nos preguntamos entonces que pasaba con las gráficas conexas de grado máximo menor o igual a cinco. Y finalmente en el capítulo 5 demostramos que G tiene el tipo de homotopía de una cuña de esferas S^2 y circunferencia S^1 . Esto último se mostró haciendo uso de resultados de complejos CW.

Capítulo 1

Gráficas

1.1. Conceptos de teoría de gráficas

En este capítulo vamos a introducir los conceptos principales de teoría de gráficas que usaremos.

Definición 1.1.1 Una gráfica G consiste de un **conjunto de vértices** que denotamos con $V(G)$ y un **conjunto de aristas** que denotamos por $E(G)$. Donde los elementos de $E(G)$ son subconjuntos de dos elementos de $V(G)$, es decir, son de la forma $\{x, y\}$ con $x, y \in V(G)$ y $x \neq y$.

Notemos que en la definición 1.1.1 no se está pidiendo mas que $V(G)$ sea un conjunto, es decir, $V(G)$ podría ser finito o infinito. Sin embargo, en la tesis, trabajaremos solo con **gráficas finitas**, es decir, nuestras gráficas tienen conjunto de vértices finito y por tanto conjunto de aristas finito. Además son de las llamadas gráficas simples, es decir, no se permiten aristas múltiples ni lazos.

Definición 1.1.2 Cuando dos vértices x, y en una gráfica G forman arista, es decir, $\{x, y\} \in E(G)$ decimos que son **vecinos** o **adyacentes** y escribimos $x \sim y$. Y en lugar de denotar la arista con $\{x, y\}$ la denotamos simplemente por xy .

Nota 1.1.3 De forma similar, para denotar que un vértice x pertenece a una gráfica G , estrictamente hablando deberíamos escribir $x \in V(G)$, pero para simplificar la notación escribiremos $x \in G$, en el entendido de que eso significa que x es un vértice de G .

Es usual asociar un dibujo a una gráfica, donde los vértices de la gráfica los asociamos con puntos y las aristas con líneas que unen dichos puntos.

Ejemplo 1.1.4 Consideremos la gráfica G tal que

$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}, \quad E(G) = \{ab, ac, bc, be, bd, cd, cf, de, df, ef\},$$

a la cual le asociaríamos un dibujo como el de la figura 1.1.

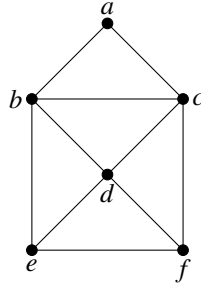


Figura 1.1: Dibujo de una gráfica.

Cuando una gráfica es tal que cada par de vértices distintos en ella son adyacentes, entonces decimos que es una gráfica **completa**. De esta forma, una gráfica con n vértices que es completa la denotamos por K_n (ver figura 1.2 donde aparecen dibujos de K_1 , K_2 , K_3 y K_4).

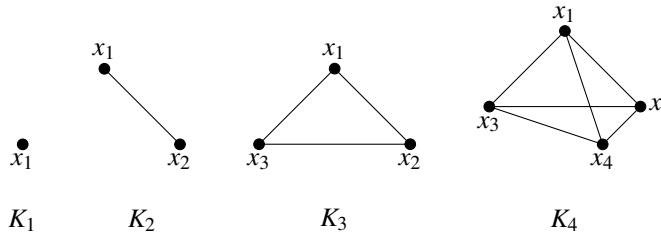


Figura 1.2: Dibujos de gráficas completas K_1 , K_2 , K_3 y K_4 .

En matemáticas cuando se define una estructura es usual definir una subestructura a partir de la original, aquí no es la excepción.

Definición 1.1.5 Sea G una gráfica, se dice que H es una **subgráfica** de G y denotamos $H \leq G$ si H es una gráfica tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$.

Definición 1.1.6 Una subgráfica H de una gráfica G se dice que es una **subgráfica inducida** si dados cualesquier par de vértices $x, y \in H$ se cumple que $x \sim y$ en H si y solo si $x \sim y$ en G . Por ejemplo, en la figura 1.3 tenemos que H sí es una subgráfica inducida de G , pero F no lo es.

En muchas ocasiones identificaremos subconjuntos de vértices de una gráfica como subgráficas inducidas. Es decir, si $H \subseteq V(G)$ donde G es una gráfica, la subgráfica inducida por el conjunto H es la gráfica cuyos conjunto de vértices es H y cuyas aristas son tales que $x, y \in H$ son adyacentes si son adyacentes en G .

Definición 1.1.7 Un camino de longitud r entre dos vértices x y y de una gráfica G , es una sucesión de $r + 1$ vértices distintos en G , digamos $x = v_0, v_1, \dots, v_r = y$ tal que

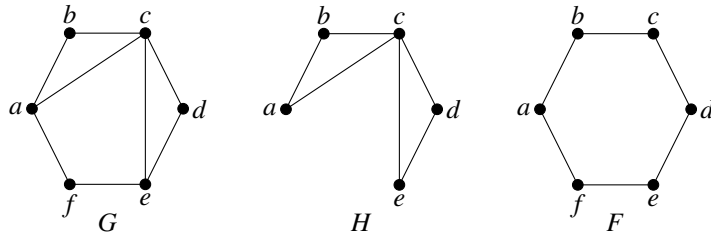


Figura 1.3: Subgráfica inducida.

$v_i \sim v_{i+1}$ para todo $i = 0, 1, \dots, r-1$. Además, si para cualesquier par de vértices en una gráfica G existe un camino, entonces decimos que G es **conexa**, en caso contrario diremos que es **disconexa**. Y una subgráfica H inducida que es conexa y que tiene la propiedad de que para todo $v \in V(G) \setminus V(H)$ la gráfica inducida por $V(H) \cup \{v\}$ no es conexa, entonces decimos que H es una **componente conexa**.

Dicho de otra forma, podemos notar que la relación de tener un camino entre dos vértices es una relación de equivalencia y cada clase de equivalencia induce una componente conexa.

Ilustraremos esta última definición con un ejemplo. Consideremos la gráfica de la figura 1.4, la cual no es conexa y de hecho, tiene dos componentes conexas, una dada por el conjunto de vértices $\{a, b, d, i\}$ y la otra por $\{c, e, f, h\}$.

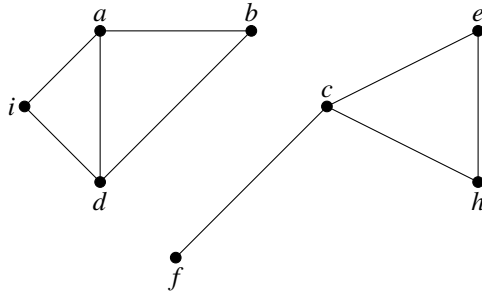
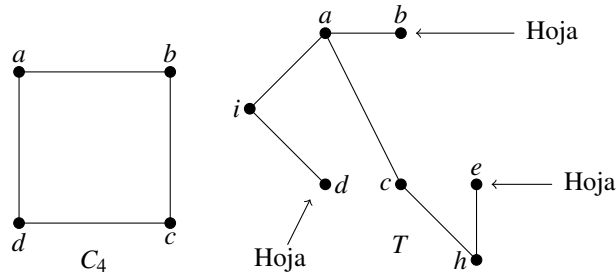


Figura 1.4: Gráfica desconexa

Definición 1.1.8 Un **ciclo** es una gráfica conexa donde cada uno de sus vértices tiene exactamente dos vecinos, un ciclo de n vértices lo denotamos por C_n . Una gráfica conexa es un **árbol**, si no contiene ciclos, es decir si ninguna subgráfica de ella es un ciclo.

Como ejemplo, en la figura 1.5 a la izquierda tenemos el ciclo C_4 y a la derecha tenemos un árbol T .

Lema 1.1.9 Si G es una gráfica donde cada uno de sus vértices tiene al menos dos vecinos, entonces contiene al menos un ciclo.

Figura 1.5: Ciclo C_4 y un árbol.**Demostración.**

Sin pérdida de generalidad supongamos que G es conexa (pues en caso de no serlo podemos aplicar el argumento a cada una de sus componentes conexas). Supongamos también que G tiene n vértices. Sea $x_1 \in V(G)$, como cada vértice tiene al menos dos vecinos, entonces existen $x_0, x_2 \in V(G)$ tal que x_0, x_1, x_2 son distintos entre sí y $x_0 \sim x_1 \sim x_2$. Como x_2 tiene al menos dos vecinos, podría suceder $x_0 \sim x_2$ entonces x_0, x_1, x_2 formarían un ciclo, pero si no, debe existir $x_3 \notin \{x_0, x_1, x_2\}$ tal que $x_2 \sim x_3$. De nuevo, como x_3 tiene al menos dos vecinos, entonces podría ser vecino de x_0 o x_1 , en cualquier caso se formaría un ciclo, pero si no, entonces debe existir x_4 distinto de todos los vértices anteriores tal que $x_3 \sim x_4$. Y de nuevo podemos repetir el argumento de forma inductiva. Y como la gráfica tiene un número finito de vértices este proceso debe terminar en algún momento. En el “peor de los casos” tendríamos un camino de n vértices $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$, que ya serían todos los vértices de la gráfica porque se supuso que G tiene n vértices, entonces x_{n-1} debe tener otro vecino a parte de x_{n-2} , y de esta forma se tendría un ciclo y se concluye el resultado. ■

Corolario 1.1.10 Si G es una gráfica 2-regular, es decir, que cada uno de sus vértices tiene exactamente dos vecinos, entonces G es unión disjunta de ciclos.

Demostración.

Vamos a mostrar que todas las componentes conexas de G son ciclos, lo cual quiere decir que G es unión disjunta de ciclos. Sea C una componente conexa de G , por el lema 1.1.9 se sigue que esa componente conexa tiene al menos un ciclo, si C tuviese un vértice más diferente de los del ciclo que contiene, entonces existiría una camino entre dicho vértice y un vértice del ciclo, pero ello implicaría que algún vértice del ciclo tiene al menos tres vecinos contradiciendo que G es 2-regular. Por lo tanto, C es un ciclo, por lo que todas las componentes conexas de G son ciclos. ■

Definición 1.1.11 Sea T un árbol, decimos que $x \in V(T)$ es una hoja si solamente tiene un vecino. Por ejemplo, en el árbol de la figura 1.5 los vértices b, d y e son hojas.

Definición 1.1.12 Una gráfica B es bipartita si existen $V_1, V_2 \subseteq V(G)$ no vacíos, tales que $V_1 \cup V_2 = V(G)$ y cualquier arista $xy \in E(G)$ cumple que $x \in V_1$ y $y \in V_2$ o bien que $y \in V_1$ y $x \in V_2$. En tal caso se suele denotar $B = (V_1, V_2)$.

Definición 1.1.13 La *vecindad abierta* de un vértice x en una gráfica G se denota y define como $N(x) = \{y \in V(G) \mid x \sim y\}$, es decir, el conjunto de todos los vértices que son vecinos de x . Y la *vecindad cerrada* de x , se denota y define como el conjunto $N[x] = N(x) \cup \{x\}$.

Como ejemplo de estas dos últimas definiciones consideremos la gráfica de la figura 1.6, esta es una gráfica bipartita considerando $V_1 = \{a, b, c, d\}$ y $V_2 = \{e, h, i\}$. En esa misma gráfica veamos que $N(b) = \{e, h\}$ y $N[b] = \{b, e, h\}$.

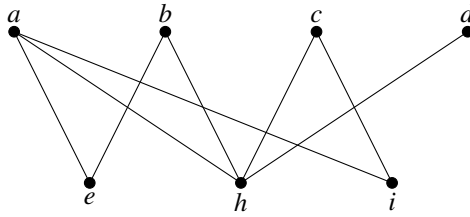


Figura 1.6: Gráfica bipartita.

Definición 1.1.14 Se dice que una gráfica G es un *cono* si existe $a \in V(G)$ tal que todo vértice en G distinto de a es vecino de a . Al vértice a lo llamaremos *ápice* del cono.

Por ejemplo, la gráfica de la figura 1.7 es un cono con ápice a .

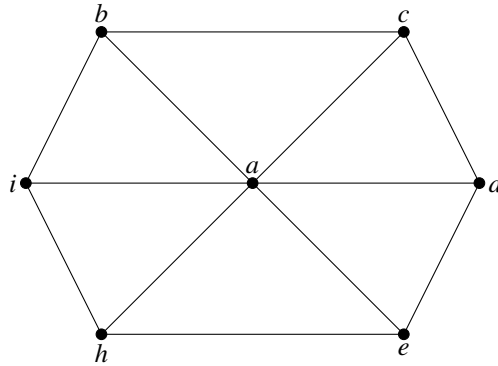


Figura 1.7: Cono con ápice a .

Definición 1.1.15 Sea G una gráfica y $x \in V(G)$. Se dice que x es un *vértice dominado* de G si $N(x)$ induce un cono en G . Si y es un ápice de dicho cono, decimos que y domina a x .

Por ejemplo, en la gráfica de la figura 1.7, el vértice b es dominado, ya que a lo domina, pues la gráfica que induce $N(b) = \{a, c, i\}$ es un cono con ápice a . Pero, por ejemplo, a no es un vértice dominado, pues su vecindad $N(a) = \{b, c, d, e, h, i\}$, induce un ciclo de seis vértices, y este no es un cono.

Definición 1.1.16 Sea G una gráfica y $X \subseteq V(G)$, denotamos por $G[X]$ a la subgráfica inducida por X .

Definición 1.1.17 Se dice que una gráfica G es **desmantelable** si sus vértices pueden ser ordenados $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, de tal forma que x_i es dominado por un vértice en $G[\{x_i, \dots, x_n\}]$ para todo $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Proposición 1.1.18 Todo árbol es desmantelable.

Demostración.

Supongamos que T es un árbol con n vértices. Todo árbol debe tener al menos una hoja, pues por el lema 1.1.9 si todos los vértices de T tuvieran al menos dos vecinos, entonces T tendría un ciclo, lo cual no puede ser, entonces necesariamente debe haber una hoja en T , porque además T es conexa. Sea entonces $x_1 \in V(T)$ una hoja de T , este es un vértice dominado por su único vecino, digamos $y \in V(T)$, puesto que $\{y\} = N(x_1) \subseteq N[y]$. Luego, es directo ver que $T[V(T) - \{x_1\}]$ es un árbol. Con el mismo procedimiento podemos encontrar una hoja x_2 del árbol $T[V(T) - \{x_1\}]$ tal que x_2 es dominado en $T[V(T) - \{x_1\}]$ y $T[V(T) - \{x_1, x_2\}]$ es un árbol. Inductivamente podemos hacer este procedimiento $n - 1$ veces hasta obtener la gráfica con un solo punto. Por lo tanto, T es desmantelable. ■

1.2. Isomorfismos en gráficas

En esta pequeña sección daremos un concepto importante, ya que se presenta en que términos vamos a considerar dos gráficas como iguales.

Definición 1.2.1 Sean G y H dos gráficas. Un **morfismo** de G a H es una función $f: V(G) \rightarrow V(H)$ tal que si $x, y \in V(G)$ son tales que $x \sim y$, entonces $f(x) \sim f(y)$ o $f(x) = f(y)$.

Definición 1.2.2 Sean G y H dos gráficas. Un **isomorfismo** de G a H , es un morfismo $f: V(G) \rightarrow V(H)$ tal que f es biyectiva. Si existe un isomorfismo entre G y H , decimos que son isomorfas y lo denotamos por $G \cong H$. Para este trabajo, dos gráficas isomorfas se suelen considerar como iguales.

Observemos que si $f: G \rightarrow H$ es un isomorfismo de G a H , al ser biyectivo tiene inversa $g = f^{-1}$ y que g es un isomorfismo de H a G .

A continuación se enunciarán algunas propiedades que se preservan bajo isomorfismos. Sea $f: G \rightarrow H$ un isomorfismo de gráficas, entonces:

- $|V(G)| = |V(H)|$.
- $|E(G)| = |E(H)|$.
- Si $x \in V(G)$, entonces $|N(x)| = |N(f(x))|$.
- Si G es conexa, entonces H es conexa.

Ahora, veamos un ejemplo de dos gráficas isomorfas. En la figura 1.8 tenemos dos gráficas H y G , que quizás en principio no se note que son isomorfas, pero resulta que sí lo son, por ejemplo, considerando el morfismo $F: H \rightarrow G$ dada por

$$\begin{aligned} F(c) &= x' \\ F(e) &= x \\ F(b) &= y' \\ F(d) &= y \\ F(f) &= z' \\ F(a) &= z. \end{aligned}$$

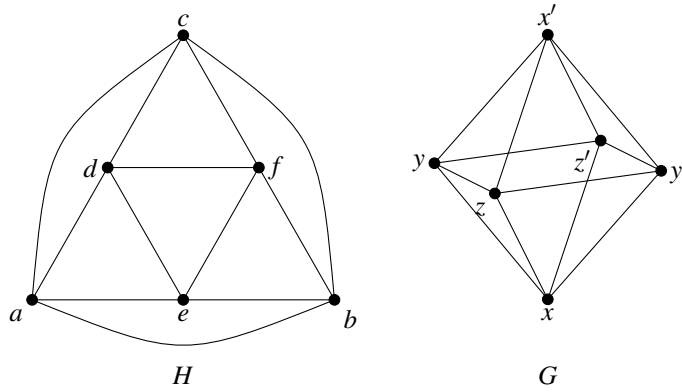


Figura 1.8: Gráficas isomorfas.

1.3. Gráficas de clanes y gráficas clan-Helly

Siguiendo [6], en esta sección se dará el concepto de clan.

Definición 1.3.1 Sea G una gráfica, decimos que c es una **completa** de G si $c \subseteq V(G)$ y c induce una subgráfica completa de G . Además decimos que q es un **clan** de G si es una completa maximal de G , es decir, no existe otro vértice $x \in V(G) \setminus q$ tal que x es vecino de todos los vértices en q .

Definición 1.3.2 Sea G una gráfica, la gráfica $K(G)$ tal que

- $V(K(G)) = \{q \subseteq V(G) \mid q \text{ es un clan de } G\}$,
- dos vértices diferentes $q_1, q_2 \in V(K(G))$ son adyacentes si $q_1 \cap q_2 \neq \emptyset$,

es llamada la **gráfica de clanes** de G .

Entonces, tenemos que a cada gráfica G , podemos asociarle su gráfica de clanes $K(G)$, y entonces también a $K(G)$ podemos sacarle su gráfica de clanes $K(K(G))$ y así sucesivamente, esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 1.3.3 Para cada gráfica G y cada $n \in \mathbb{N}$, sea $K^n(G) = K(K^{n-1}(G))$, donde $K^0(G) = G$. A K se le conoce como el **operador de clanes en gráficas**.

En la figura 1.9 se muestran dibujos de una gráfica G , su gráfica de clanes $K(G)$ y su segunda gráfica de clanes $K^2(G)$. Se puede identificar que los clanes de G son

$$\begin{aligned} q_1 &= \{a, d, e\}, \\ q_2 &= \{b, e, f\}, \\ q_3 &= \{c, d, f\}, \\ q_4 &= \{d, e, f, g\}, \\ q_5 &= \{c, h\}. \end{aligned}$$

Los cuales son los vértices de $K(G)$, de donde se puede observar según la definición que, por ejemplo, $q_1 \sim q_2$ porque $q_1 \cap q_2 = \{e\} \neq \emptyset$. Y así sucesivamente se pueden identificar las aristas de $K(G)$. Ahora, podemos notar que $K(G)$ solo tiene dos clanes, los cuales son

$$Q_1 = \{q_3, q_5\} \quad \text{y} \quad Q_2 = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\},$$

estos tienen intersección no vacía y por lo tanto un dibujo de $K^2(G)$ es como el que se observa en la figura 1.9.

A continuación se va a presentar la definición de las gráficas clan-Helly, estas gráficas son relevantes en este estudio ya que son un ejemplo “grande” de lo que queremos garantizar en este trabajo.

Primero se presenta en general que es la propiedad de Helly.

Definición 1.3.4 Dado un conjunto X , una colección $Q \subseteq \mathcal{P}(X)$ (donde $\mathcal{P}(X)$ denota el conjunto potencia de X) es **intersecante** si para cualesquier $A, B \in Q$ se cumple $A \cap B \neq \emptyset$. (En otras palabras, los elementos de Q se intersectan dos a dos).

Definición 1.3.5 Sea X un conjunto, decimos que una colección $C \subseteq \mathcal{P}(X)$ tiene la **propiedad de Helly** si para cualquier subcolección intersecante $Q \subseteq C$ se cumple $\bigcap Q \neq \emptyset$.

Definición 1.3.6 Una gráfica es **clan-Helly** si su colección de clanes tiene la propiedad de Helly.

Veamos ejemplos de una gráfica que es clan-Helly y de otra que no lo es. En la figura 1.10 consideremos la gráfica G , notemos que tiene seis clanes, de hecho todos son triángulos y están etiquetados como q_i con $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. La gráfica G es clan-Helly, pues cualquier colección intersecante de clanes tiene intersección no vacía, de hecho todos los clanes contienen al vértice g . Por otro lado, la gráfica H no es clan-Helly. Primero notemos que H tiene cuatro clanes, los cuales también son triángulos y están etiquetados como q_i con $i = 1, 2, 3, 4$. Luego, si consideramos la subcolección de clanes $\{q_1, q_3, q_4\}$ podemos notar que es una colección intersecante, puesto que $q_1 \cap q_3 = \{e\}$, $q_1 \cap q_4 = \{d\}$ y $q_3 \cap q_4 = \{f\}$, pero $q_1 \cap q_2 \cap q_3 = \emptyset$.

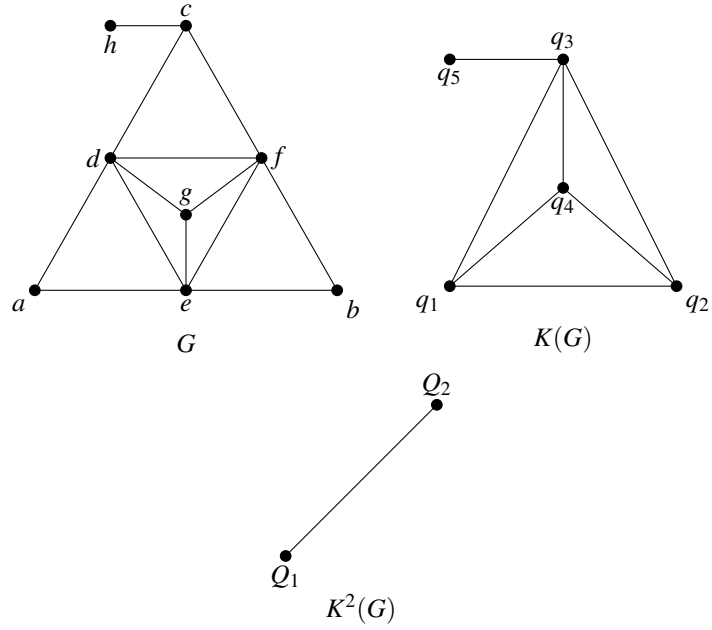


Figura 1.9: Una gráfica G , su gráfica de clanes $K(G)$ y su segunda gráfica de clanes $K^2(G)$.

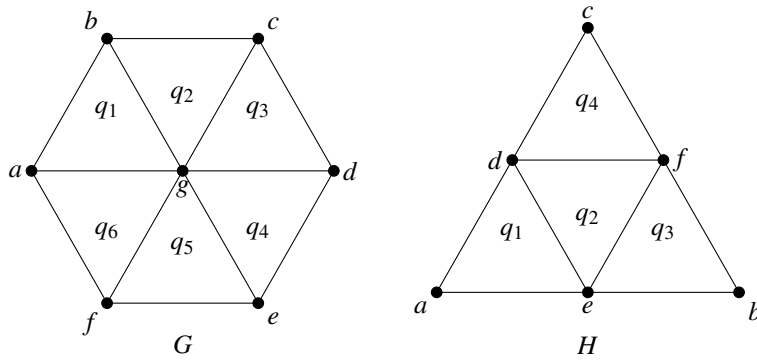


Figura 1.10: La gráfica G es clan-Helly pero la gráfica H no lo es.

1.4. Octaedros

Los octaedros son un tipo de gráficas que servirán de ejemplo más adelante.

Para definir los octaedros, primero daremos la definición del complemento de una gráfica y de un conjunto independiente en una gráfica.

Definición 1.4.1 Si G es una gráfica, su complemento se denota por \overline{G} , y es la gráfica cuyo conjunto de vértices es el mismo que el de G y dos vértices distintos de \overline{G} son adyacentes si no son adyacentes en G .

Definición 1.4.2 Un **conjunto independiente** en una gráfica G es un subconjunto de $V(G)$ tal que no hay vértices adyacentes en dicho subconjunto.

Como ejemplo, en la figura 1.11 tenemos una gráfica G y su complemento \overline{G} . Además podemos notar que en G los vértices a, c, h forman un conjunto independiente en G .

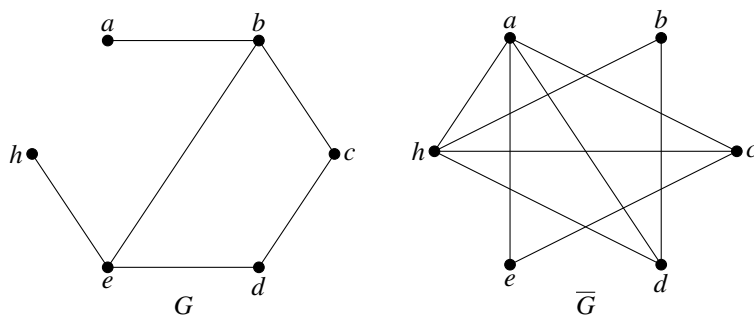


Figura 1.11: Una gráfica y su complemento.

Recordemos que vamos a denotar por K_2 a la gráfica completa de dos vértices, de esta forma vamos a escribir nK_2 para algún $n \in \mathbb{N}$ para referirnos a la gráfica que tiene n componentes conexas donde cada componente conexas es K_2 . En la figura 1.12 se pueden apreciar algunos ejemplos.

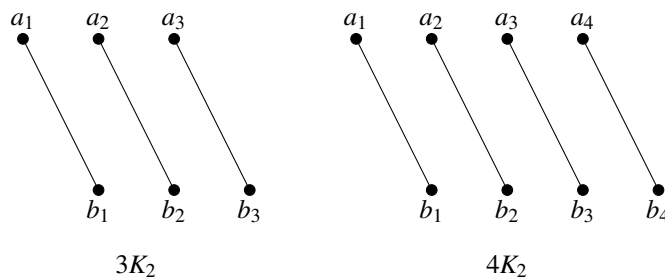


Figura 1.12: Dibujos de $3K_2$ y $4K_2$

Definición 1.4.3 Para $n \in \mathbb{N}$ se denota por O_n al **octaedro** que es el complemento de nK_2 , es decir, $O_n = \overline{nK_2}$.

Como ejemplos tenemos dibujos de los octaedros O_1 , O_2 y O_3 en la figura 1.13. Y en la figura 1.14 tenemos un dibujo más conocido del octaedro O_3 .

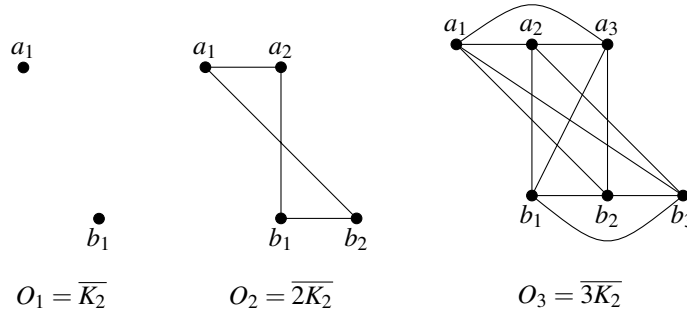


Figura 1.13: Dibujos de los octaedros O_1 , O_2 y O_3 .

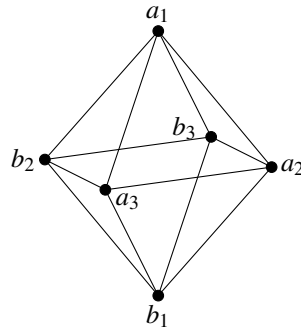


Figura 1.14: Octaedro O_3 .

Observemos que un clan en O_n se corresponde con un conjunto independiente maximal en nK_2 . Dichos conjuntos independientes se obtienen tomando un solo vértice en cada componente conexa de nK_2 . Entonces, hay 2^n maneras diferentes de escoger esos vértices, por lo tanto O_n tiene 2^n clanes. Notemos entonces, que O_n tiene $2n$ vértices, es decir, la cantidad de vértices crece de forma lineal conforme n crece, pero la cantidad de clanes crece de forma exponencial. Esto nos da indicios de que calcular los clanes de una gráfica es un problema computacionalmente difícil, pues el hecho de tratar de contarlos resulta en una cantidad exponencial (en función del número de vértices) en el caso de los octaedros.

Por otro lado, también hay clases de gráficas cuyo número de clanes no crece de forma exponencial. Un ejemplo de ello son los árboles. Pues resulta que un árbol con n vértices, tiene $n - 1$ aristas (ver capítulo 1 de [8]). En este caso las aristas son sus clanes, pues como un árbol es una gráfica que no tiene ciclos, en particular no puede

tener ciclos de tres vértices, es decir, no existen tres vértices adyacentes entre sí, por lo tanto las completas de un árbol deben ser sus aristas. Notando así que un árbol con n vértices tiene $n - 1$ clanes, es decir, conforme el número de vértices en esta clase de gráficas crece de forma lineal, el número de clanes también.

Así entonces, podemos decir que en general, determinar la lista de todos los clanes en una gráfica es un problema computacionalmente difícil. Es decir, existen clases de gráficas donde es computacionalmente difícil enumerar los clanes y otras donde es computacionalmente fácil.

Capítulo 2

Complejos simpliciales y homotopía

Ahora, la idea es asociar a cada gráfica un espacio topológico y esto lo vamos a hacer a través de los complejos simpliciales, que es lo que se presentará a continuación. No se van a presentar demasiados detalles acerca de cómo pasamos de una gráfica a un espacio topológico, solo se darán los conceptos y las ideas principales. Para más detalles se pueden consultar referencias como en mi tesis de licenciatura [8] o en el libro de Munkres [15]. De hecho, en esta sección se van a mencionar algunos resultados, de los cuales no se van a dar demostraciones, pero estas se encuentran en [8]. Cabe mencionar que en libro [15] se considera incluso el caso en el que los complejos simpliciales son infinitos, sin embargo, a nosotros solo nos interesa el caso finito y en todos los casos lo vamos a considerar de esa manera.

2.1. Complejos simpliciales

Primero presentaremos el concepto de complejo simplicial abstracto.

Definición 2.1.1 *Un complejo simplicial abstracto es una colección de subconjuntos de un conjunto X tal que es cerrada bajo inclusión. Es decir, Δ es un complejo simplicial abstracto si $\Delta \subseteq \mathcal{P}(X)$ y si $\sigma \in \Delta$, entonces para cualquier $\tau \subseteq \sigma$ se tiene $\tau \in \Delta$.*

Definimos ahora algunos de los conceptos principales que trae consigo un complejo simplicial Δ . Los elementos de Δ son llamados **simplejos**. Si σ es un simplejo, la **dimensión** de este se define como su cardinalidad menos uno y lo denotamos por $\dim(\sigma)$. Si un simplejo tiene $n + 1$ elementos decimos que es un n -simplejo. Cada subconjunto de un simplejo es llamada una **cara** del simplejo. Una simplejo es **maximal** si no está contenido en otro simplejo distinto de él. La **dimensión** de Δ se define como el máximo de las dimensiones de todos los simplejos que contiene (como los simplejos con los que trabajaremos son finitos, el máximo existe y la dimensión será finita también). El **conjunto de vértices** $V(\Delta)$ de Δ es el conjunto que contiene los 0-simplejos

de Δ . Una subcolección de Δ que es un complejo simplicial abstracto en sí mismo, es llamado un **subcomplejo** de Δ .

Definición 2.1.2 *Dos complejos simpliciales Δ y Γ se dice que son **isomorfos** si existe una función biyectiva f entre los vértices de Δ y de Γ tal que si $\sigma \in \Delta$, entonces $f(\sigma) \in \Gamma$. Dos complejos simpliciales isomorfos usualmente los consideramos como iguales.*

Ahora, veamos el concepto de complejo simplicial geométrico y cómo lo vamos a relacionar con los complejos simpliciales abstractos.

Definición 2.1.3 *Dado un conjunto de puntos $\{a_0, a_1, \dots, a_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$, diremos que es **geoméricamente independiente**, si para cualquier conjunto $\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ de números reales, las siguientes ecuaciones*

$$\sum_{i=0}^m t_i = 0, \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^m t_i a_i = 0,$$

implican que $t_i = 0$ para todo $i = 0, 1, \dots, m$.

Viéndolo de una forma gráfica, un punto siempre es geoméricamente independiente, dos puntos distintos también son geoméricamente independientes, al igual que tres puntos no colineales, luego, cuatro puntos no coplanares son geoméricamente independientes. Y así sucesivamente si se tuvieran cinco o más puntos.

Definición 2.1.4 *Sea $\{a_0, a_1, \dots, a_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto geoméricamente independiente. El m -simplejo geométrico σ generado por $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que*

$$x = \sum_{i=0}^m t_i a_i, \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^m t_i = 1,$$

y $t_i \geq 0$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, m\}$.

*Es un resultado conocido que si $x \in \sigma$, los escalares t_i están determinados de forma única por x , y a estos se les llaman **coordenadas baricéntricas** de x . Además*

$$\sum_{i=0}^m t_i a_i,$$

*es llamada una **combinación convexa** de los vértices a_0, a_1, \dots, a_m .*

En dimensiones pequeñas se puede observar de una forma algo inmediata como son los m simplejos. Por ejemplo, un 0-simplejo geométrico es un punto en \mathbb{R}^n . Un 1-simplejo geométrico es el segmento que una dos puntos a_0 y a_1 . Similarmente, un 2-simplejo geométrico es un triángulo cuyos vértices serían los elementos a_0, a_1, a_2 que lo generan. Así, un 3-simplejo geométrico generado por a_0, a_1, a_2, a_3 es como un tetraedro relleno cuyos vértices serían los mismos a_0, a_1, a_2, a_3 . (Ver figura 2.1).

Definición 2.1.5 *Si σ es un simplejo generado por $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$, cualquier simplejo generado por algún subconjunto de $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ es llamado una **cara** de σ .*

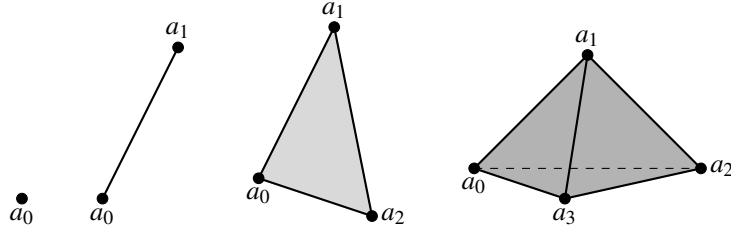


Figura 2.1: Dibujos de 0, 1, 2 y 3 simplejos geométricos.

Definición 2.1.6 Un *complejo simplicial geométrico* K en \mathbb{R}^n es una colección de *simplejos geométricos* tal que

- Cualquier cara de un simplejo de K está en K .
- La intersección de cualesquiera dos simplejos de K es una cara de cada uno de ellos.

Por ejemplo, en la figura 2.2 tenemos que K_1 y K_2 sí son complejos simpliciales geométricos pero K_3 no. De hecho, K_1 está formado por un 2-simplejo y sus caras, K_2 está formado por un 2-simplejo y dos 1-simplejos, con sus respectivas caras. Y K_3 no es un complejo simplicial geométrico porque podemos ver que si σ es el 2-simplejo geométrico generado por $\{a_0, a_1, a_2\}$ y τ es el 2-simplejo geométrico generado por $\{b_0, b_1, b_2\}$, entonces la intersección de σ con τ es el segmento que une a a_1 con b_0 y podemos notar que este segmento no es una cara ni de σ ni de τ .

Ahora, como se mencionó al principio del capítulo la idea es asociar topología a las gráficas a través de un complejo simplicial. Resulta que dado un complejo simplicial geométrico K , podemos asociarle un espacio topológico que llamamos su **realización geométrica**. En principio K podría constar de un número infinito de simplejos, pero para nuestros propósitos solo requerimos que K sea finito, y en ese caso el espacio topológico que asociaremos es un subconjunto de \mathbb{R}^n para alguna n .

Definición 2.1.7 Sea K un *complejo simplicial geométrico*, denotamos como $|K| \subset \mathbb{R}^n$ a la unión de todos los simplejos de K , $|K|$ es llamada la *realización geométrica* de K , y vamos a considerar a $|K|$ como espacio topológico con la topología usual heredada de \mathbb{R}^n .

Vamos a relacionar ahora los conceptos de complejo simplicial abstracto y complejo simplicial geométrico.

Si Δ es un complejo simplicial abstracto, resulta que podemos asociarle un complejo simplicial geométrico K de tal forma que dado un simplejo de Δ , se va a corresponder con un simplejo geométrico en K de forma única. De hecho, esto se puede hacer de tal forma que si Δ y Γ son complejos simpliciales abstractos y K y L son los complejos simpliciales geométricos que se corresponden con Δ y Γ respectivamente. Y si Δ y Γ son isomorfos resulta que K y L también lo serán.

La idea de como es que para un simplejo σ se le hace corresponder un conjunto geoméricamente independiente de \mathbb{R}^n y el simplejo geométrico generado por dicho

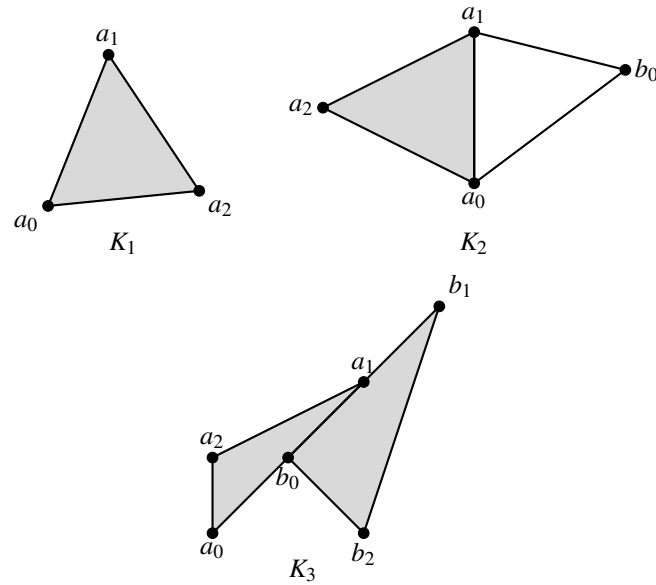


Figura 2.2: Ejemplos sobre complejos simpliciales geométricos.

conjunto geoméricamente independiente es el que se corresponde con σ . Pero esto hay que hacerlo de “buena” manera para que lo que obtengamos sea en efecto un complejo simplicial geométrico. Recordemos que la intersección de dos simplejos geométricos nos debe dar una cara de cada uno de ellos, entonces esta correspondencia debe ser de esa forma. Una manera inmediata de obtener esto es que si el complejo simplicial abstracto tiene m vértices, entonces todos estos vértices los podemos asociar a un conjunto geoméricamente independiente en \mathbb{R}^m , es decir, el complejo simplicial abstracto lo podemos hacer corresponder con un complejo simplicial geométrico en \mathbb{R}^m . Sin embargo, en ocasiones no es necesario, es decir, en muchas ocasiones podemos hacer corresponderlo con un complejo simplicial geométrico en \mathbb{R}^k para alguna $k < m$, cuidando lo que se mencionaba acerca de las intersecciones de simplejos.

Una vez que a cada complejo simplicial abstracto lo hacemos corresponder con un complejo simplicial geométrico, a este le sacamos su realización geométrica y entonces de esta forma le hacemos corresponder un espacio topológico a un complejo simplicial abstracto. Va a resultar complejos simpliciales abstractos isomorfos se corresponderán con espacios topológicos homeomorfos, lo cual es muy conveniente.

Nota 2.1.8 Dado un complejo simplicial abstracto Δ vamos a denotar su espacio topológico asociado como $|\Delta|$. Cabe destacar que esta forma de asociar un espacio topológico a un complejo simplicial abstracto no es única, sin embargo, la forma en que se define esta correspondencia va a resultar en espacios topológicos homeomorfos.

Por ejemplo, consideremos el complejo simplicial abstracto

$$\Delta = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}.$$

Vamos a hacer corresponder al simplejo $\{a, b, c\}$ con el conjunto geoméricamente independiente

$$\{(0,0), (2,2), (0,2)\},$$

de tal forma que $a \mapsto (0,0)$, $b \mapsto (2,2)$ y $c \mapsto (0,2)$ (el resto de los simplejos quedan determinados por esta correspondencia). Es decir, el espacio topológico que estaríamos asociando a Δ es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$ (ver figura 2.3a) que llamaremos T_1 . Por otro lado, también podríamos hacer corresponder al simplejo $\{a, b, c\}$ con el conjunto geoméricamente independiente

$$\{(0,0), (2,0), (1,2.5)\},$$

ahora con las correspondencias $a \mapsto (0,0)$, $b \mapsto (2,0)$ y $c \mapsto (1,2.5)$. Y con ello el espacio topológico que se estaría asociando a Δ es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,2.5)$, el cual vamos a denotar por T_2 . Uno puede convencerse de que los triángulos T_1 y T_2 son homeomorfos.

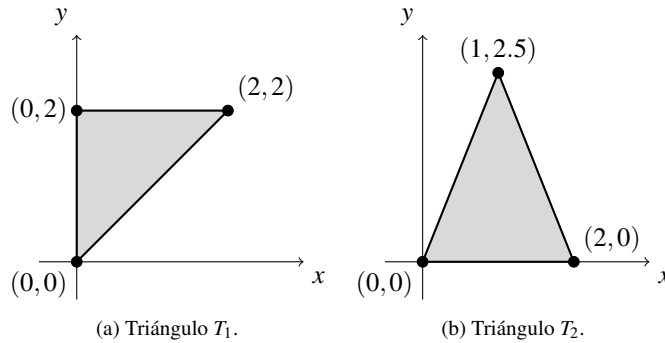


Figura 2.3: Ejemplos de espacios topológicos asociados a una complejo simplicial abstracto.

2.2. Homotopía en gráficas

Al final de la sección anterior (sección 2.1), se mencionó el concepto de espacios homeomorfos, lo cual en topología uno suele considerar dos espacios homeomorfos como iguales, pues esencialmente tienen la misma estructura. Nosotros no nos vamos a involucrar con la definición formal de homeomorfismo, pero por referencia daremos la definición de que dos espacios topológicos sean homeomorfos. También introduciremos el concepto de homotopía, si se desea indagar más a fondo en estos temas se podría consultar [7].

Definición 2.2.1 Sean X y Y dos espacios topológicos, decimos que son **homeomorfos** si existe $f: X \rightarrow Y$ tal que es biyectiva, continua y su función inversa también es continua. En cuyo caso denotamos $X \cong Y$.

En la tesis, usaremos otro concepto de la topología conocido como homotopía, de hecho este se usará más que el concepto de homeomorfismo. En topología, coloquialmente se dice que dos espacios topológicos son homotópicos si se puede deformar uno en el otro de forma continua, por supuesto que tenemos el concepto preciso de lo que significa que dos espacios sean homotópicos. Al igual que con el concepto de homeomorfismo, casi no nos involucraremos con la definición formal de homotopía, nosotros partiremos de teoremas conocidos en la topología combinatoria que ya nos garantizan la homotopía para ciertos espacios. Pero también vamos a mencionar aquí la definición formal solo para tener en cuenta de lo que estamos trabajando.

Definición 2.2.2 Sean X y Y dos espacios topológicos, y sean $f, g: X \rightarrow Y$ continuas. Una función $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ es una **homotopía** de f a g si

- H es continua,
- $H(x, 0) = f(x)$ para todo $x \in X$,
- $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$.

Si existe una homotopía entre dos funciones f y g decimos que son homotópicas y lo denotamos por $f \simeq g$.

Definición 2.2.3 Dos espacios topológicos X y Y son **homotópicos** si existe una función $f: X \rightarrow Y$ y una función continua $g: Y \rightarrow X$ tales que $g \circ f \simeq 1_X$ (donde 1_X denota la función identidad en el espacio X) y $f \circ g \simeq 1_Y$. De forma similar, cuando X y Y son homotópicos lo denotamos por $X \simeq Y$.

Por supuesto, es directo ver que dos espacios homeomorfos son homotópicos. Y también es bien conocido que la relación de ser homotópicos es una relación de equivalencia.

Veamos un ejemplo de dos espacios homotópicos. Consideremos un disco en \mathbb{R}^2 , más específicamente $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| \leq c\}$ para algún $c > 0$ se puede deformar en el espacio de un solo punto. Entonces consideremos $X = D$ y $Y = \{(0, 0)\}$, y las funciones $f: X \rightarrow Y$ dada por $f(x) = (0, 0)$ para todo $x \in X$ y $g: Y \rightarrow X$ dada por $g(y) = (0, 0)$ para todo $y \in Y$. Por lo que se obtiene $g \circ f = 0$ y $f \circ g = 0$. Ahora, definamos $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$, tal que si $x \in X$ y $t \in [0, 1]$, entonces $H(x, t) = (1 - t)x$, esta función es continua por ser multiplicación de funciones continuas. Luego, si $x \in X$ entonces $H(x, 0) = 1(x) = x = 1_X(x)$ y también $H(x, 1) = 0(x) = 0 = g \circ f(x)$, es decir, $g \circ f \simeq 1_X$. De forma similar podemos definir una homotopía de $f \circ g$ a 1_Y , es decir, $H: Y \times [0, 1] \rightarrow Y$, dada por $H(y, t) = ty$ para $y \in Y$ y $t \in [0, 1]$, esta función es continua por ser multiplicación de continuas y $H(y, 0) = (0, 0) = f \circ g(y)$, así como también $H(y, 1) = y = 1_Y(y)$. Por lo cual $f \circ g \simeq 1_Y$. Y por lo tanto $D \simeq \{(0, 0)\}$.

De hecho, el ejemplo anterior que presentamos es un caso particular de algo conocido como un **retracto fuerte por deformación**, que esencialmente es cuando uno de los espacios es un subconjunto del otro. Resulta que $H: D \times [0, 1] \rightarrow D$ dada por $H(x, t) = (1 - t)x$ con $x \in D$ y $t \in [0, 1]$ es un retracto fuerte por deformación. Y es que si recordamos la idea de que dos espacios son homotópicos si se puede deformar

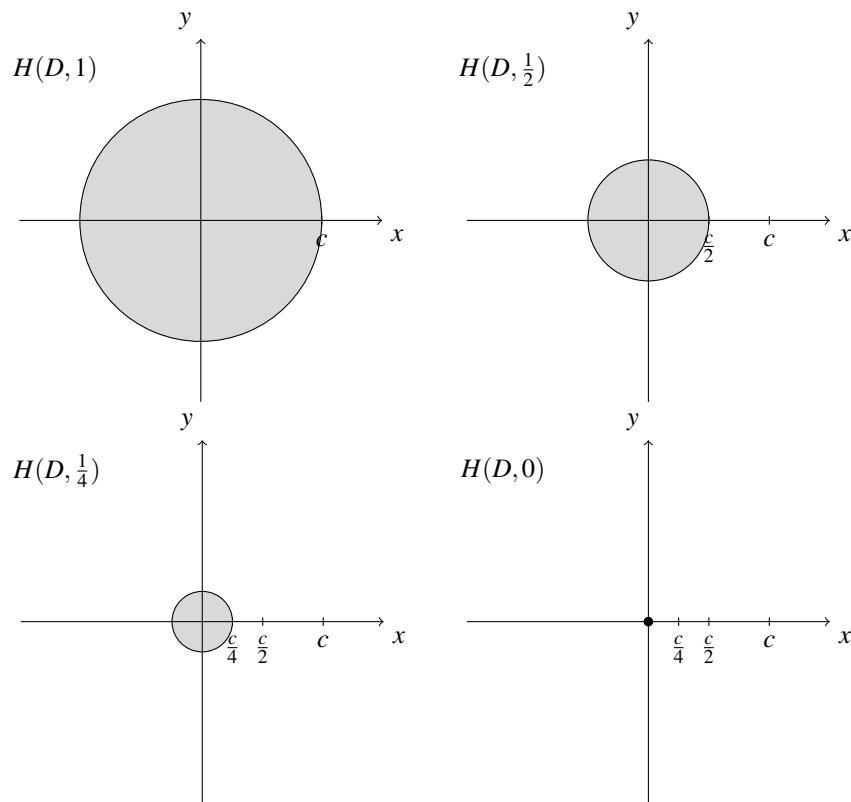


Figura 2.4: Retracto de un disco.

continuamente uno en el otro y consideramos la imagen de D bajo H variando la t podemos ver que conforme t va creciendo, la imagen de D bajo H va siendo un disco más pequeño cada vez hasta que en $t = 0$ dicha imagen es un punto (ver figura 2.4).

Ahora bien, una vez presentado el concepto de completa y de clan de una gráfica, así como el concepto de homotopía, podemos explicar como es que le asociamos un espacio topológico a una gráfica a través de un complejo simplicial y como se va a involucrar la homotopía.

Definición 2.2.4 *Se dice que dos complejos simpliciales Δ y Γ son **homotópicos** si $|\Delta| \simeq |\Gamma|$, es decir, si sus respectivos espacios topológicos asociados lo son. De igual forma vamos en este caso vamos a denotar $\Delta \simeq \Gamma$.*

Definición 2.2.5 *Dada una gráfica G definimos y denotamos el **complejo simplicial de completas** de G como $\text{Cl}(G)$ y es tal que $V(\text{Cl}(G)) = V(G)$ y $S(\text{Cl}(G)) = \{c \subseteq V(G) \mid c \text{ es una completa de } G\}$.*

Así entonces vamos a definir la homotopía en gráficas.

Definición 2.2.6 *Dos gráficas G y H son **homotópicas** si $\text{Cl}(G) \simeq \text{Cl}(H)$, y denotamos $G \simeq H$.*

Ahora vamos a mostrar unos ejemplos de los conceptos que acabamos de presentar.

Primero, gráficamente, ¿cómo se vería el espacio topológico asociado a una gráfica? En la figura 2.5 del lado izquierdo tenemos una gráfica G , y del lado derecho tenemos su espacio topológico asociado. La idea de como es que se le asocia este espacio a la gráfica es que por cada punto de la gráfica vamos a dibujar un punto en \mathbb{R}^n , luego por cada arista de la gráfica vamos a dibujar el segmento que une a los correspondientes puntos. Después, por cada completa de tres vértices (por cada triángulo) vamos a “rellenar” dicho triángulo (así como se observa en la figura 2.5 en el caso del triángulo $\{b, c, e\}$). Y finalmente, por cada completa de cuatro vértices (esto forma una figura conocida como tetraedro), rellenaríamos dicho tetraedro, en otras palabras se toma la componente conexa formada por dicha completa de cuatro vértices, como es el caso de $\{a, b, c, d\}$ en la figura 2.5. En este ejemplo la completa más grande es de cuatro vértices, pero hay gráficas donde hay completas de más de cuatro vértices, y en ese caso se seguiría este procedimiento. Es decir, se tendrían que tomar componentes conexas de dicha dimensión, estas ya no se pueden dibujar pero las podemos estudiar de forma teórica.

Ahora, recordando la definición 2.2.6, de hecho podemos dar ejemplos de gráficas que sí son homotópicas y de gráficas que no lo son. Consideremos las gráficas F , G y H de la figura 2.6 y sus respectivos espacios topológicos asociados en la figura 2.7. Es conocido que un “tetraedro relleno”, que es el espacio topológico asociado a F es homeomorfo a una bola en \mathbb{R}^3 y esta es del tipo de homotopía de un punto. De forma similar el espacio topológico asociado a G es un “cuadrado relleno” que es homeomorfo a un disco en \mathbb{R}^2 y este también es del tipo de homotopía de un punto. Es decir, $F \simeq G$ porque sus respectivos espacios topológicos asociados tienen el mismo tipo de homotopía (de un punto). Por otro lado, el espacio topológico asociado a H tiene el tipo de homotopía de una esfera S^1 (o bien un círculo), el cual se sabe que no es homotópico a un punto. Por lo tanto $F \not\simeq H \not\simeq G$.

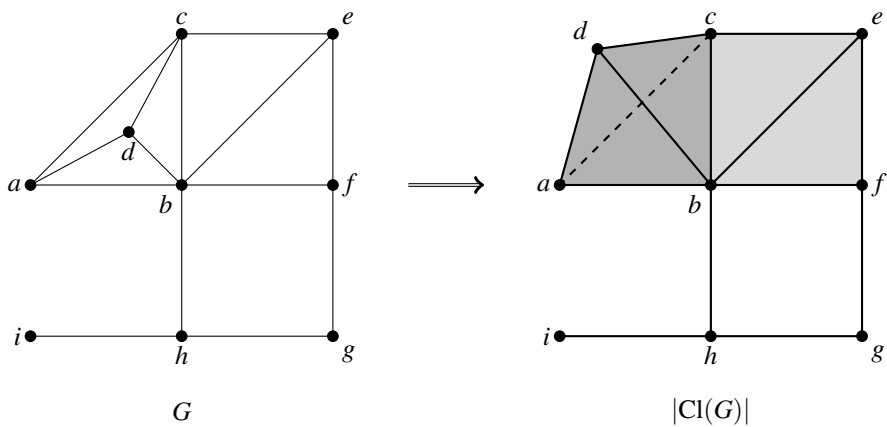


Figura 2.5: Una gráfica y su espacio topológico asociado.

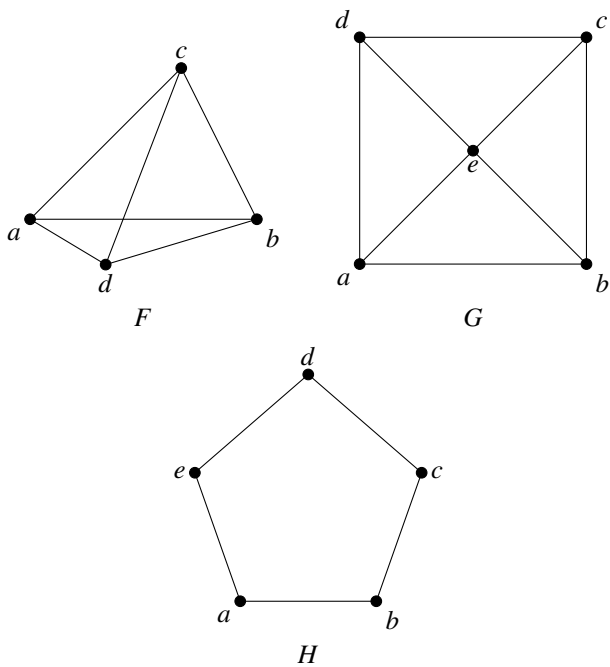


Figura 2.6: Gráficas.

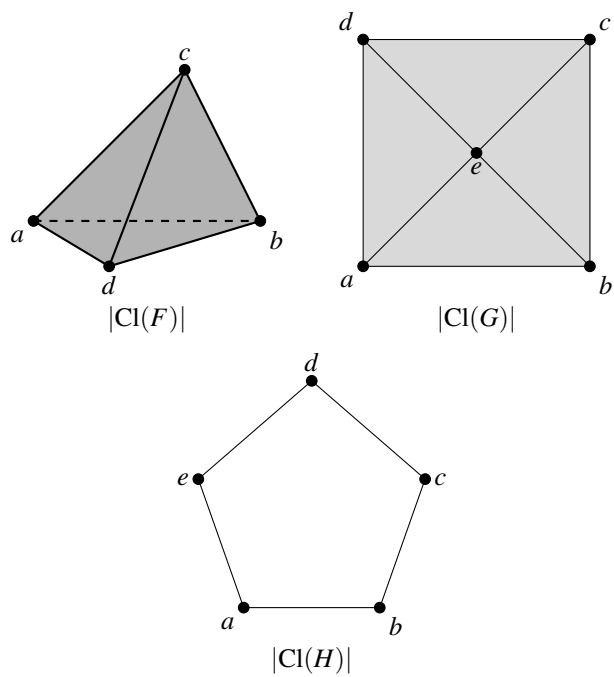


Figura 2.7: Espacios topológicos asociados a las gráficas de la figura 2.6.

Capítulo 3

Invariancia homotópica en gráficas

En las secciones anteriores se ha definido lo que es la gráfica de clanes de una gráfica dada, y se ha mencionado cómo es que a una gráfica se le asocia un espacio topológico a través de su complejo simplicial de completas. Con lo visto anteriormente ya podemos explicar el principal objetivo de la tesis.

Dada un gráfica G , nos preguntamos cuando los respectivos espacios topológicos asociados a G y $K(G)$ son homotópicos, es decir, ¿qué gráficas cumplen que $G \simeq K(G)$? De hecho presentaremos una definición de las gráficas que cumplen esto.

Definición 3.0.1 *Si G es una gráfica tal que $G \simeq K(G)$ decimos que G es **homotópicamente invariante**.*

También estamos interesados en averiguar el tipo de homotopía de ciertas gráficas, es decir, averiguar si son homotópicas a algo conocido (un punto, una cuña de circunferencias, una cuña de esferas, un toro, etcétera).

Antes de presentar los resultados principales, vamos a dar una serie de lemas y teoremas que ya han sido probados y que fueron de ayuda para lo que se trabajó en la tesis.

3.1. Resultados sobre homotopía

Una de las principales herramientas básicas que hemos estado utilizando para mostrar homotopía entre complejos simpliciales son los **colapsos elementales**.

Nota 3.1.1 *Una vez que ya vimos que se pueden asociar complejos simpliciales abstractos con complejos simpliciales geométricos, de ahora en adelante solo diremos complejos simpliciales teniendo en mente que nos referimos a los abstractos pero que se le puede asignar uno geométrico.*

Teorema 3.1.2 *Sea Δ un complejo simplicial y σ un simplejo de Δ . Supongamos que σ está contenida en un solo simplejo maximal τ y además $\dim(\tau) = \dim(\sigma) + 1$. En tal caso el complejo simplicial que vamos a denotar por $\Delta - \{\sigma, \tau\}$, que tiene como conjunto de vértices el mismo que el de Δ y como conjunto de simplejos a $S(\Delta) - \{\sigma, \tau\}$, es homotópico a Δ . Es decir, $\Delta \simeq \Delta - \{\sigma, \tau\}$.*

Lo que vamos a destacar del teorema 3.1.2 es que la operación de eliminar caras libres de un complejo simplicial no altera su tipo de homotopía, como ya se mencionó anteriormente, a esta operación le vamos a llamar un **colapso elemental**. Este resultado es usado en la literatura sin dar una demostración porque al parecer es muy conocido, sin embargo, en mi tesis de licenciatura [8] capítulo 4 se dio una demostración de él. Es una demostración un poco extensa pero un tanto rutinaria, es por eso que omitiremos la demostración en esta tesis. Sin embargo, presentaremos un ejemplo en un complejo simplicial de dimensión 2. Supongamos que tenemos el complejo simplicial Δ tal que $V(\Delta) = \{0, 1, 2\}$ y $S(\Delta)$ es el conjunto que contiene al simplejo $\{0, 1, 2\}$ y todas sus caras, podemos notar que la cara $\sigma = \{1, 2\}$ es libre, pues está contenida en una sola cara maximal $\tau = \{0, 1, 2\}$, entonces $\Delta \simeq \Delta - \{\sigma, \tau\}$. Más aún, para este ejemplo podemos ver gráficamente como es que se da esta homotopía. Uno puede notar que el espacio topológico asociado a Δ es un “triángulo relleno”, como se observa en el dibujo de la izquierda de la figura 3.1 (haciendo las correspondencias $0 \mapsto e_0$, $1 \mapsto e_1$ y $2 \mapsto e_2$), y el espacio topológico asociado a $\Delta - \{\sigma, \tau\}$ va a resultar en dos segmentos unidos por uno de sus extremos. Entonces se puede crear un retracto fuerte por deformación de sus respectivos espacios topológicos, donde la recta que une a e_1 con e_2 se corresponde con el simplejo $\{1, 2\}$ y dicha recta se va a ir deformando hasta obtener el espacio topológico asociado a $\Delta - \{\sigma, \tau\}$ así como se observa en la figura 3.1.

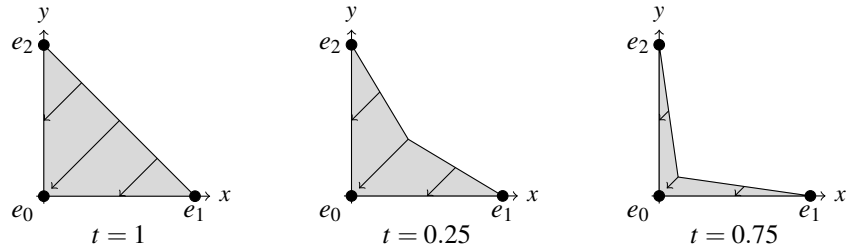


Figura 3.1: Ejemplo de colapso elemental.

Resulta que el concepto de colapso elemental se puede generalizar un poco más. Y para ello necesitamos la definición de cara libre.

Definición 3.1.3 *Sea Δ un complejo simplicial y $\sigma \in S(\Delta)$. Decimos que σ es una **cara libre** si existe un solo simplejo maximal τ de Δ que contiene propiamente a σ .*

Nota 3.1.4 *Dados dos simplejos σ y τ en un complejo simplicial Δ , denotamos por $[\sigma, \tau]$ al conjunto de simplejos que contienen a σ y que están contenidos en τ .*

Luego, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.1.5 *Si Δ es un complejo simplicial y σ es una cara libre, donde τ es el único simplejo maximal que contiene a σ , entonces $\Delta \simeq \Delta - [\sigma, \tau]$. (Dónde $\Delta - [\sigma, \tau]$ denota el complejo simplicial cuyo conjunto de vértices es $V(\Delta)$ y cuyo conjunto de simplejos es $S(\Delta) - [\sigma, \tau]$).*

Es decir, podemos eliminar una cara libre con todos los simplejos que la contienen sin alterar el tipo de homotopía del complejo simplicial, a esta operación se le conoce como un **colapso**. Y la demostración se sigue aplicando de forma sucesiva el teorema 3.1.2, es decir, un colapso es una serie de colapsos elementales.

Continuando, vamos a presentar un criterio que nos permite “eliminar” vértices de una gráfica sin alterar su tipo de homotopía (teorema 3.1.7), pero antes necesitamos recordar un par de definiciones que ya habíamos dado en el capítulo 1.

Recordemos que un vértice x en una gráfica G es dominado si $N(x)$ induce un cono en G (ver 1.1.15).

El siguiente resultado nos será de utilidad porque a veces convendrá usar una definición sobre otra.

Lema 3.1.6 *Sea G una gráfica, $x \in G$ es dominado si y solo si existe $y \in G$ con $y \neq x$ tal que $N[x] \subseteq N[y]$.*

Demostración.

\Rightarrow] Supongamos que $N(x)$ es un cono con ápice y . Y supongamos $z \in N[x]$, si $z = y$ entonces es inmediato que $z \in N[y]$, ahora, si $z = x$, como $y \in N(x)$, entonces $z = x \sim y$ y $z \in N[y]$. Por último, si $x \neq z \neq y$, entonces $z \in N(x)$, luego como y es ápice de $N(x)$ entonces $z \sim y$, es decir, $z \in N[y]$, concluyendo que $N[x] \subseteq N[y]$.

\Leftarrow] Supongamos que existe $y \neq x$ tal que $N[x] \subseteq N[y]$. Afirmamos $N(x)$ es cono con y como ápice. Supongamos $z \in N(x)$ con $z \neq y$, como $z \in N[x] \subseteq N[y]$, entonces necesariamente $z \sim y$. Por tanto, y es cono de $N(x)$. ■

Si G es una gráfica y $x \in G$, vamos a denotar por $G - x$ a la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G) - \{x\}$ y cuyo conjunto de aristas es $\{e \in E(G) \mid x \notin e\}$.

Teorema 3.1.7 (Prisner 1992 [16]) *Sea G una gráfica, si $x \in G$ es un vértice dominado, entonces $G \simeq G - x$.*

Demostración.

Supongamos que $a \in G$ domina a x . Primero vamos a denotar por $Cl(G) - Cl(G - x)$ a la diferencia entre los conjuntos de simplejos de los complejos simpliciales y notemos que esta consiste de todas las completas de G que contienen a x , como a domina a x por cada completa que contiene a x pero no contienen a a le podemos añadir a , es decir, en la diferencia hay una cantidad par de simplejos. Así, todo complejo maximal q en la diferencia debe contener a a , además el simplejo $q - a$ solo está contenido en q , por lo tanto podemos realizar un colapso elemental considerando los simplejos $q - a$ y q . Podemos continuar con este proceso en lo que queda usando que cada simplejo que no contiene a a está emparejado con el simplejo al que se le añade a . Es decir, sucesivamente vamos a obtener complejos simpliciales homotópicos a $Cl(G)$, hasta obtener $Cl(G - x)$. ■

También recordemos la definición 1.1.17: Una gráfica G es **desmantelable** si existe una etiquetación de los vértices de G , supongamos x_1, x_2, \dots, x_n , de tal forma que x_i es dominado en $G[\{x_i, \dots, x_n\}]$ para todo $i = 1, 2, \dots, n - 1$. En otras palabras, podemos ir removiendo sucesivamente vértices dominados hasta obtener la gráfica de un solo vértice.

Definición 3.1.8 *Una gráfica es **contraíble** si es homotópica a un punto.*

Primero notemos que la gráfica de un solo vértice tiene el tipo de homotopía de un punto, es decir, es homotópica a un punto. Luego, una gráfica desmantelable es aquella en la que podemos ir removiendo vértices dominados hasta obtener la gráfica de un sólo vértice, y por el teorema 3.1.7 obtenemos que las gráficas desmantelables son homotópicas a un punto, es decir, son contraíbles. Y un ejemplo de gráficas desmantelables son los árboles como ya vimos en 1.1.18, por lo tanto todos los árboles son contraíbles.

3.2. Invariancia homotópica en gráficas clan-Helly

Las gráficas clan Helly tienen propiedades relevantes respecto a su tipo de homotopía, es por eso el interés de estudiarlas.

En la siguiente definición se usa una convención usual en gráficas que es identificar las subgráficas por medio de sus vértices, por ejemplo, si F y G son subgráficas inducidas de una gráfica H identificaremos como $F \cap G$ a la subgráfica inducida de H cuyos vértices son $V(F) \cap V(G)$. En el caso de los clanes de una gráfica, es conveniente identificar a los clanes ya sea como conjuntos de vértices o bien como subgráficas inducidas.

Podría pensarse que verificar que una gráfica G tiene la propiedad de Helly es computacionalmente difícil, pues habría que comprobar que toda colección intersecante de clanes tiene intersección no vacía y obtener los clanes de una gráfica es computacionalmente difícil como ya se discutió al final de la sección 1.4. Sin embargo, más adelante veremos un criterio, el cual nos proporciona un algoritmo polinomial para determinar si una gráfica es clan Helly, y nos vamos a referir a este resultado como el criterio del triángulo extendido.

En particular, la clase de los árboles es una clase de gráficas grande contenida en la clase de gráficas clan-Helly.

Nota 3.2.1 *Si C es una colección intersecante tal que $\bigcap C = \emptyset$ entonces $|C| \geq 3$. Pues si C solo tuviese un elemento (digamos q) se tiene que $\bigcap C = q \neq \emptyset$. Y si solo tuviese dos elementos, como es una colección intersecante entonces cualesquiera dos elementos de C tienen intersección no vacía, por lo que tampoco es posible que $\bigcap C = \emptyset$.*

Teorema 3.2.2 *Una gráfica G con cinco vértices o menos es clan Helly.*

Demostración.

Supongamos que G no es clan Helly, entonces existe una colección intersecante Q de clanes de G que tiene intersección vacía. Sea $Z \subseteq Q$ minimal con tal propiedad, es

decir, que $\bigcap Z = \emptyset$ y para todo $q \in Z$ se cumple $\bigcap(Z - \{q\}) \neq \emptyset$ (observar que Z debe tener al menos cardinalidad tres por la nota 3.2.1).

Supongamos que $Z = \{q_1, q_2, \dots, q_r\}$, y consideremos $x_i \in \bigcap(Z - \{q_i\})$ para $i = 1, 2, \dots, r$. Observemos que los x_i deben ser distintos entre sí, porque si algún par de ellos fuesen iguales, supongamos $x_\ell = x_k$ con $\ell, k \in \{1, 2, \dots, r\}$ y $\ell \neq k$, entonces como $x_k \in \bigcap(Z - \{q_k\})$ y como $x_k = x_\ell$ entonces $x_k \in \bigcap(Z - \{q_\ell\})$, esto implica que $x_k \in \bigcap Z \neq \emptyset$ lo cual sería una contradicción. Además notese que los x_i forman una completa, ya que si $x_i \neq x_j$, y como Z tiene al menos tres elementos entonces $x_i, x_j \in q_k$ para algún $k \neq i, k \neq j$. Ahora, cada clan de Z debe tener al menos r vértices, pues si $q_j \in Z$, q_j contiene a todos los x_i excepto a x_j y si q_j tuviese solo $r - 1$ elementos, como x_j es vecino del resto de los x_i entonces $q_j \cup \{x_j\}$ sería una completa que contiene propiamente a q_j , lo cual estamos suponiendo que no pasa pues q_j es un clan. Entonces, para cada $q_j \in Z$ debe existir un $y_j \in q_j$ distinto de los x_i , pero además podemos suponer que los y_i son distintos entre ellos, pues si se diera el caso de que tuviéramos $y_j \in q_j$ (distinto de los x_i) y $y_k \in q_k$ (distinto de los x_i) con $y_j = y_k = y$, entonces x_k sería vecino de todos los elementos de q_k y entonces $q_k \cup \{x_k\}$ es una completa que contiene propiamente al clan q_k , lo cual es una contradicción. Por lo cual, podemos suponer también que los y_k son distintos entre sí.

Finalmente observemos que entonces $|G| \geq r + r$ pues todos los x_i y los y_i son distintos entre sí y de cada uno de ellos se tienen r elementos, ahora, como Z tiene al menos cardinalidad 3, entonces $|G| \geq 3 + 3 = 6$, es decir, si G no es clan Helly entonces debe tener al menos seis vértices, lo cual implica que todas las gráficas de cinco o menos vértices son clan Helly. ■

Definición 3.2.3 Sea T un triángulo en la gráfica G . El **triángulo extendido** \hat{T} se define como la subgráfica de G inducida por los vértices que son vecinos de al menos dos vértices de T .

Lema 3.2.4 Sea G una gráfica, T un triángulo en G y definamos

$$Q = \{q \in K(G) : |q \cap T| \geq 2\}.$$

Entonces $x \in \hat{T}$ si y solo si $x \in q$ para algún $q \in Q$.

Demostración.

\implies] Si $x \in \hat{T}$ entonces por definición de \hat{T} , se tiene que x es adyacente a al menos dos de los vértices de T y dichos vértices son adyacentes entre ellos, por lo tanto x y dos de los vértices de T forman un triángulo. Dicho triángulo podría ser un clan de G , pero en caso de no serlo está contenido en uno, el cual tiene al menos dos vértices de T y contiene a x , por lo tanto está en Q , es decir, el vértice $x \in q$ para algún $q \in Q$.

\impliedby] Si $x \in q$ para algún $q \in Q$, entonces $|q \cap T| \geq 2$. Puede pasar que $x \in T$, pero si eso pasa entonces ya tenemos $x \in \hat{T}$. Si $x \notin T$, como $|q \cap T| \geq 2$ y $x \in q$, se sigue que x es adyacente a al menos dos vértices de T , por lo tanto $x \in \hat{T}$. ■

A continuación se incluye un resultado que demuestran Dragan [2], e independientemente, Szwarcfiter [18]. Este resultado es al que nos vamos a referir como el **criterio del triángulo extendido**.

Teorema 3.2.5 (Dragan 1989, Szwarcfiter 1997). *Una gráfica G es clan Helly si y solo si todo triángulo T de G es tal que \hat{T} es un cono.*

Demostración.

\implies] Supongamos que G es clan Helly y sea T un triángulo de G . Sea además Q como en el lema 3.2.4. Notemos que Q es una colección intersecante, pues todo $q \in Q$ contiene al menos dos vértices de T , por lo cual dos clanes en Q tienen al menos un vértice de T en común. Luego, como G es clan Helly entonces $\bigcap Q \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in \bigcap Q$, por el lema 3.2.4 se tiene que $x_0 \in \hat{T}$. Ahora sea $x \in \hat{T}$ con $x \neq x_0$, de nuevo, por el lema 3.2.4 $x \in q$ para algún $q \in Q$ y como $x_0 \in \bigcap Q$, entonces $x \sim x_0$, es decir, \hat{T} es un cono con ápice en x_0 .

\impliedby] Supongamos que \hat{T} es un cono para todo triángulo T de G . La prueba se realizará por reducción al absurdo. Supongamos entonces que C es una colección intersecante de clanes de G tal que $\bigcap C = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que C es minimal (o sea, que si $q \in C$, entonces $\bigcap (C - q) \neq \emptyset$). Por la nota 3.2.1 sabemos que $|C| \geq 3$. Sean $q_1, q_2, q_3 \in C$ diferentes entre sí. Como C es minimal entonces para cada $i = 1, 2, 3$ existe $x_i \in \bigcap (C - q_i)$. En el resto de la demostración usaremos dos afirmaciones que demostraremos al final.

Afirmación 1: Se tiene que $|\{x_1, x_2, x_3\}| = 3$. Observemos que el conjunto de vértices $T = \{x_1, x_2, x_3\}$ forman un triángulo, porque $x_1, x_2 \in q_3$, $x_1, x_3 \in q_2$ y $x_2, x_3 \in q_1$, por lo cual $x_1 \sim x_2$, $x_1 \sim x_3$ y $x_2 \sim x_3$. Por hipótesis \hat{T} es un cono, con cierto ápice $x_0 \in G$. Sean $q \in C$ y $y \in q$ con $y \neq x_0$.

Afirmación 2: El vértice y es vecino de al menos dos elementos de T . Ésta última afirmación implica que $y \in \hat{T}$ y como x_0 es ápice de \hat{T} , entonces $y \sim x_0$, es decir, hemos probado que $q \cup \{x_0\}$ es completa para todo $q \in C$, lo cual es una contradicción a menos que $x_0 \in q$ para todo $q \in C$. Pero éso también es una contradicción pues se tendría $x_0 \in \bigcap C = \emptyset$. Por lo tanto, G es clan Helly. ■

Prueba de la afirmación 1 en teorema 3.2.5: Si pasara que $x_1 = x_2$ se tendría que $x_1 \in q_1$, pues $x_2 \in \bigcap (C - q_2)$, como consecuencia $x_1 \in \bigcap C$, lo cual es una contradicción, pues se supuso que $\bigcap C = \emptyset$. Similarmente, se llega a una contradicción si suponemos que $x_1 = x_3$ o si $x_2 = x_3$.

Prueba de la afirmación 2 en teorema 3.2.5: Si $q \in \{q_1, q_2, q_3\}$ tendría al menos dos vértices del triángulo T pues cada q_i , $i = 1, 2, 3$ tiene al menos dos vértices de T , por lo que se cumpliría la afirmación. Y si $q \in (C - \{q_1, q_2, q_3\})$ entonces $x_1, x_2, x_3 \in q$ por lo cual también y sería vecino de al menos dos vértices de T .

El teorema 3.2.5 nos proporciona un algoritmo polinomial en el número de vértices que reconoce si una gráfica es clan Helly. Pues una gráfica con n vértices tiene cuando mucho $\binom{n}{3}$ triángulos. Para cada triángulo T el triángulo extendido \hat{T} se puede construir en tiempo lineal (recorriendo una sola vez la lista de vértices). Finalmente, que una gráfica es un cono igualmente se puede reconocer en tiempo lineal.

El siguiente es el teorema de Dowker. Una referencia de él es [5], teorema 10.9.

Teorema 3.2.6 (Teorema de Dowker). *Sea $B = (X, Y)$ una gráfica bipartita, donde todas las aristas de B tienen un vértice en X y otro en Y . Definimos los complejos simpliciales Δ_X y Δ_Y como sigue:*

1. Un simplejo $\sigma \in \Delta_X$ consiste de un subconjunto de X tal que existe un elemento $y \in Y$ con $xy \in E(B)$ para todo $x \in \sigma$.
2. Un simplejo $\sigma \in \Delta_Y$ consiste de un subconjunto de Y tal que existe un elemento $x \in X$ con $yx \in E(B)$ para todo $y \in \sigma$.

Entonces, $\Delta_X \simeq \Delta_Y$, es decir, Δ_X y Δ_Y son homotópicos.

Recordemos que principalmente trabajamos con el complejo simplicial de completas $\text{Cl}(G)$ de una gráfica G . El siguiente resultado involucra este complejo simplicial, además de que es un resultado importante y elemental en cuanto al estudio de las gráficas homotópicamente invariantes, ya que las gráficas clan-Helly resultan ser una clase grande de gráficas que son homotópicas a su gráfica de clanes.

Teorema 3.2.7 (Prisner [16]) *Sea G una gráfica clan Helly, entonces $G \simeq K(G)$.*

Demostración.

Definamos la gráfica bipartita $B = (X = V(G), Y = V(K(G)))$, donde se declara a $x \in G$ como adyacente a $q \in K(G)$ si $x \in q$.

Observemos que toda completa en G está contenida en un clan de G , y además si $\sigma \in \Delta_X$ y $x, y \in \sigma$, entonces existe $q \in K(G)$ tal que $x, y \in q$, y como q es un clan de G , entonces $x \sim y$, es decir, cualquier par de elementos en σ son adyacentes, o sea que σ es una completa de G , por lo que $\Delta_X = \text{Cl}(G)$.

Por otro lado, si $\sigma \in \Delta_Y$, existe un $x \in V(G)$ tal que cualquier elemento de σ contiene a x , por lo tanto σ consiste de una completa de $K(G)$, ahora una completa de $K(G)$ es una subcolección intersecante de G y como G es clan Helly entonces dicha subcolección se interseca en al menos un vértice de G por lo que se cumple $\Delta_Y = \text{Cl}(K(G))$.

Así concluimos por el teorema 3.2.6 que $G \simeq K(G)$. ■

Dada la construcción de la gráfica bipartita, en la demostración anterior es conveniente que podemos identificar al complejo Δ_Y como $\text{Cl}(K(G))$ usando que la gráfica G es clan Helly. En el capítulo siguiente aplicaremos la misma construcción de la gráfica bipartita al caso en el que G no es necesariamente clan Helly. En tal caso, Δ_Y no es igual a $\text{Cl}(K(G))$, sin embargo buscaremos condiciones que garanticen que éstos dos últimos complejos sean homotópicos.

Definición 3.2.8 *Sea G una gráfica y x un vértice de G , denotaremos con x^* al siguiente conjunto*

$$x^* = \{q \in K(G) : x \in q\}.$$

A x^* se le llama la **estrella** de x .

Otro resultado importante es el siguiente, mostrado por Escalante [3].

Teorema 3.2.9 (Escalante 1973). *Si G es una gráfica clan Helly, entonces $K(G)$ es clan Helly.*

Demostración.

Primero observemos lo siguiente: Si G es clan Helly, y el conjunto $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_s\} \in$

$K^2(G)$, es decir, Q es un clan de $K(G)$, entonces Q es una colección intersecante de clanes, por lo que existe $x \in \cap Q$. Notemos que en general x^* es una completa de $K(G)$, sin embargo, no necesariamente es un clan de la gráfica $K(G)$.

Como $x \in q_i$ para todo $q_i \in Q$ se sigue que $Q \subseteq x^*$ y como Q es un clan se tiene que $x^* \subseteq Q$, obteniendo que $x^* = Q$.

Ahora, sean Q_1, Q_2, \dots, Q_r una colección intersecante de clanes de $K(G)$. Y supongamos que x_1, x_2, \dots, x_r son tales que $Q_i = x_i^*$ para todo $i = 1, 2, \dots, r$. Sean también $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ con $i \neq j$. Sabemos que existe $q_{ij} \in Q_i \cap Q_j$, por lo que $q_{ij} \in x_i^* x_j^*$, entonces $x_i, x_j \in q_{ij}$, es decir, $x_i \sim x_j$. De esto se sigue que dos elementos distintos en $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ es una completa de G , en tal caso se encuentra en un clan, supongamos que $q \in K(G)$ es dicho clan, entonces se tiene que

$$q \in \bigcap_{i=1}^r x_i^*, \text{ y por lo tanto } q \in \bigcap_{i=1}^r Q_i.$$

■

Corolario 3.2.10 *Si G es una gráfica clan Helly, entonces $G \simeq K^n(G)$ para todo número $n \in \mathbb{N}$ (una gráfica con esta propiedad es llamada **K-homotópicamente permanente**).*

Demostración.

Se sigue de forma inductiva de los teoremas [3.2.7,3.2.9].

■

Un concepto que en ocasiones es de interés estudiar es la **convergencia** de una gráfica.

Definición 3.2.11 *Decimos que una gráfica G es **clan convergente** si la sucesión de ordenes de las gráficas $\{|K^n(G)| : n = 0, 1, 2, \dots\}$ es acotada. Esto es equivalente a la condición de que la sucesión $G, K(G), K^2(G), \dots$ consta, salvo isomorfismos, de un número finito de gráficas distintas, y también es equivalente a decir que existen dos números $m, n \in \mathbb{N}$ diferentes, tales que $K^m(G) = K^n(G)$. Si una gráfica no es clan convergente diremos que es **clan divergente**.*

Escalante en [3] muestra el resultado siguiente.

Teorema 3.2.12 (Escalante 1973). *Si G es clan Helly, entonces es clan convergente.*

Demostración.

Se mostrará que si G es clan Helly, entonces $K^2(G)$ es isomorfa a una subgráfica de G . Esto implicaría que si n es par las gráficas $K^n(G)$ tendrían a lo más tantos vértices como G , es decir, los ordenes de las gráficas $K^n(G)$ serían finitos, como $K(G)$ también es clan Helly entonces también se debe cumplir para los n impares y se tendría el resultado.

Sabemos que para cada $Q \in K^2(G)$ existe $x \in G$ tal que $x^* = Q$. Definimos la función $f : K^2(G) \rightarrow G$ como $f(Q) = x$, donde x es tal que $x^* = Q$. Ahora mostraremos que la subgráfica de G inducida por $f(K^2(G))$ es isomorfa a $K^2(G)$ (es decir, f es un encaje).

Veamos que f es inyectiva. Supongamos que dos clanes $Q_1, Q_2 \in K^2(G)$ son tales que $f(Q_1) = f(Q_2) = x$, entonces $x \in \cap Q_1$ y $x \in \cap Q_2$, ahora si pudiera pasar que

$Q_1 \neq Q_2$ entonces $Q_1 \cup Q_2$ sería una completa de $K(G)$, que contuviera propiamente a Q_1 , pero eso es una contradicción, ya que estamos suponiendo que el conjunto Q_1 es un clan de $K(G)$. Por lo tanto, $Q_1 = Q_2$.

Supongamos ahora que $Q_1, Q_2 \in K^2(G)$ y que $Q_1 \sim Q_2$, además supongamos que $x_1 = f(Q_1)$ y $x_2 = f(Q_2)$, en ese caso existe $q \in Q_1 \cap Q_2$, luego, como $x_1 \in \cap Q_1$ entonces $x_1 \in q$, similarmente, como $x_2 \in \cap Q_2$, entonces $x_2 \in q$, es decir, $x_1 \sim x_2$.

Finalmente supongamos que $Q_1, Q_2 \in K^2(G)$, con $x_1 = f(Q_1)$ y $x_2 = f(Q_2)$, y $x_1 \sim x_2$, se tiene que $\{x_1, x_2\}$ es una completa de G , por lo que existe $q \in K(G)$ tal que $x_1, x_2 \in q$, se observa entonces que $q \in x_i^* = Q_i$ para $i = 1, 2$, concluyendo que el clan $q \in Q_1 \cap Q_2$, es decir, $Q_1 \sim Q_2$.

Acabamos de mostrar que en efecto $f : K^2(G) \rightarrow f(K^2(G))$ es un isomorfismo, por lo tanto, se tiene lo que se quería mostrar. ■

Capítulo 4

Gráficas de grado bajo

Iniciaremos el capítulo dando una definición que será muy utilizada a partir de ahora.

Definición 4.0.1 Para una gráfica G denotamos y definimos su **grado máximo** por

$$\Delta(G) = \max\{|N(x)| \mid x \in V(G)\}.$$

El principal estudio en esta tesis es el tipo de homotopía de las gráficas con grado máximo pequeño, en este caso con grado máximo menor o igual a cinco, en este capítulo en particular nos enfocaremos primero en las gráficas grado máximo menor o igual a cuatro.

Otro problema que también nos interesa estudiar es qué gráficas tienen la propiedad de ser K -homotópicamente permanentes, ya habíamos mencionado antes esta propiedad, pero aquí enfatizamos la definición.

Definición 4.0.2 Una gráfica G es **K -homotópicamente permanente** si $G \simeq K^n(G)$ para todo $n \geq 0$.

Nota 4.0.3 Notemos que una gráfica K -homotópicamente permanente es una gráfica K -homotópicamente invariante. Pues para la primer propiedad mencionada se pide que $G \simeq K^n(G)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para la segunda propiedad solo se pide para $n = 1$, es decir, $G \simeq K^1(G) = K(G)$. Pero además la otra implicación no es cierta, es decir, existen gráficas que son K -homotópicamente invariantes pero no son K -homotópicamente permanentes. Por ejemplo, la conocida como la suspensión de C_5 que denotaremos ahorita por G_2 (ver 5.12). En [14] (proposición 3.2) los autores demuestran que G_2 es una gráfica tal que $G_2 \simeq K(G_2)$, pero $G_2 \not\simeq K^2(G_2)$, de hecho muestran el tipo de homotopía: $G_2 \simeq K(G_2) \simeq S^2$ (es decir, son homotópicas a una esfera S^2) y $K^2(G_2) \simeq S^3 \vee S^3 \vee S^3$ (es decir, es homotópica a una cuña de tres esferas S^3).

Definición 4.0.4 Si G es una gráfica conexa tal que $\Delta(G) \leq 4$ y $G \neq O_3$, decimos que es una gráfica de grado pequeño o de grado bajo.

La razón por la que pedimos la hipótesis de conexidad es porque podríamos estudiar por separado las componentes conexas de una gráfica. Por lo cual el problema no pierde generalidad al suponer conexidad.

El teorema principal en este capítulo es el siguiente.

Teorema 4.0.5 *Si G es una gráfica de grado bajo, entonces:*

- G es homotópicamente equivalente a una cuña de circunferencias.
- G es K -homotópicamente permanente.

Y esencialmente lo que nos dice el teorema principal del capítulo es que todas las gráficas conexas de grado menor o igual a cuatro son homotópicas a una cuña de circunferencias y que son K -homotópicamente permanentes, excepto por el octaedro O_3 . De hecho, O_3 es homotópica a una esfera S^2 y no es K -homotópicamente permanente pues resulta que $K(O_3) = O_4$ y O_4 es homotópica a una esfera S^3 , es decir, $O_3 \not\sim K(O_3)$.

4.1. Preliminares del capítulo

Para mostrar el teorema principal de este apartado, se mostrarán primero una serie de resultados acerca de las gráficas de grado bajo obtenidos de [19].

Comencemos con una definición.

Definición 4.1.1 *Sea G una gráfica, decimos que Q es una **corbata** de G si $Q \in K^2(G)$ y $\bigcap Q = \emptyset$.*

Teorema 4.1.2 *Sea G una gráfica de grado bajo. Entonces:*

- Si Q es una corbata de G , entonces Q consiste solo de triángulos y hay un triángulo interno T tal que $Q = Q_T = \{T, T_1, T_2, T_3\}$, donde $\{T \cap T_i \mid i \in \{1, 2, 3\}\}$ son las tres aristas de T . Recíprocamente, Si T es un triángulo interno, entonces Q_T es una corbata.
- Si T_1 y T_2 son triángulos internos tales que $Q_{T_1} \sim Q_{T_2}$ en $K^2(G)$, entonces $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$. Si $|T_1 \cap T_2| = 1$, entonces la gráfica de la figura 4.1 es una subgráfica de G , Si $|T_1 \cap T_2| = 2$, entonces la gráfica de la figura 4.2 es una subgráfica de G .
- $K^2(G)$ es clan-Helly.

La demostración del teorema 4.1.2 es un tanto larga, y requiere de algunos lemas, así que es por eso que se colocó en el apéndice A.

Nota 4.1.3 *Para el triángulo interno T , decimos que T es el **centro** de la corbata Q_T . Cualquier otro triángulo en Q_T es llamado una **oreja** de Q_T .*

Si G es una gráfica y e es una arista de G , vamos a denotar por $G - e$ a la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G)$ y cuyo conjunto de aristas es $E(G) - e$. Y si $e = \{x, y\}$ vamos a denotar por $N[e]$ a

$$N[x] \cap N[y] = \{z \in V(G) \mid x \sim z \sim y\} \cup e.$$

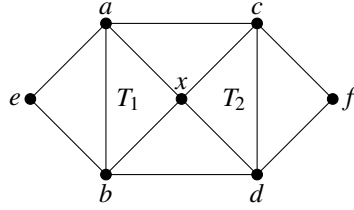


Figura 4.1: Caso $|T_1 \cap T_2| = 1$.

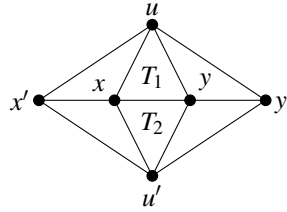


Figura 4.2: Caso $|T_1 \cap T_2| = 2$.

Teorema 4.1.4 (Proposición 2.3 de [12], ver también lema 1.6 de [1]) Sea G una gráfica tal que e es una arista propiamente contenida en $N[e]$, y $N[e]$ es completa. Entonces $G \simeq G - e$.

Demostración.

Supongamos que τ es un simplejo maximal de $\text{Cl}(G)$ que contiene a e , recordemos que τ induce una completa en G , pero entonces si $z \in \tau$ y $x \neq z \neq y$, necesariamente $x \sim z \sim y$, esto implica que $\tau \subseteq N[e]$. Pero además $N[e]$ por hipótesis es completa, y supusimos que τ es un simplejo maximal, por lo tanto $N[e] = \tau$. Esto implica que e es una cara libre de $\text{Cl}(G)$. Y notemos que justamente $\text{Cl}(G) - [e, N[e]] = \text{Cl}(G - e)$, por el teorema 3.1.5 tenemos que $\text{Cl}(G) \simeq \text{Cl}(G - e)$, es decir, $G \simeq G - e$. ■

Teorema 4.1.5 (Teorema 4.2 de [13]) Sea G una gráfica libre de O_3 tal que cualquier triángulo en G está contenido en un único clan. Entonces G es K -homotópicamente invariante.

Teorema 4.1.6 (Frías-Armenta, Neumann-Lara y Pizaña 2004). Si x es un vértice dominado de G , entonces $K(G - x)$ es isomorfa a una subgráfica inducida de $K(G)$.

Demostración.

Definamos la función $\Phi : K(G - x) \rightarrow K(G)$ por:

$$\Phi(q) = \begin{cases} q \cup \{x\} & \text{si } x \in N_G(q), \\ q & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Sea $q \in K(G-x)$, como $x \notin q$ se sigue que $\Phi(q)$ es un clan de G . Ahora veamos que Φ es inyectiva, entonces supongamos que $\Phi(q) = \Phi(q')$, si $x \in \Phi(q)$ entonces

$$\Phi(q) = \Phi(q') = q \cup \{x\} = q' \cup \{x\}.$$

De donde se sigue que $q = q'$ y si $x \notin \Phi(q)$ entonces

$$\Phi(q) = \Phi(q') = q = q',$$

por lo tanto Φ es inyectiva.

Luego, como $q \subseteq \Phi(q)$ es inmediato ver que $q \sim q'$ implica $\Phi(q) \sim \Phi(q')$. Por último, supongamos que $\Phi(q) \sim \Phi(q')$. Si x no estuviese en alguna de las imágenes entonces existe un elemento distinto de x en $\Phi(q) \cap \Phi(q')$ y por la definición de Φ se seguiría que $q \cap q' \neq \emptyset$, es decir, $q \sim q'$. Pero supongamos que $\Phi(q) = q \cup \{x\}$ y que $\Phi(q') = q' \cup \{x\}$, en ese caso como x es vértice dominado de G , supongamos que y es un vértice que domina a x , y como $\Phi(q)$ y $\Phi(q')$ son clanes de G todos los vértices de esos dos clanes son vecinos de x y también de y . Por lo tanto, se tiene que $y \in \Phi(q) \cap \Phi(q')$ lo cual implica que $y \in q \cap q'$, esto muestra que en efecto Φ es un isomorfismo de $K(G-x)$ a $\Phi(K(G-x))$. ■

Proposición 4.1.7 *En el contexto del teorema 4.1.6, cualquier vértice de $K(G)$ que no está en $\Phi(K(G-x))$ es dominado por un vértice en $\Phi(K(G-x))$.*

Demostración.

Sea q en la diferencia $K(G) - \Phi(K(G-x))$, nuestro plan es mostrar que existe $q' \in \Phi(K(G-x))$ que domina a q en $K(G)$. Tenemos que necesariamente $x \in q$ porque si no pasara eso q sería un clan de $G-x$ y por tanto $q \in \Phi(K(G-x))$. Ahora, $q-x$ no puede ser un clan de $G-x$, pues si lo fuese como $x \in N_G(q-x)$ se tendría $\Phi(q-x) = q$, es decir, $q \in \Phi(K(G-x))$, y estamos suponiendo que eso no pasa. Pero $q-x$ si es una completa de $G-x$ y debe estar contenido propiamente en algún clan q' de $G-x$. Entonces $x \notin q'$. Si $q' \cup \{x\}$ fuera completa en G , tendríamos que $q = (q-x) \cup \{x\} \subseteq q' \cup \{x\}$, pero como q es clan de la gráfica G se debe tener que $q = q' \cup \{x\}$, de donde $q-x = q'$, lo cual contradice que la inclusión de $q-x$ en q' es propia. Es decir, $q' \in K(G)$ y como $x \notin q'$, se tiene que $q' \neq q$ y como el conjunto $q' \cup \{x\}$ no es completa, se tiene que $q' = \Phi(q')$, por lo que se concluye que $q' \in \Phi(K(G-x))$.

Mostraremos que q' domina a q en $K(G)$. Si c es un clan de G tal que $c \cap q \neq \emptyset$, entonces si $x \notin c \cap q$ es inmediato que $c \cap q' \neq \emptyset$, pues $q-x \subset q'$. Si $x \in c \cap q$, entonces supongamos que y es un vértice que domina a x , en ese caso y es vecino de todos los elementos en q y en c , por lo tanto $y \in c \cap q$, y como $y \in q-x \subset q'$ se tiene que $y \in c \cap q'$, por lo que $c \sim q'$ en $K(G)$. Con esto, hemos probado que q' domina a q en $K(G)$. ■

Teorema 4.1.8 *Si G es una gráfica con vértice dominado x , entonces podemos obtener $K(G-x)$ quitando vértices dominados de $K(G)$.*

Demostración.

Por el teorema 4.1.6 $K(G-x)$ es isomorfa a una subgráfica inducida de $K(G)$, luego por la proposición 4.1.7 todo vértice que no está en $K(G-x)$ es dominado en $K(G)$ por un vértice en $K(G-x)$. ■

Definición 4.1.9 Siguiendo [4], dadas dos gráficas G y H , denotamos $G \xrightarrow{\#} H$ si H es isomorfa a una subgráfica inducida H_0 de G tal que todo vértice en G que no está en H_0 está dominado por un vértice en H_0 .

Teorema 4.1.10 (Teorema 3 de [4]) Si $G \xrightarrow{\#} H$, entonces $K(G) \xrightarrow{\#} K(H)$.

Demostración.

Notemos que en el teorema 4.1.8 se tiene que cuando x es un vértice dominado de G (es decir, $G \xrightarrow{\#} G - x$) entonces $K(G) \xrightarrow{\#} K(G - x)$. Así, este procedimiento lo podemos hacer sucesivamente para cada vértice que está en G pero no en H y entonces obtenemos que $K(G) \xrightarrow{\#} K(H)$. ■

Definición 4.1.11 Si q_1, q_2, \dots, q_n son clanes distintos en una gráfica G tales que ninguno de ellos es un subconjunto de la unión de los otros, entonces para cada $i = 1, 2, \dots, n$ existe un vértice $x_i \in q_i$ que no está en ninguno de los otros clanes. En este caso decimos que (x_1, x_2, \dots, x_n) es una **selección** de (q_1, q_2, \dots, q_n) .

Lema 4.1.12 Sean q_1, q_2, \dots, q_n clanes distintos de una gráfica G tales que para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ se tiene $q_j \not\subseteq \bigcup_{i=1}^n q_i$. Sea q un clan de G diferente de los clanes q_1, q_2, \dots, q_n tal que $q \subseteq q_1 \cup q_2 \cup \dots \cup q_n$ pero q no está contenido en la unión de $n - 1$ clanes de entre q_1, q_2, \dots, q_n . Entonces existe una selección de (q_1, q_2, \dots, q_n) que consiste de elementos de q .

Demostración.

Para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, tomemos $x_j \in q - (q_1 \cup \dots \cup \hat{q}_j \cup \dots \cup q_n)$, esto lo podemos hacer porque por hipótesis q no está contenido en la unión de $n - 1$ clanes de entre q_1, q_2, \dots, q_n . Luego, cada $x_j \in q_j$ por que $x_j \notin q_1 \cup \dots \cup \hat{q}_j \cup \dots \cup q_n$, pero tenemos que $x_j \in q \subseteq \bigcup_{i=1}^n q_i$, entonces necesariamente $x_j \in q_j$. Además, en particular se cumple que $x_j \notin q_k$ para $k \neq j$, por lo tanto (x_1, x_2, \dots, x_n) es una selección de (q_1, q_2, \dots, q_n) y consiste de elementos de q . ■

Lema 4.1.13 Sea H una subgráfica inducida de G . Si c es una completa en H que está contenida en dos diferentes clanes de H , entonces c está contenida en dos diferentes clanes de G .

Demostración.

Procederemos por contradicción, es decir, supongamos que c está contenido en un único clan q de G . Por hipótesis, $c \subseteq q_1 \cap q_2$ donde q_1 y q_2 son clanes distintos de H . Como q_1 y q_2 son completas de G , pueden ser extendidas a clanes de G , pero lo que se asumió implica que q_1 y q_2 deben estar contenidos en q . Luego, como la subgráfica H es inducida, tenemos que $q_1 \cup q_2$ es una completa en H , y entonces $q_1 = q_2$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto c está contenida en dos diferentes clanes de G . ■

Lema 4.1.14 Sea G una gráfica con $\Delta(G) \leq 4$. Sean $x, y_1, y_2, z_1, z_2 \in G$ tales que $q = \{x, y_1, z_1\}$, $q_1 = \{x, y_1, y_2\}$, $q_2 = \{x, z_1, z_2\}$ son clanes. Sea $q' \in K(G)$ tal que $x \in q'$ y $q' \not\subseteq \{q, q_1, q_2\}$. Entonces $q' = \{x, y_2, z_2\}$ y por lo tanto $y_2 \sim z_2$.

Demostración.

Tenemos que $q' \subseteq N[x] = \{x, y_1, z_1, y_2, z_2\}$. Notemos que $y_1 \notin q'$, pues la arista $\{x, y_1\}$ no puede ser extendida a un clan diferente de q y q_1 , pues si eso pasara, tendría que suceder una de dos cosas. La primera es que dicho clan contuviera a z_2 y la segunda es que contuviera un vértice y diferente de x, y_1, z_1, y_2, z_2 . Si pasa la primera entonces $q \cup q_2$ formaría una completa, lo cual contradice que q y q_2 son clanes y si pasa la segunda, tendríamos que y debe ser vecino de y_1 y de x , pero entonces x tendría cinco vecinos, lo cual contradice $\Delta(G) \leq 4$. Similarmente podemos notar que $z_1 \notin q'$. Por lo tanto, necesariamente $q' = \{x, y_2, z_2\}$. ■

Lema 4.1.15 *Sea G un gráfica con $\Delta(G) \leq 4$. Si T es un triángulo interno y T' es un triángulo tal que $T \cap T' = \{x\}$, entonces $N(x)$ induce un 4-ciclo.*

Demostración.

Supongamos que $T = \{x, y, z\}$ y $T' = \{x, y', z'\}$. Como T es un triángulo interno, existe $q \in K(G)$ tal que $q \neq T$ y $q \cap T = \{x, y\}$. Entonces $q \subseteq N[x] = \{x, y, z, y', z'\}$. Como $|q| \leq 3$ y $z \notin q$, necesariamente y' o z' está en q . Sin pérdida de generalidad, supongamos que $y' \in q$, entonces $y \sim y'$. Ahora, si consideramos $q' \in K(G)$, $q' \neq T$ y $q' \cap T = \{x, z\}$ obtenemos que $z \sim z'$. Con esto tenemos que $N(x) = \{y, z, y', z'\}$ induce un 4-ciclo. ■

Lema 4.1.16 *Sea G una gráfica con $\Delta(G) \leq 4$, con un triángulo interno T tal que todas las orejas de Q_T son triángulos internos. Entonces $G \cong O_3$.*

Demostración.

Supongamos $T = \{x, y, z\}$. Sean $T_1 = \{x, y, z'\}$, $T_2 = \{x, z, y'\}$, $T_3 = \{y, z, x'\}$ las orejas de T . Por hipótesis T_1, T_2, T_3 son triángulos internos. Como $T_1 \cap T_2 = \{x\}$, por el lema 4.1.15 tenemos que $N(x)$ induce un 4-ciclo, entonces $y' \sim z'$. De forma similar al considerar $T_2 \cap T_3 = \{z\}$ y luego $T_1 \cap T_3 = \{y\}$ obtenemos que $x' \sim y'$ y $x' \sim z'$ respectivamente. Se sigue que $G \cong O_3$. ■

Definición 4.1.17 *Si x, y son vértices de una gráfica G tales que $N[x] = N[y]$ entonces decimos que son **gemelos**.*

Lema 4.1.18 *Sea G una gráfica con $\Delta(G) \leq 4$, con dos triángulos internos T_1 y T_2 compartiendo una arista, y tales que como vértices de $K(G)$ no son gemelos. Entonces $G \simeq O_3$.*

Demostración.

Supongamos que $T_1 = \{x, y, u\}$ y $T_2 = \{x, y, u'\}$. Como T_1 es un triángulo interno, existe $x' \neq y$ con $x' \sim x$ y $x' \sim u$, y existe $y' \neq x$ con $y' \sim u$ y $y' \sim y$. Como T_1 es un clan, tenemos que $x' \neq y'$. Entonces $T_2 \cap \{x, x', u\} = \{x\}$. Por el lema 4.1.15, $x' \sim u'$. Similarmente, $T_2 \cap \{u, y, y'\} = \{y\}$, entonces $y' \sim u'$. Supongamos que T_2 no domina a T_1 en $K(G)$. Entonces existe $q \in K(G)$ con $q \cap T_1 \neq \emptyset$ y $q \cap T_2 = \emptyset$. Por lo que $q \cap T_1 = \{u\}$. Aplicando el lema 4.1.14 se tiene que $x' \sim y'$ y entonces $G \cong O_3$. ■

4.2. Tipo de homotopía de gráficas de grado bajo

Definición 4.2.1 Para una gráfica G , el **número de clan** $\omega(G)$ es el orden máximo de un clan en G , es decir,

$$\omega(G) = \max\{|q| \mid q \in V(K(G))\}.$$

Teorema 4.2.2 Si G es una gráfica de grado bajo, entonces G es homotópicamente equivalente a una cuña de circunferencias.

Demostración.

Será suficiente demostrar que G es homotópica a una gráfica sin triángulos (ver ejemplo 0.7 de [7]). Como la única gráfica de grado bajo con $\omega(G) \geq 5$ es la gráfica completa K_5 (y $\text{Cl}(K_5)$ es contraíble, y entonces es homotópica a una cuña de circunferencias vacía), podemos asumir que $\omega(G) \leq 4$. Primero vamos a probar que existe una gráfica G' tal que $\omega(G') \leq 3$ y $G \simeq G'$. Supongamos entonces que G contiene un clan q de cuatro vértices. Si un vértice en q no tiene vecinos fuera de q , entonces dicho vértice es dominado por cualquiera de sus vecinos, y por el teorema 3.1.7 puede ser removido sin alterar el tipo de homotopía de G . Supongamos entonces que todos los vértices de q tienen un vecino fuera de q , pero que $x, y \in q$, $x \neq y$ comparten a $w \notin q$ como un vecino. Dado que el grado de los vértices en G es a lo más cuatro, tenemos que $N[x] = N[y] = q \cup \{w\}$, y entonces x es dominado por y y puede ser removido sin alterar el tipo de homotopía de G . Supongamos entonces que todos los vértices de q tienen vecinos fuera de q , y tales cuatro vértices son diferentes. En tal caso para cualquier arista e de q , tenemos que $N[e] = q$, y por el teorema 4.1.4, podemos remover la arista e obteniendo una gráfica homotópicamente invariante. De esta forma, obtenemos una gráfica $G' \simeq G$ que no tiene clanes de cuatro vértices, y es de grado bajo.

Así, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que la gráfica de grado bajo G es tal que $\omega(G) \leq 3$. Notemos que G debe tener un triángulo T que no es interno, de otra forma por el lema 4.1.16 G sería O_3 . Entonces una arista de T es tal que solo está obtenida en un clan, el cual es T . Se sigue que podemos aplicar el teorema 4.1.4 para remover dicha arista y obtener una gráfica homotópicamente equivalente. Podemos remover inductivamente todos los triángulos de G , hasta obtener una gráfica $G' \simeq G$, donde G' no tiene triángulos. ■

Con esto hemos obtenido la primera parte del teorema principal (teorema 4.0.5).

4.3. Una gráfica de grado bajo es homotopicamente invariante

En los siguientes dos teoremas, vamos a denotar un triángulo con t minúscula, esto porque no estamos afirmando que el triángulo es un clan.

Lema 4.3.1 Sea G una gráfica de grado bajo, y sea $t = \{x_1, x_2, x_3\}$ un triángulo que está contenido en dos diferentes clanes de G . Entonces los vértices x_1, x_2, x_3 son gemelos.

Demostración.

Supongamos que $t \subseteq q_1 \cap q_2$, donde q_1, q_2 son dos clanes diferentes de G . Entonces existen $x'_1, x'_2 \in G$ tal que $q_i = t \cup \{x'_i\}$ para $i = 1, 2$. Entonces necesariamente $N[x_1] = N[x_2] = N[x_3] = t \cup \{x'_1, x'_2\}$, pues $|t \cup \{x'_1, x'_2\}| = 5$, por lo que cada vértice x_1, x_2, x_3 tiene cuatro vecinos y no puede tener más por hipótesis, y entonces la afirmación se sigue. ■

Teorema 4.3.2 *Sea G una gráfica de grado bajo. Entonces $K(G) \simeq G$.*

Demostración.

Sea H una gráfica obtenida de G por remover vértices de la siguiente forma: Para cada triángulo t contenido en dos diferentes clanes de G , remover exactamente dos vértices de t . Del lema 4.3.1, se sigue directamente que $G \xrightarrow{\#} H$. Afirmamos que H satisface las hipótesis del teorema 4.1.5. Primero, como H es una subgráfica inducida de G , obtenemos que G es libre de O_3 . Ahora, supongamos que $t = \{x_1, x_2, x_3\}$ es un triángulo en H contenido en los clanes q_1, q_2 de H , con $q_1 \neq q_2$. Entonces por el lema 4.1.13 tenemos que t es un triángulo en G contenido en dos diferentes clanes de G , luego, por lema 4.3.1 x_1, x_2, x_3 son gemelos en G . Pero por construcción de H no es posible que $t \subseteq H$. Así, aplica el teorema 4.1.5, y entonces $K(H) \simeq H$. Además, por teorema 4.1.10, tenemos que $K(G) \xrightarrow{\#} K(H)$, y por lo tanto $K(G) \simeq K(H) \simeq H \simeq G$. ■

4.4. La gráfica de clanes de una gráfica de grado bajo es homotópicamente invariante

Para una gráfica de grado bajo G , en esta sección vamos a demostrar que existe una gráfica obtenida de $K(G)$ removiendo vértices dominados que satisface las hipótesis del teorema 4.1.5. Vamos a considerar las implicaciones de tener un triángulo en $K(G)$ contenido en dos clanes de $K(G)$.

Lema 4.4.1 *Sea G una gráfica de grado bajo. Sea $\{q_1, q_2, q_3\}$ un triángulo en $K(G)$ que está contenido en $x^* \cap y^*$ para $x, y \in G$. Entonces $x^* = y^*$.*

Demostración.

En este caso, notemos que $\{x, y\} \subseteq q_1 \cap q_2 \cap q_3$. Supongamos que tuviéramos $q_1 \subseteq q_2 \cup q_3$. Por el lema 4.1.12 existe una selección (z_2, z_3) de (q_2, q_3) en q_1 , esto es, existen vértices $z_2 \in q_1 \cap q_2$ con $z_2 \notin q_3$ y $z_3 \in q_1 \cap q_3$ con $z_3 \notin q_2$. Sea $w \in q_2$ con $w \notin q_1$. Entonces x, y, z_2, z_3, w son cinco vértices distintos, lo cual implica que $N(x) = \{y, z_2, z_3, w\}$. Sea $w' \in q_3$ con $w' \notin q_1$. Como w' y x están en q_3 , estos deben ser vecinos, por lo que $w' \in N(x)$ y como $w' \notin q_1$, necesariamente $w = w'$. De lo anterior se puede notar que entonces $\{x, y, z_2, z_3, w = w'\}$ es una completa de cinco vértices en G , lo cual es una contradicción porque entonces $K(G)$ constaría de un solo vértice y estamos suponiendo que hay un triángulo. Se sigue que entre q_1, q_2, q_3 , ninguno de ellos está contenido en la unión de los otros dos. Sean (x_1, x_2, x_3) una selección de (q_1, q_2, q_3) . Entonces $\{x, y, x_1, x_2, x_3\}$ son cinco vértices distintos y por tanto este conjunto es igual a $N[x]$ y también es igual a $N[y]$, lo cual implica que x y y son gemelos y por lo tanto $x^* = y^*$. ■

Lema 4.4.2 *Sea G una gráfica de grado bajo. Sea $\{q_1, q_2, q_3\}$ un triángulo en $K(G)$ que está contenido en $Q_{T_1} \cap Q_{T_2}$ donde T_1 y T_2 son triángulos internos de G . Entonces $T_1 = T_2$.*

Demostración.

Supongamos que las hipótesis del lema se satisfacen con $T_1 \neq T_2$. Entonces $Q_{T_1} \sim Q_{T_2}$ en $K^2(G)$, y entonces $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$ por el teorema 4.1.2. Si $|T_1 \cap T_2| = 1$, estamos en la situación de la figura 4.1. Sin embargo, en ese caso $Q_{T_1} \cap Q_{T_2}$ consiste solo de los clanes $\{x, a, c\}, \{x, b, d\}$ y nosotros estamos suponiendo que $Q_{T_1} \cap Q_{T_2}$ contiene a $\{q_1, q_2, q_3\}$. Si $|T_1 \cap T_2| = 2$, estamos en la situación de la figura 4.2, y en ese caso, $Q_{T_1} \cap Q_{T_2} = \{T_1, T_2\}$. Así, necesariamente debe suceder $T_1 = T_2$. ■

Lema 4.4.3 *Si G es una gráfica de grado bajo, entonces G es libre de O_3 .*

Demostración.

Supongamos que $H \subseteq K(G)$ con $H = \{q_1, q_2, q_3, q'_1, q'_2, q'_3\}$ tal que su complemento \bar{H} consiste exactamente de las tres aristas $\{q_i, q'_i\}$ para $i = 1, 2, 3$. Recordemos que esta es una caracterización del octaedro O_3 , por tanto, $H \cong O_3$. Como primer caso, supongamos que los clanes correspondientes a los vértices de cada una de las ocho caras del octaedro tienen intersección no vacía. Entonces, en G tendríamos vértices $x_{123} \in q_1 \cap q_2 \cap q_3$, $x_{123'} \in q_1 \cap q_2 \cap q'_3, \dots, x_{1'2'3'} \in q'_1 \cap q'_2 \cap q'_3$. Pero entonces x_{123} tendría seis vecinos entre estos ocho vértices, lo cual no es posible. Así, vamos a asumir, sin pérdida de generalidad, que $q_1 \cap q_2 \cap q_3 = \emptyset$. Sean $x_{12} \in q_1 \cap q_2$, $x_{13} \in q_1 \cap q_3$ y $x_{23} \in q_2 \cap q_3$. No es posible que $q_1 \subseteq q_2 \cup q_3$ porque de otra forma esto implicaría que $q_1 \cup \{x_{23}\}$ es una completa que contiene propiamente a un clan. Sea (y_1, y_2, y_3) una selección de (q_1, q_2, q_3) . Notemos que los vértices $y_1, y_2, y_3, x_{12}, x_{13}, x_{23}$ son diferentes entre sí y que además $N(x_{12}) = \{y_1, y_2, x_{13}, x_{23}\}$, por lo que tenemos que $x_{12} \not\sim y_3$. De forma similar notamos que $x_{13} \not\sim y_2$ y $x_{23} \not\sim y_1$. Se sigue también que $T = \{x_{12}, x_{13}, x_{23}\}$ es un clan y un triángulo interno. Entonces $\{q_1, q_2, q_3\}$ son las orejas de la corbata Q_T , por lo que deben ser los triángulos $q_1 = \{x_{12}, x_{13}, y_1\}$, $q_2 = \{x_{12}, x_{23}, y_2\}$ y $q_3 = \{x_{13}, x_{23}, y_3\}$.

Por otro lado, $q'_1 \cap q_2 \neq \emptyset$ y $q'_1 \cap q_3 \neq \emptyset$. Si $x_{23} \in q'_1$, entonces por el lema 4.1.14 tenemos que $y_2 \sim y_3$. Si $x_{23} \notin q'_1$, entonces $q'_1 \cap q_2 = \{y_2\}$ y $q'_1 \cap q_3 = \{y_3\}$, y esto también implica $y_2 \sim y_3$. Similarmente, nuestras hipótesis sobre q'_2 implican que $y_1 \sim y_3$ y nuestras hipótesis sobre q'_3 implican que $y_1 \sim y_2$. Pero entonces $\{x_{12}, x_{13}, x_{23}, y_1, y_2, y_3\}$ induce un octaedro en G . Esta contradicción prueba nuestra afirmación. ■

Lema 4.4.4 *Sea G una gráfica de grado bajo. Entonces:*

1. *Si T es un triángulo interno que no comparte una arista con otro triángulo interno, entonces $T \in K(G)$ está dominado en $K(G)$ por una de sus orejas.*
2. *Si T_1 es un triángulo interno que comparte una arista con el triángulo interno $T_2 \neq T_1$, entonces T_1 y T_2 son gemelos en $K(G)$.*

Demostración.

Para la primera parte, supongamos que T es un triángulo interno donde Q_T tiene orejas q_1, q_2, q_3 . Para $i = 1, 2, 3$ sea $x_i \in q_i - T$. Supongamos que q_1 no domina a T .

Entonces debe haber un clan q tal que $q \cap T \neq \emptyset$ pero $q \cap q_1 = \emptyset$. Supongamos que $q_2 \cap q_3 = \{x'_1\}$. Entonces $q \subseteq N[x'_1]$ porque como $q \cap T \neq \emptyset$ y $q \cap q_1 = \emptyset$ necesariamente $q \cap T = \{x'_1\}$ y el lema 4.1.14 implicaría $x_2 \sim x_3$. Similarmente, si q_2 no domina a T tendríamos que $x_1 \sim x_3$. Pero esto implicaría que q_3 es un triángulo interno lo cual contradice la hipótesis sobre T .

La segunda parte es consecuencia inmediata del lema 4.1.18. ■

Definición 4.4.5 Decimos que un vértice x de una gráfica G es normal si $x^* \in K^2(G)$.

Teorema 4.4.6 Si G es una gráfica de grado bajo, entonces $K(G)$ es homotópicamente K -invariante.

Demostración.

Sea H la subgráfica obtenida de $K(G)$ removiendo vértices que son triángulos internos de G de acuerdo a las siguiente reglas:

1. Remover triángulos internos que no comparten arista con otros triángulo interno.
2. Si un triángulo interno comparte arista con otro triángulo interno, remover exactamente uno de ellos.

De esta forma, por el lema 4.4.4 obtenemos una gráfica H tal que $K(G) \xrightarrow{\#} H$ (entonces $K(G) \simeq H$). Vamos a demostrar que H satisface las hipótesis del teorema 4.1.5. Primero, como H es una subgráfica inducida de $K(G)$, por el lema 4.4.3 se obtiene que H es libre de O_3 .

Sea $\{q_1, q_2, q_3\}$ un triángulo en H contenido en mas de un clan de H . Por el lema 4.1.13, este triángulo está contenido en más de un clan de $K(G)$. Por el lema 4.4.1 y el lema 4.4.2 tenemos que tales clanes están contenidos en una estrella y una corbata. Sea $x \in G$ un vértice normal y T un triángulo interno en G tales que $\{q_1, q_2, q_3\} \subseteq x^* \cap Q_T$. Entonces, el teorema 4.1.2 inciso 1 nos dice que Q_T consiste de de cuatro triángulos. El triángulo T debe ser un elemento del conjunto $\{q_1, q_2, q_3\}$ para que $\{q_1, q_2, q_3\}$ pueda estar contenido en una estrella. Sin pérdida de generalidad, vamos a asumir que $T = q_1$ y que se tiene la situación de la figura 4.3, entonces $q_1 = \{x, y, z\}$, y las orejas de Q_T son q_2, q_3, q_4 .

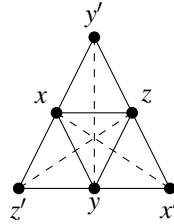


Figura 4.3: Las líneas punteadas indican vértices no adyacentes.

Como x es un vértice normal, debe haber un clan q' tal que $x \in q'$ y $q' \notin \{q_1, q_2, q_3\}$. Entonces, el lema 4.1.14 implica $y' \sim z'$. Ahora, los hechos de que $q_1 \in H$ y que q_1 es

triángulo interno implican que uno de q_2, q_3, q_4 deben ser triángulos internos (de otra manera, q_1 habría sido removido y no podría estar en H). Pero si q_2 fuese triángulo interno, entonces el lema 4.4.4 implica que q_1 y q_2 son gemelos, y nuestras reglas para formar a H implicarían que uno de q_1, q_2 no está en H . Similarmente, q_3 no puede ser interno. La única posibilidad es que q_4 fuera interno y que fue removido de G y entonces $q_4 \notin H$. Pero si q_4 es interno, el lema 4.1.15 aplicado a q_4 y q_2 implica que $N(z)$ es un 4-ciclo, y entonces $x' \sim y'$. El mismo lema aplicado a q_3 y q_4 implicaría $x' \sim z'$. Entonces, obtendríamos que $G \cong O_3$. Esta contradicción significa que H satisface las hipótesis del teorema 4.1.5, y entonces $K(H) \simeq H$. De $K(G) \xrightarrow{\#} H$, se obtiene $K^2(G) \xrightarrow{\#} K(H) \simeq H \simeq K(G)$. Es decir, $K^2(G) \simeq K(G)$. ■

4.4. La gráfica de clanes de una gráfica de grado bajo es homotópicamente invariante

Capítulo 5

Gráficas de grado máximo cinco

5.1. Resultados preliminares

Lo que nos interesa principalmente en este capítulo es calcular el tipo de homotopía de las gráficas de grado máximo cinco. Para ello en esta sección mostraremos unos resultados que nos ayudarán a simplificar estas gráficas, de tal modo que sea más sencillo calcular su tipo de homotopía.

Proposición 5.1.1 *Si G es una gráfica conexa de grado máximo menor o igual a cinco, entonces $Cl(G)$ es homotópico a un complejo simplicial de dimensión dos.*

Demostración.

Se observa que G no puede tener un clan de más de 6 vértices, pues en ese caso, cada vértice de dicho clan tiene al menos 6 vecinos, lo cual contradice la hipótesis. Notemos que si G tuviese un clan de seis vértices, necesariamente $G = K_6$, entonces G es contraíble, por lo que se cumple la afirmación. Luego, si G tuviese un clan q de cinco vértices, tenemos varios casos. Primero, si alguno de los vértices de q ya no tiene más vecinos fuera de q , entonces está dominado por cada uno de sus vecinos y entonces lo podemos quitar sin alterar el tipo de homotopía. Luego, si todos los vértices de q tienen al menos un vecino fuera de q (de hecho, cada vértice en q puede tener a lo más un vecino fuera de q porque $\Delta(G) \leq 5$), podría pasar que todos los vecinos de algún vértice en q sean distintos entre sí, pero en tal caso, podemos quitar una arista de q sin alterar el tipo de homotopía. Por otro lado, si existen al menos dos vértices en q que tienen un vecino en común fuera de q , entonces estos deben ser gemelos y por tanto se dominan mutuamente, por lo que podemos quitar un vértice sin alterar el tipo de homotopía. Es decir, lo que tenemos hasta ahora es que cualquier gráfica conexa G tal que $\Delta(G) \leq 5$ es homotópica a una gráfica donde $\omega(G) \leq 4$.

Así, sin pérdida de generalidad supongamos que G es tal que $\omega(G) \leq 4$, y supongamos que G tiene un clan de cuatro vértices $q = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Si existiese una arista de q que no estuviera contenida en otro clan distinto de q , entonces podríamos removerla sin alterar el tipo de homotopía de G y ya no tendríamos ese clan de cuatro vértices. Pero podría pasar que todas las aristas estuviesen contenidas en otro clan distinto de q .

Afirmamos que entonces existen $x_i, x_j \in q$ tales que $x_i \neq x_j$ y x_i domina a x_j . Consideremos la arista x_1x_2 , como esta debe estar contenida en un clan distinto de q , entonces existe $a \notin q$ tal que $x_1 \sim a \sim x_2$, de aquí se desprenden una serie de casos. Como la arista x_1x_3 también debe estar contenida en un clan distinto de q , entonces $x_3 \sim b \sim x_1$ para algún $b \notin q$ y podría pasar $b \neq a$ o $b = a$.

Caso $b \neq a$ (ver figura 5.1): En este caso, como $\Delta(G) \leq 5$ podemos notar que $N(x_1) = \{x_2, x_3, x_4, a, b\}$, luego, la arista x_1x_4 debe estar contenida en otro clan distinto de q , es decir, x_1 y x_4 , deben tener otro vecino en común fuera de q , pero como x_1 ya tiene cinco vecinos se tiene que $x_4 \sim a$ o $x_4 \sim b$, ambos casos son simétricos, por lo que sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $x_4 \sim b$. Así, como hemos estado argumentando debe suceder que x_2 y x_3 tengan un vecino en común fuera de q y podría suceder que dicho vecino fuese a o fuese b , o bien también podría suceder que $x_2 \sim c \sim x_3$ para algún $c \notin q \cup \{a, b\}$. Si fuese a notemos que $N[x_1] = N[x_3] = \{x_1, x_2, x_3, x_4, a, b\}$ y si fuese b , entonces $N[x_1] = N[x_2] = \{x_1, x_2, x_3, x_4, a, b\}$, es decir, en ambos casos x_1 tiene un gemelo dentro de q por lo que se dominan mutuamente y podemos quitar alguno sin alterar el tipo de homotopía. Y si sucede que $x_2 \sim c \sim x_3$ para algún $c \notin q \cup \{a, b\}$, en tal caso, notemos nuevamente que x_2 y x_4 deben tener un vecino en común fuera de q , pero $N(x_2) = \{x_1, x_3, x_4, a, c\}$, por lo que necesariamente debe suceder $x_4 \sim a$ o $x_4 \sim c$, si sucede $x_4 \sim a$ tenemos que $N[x_1] = N[x_4]$ y si sucede $x_4 \sim c$, entonces $N[x_3] = N[x_4]$ por lo que en cualquier caso tenemos vértices gemelos en q y podemos remover alguno sin alterar el tipo de homotopía.

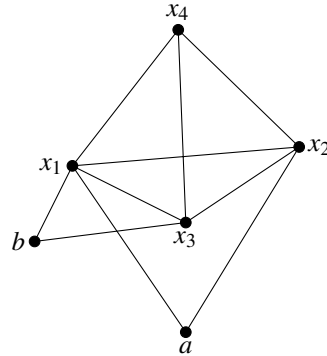


Figura 5.1: Caso $b \neq a$.

Caso $b = a$ (ver figura 5.2): Notemos aquí que $\{x_1, x_2, x_3, a\}$ es un clan de cuatro vértices, luego, los vértices x_1 y x_4 deben tener un vecino en común fuera de q , el cual no puede ser a porque en ese caso tendríamos una completa de cinco vértices, lo cual supusimos que no pasaba. Sea $c \notin q \cup \{a\}$ con $x_1 \sim c \sim x_4$. Si el vecino en común que deben tener los vértices x_2 y x_4 fuera de q fuese c , entonces tendríamos $N[x_2] = N[x_1]$, similarmente, si x_3 y x_4 fuesen vecinos de c tendríamos $N[x_1] = N[x_3]$, por lo tanto, supongamos que existe $d \notin q \cup \{a, c\}$ tal que $x_2 \sim d \sim x_4$. Así, el vértice en común que deben tener x_3 y x_4 fuera de q solo puede ser d porque hasta este momento $|N(x_4)| = 5$ y ya vimos x_4 no puede ser vecino de a ni tampoco x_3 puede ser vecino de c , como ya vimos anteriormente. Pero si x_3 fuese vecino de d tendríamos $N[x_2] = N[x_3]$. Es decir,

nuevamente tenemos un vértice en q que domina a otro vértice de q .

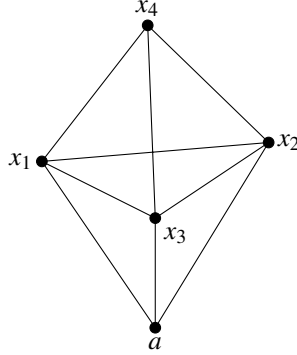


Figura 5.2: Caso $b = a$.

Con esto podemos concluir que siempre que haya un clan de cuatro vértices en G podemos o bien quitar una arista sin alterar el tipo de homotopía de G o bien quitar un vértice dominado, es decir, G es homotópica a una gráfica que no tiene clanes de 6, 5, ni de 4 vértices. Por lo tanto, $\text{Cl}(G)$ es homotópico a un complejo simplicial de dimensión dos. ■

Proposición 5.1.2 *Si G es una gráfica conexa de grado máximo menor o igual a $n \geq 5$, entonces $\text{Cl}(G)$ es homotópico a un complejo simplicial de dimensión $n - 3$.*

Demostración.

La demostración se realizará siguiendo la idea de la proposición 5.1.1. Notemos que si G tuviese un clan de $n + 1$ vértices, necesariamente $G = K_{n+1}$, entonces G es contraíble y tenemos el resultado. Supongamos ahora que G tuviese un clan q de n vértices. Si alguno de los vértices de q ya no tuviese vecinos fuera de q , entonces este es dominado por cada uno de sus vecinos y por tanto lo podemos quitar sin alterar el tipo de homotopía. Supongamos entonces que todos los vértices de q tienen vecinos fuera de q . Si cada vértice de q tiene un vecino diferente fuera de q entonces podemos colapsar una arista sin alterar el tipo de homotopía, pero si no, existen $x, y \in q$ con $x \neq y$ y $a \notin q$ tal que $x \sim a \sim y$, pero entonces $N[x] = N[y]$, es decir, x y y son gemelos y podemos quitar alguno sin alterar el tipo de homotopía.

Finalmente, supongamos que G tuviese un clan $q = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ de $n - 1$ vértices. En caso de que no pudiésemos colapsar ninguna arista, querría decir que toda arista de q está contenida en al menos dos clanes distintos, y por tanto debe existir al menos un vértice fuera de q tal que es vecino de ambos elementos de la arista. Notemos que no es posible que todas las aristas de la forma $\{x_1, x_i\}$ con $i = 2, 3, \dots, n - 1$ tengan en común un solo vecino fuera de q , puesto que en ese caso tendríamos una completa de n elementos que contiene a q y estamos suponiendo que q es un clan. Por lo tanto, deben existir $a, b \notin q$ tales que $a \neq b$, $x_1 \sim a \sim x_i$ y $x_1 \sim b \sim x_j$ para algunos $i \neq j \in \{2, \dots, n - 1\}$. Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $x_i = x_2$ y $x_j = x_3$. En ese caso, como $\Delta(G) \leq n$ podemos notar que $N(x_1) = \{x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, a, b\}$, luego,

la arista x_1x_4 debe estar contenida en otro clan distinto de q , es decir, x_1 y x_4 , deben tener otro vecino en común fuera de q , pero como x_1 ya tiene n vecinos se tiene que $x_4 \sim a$ o $x_4 \sim b$, ambos casos son simétricos, por lo que s. p. g. vamos a suponer que $x_4 \sim b$. Así, como hemos estado argumentando debe suceder que x_2 y x_3 tengan un vecino en común fuera de q y podría suceder que dicho vecino fuese a o fuese b , si fuese a notemos que $N[x_1] = N[x_3] = q \cup \{a, b\}$ y si fuese b , entonces $N[x_1] = [x_2] = q \cup \{a, b\}$, es decir, en ambos casos x_1 tiene un gemelo dentro de q por lo que se dominan mutuamente y podemos quitar alguno sin alterar el tipo de homotopía. Sin embargo, también podría suceder que $x_2 \sim c \sim x_3$ para algún $c \notin q \cup \{a, b\}$, en este caso, notemos nuevamente que x_2 y x_4 deben tener un vecino en común fuera de q , pero $|N(x_2)| = n$, por lo que necesariamente debe suceder $x_4 \sim a$ o $x_4 \sim c$, si sucede $x_4 \sim a$ tenemos que $N[x_1] = N[x_4]$ y si sucede $x_4 \sim c$, entonces $N[x_3] = N[x_4]$, por lo que en cualquier caso tenemos vértices gemelos en q y podemos remover alguno sin alterar el tipo de homotopía.

Con esto podemos concluir que siempre que haya un clan de $n - 1$ vértices en G podemos o bien quitar una arista sin alterar el tipo de homotopía de G o bien quitar un vértice dominado, es decir, G es homotópica a una gráfica que no tiene clanes de $n + 1$, n , ni de $n - 1$ vértices. Por lo tanto, $\text{Cl}(G)$ es homotópico a un complejo simplicial de dimensión $n - 3$. ■

Proposición 5.1.3 *Sea G una gráfica conexa con al menos dos vértices y $\Delta(G) \leq 5$, entonces para calcular el tipo de homotopía de G podemos suponer que toda arista está en 0, 2 o 3 triángulos.*

Demostración.

Por la proposición 5.1.2 podemos suponer que el valor máximo del número de clan de G es 3. Luego, si una arista está en un solo triángulo, dicho triángulo debe ser un clan, es decir, esta arista está contenida en único clan y la podemos quitar sin alterar el tipo de homotopía de G . Supongamos ahora que una arista ab de G está contenida en cuatro triángulos, entonces existen cuatro vértices x_1, x_2, x_3 y x_4 tales que todos son vecinos de a y de b , además a y b son vecinos porque forman arista, esto combinado con $\Delta(G) \leq 5$, se tiene que necesariamente $N[a] = \{a, b, x_2, x_3, x_4\} = N[b]$, entonces a y b son gemelos. Por tanto a y b se dominan mutuamente y podemos quitar alguno sin alterar el tipo de homotopía eliminando así la arista que estaba contenida en cuatro triángulos. Finalmente, se sigue directamente que no es posible que una arista esté en cinco triángulos o más porque contradice la hipótesis $\Delta(G) \leq 5$. ■

Proposición 5.1.4 *Sea G una gráfica conexa con al menos dos vértices, $\Delta(G) \leq 5$, sin vértices dominados, con $\omega(G) \leq 3$ y tal que toda arista está en dos triángulos, entonces G es localmente cíclica. Y de hecho, la vecindad de cada punto es C_4 o C_5 .*

Demostración.

Sea $a \in G$, como G es conexa y $|G| \geq 2$, a debe tener al menos un vecino $b \in G$. Luego, la arista ab debe estar en dos triángulos, por tanto, existen dos vértices $c, d \in G$ tales que ambos son vecinos de a y de b . Consideremos la arista ac . Esta debe estar también contenida en dos triángulos (notemos que ya está contenida en el triángulo $\{a, b, c\}$). Una forma de que eso pasara es que c, a y d formaran triángulo, pero esto no

puede pasar porque los vértices a, b, c y d formarían una completa de cuatro vértices y estamos suponiendo que $\omega(G) \leq 3$, entonces debe existir otro vértice e tal que $c \sim e \sim a$. Vamos a considerar ahora la arista ae , esta también debe estar en dos triángulos (notemos que ya está en el triángulo $\{a, c, e\}$), nuevamente se nota que una forma de que ae esté en dos triángulos es si $e \sim b$, pero en ese caso $\{a, b, c, e\}$ sería una completa de cuatro vértices, entonces nos quedan dos casos:

Caso 1: Existe otro vértice $f \in G$ tal que $a \sim f \sim e$ (ver figura 5.3). Pero si esto pasa tenemos que $|N(a)| = 5$, es decir, a ya no puede tener más vecinos, y para que la arista af esté contenida en otro triángulo, además de $\{a, e, f\}$, tendría que pasar que f fuese vecino de b, c o d . Pero si sucediera $f \sim b$, entonces la arista ab estaría en tres triángulos contradiciendo la hipótesis, similarmente si $f \sim c$, entonces la arista ac estaría en tres triángulos. Por lo que necesariamente $f \sim d$. De esto se observa que $N(a) = \{b, c, d, e, f\}$, que $d \sim b \sim c \sim e \sim f \sim d$ y que no puede haber más adyacencias entre estos vértices porque si las hubiera se contradice la hipótesis de que cada arista está en dos triángulos. Por lo tanto $N(a) = C_5$.

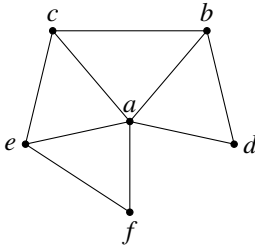


Figura 5.3: Caso 1.

Caso 2: Se cumple $e \sim d$ (ver figura 5.4). Si a tuviese otro vecino f , diferente de b, c, d y e , entonces la arista af debe estar en dos triángulos, pero en ese caso $|N(a)| = 5$, entonces la única forma de que af esté en dos triángulos es que f sea vecino de dos vértices x_1 y x_2 contenidos en $N(a)$, de aquí se desprenden esencialmente dos casos. El primero es que $x_1 \sim x_2$, pero si eso pasa entonces $\{a, x_1, x_2, f\}$ formarían una completa de cuatro vértices, entonces debe pasar que $x_1 \not\sim x_2$, y solo hay dos formas de que eso ocurra, que son $\{x_1, x_2\} = \{c, d\}$ o $\{x_1, x_2\} = \{b, e\}$, ambos casos contradicen la hipótesis de que toda arista está en dos triángulos. Por lo tanto $N(a) = \{b, c, d, e\}$, además notemos que $b \sim c \sim e \sim d \sim b$ y ya no puede haber más adyacencias entre estos vértices, pues si las hubiera se formarían completas de cuatro vértices, es decir, $N(a) = C_4$. ■

Proposición 5.1.5 *Sea G una gráfica conexa, con $\Delta(G) \leq 5$, $\omega(G) \leq 3$ y tal que cada arista de G está en 0, 2 o 3 triángulos. Entonces, si una arista está en tres triángulos, ésta es incidente a exactamente dos aristas que también están en tres triángulos.*

Demostración.

Sea ab una arista de G que está en tres triángulos, supongamos $\{a, b, x_1\}$, $\{a, b, x_2\}$ y

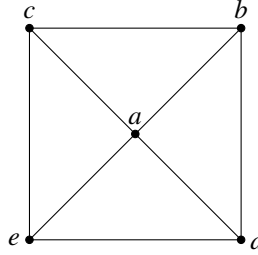


Figura 5.4: Caso 2.

$\{a, b, x_3\}$. Luego, la arista ax_1 ya está en el triángulo $\{a, b, x_1\}$, pero ésta debe estar al menos en dos triángulos, por lo que en principio podría ser que $\{a, x_1, x_2\}$ o $\{a, x_1, x_3\}$ formen triángulo, pero en cualquiera de esos casos se formaría una completa de cuatro vértices, lo cual no se puede, por tanto, debe existir un vértice c tal que $a \sim c \sim x_1$. Ahora, la arista ac ya está en el triángulo $\{a, c, x_1\}$, pero debe estar en al menos dos y notemos que $|N(a)| = 5$, por tanto a ya no puede tener más vecinos y por lo cual para que la arista ac se encuentre en al menos un triángulo más, necesariamente $c \sim x_2$ o $c \sim x_3$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $c \sim x_2$. De forma similar observemos que la arista ax_3 ya está en el triángulo $\{a, b, x_3\}$ pero debe estar en al menos otro triángulo y eso nos lleva a que necesariamente $x_3 \sim c$. Por lo tanto tenemos que la arista ac es incidente a la arista ab y está en los triángulos $\{a, c, x_1\}$, $\{a, c, x_2\}$ y $\{a, c, x_3\}$.

De forma similar notemos que la arista bx_1 ya está en el triángulo $\{a, b, x_1\}$, pero por hipótesis debe estar en al menos dos, y con un argumento similar podemos notar que necesariamente debe existir $d \notin \{a, b, c, x_1, x_2, x_3\}$ tal que $b \sim d \sim x_1$. Repitiendo el argumento pero ahora sustituyendo a por b se puede notar que necesariamente d debe ser vecino de x_1, x_2 y x_3 , es decir, la arista bd es incidente a la arista ab y bd está en los triángulos $\{a, d, x_1\}$, $\{a, d, x_2\}$ y $\{a, d, x_3\}$.

Hasta ahora, ya tenemos la existencia de las dos aristas que están en tres triángulos y veamos porque no puede haber más. Observando que $|N(a)| = |N(b)| = 5$, la única forma de que haya otra arista incidente a ab y que esté en tres triángulos es que sea una de las aristas de la forma ax_i o bx_i para algún $i \in \{1, 2, 3\}$, y notemos (ver figura 5.5) que cada una de estas aristas ya está contenida en dos triángulos y la única forma de que alguna de estas aristas esté contenida en otro triángulo más es que haya alguna adyacencia entre los vértices x_1, x_2 y x_3 , pero esto nos llevaría a una contradicción con la hipótesis $\omega(G) \leq 3$. Por lo tanto las aristas ac y bd son las únicas aristas incidentes a ab que están contenidas en tres triángulos. ■

Proposición 5.1.6 *Sea G una gráfica conexa, con $\Delta(G) \leq 5$, $\omega(G) \leq 3$ y tal que cada arista de G está en 0, 2 o 3 triángulos. Entonces la subgráfica que inducen las aristas que están en tres triángulos es 2-regular y por lo tanto es una unión disjunta de ciclos. Más aún, todos esos ciclos son C_4 o C_5 .*

Demostración.

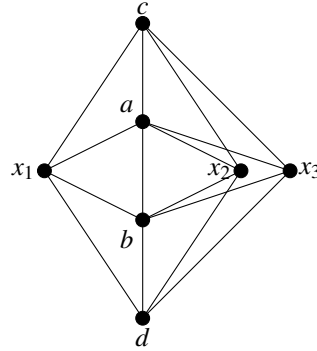


Figura 5.5: Aristas en tres triángulos.

Cabe destacar que dada una gráfica G y un subconjunto de aristas $A \subseteq E(G)$, la subgráfica inducida por el conjunto de aristas A es la que tiene como conjunto de vértices $\bigcup A$ y como conjunto de aristas a A . Así entonces, sea F es la subgráfica inducida por las aristas que están en tres triángulos. Luego, si $a \in F$, entonces debe existir $b \in F$ con $b \neq a$ tal que $ab \in E(F)$ así entonces, ab está en tres triángulos en la gráfica G . De la proposición 5.1.5 tenemos que, entonces hay exactamente dos aristas ac y bd que también están en tres triángulos y que son incidentes a ab . Por lo cual $ac, bd \in E(F)$, y entonces $|N(a)| = |\{c, b\}| = 2$ en F , es decir, a tiene dos vecinos, como a fue un vértice arbitrario en F tenemos que F es 2-regular. Así, del corolario 1.1.10 se tiene que F es unión disjunta de ciclos.

Notemos que con lo mencionado anteriormente también mostramos que a, b, c, d están en una misma componente conexas de F , las cuales son ciclos, por lo que cada componente de F es un ciclo de al menos cuatro vértices. Si la componente conexas de F tuviese seis vértices o más, entonces deberían existir $e, f \in G$ tales que ce y df son aristas que están en tres triángulos, y entonces la gráfica de la figura 5.6 sería una subgráfica de G . Luego, notemos que hasta este punto c ya tiene cinco vecinos, y como ce debe estar en al menos tres triángulos, entonces necesariamente e debe ser vecino de los vértices x_1, x_2 y x_3 , pues no puede ser vecino de a , porque entonces se formaría un ciclo de menos de seis vértices. Con un argumento similar se demuestra que necesariamente f también debe ser vecino de x_1, x_2 y x_3 , pero entonces x_1 tendría al menos seis vecinos ($N(x_1) \supseteq \{a, b, c, d, e, f\}$) lo cual contradice nuestra hipótesis. Con esto concluimos que todos los ciclos en F son C_4 o C_5 . ■

Corolario 5.1.7 *Sea G una gráfica conexas, con $\Delta(G) \leq 5$, $\omega(G) \leq 3$ y tal que cada arista de G está en 0, 2 o 3 triángulos. Si F es la subgráfica de G inducida por las aristas que están en tres triángulos en G , entonces si uno de los ciclos que aparece en F es un C_5 , entonces G es la gráfica de la figura 5.7 (la cual llamaremos **suspensión de C_5 con membrana**). Además, si uno de los ciclos que aparece en F es un C_4 , entonces la gráfica de la figura 5.5 pero agregándole la arista cd es una subgráfica de G (a dicha gráfica le llamaremos un **octaedro con membrana**).*

Demostración.

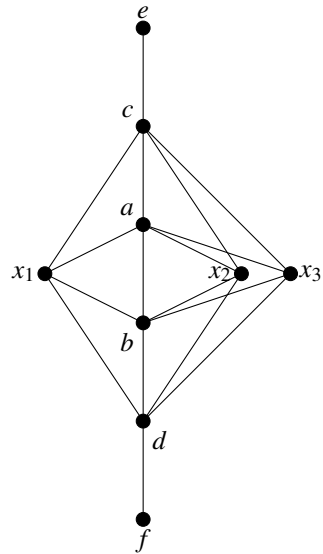


Figura 5.6: Caso en el que se forma un ciclo de seis o más vértices en F .

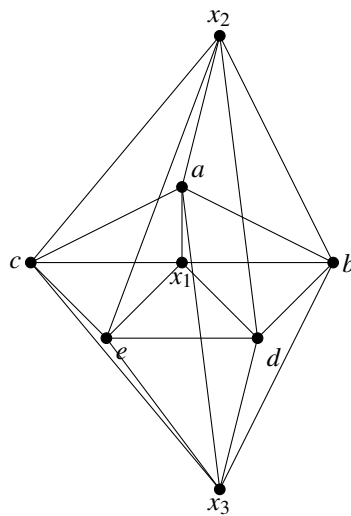


Figura 5.7: Suspensión de C_5 con membrana.

Sean $a, b, c, d, e \in F$ tales que forman un ciclo de cinco vértices en F de tal modo que $a \sim b \sim d \sim e \sim c \sim a$, notemos que de la proposición 5.1.5 se tendría que la gráfica de la figura 5.5 sería una subgráfica de G . Más aún, como a, b, c, d, e forman un ciclo, entonces la gráfica de la figura 5.8 es una subgráfica de G . Ahora, como de tiene que estar en tres triángulos y d ya tiene cinco vecinos, necesariamente debe suceder que e es vecino de x_1, x_2 y x_3 . Con esto se formaría la suspensión de C_5 con membrana, la cual sería una subgráfica de G , pero notemos que la suspensión de C_5 con membrana es 5-regular, y como por hipótesis G es conexa, entonces G debe ser la suspensión de C_5 con membrana.

Ahora, supongamos que F tiene un C_4 , sin pérdida de generalidad supongamos que las aristas que inducen el C_4 son ab, ac, bd y cd . Pero como cada una de las aristas debe estar en tres triángulos en G y siguiendo el argumento de la demostración de la proposición 5.1.5 se nota que la gráfica de la figura 5.5 debe ser una subgráfica de G . Pero además habíamos supuesto que cd es una arista, por lo tanto de cumple lo que se quería demostrar. ■

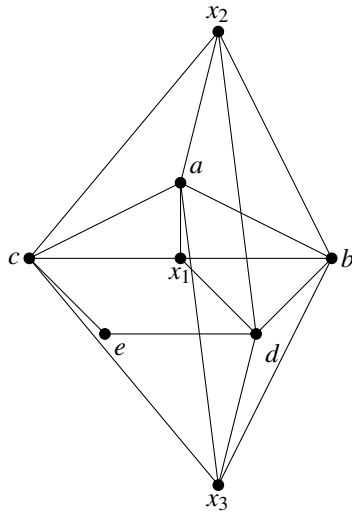


Figura 5.8: Subgráfica de G .

Definición 5.1.8 Dada una gráfica G denotaremos por \hat{G} a la subgráfica que se obtiene de G quitándole todas las aristas que no están en ningún triángulo, es decir;

$$V(\hat{G}) = V(G) \quad \text{y} \quad E(\hat{G}) = E(G) - \{e \in E(G) \mid e \text{ está en } 0 \text{ triángulos}\}.$$

Proposición 5.1.9 Sea G una gráfica conexa, con $\Delta(G) \leq 5$, $\omega(G) \leq 3$ y tal que cada arista de G está en 0, 2 o 3 triángulos. Entonces \hat{G} no tiene aristas que estén en cero triángulos.

Demostración.

Procederemos por contradicción. Supongamos que ab es una arista de \hat{G} que está en cero triángulos, esto implicaría que ab está en al menos dos triángulos en G , en particular

está en uno. Supongamos que $\{a, b, c\}$ es uno de esos triángulos. Luego, recordemos que \hat{G} es esencialmente la gráfica G pero removiendo las aristas que están en cero triángulos. Como estamos suponiendo que ab está en cero triángulos en \hat{G} , eso querría decir que las aristas ac y bc fueron removidas de G para obtener \hat{G} , pero esto es una contradicción, pues ac y bc sí están en un triángulo en G . Por lo tanto, \hat{G} no tiene aristas que están en cero triángulos. ■

Proposición 5.1.10 *Sea G una gráfica conexa sin vértices dominados, con $\Delta(G) \leq 5$, $\omega(G) \leq 3$ y tal que cada arista de G está en 0, 2 o 3 triángulos. Entonces \hat{G} no tiene dominados.*

Demostración.

Primero, podría suceder que exista $x \in \hat{G}$ tal que x no tenga ningún vecino, y en tal caso x no puede ser dominado. Luego, si a es un vértice dominado en \hat{G} debe tener al menos un vecino, digamos b , entonces la arista ab debe estar en al menos dos triángulos en \hat{G} (esto es consecuencia de la proposición 5.1.9). Supongamos que $\{a, b, c\}$ y $\{a, b, d\}$ son dichos triángulos, notemos que esto implica que a debe tener al menos tres vecinos y la gráfica de la figura 5.9 debe ser una subgráfica de \hat{G} . Notemos que a no puede

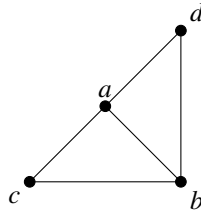


Figura 5.9: Subgráfica de \hat{G} .

tener solo tres vecinos, porque en cuyo caso la arista ac debe estar en dos triángulos y como a solo tiene tres vecinos, necesariamente $\{a, c, d\}$ es un triángulo, esto implicaría que $\{a, b, c, d\}$ es una completa de cuatro vértices contradiciendo nuestra hipótesis. Como \hat{G} es subgráfica de G , a no puede tener más de cinco vecinos en \hat{G} . Vamos a suponer ahora que a tuviese cinco vecinos en \hat{G} , entonces debería estar dominado por algún vértice, digamos a' , pero entonces $N[a] \subseteq N[a']$, y como a ya tiene cinco vecinos, necesariamente $N[a']$ también debe tener cinco vecinos, de hecho a y a' son gemelos en \hat{G} . Pero esto implicaría que también son gemelos en G , y se dominarían mutuamente en G , lo cual contradice la hipótesis de que G no tiene dominados. Ahora, solo nos queda el caso en el que a tiene cuatro vecinos, entonces como veníamos suponiendo, b, c, d son vecinos de a y la gráfica de la figura 5.9 es una subgráfica de \hat{G} . Pero como estamos suponiendo que a tiene cuatro vecinos, sea e el otro vecino, en ese caso la gráfica de la figura 5.10 es subgráfica de \hat{G} . Ahora, notemos que ac debe estar en dos triángulos, y la única forma de que eso pase sin llegar a una contradicción es que ce sea una arista, y de forma similar se puede notar que de debe ser una arista (por lo que la gráfica de la figura 5.11 debe ser una subgráfica de \hat{G}). Luego, como a debe ser dominado por alguno de sus vecinos, sin pérdida de generalidad, vamos a suponer que

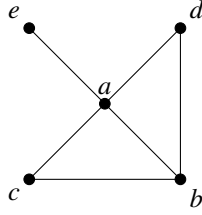


Figura 5.10: Subgráfica de \hat{G} .

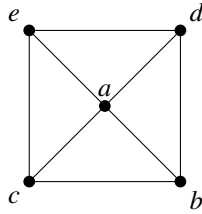


Figura 5.11: Subgráfica de \hat{G} .

es dominado por e , es decir, $N[a] \subseteq N[e]$, en tal caso, debe suceder que e es vecino de b , pero entonces $\{a, b, c, e\}$ formaría una completa de cuatro vértices, contradiciendo nuevamente nuestra hipótesis sobre G . Con esto podemos concluir que efectivamente \hat{G} no tiene dominados. ■

Definición 5.1.11 Decimos que una gráfica G es localmente C_n si para cada vértice x de G , se cumple que $N(x)$ induce un ciclo C_n en G .

Nota 5.1.12 En el artículo [10], se muestra que las gráficas de la figura 5.12, son todas las gráficas conexas que son localmente C_4 y C_5 . Más aún, todas esas gráficas son homotópicas a una esfera S^2 .

La nota 5.1.12 es importante, ya que da lugar al siguiente resultado.

Teorema 5.1.13 Sea G una gráfica conexas sin vértices dominados, con $\Delta(G) \leq 5$, $\omega(G) \leq 3$ y tal que cada arista de G está en 0, 2 o 3 triángulos. Entonces las componentes conexas de \hat{G} son puntos aislados, alguna de las gráficas de la figura 5.12, un octaedro con membrana o una suspensión de C_5 con membrana.

Demostración.

Sea C una componente conexas de \hat{G} , puede suceder que C consista de una solo vértice, en tal caso C es un vértice aislado. Ahora, supongamos que C tiene al menos dos vértices, en ese caso, deben existir vértices $a, b \in C$ tales que $a \sim b$, pero como \hat{G} no tiene aristas que estén en cero triángulos entonces ab debe estar en dos o tres triángulos en \hat{G} . Si se diera el caso en el que C tiene solamente aristas que están en exactamente dos triángulos, y además sabemos de la proposición 5.1.10 que \hat{G} no tiene dominados,

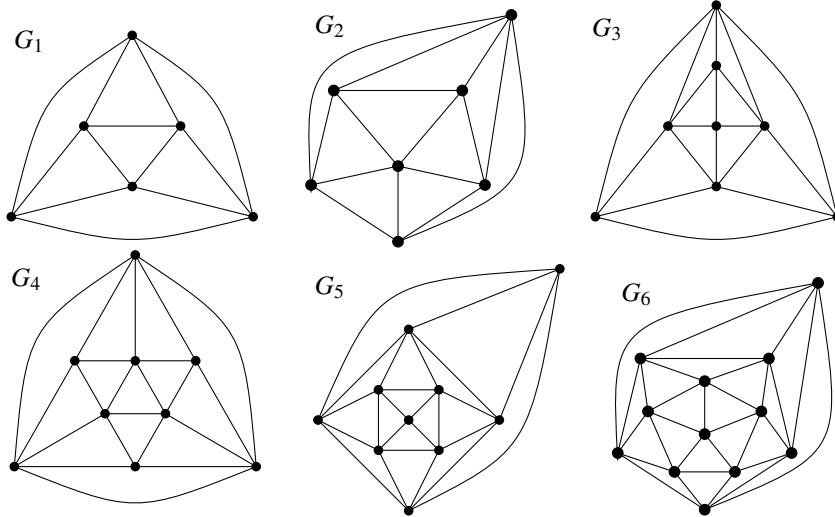


Figura 5.12: Gráficas localmente C_4 y C_5 .

entonces por la proposición 5.1.4 se tiene que C es localmente cíclica C_4 y C_5 , por lo que C necesariamente es una de las gráficas de la figura 5.12. Pero ahora supongamos el caso en el que C tiene al menos una arista que está en tres triángulos, ya sabemos del corolario 5.1.7 que si las aristas que están en tres triángulos inducen un C_5 , entonces de hecho C es la suspensión de C_5 con membrana. Finalmente supongamos que entonces las aristas que están en tres triángulos inducen un C_4 . En tal caso, de nuevo por el corolario 5.1.7 tenemos que el octaedro con membrana es una subgráfica de C . Para entender mejor la prueba vamos a considerar el dibujo del octaedro con membrana de la figura 5.13. Notemos que los vértices a, b, c y d ya tienen cinco vecinos (es decir,

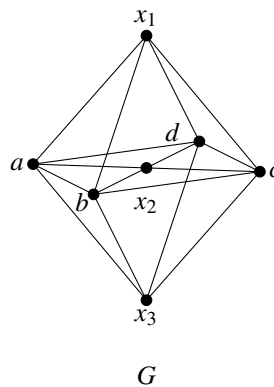


Figura 5.13: Octaedro con membrana.

ya no pueden tener más vecinos además de los que ya tienen), luego, los vértices x_1, x_2

y x_3 tienen cuatro vecinos cada uno (de hecho $N(x_1) = N(x_2) = N(x_3) = \{a, b, c, d\}$). Veamos que no puede suceder que x_i sea vecino de x_j para $i \neq j$, pues en ese caso se formarían completas de cuatro vértices, por ejemplo, si $x_1 \sim x_2$, entonces $\{x_1, x_2, b, c\}$ sería una completa de cuatro vértices, lo cual contradice nuestra hipótesis $\omega(G) \leq 3$, y lo mismo sucede si $x_1 \sim x_3$ o $x_2 \sim x_3$. Entonces si alguno los vértices x_i ($i = 1, 2, 3$) tuviese otro vecino más, debería ser distinto de $a, b, c, d, x_1, x_2, x_3$, sin pérdida de generalidad supongamos que es x_1 quién tiene dicho vecino y llamémoslo e . Así entonces la arista $x_1 e$ debería estar en al menos dos triángulos, pero esto ya no es posible, puesto que $|N(x_1)| = 5$ y entonces e debería ser vecino de alguno de los vértices a, b, c, d , los cuales también ya tenían cinco vecinos. Por lo tanto, los vértices x_1, x_2 y x_3 ya no pueden tener más vecinos en C . Concluimos que entonces C es el octaedro con membrana y también se concluye el resultado. ■

5.2. Complejos CW

En la sección anterior mostramos algunos resultados que nos servirán para calcular el tipo de homotopía de las gráficas de grado máximo cinco. Pero para esto vamos a necesitar de un concepto muy conocido en topología algebraica, que son los **complejos CW**. En esta sección vamos a dar las ideas principales sobre los complejos CW y el tipo de homotopía de algunos de estos espacios, de los cuales no se darán muchos detalles de la formalización de ciertos conceptos. Para más detalles tenemos el libro [7] como referencia, principalmente el capítulo cero.

Primero, llamaremos un **n -disco** a $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$. Luego $\partial D^n = S^{n-1}$, donde $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Llamamos y denotamos a una **n -célula** por e^n y es un espacio homeomorfo al n -disco abierto, es decir, $e^n = D^n - \partial D^n$. Cuando escribamos e^n_α significa que es una n -célula indexada por $\alpha \in I$, donde I es un conjunto de índices.

Así entonces, siguiendo a [7], explicaremos como se construye un complejo CW.

- (1) Comenzamos con un conjunto discreto X^0 cuyos punto llamaremos 0-células.
- (2) De forma inductiva formamos el **n -esqueleto** X^n de X^{n-1} pegando n -células e^n_α por medio de mapas $\phi: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$. Es decir, X^n es el espacio cociente de la **unión disjunta** $X^{n-1} \coprod_\alpha D^n_\alpha$ (la unión disjunta es el espacio donde se considera que todos los uniendos no comparten ningún punto en común entre sí). Con una colección de n -discos D^n_α bajo las identificaciones $x \sim \phi_\alpha(x)$ para $x \in \partial D^n_\alpha = S^{n-1}$.
- (3) Uno podría detener ese proceso en un número finito de pasos y tendríamos $X = X^m$ para alguna $m < \infty$, o bien seguir este proceso de forma infinita, y entonces $X = \bigcup_m X^m$. Pero para nuestros propósitos solo nos va a interesar el caso finito.

Un espacio topológico X que se pueda construir siguiendo este procedimiento es lo que llamamos un complejo CW. Como es de esperarse, las células que se usan para construir un complejo CW se toman con la topología usual heredada de \mathbb{R}^n , y la topología que se le da a un complejo CW es la topología cociente en cada paso que se va construyendo.

A continuación mostraremos algunos ejemplos de espacios que son complejos CW y como construirlos.

Veamos que S^1 es un complejo CW, para ello tendríamos que construirlo con células siguiendo los pasos ya mencionados. De hecho, nos basta con considerar una 0-célula e^0 y una 1-célula e^1 . Y consideramos el mapeo constante $\phi: S^0 \rightarrow e^0$. Es decir, lo que tenemos es un intervalo donde sus extremos están identificados, esto es justamente homeomorfo a S^1 . Como se puede observar en la figura 5.14, si e_1 es la 1-célula con frontera $\{x_1, x_2\}$, entonces $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ que es el único punto que se encuentra en e^0 , es decir, en el cociente que se obtiene de $e^0 \amalg e_1$ bajo ϕ , el conjunto $\{x_1, x_2\} \cup e_0$ es una clase de equivalencia.

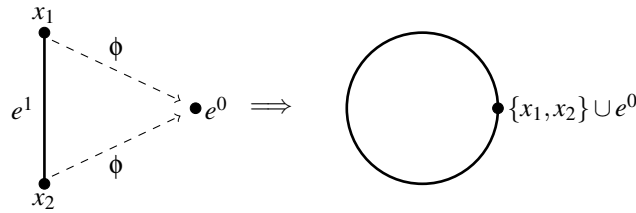


Figura 5.14: Construcción de S^1 como complejo CW.

En general una S^n esfera tiene estructura de complejo CW, utilizando solo dos células e^0 y e^n , la n -célula se pega bajo el mapeo constante $S^{n-1} \rightarrow e^0$. Esto es equivalente a considerar a S^n como el espacio cociente $D^n / \partial D^n$.

Definición 5.2.1 Un *subcomplejo* A de un complejo CW es un subespacio cerrado $A \subseteq X$, tal que es unión de células de X . Notese que A es un complejo CW por sí mismo. Una pareja (X, A) que consiste de un complejo CW X y un subcomplejo A es llamado una *pareja CW*.

El siguiente resultado, que podemos encontrar en [7] (proposición 0.17), nos ayudará a calcular el tipo de homotopía de algunos espacios.

Teorema 5.2.2 Si (X, A) es una pareja CW, donde A es contraíble (es decir, A es homotópico a un punto), entonces $X \simeq X/A$.

Veamos un ejemplo de esto.

Ejemplo 5.2.3 Consideremos el complejo CW X formado por dos 0-células (digamos e_1^0 y e_2^0), una 1-célula e^1 y una 2-célula e^2 . Y construyamos el espacio X pegando las células de la siguiente forma: Consideremos la función $\phi: \partial e^1 \rightarrow e_1^0 \cup e_2^0$, recordemos que $\partial e^1 = S^0$, la cual consiste de dos puntos, entonces uno de esos puntos se mapea bajo ϕ hacia el único punto de e_1^0 y el otro punto se mapea bajo ϕ al único punto de e_2^0 . Hasta el momento hemos formado el 1-esqueleto x^1 que es homeomorfo a un segmento de recta (ver figura 5.15). Luego, para añadir la célula e^2 vamos a considerar $\psi: \partial e^2 \rightarrow X^1$ (recordemos que $\partial e^2 = S^1$) de tal modo que medio arco de círculo de S^1 (que es homeomorfo a un segmento de recta) se pegue bajo un homeomorfismo a X^1 y

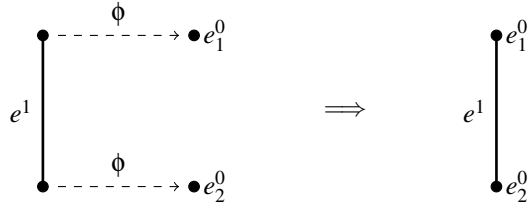


Figura 5.15: Construcción del ejemplo 5.2.3.

el otro medio arco de círculo también lo pegamos a X^1 bajo un homeomorfismo. Como podemos ver en la figura 5.16 se obtiene la figura del lado derecho, este es nuestro complejo CW X , el cual podemos notar que es homotópico a una esfera S^2 . Ahora

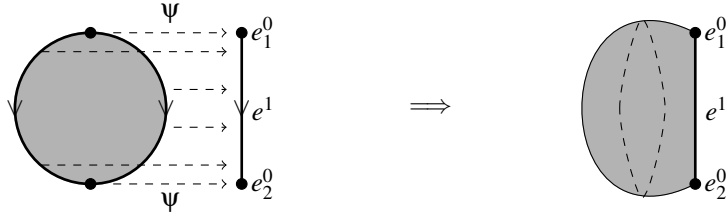


Figura 5.16: Construcción del ejemplo 5.2.3.

consideremos el 1-esqueleto de X . Recordemos que este resulta ser homotópico a un segmento de recta, por lo cual es contraíble. Entonces por el teorema 5.2.2, tenemos que $X/X^1 \simeq X$. Justamente podemos notar que X/X^1 se puede obtener pegando la frontera de una célula e^2 a través de un mapeo constante hacia una célula e^0 . Esto justamente nos da como resultado que X/X^1 es homeomorfo a una esfera S^2 como ya mencionamos anteriormente. En la figura 5.17 podemos ver una descripción gráfica de las situación.

Con esto tenemos que en una esfera S^2 si tenemos un segmento de línea ℓ , entonces al esta línea ser un subespacio contraíble se tiene que $S^2 \simeq S^2/\ell$, es decir, el tipo de homotopía de S^2/ℓ sigue siendo una esfera S^2 .

Ahora, nosotros hemos estado trabajando con complejos simpliciales de completas de una gráfica, y una observación importante es el siguiente resultado.

Teorema 5.2.4 *La realización geométrica de un complejo simplicial es un complejo CW.*

Bosquejo de la prueba de 5.2.4: Sea $|\Delta|$ la realización geométrica de un complejo simplicial Δ . Para construir a $|\Delta|$ como complejo CW, iniciamos con nuestro conjunto discreto X^0 que es justamente $V(\Delta) = X^0$. Luego, vamos a utilizar tantas 1-células

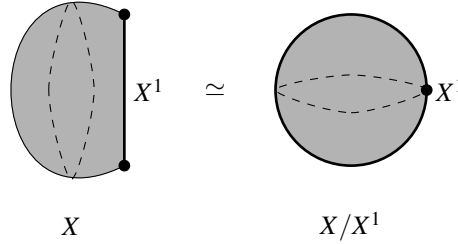


Figura 5.17: Ejemplo de subespacio contraíble.

como simplejos de dimensión uno tenga Δ . Y se irán pegando de tal forma que si $\sigma = \{x_1, x_2\}$ (es decir, un 1-simplejo), entonces consideramos una 1-célula e^1 , de la cual su frontera son dos puntos, supongamos $\partial e^1 = \{a_1, a_2\}$ y entonces pegamos la 1-célula de tal forma que $a_1 \mapsto x_1$ y $a_2 \mapsto x_2$, y esto lo hacemos para cada 1-simplejo. De esta forma se tiene el 1-esqueleto de $|\Delta|$. De forma similar, ahora vamos a considerar que Δ tiene un 2-simplejo en Δ , digamos $\tau = \{x_1, x_2, x_3\}$, entonces consideramos el pegado de una 2-célula e^2 , recordando que $\partial e^2 = S^1$, de tal forma que vamos a dividir el círculo en tres arcos de círculo iguales, cada uno de estos arcos es homeomorfo a un segmento de recta, y bajo cada homeomorfismo es que vamos a pegar a S^1 en cada 1-simplejo contenido en τ . Recordemos que la realización geométrica de τ se corresponde con un “triángulo relleno” en \mathbb{R}^n , y haciendo el pegado como se describió es justamente lo que se obtiene (ver figura 5.18). Nuevamente, este procedimiento lo hacemos para cada 2-simplejo que tenga Δ y obtenemos el 2-esqueleto de $|\Delta|$. Luego, por cada 3-simplejo

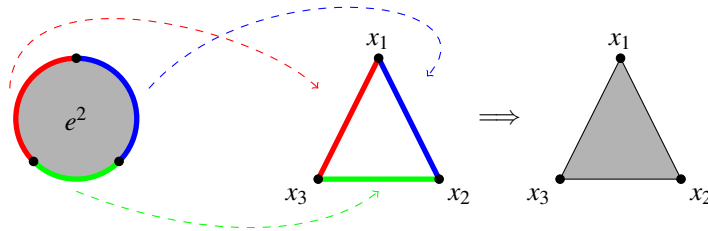


Figura 5.18: Descripción para formar un 2-simplejo como complejo CW.

que tenga Δ , digamos $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ vamos a pegar una célula e^3 , recordando que $\partial e^3 = S^2$ siguiendo un procedimiento análogo al caso anterior, solo que esta vez tendríamos que dividir la esfera S^2 en 4 pedazos. Por ejemplo, podríamos tomar cuatro puntos sobre la esfera como se muestra en la figura 5.19, y dividirla con las líneas también como se muestra en la misma figura, cada una de estas partes en la que está dividida la esfera es homeomorfa a un triángulo relleno en \mathbb{R}^n . Bajo esos homeomorfismos pegamos la esfera en cada uno de los 2-simplejos que se forman del simplejo $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, y de

esta forma obtenemos un tetraedro relleno que es justamente la realización geométrica de $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Con esto tenemos el 3-esqueleto de $|\Delta|$. Y este procedimiento lo podemos hacer sucesivamente hasta obtener todo $|\Delta|$. Para el caso que nos interesa, que son los complejos simpliciales finitos, este procedimiento debe concluir en un número finito de pasos.

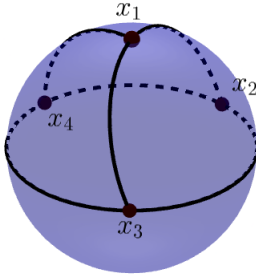


Figura 5.19: Esfera S^2 dividida en cuatro partes.

Definición 5.2.5 Sean X y Y definimos la *cuña* de X y Y , denotada por $X \vee Y$ como el espacio cociente obtenido de la suma disjunta $X \amalg Y$ por identificar dos puntos escogidos $x_0 \in X$ y $y_0 \in Y$. Es decir,

$$X \vee Y = (X \amalg Y) / \{x_0, y_0\}, \quad \text{con } x_0 \in X, y_0 \in Y.$$

En general se define la *cuña* de una cantidad arbitraria de espacios $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ empezando con la unión disjunta $\amalg_{\alpha \in I} X_\alpha$, e identificando puntos $x_\alpha \in X_\alpha$ en un solo punto.

Como ejemplo de la definición anterior, podemos notar que una cuña de dos circunferencias S^1 , es decir, $S^1 \vee S^1$ es un espacio homeomorfo al de la parte derecha de la figura 5.20, pues recordemos que $S^1 \amalg S^1$ es como el de la parte izquierda de la figura 5.20, en cada una de las circunferencias S^1 , escogemos un punto x_0 y y_0 respectivamente y luego los identificamos.

Nota 5.2.6 Es conveniente trabajar con los complejos CW un poco, ya que los complejos simpliciales son un caso particular de ellos ya que vamos a requerir del teorema 5.2.2 para nuestros propósitos. Además suele suceder que al contraer un subespacio contraíble de un complejo simplicial de una completa de gráficas no necesariamente obtenemos otro complejo simplicial con dicha característica. Un ejemplo de ello es un 4-ciclo, este tiene tipo de homotopía una circunferencia S^1 , pero si contraemos una arista, que es un espacio contraíble, obtenemos un complejo simplicial que forma un

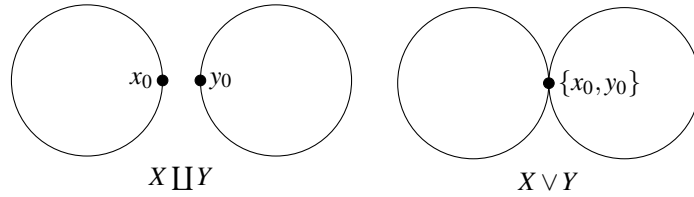


Figura 5.20: Cuña de dos esferas S^1 .

“triángulo hueco”, y este complejo simplicial no es complejo simplicial de completas de ninguna gráfica. Este último ejemplo se ilustra en la figura 5.21, como se puede ver el conjunto de simplejos de $|\Delta(C_4)|$ es:

$$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, d\}\},$$

y la realización geométrica de la derecha se corresponde con el complejo simplicial cuyo conjunto de simplejos es:

$$\{\{e\}, \{c\}, \{d\}, \{e, c\}, \{c, d\}, \{e, c, d\}\},$$

el cual no es un complejo simplicial de completas de ninguna gráfica, ya que si lo fuese, este último conjunto de simplejos debería contener el simplejo $\{e, c, d\}$.

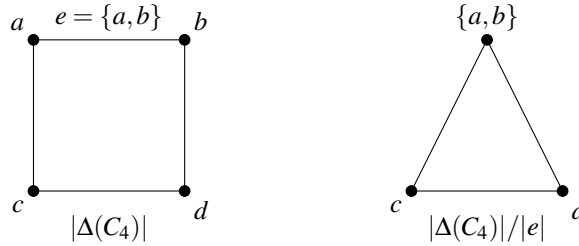


Figura 5.21: Ejemplo de contraer un subespacio.

5.3. Tipo de homotopía

Una vez que ya hemos estudiado las ideas principales de los complejos CW, vamos a utilizarlos para calcular el tipo de homotopía de las gráficas de grado máximo menor o igual a cinco. Pero antes de ir al resultado, mostraremos un lema previo.

Lema 5.3.1 Una suspensión de C_5 con membrana y un octaedro con membrana tienen como tipo de homotopía dos esferas S^2 unidas por una línea.

Demostración.

Sea G el octaedro con membrana (figura 5.13) y notemos que la realización geométrica

de este es homotópico a una esfera S^2 unión con un disco en medio que divide a la esfera en dos hemisferios. Esto es porque si consideramos al octaedro con membrana 5.13 quitando el vértice x_2 , entonces tenemos un octaedro, el cual sabemos que es homotópico a una esfera, pero una vez que añadimos el vértice d junto con sus aristas, podemos notar que la subgráfica inducida por los vértices a, b, c, d, x_2 tiene tipo de homotopía un disco D^2 . En conclusión, la realización geométrica del octaedro con membrana es homotópica a lo que ya se mencionó, es decir, es como en la figura 5.22. Recordemos

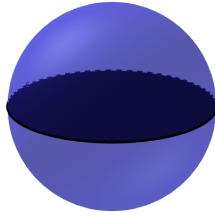


Figura 5.22: Realización geométrica del octaedro con membrana.

del teorema 5.2.4, que todo complejo simplicial es un complejo CW, en particular el octaedro con membrana, el cual podemos ver que tiene un subespacio contraíble, que es el disco de en medio de la esfera. Por lo cual podemos contraer dicho disco sin alterar el tipo de homotopía de $Cl(G)$, el espacio que resulta es una cuña de dos esferas S^2 (ver figura 5.23). Finalmente, consideremos el espacio conformado por dos esferas

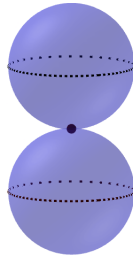


Figura 5.23: Cuña de dos esferas S^2 .

S^2 unidas por una línea, como en la figura 5.24. Notemos que de hecho la línea es un subespacio contraíble, entonces podemos contraerlo sin alterar su tipo de homotopía y si lo contraemos va a resultar que este es homotópico a una cuña de dos esferas S^2 . Como la relación de homotopía es una relación de equivalencia, entonces todos los espacios de las figuras 5.22, 5.23 y 5.24 son homotópicos. Es decir, el octaedro con membrana tiene el tipo de homotopía que se mencionó en el enunciado.

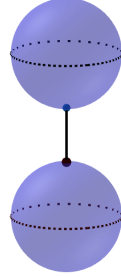


Figura 5.24: Dos esferas S^2 unidas por una línea.

El caso de la suspensión de C_5 con membrana es completamente análogo al del octaedro con membrana, pues de hecho, este también tiene el tipo de homotopía del espacio de la figura 5.22. ■

Teorema 5.3.2 *Sea G una gráfica con $\Delta(G) \leq 5$, entonces el tipo de homotopía de $\text{Cl}(G)$ es una cuña de esferas de dimensión uno o dos, es decir,*

$$|\text{Cl}(G)| = \bigvee_{\alpha \in I} S^{i_\alpha}, \quad \text{donde } i_\alpha \in \{1, 2\},$$

con I un conjunto de índices finito.

Demostración.

De las proposiciones 5.1.4 y 5.1.3 podemos suponer que $\omega(G) \leq 3$, que G no tiene vértices dominados y que toda arista de G está en 0, 2 o 3 triángulos. Luego, por el teorema 5.1.13 sabemos que las componentes conexas de \hat{G} son puntos aislados, alguna de las gráficas de la figura 5.12, un octaedro con membrana o una suspensión de C_5 con membrana. Además en la nota 5.1.12 ya habíamos mencionado que todas las gráficas de la figura 5.12 tienen tipo de homotopía una esfera S^2 y por el lema 5.3.1 tenemos que el octaedro con membrana y la suspensión de C_5 con membrana tienen el tipo de homotopía de dos esferas S^2 unidas por una línea. Es decir, en la realización geométrica de G , cada que aparezca un octaedro con membrana o una suspensión de C_5 con membrana la podemos sustituir por dos esferas unidas por una línea. Luego entonces todos los simplejos que están en G pero no en \hat{G} tienen dimensión 1 porque son aristas que están en cero triángulos. Por lo tanto, la realización geométrica de G la podemos describir como un cierto número de esferas S^2 (tantas como tenga \hat{G}) entrelazadas o unidas por un complejo simplicial de dimensión 1 (ver un ejemplo en la figura 5.25). Ahora, para cada esfera S^2 que aparezca en la realización geométrica de $\text{Cl}(G)$ vamos a considerar todos los puntos en la esfera que tienen intersección con una arista que está en cero triángulos (este es un número finito, de hecho son a lo más cuatro, esto consecuencia la restricción en el grado de G). En una esfera S^2 , podemos encontrar una línea que pase por todos los puntos mencionados, esta línea además es contraíble, entonces podemos contraerla sin alterar el tipo de homotopía de la esfera identificando todos esos puntos mencionados en uno solo (como se mencionó en ejemplo 5.2.3). Y ahora,

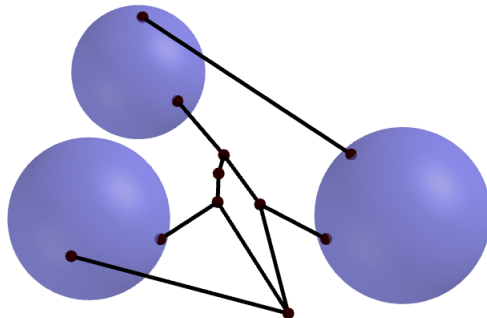


Figura 5.25: Realización geométrica.

Lo que obtenemos es un espacio homotópico al que empezamos pero donde ahora las esferas S^2 están entrelazadas con un complejo simplicial de dimensión 1 (nos vamos a referir a él como D_1), donde cada esfera S^2 intersecta una sola vez a este complejo simplicial D_1 (ver figura 5.26). Así, entonces como se mencionó en la demostración

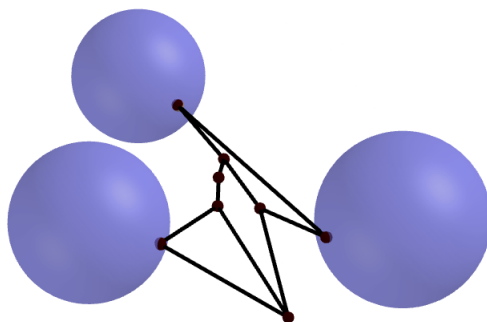


Figura 5.26: Espacio homotópico al de la figura 5.25.

del teorema 4.2.2, en el ejemplo 0.7 de [7] un complejo simplicial de dimensión 1 es homotópico a una cuña de circunferencias S^1 . Por lo tanto D_1 es homotópico a una cuña de circunferencias y como el espacio que tenemos es conexo, entonces cada uno de los puntos de D_1 que intersectan a las esferas S^2 podemos identificarlo en el punto de intersección de dicha cuña. De esta forma obtenemos que todas las esferas se inter-

sectan en un punto al igual que las circunferencias. Es decir, G es homotópica una cuña de esferas S^1 y S^2 como se quería demostrar. ■

Corolario 5.3.3 *Si una gráfica G tiene tipo de homotopía distinto de una cuña de circunferencias entonces G debe tener grado máximo mayor a cinco. Más aún, este número es óptimo.*

Demostración.

El hecho de que G debe tener grado máximo mayor que cinco es consecuencia directa de 5.3.2. Luego, el grado máximo cinco es óptimo puesto que se conocen gráficas de grado máximo seis que tienen tipo de homotopía distinto al de una cuña de esferas. Por ejemplo, en la figura 5.27 se muestra una triangulación que tiene el tipo de homotopía de un toro y esta tiene grado máximo seis. De hecho se muestra un bosquejo de la gráfica pero dibujada en el plano para que se noten mejor las adyacencias, y se puede apreciar que el tipo de homotopía es un toro porque estamos haciendo la interpretación clásica del toro identificando las líneas paralelas del cuadrado.

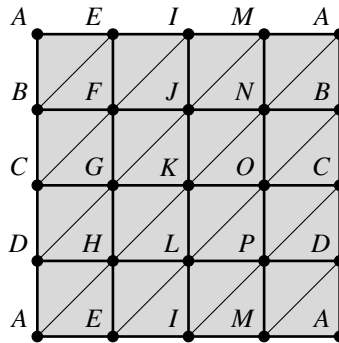


Figura 5.27: Triangulación del toro.

Proposición 5.3.4 *Para cualesquier $m, n \in \mathbb{N}$ existe una gráfica G de grado máximo cinco tal que su tipo de homotopía es una cuña de n esferas S^2 y m circunferencias S^1 .*

Demostración.

Vamos a construir la gráfica G de la siguiente forma. Consideremos que los vértices

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m},$$

(todos distintos), inducen un camino en G , es decir, $x_i \sim x_{i+1}$ para $i \in \{1, \dots, x_{m+n-1}\}$. Luego, consideremos vértices y_1, \dots, y_{n+m} (todos distintos entre sí y distintos de los x_j 's) tales que $y_i \sim x_i$ para todo $i \in \{x_1, \dots, x_{m+n}\}$. Notemos que de esta forma, la subgráfica de G inducida por los x_j 's y los y_j 's no tiene ciclos, por lo que es un árbol, lo cual implica que es dismantelable y por lo tanto contraíble. Siguiendo con la construcción de G , ahora para cada y_j ($j \in \{1, \dots, n\}$) vamos a considerar un octaedro tal que

y_j es uno de los vértices de dicho octaedro, es decir, y_j junto con otros cinco vértices inducen un octaedro en G . Y para cada $j \in \{n+1, \dots, m+n\}$ vamos a considerar un ciclo de cuatro vértices, tal que y_j es uno de los vértices de dicho ciclo, es decir, y_j junto con otros tres vértices forman un 4-ciclo. Toda esta construcción la podemos apreciar en la figura 5.28. Así entonces cada octaedro en G tiene tipo de homotopía una esfera S^2 y tenemos un octaedro en G por cada x_i con $i \in \{1, \dots, n\}$ (es decir, tenemos n octaedros). Además, cada 4-ciclo en G tiene tipo de homotopía una circunferencia S^1 y tenemos un 4-ciclo por cada x_i con $i \in \{x_{n+1}, \dots, x_{n+m}\}$ (es decir, tenemos m 4-ciclos). Luego, en la realización geométrica de G cada octaedro y cada 4 ciclo intersecta en un solo punto al subespacio contraíble de G que inducen los vértices x_i 's y y_i 's. Por el teorema 5.2.2, contraer un subespacio contraíble no altera el tipo de homotopía, entonces identificando dicho subespacio en un solo punto es como se obtiene que G es homotópica una cuña de n esferas S^2 y n circunferencias S^1 . ■

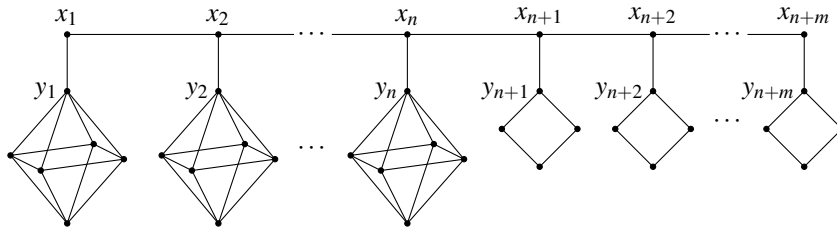


Figura 5.28: Construcción de G .

Conclusión

Uno de los problemas de de interés en la tesis es averiguar el tipo de homotopía de las gráficas. En nuestro caso, lo hemos estudiado restringiendo el grado de los vértices. Por ejemplo, si suponemos que una gráfica es de grado máximo cuatro, entonces se logró mostrar que su tipo de homotopía es una cuña de circunferencias, excepto por el octaedro O_3 . Y si suponemos que el grado máximo de la gráfica es cinco, entonces el tipo de homotopía es una cuña de esferas S^2 y circunferencias S^1 . Para el caso en que el grado máximo es seis o más las cosas se empiezan a complicar más, pues aquí ya se conocen ejemplos en las que una gráfica puede tener tipo de homotopía diferente de una cuña de esferas, por ejemplo, un toro.

Por otro lado, otro de los principales problemas de interés es dar condiciones que garanticen que una gráfica es K -homotópicamente permanente. Uno de los resultados más conocidos respecto a este problema es que las gráficas que cumplen la propiedad de ser clan-Helly son K -homotópicamente permanentes, cabe mencionar que esta es una clase infinita de gráficas. Existe una conjetura que dice que si G es una gráfica con **defecto Helly finito** (es decir, si el **defecto Helly** de G definido por $\min\{n \in \mathbb{N} \mid K^n(G) \text{ es clan-Helly}\}$ es finito), entonces G es K -homotópicamente permanente, o sea, $G \simeq K^n(G)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. En mi tesis de licenciatura [8] estudiamos el caso cuando el defecto Helly es 1, este problema sigue abierto, pero se logró mostrar para gráficas de nueve vértices o menos. En esta tesis se logró mostrar que las gráficas de grado bajo (que también es una clase infinita de gráficas) cumplen ser K -homotópicamente permanentes. De hecho, hay gráficas de grado bajo que tienen defecto Helly 2, lo cual refuerza nuestra sospecha de que la conjetura mencionada es cierta.

De forma similar a la conjetura anterior surgen preguntas derivadas de este trabajo, por ejemplo una de ellas es: ¿Será que todas las gráficas de grado máximo cinco con tipo de homotopía una cuña de circunferencias son Clan-Helly y/o convergentes? Notemos que los resultados que hemos mostrado son todos de suponer condiciones sobre el objeto combinatorio y esto nos dice algo sobre la topología asociada a la gráfica. Pero esta pregunta supone cosas sobre la topología y nos dice algo sobre el objeto combinatorio, esto también es un estudio de interés.

Apéndice A

Prueba del teorema 4.1.2

En este apéndice vamos a probar el teorema 4.1.2, pero para ello requerimos de varios lemas y es por eso que dejamos la demostración en un apéndice. De hecho todos estos resultados son obtenidos de [19], donde estamos suponiendo que las gráficas G son tales que $\Delta(G) \leq 4$

A.1. Demostración del teorema 4.1.2

Lema A.1.1 *Sea G una gráfica, y q_1, q_2 clanes de G tales que si $\{x, y\}$ es una arista entre vértices en $q_1 \cup q_2$, entonces uno de los vértices x, y está en $q_1 \cap q_2$. Entonces si c es una subgráfica completa tal que $c \subseteq q_1 \cup q_2$, entonces $c \subseteq q_1$ o $c \subseteq q_2$.*

Demostración.

Supongamos que el resultado no es cierto, entonces debe existir $x \in c$ tal que $x \notin q_1$ y $y \in c$ tal que $y \notin q_2$, por lo cual $\{x, y\}$ es una arista pues $x, y \in c$ y c es completa. Luego se tendría que $\{x, y\} \cap (q_1 \cap q_2) = \emptyset$, lo cual contradice la hipótesis, por lo tanto se obtiene el enunciado del lema. ■

Notemos que debido a la condición del grado de G ($\Delta(G) \leq 4$), los clanes de G pueden tener a lo más cinco vértices, sin embargo, la única gráfica conexa de grado bajo que contiene un clan de cinco vértices es precisamente K_5 . Entonces, para nuestros propósitos vamos asumir que todos los clanes de G tienen a lo más cuatro vértices.

Recordemos algunas definiciones. Dada una gráfica G y $x \in G$ definimos y denotamos la **estrella** de x como $x^* = \{q \in K(G) \mid x \in q\}$, esta es una subgráfica completa de $K(G)$. Si $x^* \in K^2(G)$ decimos que x es un **vértice normal**. Luego, si $Q \in K^2(G)$ es tal que $\bigcap Q = \emptyset$, decimos que Q es una **corbata** de G . Así, los vértices de $K^2(G)$ están particionados en estrellas y corbatas de G , y G es clan-Helly precisamente cuando G no tiene corbatas. Un **triángulo** en una gráfica G es una completa de tres vértices de G . Un triángulo T en G es llamado un **triángulo interno** de G si T es un clan de G y para cada arista de T existe un triángulo $T' \neq T$ en G tal que $T \cap T'$ es precisamente dicha arista. Así, dado un triángulo interno en G definimos $Q_T = \{q \in K(G) \mid |q \cap T| \geq 2\}$, la cual siempre es una completa en $K(G)$.

Lema A.1.2 *Si G es tal que $\Delta(G) \leq 4$, entonces las corbatas de G solo pueden contener triángulos.*

Demostración.

Sea Q una corbata de G . Es directo ver que si $q_1 \in Q$, este no puede contener un sólo vértice, supongamos entonces que fuera una arista xy , escojamos $q_2 \in Q$ tal que $y \notin q_2$ y $q_3 \in Q$ tal que $x \notin q_3$. Entonces $q_1 \cap q_2 = \{x\}$ y $q_1 \cap q_3 = \{y\}$. Sea $z \in q_2 \cap q_3$. Entonces $\{x, y, z\}$ debería ser una subgráfica completa contenida en q_1 pues q_1 es un clan, pero tenemos una contradicción. Es decir, necesariamente $|q_1| \geq 3$.

Ahora, supongamos que $q_1 \in Q$ es tal que $|q_1| = 4$. Si existiera $q' \in Q$ tal que $|q \cap q'| = 1$, entonces por el párrafo anterior, tenemos que $|q'| \geq 3$, y si $x \in q_1 \cap q'$, entonces $q_1 \cup q' \subseteq N[x]$, en tal caso $N[x]$ tendría al menos seis elementos, lo cual contradice nuestra hipótesis. Supongamos ahora que existiera $q_2 \in Q$ con $|q_1 \cap q_2| = 3$, en tal caso $|q_2| = 4$. Supongamos entonces que $q_1 \cap q_2 = \{x, y, z\}$. Entonces existe $q_3 \in Q$ tal que $x \notin q_3$. Si q_3 fuera disjunto de $q_1 \cap q_2$ entonces $q_1 \cup q_2$ debería ser una completa de cinco vértices. Por lo cual, vamos asumir que $y \in q_3$. Entonces $q_3 \subseteq N[y] = q_1 \cup q_2$, pero el lema A.1.1 implicaría que $q_3 \subseteq q_1$ o $q_3 \subseteq q_2$, lo cual es una contradicción.

Así entonces, todo clan en $q \in Q$ diferente de q_1 intersecta a q_1 en dos elementos y tiene exactamente tres elementos (pues q no puede tener dos elementos porque en tal caso no sería clan y no puede tener cuatro porque entonces uno de los vértices donde intersecta a q tendría al menos cinco vecinos). Sea $q_2 \in Q$ tal que $q_2 \neq q_1$. Si existiera $q_3 \in Q$ tal que $q_3 \cap q_1$ es disjunto de $q_2 \cap q_1$, tendríamos que necesariamente $q_1 = (q_1 \cap q_2) \cup (q_1 \cap q_3)$, y si $z \in q_2 \cap q_3$, entonces $z \notin q_1$ (puesto que $q_3 \cap q_1$ y $q_2 \cap q_1$ son disjuntos), pero notemos que $q_1 \cup \{z\}$ sería una completa de G , lo cual contradice que q_1 es clan. Por lo tanto, todos los clanes en Q intersectan a $q_1 \cap q_2$. Supongamos ahora que $q_1 = \{x, y, u, v\}$ y $q_2 = \{x, y, w\}$. Sea $q_3 \in Q$ tal que $y \notin q_3$, entonces $x \in q_3$, y si existiera $z' \in q_3 - (q_1 \cup q_2)$, tendríamos que $\{y, u, v, w, z'\} \subseteq N(x)$ lo cual es una contradicción. Entonces $q_3 \subseteq q_1 \cup q_2$. Por el lema A.1.1 tendríamos que $q_3 \subseteq q_1$ o $q_3 \subseteq q_2$, lo cual también es una contradicción. Por lo tanto $|q_1| = 3$. Y con esto tenemos el resultado. ■

Lema A.1.3 *Si G es una gráfica de grado bajo, para cualquier corbata Q en G hay un triángulo interno T de G tal que $Q = Q_T$, más aún Q_T tiene exactamente tres orejas. Recíprocamente, si T es un triángulo interno, entonces Q_T es una corbata.*

Demostración.

La demostración es una adaptación de la prueba de la proposición 10 de [9] a esta situación. Para una gráfica de grado bajo G , sea Q una corbata de G . Por el lema A.1.2 sabemos que Q contiene solamente triángulos. Afirmamos que existen dos triángulos en Q tal que se intersectan solo en un punto. Supongamos que no es cierto, es decir, supongamos que cualesquiera dos triángulos en Q se intersectan en dos puntos, sean $T_1, T_2 \in Q$ con $T_1 = \{a, b, c\}$, $T_2 = \{a, b, c'\}$. Ahora, debe existir T_3 tal que $b \notin T_3$, pero entonces $T_3 \cap T_1 = \{a, c\}$ y $T_3 \cap T_2 = \{a, c'\}$ lo cual implica que $T_3 \subseteq T_1 \cup T_2$. Por el lema A.1.1 esto no es posible.

Sean entonces $T_1 = \{a, b, c\} \in Q$ y $T_2 = \{a, b', c'\}$ con $T_1 \cap T_2 = \{a\}$, escojamos $T_3 \in Q$ tal que $a \notin T_3$. Entonces $T_3 \cap T_1$ debe consistir de exactamente un vértice porque

si sucediera $T_3 \cap T_1 = \{b, c\}$, recordemos que $T_3 \cap T_2 \neq \emptyset$, entonces $b' \in T_3$ o $c' \in T_3$, en cualquier caso tendríamos que T está contenida en una completa de cuatro vértices (la completa de cuatro vértices se observa en color azul en la figura A.1), lo cual no puede suceder. De forma similar $T_3 \cap T_2$ consiste solo de un vértice. Sin pérdida de generalidad, vamos a asumir que $T_3 = \{a', b, c'\}$, con $a' \notin T_1 \cup T_2$, notemos entonces que $T = \{a, b, c'\}$ es un triángulo de G porque si, por ejemplo, T estuviese contenido propiamente en una completa de cuatro vértices, digamos $\{a, b, c', z\}$, tendríamos que $\{b, b', c, c', z\} \subseteq N(a)$, o bien si $z \in \{a', b', c\}$, alguno de los triángulos T_1 , T_2 , o T_3 estarían contenidos en una completa de cuatro vértices. Así T es un triángulo interno.

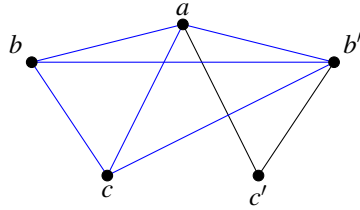


Figura A.1: Caso hipotético $T_3 \cap T_2 = \{b, c\}$ y $b' \in T_3$.

Afirmamos que $T \in Q$. Si no fuera así, debería haber un triángulo $T_4 \in Q$ tal que $T_4 \cap T = \emptyset$ y que intersecta a T_1 , T_2 y T_3 . Por lo tanto, debe suceder $T_4 \cap T_1 = \{c\}$, $T_4 \cap T_2 = \{b'\}$ y $T_4 \cap T_3 = \{a'\}$. Esto implica que $T_4 = \{a', b', c\}$, y la subgráfica de G inducida por $\{a, a', b, b', c, c'\}$ es un octaedro. Esto contradice lo que se asumió sobre G , y entonces $T \in Q$.

Tenemos así que $\{T, T_1, T_2, T_3\} \subseteq Q$. Supongamos que hubiese un triángulo $T_4 \in Q$ diferente de T, T_1, T_2, T_3 . Debe suceder entonces que $T_4 \cap T \neq \emptyset$, sin pérdida de generalidad supongamos que $a \in T_4 \cap T$. Supongamos que $T_4 = \{a, r, s\}$. Pero entonces $T_4 \subseteq N[a] = \{a, b, c, b', c'\}$. Es directo verificar que cualquier elección de r y s de entre los vértices a, b, c, b', c' lleva a contradecir que T_4 es diferente de todos los triángulos T, T_1, T_2, T_3 , ya sea que obtengamos que alguno de dichos triángulos no sean clanes o que $T_4 \cap T_3 = \emptyset$. Entonces $Q = \{T, T_1, T_2, T_3\} = Q_T$, donde T_1, T_2, T_3 son las orejas de Q_T .

Para el recíproco, sea $T = \{a, b, c\}$ un triángulo interno. Cada uno de los clanes de Q_T contienen al menos dos vértices de T , entonces Q_T es completa en $K(G)$. Como T es un triángulo interno, hay clanes q_1, q_2, q_3 de G , cada uno diferente de T y tales que $\{a, b\} \subseteq q_1 \cap T$, $\{a, c\} \subseteq q_2 \cap T$ y $\{b, c\} \subseteq q_3 \cap T$. Ahora, como $|T| = 3$, dichas inclusiones son igualdades. Sean $c' \in q_1 - T$, $b' \in q_2 - T$ y $a' \in q_3 - T$. Como T es un clan, se sigue que c' no es adyacente a c , similarmente $b' \not\sim b$ y $a' \not\sim a$. Esto implica que a', b', c' son tres vértices diferentes. Ahora, tenemos que $\{b, c, b', c'\} \subseteq N(a)$, y dado que G es una gráfica de grado bajo, dicha inclusión es igualdad. Se sigue entonces que $q_1 = \{a, b, c'\}$, $q_2 = \{a, c, b'\}$ y $q_3 = \{b, c, a'\}$. Tenemos entonces que $\{T, q_1, q_2, q_3\} \subseteq Q_T$. Supongamos que existiera $q \in Q_T$ con $q \neq T$, sin pérdida de generalidad vamos a asumir que $q \cap T = \{a, b\}$. Entonces $q \subseteq N[a] \cap N[b] = \{a, b, c, c'\}$. Como $q \neq T$ tenemos que $c \notin q$, y entonces $q = \{q, b, c'\} = q_1$. Se sigue que $Q_T = \{T, q_1, q_2, q_3\}$. Supongamos ahora que existe $q \in K(G)$ tal que $Q_T \cup \{q\}$ es una completa de $K(G)$,

con $q \notin Q_T$. Entonces necesariamente $|q \cap T| = 1$, y sin pérdida de generalidad suponemos $q \cap T = \{a\}$. Entonces $q \subseteq N[a] = \{a, b, c, b', c'\}$. Por otro lado, necesariamente $q \cap q_3 \neq \emptyset$. Como $|q \cap T| = 1$, se tiene que los vértices b y c no pueden ser elementos de q , se sigue entonces que $a' \in q \cap q_3$. Lo cual contradice que a y a' no son adyacentes. Se sigue entonces que Q_T es un clan de $K(G)$, y de hecho, es una corbata. ■

Con lo que acabamos de mostrar tenemos la primera parte del teorema 4.1.2.

Lema A.1.4 *Para cualquier gráfica de grado bajo:*

1. *Dos estrellas x^* y y^* son adyacentes en $K^2(G)$ si y solo si $x \sim y$ en G .*
2. *Una estrella x^* y una corbata Q_T centrada en el triángulo T son adyacentes en $K^2(G)$ si y solo si x es adyacente a dos vértices de T .*
3. *Dos corbatas Q_T y $Q_{T'}$ son adyacentes en $K^2(G)$ si y solo si:*
 - $|T \cap T'| = 2$ o
 - $|T \cap T'| = 1$ y si $\{v\} = T \cap T'$, existe una arista (llamada **travesaño**) que une un vértice en $T - v$ con un vértice en $T' - v$.

Demostración.

De hecho, es directo probar que los primeros dos enunciados se cumplen para cualquier gráfica simple. Para el tercero, si $|T \cap T'| = 2$, entonces $T \in Q_T \cap Q_{T'}$, y entonces $Q_T \sim Q_{T'}$ en $K^2(G)$. En el caso en que $T \cap T' = \{v\}$ y hay una arista uu' con $u \in T - v$ y $u' \in T' - v$, entonces el triángulo $\{v, u, u'\}$ puede ser extendido a un clan q tal que $q \in Q_T \cap Q_{T'}$.

Ahora supongamos que T y T' son triángulos internos en una gráfica de grado bajo tal que Q_T es adyacente a $Q_{T'}$ en $K^2(G)$ y que $|T \cap T'| \leq 1$. Sea $q \in Q_T \cap Q_{T'}$. Por el lema A.1.2, tenemos que $|q| = 3$. Como $|q \cap T| \geq 2$ y $|q \cap T'| \geq 2$, tenemos que $|T \cap T'|$ no puede ser vacío, entonces $|T \cap T'| = 1$. Sea $T \cap T' = \{v\}$. Si $x \in (q \cap T) - v$ y $x' \in (q \cap T') - v$, entonces xx' es un travesaño. ■

Lema A.1.5 *Sea G de grado bajo tal que si T y T' son triángulos de G , donde $T \cap T' = \{x\}$ y T es un triángulo interno, entonces $N(x)$ induce un 4-ciclo. Más aún, si T' también es triángulo interno, entonces ninguna de las orejas de Q_T es un triángulo interno, y ninguno de los vértices de T además de x es un vértice normal.*

Demostración.

Supongamos que $T = \{x, e, f\}$ y $T' = \{x, g, h\}$. Como el triángulo T es interno, considerando la arista xe , debe existir $y \in G$ y un triángulo $T_1 = \{x, e, y\} \neq T$. Tenemos que $y \in N(x) = \{e, f, g, h\}$. Como $y \neq e$ porque $|T_1| = 3$ y $y \neq f$ porque $T_1 \neq T$, debería suceder $y = g$ o $y = h$. Sin pérdida de generalidad, supongamos $y = g$, entonces $e \sim g$. Ahora, de forma análoga vamos a considerar la arista xf y dado que T es un clan de G debemos tener que $f \sim h$. Como T es un clan, tenemos que e no es adyacente a h , y similarmente f no es adyacente a g . De esta forma $N(x)$ induce un 4-ciclo. Como el grado de x es 4, debemos tener que T' es un clan. Y dado que T es interno, entonces existe un vértice u tal que el triángulo $\{u, e, f\}$ es diferente de T . Además $u \notin \{g, h\}$ porque T es un clan.

Supongamos ahora, que T' también es triángulo interno. Análogamente existe un vértice u' tal que $u' \sim g$, $u' \sim h$ y $u' \neq u$, entonces $\{u', g, h\}$ es diferente de T' , porque si fuese iguales, se tendría que G es una gráfica 4-regular, de hecho sería un octaedro. Consideremos $T_1 = \{e, g, x\}$, la cual es una oreja de Q_T . Si T_1 fuera triángulo interno, debería existir un vértice y tal que $\{e, g, y\}$ es un triángulo diferente de T_1 . Pero $y \in N(e) \cap N(g) = \{x\}$, y esto no es posible. Entonces T_1 no puede ser interno. Por simetría se puede mostrar que, $\{f, h, x\}$ tampoco es interno. Ahora consideremos $T_2 = \{e, f, u\}$ y supongamos que existe un vértice z tal que $\{e, u, z\}$ es un triángulo diferente de T_2 . Así, $z \in N(e) = \{r, f, x, g\}$. Por lo que hemos asumido eso no puede suceder. Entonces T_2 tampoco es interno. Finalmente, ni e^* , ni f^* pueden ser clanes porque están propiamente contenidos en Q_T . ■

Como corolario de los lemas A.1.4 y A.1.5, tenemos que si T_1 y T_2 son triángulos internos donde $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$, entonces $Q_{T_1} \sim Q_{T_2}$ en $K^2(G)$. Porque si $|T_1 \cap T_2| = 1$, entonces existen dos travesaños de T_1 a T_2 . Esta situación se representa en la figura A.2. De hecho, con esto tenemos una parte del segundo inciso del teorema 4.1.2.

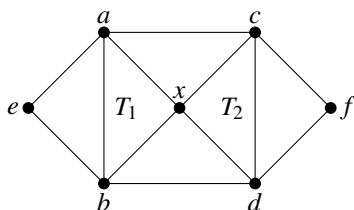


Figura A.2: Caso $|T_1 \cap T_2| = 1$.

Lema A.1.6 Sea G una gráfica de grado bajo, y sean T, T' triángulos internos tales que $T \cap T' = \{x, y\}$. Entonces $N(x)$ induce un 4-ciclo, la única oreja de Q_T que es triángulo interno es T' , y los únicos vértices normales de T son x y y .

Demostración.

Supongamos que $T = \{x, y, u\}$, y $T' = \{x, y, u'\}$. Considerando la arista xu del triángulo interno T , sea $x' \in G$ tal que $T_1 = \{x, u, x'\} \neq T$. Como T es un clan, debe suceder $x' \neq u'$. Aplicando el lema A.1.5 al triángulo interno T' y el triángulo T_1 , obtenemos que $N(x)$ es un 4-ciclo, entonces $x' \sim u'$. Aplicando los pasos anteriores a la arista yu del triángulo T , obtenemos que existe un vértice $y' \in G$ que es vecino de u, y y u' y tal que $N(y)$ es un 4-ciclo. Como T es un clan, tenemos que $y' \neq x'$. Ahora, el triángulo T_1 es una oreja de Q_T . Si T_1 fuera un triángulo interno, debería existir un vértice z tal que $\{z, u, x'\}$ es un triángulo diferente de T_1 . Además el vértice z es diferente de y' pues G no es un octaedro. Más aún $z \in N(u) = \{x, x', y, y'\}$, pero esto contradice lo que se asumió. Así entonces T_1 no es interno. Luego, u no es un vértice normal pues u^* está propiamente contenido en Q_T . ■

La situación del lema A.1.6 se muestra en la figura A.3. Y con esto tenemos la segunda parte del teorema 4.1.2.

El objetivo ahora es demostrar que si G es una gráfica de grado bajo, entonces es $K^2(G)$ es clan-Helly. Para ello necesitamos la definición de **hereditariamente Helly**,

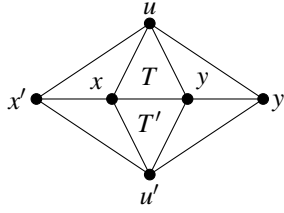


Figura A.3: Caso $|T \cap T'| = 2$.

y son las gráficas G que cumplen que todas las subgráficas inducidas de G son clan-Helly. Entonces tenemos que todas las gráficas hereditariamente Helly son clan-Helly. La estrategia a seguir para probar que $K^2(G)$ es clan-Helly cuando G es de grado bajo se va a probar que $K^2(G)$ es hereditariamente Helly. Y para ello se usará la caracterización probada en [17] y reformulada como en [11].

Teorema A.1.7 *Una gráfica es hereditariamente Helly si y solo si es compatible con el diagrama de la figura A.4, en el sentido de que siempre que la gráfica con las aristas sólidas es una subgráfica de G , entonces una de las aristas punteadas está inducida.*

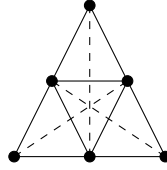


Figura A.4: Diagrama de Hajós.

Lema A.1.8 *Si G es una gráfica de grado bajo, no existen caminos (inducidos o no) en $K^2(G)$ que consistan de tres corbatas.*

Demostración.

Sean T_1, T_2 y T_3 triángulos internos tales que $Q_{T_1} \sim Q_{T_2} \sim Q_{T_3}$ en $K^2(G)$. Como $Q_{T_1} \sim Q_{T_2}$ tenemos ya sea la situación de la figura A.2 o la de la figura A.3. Pero en ninguno de los dos casos es posible tener un triángulo interno T_3 , diferente de T_1 , y que satisfaga $T_3 \cap T_2 \neq \emptyset$. ■

Lema A.1.9 *Sea G una gráfica de grado bajo, donde $a, b \in G$ son vértices normales y T_1, T_2 son triángulos internos de G . Entonces $a^*, b^*, Q_{T_1}, Q_{T_2}$ no inducen un diamante en $K^2(G)$ de una de las formas mostradas en la figura A.5.*

Demostración.

Consideremos el caso de la izquierda en la figura A.5. Como $Q_{T_1} \sim Q_{T_2}$, tenemos que $T \cap T_1 \neq \emptyset$. Si sucediera $|T \cap T_2| = 1$, es decir, estamos en la situación de la figura A.2. Como b^* es vecino tanto de Q_{T_1} como de Q_{T_2} , y b es un vértice normal se tiene que

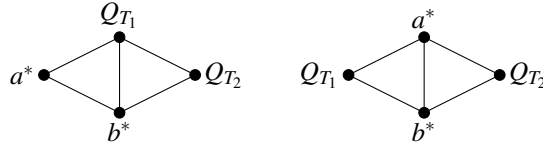


Figura A.5: Diamantes prohibidos.

$b \in T_1 \cap T_2$. Es directo verificar que ningún vecino de b es un vértice normal. Ahora, si se tuviera $|T_1 \cap T_2| = 2$, de nuevo, lo que se asume sobre b implicaría que $b \in T_1 \cap T_2$. Y si x es vecino de b tal que x es normal es tal que x^* es vecino de ambos Q_{T_1} y Q_{T_2} , en particular a^* , es decir, no se puede dar la situación planteada.

Ahora, respecto al caso de la derecha. Como Q_{T_1} y Q_{T_2} no son adyacentes en $K^2(G)$, entonces $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Como b debe ser vecino de dos vértices en T_1 , de dos vértices en T_2 y del vértice a , y el grado de b debe ser a lo más cuatro, tenemos que $a \in T_1 \cup T_2$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a \in T_1$. Por un argumento similar, debemos tener que $b \in T_2$. Sea $T_1 = \{a, u, v\}$ y $T_2 = \{b, w, r\}$. Como a es vecino de dos vértices en T_2 , vamos a asumir sin pérdida de generalidad que $a \sim w$. Aplicando el lema A.1.5 al triángulo interno T_1 y al triángulo $T = \{a, b, w\}$, tenemos que $N(a)$ es un 4-ciclo, y sin pérdida de generalidad, vamos a asumir que $u \sim b$ y $v \sim w$. Similarmente, aplicando el mismo lema a T_2 y al triángulo $T' = \{a, b, u\}$ tenemos que $u \sim r$. Pero entonces T y T' son triángulos internos, y aplica el lema A.1.6. Tenemos que T es la única oreja en $Q_{T'}$ que es triángulo interno, lo cual contradice que T_1 es triángulo interno. ■

Lema A.1.10 *Sea G una gráfica de grado bajo, y sean $a, b, x, z \in G$ vértices normales y T un triángulo interno de G formando la subgráfica de $K^2(G)$ con las aristas sólidas en la figura. Entonces una de las aristas punteadas debe estar presente (es decir, debe ser una arista de $K^2(G)$).*

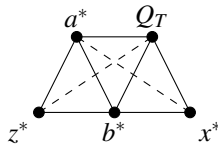


Figura A.6: Subgráfica prohibida.

Demostración.

Supongamos que $K^2(G)$ tiene como subgráfica la gráfica de la figura A.6, pero solo con las aristas sólidas. Entonces, en G tenemos que $\{a, x, z\} \subseteq N(b)$. Como $b^* \sim Q_T$ en $K^2(G)$, tenemos que dos vecinos de b están en T y entonces, al menos un elemento de $\{a, x, z\}$ está en T . Pero como $z \not\sim Q_T$, entonces $z \notin T$, y no es posible que ambos vértices a y b sean elementos de T puesto que $a \sim z \sim b$.

Supongamos primero que $a \in T$ (entonces, $b \notin T$). Supongamos $T = \{a, u, v\}$. Ahora, b es vecino de dos elementos de T , sin pérdida de generalidad vamos a suponer $b \sim v$.

Aplicando el lema A.1.5, tenemos que $z \sim u$. Pero esto contradice que $z \not\sim Q_T$. Consideremos el caso en el que $a \notin T$ y $x \in T$. Supongamos $T = \{x, u, v\}$. Si tuviéramos que $b \in \{u, v\}$, podríamos asumir sin pérdida de generalidad que $b = v$, como a es vecino de dos elementos de T , y por hipótesis $a \not\sim x$, entonces $a \sim u$. Aplicando el lema A.1.5 al triángulo interno T y a $\{b, a, z\}$ obtenemos $z \sim x$, lo cual significa que z es vecino de dos elementos de T , de nuevo una contradicción. Esto muestra que $b \notin \{u, v\}$. Entonces $a^* \sim Q_T$ implica $a \sim u$ y $a \sim v$. También tenemos que $b^* \sim Q_T$ en $K^2(G)$, sin pérdida de generalidad, supongamos $b \sim v$. Entonces el triángulo $\{a, b, v\}$ es interno y estamos en la situación de la figura A.2, la cual muestra que x no es un vértice normal, y esto contradice nuestra hipótesis. ■

Lema A.1.11 *Sea G una gráfica de grado bajo, y sean $a, b, x, z \in G$ vértices normales y T un triángulo interno en G formando la subgráfica de $K^2(G)$ con las aristas sólidas en la figura A.7. Entonces una de las aristas punteadas debe estar presente.*

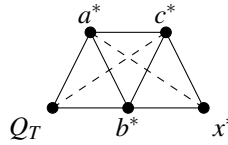


Figura A.7: Subgráfica prohibida.

Demostración.

Supongamos que $K^2(G)$ tiene como subgráfica la gráfica de la figura A.7 solo con las aristas sólidas. Entonces en G tenemos que el conjunto de vértices normales $\{a, c, b, x\}$ inducen un diamante. Como $b^* \sim Q_T$ y $\{a, c, x\} \subseteq N(b)$, al menos uno de los vértices a, c, x está en el triángulo interno T . Pero como $c^* \not\sim Q_T$, tenemos que $c \notin T$, y a lo más uno de los vértices a, b está en T . Consideremos primero el caso $a \in T$, y sea $T = \{a, u, v\}$. Como $c^* \not\sim Q_T$ debemos tener $\{u, v\} \cap \{b, c, x\} = \emptyset$. Aplicando el lema A.1.5 al triángulo interno T y al triángulo $\{a, b, c\}$, tenemos que c debería ser adyacente a u o a v , pero esto contradice que $c^* \not\sim Q_T$. Entonces consideremos el caso $a \notin T$ y $x \in T$. Entonces $T = \{x, u, v\}$ con $\{u, v\} \cap \{a, b, c\} = \emptyset$. Como antes, aplicando el lema A.1.5 obtenemos $c \sim u$, o $c \sim v$ lo cual es una contradicción. ■

Ahora, para concluir este apéndice, bastará probar el siguiente teorema, pues vamos a probar que si G es una gráfica de grado bajo, entonces $K^2(G)$ es hereditariamente Helly usando la caracterización del teorema A.1.7 y esto implica que $K^2(G)$ es clan-Helly. Lo cual es la parte que nos faltaba probar del teorema 4.1.2.

Teorema A.1.12 *Sea G una gráfica de grado bajo. Si la gráfica con las aristas sólidas de la figura es una subgráfica de $K^2(G)$, entonces necesariamente al menos una de las aristas punteadas es una arista de $K^2(G)$.*

Demostración.

Entonces supongamos que la gráfica de la figura A.8 solo con las aristas sólidas es una subgráfica de $K^2(G)$. Vamos a considerar varios casos para esta prueba:

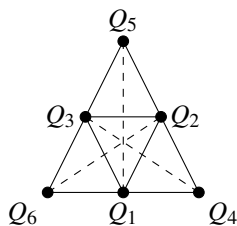


Figura A.8: Subgráfica prohibida.

- a) Supongamos primero que Q_1, Q_2 y Q_3 son estrellas, y denotemos $Q_i = a_i^*$ para $i = 1, 2, 3$. Como subcaso supongamos que Q_4, Q_5 y Q_6 son estrellas, digamos $Q_i = a_i^*$ para $i = 4, 5, 6$. Entonces hay una subgráfica de G isomorfa a la de la figura A.8, cuyos vértices son normales. Sin embargo, entonces el triángulo $T = \{a_1, a_2, a_3\}$ es interno. Como a_1 es un vértice normal, debe existir $q \in K(G)$ tal que $q \in a_1^*$ pero $q \notin Q_T$. Como $q \subseteq N[a_1] = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_6\}$ debe suceder que $q = \{a_1, a_4, a_6\}$ y entonces a_4 es adyacente a a_6 . Similarmente, considerando que a_2 es un vértice normal, obtenemos que $a_5 \sim a_4$, y considerando a_3 tenemos que $a_5 \sim a_6$. Lo cual implicaría que G es el octaedro. Es decir, este subcaso no es posible. Ahora, consideremos el caso en el que alguno de los vértices Q_4, Q_5, Q_6 de $K^2(G)$ es corbata. Sin pérdida de generalidad supongamos que Q_4 es corbata. Por el lema A.1.11, ni Q_5 ni Q_6 son estrellas. Supongamos entonces que T_1, T_2, T_3 son triángulos internos tales que $Q_4 = Q_{T_3}, Q_5 = Q_{T_1}$ y $Q_6 = Q_{T_2}$. Afirmamos que uno de los siguientes conjuntos $T_1 \cap T_2, T_2 \cap T_3, T_1 \cap T_3$ debe ser no vacío. Supongamos que $T_1 \cap T_3 = \emptyset$ y que $T_2 \cap T_3 = \emptyset$. Como a_1 es vecino de dos vértices de T_2 y dos vértices de T_3 así como de a_2 y de a_3 , entonces debe suceder que $a_2 \in T_3$ y $a_3 \in T_1$. Similarmente considerando los vecinos de a_2 , tenemos que $a_1 \in T_3$ y $a_3 \in T_1$. Esto significa que $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$. Lo cual prueba nuestra afirmación, sin pérdida de generalidad supongamos que $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$. Si $|T_1 \cap T_2| = 1$, estamos en la situación de la figura A.2. En este caso se puede verificar que el único vértice normal tal cuya estrella es un vecino de Q_{T_1} y de Q_{T_2} , es el vértice en $T_1 \cap T_2$, entonces $T_1 \cap T_2 = \{a_3\}$. Pero entonces ninguno de los vecinos de a_3 es un vértice normal. Ahora, solo nos queda la posibilidad de que $|T_1 \cap T_2| = 2$, esta es la situación de la figura A.3. Pero en este subcaso obtenemos que tampoco es posible, pues, dado que a_3 es un vértice normal con $a_3^* \sim Q_{T_1}$ y $a_3^* \sim Q_{T_2}$, debe suceder que $a_3 \in T_1 \cap T_2$. Pero entonces a_3 no puede tener dos vecinos diferentes que sean vértices normales.
- b) Supongamos que Q_1 es corbata, que Q_2 y Q_3 son estrellas. Considerando la gráfica de la derecha de la figura A.5, obtenemos que Q_5 debe ser estrella. Considerando la gráfica de la izquierda de la figura A.5, obtenemos que Q_6 debe ser estrella. Pero por el lema A.1.10 esto no puede suceder.
- c) Supongamos ahora que Q_1 y Q_2 son corbatas, y que Q_3 es estrella. Por el lema A.1.8 Q_5 no puede ser una corbata. Pero por la gráfica de la izquierda de la figura A.5, Q_5 no puede ser una estrella tampoco.

d) Finalmente, el caso donde Q_1, Q_2, Q_3 son corbatas, tampoco es posible por el lema A.1.8.

Con esto concluimos que una de las aristas punteadas de la gráfica de la figura A.8 debe estar presente y por lo tanto $K^2(G)$ es hereditariamente Helly. ■

Bibliografía

- [1] R. Boulet, E. Fieux, and B. Jouve. Simplicial simple-homotopy of flag complexes in terms of graphs. *European Journal of Combinatorics*, 31(1):161–176, 2010.
- [2] F. F. Dragan. *Centers of graphs and the Helly property*. PhD thesis, Moldova State University, 1989.
- [3] F. Escalante. Über iterierte clique-graphen. *Abh. Math. sem. Univ. Hamburg*, 39:59–68, 1973.
- [4] M. E. Frías-Armenta, V. Neumann-Lara, and M. A. Pizaña. Dismantlings and iterated clique graphs. *Discrete Mathematics*, 282:263–265, 2004.
- [5] R. L. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász, editors. *Handbook of combinatorics. Vol. 2*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 1995.
- [6] F. Harary. *Graph theory*. Addison-Wesley, 1969.
- [7] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [8] M. Islas. Propiedades homotópicas del operador de clanes en gráficas. *Tesis, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo*, <https://github.com/MauricioIslas/tlphocg.git>, 2021.
- [9] F. Larrión, V. Neumann-Lara, and M. A. Pizana. Whitney triangulations, local girth and iterated clique graphs. *Discrete Mathematics*, 258(1-3):123–135, 2002.
- [10] F. Larrión, V. Neumann-Lara, and M. A. Pizaña. On expansive graphs. *European Journal of Combinatorics*, 30(2):372–379, 2009.
- [11] F. Larrión and M. A. Pizaña. On hereditary clique-helly self-clique graphs. *Discrete applied mathematics*, 156(7):1157–1167, 2008.
- [12] F. Larrión, M. A. Pizaña, and R. Villarroel-Flores. Equivariant collapses and the homotopy type of iterated clique graphs. *Discrete mathematics*, 308(15):3199–3207, 2008.
- [13] F. Larrión, M. A. Pizaña, and R. Villarroel-Flores. The clique operator on matching and chessboard graphs. *Discrete mathematics*, 309(1):85–93, 2009.

-
-
- [14] F. Larrión, M. A. Pizaña, and R. Villarroel-Flores. Discrete morse theory and the homotopy type of clique graphs. *Annals of Combinatorics*, 17:743–754, 2013.
- [15] J. R. Munkres. *Homology Groups of a Simplicial Complex*, chapter 1, pages 2–20. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1984.
- [16] E. Prisner. Convergence of iterated clique graphs. *Discrete Math*, 103(2):199–207, 1992.
- [17] E. Prisner. Hereditary clique-helly graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 14:216–220, 1993.
- [18] J. L. Szwarcfiter. Recognizing clique-Helly graphs. *Ars Combin.*, 45:29–32, 1997.
- [19] R. Villarroel-Flores. On the clique behavior of graphs of low degree. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 28(2):1–11, 2022.