



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Centro de Investigación en Matemáticas

El Laplaciano de algunos Conjuntos Auto-Similares y sus Eigenvalores

Tesis que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Miguel Ángel Olvera Hernández

bajo la dirección de

Dr. Federico Menéndez - Conde Lara

PACHUCA, HIDALGO. NOVIEMBRE DE 2009.

Resumen

En esta tesis se definirá un laplaciano sobre ciertos conjuntos fractales auto-similares, el cual será construido por medio de laplacianos en gráficas. Además se calcularán los eigenvalores del laplaciano sobre algunos conjuntos auto-similares.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mis padres por todo el apoyo brindado durante estos largos meses así como a mis profesores y amigos. También quiero expresar mi gratitud al Dr. Federico por su valiosa ayuda durante el desarrollo de este trabajo.

AQUÍ VAN LOS AGRADECIMIENTOS

Índice general

Resumen	III
Agradecimientos	v
Introducción	1
1. Conjuntos Auto-Similares	5
1.1. Conjuntos Auto-Similares	5
1.2. Aproximación Gráfica	13
1.3. Medidas Auto-Similares	16
2. Elementos de Análisis Funcional	19
3. Laplaciano en Gráficas	27
3.1. Laplaciano y Energía de una Gráfica	27
3.2. Energías Normalizadas	33
4. El Laplaciano de un Conjunto Auto-Similar	37
5. Diseminación Espectral	47
5.1. Diseminación Espectral	50
5.2. Espectro del Laplaciano en el Triángulo de Sierpinski	52
5.3. Espectro del Laplaciano en SG_3	58
Bibliografía	65

Introducción

Una gran cantidad de métodos y herramientas del análisis funcional han resultado de notable utilidad en el estudio y desarrollo de las ecuaciones diferenciales parciales (ver por ejemplo [4]). En esta tesis estudiaremos algunos aspectos de una teoría conocida como “Análisis en Fractales” desarrollada recientemente por J. Kigami [1], R. Strichartz [2] y otros autores. A grandes rasgos, la idea central de esta teoría, es aplicar métodos de análisis funcional para estudiar ecuaciones diferenciales definidas sobre ciertos dominios “rugosos” conocidos como fractales (ver [11] para una presentación de esos conjuntos). La naturaleza irregular de los conjuntos fractales impide definir las derivadas sobre ellos en la forma usual; sin embargo, los métodos del análisis funcional sí resultan aplicables, y nos permiten definir, de forma natural, operadores diferenciales actuando en espacios de funciones definidas sobre algunos conjuntos fractales.

Un objeto fundamental en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales es el laplaciano (ver [9])

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Usando métodos de análisis puede definirse el laplaciano sin hacer referencia explícita a las derivadas; la idea es pensarlo como un operador actuando en un espacio de funciones que queda determinado por una *forma cuadrática*, donde físicamente la forma cuadrática corresponde a la energía del sistema (ver por ejemplo [4]). Cuando el dominio en que está definido el laplaciano es una región acotada de \mathbb{R}^n el laplaciano (con condiciones de frontera dadas) queda esencialmente determinado por sus *eigenvalores*; estos son por tanto cantidades muy importantes en el estudio del laplaciano [13]

A lo largo de este trabajo definiremos un laplaciano sobre ciertos conjuntos fractales llamados *conjuntos auto-similares*, los cuales pueden ser representados de manera aproximada por medio de gráficas: un ejemplo de estos conjuntos es el triángulo de Sierpinski (ver Figura 1). El laplaciano de un conjunto auto-similar se construye tomando el límite de laplacianos en gráficas [12], los cuales estarán definidos a partir de

la *energía* de las gráficas. Además se hacen cálculos para encontrar los eigenvalores y eigenfunciones del laplaciano definido sobre conjuntos auto-similares.

A continuación haremos una breve descripción del contenido de este trabajo:

En el primer capítulo definiremos un conjunto auto-similar K . Para lograr esto comenzaremos hablando sobre puntos fijos y contracciones.

En el capítulo 2 mostraremos algunos conceptos y resultados sobre espacios de Hilbert, operadores auto-adjuntos y formas cuadráticas, los cuales nos serán de gran ayuda en el desarrollo de la teoría que se utilizará para la definición del laplaciano de un conjunto auto-similar.

En el capítulo 3 estudiaremos algunas de las propiedades de los laplacianos discretos, que es como llamaremos a los laplacianos en gráficas.

En el capítulo 4 definiremos el laplaciano de un conjunto auto-similar por medio de una forma cuadrática cuyo dominio es un subconjunto de $L^2(K, \mu)$.

En el último capítulo calcularemos los eigenvalores del laplaciano con condiciones de Dirichlet, para lo cual utilizaremos un método conocido como diseminación espectral. Este método está basado en la obtención de los eigenvalores por medio de los eigenvalores de los laplacianos discretos. Se aplica el método a tres conjuntos: el intervalo $[0, 1]$, el triángulo de Sierpinski usual (SG) y el triángulo de Sierpinski de nivel 3 (SG_3). El intervalo no es desde luego un conjunto fractal pero si cumple con la definición de ser un conjunto auto-similar y su simplicidad hace que resulte muy práctico para ilustrar el método de la diseminación espectral. Desarrollaremos en detalle los cálculos para este ejemplo y el del triángulo de Sierpinski; esos ejemplos han sido tratados en la literatura (e.g. [2]). El caso del triángulo de Sierpinski de nivel 3, hasta donde tenemos conocimiento no ha sido tratado explícitamente anteriormente, y presenta notables dificultades que no están presentes en los otros dos casos; en particular si bien sea hacen ciertos avances en los cálculos de sus eigenvalores no ha

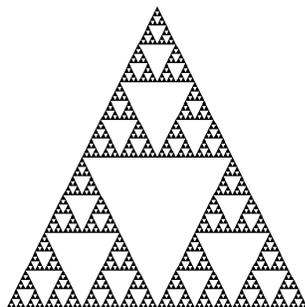


Figura 1: Triángulo de Sierpinski.

sido posible, para SG_3 , hasta el momento obtener estimaciones análogas a las que se obtienen en los otros dos casos.

Capítulo 1

Conjuntos Auto-Similares

En este capítulo definiremos lo que es un conjunto auto-similar y describiremos una forma de construir dichos conjuntos. La herramienta principal para definir a estos conjuntos es el Teorema 1.3, ya que los conjuntos auto-similares serán, de hecho, puntos fijos en un espacio métrico apropiado. También en la sección 1.3 definiremos medidas sobre los conjuntos auto-similares.

1.1

Conjuntos Auto-Similares

En esta sección definiremos los conjuntos auto-similares. Para empezar será necesario tratar el problema de resolver la ecuación $f(x) = x$ cuando f es una contracción.

Definición 1.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $f : X \rightarrow X$ es una **contracción** si

$$r = \sup_{x, y \in X, x \neq y} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} < 1.$$

La constante r es conocida como el factor de contracción de f .

Definición 1.2. Sea $f : X \rightarrow X$ una función. Si x satisface $f(x) = x$, entonces se dice que x es un punto fijo de f .

Teorema 1.3. (Teorema del punto fijo de Banach). Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \rightarrow X$ una contracción. Entonces existe un único punto fijo de f . Además si x_* es el punto fijo de f , entonces $\{f^n(a)\}_{n \geq 0}$ converge a x_* para todo $a \in X$ donde $f^1(a) = f(a)$ y $f^n(a) = f(f^{n-1}(a))$.

Demostración. Si r es el factor de contracción, entonces para $m > n$,

$$\begin{aligned} d(f^n(a), f^m(a)) &< d(f^n(a), f^{n+1}(a)) + \cdots + d(f^{m-1}(a), f^m(a)) \\ &\leq (r^n + \cdots + r^{m-1})d(a, f(a)) \leq \frac{r^n}{1-r}d(a, f(a)). \end{aligned}$$

De aquí que $\{f^n(a)\}_{n \geq 0}$ sea una sucesión de Cauchy. Como (X, d) es completo, existe un $x_* \in X$ tal que $f^n(a) \rightarrow x_*$ cuando $n \rightarrow \infty$. Usando el hecho de que f es continua y que $f^{n+1}(a) = f(f^n(a))$ tenemos

$$x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f^n(a)) = f(x_*).$$

Ahora, si $f(x) = x$ y $f(y) = y$, entonces $d(x, y) = d(f(x), f(y)) < rd(x, y)$. De aquí que $d(x, y) = 0$, por lo que $x = y$. \square

Ahora procederemos a definir un conjunto auto-similar.

Definición 1.4. Sea (X, d) un espacio métrico completo y sean $f_i : X \rightarrow X$ contracciones para $i = 1, \dots, N$. Si K es un subconjunto de X compacto diferente del vacío que satisface

$$K = \bigcup_{i=1}^N f_i(K),$$

entonces K es llamado el **conjunto auto-similar** con respecto a $\{f_1, \dots, f_N\}$.

Para demostrar la existencia y unicidad de estos conjuntos serán necesarios los teoremas 1.8 y 1.9 que serán presentados más adelante. La idea central será ver al conjunto auto-similar como el punto fijo de una contracción en un espacio métrico adecuado. A continuación formaremos dicho espacio métrico.

Definición 1.5. Sea (X, d) un espacio métrico. Denotemos a la colección de subconjuntos compactos no vacíos de X por $\mathcal{C}(X)$. Se define la métrica de Hausdorff por:

$$\delta(A, B) = \inf\{r > 0 : U_r(A) \supseteq B \text{ y } U_r(B) \supseteq A\},$$

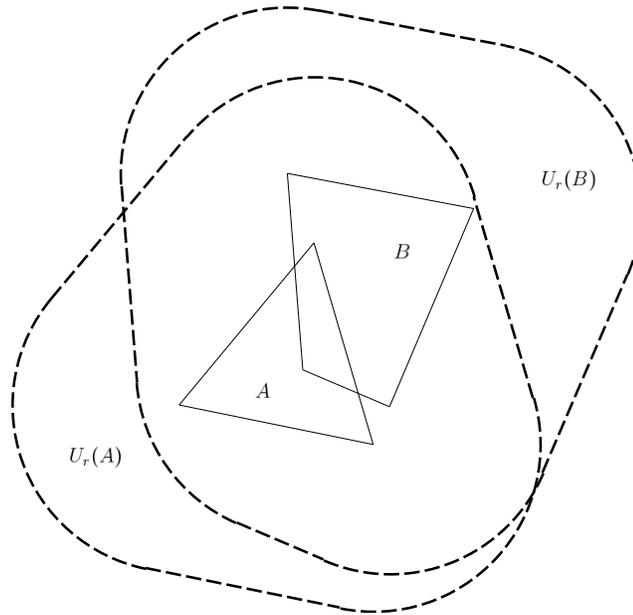


Figura 1.1: Representación gráfica de la métrica de Hausdorff.

para $A, B \in \mathcal{C}(X)$, donde $U_r(A) = \bigcup_{y \in A} B_r(y)$ y $B_r(y)$ es la bola abierta de radio r y centro en y . En la Figura 1.1 se muestra cómo actúa la métrica de Hausdorff.

Antes de demostrar que efectivamente la métrica de Hausdorff es una métrica recordemos algunas cosas.

Definición 1.6. Sea (X, d) un espacio métrico. X es compacto por sucesiones si toda sucesión contiene una subsucesión convergente.

Proposición 1.7. Un espacio métrico es compacto si y solo si compacto por sucesiones.

Demostración. Puede ser encontrada en la pagina 155 de [10]. □

Teorema 1.8. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Entonces la métrica de Hausdorff δ es una métrica en $\mathcal{C}(X)$, además $(\mathcal{C}(X), \delta)$ es un espacio métrico completo.

Demostración. Sea $\delta(A, B) = 0$, para demostrar que $A \subseteq B$ consideremos $x \in A$, como $U_{\frac{1}{n}}(B) \supset A$ para $n > 0$ entonces existe $x_n \in B$ tal que $x \in B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ de aquí que $d(x, x_n) < 1/n$, por lo que podemos construir una sucesión $\{x_n\}$ contenida en B tal que $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$, luego como B es cerrado $x \in B$. De manera análoga se demuestra $B \subseteq A$, así que podemos concluir que $A = B$.

Para demostrar la desigualdad del triángulo supongamos que $\delta(A, C) = r$ y $\delta(C, B) = s$, por lo que si $b \in B$ entonces existe $c \in C$ tal que $b \in B_{s+c}(c)$, luego

para c existe $a \in A$ tal que $c \in B_{r+\epsilon}(a)$, por lo que

$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b) \leq r + s + 2\epsilon,$$

de aquí que para $b \in B$ exista $a \in A$ tal que $b \in B_{r+s+2\epsilon}(a)$, por lo que $B \subseteq U_{r+s+2\epsilon}(A)$, de manera análoga tenemos $A \subseteq U_{r+s+2\epsilon}(B)$, por lo que

$$\delta(A, B) \leq r + s + 2\epsilon.$$

Ahora probaremos que $(\mathcal{C}(X), \delta)$ es completo. Sea $\{A_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{C}(X), \delta)$ y definamos $B_n = \overline{\bigcup_{k \geq n} A_k}$, demostraremos que si $A = \bigcap_{n \geq 1} B_n$, entonces $A_n \rightarrow A$. Primero demostraremos que A es compacto, sabemos que para todo $s > 0$ existe N tal que $\delta(A_n, A_m) < s/2$ para $m, n \geq N$, por lo que $U_{s/2}(A_N) \supseteq A_k$ para todo $k \geq N$, luego al ser A_N compacto existe un subconjunto finito P en A_N tal que $\bigcup_{p \in P} B_{s/2}(p) \supseteq A_N$, de aquí que

$$\bigcup_{p \in P} B_s(p) \supseteq U_{s/2}(A_N) \supseteq A_k \text{ para todo } k \geq N,$$

de aquí que

$$\bigcup_{p \in P} B_s(p) \supseteq \bigcup_{k \geq N} A_k$$

luego si $r > s$ tenemos

$$\bigcup_{p \in P} B_r(p) \supseteq \overline{\bigcup_{k \geq N} A_k} = B_N.$$

A continuación mostraremos que B_N es compacto para esto demostraremos que B_N es compacto por sucesiones. Sea $\{b_n\}$ una sucesión contenida en B_N , formaremos la subsucesión $\{b_{n_k}\}$ de la siguiente manera, sabemos que $\bigcup_{p \in P_1} B_1(p) \supseteq B_N$ para algún subconjunto finito P_1 , por lo que existe un conjunto infinito C_1 de elementos de la sucesión $\{b_n\}$ que están contenidos en alguna $B_1(p_1)$, luego tomemos cualquier elemento b_{n_1} de C_1 , para obtener b_{n_2} procedamos de manera análoga, sabemos que existe $B_{1/2}(p_2)$ tal que contiene una cantidad infinita de elementos de C_1 , denotemos a este conjunto por C_2 y tomemos como b_{n_2} cualquier elemento de C_2 , repitiendo este proceso obtenemos la subsucesión $\{b_{n_k}\}$, además hemos construido una sucesión de conjuntos C_i tales que $C_i \supseteq C_j$, $i \leq j$ y que $B_{1/m}(p_m) \supseteq C_m$, de aquí que $\{b_{n_k}\}$ es de Cauchy, pues para todo $\epsilon > 0$ podemos elegir m tal que $b_{n_k} \in C_m$ para $k \geq m$. Como $B_n \subset B_m$ si $m \geq n$, entonces B_n es compacto y no vacío si $n \geq N$, de aquí que A es compacto no vacío.

Ahora demostraremos que $A_n \rightarrow A$, como $\{A_i\}$ es una sucesión de Cauchy entonces para todo $r > 0$ existe M tal que $U_{r/2}(A_m) \supseteq A_k$ para $k, m \geq M$, de aquí que

$U_r(A_m) \supseteq B_M \supseteq A$. A continuación mostraremos que $\{B_i\}$ es una sucesión de Cauchy. Si $r > 0$ entonces existe N tal que $\delta(A_m, A_n) < r$ para todo $m, n \geq N$, consideremos B_n, B_m con $m > n > N$, de esta manera $B_m \subseteq B_n$ y de aquí que $B_m \subseteq U_r(B_n)$.

Para demostrar que $B_n \subseteq U_r(B_m)$, elijamos $y \in B_n$, luego si $y \in B_m$ terminamos, si no $y \in A_i$ para algún $m - 1 \geq i \geq n$ por lo que existe $a_i \in A_i$ con $l \geq m$ tal que $x \in B_r(a_i)$ y como $A_l \subseteq B_m$ tenemos que $y \in U_r(B_m)$, de esta manera $\{B_i\}$ es una sucesión de Cauchy.

De lo anterior sabemos que para $r > 0$ existe M tal que $\delta(B_n, B_m) < r/2$ para todo $n, m \geq M$, de aquí que si $x \in A_m \subseteq B_m$, $m \geq M$ entonces para todo $i \geq M$ existe $a_i \in B_i$ tal que $x \in B_{r/2}(a_i)$ por lo que podemos formar una sucesión $\{a_i\}$ en B_M , luego como B_M es compacto existe una subsucesión convergente $\{a_{i_k}\}$, sea a tal que $a_{i_k} \rightarrow a$.

A continuación demostraremos que $a \in A$. Como $a_{i_k} \in B_{i_k}$, $i_k \geq M$ y $B_m \subseteq B_n$ si $m \geq n$ entonces salvo una cantidad finita de terminos tenemos que $\{a_{i_k}\} \in B_l$ para $l \geq M$ de aquí que como $\{a_{i_k}\}$ converge, además converge en B_l para todo $l \geq M$ por lo que $a \in A$.

Luego podemos elegir $i_k > M$ tal que $d(x, a_{i_k}), d(a, a_{i_k}) < r/2$ por lo que $x \in B_r(a)$ de esta manera $x \in U_r(A)$. \square

Teorema 1.9. *Sea (X, d) un espacio métrico completo, $f_i : X \rightarrow X$ una contracción para $i = 1, \dots, N$. Entonces la función $F : \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(X)$ definida por*

$$F(A) = \bigcup_{i=1}^N f_i(A)$$

es una contracción con respecto a la métrica de Hausdorff.

Demostración. Denotemos por δ a la métrica de Hausdorff. Para demostrar que F es una contracción primero se demostrará

(1) Si $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{C}(X)$, entonces

$$\delta\left(A_1 \bigcup A_2, B_1 \bigcup B_2\right) \leq \max\{\delta(A_1, B_1), \delta(A_2, B_2)\}.$$

(2) Si $f : X \rightarrow X$ es una contracción con factor de contracción r , entonces

$$\delta(f(A), f(B)) \leq r\delta(A, B) \text{ para } A, B \in \mathcal{C}(X).$$

Para demostrar (1) demostraremos que

$$B_1 \bigcup B_2 \subseteq U_p(A_1 \bigcup A_2) \text{ y } A_1 \bigcup A_2 \subseteq U_p(B_1 \bigcup B_2)$$

donde $p = \max\{\delta(A_1, B_1), \delta(A_2, B_2)\}$.

Por la definición de p tenemos

$$p \geq \inf\{r > 0 : U_r(A_1) \supseteq B_1 \text{ y } U_r(B_1) \supseteq A_1\},$$

y

$$p \geq \inf\{r > 0 : U_r(A_2) \supseteq B_2 \text{ y } U_r(B_2) \supseteq A_2\},$$

por lo que $B_1 \subseteq U_p(A_1)$ y $B_2 \subseteq U_p(A_2)$, de aquí que si

$$b \in B_1 \cup B_2 \subseteq U_p(A_1) \cup U_p(A_2)$$

entonces b está en alguna bola de radio p con centro en algún elemento de A_1 ó A_2 , por lo que $B_1 \cup B_2 \subseteq U_p(A_1 \cup A_2)$, de manera similar $A_1 \cup A_2 \subseteq U_p(B_1 \cup B_2)$.

Para demostrar (2), sea $s = \delta(A, B)$ entonces, $B \subseteq U_s(A)$, por lo que si $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $d(b, a) < s$, de aquí que si $f(b) \in f(B)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(f(a), f(b)) \leq rd(a, b) \leq rs$, por lo tanto $f(B) \subseteq U_{rs}(A)$, de manera similar $f(A) \subseteq U_{rs}(B)$.

Para concluir que F es una contracción observe que de (1) se tiene

$$\begin{aligned} \delta(F(A), F(B)) &= \delta\left(\bigcup_{i=1}^N f_i(A), \bigcup_{i=1}^N f_i(B)\right) \\ &\leq \max_{\{1 \leq i \leq N\}} \{\delta(f_i(A), f_i(B))\} \end{aligned}$$

y de (2), si $r = \max_{\{1 \leq i \leq N\}} \{r_i\}$ entonces,

$$\begin{aligned} \delta(F(A), F(B)) &\leq \max_{\{1 \leq i \leq N\}} \{\delta(f_i(A), f_i(B))\} \\ &\leq \max_{\{1 \leq i \leq N\}} \{r_i \delta(A, B)\} \leq r \delta(A, B). \end{aligned}$$

□

Teorema 1.10. *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Si $f_i : X \rightarrow X$ es una contracción para $i = 1, 2, \dots, N$, entonces existe un único conjunto auto-similar con respecto a $\{f_1, \dots, f_N\}$.*

Demostración. La prueba se sigue de los teoremas 1.3 , 1.8 y 1.9. □

Notemos que si K es el conjunto auto-similar con respecto a $\{f_1, \dots, f_N\}$ entonces K es el punto fijo de la contracción $F(B) = \bigcup_{i=1}^N f_i(B)$, de aquí que si A es un conjunto compacto, entonces $\{F^n(A)\}$ tiende a K cuando $n \rightarrow \infty$.

Ejemplo 1.11. Consideremos $X = \mathbb{R}$ con la métrica usual, sea

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x, \quad f_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2},$$

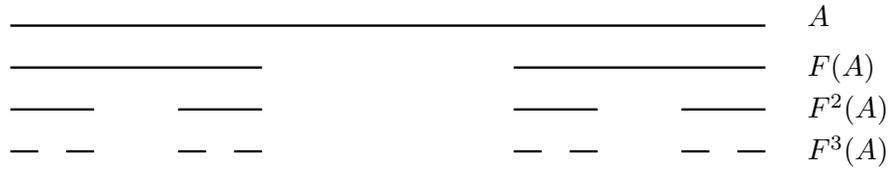


Figura 1.2: Aproximación del conjunto de Cantor.

entonces el conjunto auto-similar correspondiente a $\{f_1, f_2\}$ es el intervalo $[0, 1]$.

Ejemplo 1.12. (Conjunto de Cantor). Sea $X = \mathbb{R}$, $f_1(x) = \frac{1}{3}x$ y $f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. El conjunto auto-similar con respecto a $\{f_1, f_2\}$ es el conjunto de Cantor. En la Figura 1.2 se muestra una aproximación de dicho conjunto, donde A representa el intervalo $[0, 1]$.

Ejemplo 1.13. (Triángulo de Sierpinski(SG)). Sea $X = \mathbb{C}$ con la métrica usual y $\{p_1, p_2, p_3\}$ los vértices de un triángulo equilátero. Consideremos

$$f_i(x) = \frac{x - p_i}{2} + p_i,$$

para $i = 1, 2, 3$. El conjunto auto-similar con respecto a $\{f_1, f_2, f_3\}$ es conocido como el triángulo de Sierpinski. En la Figura 1.3 se muestra una aproximación de dicho conjunto [3].

Ejemplo 1.14. (Pentakun). Sea $X = \mathbb{C}$, p_i una raíz de la unidad de grado 5, definamos

$$f_i(x) = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(xp_i - p_i) + p_i,$$

para $i = 1, \dots, 5$. El conjunto auto-similar con respecto a $\{f_i\}$, $i = 1, \dots, 5$, es conocido como el Pentakun ¹. En la Figura 1.4 se muestra una aproximación de dicho conjunto.

A continuación definiremos un tipo de conjuntos auto-similares sobre los cuales trabajaremos.

Definición 1.15. Sea K el conjunto auto-similar con respecto a $\{f_1, \dots, f_N\}$. Para $w = w_1 w_2 \dots w_m$, donde $w_i \in \{1, \dots, N\}$ y $|w| = m$, definamos

$$f_w = f_{w_1} \circ f_{w_2} \circ \dots \circ f_{w_m}.$$

K es llamado postcríticamente finito (pcf) si K es conexo y existe un conjunto $V_0 \subseteq K$ tal que cada punto de V_0 es un punto fijo de alguna f_i y además

¹Las imagenes presentadas del triángulo de Sierpinski y el Pentakun fueron generadas por medio del programa Maple 9.

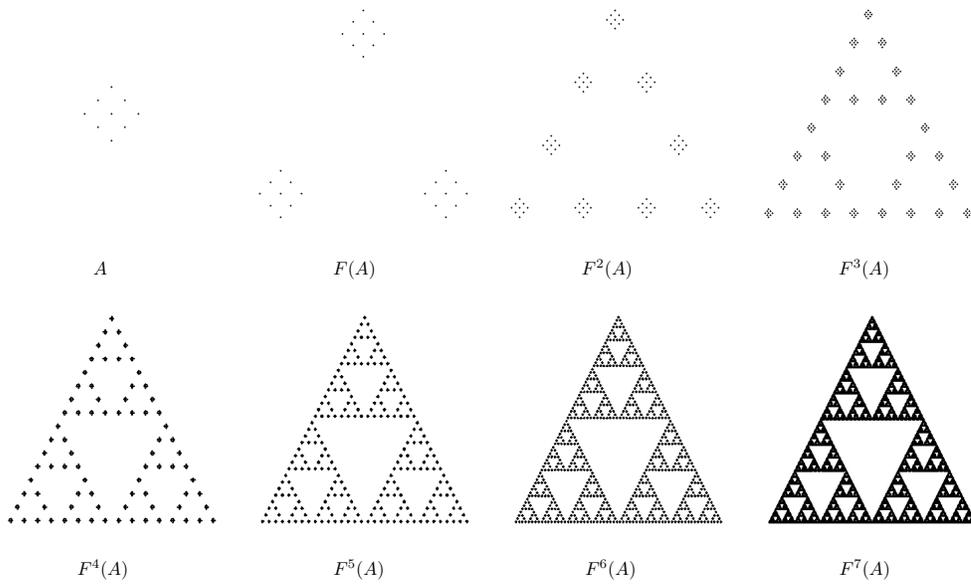


Figura 1.3: Aproximación del triángulo de Sierpinski.

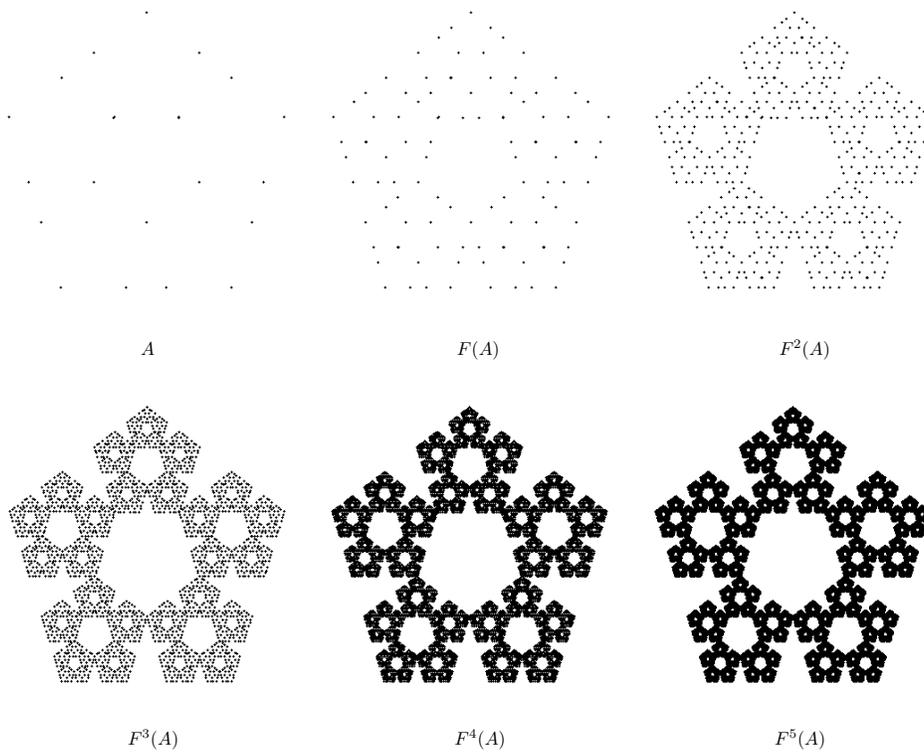


Figura 1.4: Aproximación del Pentakun.

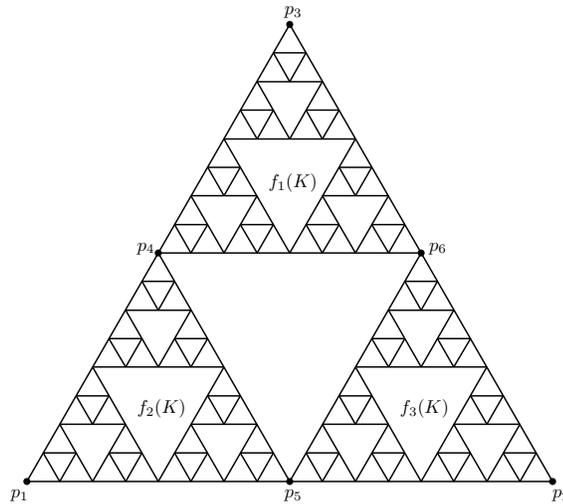


Figura 1.5: Conjunto postcríticamente finito.

$f_w(K) \cap f_{w'}(K) \subseteq f_w(V_0) \cap f_{w'}(V_0)$ para todo w y w' tales que $w \neq w'$ y $|w| = |w'|$.

Al conjunto V_0 le llamaremos frontera de K .

Ejemplo 1.16. Sea $[0, 1]$ el conjunto auto-similar del Ejemplo 1.11, entonces el intervalo es un conjunto postcríticamente finito con frontera $V_0 = \{0, 1\}$.

Ejemplo 1.17. El triángulo de Sierpinski es postcríticamente finito con frontera $V_0 = \{p_1, p_2, p_3\}$, donde p_i es como en la definición de este conjunto. Para ver esto hagamos un caso particular, para $f_1(V_0) = \{p_3, p_4, p_6\}$ y $f_2(V_0) = \{p_1, p_4, p_5\}$, además $f_1(K) \cap f_2(K) = \{p_4\}$. En la Figura 1.5 se muestra gráficamente este hecho.

Ejemplo 1.18. El conjunto de Cantor no es postcríticamente finito, ya que no es conexo.

1.2

Aproximación Gráfica

Un conjunto auto-similar K con respecto a $\{f_1, \dots, f_m\}$ puede ser aproximado por medio de conjuntos finitos V_n , para esto solo hay que elegir cualquier conjunto finito V_0 y V_n quedará definido por $V_n = \bigcup_{k=1}^m f_k(V_{n-1})$, $n \geq 1$. En esta sección presentaremos una forma de establecer una relación entre los puntos del conjunto

V_n o dicho de otra manera formaremos una gráfica de vértices V_n . Para empezar introduciremos la notación de teoría de gráficas que nos ayudará con el manejo de estas relaciones.

Definición 1.19. (Gráfica). Una gráfica $G(V, E)$ consiste de dos conjuntos, un conjunto finito no vacío V de vértices y un conjunto

$$E \subseteq \{A \subseteq V : |A| = 2\}$$

de aristas. Decimos que $p \sim q$ si $\{p, q\} \in E$.

Definición 1.20. (Camino). Un camino en una gráfica $G(V, E)$ de x_1 a x_n , $x_1, x_n \in V$, es una sucesión de vértices $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ tales que $\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \dots, \{x_{n-1}, x_n\} \in E$, donde todos los x_i son distintos.

Definición 1.21. (Gráfica conexa). Se dice que una gráfica $G(V, E)$ es conexa si para todos $p, q \in V$ existe un camino de p a q .

Definición 1.22. (Gráfica completa). Una gráfica $G(V, E)$ es completa si para cada par de vértices p, q se tiene que $\{p, q\} \in E$.

Con el fin de establecer una relación entre los puntos del conjunto V_n , $n \geq 0$, tomaremos el conjunto V_n y formaremos una gráfica $\Gamma(V_n, E_n)$, donde diremos que dos puntos $p, q \in V_n$ están relacionados si $p \sim q$. Para formar estas gráficas primero tomaremos cualquier gráfica $\Gamma_0(V_0, E_0)$ y definiremos la gráfica $\Gamma(V_n, E_n)$, $n \geq 1$ mediante:

$x \sim_n y$ si y solo si existen $x', y' \in V_{n-1}$ tales que $x' \sim_{n-1} y'$ y que $f_i(x') = x$, $f_i(y') = y$, $i \in \{1, \dots, m\}$. De esta manera la relación entre los puntos V_n sólo depende de la relación que tengan los puntos del conjunto V_0 . Además definamos $V_* = \bigcup_{n \geq 0} V_n$.

Ejemplo 1.23. Sea K el triángulo de Sierpinski y $V_0 = \{p_1, p_2, p_3\}$. Consideremos a Γ_0 como la gráfica completa con vértices V_0 . En la Figura 1.6 se muestran algunas gráficas $\Gamma_n(V_n, E_n)$. Observemos que la contracción f_i atrae al triángulo de vértices $\{p_1, p_2, p_3\}$ o cualquier figura hacia el punto p_i .

Ejemplo 1.24. Sea K de Pentakun como en el ejemplo 1.14. Consideremos a Γ_0 como la gráfica completa con vértices $\{p_2, p_4, p_5\}$. En la Figura 1.7 se muestran algunas gráficas $\Gamma_n(V_n, E_n)$. Obsevemos que la contracción f_i rota y atrae al triángulo de vértices $\{p_2, p_4, p_5\}$ o cualquier figura hacia el punto p_i .

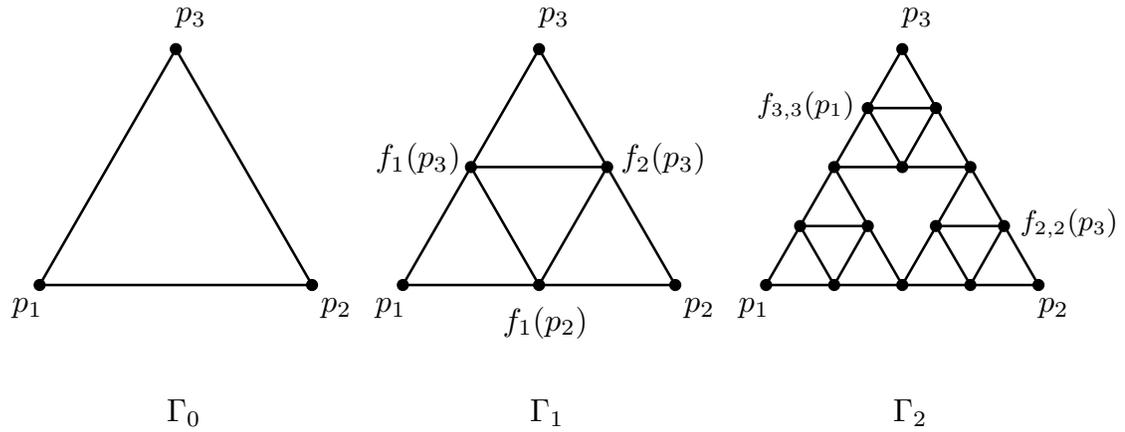


Figura 1.6: Aproximación gráfica del triángulo de Sierpinski.

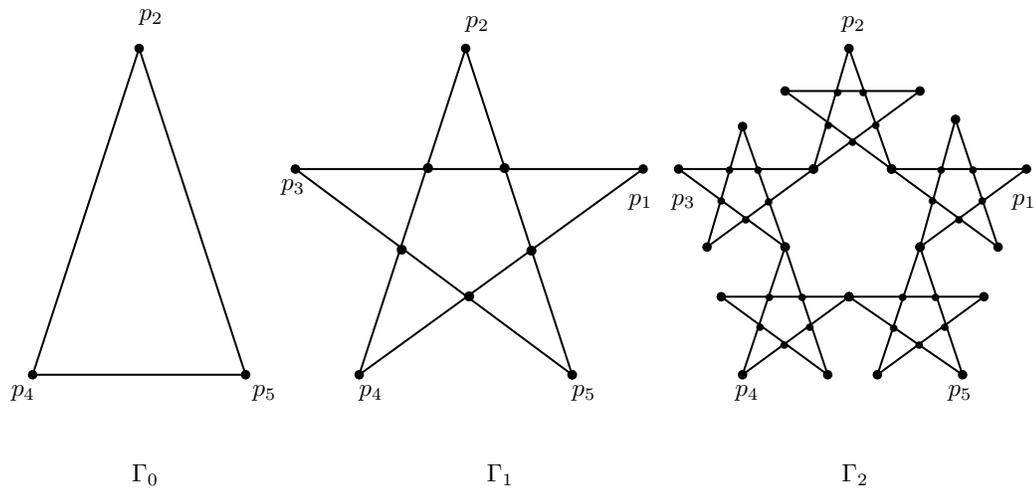


Figura 1.7: Aproximación gráfica del Pentakun.

1.3

Medidas Auto-Similares

En esta sección introduciremos una noción de medida sobre un conjunto auto-similar. Para comenzar recordaremos algunos resultados de teoría de la medida.

Definición 1.25. Una familia A de subconjuntos de un conjunto X es llamada una álgebra si:

1. $\emptyset, X \in A$.
2. Si $E \in A$, entonces $X \setminus E \in A$.
3. Si E_1, \dots, E_n pertenecen a A , entonces $\bigcup_{i=1}^n E_i$ pertenece a A .

Si A es una álgebra tal que la unión numerable de subconjuntos que pertenecen a A pertenece a A , entonces A es llamada una σ -álgebra.

Definición 1.26. Si A es una álgebra o σ -álgebra de subconjuntos de X , entonces una medida en A es una función real extendida μ definida en A tal que

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $\mu(E) \geq 0$ para todo E en A .
3. Si $\{E_i\}_{i=0}^{\infty}$ es una sucesión disjunta de elementos de A tales que $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ pertenece a A , entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Si existe una colección numerable de subconjuntos $\{E_n\}$ en A con $X = \bigcup E_n$ y tales que $\mu(E_n) < \infty$ para todo n , entonces diremos que μ es σ -finita.

Definición 1.27. Sea A una álgebra en el conjunto X . Si B es un subconjunto de X , definamos

$$\mu^*(B) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_j) : B \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i, E_i \in A \right\}.$$

Un subconjunto B de X tal que

$$\mu^*(C) = \mu^*(C \cap B) + \mu^*(C \setminus B)$$

para todo subconjunto de C de X , es llamado μ^* -medible.

Teorema 1.28. (*Extensión de Carathéodory*). *Sea A una álgebra del conjunto X . La colección A^* de todos los conjuntos μ^* -medibles es una σ -álgebra que contiene a A .*

Teorema 1.29. (*Extensión de Hahn*). *Si μ es una medida σ -finita en una álgebra A , entonces μ^* es la única medida en A^* tal que $\mu^*(E) = \mu(E)$ para todo $E \in A$.*

Las demostraciones de los teoremas anteriores pueden ser encontradas en las páginas 101 y 103 respectivamente de [11].

A continuación definiremos una medida sobre un conjunto auto-similar a la que llamaremos **medida auto-similar**. Sea K el conjunto auto-similar con frontera V_0 generado por las contracciones $\{f_i\}_{i=0}^N$. Si

$$A = \{f_\omega(K) : |\omega| \in \mathbb{N}\},$$

$$B = \{f_\omega(K) \setminus \{p_1, \dots, p_n\} : p_i \in f_\omega(V_0) \text{ con } |\omega|, n \in \mathbb{N}\}$$

y

$$C = \left\{ \bigcup_{i=1}^n p_i : p_i \in V_*, n \in \mathbb{N} \right\},$$

entonces

$$D = \left\{ \bigcup_{i=1}^n E_i : E_i \in A \cup B \cup C, n \in \mathbb{N} \right\}$$

es una álgebra de subconjuntos de K . Definamos una medida σ -finita en D dada por

$$\mu(f_\omega(K)) = \mu(f_\omega(K) \setminus \{p_1, \dots, p_n\}) = \left(\frac{1}{N}\right)^{|\omega|},$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n p_i\right) = 0$$

y además

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$$

si los $\{E_i\}$ solo se intersectan en puntos de V_* . Luego por los teoremas de Carathéodory y Hahn definamos la medida auto-similar sobre K , como aquella medida μ^* que resulta de extender μ a una medida definida en A^* . De ahora en adelante consideraremos a μ^* como la medida en K .

Capítulo 2

Elementos de Análisis Funcional

En este capítulo introduciremos algunos conceptos de espacios de Hilbert, así como resultados sobre operadores auto-adjuntos y formas cuadráticas no-negativas (en [4],[5] y [6] se tratan con mayor profundidad estos temas). Estos resultados serán necesarios en los capítulos 3 y 4, además serán la base para definir el laplaciano en un conjunto auto-similar. Un resultado central de este trabajo es el Teorema 2.28, que relaciona operadores auto-adjuntos con formas cuadráticas, ya que la definición del laplaciano de un conjunto auto-similar la haremos a partir de una forma cuadrática y el laplaciano será el operador auto-adjunto asociado.

Definición 2.1. Un espacio vectorial V sobre \mathbb{C} es llamado un espacio con producto interno si existe una función compleja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $V \times V$ tal que satisface las siguientes condiciones para todo $x, y, z \in V$ y $\alpha \in \mathbb{C}$:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si y solo si $x = 0$,
2. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,
3. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
4. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,
5. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Definición 2.2. Sean H y K dos espacios vectoriales normados. Un operador lineal T de H en K es una función que envía cada vector u de un cierto subespacio denso $D(T) \subseteq H$ a un vector $Tu \in K$, y que satisface :

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y) \text{ para todo } x, y \in D(T) \text{ y } a, b \in \mathbb{C}.$$

$D(T)$ es llamado el dominio de T y el rango $R(T)$ de T es el conjunto de vectores de la forma Tu donde $u \in D(T)$.

Definición 2.3. Un espacio con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es llamado un espacio de Hilbert si es completo bajo la norma $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Definición 2.4. Sean H y K espacios de Hilbert. Un operador lineal T de H en K se dice que es acotado si existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|Th\| \leq c\|h\| \text{ para todo } h \in D(T).$$

En tal caso, definiremos la norma de T por

$$\|T\| = \sup\{\|Th\| : \|h\| \leq 1\}.$$

Lema 2.5. Sean H y K espacios de Hilbert de dimensión finita, entonces todo operador lineal de H en K es acotado.

Definición 2.6. Sean H y K dos espacios vectoriales con producto interno. Si existe un operador lineal suprayectivo $T : H \rightarrow K$ tal que

$$\langle Th, Tg \rangle = \langle h, g \rangle$$

para todo h, g en H , diremos que H y K son isomorfos. Tal operador se llama isomorfismo. Además si $H = K$, T es llamado un operador unitario.

Proposición 2.7. Sean H y K espacios de Hilbert. Si T es un operador lineal de H en K , entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. T es continuo.
2. T es continuo en cero.
3. T es continuo en un punto.
4. T es acotado.

Demostración. 3) \Rightarrow 1) : Supongamos T es continua en h_0 y sea h cualquier punto de $D(T)$. Si $h_n \rightarrow h$ en $D(T)$, entonces $h_n - h + h_0 \rightarrow h_0$, luego por hipótesis

$$T(h_0) = \lim[T(h_n - h + h_0)] = \lim[T(h_n) - T(h) + T(h_0)] = \lim T(h_n) - T(h) + T(h_0),$$

de aquí que $T(h) = \lim T(h_n)$.

2) \Rightarrow 4) : Para $1 > \epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\|x\| < \delta$ entonces $\|Tx\| < \epsilon$, luego si $h \in D(T)$ entonces $\left\| \frac{\delta}{\|h\| + \epsilon} h \right\| < \delta$ por lo que

$$1 > \left\| T \left(\frac{\delta}{\|h\| + \epsilon} h \right) \right\| = \frac{\delta}{\|h\| + \epsilon} \|T(h)\|,$$

de aquí que $\frac{\|h\| + \epsilon}{\delta} > \|T(h)\|$, luego cuando $\epsilon \rightarrow 0$ vemos que T es acotado tomando a $c = \frac{1}{\delta}$.

□

Definición 2.8. Un funcional lineal en H es un operador lineal acotado T de H a \mathbb{C} . Al conjunto de funcionales lineales en H lo denotaremos por H^* .

Teorema 2.9. (Lema de Riesz). Sea T un funcional lineal en H , entonces existe un único vector $h_0 \in D(T)$ tal que

$$T(h) = \langle h, h_0 \rangle, \text{ para todo } h \in D(T).$$

Además $\|T\| = \|h_0\|$.

Demostración. Sea $M = \ker T$. Si $M \neq \{0\}$ entonces $M^\perp \neq \{0\}$, por lo que existe $f_0 \in M^\perp$ tal que $T(f_0) = 1$. Ahora si $h \in H$ y $T(h) = \alpha$, entonces $T(h - \alpha f_0) = T(h) - \alpha = 0$ por lo que $h - T(h)f_0 \in M$, de aquí que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle h - T(h)f_0, f_0 \rangle \\ &= \langle h, f_0 \rangle - \langle T(h)f_0, f_0 \rangle \\ &= \langle h, f_0 \rangle - \|f_0\|^2 T(h). \end{aligned}$$

Por lo que si $h_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|^2}$, entonces $T(h) = \langle h, h_0 \rangle$ para todo $h \in D(T)$. Por otro lado $\|T(h)\| = |\langle h, h_0 \rangle| \leq \|h\| \|h_0\|$ para todo $h \in D(T)$ tal que $\|h\| \leq 1$, de aquí que $\|T\| \leq \|h_0\|$. Además

$$\left| T \left(\frac{h_0}{\|h_0\|} \right) \right| = \frac{|\langle h_0, h_0 \rangle|}{\|h_0\|} = \|h_0\|,$$

por lo que $\|h_0\| \leq \|T\|$. □

Definición 2.10. Sean H y K dos espacios de Hilbert. Una función

$$u : D_H(u) \times D_K(u) \rightarrow \mathbb{C},$$

donde $D_H(u)$ y $D_K(u)$ son subespacios densos de H y K respectivamente, es una forma sesquilineal si para $h, f \in D_H(u)$, $k, g \in D_K(u)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se cumple

1. $u(\alpha h + \beta f, k) = \alpha u(h, k) + \beta u(f, k)$,
2. $u(h, \alpha k + \beta g) = \bar{\alpha} u(h, k) + \bar{\beta} u(h, g)$.

Además si $u(h, k) = \overline{u(k, h)}$ se dice que la forma es simétrica.

Teorema 2.11. Sean H y K dos espacios de Hilbert. Si $u : D_H(u) \times D_K(u) \rightarrow \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal tal que para todo $k \in D_K(u)$ existe $M > 0$ que cumple con

$$\|u(h, k)\| \leq M \|h\| \text{ para todo } h \in D_H(u),$$

y para todo $h \in D_H(u)$ existe $N > 0$ que cumple con

$$\|u(h, k)\| \leq N\|k\| \text{ para todo } k \in D_K(u),$$

entonces existen dos únicos operadores lineales acotados $A : D_H(u) \rightarrow K$ y $B : D_K(u) \rightarrow H$ tales que

$$u(h, k) = \langle Ah, k \rangle = \langle h, Bk \rangle \text{ para todos } h \in D_H(u) \text{ y } k \in D_K(u).$$

Demostración. Para $k \in D_K(u)$ definamos $T_k(h) = \overline{u(h, k)}$, por hipótesis y el Lema de Riesz 2.9 sabemos que existe un único $h_0 \in D_H(u)$ tal que

$$T_k(h) = \langle h, h_0 \rangle \text{ para todo } h \in D_H(u),$$

de esta manera podemos construir una transformación lineal $B : D_K(u) \rightarrow H$ tal que $B(k) = h_0$. Para ver que es lineal, sean $k, g \in D_K(u)$ por lo que existen únicos $B(k), B(g) \in D_H(u)$ tales que

$$T_k(h) = \langle h, B(k) \rangle \text{ y } T_g(h) = \langle h, B(g) \rangle \text{ para todo } h \in D_H(u),$$

de esta manera

$$\begin{aligned} T_{k+g}(h) &= \overline{u(h, k+g)} = \overline{u(h, k)} + \overline{u(h, g)} \\ &= \langle h, B(k) \rangle + \langle h, B(g) \rangle \\ &= \langle h, B(k) + B(g) \rangle, \end{aligned}$$

por otra parte para $k+g \in D_K(u)$ se tiene

$$\begin{aligned} T_{k+g}(h) &= \overline{u(h, k+g)} \\ &= \langle h, B(k+g) \rangle, \end{aligned}$$

luego por unicidad podemos concluir que

$$B(k+g) = B(k) + B(g).$$

Para demostrar la unicidad, sea $C : D_K(u) \rightarrow H$ tal que

$$u(h, k) = \langle h, Ck \rangle,$$

entonces para $k_0 \in D_K(u)$ tenemos que

$$\begin{aligned} u(h, k_0) &= \langle h, Bk_0 \rangle \\ &= \langle h, Ck_0 \rangle, \end{aligned}$$

para todo $h \in D_H(u)$, por lo que $Bk_0 = Ck_0$. □

Sean X y Y dos espacios de Hilbert. $X \times Y$ es un espacio vectorial con las operaciones definidas por

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1) \text{ y } \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Además $X \times Y$ es un espacio completo con respecto a la norma

$$\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Definición 2.12. Sean X y Y dos espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ una función. La gráfica de T , denotada por $\Gamma(T)$, esta definida por

$$\Gamma(T) = \{(x, y) \in X \times Y : y = Tx\}.$$

Teorema 2.13. (Teorema de la función abierta). Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado de un espacio de Hilbert a otro. Si M es un subconjunto abierto de X , entonces $T(M)$ es abierto en Y .

Demostración. La demostración de este hecho puede ser encontrada en la página 82 de [4]. \square

Teorema 2.14. (Teorema de la función inversa). Un operador acotado biyectivo de un espacio de Hilbert en otro tiene inversa continua.

Demostración. Se sigue del Teorema 2.13 y del hecho de que una función es continua si y solo si la imagen inversa de todo abierto es abierto. \square

Teorema 2.15. (Teorema de la gráfica cerrada). Sean X y Y espacios de Hilbert y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Entonces T es acotado si y solo si su gráfica es cerrada.

Demostración. Supongamos que $\Gamma(T)$ es cerrada. Dado que T es lineal, $\Gamma(T)$ es un subespacio del espacio completo $X \times Y$, luego al ser $\Gamma(T)$ cerrada, $\Gamma(T)$ es un espacio completo con respecto a la norma de $X \times Y$.

Consideremos los operadores acotados $\Pi_1 : \Gamma(T) \rightarrow H$ y $\Pi_2 : \Gamma(T) \rightarrow H$, definidos por

$$\Pi_1(x, Tx) = x, \quad \Pi_2(x, Tx) = Tx.$$

Dado que Π_1 es biyectivo y por el Teorema 2.14 Π_1^{-1} es continuo. Además $T = \Pi_2 \circ \Pi_1^{-1}$, por lo que T es continuo. Sea $\{(x_n, Tx_n)\} \in \Gamma(T)$ una sucesión convergente, supongamos que $(x_n, Tx_n) \rightarrow (x, y)$ de esta manera $x_n \rightarrow x$ y $Tx_n \rightarrow y$, luego por continuidad $Tx = y$, de esta manera $(x, y) \in \Gamma(T)$. \square

Corolario 2.16. (Teorema de Hellinger-Toeplitz). Sea H un espacio de Hilbert. $T : H \rightarrow H$ un operador lineal con $(Tx, y) = (x, Ty)$ para toda x, y en H , entonces T es acotado.

Demostración. Se demostrará que la gráfica de T es cerrada. Supongamos que $(x_n, Tx_n) \rightarrow (x, y)$, por lo que mostraremos que $(x, y) \in \Gamma(T)$, es decir, que $y = Tx$. Para todo $z \in H$ tenemos

$$\begin{aligned}\langle z, y \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle z, Tx_n \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Tz, x_n \rangle \\ &= \langle Tz, x \rangle \\ &= \langle z, Tx \rangle.\end{aligned}$$

Por lo que $Tx = y$. □

Definición 2.17. Si $T : D(T) \rightarrow H$ un operador lineal entonces

1. T es un operador definido positivo si $\langle T(x), x \rangle > 0$ para todo $x \in D(T)$ diferente de cero.
2. T es un operador no-negativo si $\langle T(x), x \rangle \geq 0$ para todo $x \in D(T)$.

Definición 2.18. Un operador T en un espacio de Hilbert H es llamado simétrico si y solo si

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle \text{ para todo } u, v \in D(T).$$

Lema 2.19. Sea H un espacio vectorial, $T : D(T) \rightarrow H$ un operador simétrico no negativo, entonces $\langle T(x), x \rangle = 0$ si y solo si $T(x) = 0$.

Demostración. Sean $x, y \in D(T)$, $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}\langle T(x + ty), x + ty \rangle &= \langle T(x), x \rangle + t\langle T(y), x \rangle + t\langle T(x), y \rangle + t^2\langle T(y), y \rangle \\ &= \langle T(x), x \rangle + 2t\operatorname{Re}\langle T(x), y \rangle + t^2\langle T(y), y \rangle \\ &= at + t^2b,\end{aligned}$$

donde $a = 2\operatorname{Re}\langle T(x), y \rangle$ y $b = \langle T(y), y \rangle$, luego al ser $q(t) = at + t^2b \geq 0$, en $t = 0$ se tiene un mínimo, por lo que $q'(0) = 0$, de aquí que $\operatorname{Re}\langle T(x), y \rangle = 0$ para todo $y \in D(T)$, por lo que $\langle T(x), T(x) \rangle = 0$. □

Definición 2.20. Sea T un operador lineal definido en un espacio de Hilbert H . Denotaremos por $D(T^*)$ al conjunto de elementos $u \in H$ tales que exista un $v \in H$ que cumpla con

$$\langle Th, u \rangle = \langle h, v \rangle \text{ para todo } h \in D(T).$$

Para cada $u \in D(T^*)$, definiremos $T^*u = v$. Diremos que T^* es el operador adjunto de T .

Definición 2.21. Se dice que T es auto-adjunto si y solo si T es simétrico y $D(T^*) = D(T)$.

Definición 2.22. Sea T un operador lineal acotado en H . Un número complejo λ pertenece al resolvente de T , $\rho(T)$, si $\lambda I - T$ es una biyección con inversa acotada. Si $\lambda \notin \rho(T)$, entonces diremos que λ esta en el espectro de T , $\sigma(T)$. Un vector $x \neq 0$ tal que $Tx = \lambda x$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ es un eigenvector de T y se dice que λ es el eigenvalor correspondiente a x .

Lema 2.23. Si $T : D(T) \rightarrow H$ es una transformación lineal simétrica y λ un eigenvalor, entonces λ es real.

Teorema 2.24. (Teorema espectral en forma multiplicativa). Sea H un espacio de Hilbert separable. Si T es un operador lineal acotado y auto-adjunto en H , entonces existen medidas $\{\mu_n\}_{n=1}^N$ ($N = 1, 2, \dots$ o ∞) en $\sigma(T)$ y un operador unitario

$$U : H \rightarrow \bigoplus_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}, \mu_n)$$

tal que

$$(UTU^{-1}\psi)_n(\lambda) = \lambda\psi_n(\lambda)$$

donde escribimos un elemento de $\psi \in \bigoplus_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}, \mu_n)$ como una N -ada $(\psi_1(\lambda), \dots, \psi_N(\lambda))$.

Demostración. Puede ser encontrada en la página 227 de [4]. □

Definición 2.25. (Forma cuadrática). Sea H un espacio de Hilbert. $Q(\cdot, \cdot)$ es una forma cuadrática simétrica no-negativa en H si

1. $Q : D(Q) \times D(Q) \rightarrow \mathbb{C}$, donde el dominio de Q , $D(Q)$, es un subespacio denso en H .
2. Q es una forma sesquilineal simétrica.
3. $Q(f, f) \geq 0$ para todo $f \in D(Q)$.

Definición 2.26. Sea Q una forma cuadrática en H y T un operador lineal en H . Si $Q(u, v) = \langle u, Tv \rangle$ para todo $u, v \in D(T)$ diremos que Q es la forma cuadrática asociada a T .

Definición 2.27. Sea $Q(\cdot, \cdot)$ una forma cuadrática no-negativa. Q es cerrada si $D(Q)$ es un espacio completo con respecto a la norma inducida por el producto

$$\langle f, g \rangle_* = Q(f, g) + \langle f, g \rangle.$$

Teorema 2.28. Si Q es una forma cuadrática simétrica, no-negativa y cerrada en H , entonces Q es la forma cuadrática de un único operador auto-adjunto.

Demostración. Denotaremos por H_* al espacio de Hilbert formado por $D(Q)$ con el producto $\langle h, g \rangle_* = Q(h, k) + \langle h, k \rangle$. Definamos a H_{-1} como el espacio de los funcionales lineales acotados en H_* .

Sea $j : H \rightarrow H_{-1}$ un operador lineal dado por, $j(h) = \langle h, \cdot \rangle$, para ver que está bien definido, consideremos $h \in H$; entonces luego $j(h)$ es acotado pues

$$|[j(h)](g)| = |\langle g, h \rangle| \leq \|g\| \|h\| \leq \|g\|_* \|h\|.$$

Sea $\hat{B} : H_* \rightarrow H_{-1}$ una transformación lineal dada por $\hat{B}(g) = \langle g, \cdot \rangle_*$. \hat{B} es inyectiva, además por el Lema de Riesz \hat{B} es suprayectiva y $\|\hat{B}(g)\| = \|g\|_*$. De aquí que \hat{B} sea un isomorfismo de H_* a H_{-1} .

Sea $D(B) = \{g \in H_* | \hat{B}(g) \in R(j)\}$. Definamos $B : H_* \rightarrow H$ con dominio $D(B)$ dado por $B = j^{-1}\hat{B}$.

Demostremos que el rango de j es denso en H_{-1} . Si no lo fuera existiría $\lambda \in H_{-1}^*$, $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda[j(\varphi)] = 0$ para todo $\varphi \in H$, luego por el Lema de Riesz existe un $\varphi_\lambda \neq 0$ en H_* tal que $0 = \lambda[j(g)] = [j(g)](\varphi_\lambda) = \langle g, \varphi_\lambda \rangle$ para $g \in H$, de aquí que $\varphi_\lambda = 0$ lo cual es una contradicción. Dado que \hat{B} es un isomorfismo y que $\hat{B}(D(B)) = R(j)$ entonces $D(B)$ es denso en H_* .

Dado que $D(B)$ es denso en $D(Q)$ con norma H_* , entonces $D(B)$ es denso en $D(Q)$ con respecto a la norma $\|\cdot\|$ pues $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_*$. Además como $D(Q)$ es denso en H entonces $D(B)$ es denso en H con respecto a la norma $\|\cdot\|$.

Si $\varphi \in D(B)$ entonces

$$\langle \cdot, B(\varphi) \rangle = j(B(\varphi)) = \hat{B}(\varphi) = Q(\cdot, \varphi) + \langle \cdot, \varphi \rangle.$$

De esta manera para $\varphi \in D(B)$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle \psi, B\varphi \rangle &= Q(\psi, \varphi) + \langle \psi, \varphi \rangle \\ &= \overline{Q(\varphi, \psi)} + \langle \varphi, \psi \rangle \\ &= \overline{\langle \varphi, B\psi \rangle} \\ &= \langle B\psi, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

De aquí que B es un operador simétrico con dominio denso. Consideremos el inverso de B , $B^{-1} = \hat{B}^{-1}j$, dado que B^{-1} es un operador simétrico de H en H entonces por el teorema de Hellinger-Teopltz B^{-1} es un operador lineal acotado auto-adjunto. Por el teorema espectral en forma de multiplicación 2.24 B es un operador auto-adjunto. Definamos $A : D(A) \rightarrow H$ por $A = B - I$, donde $D(A) = D(B)$. Entonces A es auto-adjunto y para $\varphi, \psi \in D(A)$, $\langle \psi, A\varphi \rangle = Q(\psi, \varphi)$. De aquí que Q es la forma cuadrática asociada a A .

□

Capítulo 3

Laplaciano en Gráficas

En este capítulo se introduce una noción de laplaciano discreto, definido para gráficas. Los resultados presentados en este capítulo serán la base para formar el laplaciano de un conjunto auto-similar K , ya que aproximaremos el laplaciano de un conjunto auto-similar por medio de este tipo de laplacianos, que estarán definidos sobre conjuntos finitos que se aproximan al conjunto auto-similar. Para lograr esto utilizaremos formas cuadráticas asociadas a laplacianos discretos y posteriormente crearemos una forma cuadrática simétrica no-negativa que estará definida sobre un subespacio de $L^2(K, \mu)$.

3.1

Laplaciano y Energía de una Gráfica

Sea $G(V, E)$ una gráfica. Denotemos a la colección de todas las funciones complejas definidas en los vértices de G por $\ell(V)$. Observemos que $\ell(V)$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} con las operaciones usuales. Además, del hecho de que V es un conjunto finito, $\ell(V)$ es un espacio de dimensión $|V|$, pues las funciones características χ_p , $p \in V$ forman una base de $\ell(V)$. Consideremos también un producto interno (\cdot, \cdot) en $\ell(V)$ dado por

$$(u, v) = \sum_{p \in V} u(p) \overline{v(p)}$$

para todo $u, v \in \ell(V)$.

Definición 3.1. (Laplaciano). Sea $G(V, E)$ una gráfica. El laplaciano de G es un operador lineal $H : \ell(V) \rightarrow \ell(V)$, definido como

$$[H(u)](x) = \sum_{y \sim x} (u(x) - u(y)). \quad (3.1)$$

Consideremos que los vértices de G están enumerados y sea (H_{pq}) la representación matricial de H con respecto a la base que forman las funciones características, entonces de la definición de H tenemos:

1. $H_{pq} = -1$ si y solo si $p \sim q$.
2. $H_{pq} = 0$ si $p \not\sim q$ y $p \neq q$.
3. $H_{pp} = - \sum_{q \in V, q \sim p} H_{pq}$.

Ejemplo 3.2. Sea Γ_0 la gráfica que aparece en la Figura 3.1. Entonces el laplaciano de Γ_0 es

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

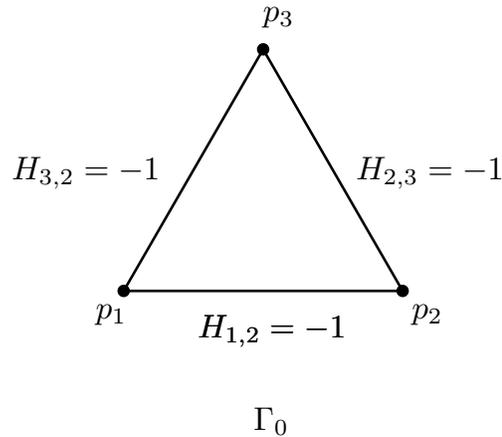


Figura 3.1: Representación gráfica de H .

Notemos que por su definición, H es un operador auto-adjunto y si $u \in \ell(V)$ es constante entonces $Hu = 0$. Además

$$\langle u, Hu \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\{p,q\} \in E} (u(p) - u(q))^2, \quad (3.2)$$

por lo que H es un operador no-negativo.

Definición 3.3. (Energía). Sea H el laplaciano de la gráfica $G(V, E)$ y $u \in \ell(V)$. Entonces la energía de G con respecto a u está definida por $\mathcal{E}_H(u, u) = \langle u, Hu \rangle$.

Lema 3.4. Si H es el laplaciano de la gráfica $G(V, E)$, entonces G es conexa si y solo si H es un operador simétrico que cumple

1. $Hu = 0$ si y solo si u es constante.
2. $H_{pq} = -1$ ó 0 si $p \neq q$.

Demostración. \Rightarrow) Solo falta demostrar que si $Hu = 0$ entonces u es constante. Para demostrar esto ocuparemos el Lema 2.19. Dado que $G(V, E)$ es conexa, para cualesquiera $p, q \in V$ existe un camino de p a q , $\{p = p_0, \dots, p_m = q\}$, luego por la ecuación (3.2) tenemos $(u(p_n) - u(p_{n+1}))^2 = 0$, $m > n \geq 0$, así que $u(p) = u(q)$, de esta manera podemos concluir que u es constante en $\ell(V)$.

\Leftarrow) Por definición, si H es el laplaciano de la gráfica $G(V, E)$, entonces $pq \in E$ si y solo si $H_{pq} = -1$. Sólo hce falta demostrar que G es conexa, para esto demostraremos que si el núcleo de H son las funciones constantes entonces G es conexa. Supongamos que G no es conexa, entonces existe $U \subseteq V$ tal que para todo $p \in U$ no exista ningún camino de p hacia algún elemento de $V \setminus U$, por lo que $H_{pq} = 0$ para todo $q \in V \setminus U$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que U representa los primeros vértices de G , de aquí que H puede ser visto como

$$H = \begin{pmatrix} T_U & 0 \\ 0 & X_{V \setminus U} \end{pmatrix},$$

donde T_U es una matriz cuadrada de dimensión $|U|$ y $X_{V \setminus U}$ es una matriz cuadrada de dimensión $|V \setminus U|$. Si $u \in \ell(V)$ es constante entonces $T_U(u|_U) = 0$ y $X_{V \setminus U}(u|_{V \setminus U}) = 0$, luego podemos elegir a u de tal manera que los primeros $|U|$ elementos sean uno y los restantes sean cero, de esta manera $Hu = 0$ lo cual es una contradicción. \square

Observemos que si H es el laplaciano de alguna gráfica conexa, entonces $\mathcal{E}_H(\cdot, \cdot)$ es una forma cuadrática simétrica no-negativa y además por los lemas 3.4 y 2.19 $\mathcal{E}_H(u, u) = 0$ si y solo si u es constante.

Sea H el laplaciano de alguna gráfica conexa $G(V, E)$ y $u \in \ell(U)$ donde $U \subseteq V$. Supongamos que queremos extender la función u a una función $\tilde{u} \in \ell(V)$ de tal manera que la energía $\mathcal{E}_H(\tilde{u}, \tilde{u})$ sea mínima, es decir que \tilde{u} cumpla

$$\mathcal{E}_H(\tilde{u}, \tilde{u}) \leq \mathcal{E}_H(u', u')$$

para todo $u' \in \ell(V)$, tal que $u'|_U = u$. Antes de demostrar la existencia y unicidad de dicha función probaremos el siguiente lema.

Lema 3.5. *Sea H el laplaciano de alguna gráfica conexa $G(V, E)$ y U un subconjunto propio de V . Si observamos a H de la siguiente manera*

$$H = \begin{pmatrix} T & J^t \\ J & X \end{pmatrix}.$$

donde $T : \ell(U) \rightarrow \ell(U)$, $J : \ell(U) \rightarrow \ell(V \setminus U)$ y $X : \ell(V \setminus U) \rightarrow \ell(V \setminus U)$, entonces X es un operador positivo. Además para todo $u \in \ell(V)$ tenemos

$$\mathcal{E}_H(u, u) = \mathcal{E}_X(u_1 + X^{-1}Ju_0, u_1 + X^{-1}Ju_0) + \mathcal{E}_{T-J^tX^{-1}J}(u_0, u_0), \quad (3.3)$$

donde $u_0 = u|_U$ y $u_1 = u|_{V \setminus U}$.

Demostración. Para ver que X es positivo sea $v \in \ell(V \setminus U)$ y definamos \tilde{v} por $\tilde{v}|_U = 0$ y $\tilde{v} = v|_{V \setminus U}$. Por lo que $\mathcal{E}_X(v, v) = \mathcal{E}_H(\tilde{v}, \tilde{v}) \geq 0$, entonces si $\mathcal{E}_X(v, v) = 0$ implica que \tilde{v} es constante, lo cual implica que $v = 0$. Para ver que la ecuación (3.3) es cierta, sea $u^t = \begin{pmatrix} u_0^t & u_1^t \end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_H(u, u) &= u^t H u \\ &= \begin{pmatrix} u_0^t & u_1^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & J^t \\ J & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_0^t & u_1^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Tu_0 + J^t u_1 \\ Ju_0 + Xu_1 \end{pmatrix} \\ &= u_0^t(Tu_0 + J^t u_1) + u_1^t(Ju_0 + Xu_1) \\ &= u_0^t Tu_0 + u_0^t J^t u_1 + u_1^t Ju_0 + u_1^t Xu_1. \end{aligned}$$

Por otro lado, del hecho de que X es simétrico e invertible y que T es simétrico tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_X(u_1 + X^{-1}Ju_0, u_1 + X^{-1}Ju_0) + \mathcal{E}_{T-J^tX^{-1}J}(u_0, u_0) &= \mathcal{E}_X(u_1, u_1) + \\ &+ \mathcal{E}_X(X^{-1}Ju_0, u_1) + \mathcal{E}_X(u_1, X^{-1}Ju_0) + \mathcal{E}_X(X^{-1}Ju_0, X^{-1}Ju_0) + \mathcal{E}_{T-J^tX^{-1}J}(u_0, u_0) = \\ &u_1^t Xu_1 + u_0^t J^t u_1 + u_1^t Ju_0 + u_0^t J^t X^{-1}Ju_0 + u_0^t Tu_0 - u_0^t J^t X^{-1}Ju_0. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.6. *Sea H el laplaciano de la gráfica conexa $G(E, V)$, U un subconjunto propio de V . Para $u \in \ell(U)$, definamos $h_u \in \ell(V)$ por $h_u|_U = u$, $h_u|_{V \setminus U} = -X^{-1}Ju$ y también definamos $P_{V,U}(H) = T - J^tX^{-1}J$, donde X, J y T están definidos como en el Lema 3.5, entonces h_u es la única función que satisface*

$$\mathcal{E}_{P_{V,U}(H)}(u, u) = \mathcal{E}_H(h_u, h_u) \leq \mathcal{E}_H(\tilde{u}, \tilde{u}),$$

para todo $\tilde{u} \in \ell(V)$ tal que $\tilde{u}|_U = u$.

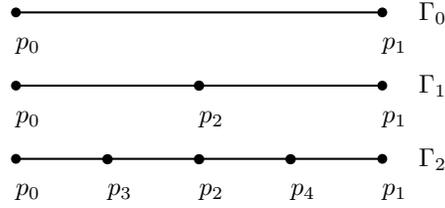


Figura 3.2: Aproximación gráfica del intervalo.

Demostración. La demostración se sigue de la ecuación (3.3) y del hecho de que X es positivo. \square

Definición 3.7. Sea H el laplaciano de la gráfica conexa $G(V, E)$. Si $U \subset V$ y $u \in \ell(U)$, entonces se diremos que $h_u \in \ell(V)$ es la extensión armónica de u en V si $h_u|_U = u$ y

$$\mathcal{E}(h_u, h_u) \leq \mathcal{E}(u', u')$$

para todo $u' \in \ell(V)$ tal que $u'|_U = u$.

Ejemplo 3.8. Sea $\Gamma_1(V_1, E_1)$ como en la Figura 3.2. Si H es el laplaciano de la gráfica $\Gamma_1(V_1, E_1)$, $V_0 = \{p_0, p_1\}$ y $u \in \ell(V_0)$ entonces

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

de aquí que

$$X = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}$$

luego

$$h_u(p_2) = \frac{1}{2}(u(p_0) + u(p_1)),$$

por lo que queda definida la extensión armónica de u en V_1 .

Ejemplo 3.9. Sea $\Gamma_1(V_1, E_1)$ como en la Figura 3.3, H el laplaciano de la gráfica $\Gamma_1(V_1, E_1)$, $\{p_1, p_2, p_3\} = V_0 \subseteq V_1$, $u \in \ell(V_0)$, entonces

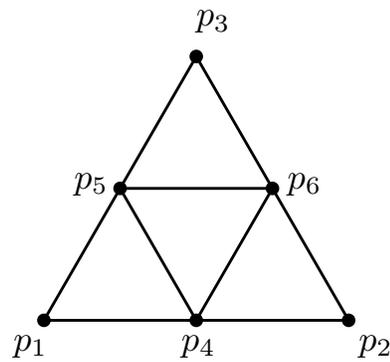
$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

de aquí que

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

de esta manera

$$h_u|_{V_1 \setminus V_0} = \begin{pmatrix} h_u(p_4) \\ h_u(p_5) \\ h_u(p_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}u(p_1) + \frac{2}{5}u(p_2) + \frac{1}{5}u(p_3) \\ \frac{1}{5}u(p_1) + \frac{3}{5}u(p_2) + \frac{3}{5}u(p_3) \\ \frac{3}{5}u(p_1) + \frac{1}{5}u(p_2) + \frac{3}{5}u(p_3) \end{pmatrix}.$$



Γ_1

Figura 3.3: Gráfica referente al Ejemplo 3.9

3.2

Energías Normalizadas

En esta sección presentaremos una relación que existe entre algunas gráficas, la cual sera la base para la construcción de la forma cuadratica en $L^2(K, \mu)$ que nos ayudara para definir el laplaciano.

Lema 3.10. Sean $G_0(U, E_0)$ y $G_1(V, E_1)$ dos gráficas conexas con $U \subseteq V$, H_0 y H_1 los laplacianos de G_0 y G_1 respectivamente. Sea $r > 0$, entonces

$$\mathcal{E}_{H_0}(u, u) = r^{-1}\mathcal{E}_{H_1}(h_u, h_u) \text{ para todo } u \in \ell(U)$$

si y solo si

$$P_{V,U}(H_1) = rH_0,$$

donde h_u es la extensión armónica de u en V_1 .

Demostración. \Rightarrow) Del Teorema 3.6 y del Lema 3.5 tenemos

$$\mathcal{E}_{H_1}(h_u, h_u) = \mathcal{E}_{P_{V,U}(H_1)}(u, u)$$

por lo que

$$\langle u, P_{V,U}(H_1)u \rangle = r\langle u, H_0u \rangle \text{ para toda } u \in \ell(V).$$

De aquí que $\langle u, P_{V,U}(H_1) - rH_0u \rangle = 0$, luego como $P_{V,U}(H_1) - rH_0$ es simétrico no-negativo se sigue que $P_{V,U}(H_1) - rH_0 = 0$.

\Leftarrow) Del Lema 3.5 tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{H_0}(u, u) &= r^{-1}\mathcal{E}_{P_{V,U}(H_1)}(u, u) \\ &= r^{-1}\mathcal{E}_{H_1}(h_u, h_u). \end{aligned}$$

□

Sea K un conjunto auto-similar con respecto a $\{f_i\}_{i=1}^N$, $\{\Gamma_m(V_m, E_m)\}_{m \geq 0}$ una sucesión de gráficas que aproximan a K . Consideremos las energías $\mathcal{E}_{H_0}(\cdot, \cdot)$ y $\mathcal{E}_{H_1}(\cdot, \cdot)$ de las gráficas $\Gamma_0(V_0, E_0)$ y $\Gamma_1(V_1, E_1)$ y observemos que dada la construcción de $\Gamma_1(V_1, E_1)$ tenemos que la energía de $\Gamma_1(V_1, E_1)$ puede ser escrita como

$$\mathcal{E}_{H_1}(u, u) = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_{H_0}(u \circ f_i, u \circ f_i)$$

y también

$$\mathcal{E}_{H_{m+1}}(u, u) = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_{H_m}(u \circ f_i, u \circ f_i) \quad (3.4)$$

Proposición 3.11. *Sea K un conjunto auto-similar con respecto a $\{f_i\}_{i=1, \dots, N}$ y $\{\Gamma_m(V_m, E_m)\}_{m \geq 0}$ una sucesión de gráficas conexas que aproximan a K . Si existe r tal que*

$$\mathcal{E}_{H_0}(u, u) = r^{-1} \mathcal{E}_{H_1}(\tilde{u}, \tilde{u}), \quad u \in \ell(V_0)$$

donde \tilde{u} es la extensión armónica de u en V_1 , entonces

$$\mathcal{E}_{H_m}(v, v) = r^{-1} \mathcal{E}_{H_{m+1}}(\tilde{v}, \tilde{v}), \quad v \in \ell(V_m),$$

donde \tilde{v} es la extensión armónica de v en V_{m+1} . El número r es conocido como el factor de normalización.

Demostración. Supongamos que se cumple

$$\mathcal{E}_{H_{m-1}}(u, u) = r^{-1} \mathcal{E}_{H_m}(\tilde{u}, \tilde{u}), \quad \text{para todo } u \in \ell(V_{m-1})$$

Sea $v \in \ell(V_m)$, entonces podemos considerar a $v \circ f_i$ como una función en $\ell(V_{m-1})$, si $h_i \in \ell(V_m)$ es la extensión armónica de $v \circ f_i$ entonces h_i puede ser escrita como $\tilde{v} \in \ell(V_{m+1})$ donde \tilde{v} es una extensión de v sobre $\ell(V_{m+1})$ tal que

$$\tilde{v}(f_i(p)) = h_i(p), \quad p \in V_m, \quad i = 1, \dots, N,$$

y de esta manera

$$\mathcal{E}_{H_{m-1}}(v \circ f_i, v \circ f_i) = r^{-1} \mathcal{E}_{H_m}(\tilde{v} \circ f_i, \tilde{v} \circ f_i).$$

Luego por (3.4) tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{H_m}(v, v) &= \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_{H_{m-1}}(v \circ f_i, v \circ f_i) \\ &= \sum_{i=1}^N r^{-1} \mathcal{E}_{H_m}(\tilde{v} \circ f_i, \tilde{v} \circ f_i) \\ &= r^{-1} \mathcal{E}_{H_{m+1}}(\tilde{v}, \tilde{v}). \end{aligned}$$

Además \tilde{v} es la extensión armónica de v en V_{m+1} , pues \tilde{v} minimiza $\mathcal{E}_m(\tilde{v} \circ f_i, \tilde{v} \circ f_i)$, así que podemos concluir que \tilde{v} minimiza $\mathcal{E}_{H_{m+1}}(\tilde{v}, \tilde{v})$. □

Ejemplo 3.12. Sea $K = [0, 1]$ y Γ_0 la gráfica completa de vértices $V_0 = \{p_0, p_1\}$. Consideremos $\{\Gamma_m(V_m, E_m)\}_{n \geq 0}$ como una sucesión de gráficas que aproximan a K (en la Figura 3.2 se muestran algunas gráficas). De esta manera si H_1 es el laplaciano de la gráfica Γ_1 entonces

$$P_{V_1, V_0}(H_1) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Luego si H_0 es el laplaciano de Γ_0 tenemos que $P_{V_1, V_0} = \frac{1}{2}H_0$, de aquí que si $n \geq 0$, entonces

$$\mathcal{E}_{H_m}(v, v) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \mathcal{E}_{H_{m+1}}(h_v, h_v) \text{ para toda } v \in \ell(V_m),$$

donde h_u es la extensión armónica de v en V_{m+1} .

Ejemplo 3.13. Sea K el triángulo de Sierpinski y Γ_0 la gráfica completa de vértices $V_0 = \{p_0, p_1, p_2\}$. Consideremos $\{\Gamma_m(V_m, E_m)\}_{n \geq 0}$ como una sucesión de gráficas que aproximan a K (en la Figura 3.4 se muestran algunas gráficas). De esta manera si H_1 es el laplaciano de la gráfica Γ_1 entonces

$$P_{V_1, V_0}(H_1) = \begin{pmatrix} 6/5 & -3/5 & -3/5 \\ -3/5 & 6/5 & -3/5 \\ -3/5 & -3/5 & 6/5 \end{pmatrix}.$$

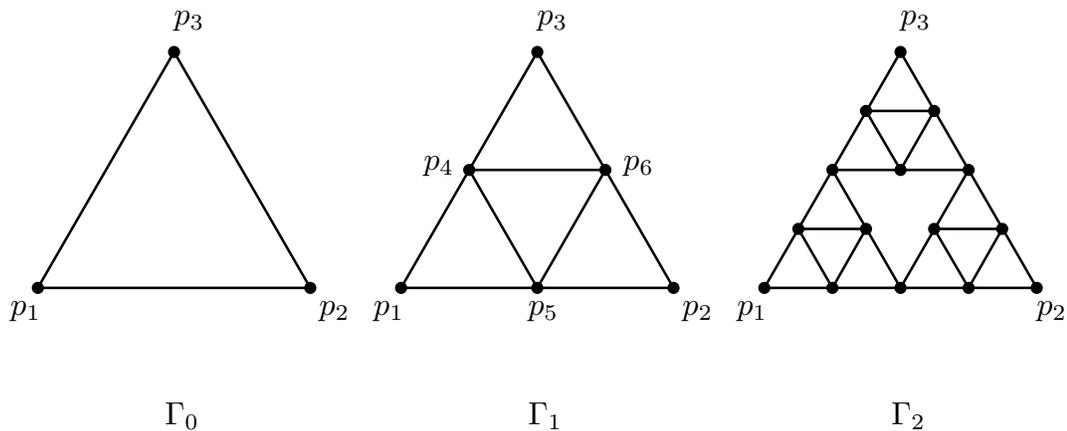


Figura 3.4: Aproximación gráfica del triángulo de Sierpinski.

Luego si H_0 es el laplaciano de Γ_0 tenemos que $P_{V_1, V_0} = \frac{3}{5}H_0$, de aquí que si $n \geq 0$, entonces

$$\mathcal{E}_{H_m}(v, v) = \left(\frac{3}{5}\right)^{-1} \mathcal{E}_{H_{m+1}}(h_v, h_v) \text{ para toda } v \in \ell(V_m),$$

donde h_v es la extensión armónica de v en V_{m+1} .

Los resultados presentados en este capítulo serán la base para continuar con la construcción del laplaciano en un conjunto auto-similar, en particular serán el comienzo para desarrollar la teoría del siguiente capítulo, donde asumiremos que el factor de normalización con respecto a una sucesión de gráficas que aproximen a K siempre puede ser encontrado.

Capítulo 4

El Laplaciano de un Conjunto Auto-Similar

En este capítulo definiremos el laplaciano sobre un conjunto auto-similar. La idea principal será definir una forma cuadrática simétrica no-negativa $\tilde{\mathcal{E}}_S(\cdot, \cdot)$ sobre cierto subconjunto de $L^2(K, \mu)$, donde el laplaciano será aquel operador auto-adjunto correspondiente a la forma cuadrática. Para lograr esto primero definiremos una forma cuadrática $\mathcal{E}_S(\cdot, \cdot)$ cuyo dominio será un subconjunto de las funciones definidas en V_* .

De ahora en adelante sólo consideraremos conjuntos auto-similares sobre los cuales podamos construir una sucesión de gráficas conexas $\{\Gamma_m(V_m, E_m)\}_{n \geq 0}$ que aproximan al mismo conjunto auto-similar, de manera tal que exista un $r > 0$ que cumpla con

$$\mathcal{E}_{H_m}(u, u) = r^{-1} \mathcal{E}_{H_{m+1}}(h_u, h_u) \text{ para todo } u \in \ell(V_m),$$

donde h_u es la extensión armónica de u en V_{m+1} . Por lo que a lo largo de este capítulo $\{\Gamma_m(V_m, E_m)\}_{n \geq 0}$ será una sucesión de gráficas conexas que aproximan a K , $S = \{H_m\}_{m \geq 0}$ es una sucesión donde H_m es el laplaciano de Γ_m y el número r es el factor de normalización. Además d es la métrica que se menciona en el capítulo 1, según la cual K es compacto.

Definición 4.1. Sea K un conjunto auto-similar. Definamos

$$\mathcal{F}(S) = \left\{ u : u \in \ell(V_*), \lim_{m \rightarrow \infty} r^{-m} \mathcal{E}_{H_m}(u|_{V_m}, u|_{V_m}) < \infty \right\},$$

$$\mathcal{E}_S(u, v) = \lim_{m \rightarrow \infty} r^{-m} \mathcal{E}_{H_m}(u|_{V_m}, v|_{V_m}),$$

para $u, v \in \mathcal{F}(S)$. Si $u \in \mathcal{F}(S)$ diremos que u es de energía finita.

Lema 4.2. Sea $u \in \ell(V_m)$, entonces existe una única función $h_u \in \mathcal{F}(S)$ que satisface $h_u|_{V_m} = u$ y además

$$r^{-m}\mathcal{E}_{H_m}(u, u) = \mathcal{E}_S(h_u, h_u) = \min\{\mathcal{E}_S(v, v) : v \in \mathcal{F}(S), v|_{V_m} = u\}. \quad (4.1)$$

Diremos que la función h_u es la extensión armónica de u en V_* .

Demostración. Para $n = m$ definamos $h_n = u$, y para $n > m$ definamos h_n como la extensión armónica de h_{n-1} en V_m . De esta manera podemos definir a h_u mediante $h_u|_{V_n} = h_n, n \geq m$. Por lo que

$$r^{-m}\mathcal{E}_{H_m}(u, u) = r^{-n}\mathcal{E}_{H_n}(h_u|_{V_n}, h_u|_{V_n}), \quad n \geq m.$$

Además $\{r^{-n}\mathcal{E}_{H_n}(v|_{V_n}, v|_{V_n})\}_{n \geq 0}$ es una sucesión no decreciente para toda $v \in \mathcal{F}(S)$, de aquí que

$$r^{-m}\mathcal{E}_{H_m}(u, u) = \min\{\mathcal{E}_S(v, v) : v \in \mathcal{F}(S), v|_{V_m} = u\}.$$

Si h es una función en $\mathcal{F}(S)$ que cumple con las hipótesis de éste lema, entonces

$$r^{-m}\mathcal{E}_{H_m}(u, u) = r^{-(m+1)}\mathcal{E}_{H_{m+1}}(h|_{V_{m+1}}, h|_{V_{m+1}})$$

de aquí que $h|_{V_{m+1}}$ es la extensión armónica de u en V_{m+1} , por lo que $h|_{V_{m+1}} = h_u|_{V_{m+1}}$, de esta manera

$$r^{-(m+1)}\mathcal{E}_{H_{m+1}}(h_u|_{V_{m+1}}, h_u|_{V_{m+1}}) = r^{-(m+2)}\mathcal{E}_{H_{m+2}}(h|_{V_{m+2}}, h|_{V_{m+2}}),$$

luego se sigue que $h|_{V_{m+2}}$ es la extensión armónica de $h_u|_{V_{m+1}}$ en V_{m+2} , por lo que $h|_{V_{m+2}} = h_u|_{V_{m+2}}$. De manera análoga tenemos $h_u|_{V_n} = h|_{V_n}, n \geq m$. \square

A continuación definiremos una métrica en V_* con la finalidad de poder extender cualquier función u de $\mathcal{F}(S)$ a una función $\tilde{u} \in C(K, d)$.

Definición 4.3. Para $p \neq q \in V_*$ definamos

$$R_S(p, q) = (\min\{\mathcal{E}_S(u, u) : u \in \mathcal{F}(S), u(p) = 1, u(q) = 0\})^{-1}. \quad (4.2)$$

Además, si $p = q$ definamos $R_S(p, q) = 0$.

Proposición 4.4. Para $p \neq q \in V_*$

$$R_S(p, q) = \max\left\{\frac{|u(p) - u(q)|^2}{\mathcal{E}_S(u, u)} : u \in \mathcal{F}(S), \mathcal{E}_S(u, u) \neq 0\right\}. \quad (4.3)$$

Demostración. Sea $u \in \mathcal{F}(S)$. Si $v = \alpha u + \beta$, $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ y β constante en $\ell(V_*)$ entonces

$$\frac{|u(p) - u(q)|^2}{\mathcal{E}_S(u, u)} = \frac{|v(p) - v(q)|^2}{\mathcal{E}_S(v, v)}.$$

Luego para cada $u \in \mathcal{F}(S)$, $u(p) \neq u(q)$ podemos elegir α y β de forma tal que $v(p) = 1$ y $v(q) = 0$, por lo que

$$\frac{|u(p) - u(q)|^2}{\mathcal{E}_S(u, u)} = \frac{1}{\mathcal{E}_S(v, v)},$$

de aquí que el lado derecho de (4.3) es igual a

$$\max \left\{ \frac{1}{\mathcal{E}_S(u, u)} : u \in \mathcal{F}(S), u(p) = 1, u(q) = 0 \right\}.$$

□

Proposición 4.5. Sea $R_S^{1/2}(p, q) = \sqrt{R_S(p, q)}$. Entonces $R_S^{1/2}(p, q)$ es una métrica en V_* .

Demostración. Observemos que de la ecuación (4.3) tenemos

$$R_S^{1/2}(p, q) = \max \left\{ \frac{|u(p) - u(q)|}{\sqrt{\mathcal{E}_S(u, u)}} : u \in \mathcal{F}(S), \mathcal{E}_S(u, u) \neq 0 \right\},$$

por lo que $R_S(p, q) = R_S(q, p)$, además para $p, q, r \in V_*$

$$\max_{u \in \mathcal{F}(S)} \left\{ \frac{|u(p) - u(r)|}{\sqrt{\mathcal{E}_S(u, u)}} + \frac{|u(r) - u(q)|}{\sqrt{\mathcal{E}_S(u, u)}} \right\} \geq \max_{u \in \mathcal{F}(S)} \left\{ \frac{|u(p) - u(q)|}{\sqrt{\mathcal{E}_S(u, u)}} \right\}$$

y

$$\begin{aligned} \max_{u \in \mathcal{F}(S)} \left\{ \frac{|u(p) - u(r)|}{\sqrt{\mathcal{E}_S(u, u)}} \right\} + \max_{u \in \mathcal{F}(S)} \left\{ \frac{|u(q) - u(r)|}{\sqrt{\mathcal{E}_S(u, u)}} \right\} &\geq \\ \max_{u \in \mathcal{F}(S)} \left\{ \frac{|u(p) - u(r)|}{\sqrt{\mathcal{E}_S(u, u)}} + \frac{|u(r) - u(q)|}{\sqrt{\mathcal{E}_S(u, u)}} \right\} & \end{aligned}$$

por lo que $R_S^{1/2}(\cdot, \cdot)$ cumple con la desigualdad del triángulo.

□

En el siguiente lema definiremos una métrica en K la cual es compatible con la topología generada por la métrica d . Primero notemos que V_* es denso en (K, d) , pues $V_n \subseteq \bar{V}_* \subseteq K$ y $V_n \rightarrow K$ con respecto a la métrica de Hausdorff.

Definición 4.6. Para $r < 1$ definamos

$$\tilde{R}_S^{1/2}(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_S^{1/2}(x_n, y_n),$$

donde $x_n \rightarrow x$ y $y_n \rightarrow y$ con respecto a la métrica d .

Lema 4.7. $\tilde{R}_S^{1/2}(\cdot, \cdot)$ es una métrica compatible con la topología generada por la métrica d .

Demostración. Se puede encontrar en la página 29 de [2]. □

Del lema anterior podemos concluir que una función $u \in \mathcal{F}(S)$ puede ser extendida a una función $\tilde{u} \in C(K, d)$, pues si $x_n \rightarrow x$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n)$ existe, ya que de la ecuación (4.3) tenemos

$$|u(x_n) - u(x_m)|^2 \leq R_S(x_n, x_m) \mathcal{E}_S(u, u),$$

además si $x_n \rightarrow x$ y $x'_n \rightarrow x$, entonces $u(x_n) - u(x'_n) \rightarrow 0$. Denotaremos por $\tilde{\mathcal{F}}(S)$ al conjunto de las funciones $u \in C(K, d)$ tales que $u|_{V_*} \in \mathcal{F}(S)$.

Lema 4.8. Sea $\mathcal{F}_p = \{u \in \mathcal{F}(S) : u(p) = 0\}$. Entonces $(\mathcal{F}(S)/\sim, \mathcal{E}_S)$ es isomorfo a $(\mathcal{F}_p, \mathcal{E}_S)$.

Demostración. Definamos una transformación lineal $T : \mathcal{F}(S)/\sim \rightarrow \mathcal{F}_p$ por

$$T([u]) = u - u(p).$$

Entonces T está bien definida, ya que si $v, u \in [u]$, entonces $u - v = u(p) - v(p)$. Por otro lado T es un isomorfismo entre $(\mathcal{F}(S)/\sim, \mathcal{E}_S)$ y $(\mathcal{F}_p, \mathcal{E}_S)$, ya que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_S(T(u), T(v)) &= \mathcal{E}_S(u - u(p), v - v(p)) \\ &= \mathcal{E}_S(u, v) + \mathcal{E}_S(u(p), v) + \mathcal{E}_S(u, v(p)) + \mathcal{E}_S(u(p), v(p)) \\ &= \mathcal{E}_S(u, v). \end{aligned} \tag{4.4}$$

□

Definamos $h(\ell(V_m))$ como la colección de funciones de la forma h_u , donde $u \in \ell(V_m)$ y h_u es la extensión armónica de u en V_* . De esta manera $h(\ell(V_m))$ es un espacio vectorial de dimensión finita, cuya base son las funciones de la forma h_{χ_q} , $q \in V_m$.

Teorema 4.9.

1. $\mathcal{E}_S(\cdot, \cdot)$ es una forma cuadrática simétrica no-negativa en $\mathcal{F}(S)$. Además, $\mathcal{E}_S(u, u) = 0$ si y solo si u es constante en V_* .
2. Definamos una relación de equivalencia \sim en $\mathcal{F}(S)$ por $u \sim v$ si y solo si $u - v$ es constante en V_* . Entonces $(\mathcal{F}(S)/\sim, \mathcal{E}_S)$ es un espacio de Hilbert.

Demostración. El enunciado 1 se cumple por la definición de $\mathcal{E}_S(\cdot, \cdot)$. Para probar 2, notemos que si $u \sim v$ entonces $\mathcal{E}_S(u - v, u + v) = 0$, de aquí que $\mathcal{E}_S(u, u) = \mathcal{E}_S(v, v)$, por lo que \mathcal{E}_S esta bien definida como una forma cuadrática simétrica positiva en $\mathcal{F}(S)/\sim$. Para probar que $(\mathcal{F}(S)/\sim, \mathcal{E}_S)$ es un espacio de Hilbert veremos que $(\mathcal{F}_p, \mathcal{E}_S)$ lo es.

Sea $\{v_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{F}_p, \mathcal{E}_S)$. Si $v_n^m = h_{(v_n|_{V_m})}$, entonces

$$\mathcal{E}_S(v_k^m - v_l^m, v_k^m - v_l^m) \leq \mathcal{E}_S(v_k - v_l, v_k - v_l).$$

Observemos que para m suficientemente grande tenemos que $v_k^m \in \mathcal{F}_p \cap h(\ell(V_m))$ y \mathcal{E}_S es un producto interno en $\mathcal{F}_p \cap h(\ell(V_m))$. Luego al ser $\mathcal{F}_p \cap h(\ell(V_m))$ un espacio de dimensión finita existe $v^m \in \mathcal{F}_p \cap (\ell(V_m))$ tal que $v_n^m \rightarrow v^m$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Notemos que si $v_n^m \rightarrow v^m$ cuando $n \rightarrow \infty$ con respecto al producto \mathcal{E}_S entonces $v_n^m |_{V_k} \rightarrow v^m |_{V_k}$ cuando $n \rightarrow \infty$ con respecto al producto \mathcal{E}_{H_k} , $k \geq 0$, de aquí que

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{H_m}(v^{m+1} |_{V_m} - v^m |_{V_m}, v^{m+1} |_{V_m} - v^m |_{V_m}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{H_m}(v_n^{m+1} |_{V_m} - v_n^m |_{V_m}, v_n^{m+1} |_{V_m} - v_n^m |_{V_m}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

de aquí que $v^{m+1} |_{V_m} - v^m |_{V_m}$ es constante en $\ell(V_m)$, como $p \in V_m$ y $v^{m+1}, v^m \in \mathcal{F}_p$ tenemos que $v^{m+1} |_{V_m} - v^m |_{V_m} = 0$, de aquí que podemos definir una función v en $\ell(V_*)$ dada por

$$v |_{V_m} = v^m |_{V_m}$$

Al ser $\{v_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de Cauchy existe $\sup_{n \geq 0} \mathcal{E}_S(v_n, v_n) = C$. Notemos que

$$\mathcal{E}_S(v_n^m, v_n^m) \leq \mathcal{E}_S(v_n, v_n) \leq C$$

de aquí que

$$\mathcal{E}_S(v^m, v^m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_S(v_n^m, v_n^m) \leq C.$$

Por lo que

$$r^{-m} \mathcal{E}_{H_m}(v^m |_{V_m}, v^m |_{V_m}) \leq \mathcal{E}_S(v^m, v^m) \leq C,$$

luego podemos concluir que $v \in \mathcal{F}_p$.

Para $\epsilon > 0$, podemos elegir n tal que $\mathcal{E}_S(v_n - v_k, v_n - v_k) < \epsilon$ para $k > n$. También podemos elegir m tal que

$$|\mathcal{E}_S(v_n - v, v_n - v) - \mathcal{E}_S(v_n^m - v_k^m, v_n^m - v_k^m)| < \epsilon.$$

Además podemos elegir $k > n$ tal que

$$|\mathcal{E}_S(v_n^m - v^m, v_n^m - v^m) - \mathcal{E}_S(v_n^m - v_k^m, v_n^m - v_k^m)| < \epsilon.$$

Como $\mathcal{E}_S(v_n^m - v_k^m, v_n^m - v_k^m) \leq \mathcal{E}_S(v_n - v_k, v_n - v_k) < \epsilon$. De aquí que

$$\mathcal{E}_S(v_n - v, v_n - v) < 3\epsilon.$$

□

Lema 4.10. Para $u, v \in \tilde{\mathcal{F}}(S)$, definamos $\tilde{\mathcal{E}}_S : \tilde{\mathcal{F}}(S) \times \tilde{\mathcal{F}}(S) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\tilde{\mathcal{E}}_S(u, v) = \mathcal{E}_S(u|_{V_*}, v|_{V_*}).$$

Entonces

1. $\tilde{\mathcal{E}}_S(\cdot, \cdot)$ es una forma cuadrática simétrica no-negativa en $\tilde{\mathcal{F}}(S)$. Además, $\tilde{\mathcal{E}}_S(u, u) = 0$ si y solo si u es constante en V_* .
2. Si definimos una relación de equivalencia \sim en $\tilde{\mathcal{F}}(S)$ por: $u \sim v$ si y solo si $u - v$ es constante en V_* , entonces $(\tilde{\mathcal{F}}(S)/\sim, \tilde{\mathcal{E}}_S)$ es un espacio de Hilbert.

Demostración. La demostración se sigue del Teorema 4.9 y observar que $(\tilde{\mathcal{F}}(S)/\sim, \tilde{\mathcal{E}}_S)$ es isomorfo a $(\tilde{\mathcal{F}}_p, \tilde{\mathcal{E}}_S)$ para cualquier $p \in K$. □

A continuación presentaremos dos resultados que nos serán de gran ayuda para la definición del laplaciano.

Lema 4.11. Si $p, q \in K$, entonces

$$\tilde{R}_S(p, q) = \sup \left\{ \frac{|u(p) - u(q)|^2}{\tilde{\mathcal{E}}_S(u, u)} : u \in \tilde{\mathcal{F}}(S), \tilde{\mathcal{E}}_S(u, u) > 0 \right\}.$$

Demostración. Como V_* es denso en K con respecto a la métrica $\tilde{R}_S^{1/2}$ existen $\{p_n\}, \{q_n\} \in V_*$ tales que $p_n \rightarrow p$ y $q_n \rightarrow q$. Además por (4.3),

$$|u(p_n) - u(q_n)|^2 \leq \tilde{R}_S(p_n, q_n) \tilde{\mathcal{E}}_S(u, u), \text{ para toda } u \in \tilde{\mathcal{F}}(S),$$

de aquí que

$$|u(p) - u(q)|^2 \leq \tilde{R}_S(p, q) \tilde{\mathcal{E}}_S(u, u),$$

para toda $u \in \tilde{\mathcal{F}}(S)$. De esta manera existe

$$M(p, q) = \sup \left\{ \frac{|u(p) - u(q)|^2}{\tilde{\mathcal{E}}_S(u, u)}, u \in \tilde{\mathcal{F}}(S) \right\}$$

por lo que $M(p, q) \leq \tilde{R}_S(p, q)$. Supongamos que $M(p, q) < \tilde{R}_S(p, q)$. Entonces podemos elegir $\epsilon > 0$ tal que para toda $u \in \tilde{\mathcal{F}}(S)$,

$$|u(p) - u(q)| < \left(\sqrt{\tilde{R}_S(p, q)} - 5\epsilon \right) \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_S(u, u)}. \quad (4.5)$$

Sea $R_S(p_n, q_n) = \frac{|u_n(p_n) - u_n(q_n)|^2}{\tilde{\mathcal{E}}_S(u_n, u_n)}$, para alguna función $u_n \in \tilde{\mathcal{F}}(S)$, entonces si

$$v_n = u_n \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}_S(u_n, u_n)},$$

tenemos,

$$R_S(p_n, q_n) = |v_n(p_n) - v_n(q_n)|^2.$$

Como $R_S(p_n, q_n) \rightarrow \tilde{R}_S(p, q)$, cuando $n \rightarrow \infty$, tenemos,

$$|v_n(p_n) - v_n(q_n)|^2 \rightarrow \tilde{R}_S(p, q).$$

De aquí que exista N_1 tal que

$$-\epsilon < |v_n(p_n) - v_n(q_n)| - \sqrt{\tilde{R}_S(p, q)} < \epsilon, \text{ para } n \geq N_1,$$

por lo que

$$|v_n(p_n) - v_n(q_n)| > \sqrt{\tilde{R}_S(p, q)} - \epsilon. \quad (4.6)$$

Además como $\{p_n\}, \{q_n\}$ son sucesiones de Cauchy con respecto a $\tilde{R}_S^{1/2}$ y $\tilde{R}_S(p_n, q_n) = R_S(p_n, q_n)$, tenemos que para ϵ^2 existe un N_2 tal que, $R_S(p_n, p_m), R_S(q_n, q_m) < \epsilon^2$, para $n, m \geq N_2$, denotemos $N = \max\{N_1, N_2\}$. Al ser v_n continua podemos elegir $m_0 > N$ tal que,

$$|v_N(p_{m_0}) - v_N(p)| < \epsilon \quad \text{y} \quad |v_N(q_{m_0}) - v_N(q)| < \epsilon.$$

Además

$$\begin{aligned} |v_N(p_N) - v_N(q_N)| &\leq |v_N(p_N) - v_N(p_{m_0})| + |v_N(p_{m_0}) - v_N(p)| + |v_N(p) - v_N(q)| \\ &\quad + |v_N(p) - v_N(q)| + |v_N(q) - v_N(q_{m_0})| + |v_N(q_{m_0}) - v_N(q_N)| \\ &\leq |v_N(p_N) - v_N(p_{m_0})| + |v_N(q_N) - v_N(q_{m_0})| + \\ &\quad + \left(\sqrt{\tilde{R}_S(p, q)} - 5\epsilon \right) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Luego por (4.6),

$$2\epsilon < |v_N(p_N) - v_N(p_{m_0})| + |v_N(q_N) - v_N(q_{m_0})|,$$

de aquí que, $\epsilon \leq |v_N(p_N) - v_N(p_{m_0})|$ o $\epsilon \leq |v_N(q_N) - v_N(q_{m_0})|$, por lo que

$$\epsilon \leq |v_N(p_N) - v_N(p_{m_0})| \leq R_S^{1/2}(p_N, p_{m_0}) < \epsilon$$

o

$$\epsilon \leq |v_N(q_N) - v_N(q_{m_0})| \leq R_S^{1/2}(q_N, q_{m_0}) < \epsilon,$$

lo cual es una contradicción. □

Teorema 4.12. *Definamos*

$$\mathcal{E}_*(u, v) = \tilde{\mathcal{E}}_S(u, v) + \int_K u(x)v(x) d\mu(x) \quad (4.7)$$

para todo $u, v \in L^2(K, \mu) \cap \tilde{\mathcal{F}}(S)$. Entonces $(\tilde{\mathcal{F}}(S) \cap L^2(K, \mu), \mathcal{E}_*(u, v))$ es un espacio de Hilbert.

Demostración. Sea $\{u_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de Cauchy en $(\tilde{\mathcal{F}}(S) \cap L^2(K, \mu), \mathcal{E}_*(u, v))$ y definamos $v_n = u_n - u_n(p)$ para $p \in K$. Notemos que $\{u_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de Cauchy en $(\tilde{\mathcal{F}}(S), \mathcal{E}_S(u, v))$ ya que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_S(v_n - v_m, v_n - v_m) &= \tilde{\mathcal{E}}_S(u_n - u_m + u_m(p) - u_n(p), u_n - u_m + u_m(p) - u_n(p)) \\ &= \tilde{\mathcal{E}}_S(u_n - u_m, u_n - u_m) + 2\tilde{\mathcal{E}}_S(u_n - u_m, u_m(p) - u_n(p)) \\ &\quad + \tilde{\mathcal{E}}_S(u_m(p) - u_n(p), u_m(p) - u_n(p)) \\ &= \tilde{\mathcal{E}}_S(u_n - u_m, u_n - u_m). \end{aligned}$$

De esta manera existe $v \in \tilde{\mathcal{F}}_p$ tal que

$$\tilde{\mathcal{E}}_S(v_n - v, v_n - v) \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Además por el Lema 4.11 tenemos

$$|v_n(q) - v(q)|^2 \leq \tilde{R}_S(p, q) \tilde{\mathcal{E}}_S(v_n - v, v_n - v). \quad (4.8)$$

Luego por (4.8) podemos concluir que $v_n \rightarrow v$ en norma $L^2(K, \mu)$. Además como $\{u_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de Cauchy, podemos concluir que $\{u_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(K, \mu)$ y en $(\tilde{\mathcal{F}}_S, \tilde{\mathcal{E}}_S)$.

Dado que $\{v_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(K, \mu)$, pues $\{v_n\}_{n \geq 0}$ converge en norma L^2 , se sigue que $\{u_n - v_n\}_{n \geq 0}$ en $L^2(K, \mu)$. Observemos que $\{u_n(p)\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{R} ya que,

$$|u_n(p) - u_m(p)|^2 = \int_K |u_n(x) - v_n(x) - u_m(x) + v_m(x)|^2 d\mu(x) < \epsilon$$

para m, n adecuados, de aquí que exista un $c \in \mathbb{R}$ tal que $u_n(p) \rightarrow c$ cuando $n \rightarrow \infty$. Si $u = v + c$, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_S(u - u_n, u - u_n) &= \tilde{\mathcal{E}}_S(v + c - u_n, v + c - u_n) \\ &= \tilde{\mathcal{E}}_S(v - u_n, v - u_n) + 2\tilde{\mathcal{E}}_S(v - u_n, c) + \tilde{\mathcal{E}}_S(c, c) \\ &= \tilde{\mathcal{E}}_S(v - v_n - u_m(p), v - v_n - u_m(p)) \\ &= \tilde{\mathcal{E}}_S(v - v_n, v - v_n). \end{aligned}$$

Esto implica que $\tilde{\mathcal{E}}_S(u - u_n, u - u_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Luego como $\{u_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de Cauchy en $(\tilde{\mathcal{F}}(S), \tilde{\mathcal{E}}_S)$ que es un espacio completo, entonces $u \in \tilde{\mathcal{F}}(S)$.

Por otra parte, $u_n \rightarrow u$ cuando $n \rightarrow \infty$ en $L^2(K, \mu)$, pues sabemos que $v_n \rightarrow v$ en $L^2(K, \mu)$ y que $u_n(p) \rightarrow c$ en \mathbb{R} , además

$$\begin{aligned} \left(\int_K |u_n(x) - u(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2} &= \left(\int_K |u_n(x) - v(x) - c|^2 d\mu(x) \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_K |v_n(x) + u_n(p) - v(x) - c|^2 d\mu(x) \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_K |v_n(x) - v(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2} + \\ &\quad + \left(\int_K |u_n(p) - c|^2 d\mu(x) \right)^{1/2} \\ &= \|v_n(x) - v(x)\|_{L^2} + |u_n(p) - c|. \end{aligned}$$

Como $\{u_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(K, \mu)$ y $u_n \rightarrow u$, entonces $u \in L^2(K, \mu)$. Luego podemos concluir que $u \in \tilde{\mathcal{F}}(S) \cap L^2(K, \mu)$, además $u_n \rightarrow u$ con respecto a la métrica inducida por $\mathcal{E}_*(\cdot, \cdot)$. □

A continuación mostraremos el resultado más importante del capítulo, ya que en el siguiente teorema definiremos el laplaciano sobre un conjunto auto-similar.

Teorema 4.13. *Supongamos que $\tilde{\mathcal{F}}_S \cap L^2(K, \mu)$ es denso en $L^2(K, \mu)$ con respecto a la norma de L^2 . Si consideramos a $\tilde{\mathcal{F}}_S \cap L^2(K, \mu)$ como el dominio de $\tilde{\mathcal{E}}_S(\cdot, \cdot)$, entonces existe un único operador auto-adjunto no-negativo H que representa a $\tilde{\mathcal{E}}_S(\cdot, \cdot)$. El operador H sera el laplaciano definido en K .*

Demostración. Se sigue de los teoremas 2.28 y 4.12. □

Con el resultado anterior hemos definido el laplaciano de un conjunto auto-similar, sin embargo esta definición no nos es muy útil para el estudio detallado del laplaciano, por lo que en el siguiente capítulo mostraremos una forma de representarlo con la cual podremos calcular el valor del laplaciano en un punto específico, y así poder abordar el problema de encontrar los eigenvalores y eigenfunciones.

Capítulo 5

Diseminación Espectral

En este capítulo abordaremos el problema de encontrar los eigenvalores y las eigenfunciones del laplaciano H definido en un conjunto auto-similar con condiciones de Dirichlet. Para esto utilizaremos un método conocido como diseminación espectral desarrollado en [2], el cual está basado en obtener los eigenvalores y las eigenfunciones mediante los eigenvalores y las eigenfunciones de los laplacianos en gráficas H_m . Para comenzar mostraremos una manera de aproximar los valores de H por medio de los valores los laplacianos en gráficas.

De acuerdo al capítulo 4 sabemos que cualquier función de energía finita puede ser extendida a una función de $C(K, d)$, por lo que de ahora en adelante consideraremos a una función de energía finita como una función en $C(K, d)$. Además denotemos $\psi_p^m = h_{\chi_p}$, donde h_{χ_p} es la extensión armónica de $\chi_p \in \ell(V_m)$ en V_* .

Teorema 5.1. *Sea K un conjunto auto-similar y H el laplaciano definido en K . Si $u \in D(H)$ definamos f_n por*

$$f_n(p) = \begin{cases} r^{-n} \left(\int_K \psi_p^n d\mu \right)^{-1} [H_n(u|_{V_n})](p) & \text{si } p \in V_n, \\ 0 & \text{si } p \notin V_n, \end{cases}$$

entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en $V_* \setminus V_0$ a $f = Hu$. Inversamente, si suponemos que u es una función continua en K y $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función continua f en $V_* \setminus V_0$, entonces $u \in D(H)$.

Demostración. Supongamos que $u \in D(H)$ y $Hu = f$. Si $x \notin V_0$ entonces

$$\mathcal{E}_S(u, \psi_x^m) = r^{-m} \mathcal{E}_{H_m}(u|_{V_m}, \psi_x^m|_{V_m})$$

por otro lado tenemos

$$\mathcal{E}_{H_m}(u|_{V_m}, \psi_x^m|_{V_m}) = H_m(u|_{V_m})(x)$$

luego de lo anterior tenemos

$$r^{-m}H_m(u|_{V_m})(x) = \int_K f(y)\psi_x(y) d\mu(y),$$

de donde

$$r^{-m} \left(\int_K \psi_x(y) d\mu(y) \right)^{-1} H_m(u|_{V_m})(x) = \frac{\int_K f(y)\psi_x(y) d\mu(y)}{\int_K \psi_x(y) d\mu(y)}$$

Por lo tanto, el lado derecho de la ecuación anterior converge uniformemente a f .

Supongamos que $\{f_m\}_{m \geq 0}$ converge uniformemente a una función continua f , entonces para $v \in \mathcal{F}(S)$ tal que $v = 0$ en V_0 tenemos

$$\mathcal{E}_{H_m}(v, u) = \langle v, H_m u \rangle = \sum_{y \in V_m \setminus V_0} v(y) H_m u(y).$$

De esta manera podemos calcular

$$\begin{aligned} r^{-m} \mathcal{E}_{H_m}(u, v) &= \sum_{y \in V_m \setminus V_0} v(y) \left(\int_K \psi_y^m(x) d\mu(x) \right) r^{-m} \left(\int_K \psi_y^m(x) d\mu(x) \right)^{-1} H_m u(y) \\ &= \sum_{y \in V_m \setminus V_0} v(y) \left(\int_K \psi_y^m(x) d\mu(x) \right) f_m(y) \\ &= \int_K \sum_{y \in V_m \setminus V_0} v(y) \psi_y^m(x) f_m(y) d\mu(x), \end{aligned}$$

y como además

$$\sum_{y \in V_m \setminus V_0} v(y) \psi_y^m(x) f_m(y)$$

converge uniformemente a $v(x)f(x)$, entonces concluimos que

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} r^{-m} \mathcal{E}_{H_m}(u, v) &= - \int_K \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{V_m \setminus V_0} u(y) f_m(y) \psi_x^m(y) d\mu(x) \\ &= - \int_K v(x) f(x) d\mu(x), \end{aligned}$$

de lo cual vemos finalmente que $u \in D(H)$ y $Hu = f$. \square

En los siguientes ejemplos mostraremos dos casos en los cuales no es difícil calcular $\int_K \psi_x^m d\mu$.

Ejemplo 5.2. Sea K el triángulo de Sierpinski y $\{f_1, f_2, f_3\}$ las contracciones que forman a K . Supongamos que x, y y z son los vértices de la celda de nivel m $f_w(K)$, $|w| = m$, (ver Figura 5.1), entonces $\psi_x^m + \psi_y^m + \psi_z^m$ restringida a $f_w(K)$ es igual a 1, de aquí que

$$\int_{f_w(K)} (\psi_x^m + \psi_y^m + \psi_z^m) d\mu = \mu(f_w(K)) = \frac{1}{3^m}.$$

Además, observemos que ψ_x^m, ψ_y^m y ψ_z^m tienen la misma integral sobre $f_w(K)$, por lo que $\int_{f_w(K)} \psi_x^m d\mu = \frac{1}{3^{m+1}}$.

Por otra parte tenemos que ψ_x^m es idénticamente cero en las celdas de nivel m que no contienen a x , y como x está en exactamente dos celdas tenemos que

$$\int_K \psi_x^m d\mu = 2 \frac{1}{3^{m+1}}.$$

De esta manera como $r^{-m} = (\frac{5}{3})^m$ tenemos que si $x \in V_* \setminus V_0$, entonces

$$Hu(x) = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} 5^n H_n u(x).$$

Ejemplo 5.3. De manera análoga al caso del triángulo de Sierpinski tenemos que si $K = I$, entonces $\int_K \psi_x^m d\mu = \frac{1}{2^m}$, dado que $r^{-m} = 2^m$ tenemos

$$Hu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n H_n u(x).$$

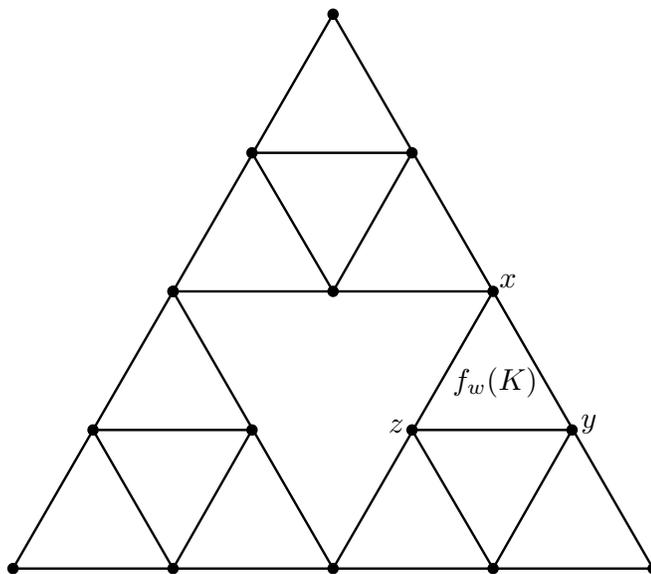


Figura 5.1: Imagen referente al Ejemplo 5.2.

5.1

Diseminación Espectral

En algunos conjuntos auto-similares como el intervalo y el triángulo de Sierpinski resulta ser que las eigenfunciones del laplaciano H restringidas a V_m son eigenfunciones de H_m , pero con diferentes eigenvalores. Esto permite recuperar las eigenfunciones del laplaciano H mediante un método llamado diseminación espectral, que consiste en extender una eigenfunción de H_m ya conocida a una eigenfunción de H_{m+1} . De esta manera podemos conocer cualquier valor de la eigenfunción en V_* y por lo tanto cualquier valor de la función en K .

Para presentar el método de diseminación espectral con más detalle, analizaremos el caso del laplaciano en intervalo $I = [0, 1]$ con condiciones de Dirichlet. La idea principal para obtener las eigenfunciones y eigenvalores de H será extender alguna función $u_m \in \ell(V_m)$ que cumpla con $u_m(p) = 0$ si $p \in V_0$ y

$$H_m u_m(p) = \lambda_m u_m(p) \quad \text{si } p \in V_m \setminus V_0 \quad (5.1)$$

para algún λ_m a una eigenfunción u de H tal que $u|_{V_m} = u_m$. Para hacer esto procedamos como sigue: primero extendamos u_m a una función $u_{m+1} \in \ell(V_{m+1})$ tal que

$$H_{m+1} u_{m+1}(p) = \lambda_{m+1} u_{m+1}(p) \quad \text{si } p \in V_{m+1} \setminus V_0. \quad (5.2)$$

Procedamos con la construcción de u_{m+1} . Si $x, y, z \in V_m$ son como en la gráfica Γ_m (ver Figura 5.2). Entonces de la ecuación 5.1 tenemos que

$$\begin{aligned} H_m u_m(z) &= (u_m(z) - u_m(x)) + (u_m(z) - u_m(y)) \\ &= \lambda_m u_m(z), \end{aligned}$$

por lo que

$$(2 - \lambda_m) u_m(z) = u_m(y) + u_m(x). \quad (5.3)$$

Sean $x_0, y_0 \in V_{m+1} \setminus V_m$ como en la gráfica Γ_{m+1} (ver Figura 5.2), entonces de la ecuación (5.2) tenemos

$$\begin{aligned} H_{m+1} u_{m+1}(z) &= (u_m(z) - u_{m+1}(x_0)) + (u_m(z) - u_{m+1}(y_0)) \\ &= \lambda_{m+1} u_m(z), \end{aligned}$$

de aquí que

$$(2 - \lambda_{m+1}) u_m(z) = u_{m+1}(x_0) + u_{m+1}(y_0),$$

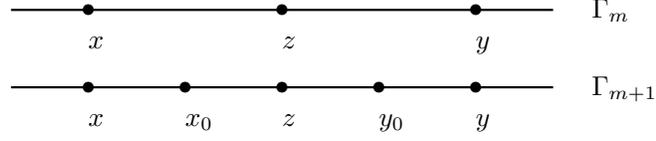


Figura 5.2: Diseminación espectral en el intervalo.

de manera análoga

$$\begin{aligned} (2 - \lambda_{m+1})u_{m+1}(x_0) &= u_m(x) + u_m(z), \\ (2 - \lambda_{m+1})u_{m+1}(y_0) &= u_m(z) + u_m(y). \end{aligned}$$

De las tres ecuaciones anteriores y de la ecuación (5.3) podemos concluir que

$$\begin{aligned} (2 - \lambda_{m+1})^2 u_m(z) &= (2 - \lambda_{m+1})(u_{m+1}(x_0) + u_{m+1}(y_0)) \\ &= 2u_m(z) + u_m(x) + u_m(y) \\ &= 2u_m(z) + (2 - \lambda_m)u_m(z). \end{aligned}$$

De esta manera tenemos que

$$(2 - \lambda_{m+1})^2 = (4 - \lambda_m), \quad (5.4)$$

de aquí que

$$\lambda_{m+1} = 2 + \varepsilon_{m+1} \sqrt{4 - \lambda_m}, \quad \varepsilon_{m+1} = \pm 1. \quad (5.5)$$

De lo anterior podemos conocer el valor de λ_{m+1} mediante λ_m y además si $\lambda_{m+1} \neq 2$ tenemos que

$$u_{m+1}(x_0) = \frac{u_m(x) + u_m(z)}{(2 - \lambda_{m+1})},$$

de esta manera si $\lambda_n \neq 2$, $n > m$, entonces podemos construir una función u en $\ell(V_*)$ tal que $u|_{V_n} = u_n$, $n \geq m$.

Con la finalidad de poder extender u a una función en $D(H)$ imponemos algunas condiciones sobre ε_m . Observemos que si ε_n , $n \geq m$ es igual a 1 solo para una cantidad finita de términos, entonces $\lambda_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Para ver esto solo notemos que $\lambda_n \geq 0$, pues λ_n es un eigenvalor de un operador positivo, luego por la ecuación (5.4) tenemos que $\lambda_n \in [0, 4]$, y además $2 - \sqrt{4 - x}$ es una contracción en $[0, 4]$ con punto fijo $x = 0$. Luego si $\lambda_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces u es una función uniformemente

continua, por lo que u puede ser extendida por continuidad a una función en I tal que es eigenfunción de H . Luego por el Teorema 5.1 tenemos que

$$\begin{aligned}Hu(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n H_n u(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \lambda_n u(x).\end{aligned}$$

Por lo que $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \lambda_n$ es un eigenvalor correspondiente a la función u .

Ejemplo 5.4. Sea $\{\Gamma_n(V_n, E_n)\}_{n \geq 0}$ una sucesión de gráficas que aproximan a I como las que aparecen en la Figura 5.3. Si $m = 1$, entonces

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

es el Laplaciano de la gráfica Γ_1 . Además tenemos que $u_1 = (0, 0, 1)$ y $\lambda_1 = 2$ cumplen con la ecuación (5.1). Supongamos que $\varepsilon_n = -1$ para todo $n > 1$, de esta manera si $\lambda_1 = 2$, entonces $\lambda_n < 2$ ya que $2 - \sqrt{4 - x} < x$, por lo que

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \lambda_n \\ &\approx 9.869 \\ &\approx \pi^2\end{aligned}$$

es un eigenvalor del laplaciano sujeto a condiciones de Dirichlet, además notemos que este es el primer eigenvalor del laplaciano definido en el intervalo.

De manera similar podemos concluir que si $\varepsilon_2 = 1$ y $\varepsilon_n = -1$ para $n > 2$, entonces

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \lambda_n \\ &\approx 88.82 \\ &\approx 3^2 \pi^2,\end{aligned}$$

donde $3^2 \pi^2$ es el tercer eigenvalor del laplaciano.

5.2

Espectro del Laplaciano en el Triángulo de Sierpinski

En esta sección aplicaremos el método de diseminación espectral para el triángulo de Sierpinski. La meta será encontrar ecuaciones parecidas a (5.4) y (5.5), las cuales

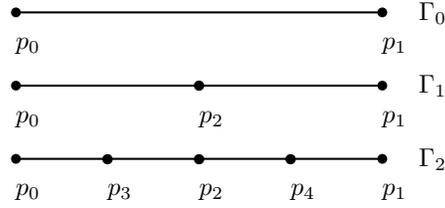


Figura 5.3: Aproximación gráfica del intervalo.

proporcionan una relación entre los eigenvalores de los laplacianos discretos en el caso del intervalo. Para comenzar supongamos que para alguna m existen λ_m y una función $u_m \in \ell(V_m)$ tal que $u_m(p) = 0$ si $x \in V_0$ y que

$$H_m u_m(p) = \lambda_m u_m(p) \quad \text{si } p \in V_m \setminus V_0. \quad (5.6)$$

Para extender u_m a $u_{m+1} \in \ell(V_{m+1})$ tal que

$$H_{m+1} u_{m+1}(p) = \lambda_{m+1} u_{m+1}(p) \quad \text{si } p \in V_{m+1} \setminus V_0, \quad (5.7)$$

procedamos como sigue: si $x_0, x_1, x_2 \in V_m$ y $y_0, y_1, y_2 \in V_{m+1} \setminus V_m$ (ver Figura 5.4), entonces de la ecuación (5.7) tenemos

$$\begin{aligned} H_{m+1} u_{m+1}(y_0) &= (u_{m+1}(y_0) - u_m(x_1)) + (u_{m+1}(y_0) - u_m(x_2)) + \\ &+ (u_{m+1}(y_0) - u_{m+1}(y_2)) + (u_{m+1}(y_0) - u_{m+1}(y_1)) \\ &= \lambda_{m+1} u_{m+1}(y_0), \end{aligned}$$

de manera similar podemos obtener expresiones para $H_{m+1} u_{m+1}(y_1)$ y $H_{m+1} u_{m+1}(y_2)$, que nos darían las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} (4 - \lambda_{m+1}) u_{m+1}(y_0) &= u_{m+1}(y_1) + u_{m+1}(y_2) + u_m(x_1) + u_m(x_2), \\ (4 - \lambda_{m+1}) u_{m+1}(y_1) &= u_{m+1}(y_0) + u_{m+1}(y_2) + u_m(x_0) + u_m(x_2), \\ (4 - \lambda_{m+1}) u_{m+1}(y_2) &= u_{m+1}(y_1) + u_{m+1}(y_0) + u_m(x_1) + u_m(x_0). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Para obtener $u_{m+1}(y_i)$ en términos de $u_m(x_0)$, $u_m(x_1)$ y $u_m(x_2)$ primero sumemos y ordenemos los términos de las tres ecuaciones anteriores:

$$(2 - \lambda_{m+1})(u_{m+1}(y_0) + u_{m+1}(y_1) + u_{m+1}(y_2)) = 2(u_m(x_0) + u_m(x_1) + u_m(x_2)). \quad (5.9)$$

Sumando adecuadamente $u_{m+1}(y_i)$ en ambos lados de cada ecuación de (5.8) y usando (5.9) para simplificar obtenemos:

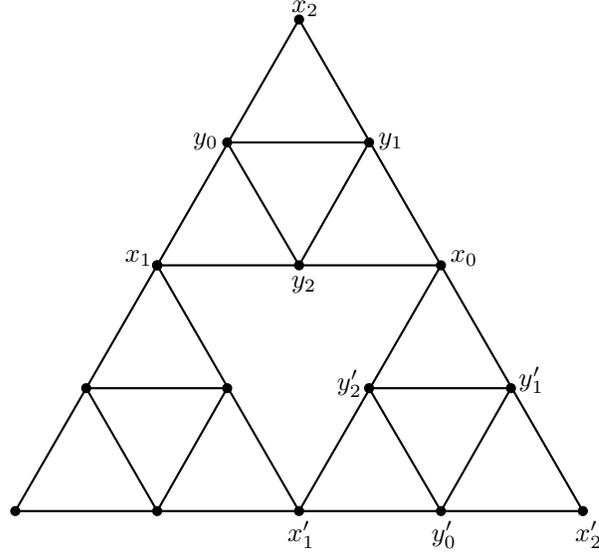


Figura 5.4: Diseminación espectral en el triángulo de Sierpinski.

$$\begin{aligned}
 (5 - \lambda_{m+1})u_{m+1}(y_0) &= \frac{2}{(2 - \lambda_{m+1})}(u_m(x_0) + u_m(x_1) + u_m(x_2)) + u_m(x_1) + u_m(x_2), \\
 (5 - \lambda_{m+1})u_{m+1}(y_1) &= \frac{2}{(2 - \lambda_{m+1})}(u_m(x_0) + u_m(x_1) + u_m(x_2)) + u_m(x_0) + u_m(x_2), \\
 (5 - \lambda_{m+1})u_{m+1}(y_0) &= \frac{2}{(2 - \lambda_{m+1})}(u_m(x_0) + u_m(x_1) + u_m(x_2)) + u_m(x_1) + u_m(x_0).
 \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que

$$u_{m+1}(y_0) = \frac{(4 - \lambda_{m+1})(u_m(x_1) + u_m(x_2)) + 2u_m(x_0)}{(2 - \lambda_{m+1})(5 - \lambda_{m+1})}, \quad (5.10)$$

y de manera análoga podemos obtener los valores para $u(y_1)$ y $u(y_2)$.

Sea $x'_1, x'_2 \in V_m$ y $y'_0, y'_1, y'_2 \in V_{m+1} \setminus V_m$ como en la Figura 5.4. Entonces por la ecuación (5.7) tenemos

$$(4 - \lambda_{m+1})u_m(x_0) = u_{m+1}(y_1) + u_{m+1}(y_2) + u_{m+1}(y'_1) + u_{m+1}(y'_2), \quad (5.11)$$

luego por analogía con la ecuación (5.10) tenemos que

$$u_{m+1}(y'_1) = \frac{(4 - \lambda_{m+1})(u_m(x'_2) + u_m(x_0)) + 2u_m(x'_1)}{(2 - \lambda_{m+1})(5 - \lambda_{m+1})}, \quad (5.12)$$

y de manera análoga para $u_{m+1}(y'_0)$ y $u_{m+1}(y'_2)$. De esta manera al sustituir los valores de $u_{m+1}(y_1)$, $u_{m+1}(y_2)$, $u_{m+1}(y'_1)$ y $u_{m+1}(y'_2)$ en la ecuación (5.11) tenemos

$$(4 - \lambda_{m+1})u_m(x_0) = \frac{(6 - \lambda_{m+1})(u_m(x_1) + u_m(x_2) + u_m(x'_1) + u_m(x'_2))}{(2 - \lambda_{m+1})(5 - \lambda_{m+1})} + \frac{(4(4 - \lambda_{m+1}))u_m(x_0)}{(2 - \lambda_{m+1})(5 - \lambda_{m+1})}. \quad (5.13)$$

Además de la ecuación (5.6) tenemos

$$(4 - \lambda_m)u_m(x_0) = u_m(x_1) + u_m(x_2) + u_m(x'_1) + u_m(x'_2). \quad (5.14)$$

Luego al sustituir (5.14) en (5.13) tenemos que

$$(4 - \lambda_{m+1})u_m(x_0) = \left(\frac{(6 - \lambda_{m+1})(4 - \lambda_m) + 4(4 - \lambda_{m+1})}{(2 - \lambda_{m+1})(5 - \lambda_{m+1})} \right) u_m(x_0), \quad (5.15)$$

de aquí que si $\lambda_{m+1} \neq 6, 2, 5$ tenemos una relación entre λ_m y λ_{m+1} que está dada por

$$(4 - \lambda_{m+1}) = \left(\frac{(6 - \lambda_{m+1})(4 - \lambda_m) + 4(4 - \lambda_{m+1})}{(2 - \lambda_{m+1})(5 - \lambda_{m+1})} \right),$$

lo cual es equivalente a

$$\lambda_m = \lambda_{m+1}(5 - \lambda_{m+1}). \quad (5.16)$$

Al resolver para λ_{m+1} tenemos que

$$\lambda_{m+1} = \frac{5 + \varepsilon_m \sqrt{25 - 4\lambda_m}}{2}, \quad \varepsilon_m = \pm 1. \quad (5.17)$$

De esta manera podemos formar una sucesión de funciones $\{u_n\}_{n \geq m}$, $u_n \in \ell(V_n)$ tales que $u_{n+1}|_{V_n} = u_n$ y que

$$H_m u_n(p) = \lambda_n u_n(p) \quad \text{si } p \in V_n \setminus V_0, \quad (5.18)$$

por lo que podemos definir una función u en $\ell(V_*)$ dada por $u|_{V_n} = u_n$, $n \geq m$. Al igual que en el caso del intervalo si $\varepsilon_n = 1$ solo para una cantidad finita de términos, entonces $\lambda_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, por lo que $u \in D(H)$. Luego por el Teorema 5.1

$$\begin{aligned} Hu(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{3} \right)^n \left(\frac{3^{n+1}}{2} \right) H_n u(x) \\ &= \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} 5^n \lambda_n u(x), \end{aligned} \quad (5.19)$$

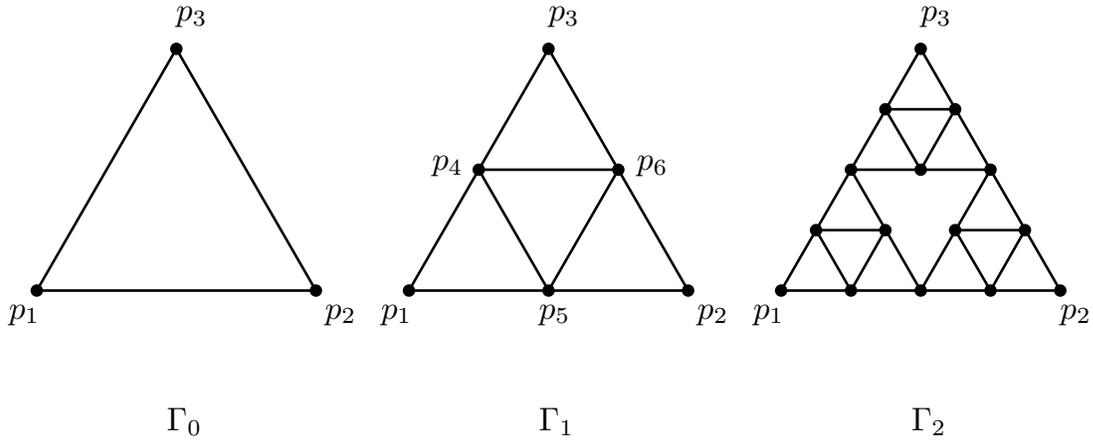


Figura 5.5: Aproximación gráfica del triángulo de Sierpinski.

para todo $x \in V_* \setminus V_0$, de esta manera si

$$\lambda = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} 5^n \lambda_n, \quad (5.20)$$

entonces tenemos que

$$Hu(p) = \lambda u(p) \quad \text{si } p \in K \setminus V_0. \quad (5.21)$$

Ejemplo 5.5. Sea $\{\Gamma_n(V_n, E_n)\}_{n \geq 0}$ una sucesión de gráficas que aproximan al triángulo de Sierpinski como las que aparecen en la Figura 5.5. Si $m = 1$, entonces tenemos que

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

es el laplaciano de Γ_1 . Para encontrar λ_1 y $u_1 \in \ell(V_1)$ tal que $u_1(x) = 0$ si $x \in V_0$ y que

$$H_1 u_1(x) = \lambda_1 u_1(x) \quad \text{si } x \in V_1 \setminus V_0, \quad (5.22)$$

solo tenemos que encontrar los eigenvalores y eigenfunciones de

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Los eigenvalores de M son 5, 5 y 2. Consideremos $\varepsilon_n = -1$ para todo $n > 1$, de esta manera si $\lambda_1 = 5, 2$ tenemos que $\lambda_n < 2$, para ver esto solo hay que notar que $\frac{5 - \sqrt{25 - 4x}}{2} < x$. Luego por la ecuación (5.20) tenemos que si $\lambda_1 = 2$, entonces $\lambda \approx 16.81$ y si $\lambda_1 = 5$, entonces $\lambda \approx 55.88$.¹

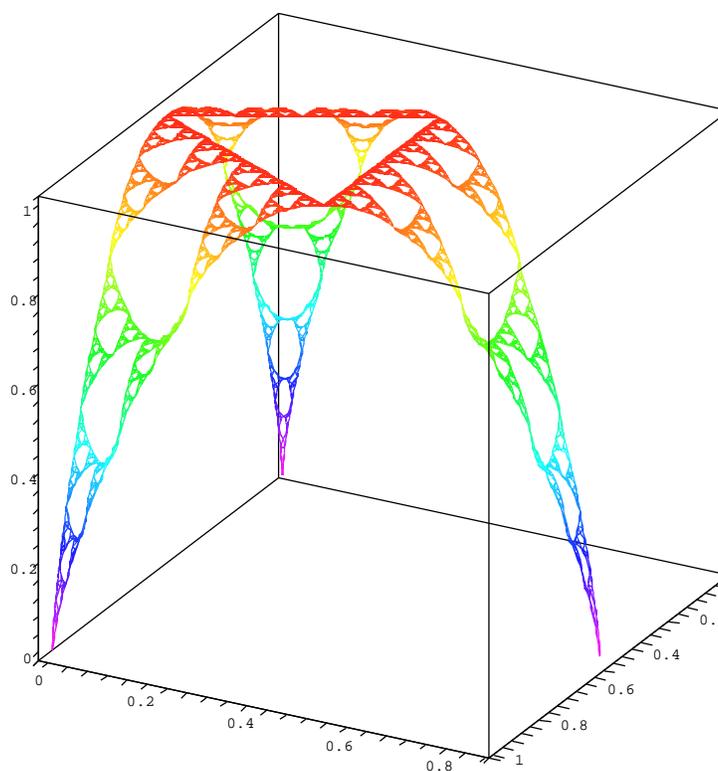


Figura 5.6: Eigenfunción para $\lambda \approx 16.81$

¹Las imágenes de las eigenfunciones del triángulo de Sierpinski fueron generadas por medio del programa Maple 9.

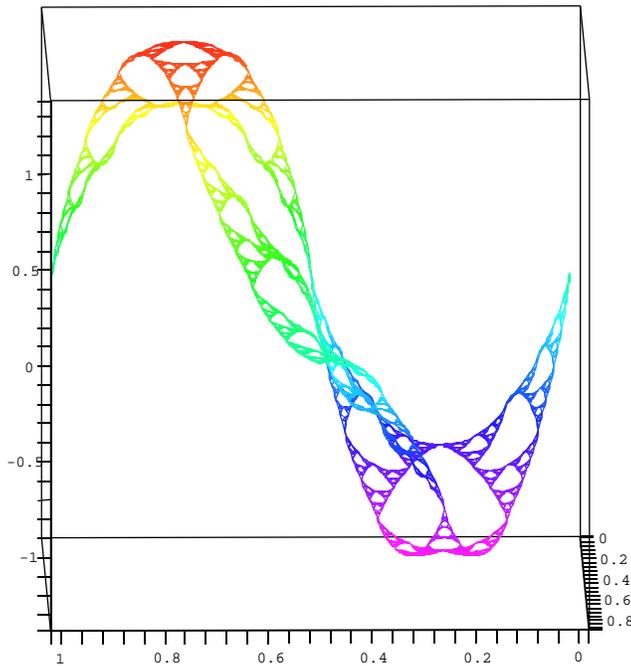


Figura 5.7: Eigenfunción para $\lambda \approx 55.88$

5.3

Espectro del Laplaciano en SG_3

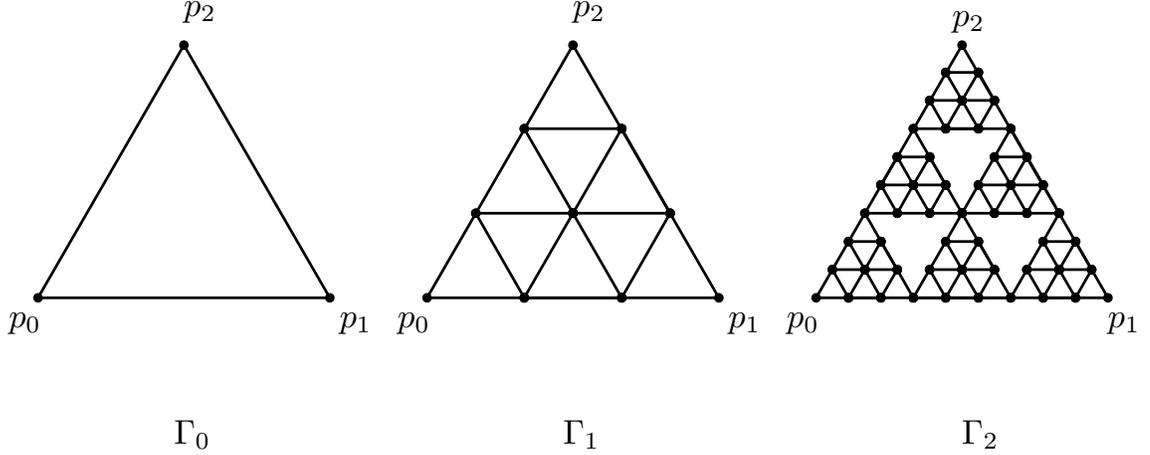
En esta sección trataremos de aplicar el método de diseminación espectral al laplaciano definido sobre un conjunto llamado SG_3 . Para esto comenzaremos eligiendo una gráfica conexa $\Gamma_0(V_0, E_0)$ de tal forma que V_0 sea una frontera de SG_3 .

Definamos el conjunto auto-similar $K = SG_3$ como sigue: sean p_0, p_1, p_2 los vértices de un triángulo equilátero, sean $p_3 = \frac{1}{2}(p_0 + p_1)$, $p_4 = \frac{1}{2}(p_0 + p_2)$ y $p_5 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$. SG_3 será el conjunto auto-similar con respecto a

$$f_i(x) = \frac{(x - p_i)}{3} + p_i,$$

para $i = 0, \dots, 5$, en la Figura 5.8 se muestra una aproximación de SG_3 . También observemos que SG_3 es postcríticamente finito ya que $V_0 = \{p_0, p_1, p_2\}$ puede ser elegida como una frontera.

Comenzaremos el análisis tomando a $\Gamma_0(V_0, E_0)$ (ver Figura 5.8) como la gráfica inicial, por lo que si H_1 es el laplaciano de la gráfica Γ_1 , entonces tenemos que

Figura 5.8: Aproximación de SG_3 .

$$P_{V_1, V_0}(H_1) = \begin{pmatrix} -\frac{14}{15} & \frac{7}{15} & \frac{7}{15} \\ \frac{7}{15} & -\frac{14}{15} & \frac{7}{15} \\ \frac{7}{15} & \frac{7}{15} & -\frac{14}{15} \end{pmatrix},$$

por lo que $P_{V_1, V_0} = \frac{7}{15}H_0$, luego por el Teorema 3.6 y la Proposición 3.11 tenemos que $r = \frac{7}{15}$ es el factor de normalización. Si $x \in V_*$ entonces x es vértice de alguna celda de nivel m $f_w(K)$, luego por un razonamiento análogo al del triángulo de Sierpinski (Ejemplo 5.2) tenemos que

$$\int_{f_w(K)} (\psi_x^m + \psi_y^m + \psi_z^m) d\mu = \mu(f_w(K)) = \frac{1}{6^m}.$$

Por otra parte tenemos que x puede estar en dos o tres celdas de nivel m . Como ψ_x^m es idénticamente cero en las celdas donde x no está contenido tenemos que

$$\int_K \psi_x^m d\mu = \frac{1}{6^m},$$

si x pertenece a tres celdas y

$$\int_K \psi_x^m d\mu = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{6^m}\right),$$

si x pertenece a dos celdas.

Supongamos que existe λ_{m-1} y una función $u_{m-1} \in \ell(V_{m-1})$ tal que $u_{m-1}(p) = 0$ si $p \in V_0$ y que

$$H_{m-1}u_{m-1}(p) = \lambda_m u_{m-1}(p) \quad \text{si } p \in V_{m-1} \setminus V_0. \quad (5.23)$$

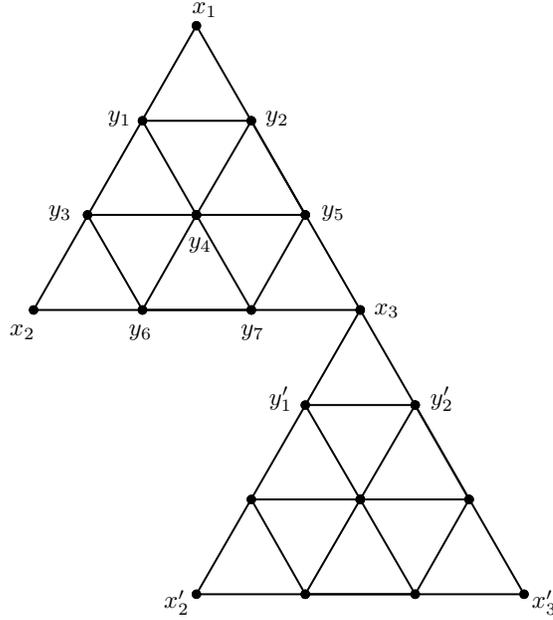


Figura 5.9: Diseminación espectral en SG_3 .

Para extender u_{m-1} a $u_m \in \ell(V_m)$ tal que

$$H_m u_m(p) = \lambda_m u_m(p) \quad \text{si } p \in V_m \setminus V_0, \quad (5.24)$$

procedamos como sigue: si $x_1, x_2, x_3 \in V_{m-1}$ y $y_i \in V_m \setminus V_{m-1}$, $i = 1, \dots, 7$ (ver Figura 5.9), entonces de la ecuación (5.24)

$$\begin{aligned} (4 - \lambda_m)u_m(y_1) &= u_{m+1}(x_1) + u_m(y_2) + u_m(y_3) + u_m(y_4), \\ (4 - \lambda_m)u_m(y_2) &= u_{m+1}(x_1) + u_m(y_1) + u_m(y_4) + u_m(y_5), \\ (4 - \lambda_m)u_m(y_3) &= u_{m+1}(x_2) + u_m(y_1) + u_m(y_4) + u_m(y_6), \\ (6 - \lambda_m)u_m(y_4) &= u_{m+1}(y_1) + u_m(y_2) + u_m(y_3) + u_m(y_4) + u_m(y_5) + u_m(y_6) + u_m(y_7), \\ (4 - \lambda_m)u_m(y_5) &= u_{m+1}(x_3) + u_m(y_2) + u_m(y_4) + u_m(y_7), \\ (4 - \lambda_m)u_m(y_6) &= u_{m+1}(x_2) + u_m(y_3) + u_m(y_4) + u_m(y_7), \\ (4 - \lambda_m)u_m(y_7) &= u_{m+1}(x_3) + u_m(y_4) + u_m(y_5) + u_m(y_6). \end{aligned}$$

De la ecuaciones anteriores obtenemos que los valores de u_m para $y_1, y_2, y_3, y_5, y_6, y_7$ son de la forma

$$\begin{aligned}
u_m(y_1) = & \frac{(\lambda_m^3 - 15\lambda_m^2 + 68\lambda_m - 87)u_{m-1}(x_1)}{\lambda_m^5 - 22\lambda_m^4 + 181\lambda_m^3 - 678\lambda_m^2 + 1098\lambda_m - 540} + \\
& + \frac{(\lambda_m^3 - 15\lambda_m^2 + 68\lambda_m - 87)u_{m-1}(x_2)}{\lambda_m^5 - 22\lambda_m^4 + 181\lambda_m^3 - 678\lambda_m^2 + 1098\lambda_m - 540} - \\
& - \frac{(\lambda_m^4 - 18\lambda_m^3 + 112\lambda_m^2 - 274\lambda_m + 201)u_{m-1}(x_1)}{\lambda_m^5 - 22\lambda_m^4 + 181\lambda_m^3 - 678\lambda_m^2 + 1098\lambda_m - 540} - \\
& - \frac{(2\lambda_m^2 - 22\lambda_m + 57)u_{m-1}(x_3)}{\lambda_m^5 - 22\lambda_m^4 + 181\lambda_m^3 - 678\lambda_m^2 + 1098\lambda_m - 540} - \\
& - \frac{(2\lambda_m^2 - 22\lambda_m + 57)u_{m-1}(x_2)}{\lambda_m^5 - 22\lambda_m^4 + 181\lambda_m^3 - 678\lambda_m^2 + 1098\lambda_m - 540} - \\
& - \frac{(\lambda_m^2 - 14\lambda_m + 51)u_{m-1}(x_3)}{\lambda_m^5 - 22\lambda_m^4 + 181\lambda_m^3 - 678\lambda_m^2 + 1098\lambda_m - 540},
\end{aligned}$$

mientras que

$$u_m(y_4) = 2 \frac{u_{m-1}(x_2)}{\lambda_m^2 - 8\lambda_m + 6} + 2 \frac{u_{m-1}(x_1)}{\lambda_m^2 - 8\lambda_m + 6} + 2 \frac{u_{m-1}(x_3)}{\lambda_m^2 - 8\lambda_m + 6}$$

Sea $x'_3, x'_2 \in V_m$ y $y'_1, y'_2 \in V_{m+1} \setminus V_m$ como en la Figura 5.9. Entonces por la ecuación (5.24) tenemos

$$(4 - \lambda_m)u_{m-1}(x_3) = u_m(y'_1) + u_m(y'_2) + u_m(y_7) + u_m(y_5), \quad (5.25)$$

De aquí que si sustituimos los valores de $u_m(y'_1), u_m(y'_2), u_m(y_7)$ y $u_m(y_5)$ que están en función de $u_{m-1}(x_3), u_{m-1}(x_2), u_{m-1}(x_1), u_{m-1}(x'_2)$ y $u_{m-1}(x'_3)$ en (5.25) tenemos

$$\begin{aligned}
& (\lambda_m^5 - 22\lambda_m^4 + 181\lambda_m^3 - 678\lambda_m^2 + 1098\lambda_m - 540)(4 - \lambda_m)u_{m-1}(x_3) = \\
& 4(6 - \lambda_m)(\lambda_m^3 - 13\lambda_m^2 + 49\lambda_m - 48)u_{m-1}(x_3) + \\
& + (\lambda_m^3 - 20\lambda_m^2 + 126\lambda_m - 252)(u_{m-1}(x_1) + u_{m-1}(x_2) + u_{m-1}(x'_1) + u_{m-1}(x'_3)).
\end{aligned}$$

Luego al sustituir

$$(4 - \lambda_{m-1})u_{m-1}(x_3) = u_{m-1}(x_1) + u_{m-1}(x_2) + u_{m-1}(x'_1) + u_{m-1}(x'_2) \quad (5.26)$$

en la ecuación anterior tenemos una relación entre λ_m y λ_{m-1} dada por

$$\begin{aligned}
P(\lambda_m) = & \lambda_m^6 - 26\lambda_m^5 + 265\lambda_m^4 - 1322\lambda_m^3 + 3222\lambda_m^2 - 3060\lambda_m + \quad (5.27) \\
& + 20\lambda_m^2\lambda_{m-1} - 126\lambda_m\lambda_{m-1} + 252\lambda_{m-1} - \lambda_m^3\lambda_{m-1} \\
& = 0.
\end{aligned}$$

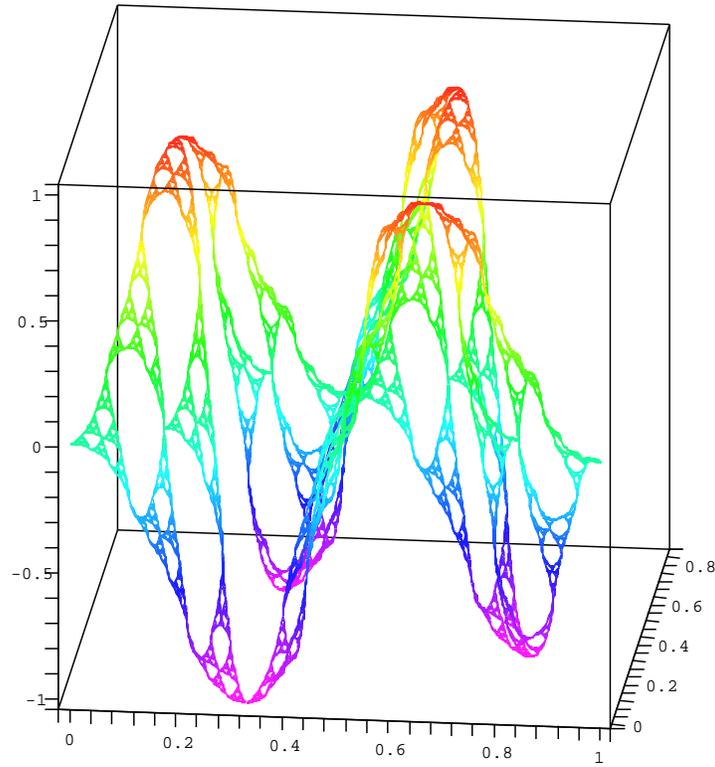


Figura 5.10: Gráfica de la función en $\ell(V_5)$ obtenida por medio del método de diseminación espectral.

Al tener una relación entre λ_m y λ_{m-1} dada por una ecuación de grado 6, no podemos tener un resultado similar al obtenido con las ecuaciones (5.5) y (5.17) en los casos del intervalo y el triángulo de Sierpinski respectivamente. Además si queremos que la función definida en V_* la cual es obtenida al aplicar el método pueda ser extendida a una función definida en K y que sea una eigenfunción hay que elegir valores de λ_n , $n > m$, tales que $P(\lambda_n) = 0$ y que no sean raíces de

$$\lambda_m^5 - 22\lambda_m^4 + 181\lambda_m^3 - 678\lambda_m^2 + 1098\lambda_m - 540,$$

los cuales son $3, 5, 6, 4 + \sqrt{10}$ y $4 - \sqrt{10}$, además estos valores tendrán que ser tomados de tal forma que $\lim_{n \rightarrow \infty} 6^n \left(\frac{15}{7}\right)^n \lambda_n$ exista. En la Figura 5.10 se muestra la función definida en V_5 que resulta de implementar el método de diseminación espectral con los valores de $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 1.5857, \lambda_3 = 0.141432$ y $\lambda_4 = 0.01172$.

Desafortunadamente las funciones obtenidas al aplicar el método parecen no ser eigenfunciones, ya que computacionalmente $\lim_{n \rightarrow \infty} 6^n \left(\frac{15}{7}\right)^n \lambda_n$ parece no converger aun cuando $\lambda_n \rightarrow 0$. Así que una de las cosas que se quedarán para el futuro será ver si efectivamente las funciones obtenidas son o no eigenfunciones. En caso negativo el

problema tal vez pueda ser arreglado tomando una diferente medida o posiblemente tomando una diferente serie de gráficas que aproximen a SG_3 .

Como puede apreciarse en el trabajo realizado, el cálculo de eigenvalores de SG_3 resulta mucho más complicado que el de SG no solamente por el grado del polinomio (5.27) si no también a que aparecen vértices de distintos grados. Si bien, de acuerdo a la teoría, el método de diseminación espectral debería ser aplicable para este ejemplo, no queda claro que sea posible en la práctica. Existen posibles alternativas, que quedarían para trabajos posteriores, como por ejemplo modificar la frontera, o tal vez modificar las relaciones entre los vértices de las gráficas Γ_m para volverlas más homogéneas.

Bibliografía

- [1] J. KIGAMI. *Analysis on Fractals*. Cambridge University Press, 2001.
- [2] R. STRICHARTZ. *Differential Equations on Fractals*. Princeton University Press, 2006.
- [3] M. PERUGGIA. *Discrete Iterated Function Systems*. A K Peters, 1993.
- [4] M. REED AND B. SIMON. *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*. Academic Press, 1980.
- [5] J. B. CONWAY. *A Course in Functional Analysis*, second edition, Springer, 1990.
- [6] M. KREYSZIG. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley and Sons, 1978.
- [7] M. F. BARSLEY. *SuperFractals*. Cambridge University Press, 2006.
- [8] R. HABERMAN *Elementary Applied Partial Differential Equations With Fourier Series and Boundary Value Problems*. Prentice-Hall, 3rd edition, 1997.
- [9] L. EVANS. *Partial Differential Equations*. AMS,1998.
- [10] H. L. ROYDEN. *Real Analysis*. Prentice-Hall, 3rd edition, 1988.
- [11] R. BARTLE. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Wiley and Sons, 1995.
- [12] T. BIYIKOGLU, J. LEYDOLD AND F. STADLER. *Laplacian Eigenvectors of Graphs: Perron-Frobenius and Faber-Krahn Type Theorems*. Springer, 2007.
- [13] R. COURANT - D. HILBERT. *Methods of Mathematical Physics*. John Wiley and Sons.