



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Probabilidades de cruce para el movimiento browniano y puente browniano

Tesis que para obtener el título de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

presenta

Velázquez Ascencio René

bajo la dirección de

Dra. Liliana Peralta Hernández (UAEH)

Mineral de la Reforma, Hidalgo. Octubre 2020.

donde $b(t)$ es una función lineal. Sin embargo, nuestro objetivo es más ambicioso pues presentamos cálculos explícitos para probabilidades del tipo

$$P\left(\bigcup_{0 \leq t < H} X_t \leq b(t)\right) = P\left(\sup_{0 \leq t < H} X_t \leq b(t)\right),$$

donde H es finito o infinito.

Los resultados son obtenidos a través de una combinación de probabilidades de cruce conocidas y del uso de propiedades de invarianza para las trayectorias del movimiento browniano. El segundo objetivo de este trabajo es extender resultados análogos para el puente browniano, es decir, calcularemos expresiones explícitas para la siguiente probabilidad

$$P\left(\bigcup_{0 \leq t \leq H} \{X_t \geq mt + b\} | X_R = x\right) \quad \text{donde } H, R > 0.$$

La tesis se estructura en tres capítulos. En el Capítulo 1 brindamos una sólida introducción y construcción teórica del proceso de Wiener y del puente browniano, obteniendo las principales características y propiedades necesarias de estos procesos para lograr los objetivos de la tesis. En el Capítulo 2, realizamos los cálculos necesarios para obtener fórmulas explícitas de las probabilidades de cruce. Finalmente, el Capítulo 3 contiene código de R para simular trayectorias de los procesos estocásticos desarrollados en la tesis, mediante el cual se obtuvieron las imágenes incluidas.

Capítulo 1

Preliminares

Los procesos estocásticos surgen al considerar un sistema \mathcal{S} (un organismo, una empresa, un ecosistema, etc.) y el conjunto de estados \mathcal{E} que éste puede tomar a través del tiempo (niveles de glucosa en sangre, el precio de un producto, la presión atmosférica, etc.). Si suponemos que observar el estado de tal sistema en algún tiempo t constituye realizar un experimento aleatorio, entonces tal estado podría modelarse con alguna variable aleatoria, digamos X_t , en algún espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Sin embargo, es posible que deseemos observar y analizar el sistema no sólo en algún instante sino cada segundo, o para todo elemento de un conjunto arbitrario $T \subseteq \mathbb{R}$. En tal caso, es posible construir espacios de probabilidad lo suficientemente robustos para definir en ellos un conjunto de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in T}$ que modelen el estado del sistema \mathcal{S} para cada $t \in T$.

A continuación presentaremos los resultados necesarios para el desarrollo de este trabajo. El lector interesado puede consultar [Rin12] y [HPS72] para nociones básicas de procesos estocásticos o [Dur19] y [Bil12] para una lectura más avanzada.

Definición 1. Un **proceso estocástico** es cualquier colección de variables aleatorias (v.a.) definidas en un mismo espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) indexadas por algún conjunto $T \subseteq \mathbb{R}$ y se denota como $X = \{X_t\}_{t \in T}$.

El conjunto T es conocido como **espacio parametral**, si T es un intervalo de longitud positiva diremos que el proceso es **continuo** y en caso de que T sea un subconjunto de los enteros el proceso será llamado **discreto**.

Un proceso estocástico también puede verse como una función de dos variables $X : T \times \Omega \rightarrow \mathcal{E}$, tal que a la pareja (t, ω) se le asocia el estado $X(t, \omega)$, en algunas ocasiones se denota $X_t(\omega)$. Para cada $t \in T$ el mapeo $\omega \mapsto X_t(\omega)$ es una variable aleatoria, y para cada $\omega \in \Omega$ la función $t \mapsto X_t(\omega)$ es una trayectoria del proceso.

Por ejemplo, el fenómeno físico del movimiento browniano, que modela el movimiento irregular de las partículas de polen suspendidas en agua, fue descrito matemáticamente como un proceso estocástico a partir de 1923 por el matemático Norbert Wiener [Wie23] quien demostró que existe una versión¹ del movimiento browniano con trayectorias continuas. En

¹Sea un proceso estocástico X con espacio parametral T definido en espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathfrak{F})$. Un proceso Y es una versión de X si $P(X_t = Y_t) = 1$ para cada $t \in T$.

las secciones subsecuentes brindamos un desarrollo de las propiedades básicas de este proceso.

Consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2. Imaginemos que una partícula se sitúa inicialmente en el origen de la recta real. Posteriormente, cada segundo, la partícula se desplaza dando un salto de una unidad a la derecha o a la izquierda aleatoriamente, suponiendo además que los desplazamientos son independientes entre sí. Podemos pensar entonces que el n -ésimo salto puede modelarse con alguna variable aleatoria S_n tal que

$$P(S_n = 1) = p \text{ y } P(S_n = -1) = 1 - p,$$

por lo que requerimos que la colección $\{S_n\}_{n \geq 1}$ sea independiente e idénticamente distribuida (i.i.d.).²

La posición de la partícula al tiempo n debe estar dada entonces por la variable

$$X_n = \sum_{i=1}^n S_i,$$

llamada **caminata aleatoria**. Notemos que X_n puede tomar el valor de cualquier entero con probabilidad positiva para un n adecuado, por ello su espacio de estados es \mathbb{Z} .

Como $E(S_n) = 2p - 1$ y $\text{Var}(S_n) = 4p(1 - p)$ para toda n , se sigue directamente que

$$E(X_n) = n(2p - 1) \text{ y } \text{Var}(X_n) = 4np(1 - p).$$

Las cantidades anteriores indican que las trayectorias de la caminata aleatoria, al tiempo n tienden a concentrarse en el valor $n(2p - 1)$, y su distancia cuadrada promedio a este valor crece proporcionalmente a n , por tanto conforme más grande es n la partícula puede situarse en un conjunto de estados cada vez más amplio, y su localización es cada vez más incierta. Notemos que

$$\frac{d}{dp} 4p(1 - p) = 4 - 8p,$$

por lo que la varianza tiene un punto crítico en $p = 1/2$, el cual es un máximo. Como $p = 1/2$ implica $E(S_n) = E(X_n) = 0$ la caminata aleatoria con este parámetro es llamada **simétrica**.

Según la dependencia de las variables aleatorias de un proceso estocástico algunos de ellos pueden clasificarse como:

- **Proceso de ensayos independientes:** es un proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ que representa una sucesión de ensayos independientes de un mismo experimento aleatorio. El resultado del proceso en un tiempo cualquiera t_s es independiente de cualquier otro resultado pasado o futuro t_r . Por ejemplo, supongamos que se lanza un moneda y se va registrando el resultado, el resultado que se obtiene con cada lanzamiento no afecta los resultados previos o posteriores.

²La cuestión de la existencia de tal colección y el espacio de probabilidad donde está definida se remite a un importante teorema de la teoría avanzada de la probabilidad, el teorema de consistencia de Kolmogorov, ver por ejemplo [AL06]; alternatively, puede recurrirse al espacio producto para realizar copias arbitrarias e independientes de una variable aleatoria, las cuales, por construcción, estarán definidas en un mismo espacio de probabilidad.

- **Proceso de Markov:** es un proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ para el cual se cumple:

$$P(X_{t_{n+1}} \in A | X_{t_n} = x_n, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_0} = x_0) = P(X_{t_{n+1}} \in A | X_{t_n} = x_n),$$

para todo $A \in \mathcal{F}$. Es decir, si se conoce el estado actual, los estados anteriores no influyen en el estado futuro del proceso.

- **Proceso con incrementos independientes:** es un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X_t : t \geq 0\}$ tal que para cualesquiera tiempos $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, las variables aleatorias $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes.
- **Proceso con incrementos estacionarios:** es un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X_t : t \geq 0\}$, tal que para cualesquiera tiempos t y s , con $s < t$, la distribución de probabilidad de la variables $X_{t+h} - X_{s+h}$ y $X_t - X_s$ es la misma para $h > 0$.
- **Martingalas:** Una colección $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ de σ -álgebras es llamada filtración si $s \leq t$ implica $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$. Si un proceso $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es tal que X_t es \mathcal{F}_t -medible, entonces diremos que X_t está adaptado a la filtración. Una **martingala** es un proceso $\{X_t\}_{t \geq 0}$ adaptado a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ tal que cumple las siguientes propiedades

1. $E(|X_t|) < \infty$ para todo $t \geq 0$
2. $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ para cualesquier $s \leq t$.

- **Procesos de Lévy:** Un proceso de Levy tiene incrementos estacionarios e independientes, un ejemplo de este tipo de procesos es la caminata aleatoria y, como veremos, también el movimiento browniano.

Estudiar los incrementos del proceso equivale a estudiar cómo se comporta éste después de cualquier intervalo de tiempo, las distribuciones de los incrementos nos permiten intuir de qué es capaz el proceso si comenzamos a observarlo en cualquier instante $t \in T$.

Ejemplo 3. Continuando con la caminata aleatoria, notemos que para dos enteros positivos $t_k < t_l$ los incrementos tienen la forma

$$X_{t_l} - X_{t_k} = \sum_{i=1}^{t_l} S_i - \sum_{i=1}^{t_k} S_i = \sum_{i=t_k+1}^{t_l} S_i,$$

por tanto, como la colección $\{S_n\}_{n \geq 1}$ es i.i.d., dados tiempos $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ en T , los incrementos $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ serán independientes. Asimismo, tenemos que

$$X_{t_l} - X_{t_k} = \sum_{i=t_k+1}^{t_l} S_i \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{t_l-t_k} S_i = X_{t_l-t_k},$$

donde $\stackrel{d}{=}$ indica una igualdad en distribución para variables aleatorias (ver Apéndice 4). Lo anterior implica que la caminata aleatoria tiene incrementos independientes y estacionarios.

Esto permite afirmar que si definimos el proceso $Y_t = x + X_t$ para algún $x \in \mathbb{R}$, éste se comportará, probabilísticamente, de la misma forma que X_t , es decir, cada trayectoria de Y_t corresponde a una trayectoria idéntica en su forma pero trasladada $-x$ unidades sobre el eje y en el plano cartesiano, por ello se dice que el proceso $\{Y_t\}_{t \in T}$ es una caminata aleatoria que comienza en x , y en general que la caminata aleatoria es **invariante bajo traslaciones**.

De cierta forma, podemos pensar que un proceso estocástico indexado en un conjunto T infinito es un objeto infinito dimensional que, al igual que un vector aleatorio, debería poder caracterizarse por una distribución de probabilidad, y ésta debería estar definida sobre subconjuntos de cierto espacio de funciones, es decir,

$$P(X \in A), \quad A \in \mathcal{G} \tag{1.1}$$

donde en este contexto \mathcal{G} es una colección adecuada de subconjuntos del espacio de funciones. Esta metodología requiere matemáticas más avanzadas y muchas veces es inconveniente. Afortunadamente, un proceso estocástico puede ser interpretado como una colección de vectores aleatorios.

Definición 4. Sea un proceso $\{X_t\}_{t \in T}$. El conjunto de las distribuciones de probabilidad de todos los vectores $\{(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) : n \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \dots, t_n \in T, t_i \neq t_j \text{ si } i \neq j\}$ es conocido como las **distribuciones finitas dimensionales** del proceso.

Nota 5. Trabajar con las distribuciones finitas dimensionales es mucho más simple que con la distribución (1.1), además se puede demostrar que éstas determinan la distribución del proceso estocástico en cuestión (vea por ejemplo [RY99]).

Terminamos esta sección añadiendo también la definición de independencia para procesos estocásticos:

Definición 6. Sea $\{X_t\}_{t \in T_1}$ y $\{Y_t\}_{t \in T_2}$ dos procesos estocásticos definidos en un mismo espacio de probabilidad, diremos que son **independientes** si para cualesquier tiempos $t_1, t_2, \dots, t_n \in T_1$ y $s_1, s_2, \dots, s_m \in T_2$, los vectores $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ y $(Y_{s_1}, Y_{s_2}, \dots, Y_{s_m})$ son independientes.

1.1. Procesos gaussianos

En esta sección estudiaremos los procesos gaussianos y para ello, comenzaremos recordando la densidad normal multivariada o gaussiana (para más detalles el lector puede consultar [Gut09]).

Sea $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$ un vector aleatorio n -dimensional cuyas componentes tienen segundo momento finito. La media de \mathbf{Y} se define como el vector

$$\mathbf{E}(\mathbf{Y}) = (\mathbf{E}(Y_1), \mathbf{E}(Y_2), \dots, \mathbf{E}(Y_n))^T,$$

y su matriz de covarianza es

$$\text{Cov}(\mathbf{Y}) = (\mathbf{E}(Y_i - \mathbf{E}Y_i)(Y_j - \mathbf{E}Y_j))_{ij}.$$

Un vector aleatorio \mathbf{Y} n -dimensional tiene **distribución gaussiana o normal multivariada** si su función de densidad existe y tiene la forma

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y} - \mu) \right\} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$

para algún $\mu \in \mathbb{R}^n$ y $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica no negativa definida. Bajo esta definición utilizando cálculos directos puede mostrarse que $E(\mathbf{Y}) = \mu$ y que $\text{Cov}(\mathbf{Y}) = \Sigma$. Además, por el teorema de cambio de variable si $\mathbf{Z} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{Y} - \mu)$ entonces su función de densidad es

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{z} \right) \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n,$$

por lo cual $E(\mathbf{Z}) = 0$, $\text{Cov}(\mathbf{Z}) = Id_{n \times n}$, y, factorizando la expresión en funciones de la forma $e^{-\frac{1}{2}z^2}$, se desprende que las componentes del vector \mathbf{Z} siguen una distribución normal estándar y son independientes entre sí. En este caso, se dice que \mathbf{Z} tiene una **distribución gaussiana estándar**. De hecho, si \mathbf{Y} tiene una distribución gaussiana multivariada, sus componentes son independientes si y sólo si $\text{Cov}(\mathbf{Y})$ es una matriz diagonal, este hecho es muy relevante para esta distribución, pues normalmente una covarianza igual a 0 no implica independencia.

Finalmente, recordemos que una variable aleatoria Y tiene distribución normal con media μ y varianza σ^2 , $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, si y sólo si su función característica está dada por

$$\varphi(t) = E(e^{itY}) = \exp\{it\mu - t^2\sigma^2/2\} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

De este hecho se desprende directamente que si el vector \mathbf{X} tiene distribución gaussiana entonces

$$E(\exp\{i\theta^T \mathbf{X}\}) = \exp\{i\theta^T \mu - \frac{1}{2} \theta^T \Sigma \theta\} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^n.$$

La función característica es bastante útil debido al siguiente resultado.

Teorema 7. *La función característica φ_X de una variable aleatoria X determina su distribución de manera única.*

La prueba del teorema anterior puede consultarse en [AL06, Corolario 10.2.5].

Proposición 8. *Un vector aleatorio \mathbf{X} n -dimensional tiene distribución gaussiana si y sólo si su función característica tiene la forma*

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\theta) = \exp\{i\theta^T \mu - \frac{1}{2} \theta^T \Sigma \theta\} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^n,$$

para algún $\mu \in \mathbb{R}^n$ y $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica positiva definida.

Definición 9. Un proceso estocástico es llamado gaussiano si todas sus distribuciones finito dimensionales son gaussianas.

Los procesos gaussianos quedan determinados por su función media y su función de covarianza, las cuales se definen a continuación:

Definición 10. Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ es llamado de **segundo orden**, si

$$E(X_t^2) < \infty, \quad \forall t \in T.$$

Definición 11. La función media $\mu_X(t)$ de un proceso de segundo orden $\{X_t\}_{t \in T}$ se define como

$$\mu_X(t) = E(X_t), \quad \forall t \in T.$$

Definición 12. La función de covarianza de un proceso de segundo orden $\{X_t\}_{t \in T}$ es

$$r_X(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t), \quad \forall s, t \in T.$$

Como apunta Steele [Ste01] el movimiento browniano es el ejemplo por excelencia de un proceso gaussiano, otros ejemplos son el puente browniano y el movimiento browniano con deriva, los cuales estudiaremos más adelante.

La siguiente proposición es muy útil para probar que un vector aleatorio es gaussiano, y se basa en una propiedad fundamental de las componentes del vector aleatorio. Es por tanto una herramienta útil para saber si un proceso estocástico es gaussiano, como veremos en la construcción del MB.

Proposición 13. *El vector aleatorio \mathbf{Y} tiene distribución gaussiana si y sólo si cualquier combinación lineal de sus componentes tiene distribución normal univariada.*

Demostración. Sea \mathbf{Y} un vector gaussiano con media μ y matriz de covarianza Σ y $\theta \in \mathbb{R}^n$. Definamos $Z_\theta = \theta^T \mathbf{Y}$, debemos mostrar que Z_θ tiene distribución normal, y tenemos

$$E(Z_\theta) = \theta^T \mu \quad \text{y} \quad \text{Var}(Z_\theta) = E(\theta^T (\mathbf{Y} - \mu)(\mathbf{Y} - \mu)^T \theta) = \theta^T \Sigma \theta.$$

Así, para cualquier $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} E(\exp\{itZ_\theta\}) &= E(\exp\{it\theta^T \mathbf{Y}\}) \\ &= \exp\{it\theta^T \mu - \frac{1}{2}t^2\theta^T \Sigma \theta\} \\ &= \exp\{itE(Z_\theta) - \frac{1}{2}t^2\text{Var}(Z_\theta)\}, \end{aligned}$$

entonces, por la Proposición 8, Z_θ tiene distribución normal univariada. De hecho, si Z_θ tiene distribución normal para cada $\theta \in \mathbb{R}^n$, las últimas igualdades siguen siendo válidas, tomando $t = 1$ concluimos que

$$E(\exp\{i\theta^T \mathbf{Y}\}) = \exp\{i\theta^T \mu - \frac{1}{2}\theta^T \Sigma \theta\},$$

mostrando que \mathbf{Y} tiene distribución gaussiana. □

1.2. Movimiento Browniano

Recordemos que el movimiento browniano se originó como un modelo para describir el movimiento aleatorio de partículas suspendidas en agua. En este trabajo no derivaremos a dicho proceso desde consideraciones físicas, tomaremos en vez de ello la siguiente vía alterna. Si refinamos una caminata aleatoria simétrica de manera que dé saltos cada vez más rápidos y cada vez más cercanos, sus trayectorias comenzarán a disimular su construcción por interpolación y darán la impresión de pertenecer a un proceso a tiempo continuo sumamente irregular.

Sea $t \in \mathbb{R}^+$ el instante hasta el cual construiremos las caminatas aleatorias y sea $\{Q_{it/n} : 1 \leq i \leq n\}$ con $n \in \mathbb{N}$, una colección de variables aleatorias i.i.d. tales que

$$P\left(Q_{\frac{it}{n}} = k\right) = P\left(Q_{\frac{it}{n}} = -k\right) = \frac{1}{2} \quad \text{con } k > 0 \text{ por determinar.}$$

Entonces definimos también

$$X_{\frac{mt}{n}} = \sum_{i=1}^m Q_{\frac{it}{n}} \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Luego

$$E\left(X_{\frac{mt}{n}}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \text{Var}\left(X_{\frac{mt}{n}}\right) = k^2 m \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, n.$$

Para determinar k notemos que si $t \in \mathbb{N}$ entonces, acorde al Ejemplo 2, es preferible que $\text{Var}(X_t) = t$, por lo cual hacemos $k = \sqrt{t/n}$, y se sigue que cada colección $\{X_{\frac{mt}{n}}; 1 \leq m \leq n\}$ cumple que $\text{Var}\left(X_{\frac{mt}{n}}\right) = \frac{mt}{n}$. Para nosotros el movimiento browniano es un proceso continuo que mantiene las propiedades de todas estas caminatas aleatorias.

1.2.1. Definición y construcción del movimiento browniano

Definición 14. Diremos que un proceso $\{B_t\}_{t \geq 0}$ es un **movimiento browniano estándar** (MB) si satisface las siguientes propiedades:

1. $B_0 = 0$ con probabilidad 1.
2. Tiene incrementos independientes y estacionarios, con $E(B_t) = 0$ y $\text{Var}(B_t) = t \forall t \geq 0$.
3. Tiene trayectorias continuas con probabilidad 1.

Proposición 15. Si $\{B_t\}_{t \geq 0}$ es un MB, entonces $B_t \sim N(0, t)$ para todo $t > 0$.

Demostración. Sea $n > 1$. Notemos que

$$B_t = \left(B_{\frac{t}{n}} - B_0\right) + \left(B_{\frac{2t}{n}} - B_{\frac{t}{n}}\right) + \dots + \left(B_{\frac{nt}{n}} - B_{\frac{(n-1)t}{n}}\right),$$

$$E\left(B_{(i+1)\frac{t}{n}} - B_{\frac{it}{n}}\right) = 0, \quad \text{Var}\left(B_{(i+1)\frac{t}{n}} - B_{\frac{it}{n}}\right) = \frac{t}{n} \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

La Propiedad 2 de la Definición 14 implica que la colección de v.a.

$$\left\{ B_{\frac{(i+1)t}{n}} - B_{\frac{it}{n}}; i = 0, 1, \dots, n-1 \right\},$$

es i.i.d., por lo tanto, aplicando el Teorema del Límite Central (ver Apéndice 4), obtenemos la siguiente convergencia en distribución:

$$\frac{\sum_{i=0}^{n-1} \left(B_{\frac{(i+1)t}{n}} - B_{\frac{it}{n}} \right)}{\sqrt{n \text{Var}(B_{\frac{t}{n}})}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1).$$

Por lo que

$$\frac{B_t}{\sqrt{t}} \stackrel{d}{=} Z,$$

de donde

$$B_t \stackrel{d}{=} \sqrt{t}Z \sim N(0, t).$$

□

Corolario 16. *El movimiento browniano es un proceso gaussiano y su función de covarianza está dada por $\text{Cov}(B_s, B_t) = \min(s, t)$.*

Demostración. Sean $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ tiempos arbitrarios, sea también $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\theta_1 B_{t_1} + \theta_2 B_{t_2} + \dots + \theta_n B_{t_n} = (\theta_1 + \theta_2) B_{t_1} + \theta_2 (B_{t_2} - B_{t_1}) + \dots + \theta_n (B_{t_n} - B_{t_{n-1}}).$$

Como el vector $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ es gaussiano (por tener componentes normales independientes), el lado derecho de la ecuación anterior tiene distribución normal univariada. Por la Proposición 13 se concluye que $\{B_t\}_{t \geq 0}$ es gaussiano. Finalmente sean $0 \leq s \leq t$, utilizando la independencia de los incrementos se tiene

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_s, B_t) &= \text{E}(B_s B_t) = \text{E}(B_s (B_t - B_s) + B_s^2) \\ &= \text{E}(B_s) \text{E}(B_t - B_s) + \text{E}(B_s^2) \\ &= 0 + s = s. \end{aligned}$$

□

Sabemos que la distribución normal multivariada de un vector aleatorio está determinada por la matriz de covarianza y la media del vector, por esta razón el corolario anterior es importante pues especifica que las condiciones con las que definimos al movimiento browniano determinan el conjunto de sus distribuciones finito dimensionales. Por otro lado, como veremos más adelante, no todo proceso gaussiano es un MB, no obstante la proposición que viene a continuación nos revela cuándo esto es verdad.

Proposición 17. Sea $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un proceso gaussiano tal que $E(X_t) = 0$, $Cov(X_s, X_t) = \min(s, t)$ para cualesquiera $s, t \geq 0$ y además tiene trayectorias continuas con $X_0 = 0$, entonces el proceso es un MB.

Demostración. Sean $0 \leq s \leq t \leq u \leq v$, notemos que

$$\begin{aligned} Cov(B_t - B_s, B_v - B_u) &= Cov(B_t, B_v) - Cov(B_t, B_u) \\ &\quad - Cov(B_s, B_v) + Cov(B_s, B_u) \\ &= t - t - s + s = 0. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que la matriz de covarianza del vector $(B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ es una matriz diagonal para $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, y como es un vector gaussiano sus componentes, los incrementos, son independientes.

Por otra parte

$$Cov(B_t - B_s, B_t - B_s) = t - s - s + s = t - s,$$

por lo que los incrementos son estacionarios. □

Ahora llevaremos a cabo la construcción de Lévy-Ciesielski de un proceso que en efecto satisface la Definición 14 (ver [SP14, Cap. 3] y [Ste01]).

En lo que sigue enunciaremos algunas definiciones y resultados que serán necesarios para los propósitos de esta sección. Para mayores detalles el lector interesado puede consultar [Roy88, Cap. 3], [Bre11].

Consideremos el espacio de Hilbert $L^2[0, 1]$ junto con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{[0,1]} fg d\mu,$$

donde μ denota a la medida de Lebesgue.

Definición 18. Un conjunto $\{\phi_i\}_{i \geq 1} \subset L^2[0, 1]$ es una base ortonormal si y solo si

i) Se satisface que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{i=1}^n \langle f, \phi_i \rangle \phi_i \right\| = 0, \quad \forall f \in L^2[0, 1].$$

ii) Se cumple la identidad de Parseval

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, \phi_i \rangle^2 = \|f\|^2 \quad \forall f \in L^2[0, 1].$$

Si $\{\phi_i\}_{i \geq 1}$ es una base ortonormal otra identidad importante que se desprende de las anteriores es la siguiente

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \langle g, \phi_n \rangle \quad \forall f, g \in L^2[0, 1]. \quad (1.3)$$

A continuación estudiaremos una base de $L^2[0, 1]$ que nos permitirá construir un proceso que será un MB. Consideremos la función

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, 1/2) \\ -1 & \text{si } t \in [1/2, 1] \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (1.4)$$

La función H es llamada óndula madre³ por la siguiente razón, definimos para $k \geq 1$ y $0 \leq j < 2^{k-1}$ las funciones en $[0, 1]$:

$$h_{00}(t) = 1 \quad t \in [0, 1],$$

$$h_{kj}(t) = 2^{\frac{k-1}{2}} H(2^{k-1}t - j) \quad t \in [0, 1]. \quad (1.5)$$

Fijemos $k > 0$, entonces el soporte de la función h_{kj} es el intervalo $[\frac{j}{2^{k-1}}, \frac{j+1}{2^{k-1}}]$, por tanto las gráficas de las funciones $h_{k0}, h_{k1}, \dots, h_{k(2^{k-1}-1)}$ son escalones que se desplazan hacia la derecha, y tienen norma 1 en $L^2[0, 1]$. Notemos que si $i < j$ entonces los soportes de h_{ki} y h_{kj} se intersectan a lo más en un punto, y por otro lado el soporte de la función h_{in} será disjunto o estará contenido en el soporte de la función h_{jm} para $i > j$. Estos hechos garantizan que para cualesquiera dos funciones distintas h_{in} y h_{jm} se tenga

$$\int_{[0,1]} h_{in} h_{jm} dt = 0.$$

Consideremos ahora la colección de intervalos diádicos $\{[k/2^j, l/2^j] : k, l \in \mathbb{Z}, k < l, j \geq 0\}$. Vamos a mostrar que las combinaciones lineales de los elementos de la base de Haar son densas en el conjunto de las funciones indicadoras de los intervalos diádicos contenidos en $[0, 1]$. Para tal efecto sea $f(x) = I_{[n/2^l, (n+1)/2^l]}$ con $0 \leq n < 2^l$. Notemos que el intervalo $[n/2^l, (n+1)/2^l]$ está contenido en algún intervalo de la forma $[m/2^i, (m+1)/2^i]$ o de la forma $[(m+1)/2^i, (m+2)/2^i]$ para todo $i < l$. Esto implica que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2^k-1} \left(\int_{[0,1]} f h_{kj} dt \right)^2 &= \left(\frac{2^{\frac{k-1}{2}}}{2^l} \right)^2 \\ &= \frac{2^{k-1}}{2^{2l}}, \quad 1 \leq k \leq l. \end{aligned}$$

³El desarrollo de las óndulas entronca con varias áreas de las matemáticas. Estas han sido ampliamente usadas a partir del trabajo seminal de Alfred Haar ([Haa11], [Haa10]) a principios del siglo XX. En dicho trabajo propuso la primer ondícula conocida y en su honor es llamada wavelet de Haar.

Fuera de los parámetros anteriores tendremos que

$$\int_{[0,1]} f h_{00} dt = \frac{1}{2^l},$$

$$\int_{[0,1]} f h_{kj} dt = 0, \quad k \geq l + 1.$$

Por lo que se sigue

$$\begin{aligned} \sum_{k,j} \left(\int_{[0,1]} f h_{kj} dt \right)^2 &= \frac{1}{2^{2l}} + \frac{2^l - 1}{2^{2l}} \\ &= \frac{1}{2^l} = \int_{[0,1]} f^2 dt. \end{aligned}$$

O equivalentemente

$$\|f\|^2 = \sum_{k,j} \langle f, h_{kj} \rangle^2,$$

de donde:

$$\|f - \sum_{k,j} \langle f, h_{kj} \rangle h_{kj}\| = 0.$$

Notemos ahora que si hubiésemos tomado el intervalo con un extremo abierto, la función indicadora seguiría siendo generada por las funciones de Haar. Como cualquier intervalo diádico $[k/2^j, l/2^j]$ puede escribirse como unión disjunta de intervalos de longitud $1/2^j$, algunos con un extremo abierto, la función indicadora de cualquier intervalo diádico puede escribirse como la suma de funciones indicadoras similares a f , se sigue entonces que las indicadoras de los intervalos diádicos son generadas por las funciones de Haar. De hecho, las indicadoras de intervalos diádicos son combinaciones lineales finitas de las funciones de Haar, pues como vemos más arriba la funciones similares a f así lo son. Por tanto, si $g \in L^2[0, 1]$ es ortogonal a cada función de Haar tendremos en principio que $G(t) = \int_{[0,1]} g I_{[0,t]} d\mu$ es una función diferenciable y por tanto continua (ver [Roy88, Cap. 5]), más aún si $c_{kj} = \langle I_{[0, \frac{m}{2^n}], h_{kj} \rangle$ se sigue

$$\begin{aligned} G\left(\frac{m}{2^n}\right) &= \int_{[0,1]} g I_{[0, \frac{m}{2^n}]} d\mu = \int_{[0,1]} g \sum_{k,j} c_{kj} h_{kj} d\mu \\ &= \sum_{k,j} c_{kj} \int_{[0,1]} g h_{kj} d\mu = 0 \quad \forall 0 \leq m \leq 2^n. \end{aligned}$$

Como los puntos de la forma $\frac{m}{2^n}$ son densos en $[0, 1]$, por continuidad $G(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1]$, y derivando obtenemos que $g(t) = 0$ casi en todas partes en $[0, 1]$. Resumiendo:

Proposición 19. *El conjunto de las funciones de Haar $\{h_{kj}\}_{k,j}$, definidas en (1.5), es una base ortonormal de $L^2[0, 1]$.*

Definamos ahora las siguientes funciones

$$\Delta(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } t \in [0, 1/2) \\ 2(1-t) & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Es fácil verificar que Δ es dos veces la integral de la función H definida en (1.4), si ahora trasladamos ésta función reescalando su dominio definiremos también para $k \geq 1$ y $0 \leq j < 2^{k-1}$

$$\Delta_{00}(t) = t \quad t \in [0, 1],$$

$$\Delta_{kj}(t) = \Delta(2^{k-1}t - j) \quad t \in [0, 1]. \quad (1.6)$$

Puede verificarse directamente que la integral de h_{kj} es Δ_{kj} multiplicada por la constante $\lambda_{kj} = 1/2^{(k+1)/2}$, por tanto se sigue que

$$\int_0^t h_{00} d\mu = \Delta_{00}(t),$$

$$\int_0^t h_{kj} d\mu = \lambda_{kj} \Delta_{kj}(t).$$

Notemos finalmente que para k fijo los soportes de las funciones $\{\Delta_{kj}\}_{j=0}^{2^{k-1}-1}$ son la colección de intervalos $\{[j/2^{k-1}, (j+1)/2^{k-1}]\}_{j=0}^{2^{k-1}-1}$.

En las siguientes proposiciones supondremos que las v.a. $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ i.i.d. con las que trabajaremos, estarán definidas en un mismo espacio de probabilidad.

Lema 20. *Sea $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución normal estándar, entonces existe una variable aleatoria C tal que*

$$|Z_n| \leq C\sqrt{\log n} \quad \forall n \geq 2,$$

$$P(C < \infty) = 1.$$

Demostración. Si $x \geq 1$, la siguiente cota es válida

$$\begin{aligned} P(|Z_n| \geq x) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2/2} du \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty u e^{-u^2/2} du = e^{-x^2/2} \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$

Sea $\alpha > 1$. Entonces para cualquier $n \geq 2$ se satisface lo siguiente

$$\alpha > 1 > \frac{1}{2 \log n},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P} \left(|Z_n| \geq \sqrt{2\alpha \log n} \right) &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=2}^{\infty} \exp(-\alpha \log n) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty. \end{aligned}$$

Por el teorema Borell-Cantelli [AL06, Cap. 7] si $A_n = \{|Z_n| \geq \sqrt{2\alpha \log n}\}$, entonces

$$\mathbb{P} \left(\sum_{n=2}^{\infty} I_{A_n} < \infty \right) = 1,$$

lo que significa que, con probabilidad 1, sólo una cantidad finita de los eventos A_n se cumplen simultáneamente, por tanto si definimos

$$C = \sup_{2 \leq n \leq \infty} \frac{|Z_n|}{\sqrt{\log(n)}},$$

para casi todo $\omega \in \Omega$ existe un subconjunto finito $J(\omega) \subseteq \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{|Z_n|}{\sqrt{\log n}} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus J(\omega),$$

y como las variables que no cumplen esta cota son una cantidad finita, el máximo de ellas existe y es finito, por tanto $\mathbb{P}(C < \infty) = 1$. \square

Proposición 21. Sea $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de v.a. independientes con distribución normal estándar. La serie $W_t = \sum_{k,j} Z_{f(k,j)} \int_0^t h_{kj} d\mu$, donde $f(k,j) = 2^{k-1} + j$ para $k \geq 1$, $2^{k-1} > j \geq 0$ y $f(0,0) = 0$, es absoluta y uniformemente convergente en $[0,1]$ con probabilidad 1.

Demostración. Sea $N \in \mathbb{N}$ fijo, aplicando el Lema 20 obtenemos:

$$\sum_{k=N}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^{k-1}-1} \lambda_{kj} |Z_{2^{k-1}+j}| \Delta_{kj}(t) \leq \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^{k-1}-1} C \lambda_{kj} \sqrt{\log(2^{k-1} + j)} \Delta_{kj}(t)$$

como $N = 2^{k-1} + j$ implica $\log N < k$, se sigue

$$\leq C \frac{1}{2^{1/2}} \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^{k-1}-1} 2^{-k/2} \sqrt{k} \Delta_{kj}(t),$$

como $\Delta_{kj}(t) = 0$ excepto tal vez para un j y $|\Delta_{kj}| \leq 1$

$$\leq C \frac{1}{2^{1/2}} \sum_{k=N}^{\infty} 2^{-k/2} \sqrt{k}.$$

Por otro lado, la suma por la que hemos acotado converge a 0 cuando $N \rightarrow \infty$ y no depende de t , esto muestra que la serie es absoluta y uniformemente convergente casi seguramente, como además las sumas parciales son continuas ya que cada Δ_{kj} es continua, entonces el límite W_t debe tener trayectorias continuas casi seguramente. \square

Proposición 22. *La serie $W_t = \sum_{k,j} Z_{f(k,j)} \int_0^t h_{kj} d\mu$ define un movimiento browniano en el intervalo $[0,1]$, con f definida como en la Proposición 21.*

Demostración. Notemos que para $s < t$, un incremento tiene la forma:

$$W_t - W_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} Z_n \int_s^t \phi_n d\mu.$$

Con ello, si calculamos la función característica del vector $(W_t - W_s, W_v - W_u)$ para $0 \leq s \leq t \leq u \leq v$, obtendremos información muy importante.

Sea $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, tenemos:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\exp \{i\theta_1(W_t - W_s) + i\theta_2(W_v - W_u)\}) \\ &= \mathbb{E} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left\{ i \sum_{n=0}^{N-1} (\theta_1 \int_s^t \phi_n d\mu + \theta_2 \int_u^v \phi_n d\mu) Z_n \right\} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} \mathbb{E} \left(\exp \left\{ i(\theta_1 \int_s^t \phi_n d\mu + \theta_2 \int_u^v \phi_n d\mu) Z_n \right\} \right). \end{aligned}$$

cada factor es una función característica, acorde a la ecuación (1.2) se sigue

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\exp \{i\theta_1(W_t - W_s) + i\theta_2(W_v - W_u)\}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{N-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} |\theta_1 \int_s^t \phi_n d\mu + \theta_2 \int_u^v \phi_n d\mu|^2 \right\}, \end{aligned}$$

expandiendo y separando el binomio

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\exp \{i\theta_1(W_t - W_s) + i\theta_2(W_v - W_u)\}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\theta_1^2 \int_s^t \phi_n d\mu^2 + \theta_2^2 \int_u^v \phi_n d\mu^2 \right) \right\} \\ & \quad \times \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left\{ -\sum_{n=0}^{N-1} \theta_1 \theta_2 \int_s^t \phi_n d\mu \int_u^v \phi_n d\mu \right\}. \end{aligned}$$

Notemos ahora que por la identidad (1.3)

$$0 = \langle 1_{[s,t]}, 1_{[u,v]} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int_s^t \phi_n d\mu \int_u^v \phi_n d\mu,$$

entonces

$$\exp \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} - \sum_{n=0}^{N-1} \theta_1 \theta_2 \int_s^t \phi_n d\mu \int_u^v \phi_n d\mu \right\} = 1.$$

Así, la función característica toma la forma

$$\varphi(\theta_1, \theta_2) = \exp \left(-\frac{1}{2} \theta_1^2 (t - s) \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \theta_2^2 (v - u) \right),$$

por tanto, es el producto de las funciones características correspondientes a distribuciones normales, sabemos entonces que los incrementos son independientes y tienen distribución gaussiana, en particular

$$E(W_t - W_s) = 0 \quad y \quad \text{Var}(W_t - W_s) = t - s,$$

haciendo $s = 0$ tenemos que $E(W_t) = 0$ y $\text{Var}(W_t) = t$. El cálculo de la función característica del vector $(W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$ para $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ es totalmente similar y en específico revela que sus componentes son independientes. En consecuencia, el proceso $\{W_t\}_{t \in [0,1]}$ cumple las propiedades de la definición 14. \square

La siguiente proposición nos brinda, finalmente, la definición del MB con espacio parametral el conjunto $[0, +\infty)$. Antes recordemos que si $\{(\Omega_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, P_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ es una sucesión de espacios de probabilidad, es posible definir una medida P en alguna σ -álgebra adecuada del producto cartesiano $\prod_{\alpha \in A} \Omega_\alpha$, tal que

$$P(B) = \prod_{\alpha \in A} P_\alpha(B_\alpha),$$

con $B = \prod_{\alpha \in A} B_\alpha$ y cada $B_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha$ (ver [Roy88, Cap. 12]). Esto permite construir colecciones de variables aleatorias independientes y más generalmente procesos estocásticos independientes. Por ejemplo, si (Ω, \mathcal{F}, P) es el espacio donde está definido $\{W_t\}_{t \in [0,1]}$ y tomamos $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n) = (\Omega, \mathcal{F}, P)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, definiendo la proyección $\pi_j(\omega_1, \omega_2, \dots) = \omega_j$ tendremos que el proceso definido en $\prod_{n \geq 1} \Omega$ mediante

$$W_t^j(\omega) = W_t(\pi_j(\omega)), \quad \forall \omega \in \prod_{n \geq 1} \Omega,$$

es un MB, y $(\{W_t^n\}_{t \in [0,1]})_{n \geq 1}$ será una colección de MB independientes definidos en un mismo espacio de probabilidad.

Proposición 23. Sea una sucesión $(\{W_t^k\}_{t \in [0,1]})_{k \geq 1}$ de movimientos brownianos independientes definidos en un mismo espacio de probabilidad, definimos para cada $t \in [n, n+1]$ y cada $n \in \mathbb{N}_0$

$$B_t = \sum_{k=0}^{n-1} W_1^k + W_{t-n}^n,$$

entonces el proceso estocástico $\{B_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento browniano.

Demostración. Para garantizar que $\{B_t\}_{t \geq 0}$ tiene trayectorias continuas es necesario que cada $\{W_t^k\}_{t \in [0,1]}$ tenga trayectorias continuas, lo cual es cierto con probabilidad 1. Por otro lado, una intersección numerable de conjuntos de probabilidad 1 tiene probabilidad 1, por lo tanto $\{B_t\}$ tiene trayectorias continuas casi seguramente. Sólo queda mostrar la Propiedad 2 de la Definición 14. Sean $0 \leq s \leq t$ y supongamos que $s \in [m, m+1]$ y $t \in [n, n+1]$ con $m < n$, entonces:

$$\begin{aligned} B_t - B_s &= \sum_{k=0}^{n-1} W_1^k + W_{t-n}^n - \sum_{k=0}^{m-1} W_1^k - W_{s-m}^m \\ &= (W_1^m - W_{s-m}^m) + \sum_{k=m+1}^{n-1} W_1^k + W_{t-n}^n, \end{aligned}$$

por tanto, como los sumandos son independientes y cada uno tiene distribución normal, $B_t - B_s$ es normal, además:

$$\text{Var}(B_t - B_s) = 1 - s + m + (n - 1 - m) + t - n = t - s,$$

por lo que los incrementos son estacionarios (esta afirmación se cumple directamente si $m = n$ por ser W^n un MB). Sea $u > t$, si $u < n+1$ entonces $B_u - B_t = W_u^n - W_t^n$ es independiente de W_t^n y por ende de $B_t - B_s$; luego si $u \in [l, l+1]$ con $l > n$, entonces

$$\begin{aligned} B_u - B_t &= \sum_{k=0}^{l-1} W_1^k + W_{u-l}^l - \sum_{k=0}^{n-1} W_1^k - W_{t-n}^n \\ &= (W_1^n - W_{t-n}^n) + \sum_{k=n+1}^{l-1} W_1^k + W_{u-l}^l. \end{aligned}$$

Sabemos que los sumandos son independientes entre sí, por inspección podemos verificar que son independientes de $B_t - B_s$, por tanto ambos incrementos son independientes. Un razonamiento similar muestra que, en general, el proceso tiene incrementos independientes. \square

1.2.2. Propiedades del movimiento browniano estándar

En esta sección vamos a desarrollar propiedades muy importantes concernientes a las trayectorias del movimiento browniano, estos resultados nos ayudarán a calcular las probabilidades de cruce del puente browniano. El lector puede consultar [SP14] para más detalles.

Proposición 24. Si $\{B_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento browniano y definimos $W_t = -B_t$, $\forall t \geq 0$, entonces el proceso $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es también un MB.

Demostración. Las Propiedades 1 y 3 de la Definición 14 se siguen inmediatamente. Ahora, si $\varphi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ es la función característica del vector $(W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$, tenemos que $\varphi(-\theta_1, -\theta_2, \dots, -\theta_n)$ es la función característica de $(B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$, usando la ecuación (1.2) se sigue entonces que los incrementos son variables gaussianas i.i.d. Finalmente,

$$E(W_t) = E(-B_t) = 0 \quad \text{y} \quad \text{Var}(W_t) = \text{Var}(-B_t) = t.$$

□

La siguiente proposición muestra que si siguiéramos detenidamente una trayectoria del MB hasta algún tiempo t_0 , y trasladáremos paralelamente los ejes coordenados hasta (t_0, B_{t_0}) , la trayectoria a partir de entonces tiene la misma distribución que un MB estándar.

Proposición 25. Sea $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un MB y $a > 0$. Si $W_t = B_{t+a} - B_a$, entonces el proceso $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un MB.

Demostración. Una vez más las Propiedades 1 y 3 de la Definición 14 se siguen inmediatamente. Ahora sean $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, tenemos

$$(W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}) = (B_{t_2+a} - B_{t_1+a}, \dots, B_{t_n+a} - B_{t_{n-1}+a}).$$

Sabemos que el vector del lado derecho es gaussiano y tiene componentes independientes, por tanto podemos afirmar lo mismo para el vector del lado izquierdo, entonces los incrementos del proceso $\{W_t\}_{t \geq 0}$ son independientes.

Como

$$\text{Var}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) = \text{Var}(B_{t_{i+1}+a} - B_{t_i+a}) = t_{i+1} - t_i,$$

los incrementos son estacionarios y cumplen la Propiedad 2 de la Definición 14. □

La siguiente proposición establece la característica conocida como **Propiedad de Markov**, la cual sirve para identificar el MB con una cadena de Markov y una martingala (ver Sección 1). El lector debe observar que esta misma proposición implica que el MB es invariante bajo traslaciones, en similitud con la caminata aleatoria (ver Ejemplo 3).

Proposición 26. Si $\{B_t\}_{t \geq 0}$ es un MB, los procesos $\{B_{t+a} - B_a\}_{t \geq 0}$ y $\{B_t\}_{t \in [0, a]}$ son independientes para cualquier $a > 0$. Además, el MB cumple la propiedad de Markov: si $t > a \geq 0$ entonces

$$P(B_t \in A | B_s \text{ para todo } s \in [0, a]) = P(B_t \in A | B_a),$$

para cualquier conjunto A en la σ -álgebra de Borel, es decir, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Demostración. Sea $a \geq 0$. Toda variable de la forma $B_{t+a} - B_a$ con $t \geq 0$ constituye un incremento del movimiento browniano y es por tanto independiente de cada B_t para $t \in [0, a]$, de aquí se sigue que los procesos son independientes.

Para mostrar la propiedad de Markov sea $t > 0$. Notemos que si B_a está condicionada en $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $B_t \in A$ si y sólo si $B_t - B_a \in A'$ para $A' = \{y : y = z - x, z \in A\}$, entonces

$$\begin{aligned} P(B_t \in A | B_s \text{ para todo } s \in [0, a]) &= P(B_t - B_a \in A' | B_s \text{ para todo } s \in [0, a]) \\ &= P(B_t - B_a \in A' | B_a) \\ &= P(B_t \in A | B_a). \end{aligned}$$

□

Proposición 27. Sea $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un MB, para $c > 0$ definimos

$$W_t = \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}.$$

Entonces el proceso $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un MB.

Demostración. Notemos que $B_{ct} \sim N(0, ct)$, por tanto $\frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct} \sim N(0, t)$. Ahora, si $s \leq t$ entonces $\frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct} - \frac{1}{\sqrt{c}} B_{cs} \sim N(0, (t-s))$, por otra parte multiplicar los incrementos por una constante distinta de cero no afecta la independencia de los mismos. Como la continuidad de las trayectorias también permanece inalterada, entonces $\left\{ \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct} \right\}_{t \geq 0}$ es un MB. □

En vista de la proposición anterior si $\{B_t\}_{t \in [0,1]}$ es un MB, al definir para algún n a $W_t = \sqrt{n} B_{t/n}$, se tiene que $\{W_t\}$ es un MB definido en el intervalo $[0, n]$. Este hecho será explotado más adelante para generar trayectorias del MB en cualquier intervalo una vez que podamos hacerlo en $[0, 1]$.

Proposición 28. Sea $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un MB, definimos

$$W_t = \begin{cases} t B_{1/t}, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Entonces $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un movimiento browniano.

Demostración. Mostraremos que $\{W_t\}_{t \geq 0}$ cumple las hipótesis de la Proposición 17. Sean $0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, si denotamos por $\varphi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ a la función característica del vector $(B_{1/t_1}, B_{1/t_2}, \dots, B_{1/t_n})$, el cual sabemos que es gaussiano, entonces $\varphi_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \varphi(t_1 \theta_1, t_2 \theta_2, \dots, t_n \theta_n)$ es la función característica del vector $(t_1 B_{1/t_1}, t_2 B_{1/t_2}, \dots, t_n B_{1/t_n})$, por lo que es un vector gaussiano con la misma media y matriz de covarianza, por tanto $\text{Cov}(t_1 B_{1/t_1}, t_2 B_{1/t_2}) = \min(t_1, t_2)$. Es evidente que las trayectorias son continuas en $(0, \infty)$, sólo resta mostrar que $W_0 = 0$ casi seguramente. Notemos que en cualquier intervalo de

racionales $\{[t_1, t_2] \cap \mathbb{Q} : t_1, t_2 \in \mathbb{Q}, t_2 \geq t_1 \geq 0\}$ el proceso $\{W_t\}_{t \geq 0}$ y $\{B_t\}_{t \geq 0}$ tienen las mismas distribuciones finito dimensionales y tienen ambas trayectorias continuas, por tanto, estocásticamente tienen el mismo comportamiento, como la colección de tales intervalos en $[0, 1]$ es numerable, podemos afirmar que $\{W_t\}_{t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}}$ tiene la misma distribución que $\{B_t\}_{t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}}$, luego:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow 0^+, t \in \mathbb{Q}} B_t \quad \text{c.s.} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+, t \in \mathbb{Q}} W_t \quad \text{c.s.} \end{aligned}$$

Como los racionales son densos en \mathbb{R} y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ tiene trayectorias continuas en $(0, \infty)$, concluimos que:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} W_t = 0 \quad \text{c.s.}$$

Finalmente $W_0 = 0$, por tanto $\{W_t\}_{t \geq 0}$ tiene trayectorias continuas casi seguramente. \square

Introduciremos ahora una función muy importante (ver [Rin12] para más detalles). Supongamos que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y deseamos calcular $P(B_t \in A | B_s = x)$ con $x \in \mathbb{R}$, utilizando la independencia de los incrementos se sigue que si definimos $A' = \{y : y = z - x, z \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, entonces:

$$\begin{aligned} P(B_t \in A | B_s = x) &= P(B_t - B_s \in A' | B_s = x) \\ &= P(B_t - B_s \in A') = P(B_{t-s} \in A') \\ &= \int_{A'} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{y^2}{2(t-s)}\right) dy \\ &= \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right) dy. \end{aligned}$$

Definición 29. La **función de probabilidad de transición** del MB desde el estado x hacia el conjunto $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ en t unidades de tiempo, se define por

$$p(t, x, A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) dy.$$

Definición 30. La **función de densidad de transición** desde el estado x al estado y en t unidades de tiempo se define por

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right).$$

A partir de ahora, si $\{B_t\}_{t \geq 0}$ es un MB, la función de densidad de probabilidad del vector $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$ será denotada por f_{t_1, t_2, \dots, t_n} , con lo cual escribimos la siguiente proposición:

Proposición 31. Sean $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ entonces

$$f_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(t_1, 0, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \dots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n).$$

Demostración. Utilizando la independencia y estacionariedad de los incrementos se sigue

$$\begin{aligned} f_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_{t_1, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1}}(x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}) \\ &= f_{t_1}(x_1) f_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1) \cdots f_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1}) \\ &= p(t_1, 0, x_2) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

□

La siguiente proposición advierte que una trayectoria browniana no es para nada suave. La demostración fue consultada en [SP14] y fue elaborada por Dvoretzky, Erdős y Kakutani.

Proposición 32. *Sea $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un MB, entonces las trayectorias $t \rightarrow B_t(\omega)$ no son diferenciables en ninguna parte con probabilidad 1.*

Demostración. Sea $A(\omega) = \{t_0 \geq 0 : (t, B_t(\omega)) \text{ es diferenciable en } t_0\}$, entonces debemos mostrar que $\{\omega \in \Omega : \mu(A(\omega)) = 0\}$ es P-medible y además

$$P(\{\omega \in \Omega : \mu(A(\omega)) = 0\}) = 1,$$

donde está implícito que $A(\omega)$ será μ -medible casi seguramente.

Definamos para cada entero $n \geq 1$

$$A_n = \{\omega \in \Omega : (t, B_t) \text{ no es diferenciable en ninguna parte en } [0, n]\},$$

vamos a mostrar que $\Omega \setminus A_n \subseteq N_n$ para algún conjunto $N_n \in \mathcal{F}$ con $P(N_n) = 0$, como podemos suponer que el espacio de probabilidad donde está definido el browniano es completo (consultar [AL06, Teorema 1.4.1]), tendremos que $\Omega \setminus A_n \in \mathcal{F}$ y $P(A_n) = 1$ para todo n , luego por continuidad de P

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(\{\omega \in \Omega : \mu(A(\omega)) = 0\}).$$

Ahora, si B_t es diferenciable en $t_0 \in [0, n)$, debe existir una vecindad alrededor de t_0 tal que los cocientes

$$\frac{|B_t - B_{t_0}|}{|t - t_0|},$$

estén acotados. Por tanto, existen $\delta, L > 0$ tales que

$$|B_t - B_{t_0}| \leq L|t - t_0| \quad \text{siempre que } 0 < |t - t_0| < \delta.$$

Construyamos, para algún $k \in \mathbb{N}$, un conjunto de puntos $\{\frac{j}{k} : j = 1, 2, \dots, nk\}$, tales que j_0 sea el menor índice con

$$t_0 \leq \frac{j_0}{k} \quad \text{y} \quad \frac{j_0 + 3}{k} - t_0 < \delta.$$

En tal caso, para $i = j + 1, j + 2, j + 3$ tenemos

$$\begin{aligned} |B_{i/k} - B_{(i-1)/k}| &\leq |B_{i/k} - B_{t_0}| + |B_{t_0} - B_{(i-1)/k}| \\ &\leq L \left(\left| \frac{i}{k} - t_0 \right| + \left| \frac{i-1}{k} - t_0 \right| \right) \\ &\leq L \left(\frac{4}{k} + \frac{3}{k} \right) = \frac{7L}{k}. \end{aligned}$$

Una relación similar es posible para cualquier $m \geq k$. Por ello, si definimos

$$C_m^L = \bigcap_{k=m}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{kn} \bigcap_{i=j+1}^{j+3} \left\{ \omega \in \Omega : \left| B_{i/k} - B_{(i-1)/k} \right| \leq \frac{7L}{k} \right\},$$

debemos tener que

$$\Omega \setminus A_n \subseteq \bigcup_{L=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m^L.$$

Notemos sin embargo que si $k \geq m$

$$\begin{aligned} P(C_m^L) &\leq P \left(\bigcup_{j=1}^{kn} \bigcap_{i=j+1}^{j+3} \left\{ |B_{i/k} - B_{(i-1)/k}| \leq \frac{7L}{k} \right\} \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{kn} P \left(\bigcap_{i=j+1}^{j+3} \left\{ |B_{i/k} - B_{(i-1)/k}| \leq \frac{7L}{k} \right\} \right) \end{aligned}$$

por independencia,

$$P(C_m^L) \leq \sum_{j=1}^{kn} P \left(|B_{j/k} - B_{(j-1)/k}| \leq \frac{7L}{k} \right)^3$$

por estacionariedad,

$$P(C_m^L) \leq kn P \left(|B_{1/k}| \leq \frac{7L}{k} \right)^3.$$

Por otra parte, por reescalamiento, $B_{1/k} \sim k^{-1/2} B_1$, de donde:

$$\begin{aligned} P(|B_{1/k}| \leq \frac{7L}{k}) &= P(|B_1| \leq \frac{7L}{\sqrt{k}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-7L/\sqrt{k}}^{7L/\sqrt{k}} e^{-x^2/2} dx \\ &\leq \frac{14L}{\sqrt{2\pi k}}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$0 \leq P(C_m^L) \leq kn \left(\frac{14L}{\sqrt{2\pi k}} \right)^3 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Como una unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero, $\Omega \setminus A_n$ es medible y

$$P(\Omega \setminus A_n) = 0.$$

□

Definición 33. Sea f es una función definida en un intervalo $[a, b]$. La variación total de f sobre $[a, b]$, está definida por

$$T(f, [a, b]) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| : \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \text{ es partición de } [a, b] \right\}.$$

Nota 34. También se dice que f es de variación acotada en $[a, b]$ si $T(f, [a, b]) < \infty$. Se puede demostrar que si una función es de variación acotada entonces es diferenciable casi en todas partes en el intervalo $[a, b]$ (ver [Roy88, Cap. 4]).

A partir de la definición anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 35. *Las trayectorias del movimiento browniano tienen variación total infinita en cualquier intervalo $[a, b]$ con probabilidad 1.*

La siguiente Proposición será de utilidad en la siguiente sección.

Proposición 36. *Si $m \neq 0$ se tiene que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{mt} = 0,$$

con probabilidad 1.

Demostración. Por la propiedad de inversión establecida en la Proposición 28 tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{mt} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{tB_{1/t}}{mt} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_{1/t}}{m} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{m} = 0. \end{aligned}$$

□

La Figura 1.1 muestra una posible trayectoria del movimiento browniano.

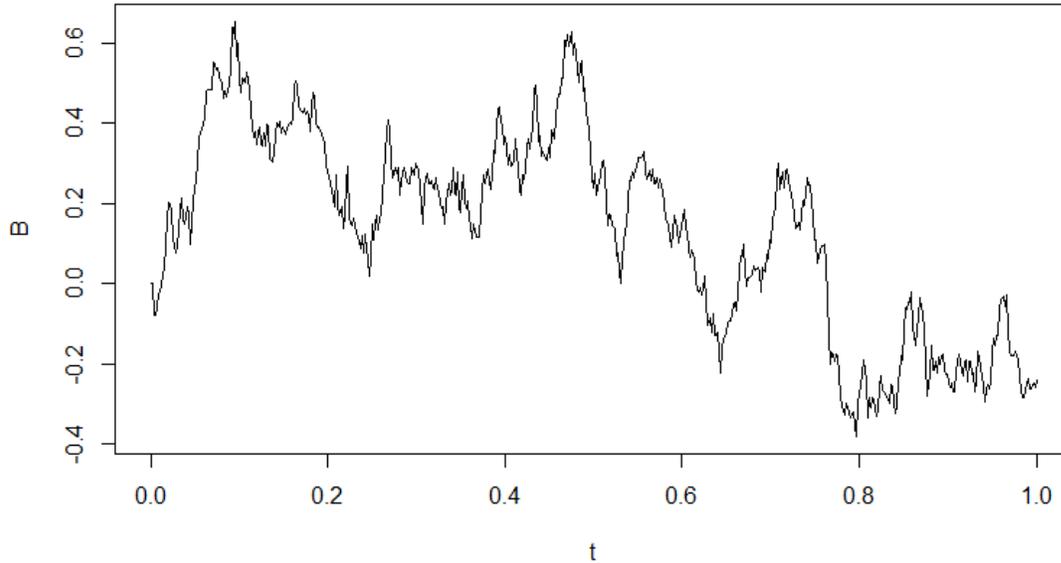


Figura 1.1: Simulación del movimiento browniano en $[0, 1]$.

1.2.3. Movimiento browniano con deriva

En esta y la siguiente sección hablaremos de dos importantes procesos estocásticos relacionados con el MB.

Definición 37. Sea $\{B_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento browniano estándar y μ un número cualquiera. El proceso $\{D_t\}_{t \geq 0}$ definido por

$$D_t = B_t + \mu t, \quad \forall t \geq 0,$$

es conocido como **movimiento browniano con deriva**.

Este proceso es uno de los más útiles en probabilidad debido a sus aplicaciones (ver por ejemplo [Sch01], [DPY05]). Es de destacarse que el proceso es gaussiano. En efecto, si $0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$ el vector

$$(B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}),$$

tiene distribución gaussiana y por tanto

$$\begin{aligned} & (D_{t_2} - D_{t_1}, D_{t_3} - D_{t_2}, \dots, D_{t_n} - D_{t_{n-1}}) \\ &= (B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) + \mu(t_2 - t_1, t_3 - t_2, \dots, t_n - t_{n-1}), \end{aligned}$$

es gaussiano con media $\mu(t_2 - t_1, t_3 - t_2, \dots, t_n - t_{n-1})$, por ello su función característica tiene la forma

$$\varphi(\theta) = \exp \left\{ i\mu\theta^T V - \frac{1}{2}\theta^T \Sigma \theta \right\}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^n,$$

donde $V = (t_2 - t_1, t_3 - t_2, \dots, t_n - t_{n-1})$.

Por otro lado, como la matriz Σ es la matriz de covarianza del vector $(B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ se sigue que $\{D_t\}_{t \geq 0}$ tiene incrementos independientes y estacionarios. Finalmente, su función de covarianza está dada por $\text{Cov}(D_s, D_t) = \min(s, t)$.

En general, un movimiento browniano con deriva o deslizamiento (drift en inglés) será cualquier proceso gaussiano con las mismas distribuciones finito dimensionales y trayectorias continuas anteriormente expuestas.

Este proceso nace naturalmente en el siguiente problema (cuya solución ha sido consultada en [Ros96]). Sea una recta $y = mt + b$ con coeficientes positivos, entonces podemos tratar de calcular la probabilidad de que el movimiento browniano eventualmente llegue a estar por encima de la recta y (vea Figura 1.2), es decir, calcular la probabilidad

$$P(B_t \geq mt + b, \text{ para algún } t > 0).$$

Resulta natural notar la aparición del drift con $\mu = -m$ y reescribir la probabilidad anterior como $P(B_t + \mu t \geq b, \text{ para algún } t > 0)$.

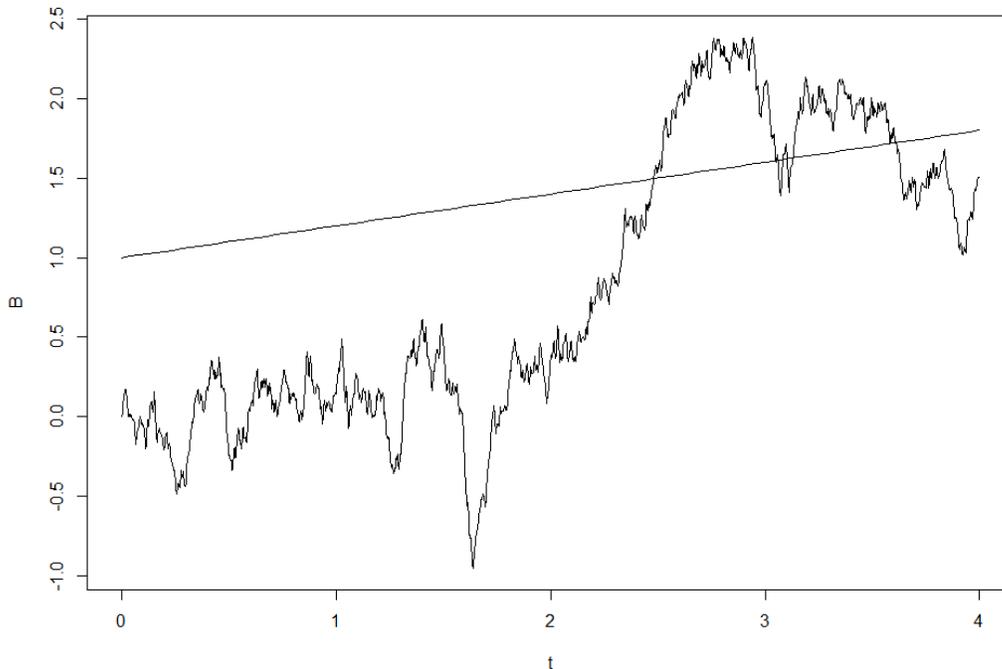


Figura 1.2: Gráfica de $y = 0.2x + 1$ junto con una trayectoria del MB en $[0, 4]$.

Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 38. Sean $A, C > 0$ y definamos $\tau = \inf\{ t > 0 \mid D_t = A \text{ ó } D_t = -C \}$, entonces

$$P(\tau < \infty) = 1.$$

Demostración. Supongamos que $P(\tau = \infty) > 0$, entonces podría suceder que

$$-C \leq B_t + \mu t \leq A, \quad \forall t \geq 0,$$

o equivalentemente

$$-\frac{C}{t} \leq \frac{B_t}{t} + \mu \leq \frac{A}{t}, \quad \forall t > 0.$$

Tendiendo $t \rightarrow \infty$ y usando la Proposición 36 se tiene que $0 \leq \mu \leq 0$, lo cual es una contradicción, por tanto $P(\tau < \infty) = 1$. \square

Gracias a la proposición anterior podemos definir la siguiente función para cualesquier $A, C > 0$:

$$f(x) = P(D_\tau = A \mid D_0 = x).$$

Nota 39. Como el MB tiene trayectorias continuas

$$P(B_t \geq mt + b, \text{ para algún } t > 0) = P(B_t = mt + b, \text{ para algún } t > 0).$$

Note que

$$\lim_{C \rightarrow +\infty} f(0) = P(W_t + \mu t = A, \text{ para algún } t > 0),$$

si $\mu = -m$ tendremos

$$\lim_{C \rightarrow +\infty} f(0) = P(W_t \geq mt + A, \text{ para algún } t > 0).$$

Por lo que nuestro trabajo se remite a calcular adecuadamente $f(x)$.

Para $h > 0$ es posible representar $f(x)$ como (ver [Ros96])

$$f(x) = E(P(x + Y)) + o(h),$$

en donde $Y = D_h - D_0$, y $\lim_{h \rightarrow 0+} o(h)/h = 0$.

Si suponemos que $f(x)$ tiene una expansión de Taylor al rededor de x :

$$\begin{aligned} E(f(x + Y)) &= E\left(f(x) + Y f'(x) + \frac{Y^2 f''(x)}{2!} + \frac{Y^3 f'''(x)}{3!} + \dots\right) \\ &= f(x) + f'(x)E(Y) + \frac{f''(x)}{2!}E(Y^2) + \frac{f'''(x)}{3!}E(Y^3) + \dots \end{aligned}$$

Recordemos que la función generadora de momentos de una v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ está dada por

$$\varphi(\theta) = \exp\{\mu\theta - \theta^2\sigma^2/2\},$$

de donde

$$\begin{aligned}\varphi'(\theta) &= (\mu - \theta\sigma^2)\varphi(\theta), \\ \varphi''(\theta) &= (\mu - \theta\sigma^2)\varphi'(\theta) - \sigma^2\varphi(\theta),\end{aligned}$$

e inductivamente

$$\varphi^{(n)}(\theta) = (\mu - \theta\sigma^2)\varphi^{(n-1)}(\theta) - \sigma^2(n-1)\varphi^{(n-2)}(\theta) \quad \forall n \geq 3.$$

Como en este caso $Y \sim N(\mu h, h)$, φ' y φ'' tienen a h como factor con potencia mayor o igual a 1. Por ello $\varphi^{(n)}$ tiene como factor a h^2 para todo $n \geq 3$, como $\varphi^{(n)}(0) = E(Y^n)$ esto nos permite truncar la serie de Taylor como sigue

$$f(x) = f(x) + f'(x)\mu h + f''(x)\frac{\mu^2 h^2 + h}{2} + o(h).$$

Dividiendo por h y tomando el límite cuando $h \rightarrow 0$ se tiene

$$\frac{f''(x)}{2} + f'(x)\mu = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $g = f'$, tenemos:

$$g'(x) + 2\mu g(x) = 0,$$

cuya solución es

$$g(x) = \tilde{C}e^{-2\mu x}.$$

Entonces:

$$f(x) = C_1 e^{-2\mu x} + C_2.$$

De las condiciones de frontera $f(A) = 1$ y $f(C) = 0$ obtenemos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}c_1 e^{-2\mu A} + c_2 &= 1 & c_1 e^{-2\mu C} + c_2 &= 0.\end{aligned}$$

Cuya solución es:

$$c_1 = \frac{-1}{e^{-2\mu C} - e^{-2\mu A}} \quad c_2 = \frac{e^{2\mu C}}{e^{-2\mu C} - e^{-2\mu A}}.$$

Así:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{e^{2\mu C} - e^{-2\mu x}}{e^{2\mu C} - e^{-2\mu A}}, \\ f(0) &= \frac{e^{2\mu C} - 1}{e^{2\mu C} - e^{-2\mu A}}, \\ \lim_{C \rightarrow +\infty} f(0) &= e^{2\mu A}.\end{aligned}$$

El desarrollo anterior nos permite probar el siguiente teorema, el cual es importante para obtener los resultados de este trabajo de tesis.

Teorema 40. Sean m, b números cualesquiera con $m \neq 0$, entonces

$$P\left(\bigcup_{t \geq 0} \{B_t \geq mt + b\}\right) = \begin{cases} e^{-2mb} & \text{si } 0 < m, b \\ 1 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Hemos probado ya el caso $m, b > 0$. En los casos en los que $b \leq 0$ es claro que la probabilidad es 1, pues $B_0 = 0$. Por ello sólo falta considerar el caso $b > 0$ y $m < 0$, por la Proposición 24:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{t \geq 0} \{B_t \geq mt + b\}\right) &= P\left(\bigcup_{t \geq 0} \{-B_t \geq mt + b\}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{t \geq 0} \{B_t \leq -mt - b\}\right) \\ &= 1 - \lim_{A \rightarrow +\infty} P(\{B_t + mt = A \text{ antes que } B_t + mt = -b\}) \\ &= 1 - \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{e^{2mb} - 1}{e^{2mb} - e^{-2mA}} = 1. \end{aligned}$$

□

Nota 41. Manipular los parámetros de la recta puede arrojar resultados interesantes.

Corolario 42. Las trayectorias del movimiento browniano toman todos los valores reales, es decir si $b \in \mathbb{R}$, entonces $P\left(\bigcup_{t \geq 0} \{B_t = b\}\right) = 1$.

Demostración. Sea $b \neq 0$, por la Proposición 24 sin pérdida de generalidad basta suponer $b > 0$. Notemos que

$$\bigcup_{t \geq 0} \{B_t \geq b\} = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{t \geq 0} \{B_t \geq \frac{-t}{n} + b\},$$

y que

$$\bigcup_{t \geq 0} \{B_t \geq \frac{-t}{n+1} + b\} \subseteq \bigcup_{t \geq 0} \{B_t \geq \frac{-t}{n} + b\} \quad \forall n \geq 1.$$

Luego, por la continuidad de la medida de probabilidad y por la Proposición 40

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{t \geq 0} \{B_t \geq b\}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{t \geq 0} \{B_t \geq \frac{-t}{n} + b\}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1. \end{aligned}$$

□

Una manera diferente de escribir el corolario anterior es definiendo la siguiente variable

$$\tau_b = \inf\{t > 0 : B_t = b\},$$

entonces podemos afirmar que $P(\tau_b < \infty) = 1$. La variable aleatoria τ_b pertenece a una clase de v.a. conocidas como tiempos de paro (vea por ejemplo [Dur19]). Se puede demostrar que $E(\tau_b) = +\infty$ (cf. [Ste01, Sección 5.5]). Por tal hecho, se dice que el MB es un proceso recurrente transitorio, es decir, a pesar de que tomará cualquier valor que nos propongamos, tal evento puede tardarse tanto tiempo en suceder como podamos imaginar. Otro hecho notable que no mostraremos formalmente, es que el MB es recurrente puntual, esto significa que además de visitar todos los estados, los visitará una infinidad de veces. En efecto, notemos que si τ_b es finito con probabilidad 1, podemos definir $\{B_{t+\tau_b} - B_{\tau_b}\}_{t \geq 0}$, el cual será también un movimiento browniano estándar⁴ y por tanto tomará el valor b con probabilidad 1, inductivamente el proceso tomará el valor infinitas veces.

1.3. Puente Browniano

En la construcción del movimiento browniano (vea Sección 1.2.1) introdujimos la colección de funciones $\{\Delta_{kj}\}_{kj}$ en la ecuación (1.6). Es fácil notar que $\Delta_{00}(1) = 1$ y que $\Delta_{kj}(1) = 0$ para todo $k > 0$, equivalentemente $\int_0^1 h_{00} d\mu = 1$, y $\int_0^1 h_{kj} d\mu = 0$ cuando $k \geq 1$, por tanto si definimos

$$U_t = \sum_{k \geq 1} \sum_{j=1}^{2^{k-1}-1} Z_{2^{k-1}+j} \int_0^t h_{kj} d\mu, \quad (1.7)$$

tenemos que el proceso está bien definido y tiene trayectorias continuas (al seguir siendo válida la Proposición 21) en $[0, 1]$, y además, por construcción, cumple que $U_0 = 0$ y $U_1 = 0$. Este importante proceso $\{U_t\}_{t \in [0,1]}$ es llamado **puente browniano** y permite modelar al MB condicionado en los extremos. Para ver esto notemos que $\sigma(\{\omega : B_1(\omega) = x\}) = \sigma(\{\omega : Z_0(\omega) = x\})$ (lo cual es cierto pues los conjuntos generadores son iguales) y por tanto las siguientes medidas son equivalentes (ver Apéndice 4):

$$P(\cdot | B_1 = x) = P(\cdot | Z_0 = x),$$

de hecho, particularmente, también se tiene que:

$$B_t(\omega) = U_t(\omega) \quad \forall t \in [0, 1], \quad \omega \in \sigma(\{\omega : Z_0(\omega) = 0\}).$$

Ahora, por construcción $\{U_t\}_{t \in [0,1]}$ es independiente de Z_0 y por tanto de $\sigma(\{\omega : Z_0(\omega) = x\})$, por ello si $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, se tiene esta importante igualdad:

$$P(B_t \in E \text{ para } t \in [0, 1] | B_1 = 0) = P(U_t \in E \text{ para } t \in [0, 1]). \quad (1.8)$$

⁴Esta propiedad se conoce como Propiedad Fuerte de Markov, el lector puede consultarla por ejemplo en [SP14, Sección 6.2].

En vista de la ecuación (1.7), ambos procesos tienen la misma distribución, utilizando las propiedades del MB podemos encontrar la distribución de U .

Proposición 43. *Sea $\{U_t\}_{t \in [0,1]}$ un puente browniano, entonces la distribución de U_t tiene la forma:*

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t(1-t)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t(1-t)}\right\} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Por definición tenemos

$$g(x) = \frac{f_{0,t,1}(0, x, 0)}{f_1(0)},$$

por la Proposición 31

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{p(t, 0, x)p(1-t, x, 0)}{f_1(0)} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-t)}} e^{-x^2/2(1-t)}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}} \\ &= \frac{e^{-x^2/2(1-t)t}}{\sqrt{2\pi t(1-t)}}. \end{aligned}$$

□

La siguiente proposición será de bastante utilidad para relacionar más fácilmente ambos procesos.

Proposición 44. *Si $\{B_t\}_{t \in [0,1]}$ es un MB, y $\{U_t\}_{t \in [0,1]}$ está definido como en la ecuación (1.7), entonces*

$$U_t = B_t - tB_1 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Demostración.

$$\begin{aligned} B_t &= \sum_{k,j} Z_{f(k,j)} \int_0^t h_{kj} d\mu \\ &= Z_0 \int_0^t h_{00} d\mu + \sum_{k \geq 1} \sum_{j=1}^{2^{k-1}-1} Z_{2^{k-1}+j} \int_0^t h_{kj} d\mu \\ &= tZ_0 \int_0^1 h_{00} d\mu + U_t \\ &= t \sum_{k,j} Z_{f(k,j)} \int_0^1 h_{kj} d\mu + U_t \\ &= tB_1 + U_t. \end{aligned}$$

Restando tB_1 se concluye el resultado.

□

Proposición 45. *El puente browniano $\{U_t\}_{t \in [0,1]}$ es un proceso gaussiano, con función de covarianza $\text{Cov}(U_s, U_t) = \min(s, t) - st$.*

Demostración. Sean $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < 1$. Entonces

$$\theta_1 B_{t_1} + \theta_2 B_{t_2} + \dots + \theta_n B_{t_n} + (-\theta_1 t_1 + \dots + -\theta_n t_n) B_1,$$

tiene distribución normal para cualquier $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ al ser $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n}, B_1)$ un vector gaussiano, esto implica que $(B_{t_1} - t_1 B_1, B_{t_2} - t_2 B_2, \dots, B_{t_n} - t_n B_n)$ también es gaussiano. Finalmente, por la Proposición 44, para $0 \leq s \leq t$ se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U_s, U_t) &= \text{Cov}(B_s - sB_1, B_t - tB_1) \\ &= s - st - st + st = s - st. \end{aligned}$$

□

La Proposición 27 nos permite crear un puente browniano más general. Supongamos que $B_1 = 1$, sea $c \in \mathbb{R}$, sabemos que $W_t = \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}$ es también un movimiento browniano, quien satiface además $W_{1/c} = 0$, por tanto es un proceso que se anula en los extremos del intervalo $[0, 1/c]$. Como antes, tenemos también una expresión simple para tal proceso:

$$\begin{aligned} W_t &= \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct} \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} \sum_{k,j} Z_{f(k,j)} \int_0^{ct} h_{kj} d\mu \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} Z_0 \int_0^{ct} h_{00} d\mu + \frac{1}{\sqrt{c}} \sum_{k \geq 1} \sum_{j=1}^{2^{k-1}-1} Z_{2^{k-1}+j} \int_0^{ct} h_{kj} d\mu \\ &= \sqrt{ct} Z_0 + \frac{1}{\sqrt{c}} U_{ct} = \sqrt{ct} B_1 + \frac{1}{\sqrt{c}} U_{ct} \\ &= ct W_{1/c} + \frac{1}{\sqrt{c}} U_{ct}. \end{aligned}$$

La demostración del siguiente resultado es similar a la de la Proposición 45.

Proposición 46. *Si B_t es un movimiento browniano, entonces para $c > 0$ el proceso definido por*

$$U_t = B_t - ct B_{1/c}, \quad t \in [0, 1/c],$$

es un proceso gaussiano con función de covarianza $\text{Cov}(U_s, U_t) = \min(s, t) - cst$, y tal que $U_0 = U_{1/c} = 0$.

Capítulo 2

Probabilidades de cruce

En este capítulo desarrollaremos los resultados principales de esta tesis, es decir, calcularemos probabilidades de cruce para el movimiento browniano y el puente browniano definido en la Sección 1.3. El Teorema 40 nos proporciona la probabilidad eventual de cruce del MB a una recta en el plano, y es el resultado angular para elaborar las pruebas de los resultados que aquí presentamos.

2.1. Probabilidades de cruce para el movimiento browniano

En lo que resta de esta capítulo usaremos la siguiente notación. Denotaremos por $\Phi(x)$ la distribución de probabilidad de una variable normal estándar, es decir, si $X \sim N(0, 1)$ entonces $P(X \leq x) = \Phi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Además, en cada resultado denotaremos por $\{W_t\}_{t \geq 0}$ al movimiento browniano estándar.

Comenzaremos probando una variante del Teorema 40.

Proposición 47. Sean $m, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$P\left(\bigcup_{1 \leq t} \{W_t \geq mt + b\}\right) = \begin{cases} e^{-2mb}\Phi(b - m) - \Phi(b + m) + 1 & \text{si } m > 0 \\ 1 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Buscaremos aprovechar las propiedades de los incrementos del MB (vea Propiedades 1 y 2 de la Definición 14) para modificar el resultado en el Teorema 40 al intervalo $[1, +\infty)$.

Sea f_1 la función de densidad gaussina. Entonces

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\bigcup_{1 \leq t} \{W_t \geq mt + b\} \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{1 \leq t} \{W_t \geq mt + b\} | W_1 = x \right) f_1(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{m+b} \mathbb{P} \left(\bigcup_{1 \leq t} \{W_t \geq mt + b\} | W_1 = x \right) f_1(x) dx + \int_{m+b}^{\infty} f_1(x) dx.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Notemos que el primer término del lado derecho de la igualdad (2.1) puede calcularse como sigue

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{m+b} \mathbb{P} \left(\bigcup_{1 \leq t} \{W_t \geq mt + b\} | W_1 = x \right) f_1(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{m+b} \mathbb{P} \left(\bigcup_{1 \leq t} \{W_t - W_1 \geq mt + b - x\} | W_1 = x \right) f_1(x) dx,
\end{aligned}$$

por independencia y estacionariedad se tiene

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{m+b} \mathbb{P} \left(\bigcup_{1 \leq t} \{W_t \geq mt + b\} | W_1 = x \right) f_1(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{m+b} \mathbb{P} \left(\bigcup_{1 \leq t} \{W_{t-1} \geq mt + b - x\} \right) f_1(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{m+b} \mathbb{P} \left(\bigcup_{0 \leq t-1} \{W_{t-1} \geq m(t-1) + (b+m-x)\} \right) f_1(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{m+b} \mathbb{P} \left(\bigcup_{0 \leq t} \{W_t \geq mt + (b+m-x)\} \right) f_1(x) dx.
\end{aligned}$$

Si $m \leq 0$, el Teorema 40 implica que

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{0 \leq t} \{W_t \geq mt + (b+m-x)\} \right) = 1,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{m+b} \mathbb{P} \left(\bigcup_{1 \leq t} \{W_t \geq mt + b\} \mid W_1 = x \right) f_1(x) dx \\ = \int_{-\infty}^{m+b} f_1(x) dx. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Reemplazando la igualdad (2.2) en la ecuación (2.1) y usando que f_1 es una función de densidad concluimos

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{1 \leq t} \{W_t \geq mt + b\} \right) = 1.$$

Si $m > 0$, por el Teorema 40 tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{m+b} \mathbb{P} \left(\bigcup_{0 \leq t} \{W_t \geq mt + (b + m - x)\} \right) f_1(x) dx \\ = \int_{-\infty}^{m+b} e^{-2m(b+m-x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\ = e^{-2mb} \int_{-\infty}^{m+b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2m)^2}{2}} dx \\ = e^{-2mb} \int_{-\infty}^{b-m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = e^{-2mb} \Phi(b - m), \end{aligned} \quad (2.3)$$

por lo tanto, substituyendo la expresión (2.3) en ecuación (2.1) obtenemos

$$P \left(\bigcup_{1 \leq t} \{W_t \geq mt + b\} \right) = e^{-2mb} \Phi(b - m) - \Phi(b + m) + 1.$$

□

Una inspección de la prueba de la Proposición 47, nos permite concluir que el intervalo $[1, +\infty)$ realmente no jugó un papel sustancial en los cálculos, y que bien pudo haber sido probado para el intervalo $[k, \infty)$ para $k > 0$. Por lo tanto tenemos el siguiente resultado.

Teorema 48. Sean $k > 0$ y $m, b \in \mathbb{R}$, entonces:

$$P \left(\bigcup_{k \leq t} \{W_t \geq mt + b\} \right) = \begin{cases} e^{-2mb} \Phi \left(\frac{b}{\sqrt{k}} - m\sqrt{k} \right) - \Phi \left(m\sqrt{k} + \frac{b}{\sqrt{k}} \right) + 1 & \text{si } m > 0 \\ 1 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Sea f_k la densidad normal con media cero y varianza k . Sabemos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\bigcup_{k \leq t} \{W_t \geq mt + b\} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{mk+b} \mathbb{P} \left(\bigcup_{k \leq t} \{W_t \geq mt + b\} | W_k = x \right) f_k(x) dx + \int_{mk+b}^{+\infty} 1 \cdot f_k(x) dx. \end{aligned}$$

Usando la independencia y estacionariedad de los incrementos del movimiento browniano obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bigcup_{k \leq t} \{W_t \geq mt + b\} | W_k = x \right) &= \mathbb{P} \left(\bigcup_{0 \leq t-k} \{W_{t-k} \geq m(t-k) + mk + b - x\} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\bigcup_{0 \leq t} \{W_t \geq mt + mk + b - x\} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Por lo tanto si $m > 0$ y $x < mk + b$, la igualdad (2.4) y el Teorema 40 implica que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{mk+b} \mathbb{P} \left(\bigcup_{k \leq t} \{W_t \geq mt + b\} | W_k = x \right) f_k(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{mk+b} e^{-2m(mk+b-x)} \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{-\frac{x^2}{2k}} dx \\ &= e^{-2mb} \Phi \left(\frac{b}{\sqrt{k}} - m\sqrt{k} \right). \end{aligned}$$

Además

$$\int_{mk+b}^{+\infty} f_k(x) dx = 1 - \Phi \left(m\sqrt{k} + \frac{b}{\sqrt{k}} \right),$$

con lo cual se concluye el resultado. \square

En aplicaciones podría surgir el interés por calcular la probabilidad eventual de cruce del MB en intervalos de tiempo finitos. En el siguiente teorema proporcionamos dicho resultado. La idea de la prueba es tomar ventaja de la propiedades de inversión y reescalamiento del tiempo (vea Proposiciones 28 y 27) y combinarlas con el resultado obtenido en la Proposición 47.

Teorema 49. Sean $m, b \in \mathbb{R}$ y $H > 0$, entonces

$$P \left(\bigcup_{0 \leq t \leq H} \{W_t \geq mt + b\} \right) = \begin{cases} e^{-2mb} \Phi \left(m\sqrt{H} - \frac{b}{\sqrt{H}} \right) - \Phi \left(m\sqrt{H} + \frac{b}{\sqrt{H}} \right) + 1 & \text{si } b > 0 \\ 1 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Si $b \leq 0$ el resultado es trivial pues $W_0 = 0$ con probabilidad 1. Ahora supongamos que $b > 0$ y observe que

$$P\left(\bigcup_{0 \leq t \leq H} \{W_t \geq mt + b\}\right) = P\left(\bigcup_{0 < t \leq H} \{W_t \geq mt + b\}\right). \quad (2.5)$$

La Proposición 28 nos dice que el proceso $\{tW_{1/t} : t > 0\}$ es un MB, por lo tanto

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{0 < t \leq H} \{W_t \geq mt + b\}\right) &= P\left(\bigcup_{0 < t \leq H} \{tW_{1/t} \geq mt + b\}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{\frac{1}{H} \leq \frac{1}{t}} \{W_{1/t} \geq m + b/t\}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{\frac{1}{H} \leq t} \{W_t \geq bt + m\}\right). \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema 48 obtenemos que

$$P\left(\bigcup_{0 < t \leq H} \{W_t \geq mt + b\}\right) = e^{-2mb} \Phi\left(m\sqrt{H} - \frac{b}{\sqrt{H}}\right) - \Phi\left(m\sqrt{H} + \frac{b}{\sqrt{H}}\right) + 1.$$

□

Si comparamos los Teoremas 48 y 49 llegamos a la siguiente conclusión: la probabilidad de que el MB esté por encima de una recta con coeficientes positivos en el intervalo $[0, H]$ puede ser igual a la probabilidad de que esto suceda en el intervalo $[H, +\infty)$. Esto es relevante y probablemente no destacado antes, por lo que enunciamos el siguiente resultado.

Corolario 50. La paradoja del browniano.

Sean H, m, b constantes mayores que cero tales que $mH = b$, entonces

$$P\left(\bigcup_{0 \leq t \leq H} \{W_t \geq mt + b\}\right) = P\left(\bigcup_{H \leq t} \{W_t \geq mt + b\}\right).$$

Demostración. Basta notar que la relación $mH = b$ implica que

$$m\sqrt{H} - \frac{b}{\sqrt{H}} = \frac{b}{\sqrt{H}} - m\sqrt{H},$$

por lo cual, según los Teoremas 49 y 48, las probabilidades son iguales. □

Nota 51. Notemos que

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} e^{-2mb} \Phi\left(\frac{b}{\sqrt{k}} - m\sqrt{k}\right) - \Phi\left(m\sqrt{k} + \frac{b}{\sqrt{k}}\right) + 1 = e^{-2mb}.$$

Por lo que si $k \rightarrow 0^+$ en el Teorema 48 recuperamos el resultado del Teorema 40.

2.2. Probabilidades de cruce para el Puente Browniano

Ahora estamos en posición de calcular probabilidades de cruce para el puente browniano. Los resultados de la Sección 1.2.2 junto con la igualdad (1.8) son clave para poder desarrollar los teoremas que a continuación se presentan.

Teorema 52. Sean $m, b, x \in \mathbb{R}$ y $H > 0$, entonces

$$P\left(\bigcup_{0 \leq t \leq H} \{W_t \geq mt + b\} | W_H = x\right) = \begin{cases} e^{-2(mb + \frac{b(b-x)}{H})} & \text{si } b > 0, x < mH + b \\ 1 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. Sea $b > 0$. Entonces por la propiedad de inversión de tiempo (vea Proposición 28) y la igualdad (2.5) tenemos que

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{0 \leq t \leq H} \{W_t \geq mt + b\} | W_H = x\right) &= P\left(\bigcup_{0 < t \leq H} \{tW_{1/t} \geq mt + b\} | HW_{1/H} = x\right) \\ &= P\left(\bigcup_{\frac{1}{H} \leq \frac{1}{t}} \{W_{1/t} \geq b/t + m\} | W_{1/H} = \frac{x}{H}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{\frac{1}{H} \leq t} \{W_t \geq bt + m\} | W_{1/H} = \frac{x}{H}\right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Usando la Proposición 27 en la última igualdad de (2.6) obtenemos

$$\begin{aligned} &P\left(\bigcup_{0 \leq t \leq H} \{W_t \geq mt + b\} | W_H = x\right) \\ &= P\left(\bigcup_{1 \leq tH} \left\{H^{-1/2}W_{tH} \geq b\frac{tH}{H} + m\right\} | H^{-1/2}W_1 = \frac{x}{H}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{1 \leq t} \left\{W_t \geq \frac{b}{\sqrt{H}}t + m\sqrt{H}\right\} | W_1 = \frac{x}{\sqrt{H}}\right). \end{aligned}$$

Por la independencia y la estacionariedad de los incrementos del MB se tiene que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\bigcup_{1 \leq t} \left\{ W_t \geq \frac{b}{\sqrt{H}} t + m\sqrt{H} \right\} \middle| W_1 = \frac{x}{\sqrt{H}} \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\bigcup_{1 \leq t} \left\{ W_t - W_1 \geq \frac{b}{\sqrt{H}} t + m\sqrt{H} - \frac{x}{\sqrt{H}} \right\} \middle| W_1 = \frac{x}{\sqrt{H}} \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\bigcup_{0 \leq t} \left\{ W_t \geq \frac{b}{\sqrt{H}} t + m\sqrt{H} + \frac{1}{\sqrt{H}}(b-x) \right\} \right).
\end{aligned}$$

Finalmente, como $x < mH + b$ el Teorema 40 implica que

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{0 \leq t} \left\{ W_t \geq \frac{b}{\sqrt{H}} t + m\sqrt{H} + \frac{1}{\sqrt{H}}(b-x) \right\} \right) = e^{-2(mb + \frac{b(b-x)}{H})},$$

por lo que la prueba queda concluida. □

Ahora nos preocupamos por la probabilidad de cruce del puente browniano en un intervalo más pequeño que el de su espacio parametral.

Teorema 53. Sean H y R tales que $0 < H < R$ y $x, b, m \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}
& P \left(\bigcup_{0 \leq t \leq H} \{W_t \geq mt + b\} \middle| W_R = x \right) \\
&= \begin{cases} e^{-2\frac{b}{R}(mR+b-x)} \Phi \left(\sqrt{\frac{H}{R(R-H)}}(mR+b-x) - b\sqrt{\frac{R-H}{RH}} \right) \\ -\Phi \left(\sqrt{\frac{H}{R(R-H)}}(mR+b-x) + b\sqrt{\frac{R-H}{RH}} \right) + 1 & \text{si } b > 0 \\ 1 & \text{otro caso.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Demostración. Argumentando como en las pruebas anteriores, es decir, usando las propiedades de reescalamiento, independencia y estacionariedad de las trayectorias del movimiento

browniano se obtiene

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\bigcup_{0 \leq t \leq H} \{W_t \geq mt + b\} \mid W_R = x \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\bigcup_{0 < t \leq H} \{tW_{1/t} \geq mt + b\} \mid RW_{1/R} = x \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\bigcup_{\frac{1}{H} \leq t} \{W_t \geq bt + m\} \mid W_{1/R} = \frac{x}{R} \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\bigcup_{1 \leq tH} \left\{ \frac{1}{\sqrt{H}} W_{tH} \geq \frac{b}{H} tH + m \right\} \mid \frac{1}{\sqrt{H}} W_{H/R} = \frac{x}{R} \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\bigcup_{1 \leq t} \left\{ W_t \geq \frac{b}{\sqrt{H}} t + m\sqrt{H} \right\} \mid W_{H/R} = \frac{x\sqrt{H}}{R} \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\bigcup_{1 \leq t} \left\{ W_{t-\frac{H}{R}} \geq \frac{b}{\sqrt{H}} t + m\sqrt{H} - \frac{x\sqrt{H}}{R} \right\} \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\bigcup_{1-\frac{H}{R} \leq t} \left\{ W_t \geq \frac{b}{\sqrt{H}} t + m\sqrt{H} + \frac{\sqrt{H}}{R} (b-x) \right\} \right). \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Finalmente aplicando el Teorema 48 a la probabilidad en (2.7) obtenemos el resultado. \square

La siguiente Proposición se trata de la probabilidad de cruce en el intervalo de tiempo $[0, H]$ para un MB que tiene como condición inicial $W_R = x$. El lector podrá percatarse de que, en la práctica, es suficiente el resultado del Teorema 52.

Proposición 54. Sean $0 < R < H$ y $m, b \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}
& P \left(\bigcup_{R \leq t \leq H} \{W_t \geq mt + b\} \mid W_R = x \right) \\
&= \begin{cases} e^{-2m(mR+b-x)} \Phi \left(\frac{m(H-2R)-b+x}{\sqrt{H-R}} \right) - \Phi \left(\frac{mH+b-x}{\sqrt{H-R}} \right) + 1 & \text{si } mR + b > x \\ 1 & \text{otro caso.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Demostración. Por la independencia y la estacionariedad de los incrementos del movimiento

browniano se tiene que

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{R \leq t \leq H} \{W_t \geq mt + b\} | W_R = x\right) &= P\left(\bigcup_{R \leq t \leq H} \{W_t - W_R \geq mt + b - x\} | W_R = x\right) \\ &= P\left(\bigcup_{0 \leq t \leq H-R} \{W_t \geq mt + mR + b - x\}\right). \end{aligned}$$

Finalmente la conclusión de la prueba se obtiene aplicando el Teorema 49. \square

Para finalizar este capítulo, se incluye la probabilidad de cruce para un proceso más complejo, se trata del movimiento browniano condicionado en algún punto dentro de un intervalo, podríamos pensar que se trata de un Puente al cual atamos un MB en un extremo.

Teorema 55. Sean $0 < R < H$ y $m, b, x \in \mathbb{R}$, entonces

$$P\left(\bigcup_{0 \leq t \leq H} \{W_t \geq mt + b\} | W_R = x\right) = \begin{cases} \left(1 - e^{-2\left(mb + \frac{b(b-x)}{R}\right)}\right) \left(e^{-2m(mR+b-x)} \Phi\left(\frac{m(H-2R)-b+x}{\sqrt{H-R}}\right) - \Phi\left(\frac{mH+b-x}{\sqrt{H-R}}\right) + 1\right) \\ + e^{-2\left(mb + \frac{b(b-x)}{R}\right)} & \text{si } b > 0 \text{ y } mR + b > x \\ 1 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Demostración. Observe que si $x \geq mR + b$ entonces la probabilidad es 1, por tanto suponemos $mR + b > x$, en tal caso el primer cruce del browniano a la recta en el intervalo $[0, H]$ condicionado en $W_R = x$, en caso de existir, debe suceder en el intervalo $[0, R)$ o en el intervalo $(R, H]$; como $W_R = x$ implica $\{W_R \geq mR + b\} = \emptyset$ podemos escribir la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} &\bigcup_{0 \leq t \leq H} \{W_t \geq mt + b\} \\ &= \left(\bigcup_{0 \leq t \leq R} \{W_t \geq mt + b\}\right) \cup \left(\bigcap_{0 \leq t \leq R} \{W_t < mt + b\} \cap \bigcup_{R \leq t \leq H} \{W_t \geq mt + b\}\right). \end{aligned}$$

Al ser disjuntos los conjuntos del lado derecho de la igualdad anterior obtenemos

$$\begin{aligned} &P\left(\bigcup_{0 \leq t \leq H} \{W_t \geq mt + b\} | W_R = x\right) \\ &= P\left(\bigcup_{0 \leq t \leq R} \{W_t \geq mt + b\} | W_R = x\right) \\ &+ P\left(\bigcap_{0 \leq t \leq R} \{W_t < mt + b\} \cap \bigcup_{R \leq t \leq H} \{W_t \geq mt + b\} | W_R = x\right). \end{aligned}$$

Manipulando el último sumando y aprovechando la independencia de los incrementos del MB se tiene que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\bigcap_{0 \leq t \leq R} \{W_t < mt + b\} \cap \bigcup_{R \leq t \leq H} \{W_t \geq mt + b\} \mid W_R = x \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\bigcap_{0 \leq t \leq R} \{W_t < mt + b\} \cap \bigcup_{R \leq t \leq H} \{W_t - W_R \geq mt + b - x\} \mid W_R = x \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\bigcap_{0 \leq t \leq R} \{W_t < mt + b\} \mid W_R = x \right) \mathbb{P} \left(\bigcup_{R \leq t \leq H} \{W_t - W_R \geq mt + b - x\} \mid W_R = x \right) \\
&= \left(1 - \mathbb{P} \left(\bigcup_{0 \leq t \leq R} \{W_t \geq mt + b\} \mid W_R = x \right) \right) \mathbb{P} \left(\bigcup_{R \leq t \leq H} \{W_t \geq mt + b\} \mid W_R = x \right).
\end{aligned}$$

Aplicando el Teorema 52 y la Proposición 54 se obtiene el resultado.

Finalmente, si $b \leq 0$ también se tendría

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{0 \leq t \leq R} \{W_t \geq mt + b\} \mid W_R = x \right) = 1,$$

de donde

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{0 \leq t \leq H} \{W_t \geq mt + b\} \mid W_R = x \right) = 1.$$

□

Capítulo 3

Simulaciones

Recordemos que acorde a la Proposición 22

$$B_t = \sum_{k \geq 0} \sum_{j=0}^{2^{k-1}-1} Z_{f(k,j)} \lambda_{kj} \Delta_{kj}(t),$$

representa un MB, y esta serie es bastante útil para implementar simulaciones del movimiento browniano, tomando sumas parciales de la misma, lo cual haremos en R. Para conocer las funciones de R el lector puede consultar [Zel15], o la documentación del software.

El siguiente código construye una función para calcular la constante λ_{kj} :

```
lambdakj = function(k)
{
  return(1/(2^{(k+1)/2}))
}
```

Por su parte la onda madre $\Delta(t)$ y sus hijas se implementan con las siguientes funciones:

```
delta = function(t)
{
  if (0 <= t && t < .5)
  {
    return(2*t)
  }
  else{
    if (.5 <= t && t <=1){
      return(2*(1-t))
    }
    else{
      return(0)
    }
  }
}
```

```

}
deltakj = function(k,j,t)
{
  if(j < 2^{k-1} && 0 <= t && t <= 1){
    return(delta(2^{k-1}*t-j))
  }
  else{
    return(NA)
  }
}
}

```

La función `rnorm()` de R, tiene por argumento un entero n y devuelve un vector con n muestras independientes de la distribución normal estándar. La función que calcula el valor del movimiento browniano en el tiempo t , tiene por argumento un vector de esta clase, cuyas entradas son las variables Z'_n s de la serie, y el valor de t :

```

browniano_t = function(z,t)
{
  n = length(z)-1
  k = 1
  B = z[1]*t
  while( 2^{k-1} <= n ){
    if (2^{k-1} < n){
      for (j in (0: (2^{k-1}-1) )){
        B = B + lambdakj(k) * deltakj(k,j,t) * z[(2^{k-1}+j+1)]
        if (2^{k-1}+j ==n){
          break
        }
      }
    }
  }
  else{
    if(2^{k-1} == n){
      B = B + lambdakj(k) * deltakj(k,0,t) * z[(2^{k-1}+1)]
    }
    else{
      print("error")
      return(NA)
    }
  }
  k = k+1
}
return(B)
}

```

El código siguiente pone en marcha las funciones anteriores para simular una trayectoria del MB en $[0, 1]$, con $n = 1000$ sumandos en la serie (recordemos que muchos de ellos se anulan por efecto de las Δ_{kj} para cada t), y toma una partición uniforme del intervalo $[0, 1]$ de $m = 500$ puntos, ver la Figura 3.1.

```
n = 1000
z = rnorm(n)
m = 500
t = (0:m)/m
B = t*0
for (i in (2:(m+1))) {
  B[i] = browniano_t(z,t[i])
}
plot(t,B, type = "l")
```

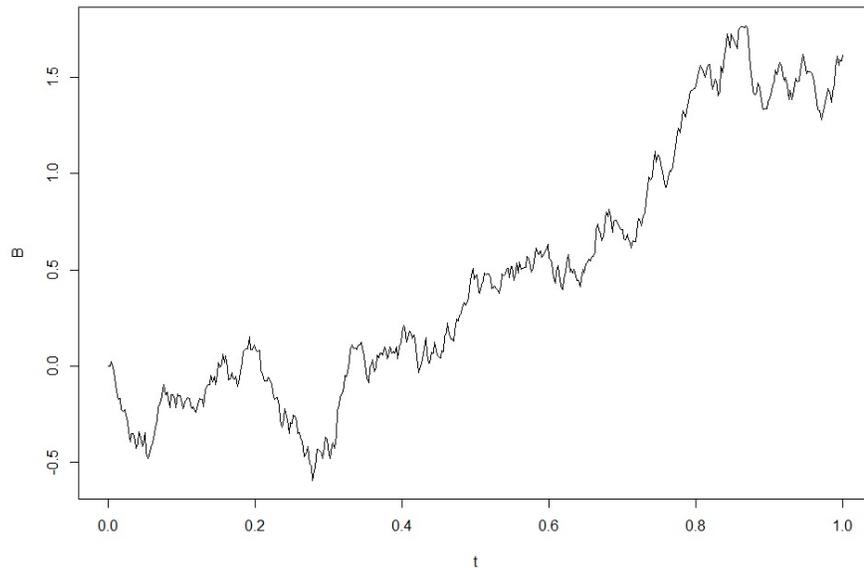


Figura 3.1: Trayectoria del browniano en $[0, 1]$

Con esto en mano, podemos construir trayectorias del MB con deriva y del puente browniano, Figura (3.2) y Figura (3.3), respectivamente.

```
mu = 1
b = 1
D = t*0
for (i in (1:(m+1))) {
  D[i] = B[i] + mu*t[i] + b
}
plot(t,D, type = "l")
```

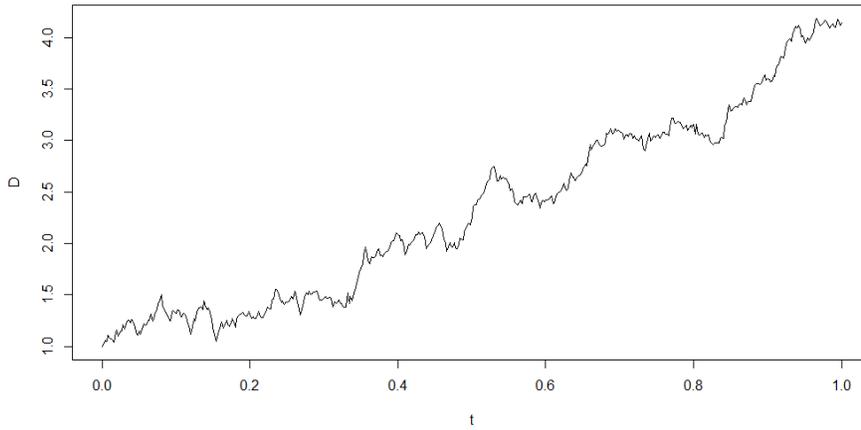


Figura 3.2: Trayectoria del Drift en $[0, 1]$.

```

U = t*0
for (i in (2:(m+1))) {
  U[i] = B[i] - t[i]*B[m+1]
}
plot(t,U, type = "l")

```

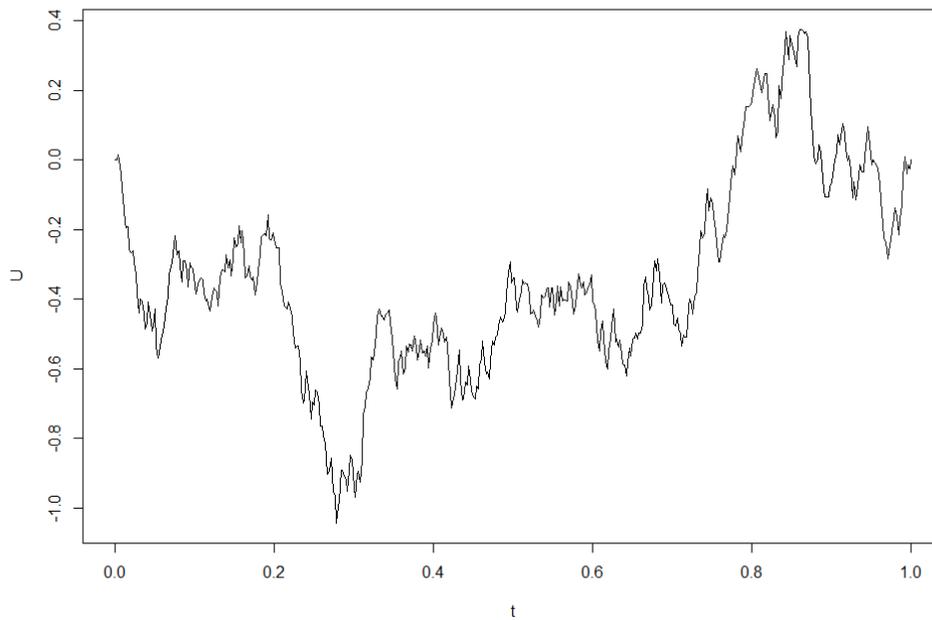


Figura 3.3: Trayectoria del puente browniano en $[0, 1]$

Utilizando la propiedad de reescalamiento podemos generar trayectorias en cualquier intervalo, aquí tomamos el $[0, 4]$ por simplicidad, véase la Figura (3.4):

```
c = 4
m=400
t = (0:(c*m))/m
z = rnorm(1000)
B = t*0
c_2 = sqrt(c)
for (i in (1:(c*m+1))) {
  B[i] = c_2 * browniano_t(z, (t[i]/c))
}
plot(t,B, type = "l")
```

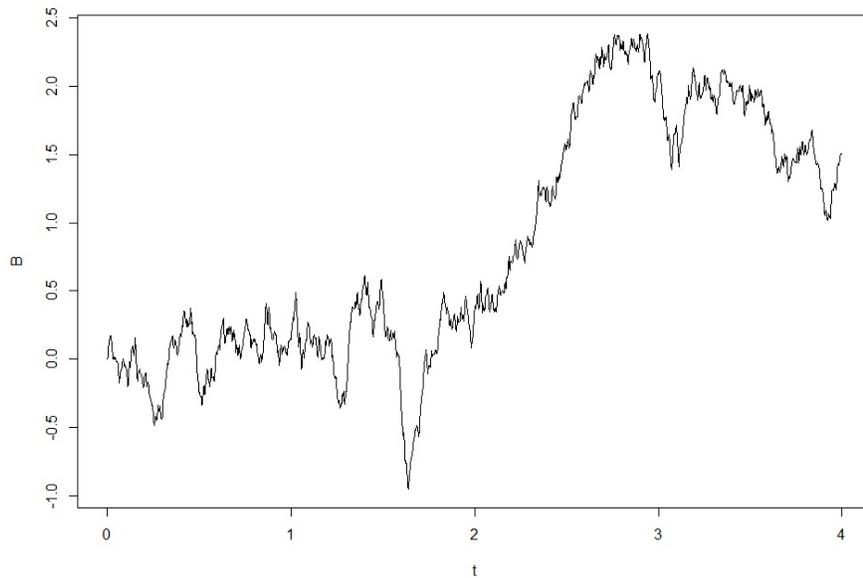


Figura 3.4: Trayectoria del browniano en $[0, 4]$

Trayectorias más generales del MB con deriva y del PB se muestran en la Figura (3.5) y en la Figura (3.6), respectivamente.

```
D = 0*t
for (i in (1:(c*m+1))) {
  D[i] = B[i] + mu*t[i] + b
}
plot(t,D, type = "l")
```

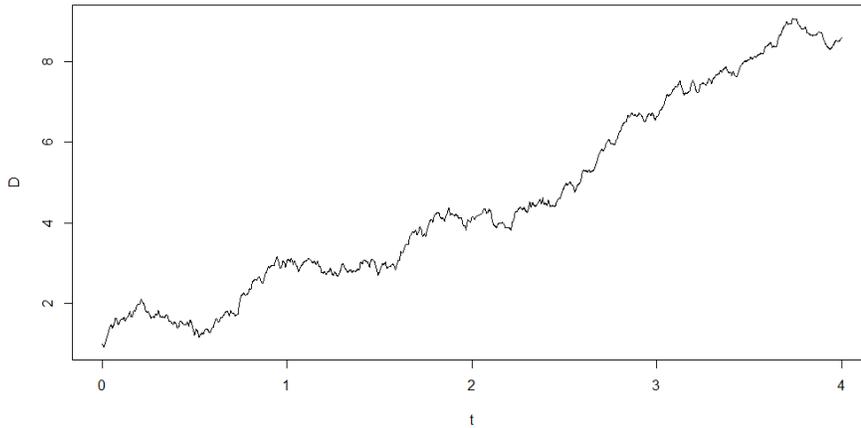


Figura 3.5: Trayectoria del Drift en $[0, 4]$.

```

U = 0*t
for (i in (2:(c*m+1))) {
  U[i] = B[i]-t[i]*B[(c*m+1)]/c
}
plot(t,U, type = "l")

```

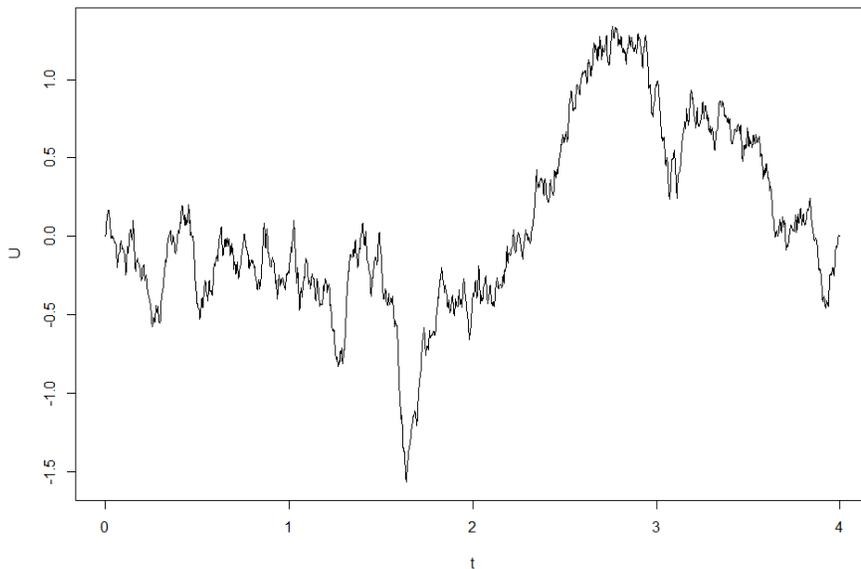


Figura 3.6: Trayectoria del puente browniano en $[0, 4]$

Si el lector desea profundizar un poco más en algoritmos relacionados con simulaciones de variables aleatorias puede consultar [SP14, Cap. 20], el cual está también orientado a realizar simulaciones del movimiento browniano.

Capítulo 4

Conclusiones

Los resultados obtenidos en esta tesis (ver Capítulo 2) constituyen la solución del problema

$$P \left(\bigcup_{0 \leq t \leq H} \{W_t \geq mt + b\} | W_R = x \right), \quad (4.1)$$

donde $H \geq 0$ puede ser infinito, $R \geq 0$ y $m, b, x \in \mathbb{R}$. Notemos que cuando $R = x = 0$, al ser $W_0 = 0$, la probabilidad queda como

$$P \left(\bigcup_{0 \leq t \leq H} \{W_t \geq mt + b\} \right),$$

por tanto la ecuación (4.1) representa las probabilidades de cruce para el puente browniano y el movimiento browniano con una función lineal.

Contar con la solución para una frontera lineal teóricamente es de mucha importancia pues, a partir de ésta, puede atacarse el problema más general en que la frontera es una función arbitraria y continua. Para esto, si $\alpha(t)$ es la probabilidad de que el movimiento browniano cruce una frontera continua $a(t)$ antes del tiempo t , puede demostrarse [Dur71] que se debe satisfacer la siguiente ecuación integral para $\alpha(t)$

$$p(t, \varepsilon) = \int_0^t p(t, s, \varepsilon) d\alpha(s), \quad 0 < t \leq T,$$

donde $p(t, \varepsilon)$ es la densidad del movimiento browniano al tiempo t evaluada en $a(t) + \varepsilon$ y $p(s, t, \varepsilon)$ es la misma densidad condicionada en el evento $W_s = a(s)$ para $s < t$. A partir de esta ecuación integral es posible aproximar numéricamente la probabilidad $\alpha(t)$, acotando $a(t)$ con funciones lineales a trozos. Este mismo procedimiento puede utilizarse directamente para calcular la probabilidad de cruce para dos fronteras continuas (ver [Dur71]).

Por otro lado, la importancia práctica de este problema es fácil de justificar. Por ejemplo, si denotamos por X_t el precio de una acción mercantil S al tiempo t , podemos considerar que las fluctuaciones que sufre el mercado hacen de $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un proceso estocástico. Para construir un modelo para este precio consideramos que $X_{n+1} = X_n y_{n+1}$ donde y_{n+1} es una

variable aleatoria que modela de cierta manera el cambio entre el tiempo n y el $n + 1$, si suponemos que $\{y_i\}_{i \geq 1}$ es una colección i.i.d. de variables aleatorias tendremos, con X_0 el precio inicial, lo siguiente:

$$X_n = X_0 y_1 y_2 \cdots y_n = X_0 \exp\left\{n\mu + \sigma \sum_{i=1}^n (\log y_i - \mu)/\sigma\right\},$$

donde $E(y_1) = \mu$ y $\text{Var}(y) = \sigma^2$.

Por el Teorema del Límite Central, el término

$$\sum_{i=1}^n (\log y_i - \mu)/\sigma,$$

es aproximadamente normal con varianza igual a n , por lo que se propone finalmente

$$X_t = X_0 e^{\mu t + \sigma B_t}.$$

El proceso $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es conocido como **movimiento browniano geométrico**. Supongamos que estamos interesados en calcular $P(\bigcup_{t \geq 0} \{X_t \geq k\})$ para alguna constante $k > 0$, esto es, la probabilidad de que la acción alcance algún valor determinado, se sigue que:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{t \geq 0} \{X_0 e^{\mu t + \sigma B_t} \geq k\}\right) &= P\left(\bigcup_{t \geq 0} \{\mu t + \sigma B_t \geq \log(k) - \log(X_0)\}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{t \geq 0} \left\{B_t \geq -\frac{\mu}{\sigma}t + (\log(k) - \log(X_0))/\sigma\right\}\right), \end{aligned}$$

que constituye la primera probabilidad de cruce que resolvimos (Teorema 40).

Es también posible mostrar una conexión con la teoría de riesgo, en esta rama es usual estudiar la probabilidad de que un proceso esté por debajo de una frontera en un intervalo de tiempo determinado, estos son los llamados problemas de ruina. La forma general de estos problemas es la siguiente:

$$P(X_t \leq f(t) \text{ para algún } t),$$

donde X es un proceso estocástico y f una función real.

En nuestro caso, si X_t es un movimiento browniano y f una función lineal, tendremos

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{t \geq 0} \{W_t \leq mt + b\}\right) &= P\left(\bigcup_{t \geq 0} \{-W_t \leq mt + b\}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{t \geq 0} \{W_t \geq -mt - b\}\right), \end{aligned}$$

cuya solución corresponde al Teorema 40. De hecho, al ser $\{-W_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento browniano, podemos afirmar que todas las probabilidades de cruce calculadas en esta tesis son equivalentes a un problema de ruina, pues al aplicar un procedimiento como el anterior toman esta forma.

En general, no solo son las probabilidades los elementos requeridos en una aplicación, sino elementos más complejos relacionados con estos problemas, como la distribución de los tiempos de paro (ver [ML98]). Esta tesis representa una introducción a problemas que pueden fácilmente crecer en complejidad así como la de sus aplicaciones.

Es directo mostrar que con la definición anterior P es finita aditiva, esto es, si $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{F}$ es una colección disjunta entonces $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$, de donde también tenemos $P(A) + P(\Omega \setminus A) = 1$. Una terna (Ω, \mathcal{F}, P) es llamada **espacio de probabilidad**. Cuando los elementos de un conjunto Ω satisfacen una propiedad excepto tal vez por un conjunto $A \subset \Omega$ tal que $P(A) = 0$, decimos que la propiedad se cumple con probabilidad 1 o **casi seguramente** (c.s.).

Una función de probabilidad resulta ser subaditiva:

Proposición 56. *Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, entonces*

1. Si $A, B \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$, esto es, P es subaditiva.
2. Si $\{A_i\}_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{F}$, entonces $P(\bigcup_{i \geq 1} A_i) \leq \sum_{i \geq 1} P(A_i)$.

La continuidad de una función de probabilidad queda establecida en la siguiente proposición:

Proposición 57. *Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, entonces*

1. Si $\{B_i\}_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{F}$ y $B_n \subseteq B_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, entonces

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n).$$

2. Si $\{B_i\}_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{F}$ y $B_{n+1} \subseteq B_n$ para todo $n \geq 1$, entonces

$$P\left(\bigcap_{n \geq 1} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n).$$

Finalmente, enunciamos el lema Borel-Cantelli.

Proposición 58. *Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y $\{E_i\}_{i \geq 1}$ una colección de eventos tales que $\sum_{i \geq 1} P(E_i) < \infty$, entonces cada $\omega \in \Omega$ pertenece a lo más a una cantidad finita de E_i 's casi seguramente.*

VARIABLES ALEATORIAS

Dados dos espacios medibles $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ se dice que una función $T : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ -medible siempre que

$$T^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1, \quad \forall B \in \mathcal{F}_2.$$

Una **variable aleatoria** (v.a.) definida en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) es una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

es decir, X es $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -medible, pero como siempre tomamos la σ -álgebra de Borel en \mathbb{R} diremos sencillamente que X es \mathcal{F} -medible. La σ -álgebra generada por la v.a. X se define como

$$\sigma\langle X \rangle = \bigcap \{ \mathcal{F} \subseteq 2^\Omega : \mathcal{F} \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } X \text{ es } \mathcal{F}\text{-medible} \}.$$

Se puede demostrar que la colección de variables aleatorias de un espacio de probabilidad es cerrado bajo las operaciones de suma, multiplicación y composición de funciones.

Una variable aleatoria X definida en (Ω, \mathcal{F}, P) induce una medida de probabilidad P_X en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definida como sigue

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A)), \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

lo cual es la probabilidad de que la v.a. X esté en el conjunto A , esta probabilidad también se denota $P(X \in A)$.

En lo que sigue siempre que hablemos de una variable aleatoria o un vector aleatorio entenderemos que estarán definidos en algún espacio de probabilidad aunque no lo mencionemos explícitamente.

La **distribución acumulativa de probabilidad** de una variable aleatoria X es una función $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definida de la siguiente manera

$$F(x) = P(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se sabe que una función absolutamente continua es diferenciable casi en todas partes, lo que significa que existe un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ en donde podría no ser diferenciable pero $\mu(A) = 0$, donde μ es la medida de Lebesgue. Por tanto, si una distribución F_X es absolutamente continua, existe una función $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt,$$

la función f_X es llamada **densidad** de probabilidad de la v.a. X .

Una v.a. X es **discreta** cuando existe un conjunto a lo más numerable $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $P(X \in A) = 1$. Es fácil verificar que si $P(X = x) > 0$ entonces F_X tiene un salto de discontinuidad en x y además que $\sum_{x \in A} P(X = x) = 1$.

Una v.a. X es **continua** cuando $P(X = x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En este caso se puede demostrar que F_X es una función continua.

Similarmente, un **vector aleatorio** definido en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) es una función $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ -medible. Se puede demostrar que las componentes de un vector aleatorio resultan ser variables aleatorias del mismo espacio de probabilidad.

La **distribución acumulativa conjunta** de un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ se define por

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n).$$

También se dice que F es la distribución conjunta de las variables X_1, X_2, \dots, X_n . Si X_i es una componente del vector \mathbf{X} , la función F_{X_i} es llamada **distribución de probabilidad marginal** de la v.a. X_i .

Similarmente, la función de **densidad conjunta** $f_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ del vector, en caso de existir, satisface que

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_n \cdots dy_2 dy_1.$$

La función f_{X_i} de la v.a. X_i es llamada **densidad marginal**.

Las principales propiedades de una función de distribución de probabilidad se resumen en la siguiente proposición.

Proposición 59. *Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la distribución de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n , entonces*

- $\lim_{x_1, x_2, \dots, x_n \rightarrow +\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$

- Para cada $i = 1, 2, \dots, n$ se tiene que

$$\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

- F es no decreciente en cada variable.

- F es continua por la derecha en cada variable.

- Si $a_i < b_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$\sum_{x_i \in \{a_i, b_i\}} (-1)^{|A|} F(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

en donde $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ es tal que $i \in A$ si y sólo si $x_i = a_i$.

Cualquier función F que satisfaga las condiciones establecidas en la Proposición 59 es llamada distribución de probabilidad, pues puede probarse que en tal caso F es la distribución de algún vector o variable aleatoria. Similarmente si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $f \geq 0$ y $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$ entonces f es llamada densidad de probabilidad.

La **esperanza** o **valor esperado** de una v.a. X , a veces denotada por μ_X , se define por (vea [AL06] para consultar la construcción de la integral de Lebesgue-Stieltjes)

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x dF_X.$$

Cuando $E(X) = \pm\infty$ se dice que X no tiene esperanza finita. En el caso en que F es absolutamente continua podemos escribir

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx.$$

Es fácil mostrar que la esperanza es un operador lineal. También es relevante el hecho de que $X \geq 0$ c.s. implica $E(X) \geq 0$ c.s.

El siguiente teorema es bastante útil e importante.

Teorema 60. Sea X una v.a. definida en (Ω, \mathcal{F}, P) , y sea $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función Borel medible, es decir $\langle \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rangle$ -medible. Definamos la variable aleatoria $Y = h(X)$, entonces

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} h(x) dF.$$

El n -ésimo momento de una v.a. X está dado por

$$E(X^n) = \int x^n dF.$$

La **varianza** de una v.a. X se define por

$$\text{Var}(X) = E(X - E(X))^2 \geq 0.$$

La **covarianza** de dos v.a. X, Y definidas en un mismo espacio de probabilidad es el número definido por

$$\text{Cov}(X, Y) = E(X - \mu_X)(Y - \mu_Y).$$

La **esperanza** o **valor esperado** de un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ se define por

$$E(\mathbf{X}) = (E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n))^T,$$

y a veces la denotaremos también por $\mu_{\mathbf{X}}$. Evidentemente, este operador también es lineal.

Para el conjunto de las variables aleatorias definidas en un mismo espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y un $p > 0$, puede demostrarse que la relación $X \sim Y$ si y sólo si

$$\int |X - Y|^p dF_{X,Y} = 0,$$

es una relación de equivalencia. En caso de que $X \sim Y$ con cualquier p , decimos que las v.a. son iguales con probabilidad 1.

A partir de lo anterior podemos definir para cualquier $p > 0$:

$$L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{[X]_{\sim} : X \text{ es una v.a. y } \int |X|^p < \infty\},$$

en donde $[X]_{\sim}$ denota la clase de equivalencia de la v.a. X . Esta definición garantiza que L^p es un espacio normado.

La **matriz de covarianza** de un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ está definida por

$$[E(X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j})]_{i,j}.$$

Si denotamos esta matriz por Σ y para una matriz \mathbf{A} cuyas entradas son variables aleatorias definimos a la matriz $E\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ de forma que en la entrada i, j tenga al elemento $E(a_{ij})$, tendremos que

$$\Sigma = E(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})^T.$$

Se dice que una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es **no negativa definida** si

$$\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} \geq 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n.$$

Se puede mostrar que todos los valores propios de una matriz no negativa definida son mayores o iguales a cero [Nic03]. Como toda matriz simétrica es ortogonalmente diagonalizable, existen $\mathbf{P}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tales que $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ y \mathbf{D} es una matriz diagonal con:

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^T,$$

como las entradas de la matriz \mathbf{D} son los valores propios de $\mathbf{\Sigma}$, podemos definir la raíz cuadrada de la matriz como

$$\mathbf{\Sigma}^{1/2} = \mathbf{P} \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{P}^T,$$

donde la matriz $\mathbf{D}^{1/2} = (d_{ij}^{1/2})_{ij}$, con $\mathbf{D} = (d_{ij})_{ij}$.

Es fácil mostrar que toda matriz de covarianza resulta ser no negativa definida, para ello sea $\mathbf{\Sigma}$ la matriz de covarianza del vector \mathbf{X} , entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{Y} &= \mathbf{Y}^T [\mathbf{E}(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})^T] \mathbf{Y} \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{Y}^T (\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})^T \mathbf{Y}] \\ &= \text{Var}(\mathbf{Y}^T (\mathbf{X} - \mu)) \geq 0 \quad \forall \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Esperanza condicional e independencia

Teorema 61. Consideremos un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y sea $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una sub- σ -álgebra, entonces para cada $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ existe una función h_0 Borel medible, tal que $h_0(X) \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ y

$$E(X - h_0)^2 = \inf\{E(X - Z)^2 : Z \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)\}.$$

Además la v.a. $Z_0 = h_0(X)$ queda determinada con probabilidad 1 por la condición

$$E(X I_A) = E(Z_0 I_A) \quad \forall A \in \mathcal{G}, \quad (2)$$

donde $I_A(\omega)$ es la función indicadora del conjunto A .

La variable Z_0 es denotada por $E(X|\mathcal{G})$ y se conoce como **esperanza condicional dada** \mathcal{G} . En el caso en que $\mathcal{G} = \sigma\langle Y \rangle$ para alguna v.a. Y denotamos a Z_0 como $E(X|Y)$, la cual llamaremos **esperanza condicional dada** Y . Se puede mostrar que la esperanza condicional es un operador lineal y que $X \geq 0$ c.s implica $E(X|\mathcal{G}) \geq 0$ c.s., de donde $X \geq Y$ c.s. implica $E(X|\mathcal{G}) \geq E(Y|\mathcal{G})$ c.s..

Notemos que en el caso en que X es una v.a. discreta y $P(X = x) > 0$ entonces por 2 y el Teorema 60

$$h_0(x) = \frac{E(Y I_{X=x})}{P(X = x)},$$

ahora, si Y también es discreta y escribimos $E(Y|X = x) = h_0(x)$ entonces

$$E(Y|X = x) = \frac{\sum_y yP(Y = y, X = x)}{P(X = x)}. \quad (3)$$

De forma similar si X, Y tienen una distribución conjunta absolutamente continua con densidad $f(x, y)$, entonces para x tal que $f_X(x) > 0$ escribiendo $E(Y|X = x) = h_0(x)$ tenemos

$$E(Y|X = x) = \frac{\int yf(x, y)dy}{f_X(x)} \quad c.s. \quad (4)$$

Sea un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una sub- σ -álgebra entonces para $B \in \mathcal{F}$ la **probabilidad condicional** de B dada \mathcal{G} se define por

$$P(B|\mathcal{G}) = E(I_B|\mathcal{G}).$$

Si $A \in \mathcal{F}$ es tal que $P(A) > 0$, tomando $X = I_A$ en 3 tenemos

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

En el caso en que X, Z son v.a. continuas con función de densidad conjunta $f_{X,Z}$ y $\mathcal{G} = \langle Z^{-1}(\{z\}) \rangle$ para algún z tal que $f_Z(z) > 0$, tomando $Y = I_{X^{-1}(B)}$ en 4 tenemos que

$$P(X \in B|Z = z) = \frac{\int I_{X^{-1}(B)}f_{X,Z}(x, z) dx}{f_Z(z)} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

El siguiente teorema establece que $P(\cdot|\mathcal{G})$ resulta ser una nueva medida de probabilidad como función de \mathcal{F} .

Teorema 62. *Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y sea X una v.a. definida en este espacio, entonces para cualquier $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ sub- σ -álgebra, y para cada $\omega \in \Omega$ la función $P(\cdot|\mathcal{G})(\omega) : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ es una medida de probabilidad en el espacio (Ω, \mathcal{F}) con probabilidad 1.*

En un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) una colección de eventos $\{B_i\}_{i \geq 0}^n \subseteq \mathcal{F}$ son **independientes** si

$$P\left(\bigcap_{i=0}^n B_i\right) = \prod_{i=0}^n P(B_i).$$

Una colección arbitraria de eventos $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{F}$ es independiente si para cualquier conjunto finito $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subset A$ la colección de eventos $\{B_{\alpha_i}\}_{i=1}^k$ es independiente.

De la misma forma, si A es un conjunto y $\mathcal{G}_\alpha \subseteq \mathcal{F}$ es una colección de eventos para cada $\alpha \in A$, diremos que $\{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es independiente si al tomar un $B_\alpha \in \mathcal{G}_\alpha$ para cada $\alpha \in A$, la colección $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es independiente.

Una familia de v.a. $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es independiente si la familia de σ -álgebras $\{\sigma\langle X_\alpha \rangle\}_{\alpha \in A}$ es independiente, se puede mostrar que esto sucede si y sólo si para cualquier conjunto finito $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subset A$ y $\{B_i\}_{i=1}^k \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se tiene que

$$P(X_{\alpha_1} \in B_1, X_{\alpha_2} \in B_2, \dots, X_{\alpha_k} \in B_k) = \prod_{i=1}^k P(X_{\alpha_i} \in B_i).$$

Teorema del Límite Central

Dos variables aleatorias X, Y probablemente definidas en distintos espacios de probabilidad, son **iguales en distribución** si $F_X(z) = F_Y(z)$ para todo $z \in \mathbb{R}$ y escribimos $X \stackrel{d}{=} Y$.

Se dice que una colección $\{X_n\}_{n \geq 0}$ de v.a. **converge en distribución** a una v.a. X cuando $n \rightarrow \infty$ si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \quad \forall x \in C(F_X),$$

donde $C(F_X) = \{x \in \mathbb{R} : F_X \text{ es continua en } x\}$. Esta convergencia suele ser denotada como $X_n \xrightarrow{d} X$. Note que no se requiere que todas las variables aleatorias involucradas en la definición estén definidas en un mismo espacio de probabilidad.

Aunque el concepto anterior es muy importante en probabilidad y estadística, mayormente estaremos interesados en el Teorema del Límite Central

Teorema 63. *Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una colección de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) con esperanza finita μ y varianza finita σ^2 , sea $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ para cada $n \geq 1$, entonces*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Bibliografía

- [Abb52] Helen Abbey. An examination of the reed-frost theory of epidemics. *Human biology*, 24(3):201, 1952.
- [AL06] Krishna B. Athreya and Soumendra N. Lahiri. *Measure theory and probability theory*. Springer Texts in Statistics. Springer, New York, 2006.
- [Bil12] Patrick Billingsley. *Probability and measure*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2012. Anniversary edition [of MR1324786], With a foreword by Steve Lalley and a brief biography of Billingsley by Steve Koppes.
- [Bre11] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [DPY05] S David Promislow and Virginia R Young. Minimizing the probability of ruin when claims follow brownian motion with drift. *North American Actuarial Journal*, 9(3):110–128, 2005.
- [Dur71] J. Durbin. Boundary-crossing probabilities for the Brownian motion and Poisson processes and techniques for computing the power of the Kolmogorov-Smirnov test. *J. Appl. Probability*, 8:431–453, 1971.
- [Dur19] Rick Durrett. *Probability—theory and examples*, volume 49 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2019. Fifth edition of [MR1068527].
- [Gut09] Allan Gut. *An intermediate course in probability*. Springer Texts in Statistics. Springer, New York, second edition, 2009.
- [Haa10] Alfred Haar. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. *Math. Ann.*, 69(3):331–371, 1910.
- [Haa11] Alfred Haar. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. *Math. Ann.*, 71(1):38–53, 1911.

- [HPS72] Paul G. Hoel, Sidney C. Port, and Charles J. Stone. *Introduction to stochastic processes*. Houghton Mifflin Co., Boston, Mass., 1972. The Houghton Mifflin Series in Statistics.
- [ML98] Anders Martin-Löf. The final size of a nearly critical epidemic, and the first passage time of a Wiener process to a parabolic barrier. *J. Appl. Probab.*, 35(3):671–682, 1998.
- [Nic03] W. Keith. Nicholson. *Linear algebra with applications with applications*. McGraw-Hill Ryerson, 2003.
- [Rin12] Luis Rincón. *Introducción a los procesos estocásticos*. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM, 2012.
- [Ros96] Sheldon M. Ross. *Stochastic processes*. Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1996.
- [Roy88] H. L. Royden. *Real analysis*. Macmillan Publishing Company, New York, third edition, 1988.
- [RS97] GO Roberts and CF Shortland. Pricing barrier options with time-dependent coefficients. *Mathematical Finance*, 7(1):83–93, 1997.
- [RY99] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.
- [Sch01] Jason Schweinsberg. Applications of the continuous-time ballot theorem to brownian motion and related processes. *Stochastic processes and their applications*, 95(1):151–176, 2001.
- [Sie85] David Siegmund. *Sequential analysis*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1985. Tests and confidence intervals.
- [SP14] René L. Schilling and Lothar Partzsch. *Brownian motion*. De Gruyter Graduate. De Gruyter, Berlin, second edition, 2014. An introduction to stochastic processes, With a chapter on simulation by Björn Böttcher.
- [Ste01] J. Michael Steele. *Stochastic calculus and financial applications*, volume 45 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [Wie23] Norbert Wiener. Differential-space. *Journal of Mathematics and Physics*, 2(1-4):131–174, 1923.
- [Zel15] Daniel Zelterman. *Applied multivariate statistics with R*. Statistics for Biology and Health. Springer, Cham, 2015.