Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

El teorema de la curva de Jordan aplicado a la Topología Digital

Tesis que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Bertín Hernández Trejo

bajo la dirección de

Rafael Villarroel Flores

Pachuca, Hidalgo. Mayo de 2010.

Resumen

El *teorema de la curva de Jordan* (en el plano $\mathbb{R}^2$) es uno de los resultados en matemáticas que resultan fáciles de comprender y convencerse que lo que se afirma es correcto, sin embargo, dar una demostración completamente formal no resulta tan sencillo. En la presente tesis se da una demostración del teorema de la curva de Jordan.

En el primer capítulo, se definen algunos conceptos básicos de topología, además se demuestran algunas propiedades sobre espacios conexos y funciones continuas. En el segundo capítulo se recapitulan las herramientas necesarias para la demostración del teorema de la curva de Jordan.

En el capítulo 4 se definirá una topología para el plano digital $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que es en donde se satisface el análogo al teorema de la curva de Jordan, demostrándolo al final del capítulo. Se verá además que es posible usarlo en la digitalización de imágenes.

Abstract

The *Jordan's curve Theorem* (in the plane $\mathbb{R}^2$) is one of those results in mathematics that are easy to understand and to be convinced that what it says is true, however, to give a completely formal proof is not so easy. In this thesis a proof of the Jordan's curve Theorem is given.

In the first chapter, some basic concepts of Topology are defined, and also some properties about connected spaces and continuous functions will be proved. In Chapter 2 the necessary tools for the proof of the Jordan Curve Theorem are given.

In Chapter 4 will be defined a topology in the digital plane $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in which the analog of the Jordan curve Theorem is satisfied, it will be proved at the end of the chapter. Moreover, we will show that is possible to use it in the digitalization of images.

A Filiberto y Narcisa
(padres)

y a Elias y Ma. del Rosario
(hermanos)

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer a mis padres por ser mi fortaleza y que hayan creado en mí el deseo de superación, también por todo el esfuerzo que han hecho por darme sustento económico, limitándose hasta de lo más básico con tal de que yo pudiera continuar con mis estudios.

Agradezco a mis hermanos que me sirvieron de inspiración para que yo continuara mis estudios a nivel superior.

A mis amigos, les agradezco esas veladas de estudio sin las cuales no podría estar escribiendo esto, por esos momentos de diversión, aunque pocos pero muy bien aprovechados, que sirvieron para ser soportable el ritmo de trabajo.

Quiero agradecer a mis profesores por toda la paciencia que me tuvieron durante mi estancia en la UAEH, les agradezco su apoyo y consejos.

A los Doctores: Roberto Ávila Pozos, Ricardo Cruz Castillo, Arturo Criollo Pérez y Jorge Viveros, que con sus aportaciones hicieron mejorar el presente trabajo.

Sobre todo agradezco a mi asesor, el Dr. Rafael Villarroel Flores por la dirección de esta tesis no escatimando esfuerzo ni tiempo en el desarrollo de la misma.

Índice general

Introducción

La topología ha resultado ser de gran importancia para la cimentación del análisis moderno, además se ha mostrado de gran interés para los campos de la ciencia como física, cosmología, relatividad, tomografía computacional, robótica, entre otros. Hoy en día la topología es una herramienta importante en la resolución de problemas prácticos.

Un resultado muy importante en matemáticas es el teorema de la curva de Jordan, que establece que cualquier curva cerrada simple (en $\mathbb{R}^2$) separa al plano en exactamente dos componentes conexas, una acotada y una no acotada. Este resultado fue conjeturado por Camile Jordan, aunque el no dió una demostración correcta. Para la curva C_1 de la Figura 1 es fácil convencernos de que el teorema de la curva de Jordan es cierto, pero si nos presentan la curva C_2 de la Figura 1 no es inmediato corroborar su veracidad y es más complejo poder decidir entre la componente acotada y la no acotada. En los diferentes textos, no muy a menudo se da la demostración de dicho teorema ya que ésta no es tan sencilla.

Para el procesamiento de imágenes se utilizan arreglos rectangulares, que pueden verse como subconjuntos de $\mathbb{Z}^2$. Muchos matemáticos se preguntaron si el teorema de la curva de Jordan se satisfacía en el plano $\mathbb{Z}^2$, definiendo algún tipo de adyacencia entre los elementos de dicho plano. La respuesta es negativa, sin embargo Azriel Rosenfeld (1931-2004) en [16] desarrolló las bases de lo que se conoce como topología digital y muestra un teorema análogo al de la curva de Jordan en el plano $\mathbb{R}^2$ sólo que

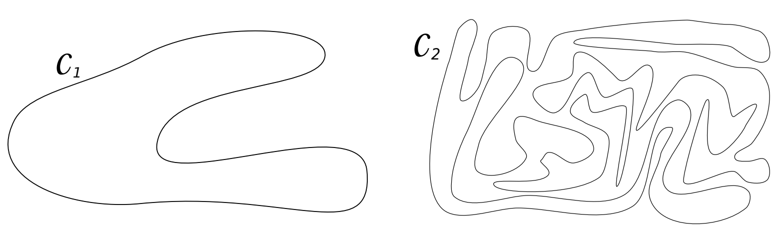


Figura 1: Curvas de Jordan

es necesario utilizar dos tipos de adyacencia. Cuando se procesan imágenes digitales se quiere conocer lo que está en cada componente conexa, pero con la ayuda de este teorema sólo necesitamos conocer información sobre el borde de cada componente, reduciendo la cantidad de memoria y agilizando su manipulación.

En la presente tesis se demuestra el teorema de la curva de Jordan en el plano $\mathbb{R}^2$ y se da una demostración para su análogo en el plano digital $\mathbb{Z}^2$, esta última basada en [11].

Capítulo 1

Antecedentes

En este capítulo se pretende dar un repaso de algunos conceptos generales sobre *topología*, y mostrar algunas de sus propiedades que serán útiles para enunciar y demostrar el *teorema de la curva de Jordan*.

1.1. Espacios topológicos

Definición 1. *Sea X un conjunto y sea $P(X)$ la colección de todos los subconjuntos de X. Se dice que $\tau \subseteq P(X)$ es una* ***topología*** *en X si cumple:*

(T1) $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$.

(T2) Para todo $\alpha \in I$, si $A_\alpha \in \tau$ entonces $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$, donde I es un conjunto de índices.

(T3) Si $A_1 \in \tau$ y $A_2 \in \tau$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

A los elementos de τ se les llama ***abiertos***. Si X es un conjunto y τ una topología sobre X, al par (X, τ) se le llama ***espacio topológico***.

Ejemplo 1. *(topología de Sierpinski).*

Sea $X = \{1, 2\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}\}$ es una topología en X, pues cumple:

(T1) $\emptyset, X \in \tau$

(T2) La unión arbitraria de elementos de τ es el $\emptyset$, X o bien $\{1\}$ que están en τ.

(T3) Además, la intersección de cualesquiera elementos de τ es el $\emptyset$, X o bien $\{1\}$, que están en τ.

Ejemplo 2. *(topología indiscreta). Sea X un conjunto, $\tau = \{\emptyset, X\}$. Como $\emptyset$ y $X \in \tau$, además la unión o intersección es X o $\emptyset$ se verifica que τ es una topología sobre X.*

Ejemplo 3. *(topología discreta). Sean X un conjunto y $\tau = P(X)$. En esta topología todos los subconjuntos de X son abiertos.*

Ejemplo 4. *(topología usual en $\mathbb{R}$). Sea $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid$ para todo $x \in U$ existe $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subseteq \mathbb{R}\}$.*

Ejemplo 5. *(topología cofinita). Sea X un conjunto infinito, definiendo*

$$\tau = \{U \subseteq X \mid U = \emptyset \quad o \quad X \setminus U \quad es\ finito\},$$

podemos ver que τ es una topología en X pues cumple:

(T1) Por definición $\emptyset \in \tau$. Ahora $X - X = \emptyset$ es finito, por lo tanto $X \in \tau$.

(T2) $X \setminus \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I}(X \setminus U_\alpha) \subseteq (X \setminus U_\alpha)$ para todo $\alpha \in I$. Como cada U_α lo tomamos en τ, entonces $X \setminus U_\alpha$ es finito para todo $\alpha \in I$, pero $\bigcap_{\alpha\in I}(X \setminus U_\alpha)$ está contenido en cada uno de estos conjuntos finitos, por lo que tal intersección tiene que ser finita. Por lo tanto $X \setminus \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ es finito, es decir $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \in \tau$.

(T3) Sean $U_1, U_2 \in \tau$. Si $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \tau$. Ahora si $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, entonces $X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$, que es finito. Por lo tanto τ es una topología en X.

Definición 2. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si Y es un subconjunto de X, entonces la colección:*

$$\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$$

*es una topología en Y, llamada la **topología subespacio** y decimos que (Y, τ_Y) es un subespacio de (X, τ).*

Es fácil verificar que τ_Y es una topología en Y. Vemos que $\emptyset$ y Y están en τ_Y, ya que

$$\emptyset = Y \cap \emptyset \text{ y } Y = Y \cap X$$

pues $\emptyset$ y X son elementos de τ. Mostraremos que la unión arbitraria de elementos de τ_Y está también en τ_Y; sea I un conjunto de índices y sean U_α elementos de τ, para todo $\alpha \in I$, sabemos que los elementos de τ_Y son de la forma $U_\alpha \cap Y$. Veremos que $\cup_{\alpha\in I}(U_\alpha \cap Y) \in \tau_Y$, tenemos que $\cup_{\alpha\in I}(U_\alpha \cap Y) = (\cup_{\alpha\in I} U_\alpha) \cap Y$, como $U_\alpha \in \tau$, para todo $\alpha \in I$, se sigue que $\cup_{\alpha\in I} U_\alpha$ es también un elemento de τ, por lo tanto $(\cup_{\alpha\in I} U_\alpha) \cap Y \in \tau_Y$. Ahora si $U_1 \cap Y$ y $U_2 \cap Y$ están en τ_Y entonces $(U_1 \cap Y) \cap (U_1 \cap Y) = (U_1 \cap U_2) \cap Y$, que también está en τ_Y.

Hemos visto en los ejemplos anteriores que a un conjunto se le puede asociar más de una topología, por eso es muy importante para fines prácticos tener en cuenta siempre el espacio y la topología con que se trabaja. A continuación se da una definición de un conjunto cerrado:

Definición 3. *Si (X, τ) es un espacio topológico, $F \subseteq X$ es **cerrado** si $X \setminus F$ (el complemento de X) es abierto.*

Si nos fijamos en la *topología de Sierpinski (ejemplo 1)*, podemos darnos cuenta de que los conjuntos cerrados son el $\emptyset, X$ y $\{2\}$. Y en el caso de la *topología discreta* (*ejemplo 3*) todos los subconjuntos de X son abiertos y también cerrados, pues en $P(X)$ están todos los posibles subconjuntos de X.

Teorema 1.1.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces las siguientes condiciones se satisfacen:*

a) Los conjuntos $\emptyset, X$ son cerrados.

b) Las intersecciones arbitrarias de conjuntos cerrados son conjuntos cerrados.

c) Las uniones finitas de conjuntos cerrados son conjuntos cerrados.

Demostración. a) El conjunto $\emptyset$ es cerrado pues es el complemento del conjunto abierto X, $\emptyset = X \setminus X$. De manera similar, $X = X \setminus \emptyset$ es el complemento del conjunto abierto $\emptyset$, por lo que X también es cerrado.

b) Sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una colección arbitraria de conjuntos cerrados. Para ver que la $\bigcap_{i\in I} F_i$ es cerrado, veremos que su complemento es abierto. Por las leyes de De Morgan se tiene que:

$$X \setminus \bigcap_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I} (X \setminus F_i).$$

En el lado derecho de la igualdad tenemos una unión arbitraria de conjuntos abiertos (pues por definición $X \setminus F_i$ es abierto para todo $i \in I$), entonces, por (T2) esa unión arbitraria es un conjunto abierto. Se sigue que $\bigcap_{i\in I} F_i$ es cerrado.

c) Sea $\{F_i\}_{i=1}^n$ una colección finita de conjuntos cerrados. Por las leyes de De Morgan se tiene que:

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus F_i),$$

como $X \setminus F_i$ es abierto para todo $i = 1, ..., n$, entonces por (T3) tenemos que $\bigcap_{i=1}^n (X \setminus F_i)$ es abierto. Por lo tanto $\bigcup_{i=1}^n F_i$ es cerrado. $\square$

Definición 4. *Sea (X, τ) un espacio topológico, $x \in X$. Una **vecindad** de x es un abierto que contiene a x.*

Definición 5. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subseteq X$, se define el **interior** de A como la unión de todos los subconjuntos abiertos de X contenidos en A, y se denota como:*

$$\text{int}(A) = A^{\circ} = \bigcup_{U\subseteq A} U, \text{ con } U \text{ abierto en } X.$$

*También se define la **cerradura** de A como la intersección de todos los subconjuntos cerrados de X que contienen a A, y se denota como:*

$$\overline{A}=\bigcap_{A\subseteq F} F, \text{ con } F \text{ cerrado en } X.$$

Notemos que si A es un conjunto, se tiene que A° es abierto y $\overline{A}$ es cerrado, así $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$. Además un conjunto A es cerrado si y sólo si $\overline{A} \subseteq A$, ya que si A es cerrado, entonces A es un cerrado que contiene a A, por lo que $\overline{A}$ está contenido en A. Ahora, si $\overline{A} \subseteq A$, como $A \subseteq \overline{A}$, se tiene que $A = \overline{A}$ que es cerrado.

Observación: Si consideramos a $\mathbb{R}$ con la topología cofinita y $F \subseteq \mathbb{R}$ es finito, entonces $\overline{F} = F$, pues en este espacio topológico los únicos cerrados son los finitos y el total. Además, si $A \subseteq \mathbb{R}$ es infinito, tenemos que $\overline{A} = \mathbb{R}$, ya que el único cerrado que lo contiene es $\mathbb{R}$.

Teorema 1.1.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si toda vecindad de x intersecta a A.*

Demostración. $\Leftarrow$) Supongamos que $x \notin \overline{A}$, entonces $x \in X \setminus \overline{A}$ que es abierto, ya que $\overline{A}$ es cerrado. Por lo que $X \setminus \overline{A}$ es una vecindad de x, además cumple que $(X \setminus \overline{A}) \cap A = \emptyset$, contradiciendo la hipótesis de que toda vecindad de x intersecta a A. Por lo tanto $x \in \overline{A}$.

$\Rightarrow$) Supongamos que existe una vecindad U de x tal que $U \cap A = \emptyset$. Como $X \setminus U$ es cerrado y $A \subseteq X \setminus U$, entonces, por definición de cerradura, $\overline{A} \subseteq X \setminus U$. Pero $x \in U$, entonces $x \notin \overline{A}$, contrario a la hipótesis. $\square$

Teorema 1.1.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sean $Y \subseteq X$ con la topología subespacio y $A \subseteq X$. Entonces A es cerrado en Y si y solo si $A = F \cap Y$, con F cerrado en X.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que A es cerrado en Y. Entonces $Y \setminus A$ es abierto en Y. Como $Y \subseteq X$ con la topología subespacio, existe U abierto en X tal que $Y \setminus A = U \cap Y$. Tomemos $F = X \setminus U$, falta demostrar que $A = (X \setminus U) \cap Y$. Sea $x \in A$, entonces $x \notin U$, ya que si suponemos $x \in U$ se tendría que $x \in U \cap Y = Y \setminus A$, en consecuencia x no estaría en A, contradiciendo que $x \in A$, por lo que se tiene la contención $A \subseteq (X \setminus U) \cap Y$. Ahora tomemos $x \in (X \setminus U) \cap Y$, entonces $x \in A$. Pues de lo contrario, $x \in Y \setminus A = U \cap Y$ y $x \in U$, entonces $x \notin (X \setminus U)$, contradiciendo lo supuesto; tenemos ahora que $A \supseteq (X \setminus U) \cap Y$. Por lo tanto $A = (X \setminus U) \cap Y$.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que F es cerrado en X tal que $A = F \cap Y$, necesitamos demostrar que A es cerrado en Y. Lo que es equivalente a demostrar que $Y \setminus A$ es abierto en Y, por lo cual basta probar que $Y \setminus A = (X \setminus F) \cap Y$. Tomemos $x \in Y \setminus A$, entonces $x \notin F$, pues si estuviera, entonces $x \in F \cap Y = A$, de ahí que $x \notin Y \setminus A$, llegando a una contradicción. Por lo que $(Y \setminus A) \subseteq (X \setminus F) \cap Y$. Tomemos ahora $x \in (X \setminus F) \cap Y$ entonces $x \notin A$, pues si de lo contrario, x tendría que estar en $F \cap Y$, de lo cual $x \notin X \setminus F$; y eso no es posible. entonces $(Y \setminus A) \supseteq (X \setminus F) \cap Y$. Por lo tanto $Y \setminus A = (X \setminus F) \cap Y$, como se quería. $\square$

Teorema 1.1.4. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $A \subseteq Y \subseteq X$ es tal que Y es cerrado en X y A es cerrado en Y, entonces A es cerrado en X.*

Demostración. Sabemos que A es cerrado en Y, por el teorema 1.1.3, $A = F \cap Y$ con F cerrado en X. Por hipótesis Y es cerrado en X, entonces A es cerrado en X. □

Definición 6. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $A \subseteq X$, definimos la **frontera** de A como:*

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$$

Note que si A es abierto, $\partial A = \overline{A} \cap (X \setminus A) = \overline{A} \setminus A$.

Ejemplo 6. *Si tomamos a $\mathbb{R}$ con la topología cofinita:*

$$\begin{aligned} \partial(\{1\}) &= \overline{\{1\}} \cap \overline{(\mathbb{R} \setminus \{1\})} \\ &= \{1\} \cap \mathbb{R} \\ &= \{1\} \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \partial(\mathbb{R} \setminus \{1\}) &= \overline{(\mathbb{R} \setminus \{1\})} \setminus (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \\ &= \mathbb{R} - (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \\ &= \{1\} \end{aligned}$$

Definición 7. *Sea X un conjunto cualquiera, una **base** para una topología en X es una colección $\mathscr{B}$ de subconjuntos de X tales que*

i) Para cada $x \in X$, existe al menos un elemento B de $\mathscr{B}$ que lo contiene.

ii) Si x está en la intersección de dos elementos de $\mathscr{B}$, digamos B_1 y B_2, entonces existe un elemento $B_3 \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B_3$ y $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

*Si $\mathscr{B}$ satisface las condiciones anteriores, podemos definir una **topología τ generada por** $\mathscr{B}$ en la que un conjunto $U \subseteq X$ es abierto en X si para todo $x \in U$ existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subseteq U$.*

Definición 8. *Sean X, Y espacios topológicos. La **topología producto** en $X \times Y$ es la topología que tiene como base a la colección $\mathscr{B}$ que consta de todos lo subconjuntos de la forma $U \times V$, donde U y V son subconjuntos abiertos de X e Y respectivamente.*

Definición 9. *Una métrica d en un conjunto X es una función*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

que satisface las siguientes propiedades

1. *$d(x,y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$.*

2. *$d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.*

3. *$d(x,y) = d(y,x)$ para todos $x, y \in X$.*

4. *(Desigualdad del triángulo) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ para todos $x, y, z \in X$.*

Dada una métrica d, al número $d(x,y)$ se le llama la *distancia* de x a y con la métrica d.

Un ***espacio métrico*** (X,d) es un conjunto X equipado con una métrica d.

En los siguientes ejemplos es sencillo verificar que cumplen las propiedades de una métrica.

Ejemplo 7. *Sea $X = \mathbb{R}$ y $d(x,y) = \mid x - y \mid$.*

Ejemplo 8. *Sea X cualquier conjunto, definamos d de la siguiente forma*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \neq y \\ 0 & \text{para } x = y. \end{cases}$$

Definición 10. *Sea (X,d) un espacio métrico y sea A un subconjunto de X con $A \neq \emptyset$, para cada $x \in X$ se define la distancia de x a A por la ecuación*

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, al conjunto

$$B_d(x,\varepsilon) = \{y : d(x,y) < \varepsilon\}$$

*es llamada la **bola** centrada en x de radio ε. A veces se omitirá el símbolo d y sólo se pondrá $B(x,\varepsilon)$.*

Definición 11. *Si (X,d) es un espacio métrico, entonces la colección de todas las bolas $B(x,\varepsilon)$ para $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, es una base para una topología en X, llamada la **topología métrica** inducida por d.*

Definición 12. *Sea (X,d) un espacio métrico y sea A un subconjunto de X, decimos que A es **acotado** si está contenido en una bola de radio finito, es decir, dado $x \in X$ existe $r > 0$ tal que para todo $a \in A$ se tiene que $a \in B(x,r)$.*

Definición 13. *Si A es un conjunto acotado de un espacio métrico (X,d), el diámetro de A es el número*

$$\sup\{d(a_1,a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}.$$

Definición 14. *Un espacio topológico X es llamado un espacio **Hausdorff** (también llamado T_2) si para cada par de puntos x_1 y x_2 en X con $x_1 \neq x_2$, existen vecindades U_1 y U_2 de x_1 y x_2 respectivamente tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Observemos que todo espacio métrico (X,d) (en particular $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual), es un espacio Hausdorff, ya que dados dos puntos distintos $x_1, x_2 \in (X,d)$ las bolas abiertas $B\left(x_1, \frac{d(x_1,x_2)}{3}\right)$ y $B\left(x_2, \frac{d(x_1,x_2)}{3}\right)$ son disjuntas. Más adelante se hará referencia a este ejemplo.

Lema 1.1.5. *Sea X un espacio Hausdorff y sea $Y \subseteq X$ un subespacio X. Entonces Y es Hausdorff.*

Demostración. Sean y_1, y_2 en Y. Como $Y \subseteq X$, entonces $y_1, y_2 \in X$, por ser X Hausdorff existen vecindades U_1, U_2 de y_1, y_2 respectivamente, tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Definamos $V_1 = U_1 \cap Y$ y $V_2 = U_2 \cap Y$, entonces V_1, V_2 son vecindades en Y de y_1, y_2, que además son disjuntas. $\square$

1.2. Funciones continuas

Definición 15. *Sean (X, τ_1) y (Y, τ_2) espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se dice* ***continua*** *si para cada subconjunto abierto V de Y, $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X.*

Note que de la siguiente observación se sigue que la función distancia (de la definición 10) es continua.

Observación: Sea $A \subseteq X$ fijo y sean $x, y \in X$, se tiene que para cada $a \in A$, $d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$, entonces $d(x,A) - d(x,y) \leq d(y,a)$; mas aún $d(x,A) - d(x,y) \leq \inf d(y,a) = d(y,A)$. Se concluye que $d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$.

Teorema 1.2.1. *Sean (X, τ_1), (Y, τ_2) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f es continua.

(2) Para todo $A \subseteq X$, se tiene que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(3) Para todo conjunto cerrado F en Y, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

(4) Sea τ_2 generada por una base $\mathscr{B}$, $f^{-1}(V) \in \tau_1$ para todo $V \in \mathscr{B}$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que f es continua, sea $A \subseteq X$, tenemos que verificar si $x \in \overline{A}$, entonces $f(x) \in \overline{f(A)}$, lo cual es equivalente a demostrar que si V es una vecindad de $f(x)$ entonces $V \cap f(A) \neq \emptyset$ (por el teorema 1.1.2).
Como f es continua, $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto en X y $x \in f^{-1}(V)$, note que $f^{-1}(V)$ es una vecindad de x y $x \in \overline{A}$, entonces $f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$. Sea $y \in f^{-1}(V) \cap A$, entonces $f(y) \in V \cap f(A)$ por lo tanto $V \cap f(A) \neq \emptyset$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea F un conjunto cerrado en Y y sea $A = f^{-1}(F)$. Necesitamos probar que A es cerrado en X, para ello probaremos que $\overline{A} \subseteq A$. Note que $f(A) = f(f^{-1}(F)) \subseteq F$. Sea $x \in \overline{A}$, $f(x) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{F} = F$. Entonces $x \in f^{-1}(F) = A$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Sea $U \in \mathscr{B}$, entonces $Y \setminus U$ es cerrado en Y, por lo que $f^{-1}(Y \setminus U)$ es cerrado en X. Pero $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$, por lo tanto $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

(4) $\Rightarrow$ (1). Sea $V \subset Y$ un abierto en Y, entonces para todo $v \in V$ existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $v \in B$ y $B \subseteq V$. Para cada $v_\alpha \in V$ con $\alpha \in J$, sea $B_\alpha \in \mathscr{B}$ tal que $v_\alpha \in B_\alpha$ y $B_\alpha \subseteq V$. Se tiene que $\bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha = V$. Entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha) \\ &= \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(B_\alpha) \end{aligned}$$

Por lo tanto $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

□

De aquí en adelante, siempre que no cause confusión, haremos referencia a un espacio topológico (X, τ) como X solamente.

Teorema 1.2.2. *Sean X, Y y Z espacios topológicos, si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones continuas, entonces $g \circ f : X \to Z$ es continua.*

Demostración. Si U es abierto en Z, entonces $g^{-1}(U)$ es abierto en Y y $f^{-1}(g^{-1}(U))$ es abierto en X. Pero $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$. Por lo tanto $g \circ f$ es continua. □

Teorema 1.2.3. *Sean $f_1 : A \to X$ y $f_2 : A \to Y$ dos funciones y sea $f : A \to X \times Y$ dada por la ecuación*

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a)).$$

Entonces f es continua si y sólo si las funciones f_1, f_2 son continuas.

Demostración. $\Rightarrow$) Notemos que si $\pi_1 : X \times Y \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ son las proyecciones en el primer y segundo factor, respectivamente, entonces π_1, π_2 son continuas. Si U y V son abiertos en X y Y, respectivamente, entonces $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ y $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$ son abiertos. Además, para cada $a \in A$, $f_1(a) = \pi_1(f(a))$ y $f_2(a) = \pi_2(f(a))$. Por lo que si f es continua, entonces f_1 y f_2, por ser composición de funciones continuas, son continuas.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que f_1 y f_2 son funciones continuas. Por el inciso (4) del teorema 1.2.1, basta probar continuidad para un elemento de la base, es decir, probaremos que que si $U \times V$, donde U y V son básicos, entonces $f^{-1}(U \times V)$ es abierto en A. Un punto $a \in f^{-1}(U \times V)$ si y sólo si $f(a) \in U \times V$, lo cual es cierto si y sólo si $f_1(a) \in U$ y $f_2(a) \in V$, entonces $f^{-1}(U \times Y) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V)$. Como $f_1^{-1}(U)$ y $f_2^{-1}(V)$ son abiertos, la intersección de ellos también lo es. Por lo tanto f es continua. □

Lema 1.2.4 (Lema del pegado)**.** *Sea $X = A \cup B$, donde A y B son cerrados en X. Sean $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ funciones continuas. Si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$, entonces f y g producen una función continua $h : X \to Y$, definida por:*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in A \\ g(x) & si \quad x \in B \end{cases}$$

Demostración. Sea C un subconjunto cerrado de Y. Es suficiente demostrar que $h^{-1}(C)$ es cerrado en X, por el teorema 1.2.1. Note que $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$; para demostrar la primera contención $h^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$ tomemos $x \in h^{-1}(C)$, entonces $h(x) \in C$, se sigue que $x \in (h^{-1}(C) \cap A) \cup (h^{-1}(C) \cap B)$, por lo tanto $x \in f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$. Consideremos ahora $x \in f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$, de ahí que $x \in (f^{-1}(C) \cap A) \cup (g^{-1}(C) \cap B)$ se tiene que $f(x) \cup g(x) \in C$, entonces $h(x) \in C$, por lo tanto $x \in h^{-1}(C)$.

Ahora, como C es cerrado, $f^{-1}(C)$ es cerrado en A, pero A es cerrado en X, entonces $f^{-1}(C)$ es cerrado en X (por el teorema 1.1.4). Similarmente $g^{-1}(C)$ es cerrado en X. Por lo tanto $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$ es cerrado en X como se quería. □

Definición 16. *Sean X y Y dos espacios topológicos. A una función $f : X \to Y$ continua y biyectiva tal que $f^{-1} : Y \to X$ es continua se llama **homeomorfismo**. Si existe tal homeomorfismo, los espacios X y Y se dicen homeomorfos y escribimos $X \cong Y$.*

Teorema 1.2.5. *Sean $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \| x \| = 1\}$ con la norma euclidiana y p el punto $p = (0, 0, 1)$, entonces $(S^2 \setminus \{p\}) \cong \mathbb{R}^2$.*

Demostración. Sea $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus p$. Definamos $f : (S^2 \setminus \{p\}) \to \mathbb{R}^2$ como:

$$f(x) = \frac{1}{1 - x_3}(x_1, x_2).$$

La función f se conoce como la proyección estereográfica. Donde, para cada elemento del dominio, se le hace corresponder un punto en el plano xy, como se describe a continuación. Sea $x \in (S^2 \setminus \{p\})$, al trazar la línea recta que pasa por x y por p, dicha recta cruza al plano xy en un solo punto. Ver la Figura 1.

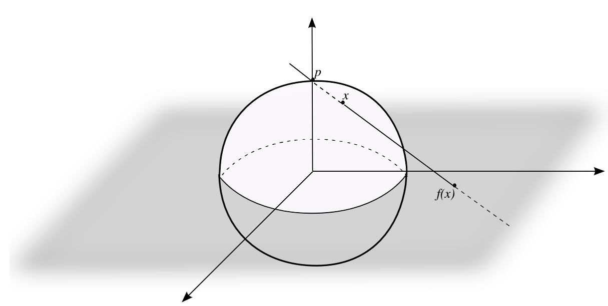


Figura 1.

Para ver que f es un homeomorfismo, notemos que f es continua y biyectiva; además f tiene inversa continua. Para $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, la función $g : \mathbb{R}^2 \to (S^2 \setminus \{p\})$, dada por

$$g(y) = \left(\frac{2y_1}{1+\|y\|^2}, \frac{2y_2}{1+\|y\|^2}, 1 - \frac{2}{1+\|y\|^2} \right)$$

donde $\| y \|$ es la norma euclidiana, satisface que $f \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$ y $g \circ f = Id_{(S^2 \setminus \{p\})}$. Por lo tanto f es un homeomorfismo entre $(S^2 \setminus \{p\})$ y $\mathbb{R}^2$. □

Definición 17. *Una función $f : X \to Y$ se dice que es **abierta** (o **cerrada**) si $f(U)$ es abierto (cerrado) en Y para todo U abierto (cerrado) en X.*

Teorema 1.2.6. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es un homeomorfismo si y sólo si f es continua, biyectiva y abierta.*

Demostración. $\Rightarrow$) De la definición de homeomorfismo, f es continua y biyectiva, sólo resta verificar que f es abierta. Sea U un conjunto abierto en X, definamos $g = f^{-1}$ que por definición es continua, $g : Y \to X$. Por ser g continua y U un abierto en X se tiene que $g^{-1}(U)$ es abierto en Y. Pero $g^{-1}(U) = f(U)$ es un abierto en Y, como se quería.

$\Leftarrow$) Como f es biyectiva tiene inversa. Para que f sea un homeomorfismo sólo resta verificar que su inversa también es continua. Sea $g : Y \to X$ tal que $f^{-1}(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$ y sea U un conjunto abierto de X entonces

$$g^{-1}(U) = (f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$$

que es un conjunto abierto por ser f una función abierta. □

Note que por el teorema 1.2.1, podemos pedir en el teorema anterior que la función sea cerrada en lugar de abierta y se sigue satisfaciendo.

1.3. Compacidad

Definición 18. *Una colección $\mathscr{A}$ de subconjuntos de un espacio X, se dice que cubre a X, o que es una cubierta de X, si la unión de los elementos de $\mathscr{A}$ es igual a X. Y $\mathscr{A}$ es llamada cubierta abierta de X si los elementos de $\mathscr{A}$ son subcojuntos abiertos de X.*

Definición 19. *Un espacio X se dice que es **compacto** si toda cubierta abierta de X contiene una subcolección finita que sigue cubriendo a X.*

Lema 1.3.1. *Sea Y un subespacio de un espacio topológico X. Entonces Y es compacto si y sólo si cualquier cubierta de Y de conjuntos abiertos en X contiene una subcolección finita que cubre a Y.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $\mathscr{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de Y de conjuntos abiertos de X. Entonces la colección $\{A_\alpha \cap Y : \alpha \in I\}$ es una cubierta abierta de Y, de manera que una subcolección finita $\{A_{\alpha_1} \cap Y, ..., A_{\alpha_n} \cap Y\}$ cubre a Y. Por lo tanto $\{A_{\alpha_1}, ..., A_{\alpha_n}\}$ es una subcolección finita de $\mathscr{A}$ que cubre a Y.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora, que cualquier cubierta abierta de Y de conjuntos abiertos en X contiene una subcolección finita que cubre a Y; demostraremos que Y es compacto. Sea $\mathscr{A}' = \{A'_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta de Y por conjuntos abiertos de Y. Para cada $\alpha \in I$, elijamos un conjunto A_α abierto en X tal que $A'_\alpha = A_\alpha \cap Y$. Entonces la colección $\mathscr{A} = \{A_\alpha\}$ es una cubierta de Y de conjuntos abiertos en X. Por hipótesis, existe alguna subcolección $\{A_{\alpha_1}, ..., A_{\alpha_n}\}$ que cubre a Y, entonces $\{A'_{\alpha_1}, ..., A'_{\alpha_n}\}$ es una subcolección de $\mathscr{A}'$ que cubre a Y. $\square$

Teorema 1.3.2. *Sean X y Y espacios topológicos. Sea $f : X \to Y$ una función continua, si $A \subseteq X$ es compacto entonces $f(A)$ es compacto.*

Demostración. Sea $\bigcup_{i \in I} U_i$ una cubierta abierta de $f(A)$. Como cada U_i es un conjunto abierto de Y y por ser f continua, se tiene que $f^{-1}(U_i)$ es abierto para todo $i \in I$. Por lo que $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} U_i)$ es una cubierta abierta de A. Por hipótesis A es compacto, por lo tanto existe un conjunto finito $J \subseteq I$ de manera que $A \subseteq f^{-1}(\bigcup_{j \in J} U_j)$. Por lo que $f(A)$ está contenido en $\bigcup_{j \in J} U_j$, que es una cubierta finita para $f(A)$ con elementos de la cubierta original. $\square$

Lema 1.3.3. *Cualquier subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.*

Demostración. Sea X un espacio compacto y Y un subespacio cerrado de X. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de Y. Como Y es cerrado entonces $X \setminus Y$ es abierto, por lo cual $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \cup \{X \setminus Y\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existe una subcubierta finita $U_1, U_2, ..., U_n$ de la cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \cup \{X \setminus Y\}$ que cubre a X. Ahora si esta subcubierta finita contiene a $X \setminus Y$, lo removemos y obtenemos una colección finita de elementos de la cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ que cubre a Y. Si no lo contiene tomamos esa colección finita, que es una colección con sólo elementos de la cubierta original y cubren a Y. $\square$

Por ejemplo, podemos ver que $\mathbb{R}$ no es compacto. La colección de los conjuntos $\{(n-1, n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$, es una cubierta abierta de $\mathbb{R}$, pero no podemos encontrar una subcolección finita de ellos que siga cubriendo a $\mathbb{R}$.

Teorema 1.3.4. *Si X es un espacio Hausdorff y Y es un subespacio compacto de X, entonces Y es cerrado.*

Demostración. Probaremos que $X \setminus Y$ es abierto. Sea x_0 un elemento de $X \setminus Y$, tenemos que encontrar una vecindad U de x_0 tal que $U \cap Y = \emptyset$. Para cada punto $y \in Y$, elijamos vecindades U_y de x_0 y V_y de y disjuntas, esto es posible por ser X Hausdorff. Vemos que la colección $\{V_y \mid y \in Y\}$ es una cubierta de Y de conjuntos abiertos en X, como Y es compacto, existe una colección finita de ellos que cubren a Y, sea $\{V_{y_1}, V_{y_2}, ..., V_{y_n}\}$ esta colección. Definiendo $V = V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup ... \cup V_{y_n}$ y $U = U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap ... \cap U_{y_n}$, veremos que $U \cap V = \emptyset$. Sea $z \in V$, existe un V_{y_i} en V que contiene a z, entonces $z \notin U_{y_i}$, de ahí que $z \notin U$, como se quería. Además, se tiene que $Y \subset V$, por lo tanto $U \cap Y = \emptyset$. □

Con el siguiente resultado se pueden caracterizar los compactos en $\mathbb{R}$ con la topología usual.

Teorema 1.3.5. *Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual, todo intervalo cerrado $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ es compacto, además $K \subseteq \mathbb{R}$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Demostración. Demostraremos que $[a, b]$ es compacto. Sea $\mathscr{A}$ una cubierta abierta de $[a, b]$ y sea s el supremo de los $x \in [a, b]$ tal que $[a, x]$ puede recubrirse con un número finito de abiertos de $\mathscr{A}$, digamos $[a, x] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ para algunos $U_i \in \mathscr{A}$. Note que $s > 0$, pues cualquier abierto que contenga al extremo a debe contener a $[a, \varepsilon]$, para algún $\varepsilon > 0$. Supongamos que $s < b$, entonces para cualquier abierto $U \in \mathscr{A}$ que contenga a s existe un $\varepsilon > 0$ tal que $[s - \varepsilon, s + \varepsilon] \subseteq U$, por como se definió s, el intervalo $[a, s - \varepsilon]$ está recubierto por un número finito de abiertos de $\mathscr{A}$. Si añadimos U a este conjunto finito, se tendrá una cubierta finita para $[a, s + \varepsilon]$, contradiciendo que s era el supremo. Por lo tanto s necesariamente es igual a b, de ahí que $[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, es decir $[a, b]$ es compacto.

A continuación demostraremos la segunda parte. Supongamos primero que $K \subseteq \mathbb{R}$ es compacto. Por ser K compacto y $\mathbb{R}$ Hausdorff, entonces K es cerrado, por el teorema 1.3.4. Además la colección $\{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de K, por lo que existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq (-n_0, n_0)$, por lo que K está acotado.

Supongamos ahora que K es cerrado y acotado, por ser K acotado existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $K \subseteq [a, b]$. Como K es cerrado en $\mathbb{R}$ también lo es en $[a, b]$. Como $[a, b]$ es compacto, entonces del teorema 1.3.3 K es compacto. □

Lema 1.3.6. *Sean X, Y espacios topológicos con Y compacto y sea $x \in X$. Si W es un abierto en $X \times Y$ con $\{x\} \times Y \subseteq W$, entonces existe un abierto U en X tal que $\{x\} \times Y \subseteq U \times Y \subseteq W$.*

Demostración. Por la definición de la topología producto, podemos escribir a W como $W = \cup_{\alpha \in I} U_\alpha \times V_\alpha$, donde I es un conjunto de índices y U_α, V_α son abiertos de X e Y respectivamente. Como Y es compacto y $\{x\} \times Y \cong Y$, entonces $\{x\} \times Y$ es compacto, por lo que un número finito de los productos $U_\alpha \times V_\alpha$ cubren a $\{x\} \times Y$. Es decir, existe un número finito U_i, V_i para algunos $i \in I$ tales que $\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \times V_i$, donde $x \in U_i$ para $i = 1, ..., n$ y $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Tomando U como la intersección $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, tenemos que

$$\{x\} \times Y \subseteq U \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \times V_i \subseteq W.$$

□

Teorema 1.3.7. *Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ espacios topológicos, entonces $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ es compacto si y sólo si $X_1, X_2, ..., X_n$ son compactos.*

Demostración. Solo se probará el caso cuando se tienen dos espacios topológicos, por inducción se puede generalizar a n espacios. Sea $\mathscr{A}$ una cubierta abierta de $X_1 \times X_2$. Sea $x \in X_1$, como $\{x\} \times X_2$ es compacto (por ser homeomorfo a X_2), existe una subcolección finita $\{W_1, W_2, ..., W_n\}$ de elementos de $\mathscr{A}$ que cubre a $\{x\} \times X_2$. Definiendo $W_x = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$, se tiene que W_x es un abierto en $X_1 \times X_2$ que contiene a $\{x\} \times X_2$, por el lema 1.3.6, existe U_x abierto en X_1 tal que $\{x\} \times X_2 \subseteq U_x \times X_2 \subseteq W_x$.

Por la compacidad de X_1, se necesitan un número finito de U_{x_i} para cubrir a X_1. Por lo que

$$X_1 \times X_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i} \times X_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} W_{x_i}.$$

Por lo que $X_1 \times X_2$ es compacto. □

Teorema 1.3.8 (Heine-Borel)**.** *Un subconjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Demostración. $\Rightarrow$) Como $\mathbb{R}^n$ es Hausdorff, por el teorema 1.3.4 K es cerrado. Para ver que K está acotado basta encontrar $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, ..., n$ tales que $K \subseteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Si $p_i(K)$ representa la proyección en la i-ésima coordenada de K, se sigue del teorema 1.3.2 que $p_i(K)$ es un conjunto compacto de $\mathbb{R}$ para $i = 1, 2, ..., n$, por ser p_i continua y K compacto. Además del teorema 1.3.5 $p_i(K) \subseteq [a_i, b_i]$ para algunos $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, entonces $p_i(K) \subseteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado. Por ser K cerrado existen $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ tales que $K \subseteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Como cada $[a_i, b_i]$ es compacto, el producto $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ también lo es. Por ser K cerrado, se sigue del lema 1.3.3 que K es compacto. □

Corolario 1.3.9. *El conjunto $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \| x \| = 1\}$, con la norma euclidiana, es un conjunto compacto.*

Teorema 1.3.10. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva. Si X es compacto y Y es Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Probaremos que las imágenes de conjuntos cerrados en X bajo f son cerrados en Y. Si A es un conjunto cerrado en X, entonces A es compacto, por 1.3.3, entonces $f(A)$ es compacto. Como Y es Hausdorff, entonces $f(A)$ es cerrado en Y por 1.3.4. □

Teorema 1.3.11. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Si X es compacto, entonces existen puntos m y M en X tales que $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Como X es compacto y f continua, por el teorema 1.3.3, tenemos que $f(X)$ es compacto. Demostraremos que $f(X)$ tiene un elemento máximo. Como $f(X)$ es compacto y $f(X) \subseteq \mathbb{R}$, entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $f(X) \subseteq (a, b)$, se sigue que existe un $c \in (a, b)$ tal que $f(x) \leq c$ para todo $x \in X$. Por lo tanto existe $M \in X$ tal que $f(x) \leq f(M)$ para todo $x \in X$.

De manera análoga, se puede demostrar que $f(X)$ tiene un elemento mínimo. □

Teorema 1.3.12 (Lema del número de Lebesgue)**.** *Sea $\mathscr{A}$ una cubierta abierta del espacio métrico (X, d). Si X es compacto, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto U de X de diámetro menor que δ existe V un elemento de $\mathscr{A}$ tal que $U \subseteq V$.*

Demostración. Sea $\mathscr{A}$ una cubierta abierta de X. Si X es un elemento de $\mathscr{A}$ entonces cualquier número positivo nos sirve. Supongamos que $X \notin \mathscr{A}$, como X es compacto, existe una colección finita $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ de elementos de $\mathscr{A}$ que cubren a X. Definiendo a los conjuntos $C_i = X \setminus A_i$, para todo $i = 1, ..., n$ y a la función $f : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, C_i),$$

mostraremos que $f(x) > 0$ para todo $x \in X$. Dado $x \in X$, escogemos A_i un elemento de la colección finita que contenga a x, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subseteq A_i$, por lo tanto $d(x, C_i) \geq \varepsilon$ y $f(x) \geq \frac{\varepsilon}{n}$. La función distancia es continua, esta continuidad se preserva bajo la suma, por lo que f es continua. Además X es compacto, por el teorema 1.3.11 f tiene un valor mínimo δ, como f es positiva se tiene que $\delta > 0$. Veremos que δ es el número buscado. Sea $U \subseteq X$ de diámetro menor que δ y sea $x_0 \in U$, entonces $U \subseteq B_\delta(x_0)$. Ahora, si C_0 es el conjunto tal que la distancia $d(x_0, C_0)$ es el máximo de las distancias $d(x_0, C_i)$, para $i = 1, 2, ..., n$, veremos que

$$\delta \leq f(x_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x_0, C_i) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x_0, C_0) = d(x_0, C_0),$$

por lo tanto $B_\delta(x_0) \subseteq (X - C_0) = A_0$ y A_0 es un elemento de la cubierta finita. □

Un concepto importante, con el que se finaliza esta sección es el de *compactificación por un punto.*

Definición 20. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Definimos un nuevo espacio (X_∞, τ_∞), donde:*

1. *$X_\infty = X \cup \{\infty\}$, donde ∞, llamado* ***punto al infinito****, es distinto a cualquier otro punto de X.*

2. *τ_∞ consiste de los siguientes conjuntos:*

i) cada elemento de la topología τ de X,

ii) el complemento en X_∞ de todo subconjunto cerrado y compacto de X.

*Al espacio (X_∞, τ_∞) se le llama la **compactificación por un punto** del espacio (X, τ).*

Veremos que (X_∞, τ_∞) es un espacio topológico. La propiedad (T1) se cumple, ya que $\emptyset \in \tau$, y $X_\infty = X_\infty \setminus \emptyset$. Para la propiedad (T2), consideremos $\{U_i\}_{i\in I}$ una colección de elementos de τ_∞, entonces los conjuntos U_i, $i \in I$, son elementos de τ o bien son el complemento de conjuntos cerrados y compactos de X. Podemos poner a $\bigcup_{i\in I} U_i$ como

$$\cup_{i\in I} U_i = (\cup_{j\in J_1} V_j) \cup (\cup_{j\in J_2} W_j)$$

donde los V_j son elementos de τ y los W_j son de la forma $W_j = X \setminus F_j$, con F_j cerrado y compacto en X. Entonces, por ser τ una topología en X, se tiene que $\bigcup_{j\in J_1} V_j \in \tau$, por definición también lo está en τ_∞. Además, $\bigcup_{j\in J_2} W_j = \bigcup_{j\in J_2}(X_\infty \setminus F_j) = X_\infty \setminus \bigcap_{j\in J_2} F_j$, se sigue que la unión de los W_j, para $j \in J_2$ está en τ_∞. Por lo tanto $\bigcup_{i\in I} \in \tau_\infty$. Por último veremos que también se cumple la propiedad (T3). Sean $U_1, U_2 \in \tau_\infty$, tenemos los casos siguientes:

a) Si $U_1, U_2 \in \tau$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \tau$, entonces también está en τ_∞

b) Si U_1, U_2 son de la forma $U_1 = X_\infty \setminus F_1$, $U_2 = X_\infty \setminus F_2$, con F_1, F_2 son cerrados y compactos en X. Entonces $U_1 \cap U_2 = (X_\infty \setminus F_1) \cap (X_\infty \setminus F_2) = X_\infty \setminus (F_1 \cup F_2) \in \tau_\infty$ por ser $F_1 \cup F_2$ un conjunto de X cerrado y compacto.

c) Sean $U_1 \in \tau$ y $U_2 = X_\infty \setminus F$, con F cerrado y compacto en X. Se tiene que

$$\begin{aligned} X_\infty \setminus (U_1 \cap U_2) &= X_\infty \setminus (U_1 \cap (X_\infty \setminus F)) \\ &= (X_\infty \setminus U_1) \cup (X_\infty \setminus (X_\infty \setminus F_1)) \\ &= (X_\infty \setminus U_1) \cup F. \end{aligned}$$

Como U_1 es abierto en X, entonces $X \setminus U_1$ es cerrado en X.

Ejemplo 9. *Si X es la compactificación por un punto de $\mathbb{R}^2$, entonces X es homeomorfo a S^2. Sabemos del teorema 1.2.5, que $\mathbb{R}^2$ es homeomorfo a $(S^2 \setminus \{p\}) \subseteq S^2$, donde $p = (0, 0, 1)$. Además, S^2 es un conjunto compacto, por el teorema 1.3.9. Si agregamos a $\mathbb{R}^2$ un nuevo punto denotado por ∞ y hacemos corresponder a este punto el punto p de S^2, se tendrá lo buscado. Ver [14].*

Observemos que no se piden condiciones sobre el espacio X, pero para garantizar que el nuevo espacio tenga buenas propiedades, se deben pedir algunas hipótesis a X, como aparece en el siguiente teorema; puede verse una demostración en [1].

Teorema 1.3.13. *Sea X un espacio topológico Hausdorff localmente compacto. Pongamos $X^+ = X \cup \{\infty\}$ donde ∞ representa un punto que no está en X. Definimos un conjunto abierto en X^+ si es abierto en X o $X^+ \setminus C$ donde $C \subseteq X$ es compacto. Entonces esto define una topología en X^+ que hace a X^+ un espacio compacto y Hausdorff. Además esta topología en X^+ es la única topología que hace X^+ un espacio compacto y Hausdorff teniendo a X como subespacio.*

1.4. Conexidad

Definición 21. *Se dice que un espacio topológico X es* ***disconexo*** *si existen dos abiertos, U y V de X, disjuntos y no vacíos tales que $X = U \cup V$. Decimos que X es* ***conexo*** *si no es disconexo.*

Cuando un espacio es disconexo, se suele decir que los dos abiertos U y V con las propiedades anteriores forman una ***separación*** del espacio.

Definición 22. *Si Y es un subespacio de un espacio topológico X, una separación de Y es un par de conjuntos disjuntos no vacíos A, B de X cuya unión es Y, y ninguno de ellos contiene puntos límite uno del otro.*

Observemos que la *definición 22* coincide con la *definición 21* cuando Y es todo X, pues se tendría que la unión de A y B es X, como ninguno de ellos contiene puntos límite uno del otro, entonces $A \cap B = \emptyset$, además A y B son necesariamente abiertos en X.

Lema 1.4.1. *Sea Y un subespacio de un espacio topológico X, entonces Y es conexo si no existe una separación de Y.*

Demostración. Supongamos primero que A, B forman una separación de Y. Entonces A es abierto y cerrado en Y, por lo que la cerradura de A en Y es el conjunto $\overline{A} \cap Y$ (donde $\overline{A}$ es la cerradura de A en X). Como A es cerrado en Y, $A = \overline{A} \cap Y$, es decir $\overline{A} \cap Y = \emptyset$. Por ser $\overline{A}$ la unión de A con sus puntos límite, B no contiene puntos límite de A. Un argumento similar muestra que A no contiene puntos límite de B.

Supongamos ahora que A, B son conjuntos abiertos, disjuntos y cuya unión es Y, ninguno de los cuales contiene puntos límite uno del otro, entonces $\overline{A} \cap B = \emptyset$ y $A \cap \overline{B} = \emptyset$, así que $\overline{A} \cap Y = A$ y $\overline{B} \cap Y = B$. Por lo que A, B son cerrados en Y y como $A = Y \setminus B$ y $B = Y \setminus A$, entonces A, B son abiertos en Y como se quería. $\square$

Ejemplo 10. *Si tomamos $\mathbb{R}$ con la topología usual y $A \subseteq \mathbb{R}$ (con la topología subespacio), $A = (0, 1] \cup [2, 3)$ no es conexo en $\mathbb{R}$ porque tiene una separación:*

$$A = U \cup V, \text{ con } U = (0, 1] \text{ y } V = [2, 3).$$

Ejemplo 11. *Un conjunto X con la topología cofinita es conexo, pues en esta topología no hay abiertos disjuntos no vacíos, es decir si U y V son dos abiertos no vacíos en X necesariamente la intersección de U y V es no vacía. Supongamos que $U \cap V = \emptyset$ y supongamos además que $x \in U$, entonces $x \notin V$ es decir $x \in X \setminus V$, por lo tanto $U \subseteq (X \setminus V)$, pero $X \setminus V$ es finito por lo que U no podría ser un abierto de X. Por lo tanto no puede existir una separación para dicho espacio.*

Teorema 1.4.2. *El intervalo cerrado $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $[0,1]$ es disconexo. Sea U, V una separación de $[0,1]$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $1 \in V$. Sea $s = \sup U$, $s \in [0,1]$. Además $s \neq 0, 1$. Pues si $s = 0$, se tendría que $V = [0,1]$ y U sería vacío. De igual forma, si $s = 1$, entonces V no sería abierto, ya que no existiría ninguna vecindad abierta de 1 contenida en V.

Ahora, si $s \in U$, como U es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $s \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subseteq U$, pero $s < s + \frac{\varepsilon}{2} \in U$, entonces s no sería cota superior de U.

Por último, veamos que pasa si $s \in V$. Como V es abierto, existiría $\varepsilon > 0$ tal que $s \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subseteq V$, por lo que $s - \frac{\varepsilon}{2}$ también sería cota superior de U, pero $s - \frac{\varepsilon}{2} < s$, entonces s no sería mínima. Por lo tanto $s \notin U \cup V$, entonces U, V no pueden ser una separación de $[0,1]$.

□

Teorema 1.4.3. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y X conexo, entonces $f(X)$ es conexo.*

Demostración. Podemos suponer que $f(X) = Y$, basta demostrar que Y es conexo. Supongamos lo contrario, es decir supongamos que Y es disconexo, sea $Y = A \cup B$ una separación, entonces $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ que forman una separación de X, pero X es conexo. Por lo tanto, $Y = f(X)$ es conexo. □

Lema 1.4.4. *Sea X un espacio conexo y $g : X \to Y$ una función continua. Sean A y B conjuntos abiertos y disjuntos en Y, tales que $g(X) \subseteq A \cup B$. Si $g(x_0) \in A$ para algún $x_0 \in X$, entonces $g(X) \subseteq A$.*

Demostración. Lo demostraremos por contradicción, supongamos que existe algún $x_1 \in X$ de manera que $g(x_1) \in B$, entonces A y B son no vacíos disjuntos y $g(X) \subseteq A \cup B$ por lo tanto forman una separación de $g(X)$ y eso es imposible, pues sabemos que la imagen de un conjunto conexo bajo una función continua es también un conjunto conexo. Por lo tanto $g(x) \in A$ para todo $x \in X$. □

Definición 23. *Dados dos puntos $x, y \in X$, una* ***trayectoria*** *en X de x a y es una función continua $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Un espacio X se dice que es* ***conexo por trayectorias*** *si todo par de puntos de X pueden ser unidos por una trayectoria en X.*

Siempre que no sea motivo de confusión, de aqui en adelante escribiremos I para hacer referencia al intervalo $[0, 1]$.

Teorema 1.4.5. *Sea X un espacio topológico. Si X es conexo por trayectorias, entonces X es conexo.*

Demostración. Supongamos que U, V es una separación de X, como X es conexo por trayectorias, existe $\gamma : I \to X$ una trayectoria que conecta un punto de U con un punto de V, podemos suponer que $\gamma(0) \in U$ y $\gamma(1) \in V$, entonces $\gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$ es una separación de I, pero eso es imposible, pues sabemos por el teorema 1.4.2 que I es conexo. Por lo tanto X es conexo.

$\square$

Definición 24. *Un espacio topológico X se dice que es* ***localmente conexo*** *en x si para toda vecindad U de x, existe una vecindad conexa V de x tal que $V \subseteq U$. Además decimos que X es localmente conexo, si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

Definición 25. *Un espacio topológico X se dice que es* ***localmente conexo por trayectorias*** *en x si para toda vecindad U de x, existe una vecindad conexa por trayectorias V de x tal que $V \subseteq U$. Además, decimos que X es localmente conexo por trayectorias si es localmente conexo por trayectorias en cada punto.*

1.5. Relaciones de equivalencia

Definición 26. *Sea X un conjunto, una* ***relación*** *$\mathcal{R}$ es un subconjunto de $X \times X$. Una relación $\mathcal{R}$ es una* ***relación de equivalencia*** *si :*

(i) Es reflexiva. Es decir $(x, x) \in \mathcal{R}$ para todo $x \in \mathcal{R}$

(ii) Es simétrica. Si para todo $(x, y) \in \mathcal{R}$, se tiene que $(y, x) \in \mathcal{R}$.

(iii) Transitiva. Si $(x, y) \in \mathcal{R}$ y $(y, z) \in \mathcal{R}$ entonces $(x, z) \in \mathcal{R}$.

Si $(x, y) \in \mathcal{R}$ lo denotamos como $x \sim y$ (decimos que x está relacionado con y). Dada una relación de equivalencia $\sim$ en un conjunto X y un elemento x de X, definimos al subconjunto $[x]$ de X como $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$, llamado ***clase de equivalencia*** determinado por x y se denota por $[x]$. Donde x es un ***representante*** de la clase de equivalencia.

Las relaciones de equivalencia son muy importantes pues nos permiten clasificar a los elementos de un espacio mediante las clases de equivalencia.

Ejemplo 12. *Tomemos al conjunto* $\mathbb{Z}$ *y sean* $x, y \in \mathbb{Z}$*, decimos que* $x \sim y$ *si y sólo si* $5 \mid x - y$*.*

Veremos que $\sim$ *es una relación de equivalencia. Es reflexiva, ya que* $5 \mid x - x$*. Es simétrica, pues si* $5 \mid x - y$ *es claro que* $5 \mid y - x$*. Es transitiva, si* $5 \mid x - y$ *y* $5 \mid y - z$ *entonces* $5 \mid (x - y) + (y - z)$*, de lo cual se concluye que* $5 \mid x - z$*. Por la tanto* $\sim$ *es una relación de equivalencia. Calculemos sus clases de equivalencia:*

$$[0] = \{x \in \mathbb{Z} : 5 \mid x\} = \{\cdots, -10, -5, 0, 5, 10, \cdots\}$$

$$[1] = \{x \in \mathbb{Z} : 5 \mid x - 1\} = \{\cdots, -9, -4, 1, 6, 11, \cdots\}$$

$$[2] = \{x \in \mathbb{Z} : 5 \mid x - 2\} = \{\cdots, -8, -3, 2, 7, 12, \cdots\}$$

$$[3] = \{x \in \mathbb{Z} : 5 \mid x - 3\} = \{\cdots, -7, -2, 3, 8, 13, \cdots\}$$

$$[4] = \{x \in \mathbb{Z} : 5 \mid x - 4\} = \{\cdots, -6, -1, 4, 9, 14, \cdots\}$$

Note que $[0] = [5]$, $[1] = [6]$, etcétera. Hemos clasificado a los elementos de $\mathbb{Z}$ en $[0]$, $[1]$, $[2]$, $[3]$ y $[4]$.

Definición 27. *Dado un espacio topológico* X*, definimos una relación de equivalencia en* X *por* $x \sim y$ *si existe un conjunto conexo de* X *que contiene a los puntos* x*,* y*. Las clases de equivalencia son llamadas las* ***componentes*** *(o componentes conexas) de* X*.*

Observemos que la relación definida en la definición anterior es efectivamente una relación de equivalencia. La reflexividad y simetría son inmediatas mientras que la transitividad se sigue del teorema 23.3 de [14], el cual dice que un espacio que es unión de subespacios conexos con un punto en común, es conexo.

Definición 28. *Definimos otra relación de equivalencia en el espacio* X*, como* $x \sim y$ *si existe una trayectoria en* X *de* x *a* y*. Las clases de equivalencia son llamadas* ***componentes por trayectorias*** *de* X*.*

Para ver que esta relación es de equivalencia, para un punto $x \in X$ basta tomar la trayectoria constante en x teniendo así la reflexividad; para la simetría, si $f : I \to X$ es una trayectoria de x a y, la trayectoria inversa de f define una trayectoria de y a x. La transitividad se sigue del *lema del pegado*, lema 1.2.4.

Lema 1.5.1. *Un espacio* X *es localmente conexo por trayectorias si y sólo si para cualquier conjunto abierto* U *de* X*, cada componente conexa por trayectorias de* U *es abierta en* X*.*

Demostración. Probaremos primero que si X es localmente conexo por trayectorias, entonces toda componente conexa por trayectorias de un abierto en X es abierta. Sea U un conjunto abierto de X y sea C una componente conexa por trayectorias de U. Elijamos $x \in C$ arbitrario, como X es localmente conexo por trayectorias, existe una vecindad V de x tal que $V \subseteq U$. Como V es conexa por trayectorias, está completamente contenida en la componente conexa por trayectorias C de U. Por lo tanto C es un conjunto abierto.

Probaremos la otra implicación. Supongamos ahora que toda componente conexa por trayectorias de conjuntos abiertos de X es abierta. Sea $x \in X$, consideremos U una vecindad de x. Sea C la componente conexa por trayectorias de U conteniendo a x, entonces C es conexa por trayectorias, por hipótesis C es abierta en X. Por lo tanto X es localmente conexo por trayectorias. $\square$

Definición 29. *Sea X un espacio topológico, $\sim$ una relación de equivalencia definida en X y $p : X \to X/\sim$ la función que asigna a cada elemento de X la clase de equivalencia a la que pertenece. Se llama **topología cociente** sobre $X/\sim$ a la topología en la que un conjunto $U \subseteq X/\sim$ es abierto si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en X. A p se le llama **función cociente** y a $X/\sim$ **espacio cociente**.*

Definición 30. *Un **orden parcial** es una relación binaria $\mathcal{R}$ sobre un conjunto X que es reflexiva, antisimétrica y transitiva, es decir, para todos $x, y, z \in X$ se tiene que:*

1. *$(x, x) \in \mathcal{R}$ (reflexividad).*
2. *Si $(x, y) \in \mathcal{R}$ y $(y, x) \in \mathcal{R}$, entonces $x = y$ (antisimetría).*
3. *Si $(x, y) \in \mathcal{R}$ y $(y, z) \in \mathcal{R}$, entonces $(x, z) \in \mathcal{R}$ (transitividad).*

*A un conjunto con un orden parcial se le denomina **conjunto parcialmente ordenado** y la relación $\mathcal{R}$ usualmente se denota por $\leq$.*

Definición 31. *Dos elementos x, y de un conjunto parcialmente ordenado por una relación $\leq$ se dice que son **comparables** si y sólo si $x \leq y$ o $y \leq x$. Así, un conjunto parcialmente ordenado en el que todo par de elementos son comparables con una relación $\leq$ se dice que es **totalmente ordenado** y a la relación $\leq$ se le denomina **orden total**.*

1.6. Teoría de grupos

Definición 32. *Un **grupo** es una pareja $(G, \circ)$, con G un conjunto no vacío, $\circ$ una función de $G \times G \to G$, llamada operación binaria y denotada por $\circ(x, y) := x \circ y$, la cual satisface:*

(i) La operación $\circ$ es asociativa, es decir, $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ para todos $x, y, z \in G$.

*(ii) Existe $e \in G$ tal que $e \circ x = x \circ e = x$, para todo $x \in G$. A e se le llama **neutro**.*

*(iii) Dado $x \in G$, existe $x^{-1} \in G$ tal que $x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = e$. A x^{-1} se le llama **inverso**.*

Ejemplo 13. *El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros con la operación adición, forma un grupo. Claramente la operación es asociativa, además el entero 0 es el elemento neutro y para cada $x \in \mathbb{Z}$, el inverso de x es $-x$.*

Ejemplo 14. *El conjunto $GL(n, \mathbb{R})$, de matrices invertibles $n \times n$ con entradas en los reales, con la multiplicación de matrices como operación, forma un grupo. Puede verse que la operación es asociativa, el elemento neutro en el grupo es la matriz identidad $n \times n$ y el inverso de un elemento de $GL(n, \mathbb{R})$ es su matriz inversa.*

Definición 33. *Un grupo se dice que es **abeliano** (o conmutativo) si $x \circ y = y \circ x$ para todos $x, y \in G$.*

Un ejemplo que nos será de mucha utilidad más adelante es el grupo que forma el conjunto $\mathbb{Z}$ con la operación adición. Puede verse de manera sencilla que es abeliano. Sin embargo el grupo del *ejemplo 14* no es conmutativo para $n \geq 2$, pues en general el producto de matrices no conmuta.

Definición 34. *Sea G un grupo y x un elemento de G. Denotamos el inverso de x por x^{-1}. El símbolo x^n representa el producto de x por si mismo n veces , x^{-n} denota el producto de x^{-1} por si mismo n veces, y x^0 denota el elemento neutro de G. Si el conjunto de todos los elementos de la forma x^m, para $m \in \mathbb{Z}$, coincide con G, entonces se dice que G es un grupo **cíclico** y x se dice que es un **generador** de G*

Definición 35. *Sean $(G_1, \circ)$ y $(G_2, *)$ dos grupos. A una función $f : G_1 \to G_2$ que satisface $f(x \circ y) = f(x) * f(y)$ para todos x, y en G_1, se le llama **homomorfismo**. El homomorfismo f es llamado **monomorfismo** si éste es inyectivo. Es llamado **epimorfismo** si es suprayectivo e **isomorfismo** si éste es biyectivo.*

De la definición anterior observemos que si e_1 y e_2 son los elementos neutros de G_1 y G_2 respectivamente entonces $f(e_1) = e_2$. Además el núcleo de f es el conjunto $f^{-1}(e_1)$, entonces para verificar inyectividad, basta con comprobar que su núcleo sólo consta del elemento neutro.

Ejemplo 15. *Definamos $h : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ como*

$$h(t) = e^t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Es inmediato ver que $h(s + t) = h(s)h(t)$ para todos s, $t \in \mathbb{R}$, es decir, h preserva la operación. Por lo tanto h es un homomorfismo.

Otro ejemplo de un homomorfismo es el que va del grupo $(\mathbb{R}, +)$ al grupo $GL(2, \mathbb{R})$ definido por

$$f(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Definición 36. *Sea $(G, \circ)$ un grupo y sea $H \subseteq G$. Decimos que H es un **subgrupo** de G si:*

a) El elemento neutro está en H.

b) Dados h_1 y h_2 en H, se tiene que $(h_1 \circ h_2) \in H$.

c) Para todo $h \in H$, $h^{-1} \in H$.

Puede verificarse que si H es un subgrupo de $(G, \circ)$, entonces $(H, \circ)$ es un grupo.

Definición 37. *Sea G un grupo y N un subgrupo de G. Se dice que N es un **subgrupo normal** si $gng^{-1} \in N$ para todos $g \in G$ y $n \in N$.*

Definición 38. *Sea N un subgrupo normal de G. Definimos el conjunto $aN = \{an : n \in N \text{ y } g \in G, \text{ fijo}\}$ y lo denominamos como **clase lateral izquierda** de N en G. El conjunto de todas las clases laterales izquierdas de N en G tiene una estructura de grupo bajo la multiplicación definida de la siguiente manera:*

$$(aN)(bN) = (ab)N.$$

*A este grupo de le denomina el **grupo cociente** modulo N y se le denota por G/N.*

De manera similar a como se definieron las clases laterales izquierdas pueden definirse las clases laterales derechas, note que para ello no es necesario pedir que el subgrupo sea normal; lo que hacen estas clases es partir de alguna forma al grupo. Sin embargo para poder tener una estructura de grupo, el subgrupo con el que formamos dichas clases debe ser normal.

Ejemplo 16. *Consideremos al grupo cíclico infinito $(\mathbb{Z}, +)$ y al subgrupo $2\mathbb{Z}$, éste es normal, por ser $(\mathbb{Z}, +)$ abeliano. Entonces $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es isomorfo al grupo que contiene dos elementos $\{[0], [1]\}$.*

Los subgrupos de $\mathbb{Z}$ son de la forma $m\mathbb{Z}$, con $m \geq 0$ entero. Todos, excepto cuando $m = 0$ son isomorfos a $\mathbb{Z}$, es decir, son cíclicos infinitos. Entonces $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ tiene m elementos, si $m > 0$. Se tiene entonces que el cociente de un grupo cíclico infinito por cualquier subgrupo no trivial es finito.

Capítulo 2

Homotopía

2.1. Homotopía de trayectorias

Definición 39. *Si f y g son funciones continuas del espacio X en el espacio Y, decimos que f es **homotópica** a g si existe una función continua $F : X \times I \to Y$ tal que:*

$$F(x,0) = f(x) \qquad y \qquad F(x,1) = g(x)$$

*para cada $x \in X$. La función F se conoce como homotopía entre f y g. Si f es homotópica a g, escribimos $f \simeq g$. Ahora, si g es la función constante, siguiendo la notación de [4], decimos que f es **nulhomotópica**.*

Definición 40. *Dos trayectorias f y g, que aplican el intervalo I en X, se dice que son **homotópicas por trayectorias** (o por extremos fijos) si tienen el mismo punto inicial x_0 y el mismo punto final x_1, y si existe una función continua $F : I \times I \to X$ tal que:*

$$F(s,0) = f(s) \qquad y \qquad F(s,1) = g(s)$$
$$F(0,t) = x_0 \qquad y \qquad F(1,t) = x_1,$$

para cada $s \in I$ y cada $t \in I$. La función F recibe el nombre de homotopía con extremos fijos entre f y g, y escribimos $f \simeq_p g$.

Si f es una trayectoria, denotaremos su clase de equivalencia de homotopía respecto a $\simeq$ ó $\simeq_p$ (según el contexto) por $[f]$. Por simplicidad usaremos sólo el símbolo $\simeq$.

Lema 2.1.1. *Las relaciones $\simeq$ y $\simeq_p$ son relaciones de equivalencia.*

Demostración. Vamos a probar que $\simeq$ cumple las tres propiedades. Es fácil ver que dada f se cumple $f \simeq f$, basta considerar $F(x,t) = f(x)$ para todo $t \in I$. Ahora si

$f \simeq f'$ vamos a probar que $f' \simeq f$. Sea F una homotopía entre f y f', definimos $G(x,t) = F(x, 1-t)$, entonces G es continua por ser F continua, además G es una homotopía entre f' y f, pues cumple

$$G(x,0) = F(x,1) = f'(x)$$

y

$$G(x,1) = F(x,0) = f(x).$$

Por lo tanto $f' \simeq f$.

Sólo falta probar transitividad, es decir, si $f \simeq f'$ y $f' \simeq f''$ entonces $f \simeq f''$. Sea F una homotopía entre f y f' y sea F' una homotopía entre f' y f''. Definimos $G : X \times I \to Y$ como

$$G(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & \text{para } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F'(x, 2t-1) & \text{para } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

G está bien definida, ya que si $t = \frac{1}{2}$, tenemos

$$F(x,1) = f'(x) = F'(x,0).$$

Como G es continua en $X \times [0, \frac{1}{2}]$ y en $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ que son subconjuntos cerrados de $X \times I$, por el lema del pegado 1.2.4, se tiene que G es continua en $X \times I$. Entonces G es una homotopía entre f y f''.

La demostración de que $\simeq_p$ es una relación de equivalencia, se hace de manera análoga a la demostración anterior, sustituyendo donde se tenía homotopía por homotopía de trayectorias con extremos fijos. □

Recordemos que un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es un *conjunto convexo* si el segmento de recta que une a cualesquiera dos puntos de A está en A, es decir, si a y b están en A, entonces $ta + (1-t)b \in A$ para todo $t \in [0,1]$. Notemos que $[0,1]$ y $\mathbb{R}$ son convexos.

Teorema 2.1.2. *Sea X un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ y sean x_0 y x_1 en X. Entonces cualesquiera dos trayectorias en X de x_0 a x_1 son homotópicas en X con extremos fijos.*

Demostración. Sean α y β dos trayectorias en X que van de x_0 a x_1. Definamos $F : I \times I \to X$ como

$$F(s,t) = (1-t)\alpha(s) + t\beta(s) \qquad 0 \leq s, t \leq 1$$

Por ser X convexo $F(s,t) \in X$ para todos $s, t \in I$, además F es continua, con $F(s,0) = \alpha(s)$ y $F(s,1) = \beta(s)$, entonces F es una homotopía entre las trayectorias α y β, que además mantiene a los extremos fijos, pues $F(0,t) = x_0$ para todo $t \in I$ y $F(1,t) = x_1$ para todo $t \in I$. Por lo tanto F es una homotopía entre las trayectorias α y β con extremos fijos. □

Definición 41. *Si f es una trayectoria en X de x_0 a x_1, y g es una trayectoria en X de x_1 a x_2, definimos el producto $f * g$ de f y g como la trayectoria h dada por:*

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & si\ s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s-1) & si\ s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Esta función h está bien definida y es continua, por el *lema del pegado 1.2.4*, además h forma una trayectoria que va de x_0 a x_2.

Como se demostrará a continuación, la operación producto sobre trayectorias induce una operación bien definida sobre las clases de homotopía de trayectorias dada por:

$$[f] * [g] = [f * g].$$

Consideremos a F una homotopía de trayectorias entre f y f' con el mismo punto inicial x_0 y mismo punto final x_1, sea G una homotopía de trayectorias entre g y g' con punto inicial x_1 y punto final x_2. Ver la figura 2.

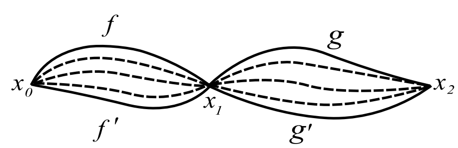


Figura 2.

Definimos $H(s,t)$ como

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s-1,t) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

H está bien definida, ya que $F(1,t) = x_1 = G(0,t)$, para todo $t \in I$. Además, por el lema del pegado 1.2.4 H es continua. Sólo resta verificar que H es una homotopía de trayectorias entre $f * g$ y $f' * g'$.

$$\begin{aligned} H(s,0) &= \begin{cases} F(2s,0) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s-1,0) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(2s) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s-1) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \\ &= (f * g)(s) \end{aligned}$$

Además

$$H(s,1) = \begin{cases} F(2s,1) & \text{para } s \in [0,\frac{1}{2}] \\ G(2s-1,1) & \text{para } s \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f'(2s) & \text{para } s \in [0,\frac{1}{2}] \\ g'(2s-1) & \text{para } s \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$
$$= (f' * g')(s)$$

Y como $H(0,t) = F(0,t) = x_0$ y $H(1,t) = G(1,t) = x_2$, entonces $H(s,t)$ es una homotopía de trayectorias entre $f * g$ y $f' * g'$.

Lema 2.1.3. *Si $k : X \to Y$ es un función continua y si F es una homotopía de trayectorias en X entre f y f', entonces $k \circ F$ es una homotopía de trayectorias en Y entre $k \circ f$ y $k \circ f'$.*

Demostración. Como F es una homotopía de trayectorias entre f y f', cumple que $F(s,0) = f(s)$, $F(s,1) = f'(s)$, $F(0,t) = x_0$ y $F(1,t) = x_1$ para todo $s \in I$ y para todo $t \in I$.

Ahora, $(k \circ F)(s,0) = (k \circ f)(s)$, $(k \circ F)(s,1) = (k \circ f')(s)$, $(k \circ F)(0,t) = k(x_0)$ y $(k \circ F)(1,t) = k(x_1)$ para todo $s,t \in I$. Como k es continua entonces $k \circ F$ es continua, por lo tanto $k \circ F$ es una homotopía entre $k \circ f$ y $k \circ f'$. □

Lema 2.1.4. *Si $k : X \to Y$ es una función continua y si f y g son trayectorias en X tales que $f(1) = g(0)$, entonces*

$$k \circ (f * g) = (k \circ f) * (k \circ g).$$

Demostración. El producto $f * g$ está bien definido y es continuo, por el lema del pegado. Como k es continua, $(k \circ (f * g))(s)$ también lo es y se tiene que:

$$(k \circ (f * g))(s) = \begin{cases} (k \circ f)(2s) & \text{para } s \in [0,\frac{1}{2}] \\ (k \circ g)(2s-1) & \text{para } s \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$
$$= [(k \circ f) * (k \circ g)](s).$$

□

Teorema 2.1.5. *La operación $*$ definida en la definición 41 tiene las siguientes propiedades:*

(i) (Asociatividad). Si $[f] * ([g] * [h])$ está definida, $([f] * [g]) * [h]$ también lo está y además son iguales.

(ii) (Neutro por la izquierda y derecha). Dado x en X, sea e_x la trayectoria constante $e_x : I \to X$ que lleva todo I al punto x. Si f es una trayectoria de x_0 a x_1, entonces

$$[f] * [e_{x_1}] = [f] \qquad y \qquad [e_{x_0}] * [f] = [f]$$

(iii) (Inverso). Dada una trayectoria f en X de x_0 a x_1, sea $\bar{f}$ la trayectoria dada por $\bar{f}(s) = f(1 - s)$ conocido como trayectoria inversa de f. Entonces

$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}] \qquad y \qquad [\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}]$$

Demostración. La idea de la demostración de la parte *(i)* se basa en la figura 3.

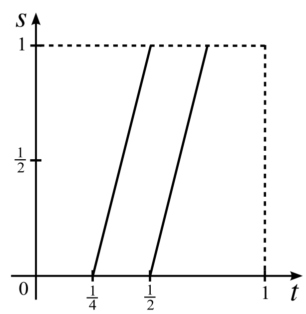


Figura 3.

Definimos $F : I \times I \to X$ por:

$$F(t,s) = \begin{cases} f(\frac{4t}{1+s}), & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ g(4t-1-s) & \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ h(1-\frac{4(1-t)}{2-s}) & \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

Los argumentos de f, g, h están bien definidos, pues para $t \in [0, \frac{s+1}{4}]$, si $t = 0$ entonces $\frac{4t}{1+s}$ es cero, y si $t = \frac{s+1}{4}$ entonces $\frac{4t}{1+s}$ es uno, como $\frac{4t}{1+s}$ es continua y lineal en t, se tiene que para cada $t \in [0, \frac{s+1}{4}]$, $\frac{4t}{1+s}$ está en $[0,1]$. De manera similar puede verse para g y h.

Observemos que para $t \in I$, cuando $s = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} F(t,0) &= \begin{cases} f(4t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ g(4t-1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ h(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} (f * g)(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ h(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \\ &= [(f * g) * h](t) \end{aligned}$$

Además, si $s = 1$, para $t \in I$ tenemos

$$\begin{aligned} F(t,1) &= \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(4t-2) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ h(4t-3) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (g * h)(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= [f * (g * h)](t) \end{aligned}$$

Por el lema del pegado, F es continua, por lo tanto $([f] * [g]) * [h]$ está bien definido; además F es una homotopía entre $(f * g) * h$ y $f * (g * h)$. Por lo tanto $([f] * [g]) * [h] = [f] * ([g] * [h])$.

Probaremos la propiedad *(ii)*. Sea e_0 la trayectoria constante cero en I y sea $i : I \to I$ la función identidad, que es una trayectoria en I que va de 0 a 1. Entonces $e_0 * i$ también es una trayectoria en I de 0 a 1. Como I es convexo, existe una homotopía de trayectorias G en I entre i y $e_0 * i$. Como f es un función continua, por el lema 2.1.3 $f \circ G$ es una homotopía de trayectorias entre $f \circ i = f$ y $f \circ (e_0 * i)$, pero por el lema 2.1.4 $f \circ (e_0 * i) = (f \circ e_0) * (f \circ i) = e_{x_0} * f$. Por lo tanto $[e_{x_0}] * [f] = [f]$. De manera análoga puede verse que $[f] * [e_{x_1}] = [f]$.

Probaremos ahora la propiedad *(iii)*. Notemos que si $i : I \to I$ es la función identidad, entonces la función $\bar{i}(s) = (1-s)$ es el inverso de i, es decir, es la trayectoria recorrida de 1 a 0. Entonces $i * \bar{i}$ es una trayectoria recorrida en I que comienza y acaba en cero, al igual que la trayectoria constante cero. Como I es convexo, existe una homotopía de trayectorias H en I entre e_0 e $i * \bar{i}$, entonces por el lema 2.1.3 $f \circ H$ es una homotopía de trayectorias entre $f \circ e_0 = e_{x_0}$ y $(f \circ i) * (f \circ \bar{i}) = f * \bar{f}$. Por lo tanto $[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}]$

De manera análoga, podemos ver que $\bar{i} * i$ es homotópica por trayectorias en I a e_1, aplicando los lemas 2.1.3 y 2.1.4, puede concluirse que $[\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}]$. □

2.2. El grupo fundamental

Anteriormente vimos que el conjunto de clases de homotopía de trayectorias en un espacio X con la operación $*$ tiene propiedades similares a las de un grupo, salvo que el producto de dos clases de homotopía de trayectorias no siempre esta definido. Podemos arreglar este problema restringiéndonos a las trayectorias que empiezan y terminan en un mismo punto.

Definición 42. *Sea (X, τ) un espacio topológico y x_0 un punto de X. Una trayectoria que comienza y termina en x_0 se llama* ***lazo basado*** *en x_0, siguiendo la notación de [4]. El conjunto de las clases de homotopía de trayectorias asociadas a los lazos* *basados en x_0, con la operación $*$ se denomina* ***grupo fundamental*** *de X relativo al* ***punto base*** *x_0, y se denota por $\pi_1(X, x_0)$.*

Si $\pi_1(X, x_0)$ consiste sólo de la identidad, diremos que el grupo fundamental es trivial y escribiremos $\pi_1(X, x_0) \cong 1$. El espacio más sencillo del cual podemos calcular su grupo fundamental es el del espacio que consiste de un solo punto, en el cual sólo existe una clase de equivalencia que a su vez tiene únicamente a la función constante en el punto base. Por lo que su grupo fundamental es trivial.

Otro espacio del que podemos calcular su grupo fundamental de manera fácil es cuando se tiene un conjunto convexo, que veremos en el siguiente resultado.

Teorema 2.2.1. *Sea X un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ y sea $x_0 \in X$. Entonces $\pi_1(X, x_0) \cong 1$.*

Demostración. Sea α un lazo en X basado en x_0, por el teorema *2.1.2*, α es homotópico a cualquier lazo en X basado en x_0. En particular α es homotópico al lazo constante en x_0, cuyo grupo fundamental es trivial, por lo tanto $\pi_1(X, x_0) \cong 1$. $\square$

Corolario 2.2.2. *El grupo fundamental de $\mathbb{R}$ es trivial.*

En general no es tan fácil calcular el grupo fundamental de un espacio. En lo que resta de la sección se desarrollarán las herramientas necesarias para calcular el grupo fundamental de la circunferencia, el cual no es trivial.

Sea $h : X \to Y$ una función continua que lleva el punto x_0 de X al punto y_0 de Y, denotada por $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ y sea $f : I \to X$ un lazo en X basado en x_0 entonces la composición $h \circ f$ es un lazo en Y basado en y_0, por lo que podemos definir una relación entre los grupos fundamentales de los espacios X e Y, como sigue.

Definición 43. *Sea $f : I \to X$ un lazo en basado en x_0 y sea $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ una función continua, definimos $h_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ como:*

$$h_*([f]) = [h \circ f].$$

A la función h_* se le denomina ***homomorfismo inducido*** *por h, relativo al punto base x_0.*

Veremos que la función h_* está bien definida. Sean f y g dos lazos basados en x_0 que son homotópicos por trayectorias, sea F tal homotopía de trayectorias. Por definición, F es continua, mantiene x_0 fijo y además $F(s, 0) = f$ y $F(s, 1) = g$ entonces $(h \circ F)(s, 0) = (h \circ f)(s)$ y $(h \circ F)(s, 1) = (h \circ g)(s)$ y $h \circ F$ mantiene al punto x_0 fijo, por ser h continua $h \circ F$ es una homotopía de trayectorias entre $h \circ f$ y $h \circ g$.

Note que h_* efectivamente es un homomorfismo, pues si f y g son dos lazos basados en x_0 entonces

$$\begin{aligned} h_*([f * g]) &= [h \circ (f * g)] \\ &= [(h \circ f) * (h \circ g)] \\ &= [(h \circ f)] * [(h \circ g)] \\ &= h_*([f]) * h_*([g]). \end{aligned}$$

Definición 44. *Una función $f : Y \to X$ es una **equivalencia homotópica** de Y y X si existe una función $g : X \to Y$ tal que $f \circ g$ es homotópica a la función identidad en X y $g \circ f$ es homotópica a la función identidad en Y. A la función g se le llama inversa homotópica de f. Si existe tal equivalencia homotópica, decimos que los espacios X e Y son **homotópicamente equivalentes**.*

Ejemplo 17. *La función inclusión $f : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es una equivalencia homotópica de S^1 y $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Una inversa homotópica para f está dada por $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to S^1$ definida como*

$$g(z) = z/|z|, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Una homotopía entre $f \circ g$ y la función identidad de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ está dada por

$$F(z, t) = z/|z|^t, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Definición 45. *Sean $x_0, x_1 \in X$ y supongamos que α es una trayectoria en X que va de x_0 a x_1. Definimos una función $\alpha_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ por:*

$$\alpha_*([\gamma]) = [\alpha] * [\gamma] * [\bar{\alpha}],$$

para cada lazo γ en X basado en x_1.

Teorema 2.2.3. *La función α_* de la definición anterior es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Primero veremos que α_* es un homomorfismo. Sean $[f]$ y $[g]$ en $\pi_1(X, x_1)$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha_*([f]) * \alpha_*([g]) &= ([\alpha] * [f] * [\bar{\alpha}]) * ([\alpha] * [g] * [\bar{\alpha}]) \\ &= [\alpha] * [f] * [g] * [\bar{\alpha}] \\ &= \alpha_*([f] * [g]). \end{aligned}$$

Ahora veremos que si β es la trayectoria inversa de α, entonces β_* es el inverso de α_*. Sea $[h] \in \pi_1(X, x_0)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \beta_*([h]) &= [\beta] * [h] * [\bar{\beta}] \\ &= [\alpha^{-1}] * [h] * [\alpha] \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\alpha_*(\beta_*([h])) &= [\alpha] * ([\bar{\alpha}] * [h] * [\alpha]) * [\bar{\alpha}]\\ &= [h].\end{aligned}$$

de manera similar puede verse que $\beta_*(\alpha_*([h])) = [h]$. □

Teorema 2.2.4. *Sea F una homotopía entre las aplicaciones f y g de Y a X. Sean $y_0 \in Y$, $x_0 = f(y_0)$ y $x_1 = g(y_0)$. Definimos una trayectoria α de x_0 a x_1 por $\alpha(t) = F(y_0, t)$, $0 \leq t \leq 1$. Entonces los homomorfismos inducidos $f_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ y $g_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_1)$, y el isomorfismo $\alpha_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ cumplen*

$$g_* = \alpha_* \circ f_*.$$

En particular, f_* es un isomorfismo si y sólo si g_* es un isomorfismo.

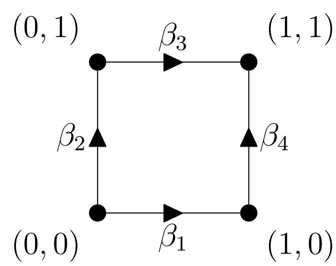
Demostración. Para $\gamma : I \to Y$ un lazo basado en y_0, f_* y g_* son los homomorfismos inducidos por γ relativo al punto base y_0, entonces $g_*([\gamma]) = [g \circ \gamma]$, $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ y $\alpha_*(f_*([\gamma])) = [\bar{\alpha}] * [f_*([\gamma])] * [\alpha]$, por lo que demostrar la primera parte del teorema equivale a demostrar que $[\bar{\alpha}] * [f \circ \gamma] * [\alpha] = [g \circ \gamma]$.

Definamos $G : I \times I \to X$, para $0 \leq s, t \leq 1$ por:

$$G(s, t) = F(\gamma(s), t).$$

Note que G es una homotopía entre las trayectorias $f \circ \gamma$ y $g \circ \gamma$. Sean $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, las cuatro trayectorias en el cuadrado unitario parametrizadas para $0 \leq s, t \leq 1$ como:

$$\beta_1(s) = (s, 0), \qquad \beta_2(t) = (0, t),$$
$$\beta_3(s) = (s, 1), \qquad \beta_4(t) = (1, t).$$



Vemos que:

$$G(\beta_1(s)) = G(s, 0) = F(\gamma(0), 0) = (f \circ \gamma)(s)$$
$$G(\beta_2(t)) = G(0, t) = F(\gamma(0), t) = \alpha(t)$$
$$G(\beta_3(s)) = G(s, 1) = F(\gamma(s), 1) = (g \circ \gamma)(s)$$
$$G(\beta_4(t)) = G(1, t) = F(\gamma(1), t) = \alpha(t)$$

Como el cuadrado unitario es convexo, las trayectorias β_3 y $(\beta_2 * \beta_1) * \bar{\beta}_4$ que van de $(0,1)$ a $(1,1)$ son homotópicas con extremos fijos. Por el lema 2.1.3 tenemos:

$$\begin{aligned} G \circ \beta_3 &\simeq G \circ ((\beta_2 * \beta_1) * \bar{\beta}_4) \\ &\simeq (G \circ \beta_2) * (G \circ \beta_1) * (G \circ \bar{\beta}_4) \\ &\simeq \alpha * (f \circ \gamma) * \bar{\alpha}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $[g \circ \gamma] = [\bar{\alpha}] * [f \circ \gamma] * [\alpha]$. □

Teorema 2.2.5. *Sea $f : Y \to X$ una equivalencia homotópica. Sean $y_0 \in Y$ y $x_0 = f(y_0)$. Entonces f_* es un isomorfismo entre $\pi_1(Y, y_0)$ y $\pi_1(X, x_0)$.*

Demostración. Sea $g : X \to Y$ una inversa homotópica para f, entonces la función identidad de Y induce el isomorfismo identidad de $\pi_1(Y, y_0)$. Es decir

$$(id_Y)_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

es un isomorfismo.

Sea $y_1 = g(x_0)$, sabemos que $g \circ f \simeq id_Y$, por ser f una equivalencia homotópica, entonces es posible definir una trayectoria α en X que vaya de x_0 a x_1. Aplicando el teorema 2.2.4 a id_Y y a $g \circ f$, se tiene que $(id_Y)_* = \alpha_* \circ (g \circ f)_*$. Además, por ser $(id_Y)_*$ un isomorfismo, se tiene que $(g \circ f)_*$ es un isomorfismo. Ahora $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, por lo que f tiene que ser inyectiva y g suprayectiva. Procediendo de manera análoga, sabiendo que $f \circ g \simeq id_X$ llegamos a que $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ es un isomorfismo, por lo que g_* es inyectiva y f_* suprayectiva. Por lo tanto f_* es un isomorfismo. □

Definición 46. *Un espacio topológico X es* ***contraíble*** *si X es homotópicamente equivalente a un espacio que consiste de un solo punto.*

Definición 47. *Un espacio topológico X se dice que es* ***simplemente conexo*** *si es conexo por trayectorias y su grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ es trivial.*

Observemos que todo conjunto convexo, por definición, es conexo por trayectorias, además por el teorema *2.2.1* tiene grupo fundamental trivial, por lo tanto cualquier conjunto convexo es simplemente conexo, en particular $\mathbb{R}$ es simplemente conexo. Más adelante se mostrará que S^2 también es simplemente conexo.

2.3. El grupo fundamental de la circunferencia S^1

En esta sección se demostrará que el grupo fundamental de la circunferencia S^1 es isomorfo al grupo aditivo de los enteros. Lo demostraremos usando algunas propiedades de *espacios cubrientes*, que veremos a continuación.

Definición 48. *Sea $p : E \to B$ una función continua y suprayectiva. Un conjunto abierto U de B se dice que está regularmente cubierto por p si la imagen inversa $p^{-1}(U)$ puede escribirse como una unión disjunta de conjuntos abiertos V_α de E tales que para cada α, la restricción de p a V_α es un homeomorfismo de V_α en U.* Ver la figura 4.

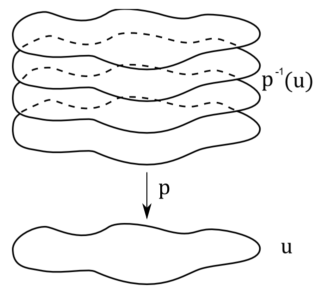


Figura 4.

Definición 49. *Sea $p : E \to B$ una función continua y suprayectiva. Si todo punto b de B tiene una vecindad U que está regularmente cubierta por p, entonces se dice que p es una **función cubriente** y E un **espacio cubriente** de B.*

Lema 2.3.1. *La función $p : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$, es una función cubriente.*

Demostración. Es claro que p es continua y suprayectiva. Tenemos que ver que todo punto $b \in S^1$ tiene una vecindad U que está regularmente cubierta por p, es decir, podemos ver a $p^{-1}(U)$ como la unión disjunta de conjuntos abiertos V_α en $\mathbb{R}$ con $p|_{V_\alpha}$ un homeomorfismo de V_α en U.

Esta demostración se divide en cuatro casos; cuando la primera coordenada de $p(x)$ es positiva, cuando la primera coordenada es negativa, cuando la segunda coordenada es positiva y cuando la segunda coordenada es negativa. Mostraremos el primer caso, los demás se hacen de manera análoga.

Consideremos el conjunto U de S^1 como aquellos puntos cuya primera coordenada es positiva, entonces $p^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R} : \cos 2\pi x > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n-\frac{1}{4}, n+\frac{1}{4})$. Definamos $V_n = (n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Enseguida veremos que la restricción de p a cada V_n es un homeomorfismo de V_n en U. Probaremos que la restricción de p a cada V_n es una biyección. Observe que $\operatorname{sen} 2\pi x$ es estrictamente monótona en V_n, entonces si tomamos x_1 y x_2 en algún V_n con $\cos 2\pi x_1 = \cos 2\pi x_2$, necesariamente $x_1 = x_2$, por lo tanto $p|_{V_n}$ es inyectiva. Por construcción de los V_n, la restricción $p|_{V_n}$ es suprayectiva y por lo tanto una biyección. Ahora utilizaremos el teorema 1.3.10 para ver que $p|_{V_n}$ es un homeomorfismo de V_n en U. Sabemos que $p|_{V_n}$ es continua y biyectiva, ahora $\overline{V}_n = [n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}]$ es compacto. Observemos que del lema 1.1.5 se tiene que S^1 es Hausdorff, pues $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2$ es Hausdorff. Por el teorema 1.3.10, p es un homeomorfismo de $\overline{V}_n$ en $\overline{U}$. Note que

$p(n-\frac{1}{4}) = (0,-1)$ y $p(n+\frac{1}{4}) = (0,1)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, es decir p manda los extremos de $\overline{V}_n$ a los extremos de $\overline{U}$, como $p|_{\overline{V}_n}$ es biyectiva, si quitamos los extremos de $\overline{V}_n$ tenemos que $p|_{V_n}$ es un homeomorfismo de V_n en U.

$\square$

Definición 50. *Sea $p : E \to B$ una función. Si f es una función continua de algún espacio X en B, un **levantamiento** de f es una función $\tilde{f} : X \to E$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$.*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Lema 2.3.2. *Sea $p : E \to B$ una función cubriente con $p(e_0) = b_0$. Cualquier trayectoria $f : [0,1] \to B$ comenzando en b_0 tiene un único levantamiento a una trayectoria $\tilde{f}$ en E que comienza en e_0.*

Demostración. Probaremos existencia. Sabemos que p es una función cubriente, entonces podemos cubrir a B por conjuntos abiertos U que están regularmente cubiertos por p. Como f es continua, la unión de los conjuntos $f^{-1}(U)$ forman una cubierta abierta de $[0,1]$, que es un espacio métrico compacto, por el *lema del número de Lebesgue*, lema 1.3.12, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $\frac{1}{n} < \delta$, los subintervalos cerrados $[0, \frac{1}{n}], [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], ..., [\frac{n-1}{n}, 1]$ están contenidos cada uno en algún conjunto de la forma $f^{-1}(U)$ para algún U. Por lo tanto, la imagen bajo f de cada uno de los subintervalos está contenido en algún conjunto que está regularmente cubierto por p.

Si $0 \leq i \leq n$, probaremos que existe un levantamiento $\tilde{f}$ en $[0, \frac{i}{n}]$. Procediendo por inducción sobre i, para $i = 0$, definimos $\tilde{f}(0) = e_0$. Supongamos que $\tilde{f}$ ya está definida para $[0, \frac{i}{n}]$, donde $0 \leq i < n$, por demostrar que podemos extender $\tilde{f}$ a $[0, \frac{i+1}{n}]$. Veremos que $\tilde{f}$ está definida en $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$.

Sabemos que $f([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}])$ está contenido en algún conjunto que está regularmente cubierto por p, sea U_0 este conjunto, entonces $(p \circ \tilde{f})(\frac{i}{n}) = f(\frac{i}{n}) \in U_0$. Por lo tanto $\tilde{f}(\frac{i}{n})$ está en $p^{-1}(U_0)$, pero $p^{-1}(U_0) = \cup V_\alpha$, como $p|_{V_\alpha}$ es un homeomorfismo de V_α en U_0, existe V_{α_0} en la colección de los $\{V_\alpha\}$ tal que $\tilde{f}(\frac{i}{n})$ está contenido en V_{α_0}. Definamos ahora a $\tilde{f}(s)$ para $s \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ por:

$$\tilde{f}(s) = (p|_{V_{\alpha_0}})^{-1}(f(s)).$$

Como la restricción de p a V_{α_0} es un homeomorfismo de V_{α_0} en U_0, entonces $\tilde{f}$ es continua en $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$. Por hipótesis de inducción, $\tilde{f}$ está definida en $[0, \frac{i}{n}]$, entonces por el lema del pegado 1.2.4, $\tilde{f}$ está definida en $[0, \frac{i+1}{n}]$ y es continua.

Falta probar unicidad. Supongamos que $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ son dos levantamientos de f a trayectorias que comienzan en e_0, con la misma notación con que se probó existencia, se probará por inducción que $\tilde{f} = \tilde{g}$. Es decir, si $0 \leq i \leq n$, se probará por inducción sobre i que $\tilde{f} = \tilde{g}$ en $[0, \frac{i}{n}]$. Para $i = 0$, $\tilde{f}(0) = e_0 = \tilde{g}(0)$, pues $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ comienzan en el mismo punto. Supongamos ahora que $\tilde{f} = \tilde{g}$ en el intervalo $[0, \frac{i}{n}]$ para $0 \leq i < n$ y demostraremos que los levantamientos son iguales en el intervalo $[0, \frac{i+1}{n}]$.

Veremos que $\tilde{f} = \tilde{g}$ en $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ con $i < n$. De la parte de existencia de $\tilde{f}$, sabemos que $\tilde{f}([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]) \subseteq V_{\alpha_0}$. Por otro lado, $\tilde{g}$ es un levantamiento de f y $\tilde{g}([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}])$ es conexo. Por hipótesis de inducción, sabemos que $\tilde{f}(\frac{i}{n}) = \tilde{g}(\frac{i}{n}) \in V_{\alpha_0}$, por el lema 1.4.4, $\tilde{g}([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]) \subseteq V_{\alpha_0}$. Como $p|_{V_{\alpha_0}}$ es un homeomorfismo de V_{α_0} en U_0, se tiene que $p(\tilde{f}(s)) = f(s) = p(\tilde{g}(s))$ para todo $s \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$, por lo tanto $\tilde{f}(s) = \tilde{g}(s)$ para todo $s \in [0, \frac{i+1}{n}]$. □

Lema 2.3.3. *Sean $t_1, t_2 \in [0,1]$ con $t_1 < t_2$. Sea $p : E \to B$ una función cubriente y $F : I \times [t_1, t_2] \to B$ una función continua. Sean $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1$, tales que cada $F([x_i, x_{i+1}] \times [t_1, t_2])$ está contenido en un conjunto abierto regularmente cubierto por p, para $i = 0, 1, 2, ..., n-1$. Supongamos que la trayectoria $f(s) = F(s, t_1)$ está levantado a $\tilde{f}(s)$ y la trayectoria $f_1(s) = F(\{0\} \times [t_1, t_2])$ también tiene un levantamiento $\tilde{f}_1(s)$, entonces existe $\tilde{F} : I \times [t_1, t_2] \to E$ tal que $\tilde{F}(s, t_1) = \tilde{f}(s)$ y $\tilde{F}(0, s) = \tilde{f}_1(s)$.*

Demostración. Aplicaremos inducción sobre i, que es el índice de la partición de I. Es decir notaremos que $\tilde{F}$ está definida en $\{0\} \times [t_1, t_2]$, supondremos que $\tilde{F}$ está definida para $[0, x_i] \times [t_1, t_2]$ y probaremos que también lo está en $[0, x_{i+1}] \times [t_1, t_2]$.

Para $i = 0$, tenemos que $[0, 0] \times [t_1, t_2] = \{0\} \times [t_1, t_2]$, por hipótesis $\tilde{F}$ está definida allí. Supongamos ahora que $\tilde{F}$ está definida en $[0, x_i] \times [t_1, t_2]$. Por demostrar que $\tilde{F}$ está definida en $[0, x_{i+1}] \times [t_1, t_2]$.

Sea $U = F([x_i, x_{i+1}] \times [t_1, t_2])$, sabemos que U está regularmente cubierto por p. Sea $A_i = \{x_i\} \times [t_1, t_2] \cup [x_i, x_{i+1}] \times \{t_1\}$, que es conexo, entonces $F(A_i)$ también es conexo, además $(p \circ \tilde{F})(A_i) = F(A_i) \in U$. Por lo tanto $\tilde{F}(A_i) \subseteq p^{-1}(U)$, pero $p^{-1}(U) = \cup V_\alpha$, por lo que existe un V_{α_0} tal que $\tilde{F}(A_i) \subseteq V_{\alpha_0}$. Por lo tanto, podemos definir a $\tilde{F}$ para $x \in [x_i, x_{i+1}] \times [t_1, t_2]$ como

$$\tilde{F}(x) = (p|_{V_{\alpha_0}})^{-1}(F(x)).$$

Hemos definido $\tilde{F}$ continuamente en $[0, \frac{i}{n}]$ y también en $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$. Entonces $\tilde{F}$ es continua en todo el intervalo $[0, \frac{i+1}{n}]$, por el lema del pegado.

□

Teorema 2.3.4. *Sea $p : E \to B$ una función cubriente con $p(e_0) = b_0$. Sea $F : I \times I \to B$ una función continua con $F(0,0) = b_0$. Existe un único levantamiento de F a una función continua*

$$\tilde{F} : I \times I \to E$$

tal que $\tilde{F}(0,0) = e_0$.

Demostración. Definimos $\tilde{F}(0,0) = e_0$. Utilizando el lema 2.3.2, podemos definir a $\tilde{F}$ en $\{0\} \times I$ y en $I \times \{0\}$, lo que sigue es extender $\tilde{F}$ a todo $I \times I$.

Como p es una función cubriente, podemos cubrir a B por conjuntos U regularmente cubiertos por p. Ahora, los conjuntos dados por las imágenes inversas $F^{-1}(U)$ forman una cubierta abierta de $I \times I$, que es compacto. Por el *lema del número de Lebesgue*, 1.3.12, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, cada cuadrado en $I \times I$ cuyo lado tenga una longitud menor o igual a $\frac{1}{n}$ está contenido en $F^{-1}(U)$ para algún U. Donde δ es el número de Lebesgue.

Sea $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ una subdivisión de I tal que $t_i - t_{i-1} = \frac{1}{n}$. Lo que haremos a continuación es probar que $\tilde{F}$ existe para $I \times I$, la idea es ir definiendo a F en $I \times [t_0, t_1]$, después en $I \times [t_1, t_2]$ y así sucesivamente hasta definirla en todo $I \times I$. Lo haremos procediendo por inducción sobre i que es el índice de la subdivisión de I. Para $i = 0$, ya hemos definido a $\tilde{F}$ en $I \times \{0\}$, supongamos que $\tilde{F}$ ya está definida en $I \times [0, t_i]$, para $0 \leq i < n$, por demostrar que $\tilde{F}$ también lo está en $I \times [0, t_{i+1}]$.

Sabemos que bajo F cada cuadrado $[t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$ está regularmente cubierto por p, además $\tilde{F}$ esta definida en $\{0\} \times [t_i, t_{i+1}]$ y en $I \times t_i$, por lo que se satisfacen las hipótesis del lema 2.3.3, por lo tanto $\tilde{F}$ está definida en $I \times [0, t_{i+1}]$. Por el lema del pegado, $\tilde{F}$ está definida en $I \times [0, t_{i+1}]$ y es continua. □

Teorema 2.3.5. *Sea $p : E \to B$ una función cubriente con $p(e_0) = b_0$. Sean f y g dos trayectorias en B de b_0 a b_1, y sean $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ sus respectivos levantamientos a trayectorias en E comenzando en e_0. Si f y g son homotópicos por trayectorias, entonces $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ terminan en el mismo punto de E y son homotópicos por trayectorias.*

Demostración. Sea $F : I \times I \to B$ la homotopía de trayectorias entre f y g, entonces $F(0,0) = b_0$. Sea $\tilde{F} : I \times I \to E$ el levantamiento de F a E tal que $\tilde{F}(0,0) = e_0$. Por el teorema 2.3.4 $\tilde{F}$ es una homotopía de trayectorias tal que $F(\{0\} \times I) = \{e_0\}$ y $\tilde{F}(\{1\} \times I) = \{e_1\}$ para algún $e_1 \in E$. La restricción $\tilde{F}|I \times \{0\}$ de $\tilde{F}$ es una trayectoria en E que comienza en e_0 y es un levantamiento de $F|I \times \{0\} = f$, por el lema 2.3.2 se tiene que $\tilde{F}(s, 0) = \tilde{f}(s)$. De manera análoga, $\tilde{F}|I \times \{1\}$ es una trayectoria en E que es un levantamiento de $F|I \times \{1\} = g$ que comienza en e_0, pues $\tilde{F}(\{0\} \times I) = e_0$. Por lema 2.3.2, $\tilde{F}(s, 1) = \tilde{g}(s)$. Por lo tanto $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ terminan en el mismo punto e_1 y $\tilde{F}$ es una homotopía de trayectorias entre ellos. □

Definición 51. *Sea $p : E \to B$ una función cubriente y b_0 en B. Elijamos e_0 de forma que $p(e_0) = b_0$. Dado un elemento $[f]$ de $\pi_1(B, b_0)$, sea $\tilde{f}$ el levantamiento de f a una trayectoria en E que comience en e_0. Denotemos por $\phi([f])$ el punto final $\tilde{f}(1)$ de $\tilde{f}$. Entonces ϕ es una función bien definida:*

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$$

Denominamos a ϕ como la correspondencia del levantamiento derivada de la función cubriente p.

Note que ϕ está bien definida, pues por el teorema anterior, tenemos que si dos trayectorias que van de b_0 a b_1 son homotópicas, entonces sus levantamientos terminan en el mismo punto y también son homotópicos. Es decir ϕ no depende del representante de la clase de equivalencia.

Teorema 2.3.6. *El grupo fundamental de* S^1 *es isomorfo al grupo aditivo de los enteros. Es decir* $\pi_1(S^1,(1,0)) \cong (\mathbb{Z},+)$.

Demostración. Sabemos por 2.3.1 que $p:\mathbb{R}\to S^1$ dada por $p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$ es una función cubriente de S^1. Usaremos la notación de la definición 51, sea $b_0 = (1,0)$ y elijamos $e_0 = 0$. Notemos que $p^{-1}((1,0))$ es el conjunto $\mathbb{Z}$, ver la figura 5. Usaremos en esta demostración al punto $(1,0)$ como el número 1. Tenemos que $\phi : \pi_1(S^1,(1,0)) \to \mathbb{Z}$ es la correspondencia del levantamiento. Demostraremos que esta correspondencia es un isomorfismo.

Primero probaremos que ϕ es biyectiva.

i) ϕ es suprayectiva, pues dado e_1 en $\mathbb{Z}$, existe una trayectoria $\tilde{f} \in \mathbb{R}$ de 0 a e_1 (ya que $\mathbb{R}$ es conexo por trayectorias). De modo que $f = p\circ\tilde{f}$ es un lazo en S^1 con base en $b_0 = 1$ y $\phi([f]) = e_1$, por definición.

ii) ϕ es inyectiva. Sean $[f]$ y $[g]$ en $\pi_1(S^1,1)$ tales que $\phi([f]) = \phi([g])$. Sean $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ los respectivos levantamientos de f y g a trayectorias en $\mathbb{R}$ que comienzan en $e_0 = 0$. Si $\tilde{g}^{-1}$ representa la trayectoria $\tilde{g}$ recorrido a la inversa, entonces $\tilde{f} * \tilde{g}^{-1}$ es un lazo basado en 0, que está bien definido por el *lema del pegado*. Sabemos además que $\mathbb{R}$ es simplemente conexo, por lo que tiene grupo fundamental trivial, entonces $[\tilde{f} * \tilde{g}^{-1}] = [e_0]$, se tiene que

$$[\tilde{f}] = [\tilde{f} * \tilde{g}^{-1} * \tilde{g}] = [\tilde{f} * \tilde{g}^{-1}] * [\tilde{g}] = [e_0] * [\tilde{g}] = [\tilde{g}],$$

por lo que $[\tilde{f}] = [\tilde{g}]$. Por lo tanto existe una homotopía $\tilde{F}$ entre $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$, entonces $p\circ\tilde{F} = F$ es una homotopía entre f y g. Se concluye que $[f] = [g]$.

Ahora solo falta ver que ϕ es un homomorfismo, es decir satisface que $\phi([f]*[g]) = \phi([f]) + \phi([g])$, para cualesquiera $[f]$ y $[g]$ en $\pi_1(S^1,1)$. Sean $[f]$ y $[g]$ en $\pi_1(S^1,(1,0))$ cualesquiera y sean $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ sus respectivos levantamientos a trayectorias en $\mathbb{R}$, comenzando en 0. Sea $n = \tilde{f}(1)$ y sea $m = \tilde{g}(1)$, entonces $\phi([f]) = \tilde{f}(1) = n$ y $\phi([g]) = \tilde{g}(1) = m$. Definamos la trayectoria $\tilde{g}_1$ en $\mathbb{R}$ como $\tilde{g}_1(s) = n + \tilde{g}(s)$. Por lo tanto $\tilde{g}_1$ es un levantamiento de g a una trayectoria que comienza en n, entonces $\tilde{f} * \tilde{g}$ es un levantamiento de $f * g$ que comienza en 0. Ahora $\tilde{g}_1 = n + \tilde{g}(1) = n + m$, además $\phi([f]) + \phi([g]) = \tilde{f}(1) + \tilde{g}(1) = n + m$, por lo tanto

$$\phi([f] * [g]) = n + m = \phi([f]) + \phi([g]).$$

□

Definición 52. *Sean* X *un espacio topológico y* $A \subseteq X$. *A una función continua* $r : X \to A$ *tal que* $r(a) = a$ *para todo* $a \in A$ *se le llama un* ***retracción****, y se dice que* A *es un* ***retracto*** *de* X*, siguiendo la notación de [4].*

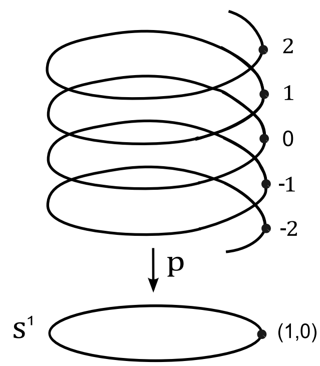


Figura 5.

Teorema 2.3.7. *Si* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$*, entonces* S^1 *no es un retracto de* D*.*

Demostración. Supongamos que S^1 es un retracto de D, entonces existe una función continua $r : D \to S^1$ tal que $r(x) = x$ para todo $x \in S^1$. Sea $i : S^1 \to D$ la función inclusión, vemos que $r \circ i$ es la identidad en S^1. Fijemos al punto $x_0 = (1,0)$, sabemos que $\pi_1(D, x_0) \cong 1$ y del teorema anterior sabemos que $\pi_1(S^1, x_0) \cong (\mathbb{Z}, +)$. Note que r e i inducen los homomorfismos:

$$i_* : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(D, x_0),$$

$$r_* : \pi_1(D, x_0) \to \pi_1(S^1, x_0),$$

entonces la composición $r_* \circ i_*$ manda cualquier elemento de $\pi_1(S^1, x_0)$ al cero. Pero $r_* \circ i_* = (r \circ i)_*$ es el homomorfismo identidad en $\pi_1(D, x_0)$. □

Teorema 2.3.8. *Para cualquier función* $f : D \to D$ *continua, existe un* $x \in D$ *tal que* $f(x) = x$*.*

Demostración. Supongamos que existe una función $f : D \to D$ continua tal que para todo $x \in D$, $f(x) \neq x$. Para cada $x \in D$ si trazamos la semirecta que parte de $f(x)$ y pasa por x, ésta cruza a S^1 en únicamente un punto que le llamaremos $p(x)$. Entonces $p : D \to S^1$ es una función continua. Note que cuando p se restringe a S^1 se tiene la identidad, por lo que p es una retracción de D en S^1, pero eso contradice al teorema 2.3.7. Concluimos que cualquier función continua de D en D tiene un punto fijo.

□

Capítulo 3

El teorema de la curva de Jordan

En el capítulo anterior se demostró que el grupo fundamental de la circunferencia es isomorfo al grupo aditivo de los enteros, este resultado será de gran ayuda para la demostración del teorema principal en este capítulo y ayudará a la prueba de otros teoremas previos al teorema de la curva de Jordan.

Definición 53. *Si A es un espacio homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$, diremos que A es un* ***arco***. *Los puntos extremos del arco A son dos puntos a y b de A tales que $A \setminus \{a\}$ y $A \setminus \{b\}$ es conexo.*

Observemos que un arco no puede tener autointersecciones, por la biyectividad del homeomorfismo, además siempre tiene dos puntos que al quitarlos sigue siendo conexo, a saber las imágenes bajo el homeomorfismo de los puntos extremos del intervalo $[0,1]$.

3.1. Los teoremas de separación y no separación

La demostración del *teorema de la curva de Jordan* se basa principalmente en dos teoremas, el primero, el *teorema de separación de Jordan*, afirma que podemos separar en al menos dos componentes a S^2 mediante una curva cerrada simple. Mientras que el *teorema de no separación* nos dice que mediante un arco no podemos separarlo.

Lema 3.1.1. *Sea γ una trayectoria en X de a a b y sea ρ cualquier función continua de I en I tal que $\rho(0) = 0$ y $\rho(1) = 1$. Entonces $[\gamma \circ \rho] = [\gamma]$.*

Demostración. Note primero que $\gamma \circ \rho$ es una trayectoria que va de a a b, que recorre a la imagen de γ a distinta velocidad, incluso puede retroceder. Definamos a $F : I \times I \to X$ por

$$F(s,t) = \gamma((1-t)s + t\rho(s)).$$

Como el dominio de γ es I, verificaremos que $(1-t)s+t\rho(s)$ está en I para todo $(s,t)\in I\times I$. Lo haremos por contradicción, supongamos que existe $(s,t)\in I\times I$ tal que $(1-t)s+t\rho(s)$ no está en I, entonces $(1-t)s+t\rho(s)>1$ o $(1-t)s+t\rho(s)<0$. Si $(1-t)s+t\rho(s)>1$, se tiene que $s+t\rho(s)>1+st$, entonces $t\rho(s)>st$, es decir, $\rho(s)>s$, por lo que $1<(1-t)s+t\rho(s)<(1-t)\rho(s)+t\rho(s)=\rho(s)$ y se tendría que $\rho(s)>1$ y eso no es posible. Ahora, si $(1-t)s+t\rho(s)<0$, tenemos que $t\rho(s)<s(t-1)$, como $s,t\in I$, se tiene que $s(t-1)<0$, por lo que $t\rho(s)<0$ y eso es imposible.

Una vez visto que F está bien definida en $I\times I$, observemos que $F(s,0)=\gamma(s)$, $F(s,1)=\gamma(\rho(s))$ y F mantiene los extremos a y b fijos, además γ se deforma continuamente en $\gamma\circ\rho$. Por lo tanto F es una homotopía entre γ y $\gamma\circ\rho$. □

Lema 3.1.2. *Si X es un espacio simplemente conexo, cualesquiera dos trayectorias con mismos puntos inicial y final son homotópicos por trayectorias.*

Demostración. Sean f y g dos trayectorias en X que van de x_0 a x_1. Entonces $f*\bar{g}$ es un lazo en X basado en x_0. Como X es simplemente conexo, $f*\bar{g}$ es homotópico al lazo constante x_0. Por lo que $[f*\bar{g}]*[g]=[g]$, pero $[f*\bar{g}]*[g]=[f]*[\bar{g}*g]=[f]$. Por lo tanto $[f]=[g]$. □

Teorema 3.1.3. *Sea $X=U\cup V$ donde U y V son conjuntos abiertos simplemente conexos y $U\cap V$ es conexo por trayectorias. Entonces X es simplemente conexo.*

Demostración. Sea $x_0\in U\cap V$ y sea $f:I\to X$ un lazo basado en x_0, queremos ver que f es homotópico a un punto. Como $X=U\cup V$ y U,V son abiertos, entonces $f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V)$ es una cubierta abierta de I. Dado que I es compacto, por el *lema del número de Lebesgue*, existe una subdivisión de I, $0=b_0<b_1<\cdots<b_m=1$ tal que $f([b_{i-1},b_i])$ está contenida en U o en V. Es posible encontrar otra subdivisión de I dada por $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ tal que para cada $i=1,2,...,n$, $f([t_{i-1},t_i])$ caiga alternadamente en U y en V. Ya que si $f([t_{i-1},t_i])$ y $f[t_i,t_{i+1}]$ están ambos en U o en V, entonces podemos suprimir a t_i y $f([t_{i-1},t_{i+1}])$ sigue estando en U o en V, con un número finito de estos pasos obtenemos la subdivisión que deseamos. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f([t_0,t_1])\subseteq U$, $f([t_1,t_2])\subseteq V$, $f([t_2,t_3])\subseteq U$, etcétera. Note que $f(t_i)\in U\cap V$, como $U\cap V$ es conexo por trayectorias, sea g_{2i-1} la trayectoria en $U\cap V$ que va de $f(t_{2i-1})$ a $f(t_{2i})$, para $i=1,2,3,...$, note que $i\leq n$. Llamémosle $f_1=f([t_1,t_2])$, $f_3=f([t_3,t_4])$, $f_5=f([t_5,t_6])$, etcétera. Por el lema anterior, $f_1\simeq g_1$, $f_3\simeq g_3$, $f_5\simeq g_5$, etcétera, sean G_1, G_3, G_5,... las homotopías correspondientes. Definiendo a $F(t,s)$ como

$$F(t,s)=\begin{cases} f(t) & \text{para } t\in[t_{2j},t_{2j+1}] \\ G_{2i-1}(\frac{t-t_{2j-1}}{t_{2j}-t_{2j-1}},s) & \text{para } t\in[t_{2j-1},t_{2j}], \end{cases}$$

Veremos que F está bien definida, si $t=t_0$ se tiene que $F(t_0,s)=f(t_0)$ para todo $s\in I$, también $F(t_1,s)$ por un lado es igual a $f(t_1)$ y por otro $F(t_1,s)=G(0,s)=$

$f(t_1)$ para todo $s \in I$, en general puede verse que los extremos $f(t_0)$, $f(t_1)$, ..., $f(t_n)$ se mantienen fijos, es decir $F(t_i, s) = f(t_i)$ para $s \in I$ y para cada $i = 0, 1, 2, ..., n$. Puede verse que F es una homotopía de trayectorias entre f y una trayectoria que está contenida en U, pero U es simplemente conexo. Por lo tanto f tiene que ser homotópica por trayectorias al lazo constante x_0. □

Corolario 3.1.4. *S^2 es simplemente conexo.*

Lema 3.1.5. *Sean a y b puntos en S^2, A un espacio compacto y*

$$f : A \to S^2 \backslash \{a, b\}$$

una función continua. Si a y b pertenecen a la misma componente de $S^2 \backslash f(A)$, entonces f es nulhomotópica.

Demostración. En lugar de trabajar con S^2, lo haremos con la compactificación por un punto $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ de $\mathbb{R}^2$ y haciendo corresponder a los puntos a y b con los puntos 0 e ∞, demostrar el lema equivale a demostrar lo siguiente:

Si A es un conjunto compacto y $g : A \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ una función continua. Si 0 está en la componente de $\mathbb{R}^2 \backslash g(A)$ que contiene a ∞, es decir la que componente no acotada de $\mathbb{R}^2 \backslash g(A)$, entonces g es nulhomotópica.

Por ser A compacto y g continua, $g(A)$ es compacto. Además $g(A) \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces $g(A)$ está acotado, por lo que podemos encontrar una circunferencia con centro en el origen y de radio suficientemente grande de manera que contenga a $g(A)$. Escojamos ahora un punto p que no esté en dicha circunferencia. Note que p y 0 están en la componente no acotada de $\mathbb{R}^2 \backslash g(A)$. Tomemos una trayectoria α en $\mathbb{R}^2 \backslash g(A)$ que vaya de 0 a p y definamos a $G : A \times I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, por

$$G(a, s) = g(a) - \alpha(s).$$

Como G es continua y cumple $G(t, 0) = g(t)$ y $G(t, 1) = g(t) - p$, entonces G es una homotopía entre $g(t)$ y $g(t) - p$. Como α no corta a $g(A)$, podemos observar que $G(a, t) \neq 0$. Definamos ahora una nueva homotopía $H : A \times I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ como

$$H(a, s) = sg(a) - p,$$

es una homotopía de trayectorias entre $g(t) - p$ y una función constante. Es importante ver que $H(a, s) \neq 0$ pues $sg(a)$ está dentro de la circunferencia que contiene a $g(A)$, que elegimos anteriormente y tomamos a p, precisamente fuera de ésta circunferencia. □

Teorema 3.1.6 (Teorema de separación de Jordan)**.** *Sea C una curva cerrada simple en S^2. Entonces C separa S^2.*

Demostración. Supongamos que $S^2 \setminus C$ es conexo por trayectorias. Pongamos a C como la unión de dos arcos A y B que tienen extremos comunes a y b, sean $U = S^2 \setminus A$ y $V = S^2 \setminus B$, definamos $X = U \cup V$, veremos que X tiene grupo fundamental trivial utilizando el teorema 3.1.3. Como $U \cap V = S^2 \setminus C$ hemos supuesto conexo por trayectorias, probaremos que U y V son simplemente conexos. Sea $x_0 \in U \cap V$ y sea $f : I \to U$ un lazo basado en x_0. Sabemos que $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$, por lo que existe un lazo $p : I \to S^1$ que lo genera, entonces existe una función $h : S^1 \to U$ que satisface $h \circ p = f$. Consideremos la composición $i \circ h : S^1 \to S^2 \setminus \{a, b\}$, donde i es la función inclusión

$$i : (U, x_0) \to (X, x_0).$$

Note que $(i \circ h)(S^1)$ no contiene a los puntos a y b, pues $a, b \in A$ y $(i \circ h)(S^1) = h(S^1)$ no contiene los puntos de A. Dado que S^1 es compacto, por el lema 3.1.5, $i \circ h$ es homotópicamente nula, por lo que induce un homomorfismo trivial.

□

Teorema 3.1.7. *Sea $p : E \to B$ una función cubriente con $p(e_0) = b_0$.*

(a) El homomorfismo $p_* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$ es un monomorfismo.

(b) Sea $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$. La correspondencia del levantamiento ϕ induce una función inyectiva

$$\Phi : \pi(B, b_0)/H \to p^{-1}(b_0)$$

de la colección de las clases por la derecha de H en $p^{-1}(b_0)$, la cual es biyectiva si E es conexo por trayectorias.

(c) Si f es un lazo en B basado en b_0, entonces $[f] \in H$ si, y sólo si, f es un levantamiento a un lazo en E basado en e_0.

Demostración. Demostraremos (a), es decir, veremos que el homomorfismo p_* es inyectivo. Para ello basta con ver que su núcleo consta sólo del elemento neutro (salvo homotopía). Supongamos que existe $\tilde{f} : I \to E$ un lazo basado en e_0 con la propiedad de que $p_*([\tilde{f}])$ es igual al elemento neutro. Como $p_*([\tilde{f}]) = [p \circ \tilde{f}]$, existe una homotopía de trayectorias F entre $p \circ \tilde{f}$ y el lazo constante. Si $\tilde{F}$ es el levantamiento de F a una homotopía de trayectorias en E de manera que $\tilde{F}(0, 0) = e_0$, entonces $\tilde{F}$ es una homotopía de trayectorias entre $\tilde{f}$ y el lazo constante en e_0, como se quería.

Sean f y g dos lazos en B y sean $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ sus levantamientos en E que empiezan en e_0, entonces $\phi([f]) = \tilde{f}(1)$ y $\phi([g]) = \tilde{g}(1)$; mostraremos que $\phi([f]) = \phi([g])$ si y sólo si $[f] \in H * [g]$. Supongamos primero que $\phi([f]) = \phi([g])$, entonces $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ terminan en el mismo punto de E. Definamos $\tilde{h} = \tilde{f} * \tilde{g}^{-1}$ es un lazo en E, basado en e_0. Entonces $[\tilde{h} * \tilde{g}] = [(\tilde{f} * \tilde{g}^{-1}) * \tilde{g}] = [\tilde{f}]$, por lo que existe una homotopía de trayectorias $\tilde{F}$ en E entre $\tilde{h} * \tilde{g}$ y $\tilde{f}$. Vemos que $p \circ \tilde{f} = f$ y que

$$\begin{aligned} p \circ (\tilde{h} * \tilde{g}) &= (p \circ \tilde{h}) * (p \circ \tilde{g}) \\ &= (p \circ \tilde{h}) * g, \end{aligned}$$

entonces la composición $p \circ \tilde{F}$ es una homotopía de trayectorias en B entre $(p \circ \tilde{h}) * g$ y f. Pero $(p \circ \tilde{h}) * g \in H * [g]$, por lo que $[f]$ también está ahí.

Supongamos ahora que $[f] \in H * [g]$, es decir, $[f] = [(p \circ \tilde{h}) * g]$ para algún lazo $\tilde{h}$ en E basado en e_0. Como $\tilde{h}$ es una lazo basado en e_0 y $\tilde{g}$ es una trayectoria que comienza también en e_0, el producto $\tilde{h} * \tilde{g}$ está bien definido y es un levantamiento de $(p \circ \tilde{h}) * g$. Sabemos que $[f] = [(p \circ \tilde{h}) * g]$, entonces los levantamientos $\tilde{f}$ y $\tilde{h} * \tilde{g}$ que empiezan en e_0 deben terminar en el mismo punto de E, por teorema 2.3.5. Pero $\tilde{h}$ es un lazo en E, por lo que no afecta el punto final de $\tilde{h} * \tilde{g}$, es decir, $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ terminan en el mismo punto. Por lo tanto $\phi([f]) = \phi([g])$.

Para probar (c), sabemos de (b) que $\phi([f]) = \phi([g])$ si y sólo si $[f] \in H * [g]$; ahora, si g es el lazo constante en e_0, entonces $\phi([f]) = e_0$ si y sólo si $[f] \in H$. Pero $\phi([f]) = e_0$ cuando f es un lazo cuyo levantamiento en E empieza y termina en e_0. $\square$

Teorema 3.1.8. *Sea X la unión de dos conjuntos abiertos U y V, tales que $U \cap V$ puede escribirse a su vez como la unión de dos conjuntos abiertos y disjuntos A y B. Supongamos que existe una trayectoria α en U conectando el punto a de A con el punto b de B, y que existe una trayectoria β en V del punto b al punto a. Sea f el lazo $f = \alpha * \beta$. Entonces:*

(a) La clase de homotopía de trayectorias $[f]$ genera un subgrupo cíclico infinito de $\pi_1(X, a)$.

(b) Si $\pi_1(X, a)$ es cíclico infinito, entonces $\pi_1(X, a)$ es generado por $[f]$.

(c) Supongamos que existe una trayectoria γ en U desde el punto a hasta el punto a_1 de A, y que existe una trayectoria δ en V desde a_1 a a. Sea g el lazo $g = \gamma * \delta$. Entonces los subgrupos de $\pi_1(X, a)$ generados por $[f]$ y $[g]$ sólo tienen en común el elemento neutro.

Demostración. Para probar este teorema utilizaremos un espacio cubriente de X que a continuación construiremos. Tomemos una cantidad numerable de copias de U y de V disjuntas, digamos:

$$U \times \{2n\} \quad y \quad V \times \{2n+1\} \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{Z},$$

llamamos Y la unión de estos espacios. Construiremos otro espacio E como el cociente de Y que resulta de identificar los puntos $x \times \{2n\}$ y $x \times \{2n-1\}$ para todo $x \in A$ y los puntos $x \times \{2n\}$ y $x \times \{2n+1\}$ para todo $x \in B$. Sea π la función cociente.

Notemos que π es una función abierta, pues Y es la unión de conjuntos abiertos disjuntos $\{U \times \{2n\}\}$ y $\{V \times \{2n+1\}\}$, y se tiene que las restricciones de π a cada uno de estos conjuntos es una función abierta. Veamos que verdaderamente $\pi|(U \times \{2n\})$ y $\pi|(V \times \{2n+1\})$ son abiertas. Un conjunto abierto en $U \times \{2n\}$ es de la forma $W \times \{2n\}$ con W abierto en U, entonces

$$\pi^{-1}(\pi(W \times \{2n\})) = (W \times \{2n\}) \cup [(W \cap A) \times \{2n-1\}] \cup [(W \cap B) \times \{2n+1\}]$$

es un conjunto abierto de Y. Por la sola definición de topología cociente se tiene que el conjunto dado por $\pi(W \times \{2n\})$ es abierto en E, por lo que $\pi|(U \times \{2n\})$ es abierta. De manera análoga podemos concluir que $\pi|(V \times \{2n+1\})$ también es abierta.

Definamos $\rho : Y \to X$ como $\rho(x,m) = x$. Ésta función induce una función $p : E \to X$ que es continua y suprayectiva, por estar E dotado de la topología cociente. Probaremos que tal función p es una función cubriente, para ello es suficiente ver que U y V están regularmente cubiertos por p. Hagamos el análisis para U, el de V puede realizarse de manera análoga. Tenemos que $p^{-1}(U)$ es la unión de los conjuntos disjuntos $\pi(U \times \{2n\})$ para $n \in \mathbb{Z}$, que son abiertos por ser π abierta. Sea π_{2n} la restricción de π al conjunto abierto $U \times \{2n\}$ que lo transforma en $\pi(U \times \{2n\})$. Entonces por ser π_{2n} continua, biyectiva y abierta, se sigue del teorema 1.2.6 que π_{2n} es un homeomorfismo. Podemos ver también que la restricción de ρ al conjunto $U \times \{2n\}$ es un homeomorfismo. Entonces al restringir p al conjunto $\pi(U \times \{2n\})$ obtenemos la composición de dos homeomorfismos $p|(U \times \{2n\}) = (\rho \circ \pi_{2n}^{-1})(U \times \{2n\})$ que es también un homeomorfismo. Por lo tanto la restricción de p al conjunto $\pi(U \times \{2n\})$ se aplica homeomórficamente en U.

Hemos visto que E es un espacio cubriente de X, para poder hacer uso de él necesitamos definir levantamientos del lazo $f = \alpha * \beta$ a trayectorias en E. Dado $n \in \mathbb{Z}$, definimos $e_n = \pi(a, 2n)$; los puntos e_n son distintos y forman el conjunto $p^{-1}(a)$. Sea $\tilde{f}_n$ el levantamiento a una trayectoria en E de f empezando en e_n y finalizando en e_{n+1}. Sabemos que α y β son trayectorias de U y de V, respectivamente; la primera de a a b y la segunda de b a a. Definamos $\tilde{\alpha}_n$ y $\tilde{\beta}_n$ por:

$$\tilde{\alpha}_n(s) = \pi(\alpha(s) \times \{2n\}) \quad \text{y} \quad \tilde{\beta}_n(s) = \pi(\beta(s) \times \{2n+1\}), \quad \text{para} \quad s \in I,$$

entonces $\tilde{\alpha}_n$ y $\tilde{\beta}_n$ son levantamientos a trayectorias en E de α y β, respectivamente. Además $\tilde{\alpha}_n * \tilde{\beta}_n$ está bien definido, pues $\tilde{\alpha}_n$ termina en $\pi(b, 2n)$ y $\tilde{\beta}_n$ empieza en $\pi(b, 2n+1) = \pi(b, 2n)$. Note que $\tilde{\alpha}_n * \tilde{\beta}_n$ es una trayectoria que empieza en $\tilde{\alpha}_n(0) = \pi(a, 2n) = e_n$ y termina en

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}_n(1) &= \pi(a, 2n+1) \\
&= \pi(a, 2n+2) \\
&= \pi(a, 2n+1) \\
&= e_{n+1}.
\end{aligned}$$

Por la unicidad de trayectorias $\tilde{f}_n = \tilde{\alpha}_n * \tilde{\beta}_n$.

Probaremos la primera parte del teorema (a), es decir, $[f]$ genera un subgrupo cíclico infinito de $\pi_1(X, a)$. Con la notación de los párrafos anteriores, se reduce a demostrar que si m es un entero positivo, entonces $[f]^m$ no es el elemento neutro. Consideremos el producto $\tilde{h} = \tilde{f}_0 * (\tilde{f}_1 * (\cdots * \tilde{f}_{m-1}) \cdots)$, éste es un levantamiento a una trayectoria de $h = f * (f * (\cdots * f) \cdots)$. Como $\tilde{h}$ es una trayectoria que empieza en e_0 y termina en e_m podemos concluir que $[h] = [f]^m$ no es el elemento neutro.

Se probará ahora el inciso (b). Hemos visto anteriormente que para cada entero m positivo, la correspondencia del levantamiento $\phi : \pi_1(X, a) \to p^{-1}(a)$, transforma $[f]^m$ en el punto e_m de $p^{-1}(a)$. Puede verse de manera análoga que $[f]^{-m}$ bajo ϕ se transforma en $e_{(-m)}$, por lo que ϕ es suprayectiva. Del inciso (b) del teorema 3.1.7, se tiene que ϕ induce una función inyectiva

$$\Phi : \pi_1(X, a)/H \to p^{-1}(a)$$

donde $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$. Por ser ϕ suprayectiva, Φ también lo es, por lo tanto Φ es biyectiva. Como el cociente de un grupo cíclico infinito por cualquier subgrupo no trivial es finito, y Φ es una biyección entre $\pi_1(X, a)/H$ y $p^{-1}(a)$, sabiendo además, que $p^{-1}(a)$ no es finito, entonces H tiene que ser trivial. Por lo tanto ϕ es biyectiva, por lo que el subgrupo generado por $[f]$ es $\pi_1(X, a)$, pues ϕ aplica el subgrupo generado por $[f]$ en $p^{-1}(a)$.

Por último demostraremos (c). Usando el inciso (a) anterior, notemos que si $g = \gamma * \delta$, entonces $[g]$ genera un subgrupo cíclico infinito de $\pi_1(X, a)$. Recuerde que $\pi : Y \to E$ es una función cociente. Como $g = \gamma * \delta$ es un lazo en X con γ en U y δ en V, podemos definir los levantamientos de γ y δ respectivamente por

$$\tilde{\gamma}(s) = \pi(\gamma(s) \times 0) \qquad y \qquad \tilde{\delta}(s) = \pi(\delta(s) \times (-1)).$$

Entonces $\tilde{\gamma}(s) * \tilde{\delta}(s)$ está bien definido y es un levantamiento de g a un lazo en E basado en e_0. Por lo que para todo $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\phi([g]^n) = e_0$, en cambio $\phi([f]^m) = e_m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $[f]^m \neq [g]^n$ siempre que $m, n \neq 0$. □

Lema 3.1.9. *Sean D, D_1 y D_2 arcos en S^2 y sea d en D tales que $D = D_1 \cup D_2$ y $D_1 \cap D_2 = d$. Si a y b son puntos en $S^2 \setminus D$ que pueden ser conectados por trayectorias en $S^2 \setminus D_1$ y $S^2 \setminus D_2$, entonces existe una trayectoria en $S^2 \setminus D$ que une los puntos a y b.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir que a y b no pueden ser conectados por ninguna trayectoria en $S^2 \setminus D$. Definamos $X = S^2 \setminus \{d\}$ y U y V como los conjuntos:

$$U = S^2 \setminus D_1 \qquad y \qquad V = S^2 \setminus D_2.$$

Entonces $X = U \cup V$ y $S^2 \setminus D = U \cap V$. Hemos supuesto que no existe ninguna trayectoria en $S^2 \setminus D$ que vaya de a a b, por lo que $S^2 \setminus D$ no es conexo por trayectorias. Note que $U \cap V$ es un conjunto abierto en S^2, por el lema 1.5.1 las componentes conexas por trayectorias son abiertas. Sea A la componente conexa por trayectorias que contiene a a y sea B la unión de las otras componentes conexas por trayectorias de $U \cap V$. Por ser abiertas las componentes conexas por trayectorias de $U \cap V$ tenemos que A y B son conjuntos abiertos de X.

Sabemos por hipótesis que a y b pueden conectarse por trayectorias en los conjuntos U y V, por el teorema 3.1.8 $\pi_1(X, a)$ no es trivial, pero $X = S^2 \setminus \{d\}$ que es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ que tiene grupo fundamental trivial. □

Teorema 3.1.10 (teorema de no separación)**.** *Sea D un arco en S^2. Entonces D no separa S^2.*

Demostración. Sean a y b dos puntos en $S^2 \setminus D$. Lo demostraremos por contradicción, supongamos que a y b no pueden unirse por una trayectoria en $S^2 \setminus D$. Sea $h : I \to D$ un homeomorfismo y sean $D_1 = h\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ y $D_2 = h\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$.

Por el lema 3.1.10, podemos darnos cuenta que a y b no pueden conectarse por dos trayectorias en $S^2 \setminus D_1$ y $S^2 \setminus D_2$, ya que si existieran tales trayectorias tendríamos que dichos puntos se podrían conectar mediante una trayectoria en $S^2 \setminus D$ y hemos supuesto que eso no es posible.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que a y b no pueden conectarse en $S^2 \setminus D_1$. Dividamos ahora a D_1 en dos arcos $E_1 = h\left(\left[0, \frac{1}{4}\right]\right)$ y $E_2 = h\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right)$, usando el argumento anterior, a y b no pueden conectarse por dos trayectorias en $S^2 \setminus E_1$ y $S^2 \setminus E_2$. Podemos continuar indefinidamente este proceso y encontrar una sucesión

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$$

de intervalos cerrados teniendo el i-ésimo intervalo I_n longitud $\frac{1}{2^n}$, manteniendo siempre que a y b no pueden ser conectados por una trayectoria en $S^2 \setminus \{h(I_n)\}$. Por ser I compacto, existe $x \in \cap I_n$ y como las longitudes de los intervalos convergen a cero, sólo existe un punto en la intersección.

Consideremos el espacio $S^2 \setminus \{h(x)\}$, este espacio es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, por lo que a y b pueden ser conectados por una trayectoria α en $S^2 \setminus \{h(x)\}$. Como $\alpha(I)$ es compacto, particularmente es cerrado, es decir, $S^2 \setminus \alpha(I)$ es abierto, por lo que es posible encontrar una vecindad de $h(x)$ que no interseque a $\alpha(I)$. Por ser h continua, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $h(I_m)$ está contenido en dicha vecindad. Por lo tanto hemos encontrado una trayectoria α en $S^2 \setminus h(I_m)$ que va de a a b, contradiciendo nuestra hipótesis inicial. $\square$

3.2. El teorema de la curva de Jordan

Teorema 3.2.1 (teorema de la curva de Jordan)**.** *Sea C una curva simple cerrada en S^2. Entonces C separa S^2 en exactamente dos componentes conexas W_1 y W_2. Cada uno de los conjuntos tiene a C como su frontera.*

Demostración. Pongamos a C como la unión de dos arcos C_1 y C_2 que se intersectan en sólo dos puntos $\{p, q\}$. Sean $U = S^2 \setminus C_1$ y $V = S^2 \setminus C_2$, definamos a $X = U \cup V = S^2 \setminus \{p, q\}$, vemos que la intersección $U \cap V = S^2 \setminus C$. Sabemos por el teorema de separación de Jordan que $U \cap V$ tiene al menos dos componentes conexas. Vamos a demostrar que $U \cap V$ tiene exactamente dos componentes conexas. Supongamos lo contrario, es decir supongamos que $U \cap V$ tiene más de dos componentes, sean A_1 y A_2 dos componentes de $U \cap V$ y sea B la unión de todas las demás. Tomemos $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ y $b \in B$, Sabemos por el teorema de no separación de Jordan que U y V son conexos por trayectorias, por lo que podemos unir a a_1 con a_2 y a_1 con b por medio de trayectorias α y δ, respectivamente, contenidas en U. También es posible unir a a_2 con a_1 y b con a_1 por trayectorias β y γ contenidas en V. Sea $f = \delta * \gamma$, tomando a $X = U \cup V$ y a $U \cap V = (A_1 \cup A_2) \cup B$ se sigue del teorema 3.1.8 que $[f]$ genera un subgrupo cíclico infinito de $\pi_1(X, a)$, $[f]$ no es trivial. Tomemos ahora el lazo $g = \alpha * \beta$, $X = U \cup V$ y $U \cap V = A_1 \cup (A_2 \cup B)$, se sigue también del teorema 3.1.8 que $[g]$ genera un subgrupo cíclico infinito de $\pi_1(X, a)$.

Por ser $\pi_1(X, a)$ cíclico infinito, del inciso (b) del teorema 3.1.8, $\pi_1(X, a)$ es generado por $[f]$ y por $[g]$. Por lo que existen m, $n \in \mathbb{N}$ tales que $[f]^n = [g]^m$. Por el inciso (c) del teorema 3.1.8, los subgrupos generados por $[f]$ y $[g]$ tienen en común sólo al elemento trivial. Por lo tanto $S^2 \setminus C$ tiene exactamente dos componentes conexas W_1 y W_2.

Ahora falta ver que la frontera común entre W_1 y W_2 es precisamente C. Como $S^2 \setminus C$ es localmente conexo, las componentes W_1 y W_2 son abiertas. Por lo que son disjuntas, ya que si tuvieran al menos un punto en común, las dos componentes formarían una sola. Por lo que tenemos $(\overline{W}_1 \setminus W_1) \cup (\overline{W}_2 \setminus W_2) \subseteq C$. Para la otra implicación sólo mostraremos que para cualquier punto x en C, cualquier vecindad de x intersecta a $\overline{W}_1 \setminus W_1$, de manera análoga se seguirá que cualquier vecindad de x intersecta a $\overline{W}_2 \setminus W_2$.

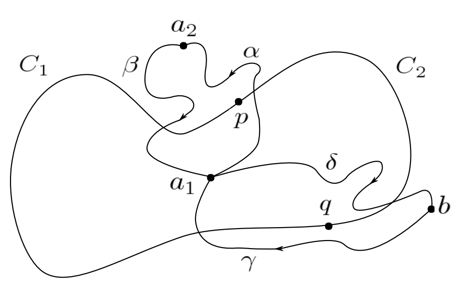


Figura 6.

Sea $x \in C$ y U una vecindad de x. Podemos poner a C como la unión de dos arcos C_1 y C_2 que tienen en común sólo a sus extremos, de manera que uno de ellos (digamos C_1) esté contenido completamente en U. Consideremos dos puntos w_1 y w_2 en W_1 y W_2 respectivamente. Por el teorema 3.1.10, $S_2 \setminus C_2$ es conexo por trayectorias, por lo que existe una trayectoria h de w_1 a w_2, como $h(I)$ es conexo, $h(I)$ intersecta a $\overline{W}_1 \setminus W_1$ ya que de lo contrario $h(I)$ estaría contenido en el complemento de $\overline{W}_1 \setminus W_1$, que es $W_1 \cup S^2 \setminus \overline{W}_1$ que son dos conjuntos abiertos y disjuntos y eso no es posible. $\square$

Corolario 3.2.2. *Sea C una curva cerrada simple en $\mathbb{R}^2$ y sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus C$, cada uno en diferente componente. Entonces cualquier trayectoria que una x_1 con x_2 intersecta a C.*

Finalizaremos esta sección mencionando una generalización del *teorema de la curva de Jordan* que es conocido como *teorema de Jordan-Schoenflies* cuyo enunciado se da a continuación.

Teorema 3.2.3 (teorema de Jordan-Schoenflies)**.** *Sea C una curva cerrada simple en S^2 y sean U y V las componentes de $S^2\backslash C$, entonces $\overline{U}$ y $\overline{V}$ son cada uno homeomorfos a la bola unitaria cerrada B^2.*

Este resultado no se demostrará en este trabajo, puede consultar [2] o [18] para ver una demostración.

Existe una generalización para dimensiones superiores del teorema de la curva de Jordan, pero para el teorema de Jordan-Schoenflies no existe tal generalización, sólo es válido para el caso de dos dimensiones. En tres dimensiones se han encontrado contraejemplos como el de la *esfera cornuda de Alexander*, encontrado por James Alexander en 1924, en la que el exterior de dicha esfera no es homeomorfo al exterior de la 2−esfera canónica en $\mathbb{R}^3$. En la Figura 7 puede verse una representación de dicha esfera.

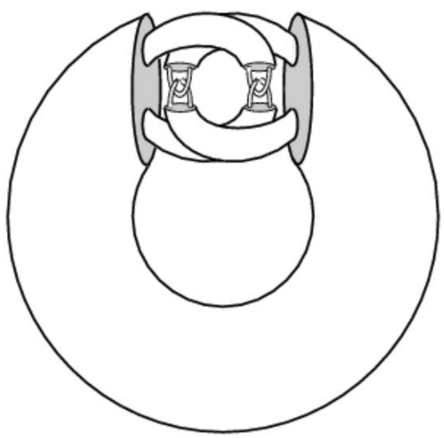


Figura 7.

3.3. El teorema de la curva de Jordan y las gráficas K_5 y K_{33}

El teorema de la curva de Jordan tiene múltiples aplicaciones; en esta sección se usará para demostrar dos teoremas importantes en teoría de gráficas concernientes al concepto de planaridad.

Definición 54. *Una **gráfica combinatoria** es un par ordenado de conjuntos $G = (V(G), E(G))$, donde*

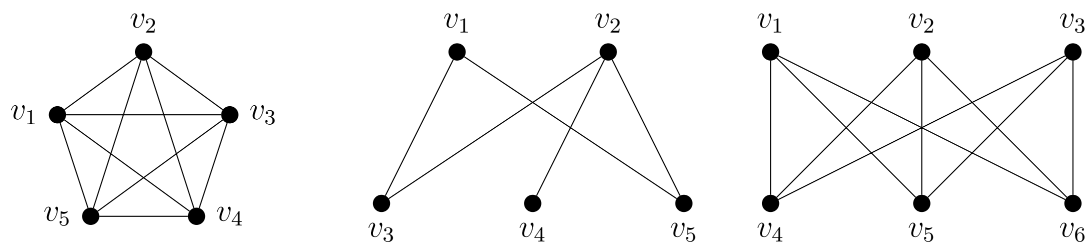


Figura 8.

i) $V(G)$ se llama el conjunto de vértices de G.

ii) $E(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de elementos de $V(G)$. Se llama conjunto de aristas de G.

Por simplicidad sólo usaremos la palabra gráfica y no gráfica combinatoria, más adelante se definirá una gráfica en otro contexto. Es importante mencionar que sólo se trabajará con gráficas simples, es decir, gráficas que no tienen lazos ni aristas dirigidas.

Definición 55. *Sean $G = (V, E)$ y $G_1 = (V_1, E_1)$ dos gráficas. Si $V_1 \subset V$ y $E_1 \subset E$, entonces diremos que G_1 es una* ***subgráfica*** *de G.*

Si en una gráfica dos vértices v_1 y v_2 forman una arista, vamos a referirnos a esa arista por v_1v_2. A continuación se darán algunas definiciones de ciertos tipos de gráficas, para facilitar su uso en los párrafos siguientes.

Si G es una gráfica y $v_1, v_2, ..., v_n$ están en $V(G)$ tales que $v_1v_2, v_2v_3, ..., v_{n-1}v_n, v_nv_1$ son aristas, decimos que $v_1v_2 \cdots v_nv_1$ forman un $n-$***ciclo***.

Una ***gráfica completa*** es aquella en la que todo par de vértices están unidos por una arista. La denotaremos por K_n, donde n es el número de vértices.

Una ***gráfica bipartita*** es aquella cuyo conjunto de vértices puede ser dividido en dos subconjuntos disjuntos X e Y, con $X \cup Y = V(G)$, tales que cada arista tiene un extremo en X y otro en Y, la partición (X, Y) es llamada una bipartición de la gráfica. Una ***gráfica bipartita completa*** es una gráfica bipartita con bipartición (X, Y) en la que cada vértice de X es adyacente a cada vértice de Y, Si $|X| = m$ y $|Y| = n$, tal gráfica se denota por $K_{m,n}$.

En la Figura 8 aparece del lado izquierdo la gráfica completa con cinco vértices, K_5; en el centro, una gráfica bipartita y del lado derecho la gráfica $K_{3,3}$, que es bipartita completa.

Definición 56. *Una* ***gráfica geométrica*** *G es una par (V, E) de conjuntos finitos con las siguientes propiedades:*

1. El conjunto V es un conjunto de puntos (vértices) en $\mathbb{R}^2$.

2. Cada elemento de E (arista) es un arco entre dos puntos distintos de V.

Si además pedimos que las aristas tengan diferentes conjuntos de puntos extremos y que el interior de cada arista no contenga vértices ni puntos de otras aristas, decimos que G es una ***gráfica geométrica plana****.*

Por abuso de notación, a veces omitiremos la palabra *geométrica*, también en ocasiones diremos que G es la unión de V y E. En la Figura 10 aparece en el lado derecho una gráfica geométrica plana.

Definición 57. *Sea G una gráfica combinatoria, a vértices diferentes de G podemos asignar puntos diferentes en $\mathbb{R}^2$ de manera que para cada par de vértices de G que formen una arista en G, podemos asignar un arco en $\mathbb{R}^2$ que una los puntos correspondientes (en $\mathbb{R}^2$) al par de vértices de G. El conjunto de puntos y el conjunto de arcos en $\mathbb{R}^2$ forman una gráfica geométrica llamada* ***gráfica geométrica asociada*** *a la gráfica combinatoria G.*

Así, si a una gráfica combinatoria G podemos asociarle una gráfica geométrica plana, diremos que G es una ***gráfica combinatoria plana.***

Como estamos tomando V finito, entonces G está acotada, supongamos que $G \subset D$, donde D es un disco en $\mathbb{R}^2$. Además $\mathbb{R}^2 \backslash G$ es un conjunto abierto cuyas componentes (las llamaremos también regiones) conexas son llamadas caras de G. Exactamente una de estas caras no esta acotada (la cara que contiene a $\mathbb{R}^2 \backslash D$), a esta cara le llamaremos cara exterior de G y a las otras caras les llamaremos caras interiores de G. Ver la Figura 9.

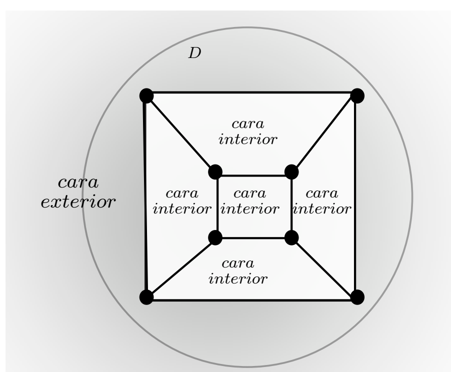
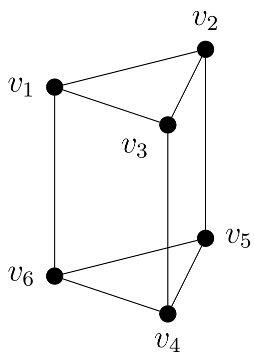


Figura 9.

Lema 3.3.1. *Sea $G = (V, E)$ una gráfica plana y sea $G_1 = (V_1, E_1)$ una subgráfica de G, entonces G_1 es plana.*

Definición 58. *Sean G_1 y G_2 dos gráficas. Decimos que G_1 y G_2 son* ***isomorfas*** *si existe una biyección $f : V(G_1) \to V(G_2)$ tal que $\{x, y\} \in E(G_1)$ si y sólo si $\{f(x), f(y)\} \in E(G_2)$. Si G_1 y G_2 son isomorfas, escribiremos $G_1 \cong G_2$.*



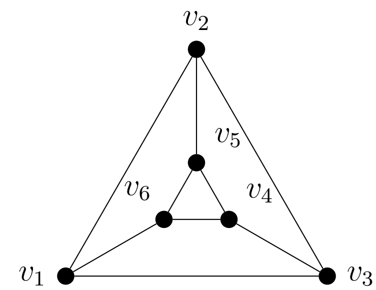


Figura 10.

Las gráficas de la Figura 10 son isomorfas, para demostrarlo, basta tomar la función identidad y ver que se preservan las adyacencias.

Una manera de visualizar lo que es una gráfica plana es ver que sus aristas no se intersecten, aunque, ver en un dibujo que las aristas de una gráfica se intersectan, no quiere decir que no sea plana, puede tener otra representación en la que se vea que es plana.

A continuación se demostrarán dos teoremas de teoría de gráficas usando el teorema de la curva de Jordan.

Teorema 3.3.2. *La gráfica geométrica K_5 no es plana.*

Demostración. Se demostrará por contradicción, supongamos que K_5 es plana. Denotemos por v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 a los vértices de K_5. Como K_5 es completa, cualesquiera dos de sus vértices están unidos por una arista. Consideremos, sin pérdida de generalidad los vértices v_1, v_2 y v_3 y sean $f_1, f_2, f_3 : I \to \mathbb{R}^2$ trayectorias que van de v_1 a v_2, de v_2 a v_3 y de v_3 a v_1 respectivemente. Como hemos supuesto K_5 plana, entonces podemos tomar a las imágenes de I bajo f_1, f_2 y f_3 de manera que no se intersecten salvo en los extremos. Por lo tanto $C = f_1 * f_2 * f_3$ es una curva cerrada simple en $\mathbb{R}^2$. Por el *teorema de la curva de Jordan*, el complemento de C consta de dos componentes conexas por trayectorias, que viendo a C como una gráfica dichas componentes son las caras exterior e interior de C.

El vértice v_4 tiene que estar en la cara interior o exterior de C. Supongamos que v_4 está en la cara interior de C.

Al trazar las aristas v_1v_4, v_2v_4 y v_3v_4, éstas dividen a la cara interior de C en tres regiones, las caras interiores de C_1, C_2 y C_3, donde $C_1 = v_1v_2v_4v_1$, $C_2 = v_2v_3v_4v_2$, $C_3 = v_1v_3v_4v_1$. Ver la gráfica del lado izquierdo en la figura 11. Nuevamente, estas aristas se pueden dibujar de manera que no se cruzan entre sí, ni crucen a C, pues como K_4 es subgráfica.de K_5, que hemos supuesto plana, por el lema 3.3.1, K_4 es plana.

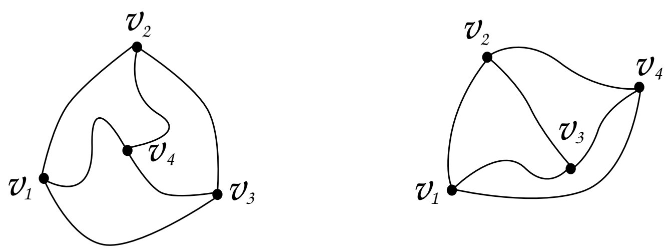


Figura 11.

Ahora, v_5 debe estar en una de estas cuatro regiones. Supongamos, en un primer caso, que v_5 está en la cara exterior de C, como tomamos v_4 en la cara interior de C, por el corolario 3.2.2 cualquier trayectoria que una v_4 con v_5 cruza necesariamente la curva C, por lo tanto la arista v_4v_5 intersecta C y habíamos supuesto K_5 plana.

Como segundo caso, supongamos v_5 en la cara interior de C_1, como C_1 se formó con los vértices v_1, v_2, v_4, entonces v_3 está en la cara exterior de C_1. Como en el primer caso, por el corolario 3.2.2 la arista v_3v_5 intersecta a C_1, pero supusimos K_5 plana.

Los casos en que v_5 está en la cara interior de C_2 o en la cara interior de C_3 se hacen de manera análoga al segundo caso.

Por último si suponemos que v_4 está en la cara exterior de C, al poner las aristas v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4, obtenemos la gráfica del lado derecho en la Figura 11. Pero las dos gráficas de la Figura 11 son isomorfas, tomando la función identidad tenemos un isomorfismo. Entonces sin pérdida de generalidad pudimos haber tomado v_4 en la cara interior de C. $\square$

Definición 59. *Para cualquier conjunto de vértices S de G, la **subgráfica inducida** $< S >$ es la subgráfica maximal de G con el conjunto de vértices de G. Así, dos vértices son adyacentes en $< S >$ si y sólo si son adyacentes en G.*

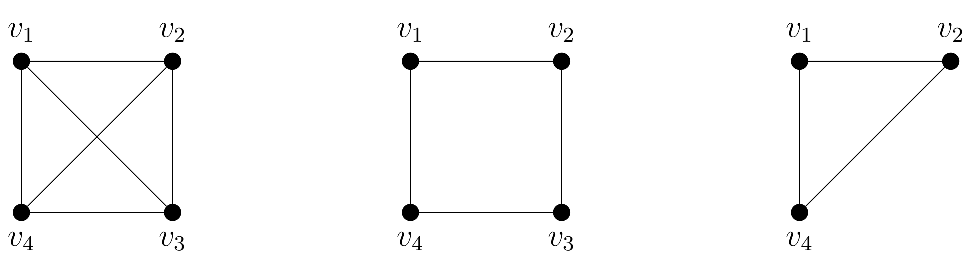


Figura 12.

Teniendo en base la gráfica que aparece en el lado izquierdo de la Figura 12, aparece en el centro de la misma figura una gráfica, que es subgráfica de la anterior pero no es inducida pues no tiene todas las aristas posibles con los cuatro vértices y que sean aristas en la primer gráfica, a saber no esta la arista v_1v_3 ni la arista v_2v_4, en el lado derecho aparece una subgráfica de la primera que sí es inducida.

Teorema 3.3.3. *La gráfica geométrica* $K_{3,3}$ *no es plana.*

Demostración. Haremos la demostración por contradicción, supongamos $K_{3,3}$ plana. Sea X, Y una bipartición de $K_{3,3}$, con $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, consideremos la subgráfica inducida generada por el conjunto $\{x_2, x_3, y_2, y_3\}$ (note que es única salvo isomorfismo), ver la Figura 13.

Figura 13.

Vemos que $C_1 = x_2y_3x_3y_2x_2$ es un 4-ciclo y es plana pues satisface las 4 condiciones pedidas. Entonces podemos ver a C_1 como una curva cerrada simple, que por el teorema de la curva de Jordan tiene exactamente dos componentes conexas por trayectorias, que son precisamente las caras exterior e interior de dicha gráfica. Añadamos ahora un vértice, que igual que antes no se pierde generalidad al elegir cualquiera de ellos, digamos x_1. Entonces x_1 necesita estar en la cara exterior o en la cara interior de C_1. Como primer caso, digamos que x_1 está en la cara interior. Pongamos las aristas correspondientes para ir construyendo $K_{3,3}$, que son las aristas que unen x_1 con y_2 y x_1 con y_3. Tal gráfica sigue siendo plana, que se ve en la Figura 14.

Supongamos que $K_{3,3}$ es plana. Se ha dividido la cara interior de C_1 en dos caras interiores, la de $C_2 = x_2y_2x_1y_3x_2$ y la de $C_3 = y_2x_3y_3x_1y_2$. Por lo que al vértice y_1 le

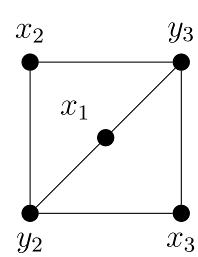


Figura 14.

corresponde estar en la cara exterior de C_1 o en alguna de las caras interiores de C_2 o C_3.

Como primer caso supongamos que y_1 está en la cara exterior de C_1. Hemos tomado $y_1 \in Y$ y $x_1 \in X$, por lo que debe existir una arista entre ellos, pero x_1 está en la cara interior de C_1, entonces por el corolario 3.2.2 cualquier arco que una x_1 con y_1 intersecta a C_1, contradiciendo la hipótesis de que $K_{3,3}$ es plana.

Otro caso es cuando y_1 está en la cara interior de C_2, pero y_1 tiene que tener una arista con x_3 que está en la cara exterior de C_2, por el corolario 3.2.2 cualquier arco entre estos dos vértices intersecta a C_2, contradiciendo que $K_{3,3}$ es plana. El caso cuando y_1 está en el interior de C_3 se hace de manera análoga. Por último, el caso en que el vértice x_1 está en el exterior de C_1 se reduce al caso en que x_1 está en el interior de C_1, basta tomar un isomorfismo que lleve x_1 al interior de C_1. $\square$

Capítulo 4

Topología Digital

4.1. El teorema de Rosenfeld

Se mostrarán las formas de adyacencia entre puntos del plano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Definimos los ***4-vecinos*** del punto $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, como los puntos de la forma $(x, y \pm 1)$ y $(x \pm 1, y)$, que se muestran en la Figura 15. Y se definen los ***8-vecinos*** del punto (x, y) como los puntos que consisten de los 4-vecinos y los puntos $(x \pm 1, y \pm 1)$. Los cuales están representados en la Figura 16.

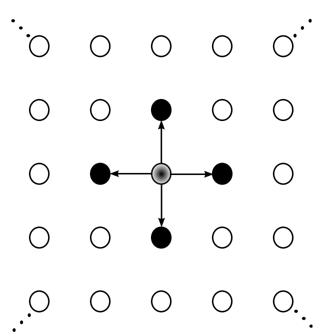


Figura 15.

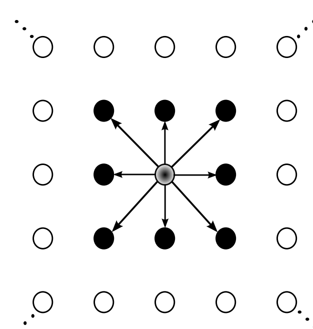


Figura 16.

Los dos tipos de adyacencia antes mencionados son los que vamos a permitir en el plano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Con estos elementos se puede hacer un modelo simplificado del plano digital.

Una ***k-trayectoria*** es una sucesión finita de puntos $p_0, p_1, ..., p_n \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tales que p_{i-1} es un k-vecino de p_i, $1 \leq i \leq n$. En esta definición no hay restricción en el sentido de que se repitan los puntos, es decir, en una trayectoria puede haber intersecciones.

Decimos que un conjunto $S \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es ***k-conexo*** si cualesquiera dos puntos en S pueden ser unidos por una ***k-trayectoria***.

En la Figura 17 se muestra un conjunto (puntos negros) que no es ni 4-conexo ni 8- conexo, ya que el punto p_0 no puede ser conectado con p_1, p_2 o p_3 por una 4-trayectoria o una 8-trayectoria.

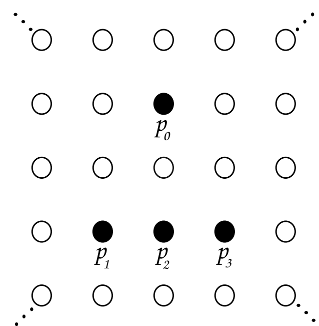


Figura 17.

Note que todo conjunto 4-conexo es siempre 8-conexo, pero el recíproco no es cierto, observe que en la Figura 18 el conjunto de puntos $\{p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4\}$ es 8-conexo pero no puede ser 4-conexo, ya que el punto p_0 no tiene ningún 4-vecino en S.

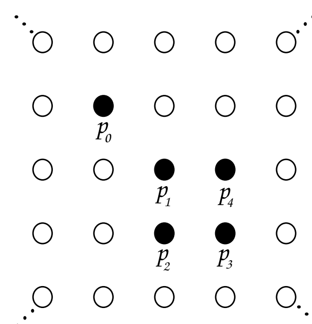


Figura 18.

Es sorprendente que el teorema de la curva de Jordan tenga un análogo en el plano digital. Las curvas de Jordan que nos servían en el plano $\mathbb{R}^2$, en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ no nos van a servir, lo que vamos a hacer es ver la relación de adyacencia entre dos puntos para definir los tipos de curvas que van a funcionar.

Una ***k-curva de Jordan*** es un conjunto finito k-conexo que contiene exactamente dos k-vecinos para cada uno de sus puntos.

Note que una k-curva de Jordan no es lo mismo que una k-trayectoria *cerrada.* Una 4-curva de Jordan no puede ser una 8-curva de Jordan ni viceversa, a diferencia de los conjuntos k-conexos en la que si se satisfacía una implicación.

En la Figura 19 se muestra una 4-curva de Jordan y en la Figura 20 una 8-curva de Jordan.

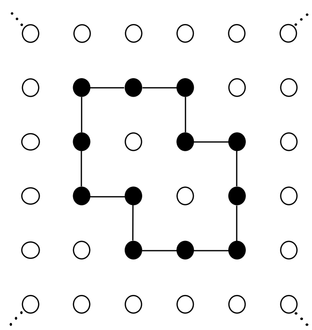


Figura 19.

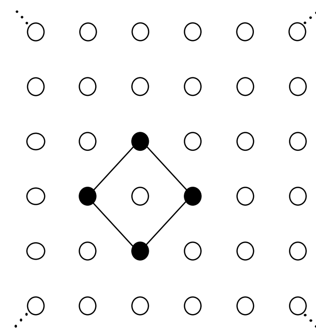


Figura 20.

En 1979, Rosenfeld [16] , basado en la relación que guardan las dos curvas ilustradas en las figuras 19 y 20, demostró el siguiente teorema:

Teorema 4.1.1 (Teorema de Rosenfeld)**.** *Una k-curva de Jordan con al menos 5 puntos, separa* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *en exactamente dos* k'*-componentes, donde k=4 si* k'*=8 y k=8 si* k'*=4.*

Este teorema se demostrará al final de la sección 4.2. Para ello, necesitaremos introducir algunas propiedades de espacios topológicos conexos que tienen un orden. Usaremos también una topología conocida como topología de Khalimsky que se define al inicio de la siguiente sección.

Por ejemplo, consideremos la 8-curva de Jordan que aparece en la Figura 21 podemos ver que hay dos 4-componentes conexas, una que es el interior de la curva (que consta de un sólo punto) y la otra en el exterior de dicha curva.

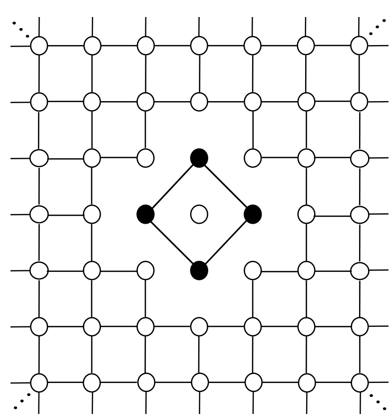


Figura 21. $k = 4$, k'=8

Ahora observemos el caso de la 4-curva de Jordan mostrada en la Figura 20, cuyas dos 8-componentes conexas se pueden observar en la Figura 22.

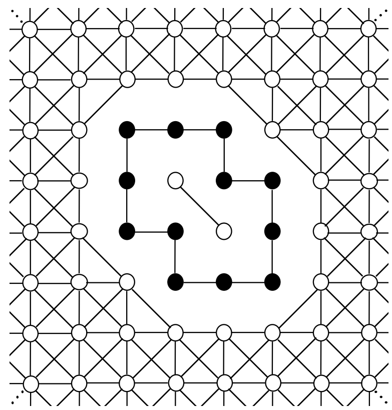


Figura 22. $k = 8$, $k'=4$

El hecho de pedir que una k-curva de Jordan tenga al menos 5 puntos, es para dejar fuera los casos patológicos en los que el interior de la curva es vacía, como se muestra en las figuras 23 y 24.

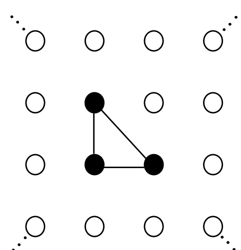


Figura 23.

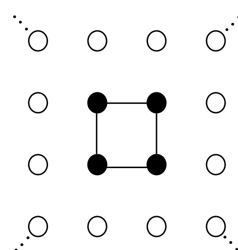


Figura 24.

4.2. Topología de Khalimsky

Podemos construir la topología de Khalimsky en la línea digital $\mathbb{Z}$, asociando a cada entero par m el intervalo cerrado

$$[m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}]$$

y a cada entero impar n el intervalo abierto

$$(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}).$$

Estos intervalos forman una partición de la línea euclidiana $\mathbb{R}$. Consideraremos el espacio cociente, identificando a cada intervalo con el entero que contiene, obteniendo así la topología de Khalimsky en $\mathbb{Z}$.

En el plano digital $\mathbb{Z}^2$, la topología de Khalimsky viene dada por la topología producto de las líneas digitales con la topología de Khalimsky.

A los puntos con ambas coordenadas impares se les dice puntos ***abiertos***, aquellos con coordenadas pares ***cerrados*** y a los que tienen una coordenada par y otra impar ***mixtos***.

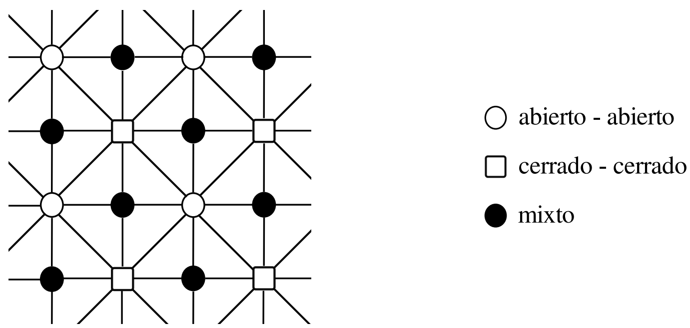


Figura 25. Porción de un plano digital

En la Figura 25 se observa que un punto mixto tiene sólo cuatro vecinos y un punto puro tiene ocho vecinos, esto se definirá más adelante con mayor presición. En la presente tesis, sólo usaremos la topología de Khalimsky, pero existen otras topologías para el plano digital, en [3] se muestra que sólo existen dos topologías en $\mathbb{Z}^2$ que tienen componentes conexas en el sentido de conexidad mostrado antes, una de ellas es la topología de Khalimsky [12] y la otra presentada en [8].

A continuación definiremos un tipo de espacios topológicos que tienen ciertas propiedades, algunas de las más importantes mostradas en 4.2.5 con las que podremos llegar a la demostración del teorema de Rosenfeld.

Definición 60. *Un **espacio topológico conexo ordenado** (ETCO), es un espacio topológico conexo X con la propiedad de que para todo subconjunto Y de X con tres puntos, existe $y \in Y$ tal que Y intersecta dos componentes conexas de $Y \setminus \{y\}$, es decir, para cualesquiera tres puntos distintos uno de ellos separa a los otros dos.*

Lema 4.2.1. *Si Y es un subespacio conexo de un espacio topológico conexo X y A, B es una separación de $X \setminus Y$, entonces $Y \cup A$ es conexo. Así, si A es un conjunto que es a la vez abierto y cerrado en $X \setminus \{x\}$, entonces $A \cup \{x\}$ es conexo.*

Demostración. Lo demostraremos por contradicción, supongamos que $Y \cup A$ es disconexo. Sea C, D una separación de $Y \cup A$. Por ser Y conexo, entonces $Y \subseteq C$ o $Y \subseteq D$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $Y \subseteq C$.

Si $Y = C$, entonces $A = D$, entonces Y, A, B son disjuntos a pares y tendríamos una separación de X, contradiciendo que X es conexo.

Ahora, si Y no es todo C, entonces existen puntos de A y no en Y que están en C, llamemos a este conjunto $C' = C \cap A$. Tenemos que C' y D forman una separación de A, por lo que con A, B y Y podríamos formar una separación de X, pero esto no es posible ya que X es conexo.

La segunda parte del lema se sigue de la primera, basta considerar $Y = \{x\}$ y $B = (X \setminus \{x\}) \setminus A$. □

Lema 4.2.2. *Un espacio topológico X con al menos n componentes conexas puede ser expresado como la unión disjunta de n subconjuntos no vacíos que son a la vez abiertos y cerrados.*

Demostración. Vamos a usar inducción sobre el número de componentes n. Si X tiene al menos dos componentes, denominemos por C_1 a una de esas componentes y por C_2 al resto de las componentes, entonces, C_1 y C_2 forman una separación de X. Además, C_1 y C_2 son cerrados, pues $X \setminus C_1$ es abierto, de igual manera $X \setminus C_2$ es abierto. Supongamos que es válido cuando X tiene n componentes y lo demostraremos para $n+1$ componentes. Si X tiene al menos $n+1$ componentes, sean $C_1, C_2, ..., C_n$, n componentes de X y sea C_{n+1} la unión de las demás componentes, entonces C_{n+1} es abierto y cerrado, pues es el complemento de $\cup_{i=1}^{n} C_i$ que es abierto y cerrado. □

Lema 4.2.3. *Sea X un espacio topológico conexo.*

a) Sean x, w elementos distintos de X, y A, B son ambos abiertos y cerrados en $X \setminus \{x\}$, $X \setminus \{w\}$, respectivamente. Entonces ($w \in A$ y $x \notin B$) si y sólo si $B \subseteq A$.

b) Si P, Q y R son conjuntos disjuntos no vacíos y son a la vez abiertos y cerrados, cuya unión es $X \setminus \{x\}$, entonces, para cada $p \in P$, $Q \cup R$ está en una componente de $X \setminus \{p\}$.

Demostración. Demostraremos la primera implicación de a). Por el lema 4.2.1, se tiene que $B \cup \{w\}$ es conexo, como $x \neq w$ y $x \notin B$ entonces $B \cup \{w\} \subseteq X \setminus \{x\}$. Sabemos que $w \in A$, entonces $B \cup \{w\}$ intersecta a A, por ser $B \cup \{w\}$ conexo se tiene que $B \cup \{w\} \subseteq A$. Por lo tanto $B \subseteq A$.

Ahora si $B \subseteq A$, como $x \notin A$ y $x \notin B$, además sabemos por el lema 4.2.1 que $B \cup \{w\}$ es conexo, pero $B \cup \{w\}$ intersecta a A, por lo que $B \cup \{w\}$ está contenido en A, de manera que $w \in A$.

Demostraremos b). Como $Q \cup R$ es abierto y cerrado en $X \setminus \{x\}$, entonces, por el lema 4.2.1 se tiene que $Q \cup R \cup \{x\}$ es un conjunto conexo, además $Q \cup R \cup \{x\} \subseteq X \setminus \{p\}$, pues P, Q y R son disjuntos y $Q \cup P \cup R = X \setminus \{x\}$. Por lo tanto, para todo $p \in P$ se cumple $Q \cup R \subseteq X \setminus \{p\}$, es decir, $Q \cup R$ está en una componente de $X \setminus \{p\}$. □

Definición 61. *Un punto $x \in X$ es llamado un* ***punto de corte*** *si $X\setminus\{x\}$ tiene dos componentes conexas, y es llamado* ***punto final*** *si $X\setminus\{x\}$ tiene una sóla componente conexa.*

Proposición 4.2.4. *En un ETCO existen a lo más dos puntos finales y cualquier otro punto es un punto de corte.*

Demostración. De la definición de un ETCO, el conjunto de puntos finales no puede tener tres elementos. Ahora, si $X \setminus \{x\}$ tuviera más de dos componentes, por el lema 4.2.2 podemos expresar a $X \setminus \{x\}$ como la unión disjunta de tres subconjuntos no vacíos que son a la vez abiertos y cerrados; sean estos conjuntos A, B y C, como son no vacíos, tomemos $a \in A, b \in B, c \in C$, entonces por el lema 4.2.3 b), $A \cup B$ está contenido en una componente de $X \setminus \{c\}$. Esto lo podemos hacer con cualquier elemento de $\{a, b, c\}$. Por lo que siempre que quitemos uno de ellos, los otros dos están en una misma componente, contradiciendo la definición de un ETCO. □

Definición 62. *Si $<$ es un orden total en X y $x \in X$, definimos*

$$\boldsymbol{L(x)} = \{y \in X : y < x\} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{U(x)} = \{y \in Y : y > x\}.$$

Teorema 4.2.5. *Sea X un espacio topológico. Si $|X| \geq 3$, entonces X es un ETCO si y sólo si existe un orden total $<$ en X tal que para cada $x \in X$, $L(x)$ y $U(x)$ son las componentes de $X \setminus \{x\}$ (si x es un punto final, una de ellas es vacía).*

Demostración. $\Rightarrow$) Primero demostraremos existencia. Como $|X| \geq 3$, elijamos $x \in X$ arbitrario y llamemos a una de las componentes de $X \setminus \{x\}$ por U_x y a la otra por L_x. Para cualquier otro $y \in X$, si $y \notin L_x$ llamemos por L_y a la componente de $X \setminus \{y\}$ que contiene a x. en cuyo caso, por el lema 2.1.4 (a) $L_x \subseteq L_y$; en cambio si $y \notin L_x$ llamaremos por L_y a la componente de $X \setminus \{y\}$ que no contiene a x. Definamos el orden parcial $<$ por $y \leq z$ si y sólo si $L_y \subseteq L_z$ y $y \neq z$. Para ver que $<$ es un orden total, demostraremos que para cualesquiera $y, z \in X$ se tiene que L_y y L_z están relacionados por la inclusión $\subseteq$.

Podemos suponer que x, y, z son todos distintos (pues si al menos dos de ellos son iguales, el resultado se cumple). Tenemos cuatro casos:

a) Si $y \notin L_x$ y $z \in L_x$, entonces $L_x \subseteq L_y$ y $L_z \subseteq L_x$, por lo que $L_z \subseteq L_y$.

b) Si $y \in L_x$ y $z \notin L_x$, entonces $L_y \subseteq L_x$ y $L_x \subseteq L_z$, por lo que $L_y \subseteq L_z$.

c) Si $y, z \in L_x$, tenemos también cuatro casos, los casos en que $y \in L_z$ y $z \notin L_y$, y $y \notin L_z$ y $z \in L_y$ son claros; otro caso es cuando $y \in L_z$ y $z \in L_y$, se tiene entonces que $z \notin U_y$ y $y \in L_z$, por el lema 2.1.4 (a) $U_y \subseteq L_z$, pero $L_z \subseteq L_x$ entonces $U_y \subseteq L_x$ además $L_y \subseteq L_x$, por lo tanto $x = y$ obteniendo una contradicción. El caso que falta, es cuando $y \notin L_z$ y $z \notin L_y$. Como $y, z \notin L_x$, entonces $x, y \in U_z$ y $x, z \in U_y$, por lo que en el conjunto $\{x, y, z\}$ no existe ningún elemento que al quitarlo separe a los otros dos, contradiciendo la definición de un ETCO.

d) El caso cuando se tiene que $y, z \notin L_x$, se hace de manera análoga al inciso (c).

Demostraremos unicidad. Como definimos el orden parcial $<$, tenemos que $U(y) = U_y$ y $L(y) = L_y$, por lo que éstas son las componentes de $X \setminus \{y\}$. Supongamos lo contrario, es decir que existe otro orden total $<<$ que satisface $U'(y) = \{z : y << z\}$ y $L'(y) = \{z : z << y\}$ son conexos, entonces, por ser $<<$ un orden total, se tiene que $X \setminus \{y\} = U'(y) \cup L'(y)$, por lo que $U'(y)$ y $L'(y)$ son las componentes de $X \setminus \{y\}$. Si $U(x) = U'(x)$ para algún $x \in X \setminus \{y\}$, el que $y \in U(x)$ implicaría que $y \in U'(x)$, así que $x \in L'(y)$ de manera que $U'(y) \subseteq U'(x) = U(x)$, de ahí que $L(x) \subseteq L'(y)$, y como $\{L'(y), U'(y)\} = \{L(y), U(y)\}$ se concluye que $U(y) = U'(y)$. Hemos visto que para $y, z \in X$, $y << z$ si y sólo si $y < z$, por lo que $<=<<$. También, si $U(x) = L'(x)$ se tendrá que $<<=>$.

$\Leftarrow$) Sea X un espacio topológico conexo con orden total $<$. Sean $x, y, z \in X$, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $x < y < z$, entonces $\{x\} = Y \cap L(y)$, $\{z\} = Y \cap U(y)$, por lo que $\{x, y, z\}$ intersecta a ambas componentes de $X \setminus \{y\}$. $\square$

En un ETCO, una vez que tenemos el orden total llamaremos por x^+, x^- a un ***sucesor*** y ***predecesor***, respectivamente de x, si estos existen. Usaremos la notación $[x, y]$ para referirnos al conjunto $\{z : x \leq z \leq y\}$.

Lema 4.2.6. *Sea X un ETCO, con $|X| \geq 3$.*

a) Si A, B separan $X \setminus \{x\}$, entonces $\overline{A} \subseteq A \cup \{x\}$, y $\{x\}$ es abierto o cerrado. Además, A es abierto si y sólo si $\{x\}$ es cerrado; A es cerrado si y sólo si $\{x\}$ es abierto.

b) Si $x \in X$ tiene un sucesor pero no un sucesor inmediato, entonces $\{x\}$ es cerrado.

c) Sea X con al menos tres puntos. Si x, y son puntos adyacentes, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) $\{x\}$ es cerrado.

(ii) $y \notin \overline{\{x\}}$.

(iii) $\{y\}$ es abierto.

(iv) $x \in \overline{\{y\}}$.

d) Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$, entonces x, y son adyacentes si y sólo si $\{x, y\}$ es conexo.

Demostración. a) Si A, B separan $X \setminus \{x\}$, entonces $A, B \neq \emptyset$, $A \cup B = X \setminus \{x\}$ y $A \cap B = \emptyset$. Supongamos que $\overline{A}$ no está contenido en $A \cup \{x\}$, entonces existe $a \in \overline{A}$ tal que $a \notin A \cup \{x\}$, entonces $a \in B$; por definición de cerradura, cualquier cerrado F en X contiene a a y $A \subseteq F$, como $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = X \setminus \{x\}$, entonces B es un abierto en X, por lo que $X \setminus B = A \cup \{x\}$ es cerrado, obteniendo una contradicción pues $a \notin A \cup \{x\}$.

Ahora veremos que $\{x\}$ es abierto o cerrado, pero no las dos cosas a la vez. Para ello notemos que $\overline{A} \subseteq A \cup \{x\} = X \setminus B$, de manera similar $\overline{B} \subseteq B \cup \{x\} = X \setminus A$. Mostraremos que $x \in \overline{A}$ si y sólo si $x \in \overline{B}$. Supongamos que $x \in \overline{A}$ pero $x \notin \overline{B}$, es decir $x \in \overline{A} \setminus \overline{B}$, como $\overline{A} = A \cup \{x\}$, entonces $\overline{B} = B$ y $\overline{A}, B$ separan a X, pero no es posible ya que X es conexo. De manera análoga se demuestra que si $x \in \overline{B}$, entonces $x \in \overline{A}$.

Concluiremos observando que $x \in \overline{A}$ si y sólo si $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \{x\}$ y esto se cumple si y sólo si $\{x\}$ es cerrado, se tiene entonces que $A = x \setminus \overline{B}$ es un conjunto abierto. De manera similar se ve que $x \notin \overline{A}$ si y sólo si A es cerrado.

b) Mostraremos que si $\{x\}$ es cerrado, entonces $X \setminus \{x\}$ es un conjunto abierto, por lo que basta demostrar que $U(x)$ es abierto. Sea $y \in U(x)$, entonces podemos encontrar z tal que $x < z < y$ (pues x no tiene un sucesor inmediato). Así $X \setminus \overline{L(z)}$ es una vecindad de y en $U(x)$.

c) Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $y < x$, entonces $U(y) = U(x) \cup \{x\}$ por lo que $L(x) = X \setminus U(y)$. Notemos que $(i) \Rightarrow (ii)$, pues $\{x\} = \overline{\{x\}}$, entonces $y \notin \overline{\{x\}}$. Para ver que $(ii) \Rightarrow (iii)$, observemos que si $y \notin \overline{\{x\}}$ se tiene que $\overline{U(y)} = \overline{(U(x) \cup \{x\})}$; pero $\overline{(U(x) \cup \{x\})} \subseteq (U(x) \cup \{x\}) \cup \overline{\{x\}}$, por el inciso a), por lo que $y \notin \overline{U(y)} \subseteq U(y) \cup \{y\}$. Por lo tanto $U(y)$ es cerrado y $\{y\}$ es abierto, como se quería. Demostraremos $(iii) \Rightarrow (iv)$. Si $\{y\}$ es abierto, entonces $U(y)$ es cerrado y por la convexidad de X, $L(y) \cup \{y\} = L(x)$ no es cerrado; pero $x \in \overline{L(x)} = \overline{(L(y) \cup \{y\})} \subseteq (L(y) \cup \{y\}) \cup \overline{\{y\}}$, por lo tanto $x \in \overline{\{y\}}$. Finalmente veremos que $(iv) \Rightarrow (i)$. Como $x \in \overline{\{y\}}$ y $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{L(x)}$, entonces $x \in \overline{L(x)}$, de manera que $L(x)$ no es cerrado, entonces $\{x\}$ no es abierto, por lo tanto $\{x\}$ necesariamente es cerrado.

d) Supongamos primero que dos puntos distintos x, y de X son adyacentes, entonces uno de ellos abierto. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\{y\}$ es abierto, entonces $x \in \overline{\{y\}}$ por el inciso c); de ahí que $\{y\} \subseteq \{x, y\} \subseteq \overline{\{y\}}$. Por lo tanto $\{x, y\}$ es conexo. Supongamos ahora que $\{x, y\}$ es conexo, de la sola definición de conexidad se concluye que x, y son adyacentes. $\square$

Definición 63. *Un espacio topológico se dice que es $T_{1/2}$ si para cada uno de sus elementos de un sólo punto es abierto o cerrado.*

Del lema anterior puede concluirse el siguiente resultado.

Proposición 4.2.7. *Sea X un ETCO con al menos tres puntos.*

a) X es $T_{1/2}$.

b) X es T_1 si y sólo si no contiene pares de puntos adyacentes. Además:

- *i) Tal espacio es infinito y en realidad T_2, y la topología ETCO es más fina que la topología usual de intervalo.*

ii) Si cada topología ETCO es compacta, entonces coincide con la topología de intervalo inducida por este ordenamiento.

Lema 4.2.8. *Si un espacio conexo X tiene dos puntos e, f, tales que para cada punto restante z, los dos puntos están en diferentes componentes de $X \setminus \{z\}$, entonces X es un ETCO con e, f puntos finales.*

Demostración. Veremos primero que si $z \in X \setminus \{e, f\}$, entonces $X \setminus \{z\}$ tiene a lo más dos componentes. Si tuviera más de dos componentes, por el lema 4.2.2, existirían conjuntos disjuntos no vacíos A, B, C todos abiertos y cerrados tales que $X \setminus \{z\} = A \cup B \cup C$. Y uno de ellos, digamos A no contiene ni a e ni a f, por el lema 4.2.3 b), si $a \in A$ entonces $B \cup C$ está en una misma componente de $X \setminus \{a\}$, pero e y f no pueden estar en la misma componente.

Sea $w \in X \setminus \{e, f\}$, definamos a L_w como la componente que contiene a e y U_w como la componente que contiene a f. Note que $X \setminus \{e\}$ es conexo. Pues si $w \in X \setminus \{e\}$, entonces $U_w \cup \{w\}$ es conexo y contiene a f, de manera que

$$X \setminus \{e\} = \cup\{U_w \cup \{w\} : w \in X \setminus \{e, f\}\}$$

que es un conjunto conexo. De manera análoga podemos demostrar que $X \setminus \{f\}$ es conexo. Concluimos que e, f son puntos finales.

Definamos $L_e = U_f = \emptyset$, $U_e = X \setminus \{e\}$ y $L_f = X \setminus \{f\}$. Probaremos ahora, que para puntos distintos $x, y \in X$, se tiene que $x \in U_y$ si y sólo si $y \in L_x$. Lo haremos por contradicción, supongamos $x \in U_y$ y $y \notin L_x$, por el lema 4.2.3 b) $L_x \subseteq U_y$, pero $e \in L_x \setminus U_y$, a menos que $y = e$ y tendríamos que $y \in U_y$, pero esto no es posible por la definición de U_y.

De manera análoga podemos llegar a una contradicción si suponemos que $x \in L_y$ y $x \notin U_y$.

Por último, veremos que, dados tres puntos uno de ellos separa a los otros dos. Sea $Y = \{x, y, z\}$, asumamos que ni x ni z separan los otros dos puntos, ya que si uno de ellos separara a los otros dos habríamos terminado. Podemos asumir que $x, y \in L_z$, por lo mostrado anteriormente, $z \in U_x$, así que $y \in U_x$, en la misma componente que z, por lo que $z \in U_y$ y $x \in L_y$. Por lo tanto X es un ETCO. □

Lema 4.2.9. *Cualquier subconjunto compacto de un ETCO tiene un primer punto y un punto final.*

Demostración. Sea X un ETCO y sea $Y \subseteq X$ compacto. Supongamos lo contrario, es decir que Y no tiene un primer elemento, entonces el conjunto

$$\mathscr{A} = \{\text{Int } U(y) : y \in Y\}$$

es un cubierta abierta de Y, ya que si $y \in U(x)$, entonces $x < y$ necesariamente, esto ocurre siempre, ya que Y no tiene un primer elemento. Ahora, Y no tiene una subcubierta finita, pues Int $U_x \subseteq U_x$ y $x \notin U_x$, es decir, ningún subconjunto de un ETCO es cubierto por Int U_x para algún $x \in Y$, por lo tanto tampoco ninguna unión finita de estos conjuntos. Contradiciendo el hecho de que Y era compacto. $\square$

Definición 64. *Si Y es un espacio topológico, una **ETCO-trayectoria** es la imagen continua de un ETCO en Y. Diremos que Y es **conexo por ETCO-trayectorias** si cualesquiera dos puntos de Y están contenidos en una ETCO-trayectoria.*

Definición 65. *Si Y es un espacio topológico, un **ETCO-arco** es la imagen homeomorfa de un ETCO en Y. Diremos que Y es **conexo por ETCO-arcos** si cualesquiera dos puntos de Y están contenidos en un ETCO-arco.*

Definición 66. *Definimos el **conjunto de adyacencia** $A(x)$ de un punto $x \in Y$ como $A(x) = \{y \neq x : \{x, y\}$ es conexo$\}$.*

Teorema 4.2.10. *Sea Y un espacio topológico.*

a) $\{x, y\}$ es conexo si y sólo si $x \in \overline{\{y\}}$ o $y \in \overline{\{x\}}$.

b) Si Y es finito, entonces $A(x) \cup \{x\} = \overline{\{x\}} \cup N(x)$ para cualquier $x \in Y$.

Demostración. Demostración de (a) ($\Rightarrow$), notemos que si $\{x, y\}$ es conexo, se tiene que $x \in N(y)$ o $y \in N(x)$, por lo tanto se tiene que $y \in \overline{\{x\}}$ o $x \in \overline{\{y\}}$.

Para demostrar la otra implicación ($\Leftarrow$), vemos que si $x \in \overline{\{y\}}$ o $y \in \overline{\{x\}}$, entonces $x \in N(y)$ o $y \in N(x)$ por lo que $\{x, y\}$ es conexo.

Para (b), cuando tenemos Y finito, la mínima vecindad de cada punto es también un conjunto abierto, de manera que $A(x) \cup \{x\} = \overline{\{x\}} \cup N(x)$. $\square$

Teorema 4.2.11. *Sean Y un espacio topológico y $x, y \in Y$. Un conjunto C es el conjunto mínimo entre los subconjuntos conexos que contienen a los puntos x, y si y sólo si C es un arco con puntos finales x, y, y además, si Y es un ETCO, $x, y \in Y$ y $x < y$, entonces $[x, y]$ es el único arco en Y con puntos finales x, y.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Mostraremos que C es un arco. Sea $z \in C \setminus \{x, y\}$, entonces x, y están en diferentes componentes de $C \setminus \{z\}$, pues de no ser así C no sería el mínimo conjunto conexo que contiene a x, y, se sigue del lema 4.2.8 que C es un arco con puntos finales x, y.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que C es un arco con puntos finales x, y, entonces, por la definición de arco, C es el conjunto mínimo de conjuntos conexos que contienen a x, y. $\square$

Teorema 4.2.12. *Sea Y un espacio topológico finito, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) Y es conexo por ETCO-arcos.

ii) Y es conexo por ETCO-trayectorias.

iii) Y es conexo.

Demostración. Como los ETCO-arcos son un caso especial de ETCO-trayectorias, se tiene que $(i) \Rightarrow (ii)$, de igual forma $(ii) \Rightarrow (iii)$ se cumple en general. De manera que sólo resta demostrar que $(iii) \Rightarrow (i)$.

Sea Y conexo y finito, y sean $x, y \in Y$. Podemos elegir un conjunto finito y conexo que contenga a x, y y podemos pedir también que sea mínimo, por teorema 4.2.11 tenemos que tal conjunto es un arco. Esto se cumple no sólo en el caso trivial, pues si A, B son conjuntos conexos disjunto de manera que $A \cup B$ es conexo, entonces existe un arco de un punto $a \in A$ a un punto $b \in B$. □

Teorema 4.2.13. *Sea Y un espacio topológico finito y sea $x \in Y$.*

a) Cualquier arco que contiene a x intersecta $A(x)$.

b) Si Y es conexo, entonces cada componente de $Y \setminus \{x\}$ intersecta $A(x)$.

Demostración. Sea $y \in Y$, $y \neq x$ y sea C un arco en Y con puntos finales x, y. Como $C \setminus \{x\}$ es conexo, entonces su punto final está en $A(x)$, por el lema 4.2.6 d). □

Teorema 4.2.14. *Sea Y un espacio topológico conexo, finito y sean $x, y \in Y$ con $x \neq y$. Entonces Y es un ETCO con puntos finales x, y si y sólo si $|A(x)| = |A(y)| = 1$ y $|A(w)| = 2$ para todo $w \in Y \setminus \{x, y\}$.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Si Y es un ETCO finito con puntos finales x, y; por el teorema 4.2.6 d) tenemos que $A(w)$ es el conjunto de puntos adyacentes a w, si w es un punto de corte, entonces $A(w)$ tiene dos puntos y si w es un punto final, entonces $A(w)$ tiene un sólo punto. Por el lema 4.2.9 se tiene que Y tiene dos puntos finales.

$(\Leftarrow)$ Supongamos ahora que $|A(x)| = |A(y)| = 1$ y $A(w) = 2$ para todo $w \in Y \setminus \{x, y\}$. Por ser Y conexo, existe un arco A en Y conectando x con y, mostraremos que A necesariamente es igual a Y.

Si $Y \neq A$, entonces existe $w \in Y \setminus A$. Sea B un arco de x a w con r su último punto en A. Si s es el sucesor de r en B y t el sucesor de r en A, entonces s, t son puntos distintos del conjunto $A(r)$. Ahora $r \neq x$, pues $|A(x)| = 1$ y hemos visto anteriormente que $A(r)$ tiene al menos dos elementos, por lo que r tiene al menos un predecesor en A. Por lo tanto $|A(r)| \geq 3$, contradiciendo las hipótesis iniciales. □

Definición 67. *Un espacio $X \times Y$ con la topología producto, donde X y Y son ETCO finitos, cada uno con al menos tres elementos, es llamado **plano digital**.*

Definición 68. *Un punto (x, y) es llamado **puro** si $\{x\}$ y $\{y\}$ son ambos abiertos o ambos cerrados. Si uno de ellos es abierto y otro cerrado, entonces es llamado **mixto**.*

Definición 69. *Se define el **borde** $BD(X \times Y)$ de $X \times Y$ como el conjunto*

$$BD(X \times Y) = \{(x, y) : x \text{ o } y \text{ es un punto final}\}.$$

*Si $(x, y) \in BD(X \times Y)$ diremos que (x, y) es un **punto borde**.*

Definición 70. *Un **punto esquina** (x, y) es aquel en el que x, y son ambos puntos finales. Definimos el **borde ajustado** $AD(X \times Y)$ de $X \times Y$ como $BD(X \times Y)$ sin los puntos esquina mixtos.*

Lema 4.2.15. *Sea $X \times Y$ un plano digital y sea $(x, y) \in X \times Y$.*

a) Si (x, y) es un punto puro, entonces

$$A(x, y) = (\{x^-, x, x^+\} \times \{y^-, y, y^+\}) \setminus \{(x, y)\}.$$

b) Si (x, y) es un punto mixto, entonces

$$A(x, y) = (\{x^-, x, x^+\} \times \{y\}) \cup (\{x\} \times \{y^-, y, y^+\}) \setminus \{(x, y)\}.$$

Si (x, y) es un punto borde, puro o mixto, entonces $A(x, y)$ es la porción del conjunto de arriba correspondiente, que están en $X \times Y$.

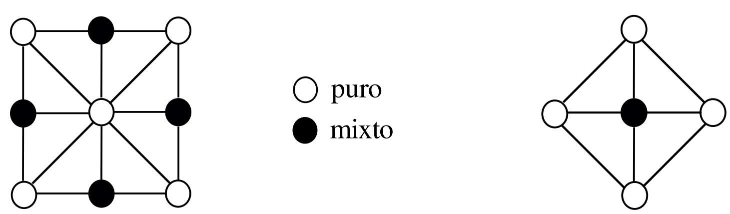


Figura 26. Conjuntos de adyacencia

Demostración. Supongamos que (x, y) no es un punto de $BD(X \times Y)$. (a) Si (x, y) es puro, entonces $\{x\}$ y $\{y\}$ son abiertos o ambos cerrados. Cuando ambos sean abiertos se tendrá que $N(x) = \{x\}$ y $N(y) = \{y\}$, y cuando sean cerrados $N(x) = \{x^-, x, x^+\}$ y $N(y) = \{y^-, y, y^+\}$. Ahora, $N(x, y) = N(x) \times N(y)$. y $\overline{\{(x, y)\}} = \overline{\{x\}} \times \overline{\{y\}}$. Por lo tanto, se tiene que $A(x, y) \cup \{(x, y)\} = \{x^-, x, x^+\} \times \{y^-, y, y^+\})$.

(b) Si (x, y) es mixto, supongamos, sin pérdida de generalidad que $\{x\}$ es abierto y $\{y\}$ es cerrado. Se tiene que $\overline{\{x\}} = \{x^-, x, x^+\}$ y $\overline{\{y\}} = \{y\}$, entonces $\overline{\{(x, y)\}} = \{x^-, x, x^+\} \times \{y\}$ y por lo tanto

$$A(x, y) \cup \{(x, y)\} = (\{x^-, x, x^+\} \times \{y\}) \cup (\{x\} \times \{y^-, y, y^+\}).$$

Para el caso en el que el punto (x, y) es un punto borde, se hace de manera análoga, salvo que se tomarán los elementos del conjunto que estén contenidos en $X \times Y$. $\square$

Definición 71. *Una* ***ETCO-curva de Jordan*** *es un conjunto conexo J con $|J| \geq 4$ tal que $J \setminus \{j\}$ es un ETCO-arco para todo $j \in J$.*

Por simplicidad, de aquí en adelante omitiremos la palabra ETCO y diremos simplemente curva de Jordan, arco, trayectoria, etc.

Lema 4.2.16. *Sea J una curva de Jordan, entonces cualquier subconjunto propio de J es un arco.*

Lema 4.2.17. *Sea J un conjunto finito, entonces J es una curva de Jordan si y sólo si J es conexo, tiene al menos cuatro puntos y $|A(j) \cap J| = 2$ para cada $j \in J$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que J es una curva de Jordan, entonces J es conexo y $|J| \geq 4$, por definición, además si $j \in J$ se tiene que $J \setminus \{j\}$ es un arco. Sean $\{e, f\}$ los puntos finales de dicho arco, por el teorema 4.2.14 $|A(j) \cap J| = 2$ para todo $j \in J \setminus \{j, e, f\}$. Por ser J arbitrario, podemos concluir que $|A(j) \cap J| = 2$ para todo $j \in J$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que J es conexo, $|J| \geq 4$ y $|A(j) \cap J| = 2$ para todo $j \in J$. Sea $j_0 \in J$, entonces $|A(j_0) \cap J| = 2$, entonces $J \setminus \{j_0\}$ es un arco, ya que $A(j_0) \cap J = \{j_o^-, j_0^+\}$; pues si $J \setminus \{j_0\}$ no fuera un arco entonces $\{j_0^-, j_0^+\}$ sería conexo en $J \setminus \{j_0\}$ y de tendría que $|A(j_0^+)| \geq 3$ y $|A(j_0^-)| \geq 3$. □

Lema 4.2.18. *Sea $X \times Y$ un plano digital, entonces $AD(X \times Y)$ es una curva de Jordan y también lo es $A(r)$ para cada $r \in X \times Y$ que no sea un punto borde.*

Demostración. Los puntos en los que podría fallar el lema son en los puntos esquina que sean mixtos, pues si $j \in J$ es un punto esquina mixto se tiene que $|A(j^-) \cap (X \times Y)| = |A(j^+) \cap (X \times Y)| = 3$. Es por eso que estos puntos han sido removidos de $AD(X \times Y)$. Así que al no estar j en $AD(X \times Y)$, j^-, j^+ son adyacentes y cada uno sólo tiene un punto de adyacencia más. Si un punto esquina j es puro, se tiene $j \in AD(X \times Y)$, además j es adyacente sólo a dos puntos en $AD(X \times Y)$ y j^- y j^+ no son adyacentes. Por lo tanto $AD(X \times Y)$ es una curva de Jordan. La segunda afirmación se sigue del lema 4.2.15. □

Lema 4.2.19. *Si J es una curva de Jordan y $\{e, f\} \subseteq J$ no es conexo, entonces existen exactamente dos arcos $A, B \subseteq J$ con puntos finales e, f. Además, $A \cap B = \{e, f\}$, $A \cup B = J$ y si $e, f \in K \subseteq J$, entonces e, f están en la misma componente de K si y sólo si $A \subseteq K$ o $B \subseteq K$.*

Demostración. Por ser J conexo y $\{e, f\}$ no, podemos elegir un punto $a \in J \setminus \{e, f\}$ y asumir sin pérdida de generalidad que $e < f$ en $J \setminus \{a\}$. Sabemos que $[e, f]$ es conexo y $\{e, f\}$ no lo es, entonces existe $b \in [e, f] \setminus \{e, f\}$; consideremos $\{a, b, f\}$ en el ETCO $J \setminus \{e\}$. Como $e < b < f$ en $J \setminus \{a\}$, entonces e y f están en componentes separadas, sean E, F las componentes en $J \setminus \{a, b\}$ de e y f respectivamente. Observemos que $\{b\}$ y $J \setminus \{a\}$ son conexos, por la proposición 4.2.4, E, F son las únicas componentes de

$J\setminus\{a,b\}$. Por el lema 2.1.3 (b), se tiene que E,F son una separación de $J\setminus\{a,b\}$. Por el lema 2.1.3 (a), tenemos $F\cup\{b\}$ es un subconjunto conexo de $J\setminus\{e,a\}$, así f,b están en la misma componente de $J\setminus\{f,b\}$. Por lo que a,b están en diferentes componentes de $J\setminus\{e,f\}$ y este conjunto tiene dos componentes A',B' con $a\in A', b\in B'$ y $A'\cap B'=\emptyset$, $J\setminus\{e,f\}=A'\cup B'$.

Ahora, por el lema 2.1.3 (a), $A'\cup\{f\}$ y $B'\cup\{f\}$ son conexos en $J\setminus\{e,f\}$, de igual manera $A'\cup\{e\}$ y $B'\cup\{e\}$ son conexos en $J\setminus\{e,f\}$. Como $A'=\emptyset$, entonces $A=A'\cup\{e,f\}$ es conexo, similarmente para $B=B'\cup\{e,f\}$. Por lo tanto, tenemos que $\{e,f\}=A\cap B$ y $J=A\cup B$. Además, si B es un subconjunto conexo del ETCO $J\setminus\{a\}$, entonces B es un arco, lo mismo sucede con A. □

Lema 4.2.20. *Sea J una curva de Jordan en el plano digital $X\times Y$, sea Q una componente de $X\times Y\setminus J$ que no intersecta a $AD(X\times Y)$ y sea $P=J\cup Q$. Si C es un arco en P, entonces cada componente de $P\setminus C$ intersecta a J.*

Demostración. Lo haremos por contradicción, supongamos que existe un arco C en P tal que alguna componente U de $P\setminus C$ no intersecta a J. Sea C el arco más corto que cumple la hipótesis anterior y sea $p\in U$; si f es un punto final de C, entonces $C_1=C\setminus\{f\}$, es un arco más corto, por lo que la componente de p en $P\setminus C_1$ intersecta a J. Por lo tanto existe un arco D en $P\setminus C_1$ del punto p a algún punto $j\in J$. De ahí que f está o no está en D.

Si $f\notin D$, se tiene que $D\subseteq P\setminus C$ y D conectaría un punto $j\in J$ con p, contradiciendo nuestra hipótesis inicial sobre C.

Ahora, si $f\in D$ entonces f^- y f^+, si existen, están en $A(f)$. Por lo que $P\cap A(f)$ es un subconjunto conexo de J o un arco en $A(f)$, entonces tal intersección es una curva de Jordan o un arco. Se sigue que $C\cap A(f)$ contiene a lo más un punto, además $C\cap A(f)\subseteq P\cap A(f)$, por lo tanto f^- está en una componente L de $P\cap A(f)\setminus C$ y L intersecta a J.

Tenemos aquí dos casos, analizaremos el primero. Si $f\in J$, sin pérdida de generalidad podemos asumir que f es el punto final de D, entonces $f^-\in[p,f]\cap L$. Tanto $[p,f]$ como L son conjuntos conexos, por lo que $[p,f]\cup L$ es un subconjunto conexo de $P\setminus C$. Hemos encontrado una componente de p en $P\setminus C$ que intersecta a J y eso no es posible.

Veremos que pasa si $f\notin D$. Como $f\notin D$, se tiene que $A(f)\in P$, igual que antes, $A(f)\cap C=L$ es conexo, además $f^-\in[p,f^-]\cap L$ y $f^+\in[f^+,j]\cap L$, por lo que $[p,f-]\cup L\cup[f^+,j]$ es conexo, obteniendo una contradicción.

Vimos que f no está en D, pero tampoco puede estar fuera de D, cosa que es imposible. Por lo tanto se tiene una contradicción a nuestra hipótesis inicial. □

Lema 4.2.21. *Sean C y D arcos en $X\times Y$. Si D intersecta más de una componente de $AD(X\times Y)\setminus C$, entonces D intersecta a C. Así cada componente de $X\times Y\setminus C$ intersecta a $AD(X\times Y)\setminus C$ en un conjunto conexo, por lo que $X\times Y\setminus C$ tiene a lo más tantas componentes como las de $AD(X\times Y)\setminus C$.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir que D no intersecta a C, entonces existen X, Y, C y D que nos dan un contraejemplo mínimo del lema. Por la minimalidad, C y D intersectan a $AD(X \times Y)$ en sus puntos finales. Cuando $|X| = |Y| = 3$, puede verificarse caso por caso que no se contradice al lema, entonces alguno de los conjuntos debe de tener más de tres elementos, sin pérdida de generalidad supongamos que $Y > 3$. Sea y el punto inicial de Y y sean $Y^* = Y \setminus \{y\}$, $C^* = C \cap (X \times Y^*)$, $D^* = D \cap (X \times Y^*)$, así, los conjuntos X, Y^*, C^*, D^* no proporcionan un contraejemplo al lema. Como sólo puntos finales de C y D pueden estar en $X \times \{y\}$, entonces C^* y D^* son arcos. Sean c_1, c_2 y d_1, d_2 los puntos finales de C y D, respectivamente, y sean c_1^*, c_2^* y d_1^*, d_2^* lo puntos finales de C^* y D^*. Vemos que $\{c_1, c_1^*\}$, $\{c_2, c_2^*\}$, $\{d_1, d_1^*\}$, $\{d_2, d_2^*\}$ son conexos.

Si mostramos que D^* intersecta más de una componente de $AD(X \times Y^*) \setminus C^*$, por la minimalidad se tendrá que D^* intersecta a C^*, por lo que C y D se intersectan, obteniendo una contradicción. Si suponemos que D^* está sólo en una componente de $AD(X \times Y^*) \setminus C^*$, entonces existe una trayectoria Q^* en $AD(X \times Y) \setminus C^*$ que va de d_1^* a d_2^*. Lo que haremos a continuación será construir a partir de Q^* una trayectoria Q en $AD(X \times Y) \setminus C$ que vaya de d_1 a d_2, teniendo una contradicción.

Tenemos cuatro posibilidades, $d_1 \in X \times \{y\}$ y $d_2 \notin X \times \{y\}$, $d_1 \notin X \times \{y\}$ y $d_2 \in X \times \{y\}$, $d_1 \in X \times \{y\}$ y $d_2 \in X \times \{y\}$, $d_1 \notin X \times \{y\}$ y $d_2 \notin X \times \{y\}$. Se probará sólo el primer caso, los demás se hacen de manera análoga.

Sean $d_1 \in X \times \{y\}$ y $d_2 \notin X \times \{y\}$. Si $d_1^* = (u, y^+)$, entonces $d_1 = (v, y)$, donde $v \in \{u^-, u, u^+\}$. Se tiene que $\{(x, y^+) : x \leq u\} \subseteq Q^*$ o $\{(x, y^+) : x \geq u\} \subseteq Q^*$; sin perdida de generalidad, supongamos que se tiene la primera inclusión. Sea e el menor elemento de X, definimos Q como:

$$Q = (Q^* \setminus \{(x, y^+) : e < x \leq u\}) \cup \{(x, y) : x \leq v\},$$

entonces Q es una trayectoria en $AD(X \times Y)$ que une d_1 con d_2, falta ver que $Q \cap C = \emptyset$.

Supongamos que existe $p \in Q \cap C$, como $Q^* \cap C = \emptyset$, se tiene que $p = (z, y)$ donde $z < v$. Si q es el punto de C que es adyacente a p, entonces $q = (w, y^+)$ donde $w \in \{z^-, z, z^+\}$. Mostrando que $q \in Q^*$ se llegará a una contradicción, completando así la demostración del lema. De la definición de Q sólo se necesita ver que $w \leq u$. Si $v \in \{u^-, u\}$, entonces $z < u$ y $w \leq z^+ \leq u$, por lo que $w \leq u$. Ahora, si $v = u^+$, entonces d es puro porque se tiene que $\{(u^+, y), (u, y^+)\}$ es conexo. Nuevamente se tienen dos casos, el primero si $z < u$, entonces $w \leq z^+ \leq u$; y el segundo caso, si $z = u$, entonces $p = (u, y)$ es un punto mixto por lo que $q = d_1^*$ y $w = u$. $\square$

De los dos lemas anteriores se concluye el siguiente resultado.

Teorema 4.2.22. *Si C es un arco en el plano digital $X \times Y$, entonces $AD(X \times Y) \setminus C$ y $X \times Y \setminus C$ tienen el mismo número de componentes y se corresponden por el conjunto inclusión.*

Teorema 4.2.23 (El teorema digital de la curva de Jordan)**.** *Si J es una curva de Jordan en el plano digital $X \times Y$ y J no intersecta a $AD(X \times Y)$, entonces $(X \times Y) \setminus J$ tiene exactamente dos componentes. La componente que intersecta el borde es llamada exterior y la otra interior.*

Demostración. Como $X \times Y$ es finito y $J \subseteq X \times Y$, entonces J es finito y está acotado, por lo que existe $v = \text{mín}\{y : (x, y) \in J\}$. Sea $V = \{(x, v) : (x, v) \in J\}$ y sea $Y^* = Y \setminus L(y)$. Probaremos que existe un punto (w, v^+) en lo que llamaremos interior de J.

Como primer caso, consideremos que existe un punto $(w, v) \in V$, sea $C = J \setminus \{(w, v)\}$. Entonces los puntos $(w^-, v), (w^+, v) \in J$, ya que si alguno de los dos, digamos $(w^-, v) \notin J$, se tendría que $(w^+, v), (w, v^+) \in J$, pero en ese caso (w, v^+) es punto tal que $|A(w, v^+) \cap J| \geq 2$, contradiciendo que J es una curva de Jordan. Por lo tanto $C = J \setminus \{(w, v)\}$ es un arco en $X \times Y^*$ con puntos finales (w^-, v) y (w^+, v).

Para el segundo caso, supongamos que no existe ningún punto mixto en V. Sea (w, v) un punto puro en V, entonces $(w^-, v), (w^+, v) \notin J$, pues son puntos puros; además $(w^-, v^+), (w^+, v^+) \in J$, pues si uno de esos puntos no estuviera en J, digamos (w^-, v^+), se tendría que $(w, v^+) \in J$, de ahí que $|A(w, v) \cap J| \geq 2$, y eso no es posible. Por lo tanto, definiendo $C = (J \setminus \{(w, v)\}) \cup \{(w^-, v), (w^+, v)\}$ es un arco en $X \times Y^*$ con puntos finales $(w^-, v), (w^+, v)$.

Hasta ahora henos visto que siempre podemos tener un arco C que va de (w^-, v) a (w^+, v) en $X \times Y^*$, además (w, v)es un punto aislado en $AD(X \times Y^*) \setminus C$, por lo que éste punto forma una componente de $AD(X \times Y^*) \setminus C$. Del lema 4.2.21 se sigue que ningún punto de $AD(X \times Y^*) \setminus (C \setminus \{(w, v)\})$ puede ser unido a (w, v) mediante un arco en $X \times Y^* \setminus C$, por lo tanto, tampoco existe un arco en $X \times Y^* \setminus C$ conectando un punto de $AD(X \times Y^*) \setminus (C \setminus \{(w, v)\})$ con (w, v^+), pues $(w, v) \in A(w, v^+)$.

Lo que haremos a continuación es demostrar que $X \times Y^* \setminus J$ tiene al menos dos componentes. Igual que antes, tomaremos dos casos.

Tomemos como primer caso cuando (w, v) es mixto. Se tiene entonces que $C \in J$, de ahí que ningún punto de $AD(X \times Y^*) \setminus (C \setminus \{(w, v)\})$ pueda ser unido por un arco en $X \times Y^*$ al punto (w, v^+). Por lo tanto $X \times Y^* \setminus J$ tiene al menos dos componentes.

En un segundo caso, sea (w, v) un punto puro. Si pudiéramos conectar a (w, v) con un punto de $AD(X \times Y^*) \setminus (C \setminus \{(w, v)\})$ por un arco en $X \times Y \setminus C$, tal arco tendría que pasar por $C \setminus J = \{(w^-, v), (w^+, v)\}$. Esto no es posible, pues $A(w^-, v) = \{(w^- -, v), (w, v), (w^-, v^+)\}$, donde los dos últimos puntos están en J, y el primero está en J o en $AD(X \times Y^*) \setminus (A \setminus \{(w, v)\})$. De manera análoga para el punto (w^+, v). Por lo tanto $X \times Y^* \setminus J$ tiene al menos dos componentes.

Veremos ahora que $X \times Y \setminus J$ tiene al menos dos componentes. Supongamos que existe un arco que conecta un punto de $X \times (Y \setminus Y^*)$ con (w, v^+). Éste arco tiene que intersectar $(X \times \{v\}) \setminus J$, de manera que un subarco de dicho arco está en $X \times Y \setminus J$ y este subarco tiene como uno de sus puntos finales a (w, v^+) y eso no es posible por lo mostrado en párrafos anteriores. Por lo tanto $X \times Y \setminus J$ tiene al menos dos componentes.

Finalmente, falta ver que $X \times Y \setminus J$ tiene a lo más dos componentes. Sea $j \in J$, entonces del teorema 4.2.22 y el lema 4.2.17 $X \times Y \setminus (J \setminus \{j\})$ es conexo. Así, por el teorema 4.2.13 se tiene que $A(j) \setminus J$ intersecta cada componente de $X \times Y \setminus J$. Del lema 4.2.17 tenemos que $A(j) \setminus J$ tiene exactamente dos componentes. por lo tanto $X \times Y \setminus J$ tiene a lo más dos componentes. □

Definición 72. *Definimos el plano de Rosenfeld como el producto cartesiano* $R = \{0, 1, ..., m\} \times \{0, 1, ..., n\}$ *(sin topología).*

Las definiciones en la sección 1 de este capítulo se hicieron para puntos en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, pero pudimos haberlas definido para el plano de Rosenfeld sin ningún problema, por lo que las usaremos para el plano de Rosenfeld.

Para demostrar el teorema de Rosenfeld, lo que haremos es incrustar un plano de Rosenfeld en un plano digital, mediante una función, trabajaremos en el plano digital usando el teorema digital de la curva de Jordan y después regresaremos al plano de Rosenfeld.

Dado un plano de Rosenfeld, podemos incrustarlo en el conjunto de puntos puros de un plano digital $X \times X$, donde X es el ETCO $\{0, 1, ..., 2m + 2n\}$, mediante la función:

$$S(x, y) = (x + y, y - x + c),$$

donde $c = m + n$ si $m + n + 1$ es par y $c = m + n$ si $m + n$ es impar.

Note que (x', y') es un 4-vecino de (x, y) si y sólo si $S(x', y') \in A(S(x, y))$. También (x', y') es un 8-vecino de (x, y) si y sólo si existe un punto mezclado (u, v) tal que $S(x, y), S(x', y') \in A(u, v)$.

Sea $J = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_r, y_r)\}$, $k = 4$ u 8. Si J es una k-trayectoria. Denotemos por J^* la imagen $S(J)$ de J bajo S junto con los puntos mezclados entre $S(x_i, y_i), S(x_{i+1}, y_{i+1})$ para cada i tal que $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$ no son 4-vecinos. Esta última condición es porque sólo los puntos que en R son 8-vecinos, al aplicarles S, queda un punto mezclado entre ellos, en el plano digital.

Por lo tanto, podemos concluir que si J es una $k-$trayectoria, entonces J^* es una trayectoria (en el plano digital). Además, si J es un $k-$arco, entonces J^* es un arco, si J es una $k-$curva de Jordan (con más de tres puntos si $k = 8$), entonces J^* es una curva digital de Jordan.

Podemos concluir también que $J^* \setminus S(J)$ contiene sólo puntos mezclados, y $J^* \setminus S(J) = \emptyset$ si $k = 4$.

Lema 4.2.24. *Sean H una 4-trayectoria y J una 8-trayectoria tales que $H \cap J = \emptyset$, entonces $H^* \cap J^* = \emptyset$.*

Sea B el borde de R, entonces B es una 4-curva, por lo que

$$Int(B^*) \cup B^* = S(R) \cup \{(x, y) : (x, y) \text{ es mezclado y } A(x, y) \subseteq S(R)\},$$

donde $B^* = S(B)$. Note que, si $C \subseteq Int(B^*) \cup B^*$ es una trayectoria, entonces $S^{-1}(C)$ es una $k-$trayectoria, donde $k = 4$ si C contiene sólo puntos puros y $k = 8$ en otro caso.

Lema 4.2.25. *Si J es una curva digital de Jordan con exactamente cuatro puntos, entonces $J = A(m)$ para algún punto mezclado m.*

Teorema 4.2.26 (Teorema de Rosenfeld)**.** *Sea J una k-curva de Jordan con al menos 5 puntos,entonces $R \setminus J$ se separa en dos k'-componentes, donde k=4 si k'=8 y k=8 si k'=4.*

Demostración. Hemos visto en párrafos anteriores que podemos incrustar mediante una función el plano de Rosenfeld en un plano digital. Además, si J es una k-curva de Jordan se tiene que J^* es una curva digital de Jordan, por el teorema 4.2.23 tenemos que $(X \times X) \setminus J^*$ tiene exactamente dos componentes, $Int(J^*)$ y $Ext(J^*)$, demostraremos que $S^{-1}(Int(J^*))$ y $S^{-1}(Ext(J^*))$ son las dos $k'-$componentes.

Vemos que $S^{-1}(Ext(J^*)) \neq \emptyset$ pues contiene a $S^{-1}(p)$ para algún $p \in B(R)$ (bajo la suposición de que $J \neq B$). Demostraremos también que $S^{-1}(Int(J^*)) \neq \emptyset$. Por hipótesis, sabemos que J tiene más de cuatro puntos, entonces J^* tiene también más de cuatro puntos, por el lema 4.2.25, $J^* \neq A(m)$ para algún punto mezclado. Afirmación: el $Int(J^*)$ contiene puntos puros. Si el $Int(J^*)$ contiene sólo un elemento, este tiene que ser puro, pues un punto mezclado tiene a lo más cuatro elementos en su conjunto de adyacencia. Ahora, si $m, n \in Int(J^*)$, $m \neq n$ entonces existe un arco de m a n en $Int(J^*)$, pero cualquier arco con al menos dos puntos contiene puntos puros. Por lo tanto $S^{-1}(Int(J^*)) \neq \emptyset$.

Probaremos la existencia de las k'-componentes. Sean $(a, b), (c, d) \in S^{-1}(Ext(J^*))$, entonces $S(a, b)$ y $S(c, d)$ están en $Ext(J^*)$, por lo que pueden ser conectados por una arco C de (a, b) a (c, d) en $Ext(J)^*)$. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar al arco C en $Int(B^*) \cup B^*$, ya que si $C \nsubseteq Int(B^*) \cup B^*$, sean x_1 y x_2 los puntos primero y último, respectivamente, de $C \cap Ext(B^*)$, tomemos los puntos $x_0, x_3 \in C \cap Ext(B^*)$ tales que $x_0 \in A(x_1)$ y $x_3 \in A(x_2)$. Definamos $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, donde D_1 es la parte del arco C que va de $S(a, b)$ a x_0, D_2 un arco en $Int(B^*) \cup B^*$ que une x_0 con x_3 y D_3 es la parte del arco C que va de x_3 a $S(c, d)$. Sea E al arco de longitud mínima que une $S(a, b)$ con $S(c, d)$.

Observemos que si J es una 4-curva de Jordan, sea $E = H^*$ un arco como antes, entonces $H = S^{-1}(H^*)$ es una 8-trayectoria en $S^{-1}(J^*)$. Si J es una 8-curva de Jordan, note que para cualquier punto mezclado $m \in E$, al menos uno de sus dos puntos puros en $A(m) \setminus E$ no intersecta a J, de otro modo $m \in J^*$, contradiciendo el hecho de que $E \in Ext(J^*)$. Reemplacemos ahora a cada punto mezclado con un punto puro de su conjunto de adyacencia que no esté en J ni en E. Esta nueva trayectoria (la llamaremos F) une $S(a, b)$ con $S(c, d)$ con sólo puntos puros, es decir F está contenida en $S(R)$, además no intersecta a J. Entonces $F = H^* = S(H)$ para alguna trayectoria 4-conexa H, H no intersecta a J. El caso en el que $(a, b), (c, d)$ están en $Int(J^*)$ se hace de manera análoga.

Por último demostraremos que no existe un k'-arco de una componente a otra. Lo haremos por contradicción, supongamos que existe un k'-arco H en $R \setminus J$ que une un punto en $Int(J)$ con un punto en $Ext(J)$. Sea $S(H) = H^*$, entonces H^* intersecta en un punto puro a J^*, de no hacerlo, usamos el mismo truco que antes, reemplazando un punto mezclado m que intersecta a J por un punto puro p del conjunto de adyacencia $A(m)$ de m, entonces p está tanto en J^* como en H^*, por lo que $S^{-1}(p)$ estaría en J y en H, contradiciendo el hecho de que J y H son disjuntos. $\square$

Como se dijo antes, el gran problema al que nos enfrentamos cuando trabajamos con imágenes digitales es la gran cantidad de memoria requerida; sin embargo, gracias al teorema de Rosenfeld éste problema se soluciona, pues sólo necesitamos almacenar información sobre el borde de cada componente que tenga nuestra imagen, acelerando de manera considerable su manejo. Para ver algunas aplicaciones puede consultar [9, 13, 17].

Mencioné también que se requieren dos tipos de conexidad, una para el borde de cada componente y otra para el complemento; no hay una convención establecida sobre cual tipo de adyacencia deba usarse para cada cosa, así que al implementar un algoritmo debemos establecer al inicio como se trabajará.

A continuación se presentan algunos algoritmos implementados en Maple, que ejemplifican el uso de la teoría antes descrita.

Los siguientes dos algoritmos convierten una matriz a una imagen, el primero lo hace en blanco y negro y el segundo en tonos de varios colores.

```
with(linalg):
MatrizaImagen:=proc(M)
 local Imagen0,r,s,i,j:
 r:=linalg[rowdim](M):
 s:=linalg[coldim](M):
 Imagen0:=[]:
 for i from 1 to r do:
  for j from 1 to s do:
    if M[i,j]=1 then
     Imagen0:=[op(Imagen0),plottools[rectangle]([j,-i],[j+1,-i-1],color=black)]:
    fi:
  od:
 od:
 print(plots[display](Imagen0,scaling=constrained,axes=none));
end proc:

MatrizaImagenGrises:=proc(M)
 local Imagen0,r,s,i,j,mayor:
 r:=linalg[rowdim](M):
 s:=linalg[coldim](M):
 mayor:=0:
for i from 1 to r do
   for j from 1 to s do
      if M[i,j]>mayor then
         mayor:=M[i,j]:
      else
         mayor:=mayor:
      fi:
   od:
```

Figura 27.

```
od:
Imagen0:=[]:
 for i from 1 to r do:
  for j from 1 to s do:
    if M[i,j]>0 then
      Imagen0:=[op(Imagen0),plottools[rectangle]([j,-i],[j+1,-i-1],
 color=COLOR(HUE,(mayor-M[i,j])/mayor))]:
    fi:
  od:
 od:
 print(plots[display](Imagen0,scaling=constrained,axes=none));
end proc:
```

El siguiente algoritmo convierte una imagen .bmp (blanco y negro) a una matriz, no necesariamente cuadrada. Por ejemplo cuando se introduce como entrada la imagen de la Figura 27 nos regresa la matriz de la Figura 28.

```
ImagenaMatrizAncho4x:=proc(imagen,alto,ancho)
local filename,fd,im,im2,Mat:
filename:=convert(imagen.bmp,string);
print(filename);
fd:=fopen(filename,READ,BINARY):
im:=readbytes(fd,54);
print(im);
im:=readbytes(fd,100000);
im2:=[seq(seq(1-im[3*ancho*(alto-j)+3*i]/255,i=1..ancho),j=1..alto)];
Mat:=linalg[matrix](alto,ancho,im2);
end proc:
```

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Figura 28.

El siguiente algoritmo colorea las componentes de una imagen asignando diferentes colores a componentes distintas. Se le da como entrada una matriz de ceros y unos y regresa otra matriz, pero ahora cada componente tiene una etiqueta diferente. Por ejemplo, al introducir la matriz de la Figura 28 nos regresa otra matriz, que al introducirla en el algoritmo *MatrizaImagenGrises* se obtiene la Figura 29.

```
Componentes4PrevioMejorado:=proc(M)
   local r,s,Mcomp,c,i,j,l,m1,m2,MM,cc,k1,k2;

r:=linalg[rowdim](M): s:=linalg[coldim](M): Mcomp:=linalg[matrix](r,s,0): c:=1: l:=[]:

for i from 2 to r-1 do:
  for j from 2 to s-1 do:
    if M[i,j]=1 and (M[i-1,j]=0 and M[i,j-1]=0)
```

```
       then Mcomp[i,j]:=c: c:=c+1:
    fi:
    if M[i,j]=1 and (M[i-1,j]=1 and M[i,j-1]=0)
       then Mcomp[i,j]:=Mcomp[i-1,j]:
    fi:
    if M[i,j]=1 and (M[i-1,j]=0 and M[i,j-1]=1)
       then Mcomp[i,j]:=Mcomp[i,j-1]:
    fi:
    if M[i,j]=1 and (M[i-1,j]=1 and M[i,j-1]=1 and Mcomp[i,j-1]=Mcomp[i-1,j])
       then Mcomp[i,j]:=Mcomp[i,j-1]:
    fi:
    if M[i,j]=1 and (M[i-1,j]=1 and M[i,j-1]=1 and Mcomp[i,j-1]<>Mcomp[i-1,j])
       then Mcomp[i,j]:=min(Mcomp[i,j-1],Mcomp[i-1,j]):
          l:=[op(l),sort([Mcomp[i,j-1],Mcomp[i-1,j]])];
    fi:
  od:
od:  cc:=1:  MM:=Mcomp:  evalm(Mcomp); evalm(MM);

for k1 from 2 to r-1 do: for k2 from 2 to s-1 do:
   while Mcomp[k1,k2]<>0 and Mcomp[k1,k2-1]<>0 and Mcomp[k1,k2]<>Mcomp[k1,k2-1] do
      m1:=min(Mcomp[k1,k2],Mcomp[k1,k2-1]):  m2:=max(Mcomp[k1,k2],Mcomp[k1,k2-1]):
      for i from 2 to r-1 do: for j from 2 to s-1 do:
        if  Mcomp[i,j]=m2 then
            Mcomp[i,j]:=m1;
        fi:
      od: od: break:
   od:
od: od:

for k1 from 2 to r-1 do: for k2 from 2 to s-1 do:
   while Mcomp[k1,k2]<>0 and Mcomp[k1-1,k2]<>0 and Mcomp[k1,k2]<>Mcomp[k1-1,k2] do
      m1:=min(Mcomp[k1,k2],Mcomp[k1-1,k2]):  m2:=max(Mcomp[k1,k2],Mcomp[k1-1,k2]):
      for i from 2 to r-1 do: for j from 2 to s-1 do:
        if  Mcomp[i,j]=m2 then
            Mcomp[i,j]:=m1;
        fi:
      od: od: break:
   od:
od: od:
print('Última',Mcomp);
end proc:
```

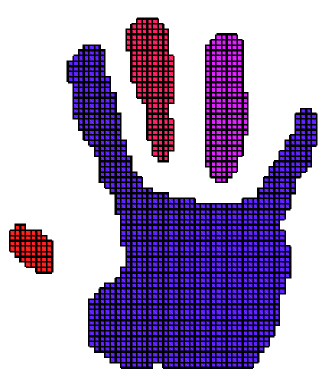


Figura 29.

Finalmente, el siguiente algoritmo recorre el borde de una imagen cuyas componentes son 4-conexas, aquí el borde es una curva 8-adyacente y el borde de componentes diferentes tienen asignadas etiquetas diferentes. Ver la Figura 30.

```
Borde:=proc(M)
local L,P0,Q0,PP00,QQ00,llave,M2,ssett,llistt,llistt2,salir,MM,i,j,k,n,m,cont:

n:=rowdim(M):
m:=coldim(M);
MM:=matrix(n,m,0):

ssett:={1};
for i from 1 to n do
   for j from 1 to m do
      if M[i,j]<>0 then
         ssett:=ssett union {M[i,j]};
      fi:
   od:
od: llistt:=convert(ssett,list);

for k from 1 to 4 do
   for i from 1 to n do
      for j from 1 to m do
         if M[i,j]=llistt[k] then llistt2:=llistt2, [i,j]: salir:=1: break: fi:
      od:  if salir=1 then break: fi:
   od: salir:=0:
od:

for k from 1 to 4 do
   P0:=llistt2[k+1]: L:=L,P0:
   PP00:=P0: QQ00:=Q0:
 if M[P0[1],P0[2]-1]<>0 then   L:=L,[P0[1],P0[2]-1]: llave:=1: P0:=[P0[1],P0[2]-1]:
   else
    if M[P0[1]-1,P0[2]-1]<>0 then   L:=L,[P0[1]-1,P0[2]-1]:  llave:=2: P0:=[P0[1]-1,P0[2]-1]:
    else
      if M[P0[1]-1,P0[2]]<>0 then    L:=L,[P0[1]-1,P0[2]]:  llave:=3:  P0:=[P0[1]-1,P0[2]]:
      else
         if M[P0[1]-1,P0[2]+1]<>0 then   L:=L,[P0[1]-1,P0[2]+1]: llave:=4:  P0:=[P0[1]-1,P0[2]+1]:
         else
            if M[P0[1],P0[2]+1]<>0 then    L:=L,[P0[1],P0[2]+1]: llave:=5:  P0:=[P0[1],P0[2]+1]:
            else
               if M[P0[1]+1,P0[2]+1]<>0 then    L:=L,[P0[1]+1,P0[2]+1]: llave:=6:  P0:=[P0[1]+1,P0[2]+1]:
               else
                 if M[P0[1]+1,P0[2]]<>0 then    L:=L,[P0[1]+1,P0[2]]: llave:=7:  P0:=[P0[1]+1,P0[2]]:
                  else
                    if M[P0[1]+1,P0[2]-1]<>0 then    L:=L,[P0[1]+1,P0[2]-1]:  llave:=8:  P0:=[P0[1]+1,P0[2]-1]:
 fi: fi: fi: fi: fi: fi: fi: fi: cont:=1:

 while PP00<>P0 do
  if llave=1 then cont:=cont+1:
    if M[P0[1]+1,P0[2]-1]<>0 then    L:=L,[P0[1]+1,P0[2]-1]:  llave:=8:  P0:=[P0[1]+1,P0[2]-1]: cont:=cont+1:
    else
       if M[P0[1],P0[2]-1]<>0 then   L:=L,[P0[1],P0[2]-1]: llave:=1: P0:=[P0[1],P0[2]-1]:
       else
         if M[P0[1]-1,P0[2]-1]<>0 then   L:=L,[P0[1]-1,P0[2]-1]:  llave:=2: P0:=[P0[1]-1,P0[2]-1]:
         else
            if M[P0[1]-1,P0[2]]<>0 then    L:=L,[P0[1]-1,P0[2]]:  llave:=3:  P0:=[P0[1]-1,P0[2]]:
            else
              if M[P0[1]-1,P0[2]+1]<>0 then   L:=L,[P0[1]-1,P0[2]+1]: llave:=4:  P0:=[P0[1]-1,P0[2]+1]:
  fi: fi: fi: fi: fi:              if P0=PP00 then break: fi:

  if llave=2 then cont:=cont+1:
    if M[P0[1]+1,P0[2]-1]<>0 then    L:=L,[P0[1]+1,P0[2]-1]:  llave:=8:  P0:=[P0[1]+1,P0[2]-1]:
    else
       if M[P0[1],P0[2]-1]<>0 then   L:=L,[P0[1],P0[2]-1]: llave:=1: P0:=[P0[1],P0[2]-1]:
       else
         if M[P0[1]-1,P0[2]-1]<>0 then   L:=L,[P0[1]-1,P0[2]-1]:  llave:=2: P0:=[P0[1]-1,P0[2]-1]:
         else
            if M[P0[1]-1,P0[2]]<>0 then    L:=L,[P0[1]-1,P0[2]]:  llave:=3:  P0:=[P0[1]-1,P0[2]]:
            else
               if M[P0[1]-1,P0[2]+1]<>0 then   L:=L,[P0[1]-1,P0[2]+1]: llave:=4:  P0:=[P0[1]-1,P0[2]+1]:
               else
                  if M[P0[1],P0[2]+1]<>0 then    L:=L,[P0[1],P0[2]+1]: llave:=5:  P0:=[P0[1],P0[2]+1]:
  fi: fi: fi: fi: fi: fi: fi:         if P0=PP00 then break: fi:

  if llave=3 then cont:=cont+1:
     if M[P0[1]-1,P0[2]-1]<>0 then   L:=L,[P0[1]-1,P0[2]-1]:  llave:=2: P0:=[P0[1]-1,P0[2]-1]:
     else
       if M[P0[1]-1,P0[2]]<>0 then    L:=L,[P0[1]-1,P0[2]]:  llave:=3:  P0:=[P0[1]-1,P0[2]]:
       else
          if M[P0[1]-1,P0[2]+1]<>0 then   L:=L,[P0[1]-1,P0[2]+1]: llave:=4:  P0:=[P0[1]-1,P0[2]+1]:
          else
             if M[P0[1],P0[2]+1]<>0 then    L:=L,[P0[1],P0[2]+1]: llave:=5:  P0:=[P0[1],P0[2]+1]:
```

```
             else
                if M[P0[1]+1,P0[2]+1]<>0 then    L:=L,[P0[1]+1,P0[2]+1]: llave:=6:  P0:=[P0[1]+1,P0[2]+1]:
  fi: fi: fi: fi: fi: fi:            if P0=PP00 then break: fi:

  if llave=4 then cont:=cont+1:
     if M[P0[1]-1,P0[2]-1]<>0 then   L:=L,[P0[1]-1,P0[2]-1]:  llave:=2: P0:=[P0[1]-1,P0[2]-1]:
     else
       if M[P0[1]-1,P0[2]]<>0 then    L:=L,[P0[1]-1,P0[2]]:  llave:=3:  P0:=[P0[1]-1,P0[2]]:
       else
          if M[P0[1]-1,P0[2]+1]<>0 then   L:=L,[P0[1]-1,P0[2]+1]: llave:=4:  P0:=[P0[1]-1,P0[2]+1]:
          else
             if M[P0[1],P0[2]+1]<>0 then    L:=L,[P0[1],P0[2]+1]: llave:=5:  P0:=[P0[1],P0[2]+1]:
             else
                if M[P0[1]+1,P0[2]+1]<>0 then    L:=L,[P0[1]+1,P0[2]+1]: llave:=6:  P0:=[P0[1]+1,P0[2]+1]:
                else
                  if M[P0[1]+1,P0[2]]<>0 then    L:=L,[P0[1]+1,P0[2]]: llave:=7:  P0:=[P0[1]+1,P0[2]]:
  fi: fi: fi: fi: fi: fi: fi:        if P0=PP00 then break: fi:

  if llave=5  then cont:=cont+1:
    if M[P0[1]-1,P0[2]+1]<>0 then   L:=L,[P0[1]-1,P0[2]+1]: llave:=4:  P0:=[P0[1]-1,P0[2]+1]:
    else
       if M[P0[1],P0[2]+1]<>0 then    L:=L,[P0[1],P0[2]+1]: llave:=5:  P0:=[P0[1],P0[2]+1]:
       else
          if M[P0[1]+1,P0[2]+1]<>0 then    L:=L,[P0[1]+1,P0[2]+1]: llave:=6:  P0:=[P0[1]+1,P0[2]+1]:
          else
             if M[P0[1]+1,P0[2]]<>0 then    L:=L,[P0[1]+1,P0[2]]: llave:=7:  P0:=[P0[1]+1,P0[2]]:
             else
                if M[P0[1]+1,P0[2]-1]<>0 then    L:=L,[P0[1]+1,P0[2]-1]:  llave:=8:  P0:=[P0[1]+1,P0[2]-1]:
  fi: fi: fi: fi: fi: fi:            if P0=PP00 then break: fi:

  if llave=6  then  cont:=cont+1:
    if M[P0[1]-1,P0[2]+1]<>0 then   L:=L,[P0[1]-1,P0[2]+1]: llave:=4:  P0:=[P0[1]-1,P0[2]+1]:
    else
       if M[P0[1],P0[2]+1]<>0 then    L:=L,[P0[1],P0[2]+1]: llave:=5:  P0:=[P0[1],P0[2]+1]:
       else
          if M[P0[1]+1,P0[2]+1]<>0 then    L:=L,[P0[1]+1,P0[2]+1]: llave:=6:  P0:=[P0[1]+1,P0[2]+1]:
          else
             if M[P0[1]+1,P0[2]]<>0 then    L:=L,[P0[1]+1,P0[2]]: llave:=7:  P0:=[P0[1]+1,P0[2]]:
             else
                if M[P0[1]+1,P0[2]-1]<>0 then    L:=L,[P0[1]+1,P0[2]-1]:  llave:=8:  P0:=[P0[1]+1,P0[2]-1]:
                else
                   if M[P0[1],P0[2]-1]<>0 then   L:=L,[P0[1],P0[2]-1]: llave:=1: P0:=[P0[1],P0[2]-1]:
  fi: fi: fi: fi: fi: fi: fi:        if P0=PP00 then break: fi:

  if llave=7 then   cont:=cont+1:
    if M[P0[1]+1,P0[2]+1]<>0 then    L:=L,[P0[1]+1,P0[2]+1]: llave:=6:  P0:=[P0[1]+1,P0[2]+1]:
    else
       if M[P0[1]+1,P0[2]]<>0 then    L:=L,[P0[1]+1,P0[2]]: llave:=7:  P0:=[P0[1]+1,P0[2]]:
       else
          if M[P0[1]+1,P0[2]-1]<>0 then    L:=L,[P0[1]+1,P0[2]-1]:  llave:=8:  P0:=[P0[1]+1,P0[2]-1]:
          else
             if M[P0[1],P0[2]-1]<>0 then   L:=L,[P0[1],P0[2]-1]: llave:=1: P0:=[P0[1],P0[2]-1]:
             else
                if M[P0[1]-1,P0[2]-1]<>0 then   L:=L,[P0[1]-1,P0[2]-1]:  llave:=2: P0:=[P0[1]-1,P0[2]-1]:
   fi: fi: fi: fi: fi: fi:            if P0=PP00 then break: fi:

  if llave=8 then    cont:=cont+1:
    if M[P0[1]+1,P0[2]+1]<>0 then    L:=L,[P0[1]+1,P0[2]+1]: llave:=6:  P0:=[P0[1]+1,P0[2]+1]:
    else
       if M[P0[1]+1,P0[2]]<>0 then    L:=L,[P0[1]+1,P0[2]]: llave:=7:  P0:=[P0[1]+1,P0[2]]:
       else
          if M[P0[1]+1,P0[2]-1]<>0 then    L:=L,[P0[1]+1,P0[2]-1]:  llave:=8:  P0:=[P0[1]+1,P0[2]-1]:
          else
             if M[P0[1],P0[2]-1]<>0 then   L:=L,[P0[1],P0[2]-1]: llave:=1: P0:=[P0[1],P0[2]-1]:
             else
                if M[P0[1]-1,P0[2]-1]<>0 then   L:=L,[P0[1]-1,P0[2]-1]:  llave:=2: P0:=[P0[1]-1,P0[2]-1]:
                else
                   if M[P0[1]-1,P0[2]]<>0 then    L:=L,[P0[1]-1,P0[2]]:  llave:=3:  P0:=[P0[1]-1,P0[2]]:
  fi: fi: fi: fi: fi: fi: fi:
 od:
 M2:=matrix(n,m,0);
 for i from 2 to cont+1 do
    M2[L[i][1],L[i][2]]:=k:
 od:
 for i from 1 to n do
     for j from 1 to m do
         MM[i,j]:=MM[i,j]+M2[i,j];
     od:
 od:  L:={}:
od:
print(MM);
end proc:
```

El último algoritmo fué implementado basado en la idea de Rosenfeld en [16] y

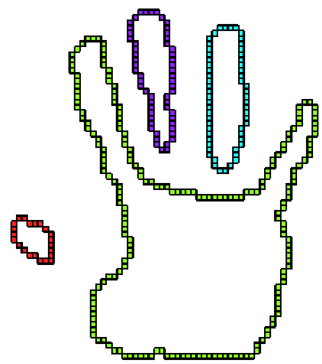


Figura 30.

el resto con base en [5], puede ver algoritmos más sofisticados en [7]. Si el lector está interesado en ver los alcances de esta teoría puede consultar [6].

Capítulo 5

Conclusión

En muchos libros, dada la complejidad de la demostración del teorema de la curva de Jordan en $\mathbb{R}^2$ sólo se da un bosquejo de su demostración y en algunos sólo se da una referencia donde se demuestra. En la presente tesis se da una demostración basada en [14], tomando algunas resultados de [19, 10, 15], con suficientes detalles, de manera que alguien que ha tomado un curso de topología general pueda entender la demostración.

Los conceptos de grupo fundamental y espacios cubrientes fueron de gran importancia, sobre todo para llegar a demostrar que el grupo fundamental de la circunferencia S^1 es isomorfo al grupo aditivo de los enteros, que junto con algunos resultados de homotopía se logra demostrar el teorema de la curva de Jordan. Una vez que se demostró el teorema de la curva de Jordan, se demuestran también algunos resultados importantes de teoría de gráficas sobre planaridad usando sólo herramientas de topología.

También se mostró una versión discreta del teorema de la curva de Jordan, en la que es necesario definir dos tipos de adyacencia; para llegar a su demostración, se demostró antes una versión digital, que mediante una función se incrusta el plano de Rosenfeld en un plano digital, rotando 45° a favor de las manecillas del reloj cada punto del plano de Rosenfeld, así estos puntos forman un subconjunto de sólo puntos puros del plano digital, es ahí donde se usa la versión digital del teorema y después se regresa nuevamente al plano de Rosenfeld.

Aunque los resultados presentados aquí, sólo sirvan para imágenes digitales en dos dimensiones, nos ayudan a intuir lo que pasa en tres dimensiones; en los últimos años esta teoría ha tenido gran desarrollo gracias a los avances tecnológicos y a las aplicaciones que se han encontrado.

Bibliografía

[1] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry.* Springer, Ney York, 1993.

[2] Stewart S. Cairns. An elementary proof of the Jordan-Shoenflies Theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2**:860–867, (1951) MR 13,746d.

[3] Ulrich Eckhardt and Longin Jan Latecki. Topologies for the digital spaces Z^2 and Z^3. *Computer Vision and Image Understanding*, **90**:295–312, (2003).

[4] Carlos Prieto, Marcelo Aguilar y Samuel Gitler. *Topología Algebraica. Un enfoque homotópico.* McGraw-Hill, 1998.

[5] http://www.dma.fi.upm.es/docencia/segundociclo/topologiadigital/Practicas/1.ImagenMatrizImagen.pdf.

[6] R. Klette and A. Rosenfeld. *Digital Geometry. Geometric methods for digital picture analysis.* Morgan Kaufman, San Francisco, 2004.

[7] T. Y. Kong and A. Rosenfeld. *Topological Algorithms for Digital Image Processing.* Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 1996.

[8] D. Marcus. A special topology for the integers. *Amer. Math. Monthly*, **77**:1119, (1970).

[9] Hector Simón Vargas Martínez. Algoritmo de segmentación topológico para imágenes adquiridas de la tomografía computada y resonancia magnética. *Revista Cubana de Informática*, 1(2000).

[10] William S. Massey. *Introducción a la topología algebraica.* Editorial Reverté., 1972.

[11] E. D. Khalimsky, R. Kopperman and P. R. Meyer. Boundaries in digital planes. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, **3:1**:27–55, (1990).

[12] E. D. Khalimsky, R. Kopperman and P. R. Meyer. Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets. *Topology and its applications*, **36**:1–17, (1990).

[13] T. Yung Kong, Ralph Kopperman and Paul R. Meyer. A Topological Approach to Digital Topology. *Mathematical Association of America*, **98**:901–917, (1991).

[14] J. R. Munkres. *Topology, a first course.* Prentice Hall, second edition, 1999.

[15] Carlos Prieto. *Topología básica.* Fondo de Cultura Económica, 2004.

[16] A. Rosenfeld. Digital topology. *Amer. Math. Monthly*, **86**:621–630, (1979).

[17] A. Rosenfeld. *Multiresolution Image Processing and Analysis.* Springer-Verlag, Germany, 1984.

[18] Carsten Thomassen. The Jordan-Shoenflies Theorem and the Classification of Surfaces. *Amer. Math. Monthly*, **99(2)**:116–131, (1992).

[19] Stephen Willard. *General topology.* Adisson-Wesley, 1970.