



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
DEL ESTADO DE HIDALGO**



**INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA**

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN TECNOLOGÍAS DE INFORMACIÓN Y SISTEMAS**

---

**INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

**SIMULACIÓN DE UN CONTROLADOR PD DIFUSO PARA EL SISTEMA  
CARRO-PÉNDULO INVERTIDO USANDO VISIÓN ARTIFICIAL**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE INGENIERO EN  
ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

**PRESENTAN:**

**FABIO ALEJANDRO PEÑA NUNCIO  
OCTAVIO VÁZQUEZ SOTO**

**ASESORES:**

**DR. LUIS ENRIQUE RAMOS VELASCO**

**DR. OMAR LÓPEZ ORTEGA**

**PACHUCA HGO., MÉXICO 24 DE OCTUBRE DE 2007**



**SIMULACIÓN DE UN  
CONTROLADOR PD  
DIFUSO PARA EL  
SISTEMA  
CARRO-PÉNDULO  
INVERTIDO USANDO  
VISIÓN ARTIFICIAL**

*Gracias a Dios por sus bendiciones y el permitirme estar aquí.  
A mi familia, gracias a mis padres por todo el apoyo, confianza y  
consejos que me han brindado a lo largo de mi vida, gracias a mis  
hermanos por su comprensión, así como el tiempo dispuesto para  
convivir conmigo, a mi novia por su apoyo y comprensión, finalmente a  
la vida y amigos por los buenos momentos.*

**Octavio Vázquez Soto.**

*A mi familia por su interés en mi superación, principalmente a los seres  
más importantes de mi vida: mis padres y hermanos, por su paciencia,  
comprensión, apoyo y amor; por dejarme ser, que no he de defraudar  
toda la confianza y libertad que en mí han depositado, los amo.  
Amigos, a ellos que han estado a mi lado en esta vida que ha sido llena  
de buenos momentos y regodeo. Son la banda, los amo.  
A la buena vida que hasta este momento me ha tocado vivir. Gracias a  
todos, por que de todos he aprendido muchas cosas que me han hecho lo  
que soy.*

**Fabio Alejandro Peña Nuncio.**

Gracias a

**UAEH** por los proyectos del programa  
anual de investigación con número  
PAI-31A, y al proyecto PROMEP  
P/CA-11 2006-14-18.

# Agradecimientos

Agradecemos a la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, de la cual hemos adquirido los conocimientos necesarios para nuestra superación.

A nuestros sinodales por su tiempo y aportaciones realizadas al desarrollo de este trabajo.

A nuestro asesor, el Dr. Luis Enrique por todo el apoyo que nos ha brindado, por sus consejos, paciencia e interés puesto durante el largo proceso que ha tenido esta tesis. A nuestro asesor Dr. Omar López por sus aportaciones y regaños que hicieron que este trabajo tenga un mejor contenido.

A la Maestra Angélica por brindarnos su apoyo, así como a todas las personas que directa o indirectamente aportaron algo a esta tesis.

# Resumen

## SIMULACIÓN DE UN CONTROLADOR PD DIFUSO PARA EL SISTEMA CARRO-PÉNDULO INVERTIDO USANDO VISIÓN ARTIFICIAL

Una planta es un conjunto de elementos (mecánicos, eléctricos, electromecánicos, hidráulicos, neumáticos, etc.) que interactúan entre sí para cumplir una tarea. Para lograr que la planta tenga un comportamiento deseado, en la mayoría de las veces se requiere un dispositivo externo, llamado sistema de control. Los sistemas de control pueden ser manuales o automáticos. Un sistema de control automático es aquel que dicta determinado comportamiento a la planta.

En este trabajo de tesis se presentan sólo resultados en simulación del control automático de una planta llamada carro-péndulo invertido, que está equipada con un motor de corriente directa ubicado en el carro, el cual hace que se mueva en dirección horizontal sobre un riel dentado. Para ésto se emplea una cámara como sensor; el procesamiento de la imagen es simulado como un retardo. El objetivo principal es diseñar un controlador automático que mantenga el péndulo invertido en posición vertical, mientras que la posición del carro se mantiene acotada.

El tipo de controlador propuesto en este trabajo es un *PD* difuso, el cual es probado en simulación. Se presentan los resultados obtenidos con SIMULINK/MATLAB, los cuales indican que el controlador *PD* difuso logra estabilizar al sistema en lazo cerrado.

Para un mejor entendimiento del desarrollo del controlador *PD* difuso se presentan los fundamentos de la lógica difusa, la estructura y el funcionamiento del controlador, así como su desarrollo e implantación para el control del sistema carro-péndulo invertido. Para esto se proponen dos funciones de membresía del tipo  $\Gamma$  y  $L$  para las entradas del controlador difuso y tres de tipo *singleton* para sus salidas, haciendo uso del modelo difuso Mamdani y efectuando la defuzzificación con el método del peso promedio.

# Índice general

Dedicatoria . . . . .	III
Agradecimientos . . . . .	VII
Resumen . . . . .	IX
Índice general . . . . .	XI
Índice de figuras . . . . .	XV
Índice de cuadros . . . . .	XVIII
<b>Acrónimos</b>	<b>XIX</b>
<b>Notación</b>	<b>XXI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	1
1.2. Solución propuesta . . . . .	1
1.3. Alcances y limitaciones . . . . .	1
1.4. Descripción del sistema a controlar . . . . .	2
1.5. Método . . . . .	2
1.6. Justificación . . . . .	2
1.7. Objetivos de la tesis . . . . .	3
1.7.1. Objetivo general . . . . .	3
1.7.2. Objetivos específicos . . . . .	3
1.8. Contribuciones de la tesis . . . . .	3
1.9. Estructura de la tesis . . . . .	4
<b>2. Estado del arte</b>	<b>5</b>
2.1. Introducción . . . . .	5
2.2. Fuzzy . . . . .	7
2.2.1. Sistemas difusos . . . . .	7
2.2.1.1. Sistemas difusos puros . . . . .	10
2.2.1.2. Sistemas difusos Takagi-Sugeno-Kang (TSK) . . . . .	10
2.2.1.3. Sistemas difusos Mamdani [21, 41] . . . . .	11

2.2.2. Aplicación de los sistemas difusos . . . . .	12
2.3. Sistemas subactuados . . . . .	13
2.4. Carro-péndulo invertido . . . . .	14
2.5. Visual servoing . . . . .	15
2.6. Comentarios . . . . .	17
<b>3. Control difuso</b>	<b>19</b>
3.1. Introducción . . . . .	19
3.2. Estructura de un controlador difuso . . . . .	20
3.2.1. Módulo de fuzzificación ( <i>FM</i> ) . . . . .	21
3.2.2. Módulo de base de reglas ( <i>BR</i> ) . . . . .	22
3.2.3. Módulo mecanismo de inferencia difusa ( <i>MID</i> ) . . . . .	24
3.2.4. Módulo de defuzzificación ( <i>DM</i> ) . . . . .	25
3.3. Tipos de controladores . . . . .	29
3.3.1. Control proporcional ( <i>P</i> ) difuso . . . . .	30
3.3.2. Control proporcional-integral ( <i>PI</i> ) difuso . . . . .	30
3.3.3. Control proporcional-derivativo ( <i>PD</i> ) difuso . . . . .	31
3.3.4. Control proporcional-integral-derivativo ( <i>PID</i> ) difuso . . . . .	31
3.4. Modelo difuso Mamdani . . . . .	32
3.5. Comentarios . . . . .	32
<b>4. Diseño del controlador <i>PD</i> difuso para el sistema carro-péndulo invertido</b>	<b>33</b>
4.1. Introducción . . . . .	33
4.2. Controlador <i>PD</i> difuso con 2 funciones de membresía . . . . .	35
4.2.1. Fuzzificación . . . . .	35
4.2.1.1. Selección de funciones de membresía . . . . .	35
4.2.2. Base de reglas . . . . .	36
4.2.2.1. Método empleado para la generación de las reglas . . . . .	36
4.2.3. Defuzzificación . . . . .	38
4.3. Controlador <i>PD</i> difuso con 5 funciones de membresía . . . . .	38
4.3.1. Fuzzificación . . . . .	38
4.3.1.1. Selección de las funciones de membresía . . . . .	39
4.3.2. Base de reglas . . . . .	39
4.3.3. Defuzzificación . . . . .	41
4.4. Comentarios . . . . .	42
<b>5. Resultados</b>	<b>43</b>
5.1. Introducción . . . . .	43
5.2. Simulación del sistema sin cámara con 2 funciones de membresía . . . . .	44



5.2.1. Gráficas de simulación . . . . .	47
5.3. Simulación del sistema con cámara utilizando 2 funciones de membresía	49
5.3.1. Gráficas de simulación . . . . .	50
5.4. Simulación del sistema con cámara utilizando 5 funciones de membresía	53
5.4.1. Simulación con una función de membresía $L$ , una triangular, una trapezoidal, una triangular y una $\Gamma$ . . . . .	54
5.4.1.1. Gráficas de simulación . . . . .	54
5.4.2. Simulación con una función de membresía $L$ , 3 triangulares y una $\Gamma$ . . . . .	57
5.4.2.1. Gráficas de simulación . . . . .	57
5.5. Superficies de diseño . . . . .	60
5.6. Comentarios . . . . .	63
<b>6. Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>65</b>
<b>A. Lógica difusa</b>	<b>67</b>
A.1. Antecedentes . . . . .	67
A.2. Lógica clásica vs lógica difusa . . . . .	69
A.2.1. Conjuntos clásicos . . . . .	69
A.3. Conjuntos difusos . . . . .	70
A.3.1. Notación . . . . .	71
A.3.2. Funciones de membresía . . . . .	73
A.4. Propiedades de los conjuntos difusos . . . . .	79
A.5. Operaciones con conjuntos difusos . . . . .	79
A.6. Razonamiento difuso . . . . .	81
A.6.1. Variables lingüísticas y proposiciones difusas . . . . .	81
A.6.2. Reglas difusas <i>SI-ENTONCES</i> . . . . .	83
A.7. Comentarios . . . . .	84
<b>B. Controladores PID</b>	<b>85</b>
B.1. Introducción . . . . .	85
B.2. Proporcional (P) . . . . .	86
B.3. Integral (I) . . . . .	87
B.4. Derivativo (D) . . . . .	87
B.5. Proporcional-integral (PI) . . . . .	87
B.6. Proporcional-derivativo (PD) . . . . .	88
B.7. Proporcional-integral-derivativo (PID) . . . . .	89
B.8. Comentarios . . . . .	89

<b>C. Modelado del sistema</b>	<b>91</b>
C.1. Descripción del sistema carro-péndulo invertido . . . . .	91
C.2. Ecuaciones dinámicas del carro-péndulo invertido . . . . .	92
C.3. Forma estandar del modelo matemático del carro-péndulo invertido .	95
C.4. Modelo de la cámara . . . . .	96
C.5. Comentarios . . . . .	96
<b>D. Defuzzificación</b>	<b>97</b>
D.1. Partición . . . . .	97
D.2. Evaluación de las regiones . . . . .	97
D.3. Leyes de control . . . . .	108
<b>E. Programas</b>	<b>109</b>
E.1. Modelo no lineal sin fricción del carro-péndulo invertido . . . . .	109
E.2. Cálculo del error entre el punto actual y el deseado . . . . .	111
E.3. Control <i>PD</i> difuso utilizando 2 funciones de membresía . . . . .	112
E.3.1. Control <i>PD</i> difuso con una función de membresía $L$ y una $\Gamma$ .	112
E.4. Control <i>PD</i> difuso utilizando 5 funciones de membresía . . . . .	113
E.4.1. Función de membresía $L$ . . . . .	114
E.4.2. Función de membresía $\Gamma$ . . . . .	114
E.4.3. Función de membresía trapezoidal . . . . .	114
E.4.4. función de membresía triangular . . . . .	115
E.4.5. Simulación con una función de mebresía $L$ , una triangular, una	
trapezoidal, una triangular y una $\Gamma$ . . . . .	115
E.4.5.1. Control <i>PD</i> difuso para el carro . . . . .	116
E.4.5.2. Control <i>PD</i> difuso para el péndulo . . . . .	118
E.4.6. Simulación con una función de membresía $L$ , 3 triangulares y	
una $\Gamma$ . . . . .	120
E.4.6.1. Control <i>PD</i> difuso para el carro . . . . .	120
E.4.6.2. Control <i>PD</i> difuso para el péndulo . . . . .	122
E.5. Tablas de ganancias . . . . .	124
<b>Glosario</b>	<b>127</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>133</b>

# Índice de figuras

2.1. Métodos para el diseño de un controlador. . . . .	8
2.2. Control de velocidad, donde $x$ es la velocidad y $\mu$ es la función de membresía. . . . .	9
2.3. Configuración básica de un sistema difuso puro. . . . .	10
2.4. Configuración básica de un sistema TSK. . . . .	11
2.5. Configuración básica de sistemas difusos Mamdani. . . . .	12
2.6. Representación del sistema subactuado (carro-péndulo invertido). . .	14
2.7. Representación esquemática del sistema subactuado con cámara de visión. . . . .	16
2.8. Interacción entre los diferentes temas que se tratan en la tesis. . . . .	17
3.1. Control-proceso. . . . .	20
3.2. Estructura básica de un controlador difuso. . . . .	21
3.3. Métodos de defuzzificación. . . . .	28
3.4. Esquema básico de un controlador difuso. . . . .	29
4.1. Esquema de un control $PD$ difuso básico. . . . .	34
4.2. Funciones de membresía de las entradas al controlador difuso. . . . .	35
4.3. Funciones de membresía de la salida. . . . .	36
4.4. Funciones de membresía de las entradas al controlador difuso. . . . .	39
4.5. Funciones de membresía de las entradas al controlador difuso. . . . .	39
5.1. Esquema de control del carro-péndulo invertido sin cámara. . . . .	45
5.2. Esquema general del carro-péndulo invertido. . . . .	45
5.3. Esquema del control difuso. . . . .	46
5.4. Bloque de conmutación. . . . .	46
5.5. Posición angular del péndulo ( $\theta$ ). . . . .	47
5.6. Posición del carro ( $p$ ) en lazo cerrado. . . . .	47
5.7. Velocidad angular del péndulo ( $w = \dot{\theta}$ ). . . . .	48
5.8. Velocidad del carro ( $v = \dot{p}$ ). . . . .	48
5.9. Señal de control ( $u$ ). . . . .	49

5.10. Esquema de la cámara. . . . .	49
5.11. Esquema de control del carro péndulo invertido con cámara. . . . .	50
5.12. Posición angular del péndulo ( $\theta$ ). . . . .	51
5.13. Posición del carro ( $p$ ). . . . .	51
5.14. Velocidad angular del péndulo ( $w = \dot{\theta}$ ). . . . .	52
5.15. Velocidad del carro ( $v = \dot{p}$ ). . . . .	52
5.16. Señal de control ( $u$ ). . . . .	53
5.17. Esquema del control difuso. . . . .	54
5.18. Posición del carro ( $p$ ). . . . .	55
5.19. Posición angular del péndulo. . . . .	55
5.20. Velocidad del carro ( $v = \dot{p}$ ). . . . .	56
5.21. Velocidad angular del péndulo ( $w = \dot{\theta}$ ). . . . .	56
5.22. Señal de control ( $u$ ). . . . .	57
5.23. Posición del carro ( $p$ ). . . . .	57
5.24. Posición angular del péndulo ( $\theta$ ). . . . .	58
5.25. Velocidad del carro ( $v = \dot{p}$ ). . . . .	58
5.26. Velocidad angular del péndulo ( $w = \dot{\theta}$ ). . . . .	59
5.27. Señal de control ( $u$ ). . . . .	59
5.28. Superficie de diseño respecto al carro. . . . .	60
5.29. Superficie de diseño respecto al péndulo. . . . .	60
5.30. Superficie de diseño respecto al carro. . . . .	61
5.31. Superficie de diseño respecto al péndulo. . . . .	61
5.32. Superficie de diseño respecto al carro. . . . .	62
5.33. Superficie de diseño respecto al péndulo. . . . .	62
A.1. Función de membresía para el conjunto A. . . . .	72
A.2. Curva joven-viejo. . . . .	73
A.3. Funciones de membresía. . . . .	76
A.4. Funciones de membresía. . . . .	77
A.5. Funciones de membresía. . . . .	78
A.6. Elementos de la variable lingüística. . . . .	82
A.7. La velocidad de un automóvil como una variable lingüística que toma conjuntos difusos “lento”, “media” y “rápida”, como sus valores y decir que “ $x$ es lento”, “ $x$ es media” y “ $x$ es rápida”. . . . .	83
C.1. Sistema carro-péndulo invertido. . . . .	92
C.2. Diagrama de cuerpo libre correspondiente al carro. . . . .	93
C.3. Diagrama de cuerpo libre correspondiente al péndulo. . . . .	94
C.4. Diagrama para el modelo de la cámara digital. . . . .	96
D.1. Regiones de combinación de entradas. . . . .	98

---

D.2. Evaluación de la región IC1. . . . .	99
D.3. Evaluación de la región IC5. . . . .	99
D.4. Evaluación de la región IC3. . . . .	101
D.5. Evaluación de la región IC8. . . . .	101
D.6. Evaluación de la región IC9. . . . .	103
D.7. Evaluación de la región IC11. . . . .	103
D.8. Evaluación de la región IC13. . . . .	104
D.9. Evaluación de la región IC15. . . . .	105
D.10. Evaluación de la región IC17. . . . .	106
D.11. Evaluación de la región IC19. . . . .	107
D.12. Evaluación de la región IC18. . . . .	107

# Índice de cuadros

3.1. Tabla de reglas, donde $e$ es el error, $\dot{e}$ la derivada del error. Además $ep$ , $en$ , $rp$ , $rn$ , $op$ , $oz$ y $on$ son el error psotivo, error negativo, derivada del error positivo, derivada del error negativo, salida positiva salida cero, salida negativa, respectivamente. . . . .	22
3.2. Fuzzy associative memory (FAM). . . . .	23
4.1. FAM para el controlador $PD$ difuso. . . . .	41
4.2. FAM de los valores del controlador $PD$ difuso. . . . .	41
C.1. Variables y constantes del sistema péndulo invertido. . . . .	92
E.1. Ganancias del controlador $PD$ difuso con dos funciones de membresía. . . . .	125
E.2. Ganancias del controlador $PD$ difuso con cinco funciones de membresía. . . . .	125

# Acrónimos

Siglas	Descripción
BR	Módulo de base de reglas.
Cd	Controlador difuso.
D	Derivativo.
DM	Módulo de defuzzificación.
e	Error.
en	Error negativo.
ep	Error positivo.
FAM	Fuzzy associative memory.
FIS	Fuzzy inference system.
FLC	Fuzzy logic controller.
FM	Módulo de fuzzificación.
g	Constante de gravedad.
I	Integral.
J	Inercia de la barra.
MID	Módulo mecanismo de inferencia difusa.
np	Negativo pequeño.
on	Salida negativa.
op	Salida positiva.
oz	Salida cero.
p	Posición del carro.
pg	Positivo grande.
pp	Positivo pequeño.
rn	Derivada del error negativo.
rp	Derivada del error positivo.
TSK	Takagi-Sugeno-Kang.
z	Cero.

# Notación

Símbolo	Descripción
$\subset$	Subconjunto.
$\cap$	Intersección.
$\cup$	Unión.
$\Delta$	Cambio.
$e$	Error.
$\in$	Pertenece a.
$\int$	Integral.
$<$	Menor que.
$\mu$	Función de membresía.
$>$	Mayor que.
$\mathbb{R}$	Campo de los números reales.
$\mathbb{R}^n$	Espacio vectorial de los reales de dimensión $n$ .
$\sum$	Sumatoria.
$\theta$	Ángulo entre la vertical y la posición del péndulo.
$\dot{e} = r$	Derivada del error.



# Capítulo 1

## Introducción

El objetivo de este capítulo es dar los pormenores de la tesis tales como: planteamiento del problema, alcances y limitaciones, justificación, objetivos, así como la organización de la misma.

### 1.1. Planteamiento del problema

El problema que se plantea en este trabajo de tesis, es estabilizar al sistema carro-péndulo invertido en una posición vertical, partiendo de que dicho sistema se comporta de una manera inestable en lazo abierto.

### 1.2. Solución propuesta

Haciendo uso de una cámara de visión como sensor de posición, se propone el diseño e implantación en SIMULINK/MATLAB de un controlador  $PD$  difuso para llevar a cabo la estabilización del sistema carro-péndulo invertido.

### 1.3. Alcances y limitaciones

1. En este trabajo no se efectúa un estudio comparativo formal entre los resultados obtenidos del controlador  $PD$  difuso propuesto y los obtenidos con algún otro tipo de controlador en otros trabajos.
2. El controlador  $PD$  difuso propuesto no se implantó en laboratorio, sólo se llevó a cabo en simulación.
3. El control no se probó con un sistema Takagi-Sugeno-Kang (TSK).

4. Se hace una comparación entre los resultados obtenidos en simulación del controlador *PD* difuso propuesto: para el caso que se tienen 2 funciones de membresía tanto en la entrada como en la salida y el caso con 5 funciones de membresía de diferente tipo cada una.

## 1.4. Descripción del sistema a controlar

El sistema carro-péndulo invertido consta de dos grados de libertad, uno dado por la posición lineal del carro y el otro por la posición angular del péndulo invertido, con un motor de corriente directa ubicado en el carro, hace que se mueva en dirección horizontal sobre un riel dentado. Finalmente, se tienen dos potenciómetros que sirven como sensores para medir cada una de las posiciones, tanto de la barra como la del carro.

Es importante mencionar que en este trabajo de tesis no se hace uso de las señales entregadas por los potenciómetros ya que dichos sensores son reemplazados por una cámara de visión que se encuentra colocada en el espacio de trabajo del carro-péndulo invertido.

## 1.5. Método

El universo de discurso de las funciones de membresía de las entradas y salida del controlador *PD* difuso fue definido a prueba y error.

Se utilizó un método heurístico para la sintonización de las ganancias del controlador *PD* difuso, ya que no se cuenta con una técnica para la sintonización de dichas ganancias.

## 1.6. Justificación

A continuación se listan las razones que justifican el desarrollo de esta tesis:

1. El uso de la cámara como sensor está justificado en múltiples aplicaciones industriales, donde los espacios de trabajo son peligrosos para el ser humano, en este caso se opta como alternativa equipar al sistema con una cámara de visión.
2. Otro tipo de sistemas donde se puede usar una cámara de visión es en sistemas subactuados, es decir sistemas que tienen menos actuadores que grados de libertad.
3. Cuando en un robot completamente actuado alguno de sus actuadores llega a fallar, el sistema se hace un robot subactuado y es aquí que se requiere diseñar

controladores que lo lleven a un estado seguro tanto para el sistema como para los usuarios del mismo.

4. El empleo de lógica difusa en el control de un sistema subactuado es una técnica que facilita la elaboración de dicho control, ya que por medio de la experiencia del experto se generan las reglas en lenguaje natural bajo las cuales se controla el sistema.

## 1.7. Objetivos de la tesis

### 1.7.1. Objetivo general

Desarrollo y simulación de algoritmos de control difuso para un sistema electromecánico subactuado (carro-péndulo invertido) haciendo uso de una cámara de visión como sensor.

### 1.7.2. Objetivos específicos

Los objetivos específicos de la tesis son los siguientes:

1. Diseño de algoritmos de control difuso para el carro-péndulo invertido, que hacen uso de una cámara de visión como sensor para medir el ángulo de desviación de la barra de la vertical.
2. Obtener un controlador  $PD$  difuso para estabilizar el sistema carro-péndulo invertido.
3. Simulación de los algoritmos obtenidos en SIMULINK/MATLAB.

## 1.8. Contribuciones de la tesis

Diseño de un controlador  $PD$  difuso logrando estabilizar al sistema carro-péndulo invertido en lazo cerrado.

En el diseño de los controladores se hace uso de técnicas de control difuso en un esquema de *visual servoing* para el sistema carro-péndulo invertido.

Simulación en SIMULINK/MATLAB del sistema carro-péndulo invertido y el control  $PD$  difuso satisfaciendo ciertos requerimientos de estabilidad.

## 1.9. Estructura de la tesis

La presente memoria de tesis esta estructurada de la siguiente manera:

- Dentro del Capítulo 1 se presenta la introducción a la tesis, comprendiendo el planteamiento del problema, objetivos principales y justificación, entre los puntos más sobresalientes del Capítulo.
- En el Capítulo 2 se hace una breve introducción a los sistemas difusos, al sistema subactuado carro-péndulo invertido y a visual servoing, que son las bases de esta tesis.
- En el Capítulo 3 se presentan las herramientas de control difuso necesarias para la elaboración del controlador.
- En el Capítulo 4 se diseña el controlador  $PD$  difuso para el sistema carro-péndulo invertido.
- En el Capítulo 5 se muestran los resultados obtenidos de la simulación.
- Las conclusiones y trabajos futuros se presentan en el Capítulo 6.
- En el Apéndice A se presentan los conceptos básicos de lógica difusa para el desarrollo de esta tesis.
- El Apéndice B presenta las características, funcionamiento y combinaciones de los controladores  $P$ ,  $I$  y  $D$ .
- En el Apéndice C se presenta el modelado del sistema, desarrollado en los trabajos [2, 8, 23].
- En el Apéndice D se presenta el desarrollo analítico de la defuzzificación del controlador  $PD$  difuso con dos funciones de membresía.
- Finalmente, en el Apéndice E se muestran los programas elaborados y que son utilizados en las simulaciones, así como los valores de las ganancias empleadas.

# Capítulo 2

## Estado del arte

El objetivo de este capítulo, es presentar a la lógica difusa como técnica para elaborar un controlador para el sistema subactuado carro-péndulo invertido, haciendo uso de una cámara de visión como sensor.

La organización de este capítulo es la siguiente: en la Sección 2.1 se presenta una introducción histórica de la teoría de control, desarrollada a partir de la segunda guerra mundial hasta las técnicas de soft computing que se utilizan en la actualidad. En la Sección 2.2 se da una explicación acerca de los sistemas difusos, así como los tres tipos de sistemas más utilizados (puros, Takagi-Sugeno-Kang y los Mamdani). En la Sección 2.3 se da una introducción a los sistemas subactuados y se mencionan algunas de sus aplicaciones. En la Sección 2.4 se da a conocer brevemente el sistema carro-péndulo invertido, y finalmente en la Sección 2.5 se habla del esquema de *visual servoing*, como técnica a aplicar en el carro-péndulo invertido.

### 2.1. Introducción

En la antigüedad se crearon artefactos capaces de realizar tareas básicas para los hombres; se dieron cuenta que había tareas que se repetían constantemente y que se podían realizar con sistemas complejos, y es así como comienza la creación de máquinas que eran capaces de emular algunas de las acciones básicas de los seres vivos.

Pero sin remontarnos a esas épocas donde la tecnología con la que se contaba no era suficiente para la creación de máquinas inteligentes [24], los avances en la construcción de máquinas de alta precisión comienzan durante la Segunda Guerra Mundial con el enfoque en problemas como: el llamado problema de control de tiro [4, 11, 36], proporcionando una cadena automática de órdenes entre la detección del blanco, el apuntamiento del arma y el disparo, piloto automático para aviones, sistemas de control para las antenas de los radares y otros sistemas militares basados

en los métodos de **control por retroalimentación**.

Los estudios de Wiener en la Segunda Guerra Mundial sobre la automatización de un cañón aéreo arrojaron aportaciones tales como considerar la presencia de ruido en las señales, e introducir también el concepto de control óptimo, cuyo objetivo es minimizar un determinado criterio que defina la calidad del control [38], también establece el término **cibernética**, el cual es el estudio de la relación ente las máquinas y determinados procesos que suceden en los seres vivos [37].

Al mismo tiempo que se desarrollaba la cibernética se inicia el desarrollo de las computadoras digitales tal y como se conocen hoy en día, basados en la separación de estructura y función (hardware y software) conocida como **computación algorítmica** la cual se basa en la solución de problemas mediante un algoritmo, que se codifica en forma de programa, se almacena en memoria y es ejecutado en una máquina en forma secuencial. Pioneros de esta tendencia son Alan Turing con su máquina ideal [13] y John Von Neumann quien realiza una computadora que opera ejecutando una tras otra las instrucciones que tiene almacenadas en memoria. Shannon y Turing desarrollan los primeros programas que permitían a una computadora digital razonar y jugar ajedrez, Simon y Shaw presentaron el Teórico Lógico, el primer programa que era capaz de resolver problemas sobre temas arbitrarios.

El Teórico Lógico dio paso a la **inteligencia artificial** (IA), la cual definía los métodos algorítmicos capaces de “hacer pensar” a las computadoras, pero con la desventaja de que solamente eran capaces de resolver aquellos problemas para los cuales habían sido construidos, pero con el rápido desarrollo de la IA se llegó a pensar que se podría construir una máquina realmente inteligente.

El gran progreso que tenía la IA finalizó con la introducción de programas complejos en los cuales se codificaba el conocimiento de expertos de una materia en específico (concesión de créditos, diagnóstico de enfermedades, etc.) en forma de reglas de decisión, estos sistemas fueron denominados **sistemas expertos**.

Durante la década pasada comenzó la cristalización de la coalición de metodologías que reflejan la notable capacidad del ser humano en tomar decisiones sensatas en un entorno de imprecisión e incertidumbre, cuyo fin es la creación de máquinas con un coeficiente de inteligencia elevado capaces de lidiar con este hecho. Dicha coalición fue bautizada como **soft computing o inteligencia computacional** [16, 22, 25, 39], cuyas áreas principales son:

- Redes neuronales (neural networks o neurocomputing).
- Computación evolutiva.
- Computación probabilística.
- Teoría del caos.

- Aprendizaje en máquinas (machine learning).
- **Sistemas difusos** (fuzzy systems).

Las técnicas anteriores imitan en cierta medida las funciones de los seres vivos. Así con el término **ABC de la inteligencia** [22] pueden contemplarse sus tres facetas: artificial, biológica y computacional.

Cabe mencionar que estas áreas son más complementarias que competitivas, esto es, que en algunos casos se obtienen mejores resultados haciendo uso de la combinación de algunas de las técnicas que empleando una sola.

Tanto las redes neuronales como los sistemas difusos, son dos áreas de *soft computing* que en las últimas décadas han tenido un gran auge [16], siendo las redes neuronales los sistemas que emulan el hardware del cerebro llamadas inteligencia de bajo nivel relacionadas con el reconocimiento de patrones, pero por otra parte, los sistemas difusos emulan más la parte software, la cual trata de reproducir las capacidades de razonamiento aproximado, área a la cual se enfoca este trabajo de tesis.

## 2.2. Fuzzy

De acuerdo al Diccionario Oxford English, la palabra *Fuzzy* es definida como *indistinto, definido impreciso, confuso, vago, difuso*. Sin embargo, la palabra *fuzzy* debe ser vista como un adjetivo técnico, es decir los sistemas fuzzy son sistemas a ser definidos y control *fuzzy* es un tipo de control no lineal que también será definido. En esta tesis se adaptará el término *difuso* como traducción de la palabra *Fuzzy*.

A continuación se dan dos tipos de justificación para la teoría de sistemas difusos:

- a) Los fenómenos en el mundo real son muy complicados para ser descritos con exactitud, por tanto se hacen suposiciones y aproximaciones para obtener modelos razonables.
- b) Se requiere una teoría para formular el conocimiento humano (experiencia) de una manera sistemática y ponerlo en un sistema de ingeniería.

En el Apéndice A se da una descripción más detallada de las herramientas empleadas en la lógica difusa

### 2.2.1. Sistemas difusos

Los sistemas difusos son bases de conocimientos o sistemas basados en reglas. La parte principal de un sistema difuso es una base de conocimientos que consiste de las llamadas reglas difusas *SI-ENTONCES*.

Una regla difusa es una declaración *SI-ENTONCES* en el cual algunas palabras son caracterizadas por funciones de membresía continuas. Un ejemplo de una regla difusa *SI-ENTONCES* es:

$$SI V_{coche} \text{ es "alta" ENTONCES } F \text{ es "baja"}, \quad (2.1)$$

donde  $V_{coche}$  es velocidad del coche y  $F$  la fuerza aplicada al acelerador.

A continuación se da un ejemplo donde se emplea un conjunto de reglas difusas.

**Ejemplo 1** *Se desea diseñar un controlador para el control automático de velocidad de un automóvil.*

Para solucionar este problema de control existen básicamente dos métodos para diseñar dicho controlador:

- a) El primer método es usar teoría de control convencional, por ejemplo, diseño de un controlador *PID*, retroalimentación de estado, etc.
- b) El segundo método es emular un conductor humano, esto es, convertir las reglas usadas por un conductor humano en un controlador automático.

En la Figura 2.1 se muestra un diagrama a bloques donde se presentan los dos métodos de diseño de un controlador.

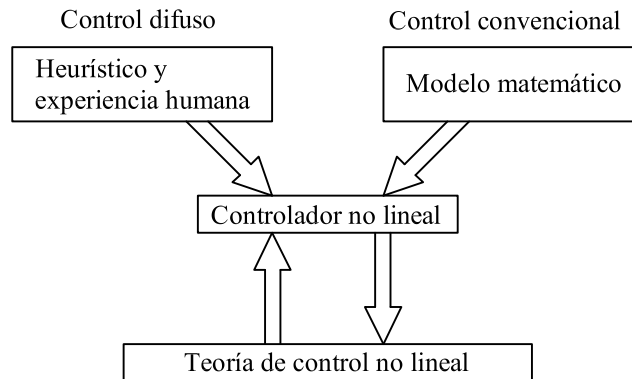


Figura 2.1: Métodos para el diseño de un controlador.

En seguida se da una solución al problema que se planteó en el Ejemplo 1, dicha solución es basada en el segundo método: un conductor usa los siguientes tres tipos de reglas para conducir un automóvil en situaciones normales:



$$SI V_{coche} \text{ es "baja", ENTONCES } F \text{ es "alta"}, \quad (2.2)$$

$$SI V_{coche} \text{ es "media", ENTONCES } F \text{ es "normal"}, \quad (2.3)$$

$$SI V_{coche} \text{ es "alta", ENTONCES } F \text{ es "baja"}. \quad (2.4)$$

Como se muestra en la Figura 2.2.

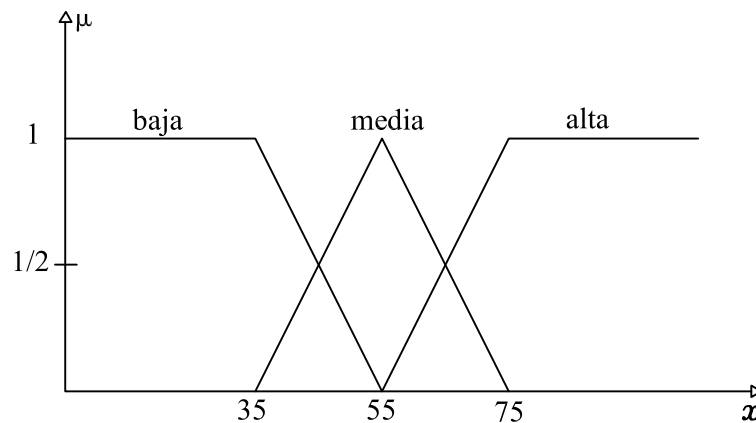


Figura 2.2: Control de velocidad, donde  $x$  es la velocidad y  $\mu$  es la función de membresía.

El punto de partida para la construcción de un sistema difuso es obtener una colección de reglas difusas *SI-ENTONCES* del humano experto o basadas sobre el dominio del conocimiento. El siguiente paso es combinar estas reglas en un solo sistema. Para esto existen una serie de sistemas difusos que usan principios diferentes para esta combinación.

Los tres tipos de sistemas difusos comúnmente usados en la literatura son:

- Sistemas puros.
- Sistemas difusos Takagi-Sugeno-Kang (TSK).
- Sistemas difusos Mamdani.

En seguida se da la estructura y descripción básica de cada uno:

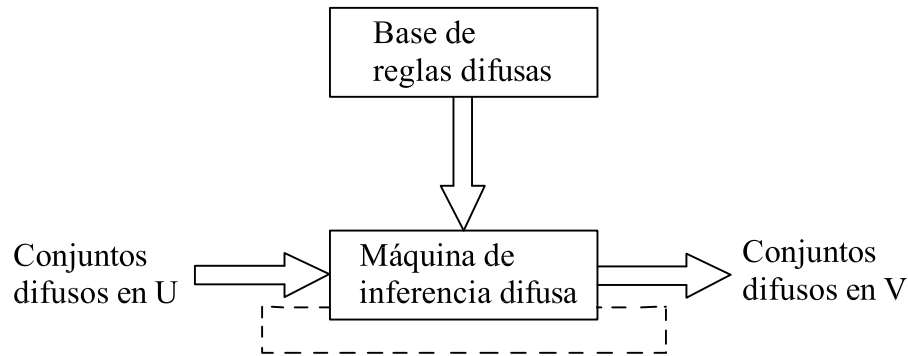


Figura 2.3: Configuración básica de un sistema difuso puro.

### 2.2.1.1. Sistemas difusos puros

La configuración básica de un sistema difuso puro es mostrada en la Figura 2.3, el cual está conformado en dos etapas:

- La base de reglas difusas. Representan la colección de reglas difusas *SI-ENTONCES*. Por ejemplo, para el control del automóvil en el Ejemplo 1 están dadas por las reglas (2.2)-(2.4).
- Máquina de inferencia difusa. Combina las reglas difusas *SI-ENTONCES* en un mapeo del conjunto difuso en el espacio de entradas  $U \subset \mathbb{R}^n$  a un conjunto difuso en el espacio de salidas  $V \subset \mathbb{R}$  basado sobre principios de lógica difusa.

Una de las desventajas de este método es que sus entradas y salidas son conjuntos difusos (palabras en lenguaje natural) y en los sistemas de ingeniería las entradas y salidas son variables real valuadas. Sí la retroalimentación (línea punteada) existe en la Figura 2.3, el sistema es llamado un sistema dinámico difuso. Para resolver el problema que presentan los sistemas difusos puros Takagi, Sugeno y Kang [33] propusieron otro sistema difuso, en el cual las entradas y salidas son variables real valuadas.

### 2.2.1.2. Sistemas difusos Takagi-Sugeno-Kang (TSK)

La configuración básica del sistema difuso TSK, se da en la Figura 2.4. La descripción de un sistema TSK consiste en dos etapas:

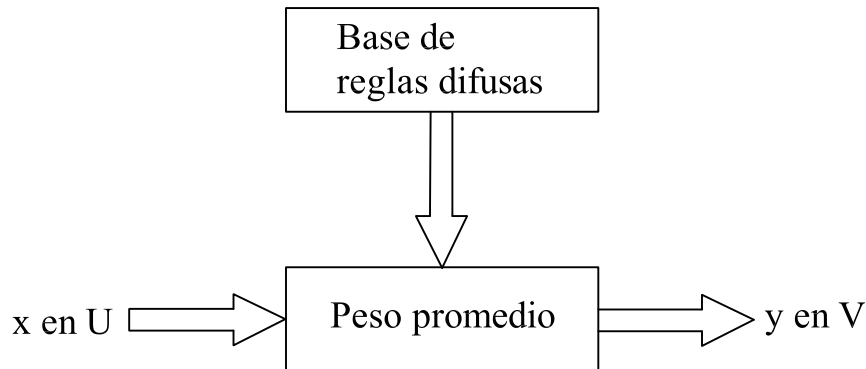


Figura 2.4: Configuración básica de un sistema TSK.

- Base de reglas difusas. El sistema TSK usa reglas difusas de la siguiente forma:

$$SI \ V_{coche} : x \text{ es "alta"}, \ ENTONCES \ F \ es \ y = f(x), \quad (2.5)$$

donde  $f(x) = cx$ ,  $c$  es una constante y  $x$  es la velocidad del coche.

Comparando (2.1) y (2.5) se observa que la parte *ENTONCES* de la regla cambia de una descripción usando palabras en lenguaje natural a una simple fórmula matemática.

- Peso promedio. Combina las reglas difusas *SI-ENTONCES*, el cual es más fácil ya que se da un peso promedio de los valores en las partes *ENTONCES* de las reglas.

Las principales desventajas de los sistemas difusos TSK son:

- Su parte *ENTONCES* es una fórmula matemática y por lo tanto no provee de una estructura natural para representar el conocimiento humano.
- No hay mucha libertad para aplicar principios diferentes en lógica difusa; así que la versatilidad de los sistemas difusos se pierde con esta estructura, que siempre requiere una fórmula.

### 2.2.1.3. Sistemas difusos Mamdani [21, 41]

La configuración del sistema difuso con fuzzificador y defuzzificador se muestra en la Figura 2.5.

La descripción de un sistema Mamdani consiste en cuatro etapas:

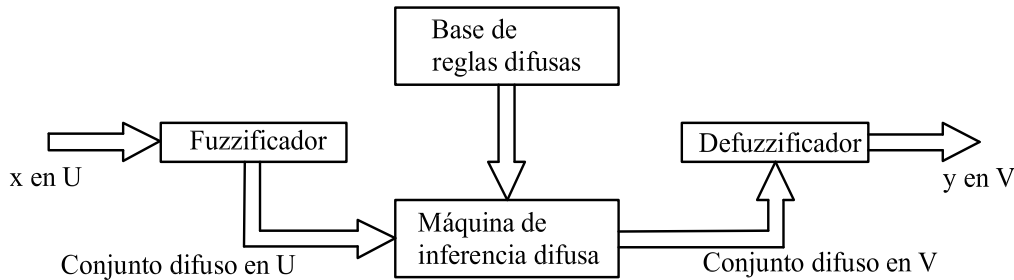


Figura 2.5: Configuración básica de sistemas difusos Mamdani.

- Base de reglas difusas. Constituye la parte fundamental del sistema difuso y es una colección de reglas difusas *SI-ENTONCES*. La función básica de la base de reglas es la representación en forma estructurada (reglas de conocimiento heurístico).
- Máquina de inferencia difusa. Combina las reglas difusas.
- Fuzzificación. Transforma el valor de entrada (variable real-valuada) a un conjunto difuso.
- Defuzzificación. Transforma un conjunto difuso en un valor numérico (variable real-valuada) como salida.

Las ventajas que ofrece este sistema difuso cubre las desventajas del sistema difuso puro y del sistema TSK descritas anteriormente. Por lo tanto, de aquí en adelante nos referimos como sistema difuso cuando se este tratando con sistemas difusos Mamdani.

### 2.2.2. Aplicación de los sistemas difusos

Los sistemas difusos se aplican en una variedad de campos como son:

- Control de procesos.
- Procesamiento de señales.
- Comunicaciones.
- Manufactura de circuitos integrados.

- Sistemas expertos para negocios, medicina, psicología, etc.

Sin embargo, las aplicaciones más sobresalientes son en problemas de control. Los sistemas difusos, como se muestra en la Figura 2.3, pueden ser usados como:

- Controlador en lazo abierto, y/o
- Controlador en lazo cerrado.

Este trabajo de tesis se centra en la aplicación de un sistema difuso Mamdani para el control de un sistema electromecánico subactuado llamado comúnmente carro-péndulo invertido.

## 2.3. Sistemas subactuados

En la década de los ochenta, el control de robots manipuladores fue ampliamente estudiado. Varias estrategias basadas en pasividad, la teoría de Lyapunov, linealización por retroalimentación, regulación de la salida, etc. han sido desarrolladas para casos completamente actuados, i.e. sistemas con el mismo número de actuadores que grados de libertad [14, 32]. Las técnicas desarrolladas para robots completamente actuados no se aplican directamente a sistemas subactuados [5, 9, 29, 30, 31, 32]. Un sistema mecánico subactuado es aquel que tiene menos actuadores independientes que grados de libertad.<sup>1</sup>

Es conocido que los robots completamente actuados son linealizables exactamente o completamente por retroalimentación no lineal de estados [32]. Para robots subactuados, en general la parte de la dinámica correspondiente a los grados de libertad actuados pueden ser linealizables por retroalimentación no lineal, mientras que las dinámicas restantes exhiben un comportamiento no lineal y representan las dinámicas internas.

Existe una alternativa para la parte correspondiente a la dinámica dada por los grados de libertad pasivos, que es la linealización por retroalimentación no lineal usando el método de retroceso (Backstepping) bajo una condición de acoplamiento inercial fuerte. Ejemplos de sistemas mecánicos subactuados son el robot braquístico de Saito o el Acrobot. Estos sistemas son robots multieslabones, los cuales tienen motores colocados en sólo algunas de las uniones. En este tipo de sistemas no todas las configuraciones en el espacio de configuraciones son alcanzables ni controlables.

<sup>1</sup>Considerando un sistema de  $n$  grados de libertad con coordenadas generalizadas  $q_1, \dots, q_n$  y  $m < n$  actuadores relacionados directamente a un solo grado de libertad. Los grados de libertad actuados son llamados uniones activas y los  $l = n - m$  grados de libertad subactuados son llamados uniones pasivas.

Los sistemas subactuados también se encuentran en sistemas de robots móviles, como por ejemplo, un brazo manipulador unido a una plataforma móvil, una plataforma espacial o un vehículo submarino [15].

Otro tipo de sistema subactuado aparece debido al modelo matemático usado para el diseño de controles, cuando se incluyen uniones flexibles. En este sentido, todos los sistemas mecánicos son subactuados si se desea controlar modos flexibles que no son directamente actuados.

## 2.4. Carro-péndulo invertido

Se tiene una buena cantidad de trabajos reportados en la literatura dedicados al control de sistemas subactuados empleando técnicas de control difuso [16]. Sin embargo, el control de sistemas subactuados empleando visión artificial y control difuso es menos común.

En este trabajo de tesis se usa una cámara de visión como sensor para controlar un sistema electromecánico subactuado, comúnmente llamado carro-péndulo invertido empleando un controlador difuso. El **carro-péndulo invertido** es un sistema que tiene un número de actuadores (motores) menor a los grados de libertad que posee. El sistema consiste de un carro, como se muestra en la Figura 2.6, el cual está en la base de un riel y es accionado por un motor de corriente directa, mientras que el péndulo tiene un movimiento libre (no tiene motor). Además, cuenta con sensores de posición (potenciómetros) tanto en el carro como en el péndulo.

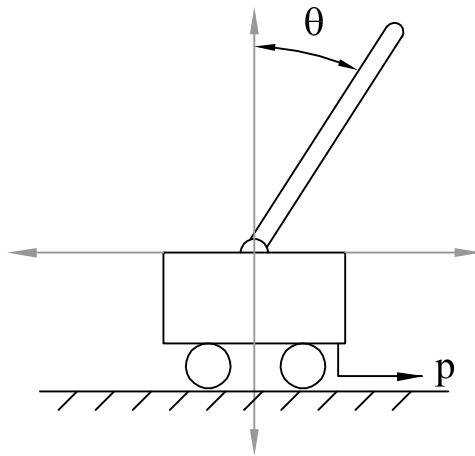


Figura 2.6: Representación del sistema subactuado (carro-péndulo invertido).

El sistema subactuado carro-péndulo invertido, tal como está descrito, puede no representar un mecanismo real en la industria, sino más bien un prototipo de laboratorio donde uno de los actuadores (motores) ha fallado. Según lo anterior, resulta interesante proponer leyes de control que estabilicen al péndulo invertido, ya que pensando en un mecanismo electromecánico con falla, estas acciones pueden verse como acciones de control que se activarían al momento de dicha falla.

En el Apéndice C se presenta el modelo matemático de este sistema, el cual está dado por un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales, y que en esta tesis son empleadas para el proceso de simulación en lazo cerrado con el controlador difuso.

## 2.5. Visual servoing

El uso de sensores visuales en sistemas en lazo cerrado con robots manipuladores representa una solución atractiva para el control de movimiento y posición [1, 6, 7].

El uso de la visión artificial en la robótica se introduce a principios de los años 70's, donde la imagen digital procesada era usada para guiar robots u otros mecanismos de aplicaciones industriales, originando un nuevo paso en la automatización industrial [6]. Tradicionalmente el sensor visual y la manipulación eran usadas en lazo abierto "observando" después "moviendo", el desempeño dependía directamente de la fidelidad del sensor visual y el manipulador. Para mejorar el desempeño se utilizó la cámara de visión como sensor en lazo cerrado, a este esquema de control se le llamó *visual servoing* [6].

El primer esquema de *visual servoing* fue realizado a principios de los 80's, el progreso del control mediante visión artificial ha sido muy lento, pero en los últimos 5 años ha crecido su popularidad por lo que en la actualidad algunos sistemas son generalmente jerárquicos, con altos niveles de representación abstracta y ancho de banda pequeño [12].

*Visual servoing* utiliza áreas elementales como procesamiento digital de señales, cinética, dinámica, teoría de control, tiempo real, entre otras. La imagen adquirida por la cámara (Figura 2.7) debe ser procesada por un sistema de visión en la computadora, con el cual se identifique el objeto y se infiera la relación entre la posición espacial del cuerpo y la cámara. En *visual servoing* se presentan básicamente tres pasos [12]

- El sistema de visión "observa" el objeto y estima la posición.
- La posición estimada es enviada a la computadora, la cual calcula el "movimiento" necesario.
- El robot u objeto se mueve a la siguiente posición, comenzando de nuevo con el primer paso.

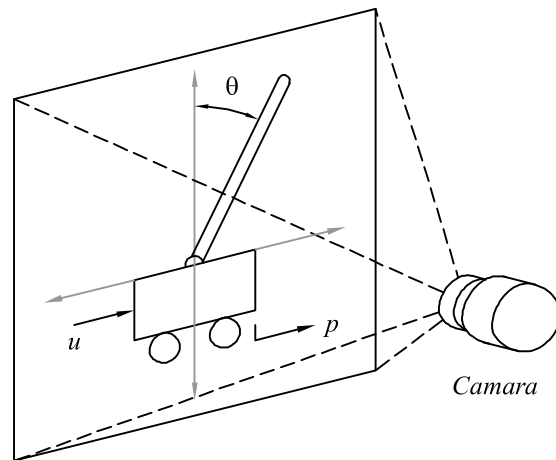


Figura 2.7: Representación esquemática del sistema subactuado con cámara de visión.

La mayoría de las generalizaciones de las técnicas clásicas de *visual servoing* explotan una alta ganancia o un torque, para hacer una reducción dinámica del sistema a un modelo cinemáticamente controlable, para el cual el objetivo del *visual servoing* pueda ser resuelto directamente [6]. La dinámica del modelo de un sistema comúnmente se ignora en el diseño de sistemas servo visuales y el funcionamiento del lazo cerrado puede ser severamente limitado para asegurar que la reducción en la dinámica es válida.

Recientemente en [17] se ha explorado un aspecto no lineal de los sistemas dinámicos, y presentado un método asintóticamente estable para regular la posición en un esquema de *visual servoing* con cámara fija. Las dificultades asociadas con el control de un sistema subactuado han recibido aún menos atención. En [42] se ha trabajado sobre el problema de *visual servoing* utilizando la representación de Lagrange del sistema dinámico y considera sistemas subactuados y no-holonómicos. En [12] propone una nueva estrategia de control basada en imágenes para *visual servoing* la cual es aplicable a una clase de sistemas dinámicos subactuados.

Recientemente, se ha venido trabajando en el control del carro-péndulo invertido empleando una cámara de visión como sensor con implantación en laboratorio.



## 2.6. Comentarios

Dentro de este capítulo se dio una descripción de los sistemas difusos, una introducción a sistemas subactuados en particular al carro-péndulo invertido, así como al uso de sensores visuales (*visual servoing*) dentro de la robótica. La unión de todos los elementos presentados dentro de este capítulo, dan origen al presente trabajo de tesis, tal como se muestra en la Figura 2.8.

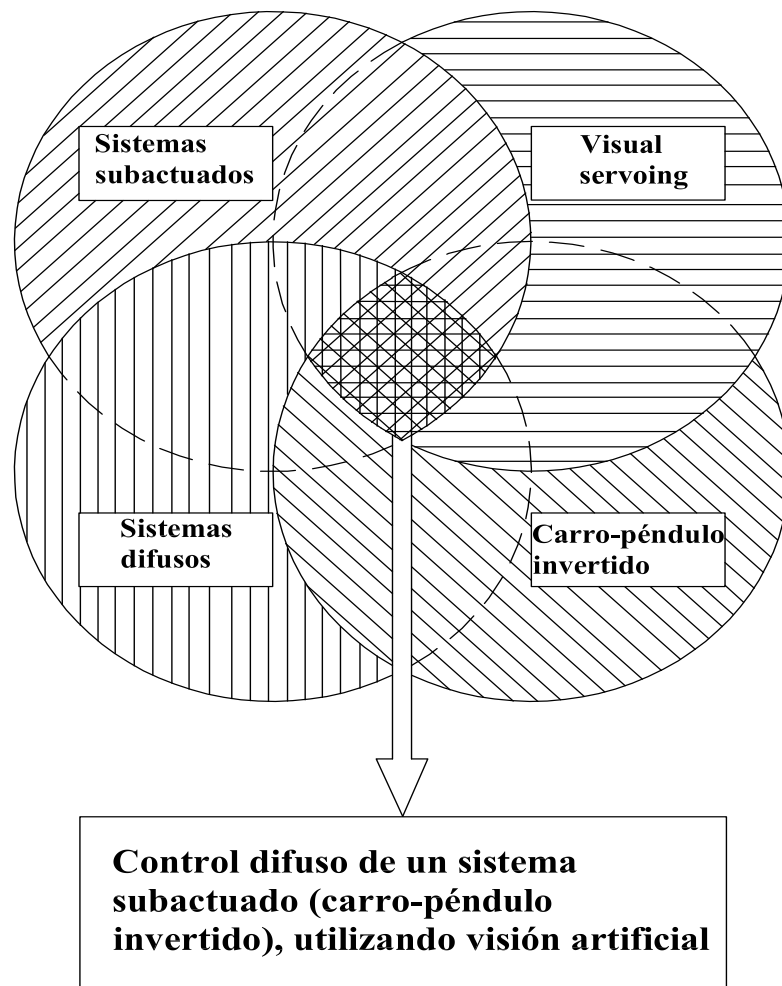


Figura 2.8: Interacción entre los diferentes temas que se tratan en la tesis.

# Capítulo 3

## Control difuso

Dentro de este capítulo se presentan los conceptos fundamentales de control difuso, empleados en el diseño e implantación de un controlador  $PD$  difuso para el sistema carro-péndulo invertido.

La organización del capítulo es la siguiente: en la Sección 3.1 se da una breve introducción al control difuso. En la Sección 3.2 se describe la estructura de un controlador difuso y el funcionamiento de cada uno de sus módulos (fuzzificación, base de reglas, mecanismo de inferencia difusa y defuzzificación). En la Sección 3.3 se habla de los diferentes tipos de controladores clásicos  $P$ ,  $I$  y  $D$  así como las combinaciones básicas entre ellos y su correspondiente estructura difusa. Finalmente, en la Sección 3.4 se menciona el modelo difuso Mamdani.

### 3.1. Introducción

Los sistemas de control difuso basados en reglas, conocidos como controlador difuso o  $FLC$  (*Fuzzy Logic Controller*), o también sistemas de inferencia difusa o  $FIS$  (*Fuzzy Inference Systems*), son sin duda la aplicación más extendida de la lógica difusa.

Para poder controlar un proceso o sistema se hace uso de un módulo controlador como se muestra en la Figura 3.1, que recibe como entradas una o varias variables de control llamadas referencias, y una o varias variables de salida del propio proceso, produciendo como salida una o varias variables, que se conocen como señales de control. Normalmente el objetivo de control es mantener la entrada  $R$ , igual que la salida  $\bar{S}$ .

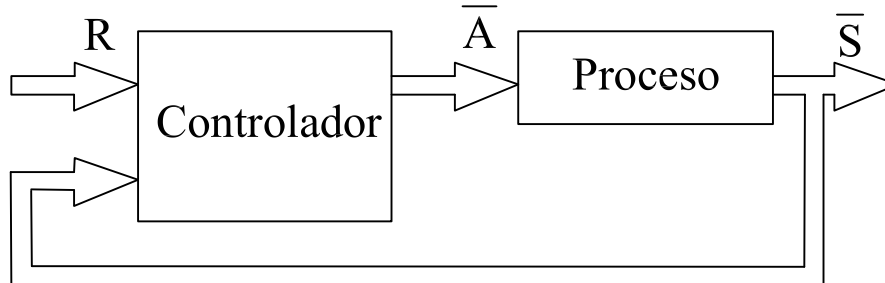


Figura 3.1: Control-proceso.

Un controlador difuso (*Cd*) es un sistema de control basado en el conocimiento, con la ventaja del disparo en paralelo de reglas y la unión de resultados parciales. Las reglas que se utilizan son de la forma:

1. Controlador del tipo Mamdani

*SI*  $x_1$  es  $A_1$  y  $x_2$  es  $A_2$  ... *ENTONCES*  $y$  es  $B$ .

2. Controlador del tipo TSK

*SI*  $x_1$  es  $A_1$  y  $x_2$  es  $A_2$  ... *ENTONCES*  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

El controlador difuso debe ser conectado al proceso, por lo que se necesitan:

- Una interfaz numérica-simbólica: la fuzzificación.
- Una interfaz simbólica-numérica: la defuzzificación.

## 3.2. Estructura de un controlador difuso

La estructura principal de un controlador difuso se muestra en la Figura 3.2.

El elemento llamado fuzzificador realiza la conversión de valores discretos a términos difusos. Su salida es utilizada por el mecanismo de inferencia para aplicarla a cada una de las reglas de la base de reglas, siguiendo el método de inferencia seleccionado. La salida de este bloque pueden ser  $M$  conjuntos difusos, o bien un único conjunto difuso, que es la unión de los  $M$  conjuntos difusos, y el módulo de defuzzificación transforma el conjunto difuso que es la salida del mecanismo de inferencia, en un valor no difuso.

A continuación se da una explicación más detallada de cada uno de los módulos:

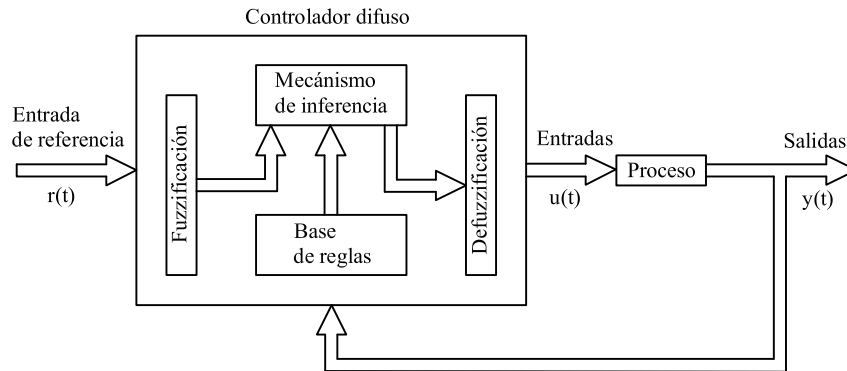


Figura 3.2: Estructura básica de un controlador difuso.

### 3.2.1. Módulo de fuzzificación ( $FM$ )

Los conjuntos difusos son usados para cuantificar la información en la base de reglas, y el mecanismo de inferencia opera en conjuntos difusos para producir conjuntos difusos; por lo tanto, se debe especificar cómo el sistema difuso convertirá sus entradas numéricas en conjuntos difusos, esto es fuzzificar las entradas para que el sistema difuso pueda usar los datos de entrada.

El  $FM$  desempeña las siguientes funciones:

1.  $FM - F1$ : Realiza una transformación de escala (*i.e.*, una normalización de entrada), el cual mapea los valores físicos de las variables del proceso en un universo de discurso normalizado (dominio normalizado).
2.  $FM - F2$ : Realiza la fuzzificación, esto es, transformar el valor numérico instantáneo de la entrada del proceso en un conjunto difuso (valores de membresía en conjuntos difusos).

Se pueden utilizar diversos métodos de fuzzificación:

- Fuzzificación singleton: consiste en considerar los propios valores discretos como conjuntos difusos, como se ve en la Sección A.3.2.
- Fuzzificadores no singleton: en estos métodos se utilizan diversas funciones de membresía como la  $\Gamma$ ,  $L$ , *triangular*, etc., como se ve en la Sección A.3.2.

### 3.2.2. Módulo de base de reglas ( $BR$ )

Consiste de una base de datos y de la base de reglas. La función básica de la base de datos es proveer la información necesaria para el funcionamiento propio del módulo de fuzzificación, la base de reglas y el módulo de defuzzificación. Esta información incluye:

- Conjuntos difusos (funciones de membresía) representando el significado de los valores lingüísticos del estado del proceso y la variable de control de salida.
- Universo de discurso y su normalización por factores de escala.

Las reglas difusas expresan el conocimiento que existe sobre la relación entre antecedentes y consecuentes. Para expresar este conocimiento normalmente se requiere de varias reglas, que se agrupan formando lo que se conoce como base de reglas, es decir, el conjunto de reglas que expresan las relaciones conocidas entre antecedentes y consecuentes. La base de reglas se puede representar como una tabla de las reglas que lo forman como se observa en el Cuadro 3.1, o bien como una memoria asociativa difusa o FAM (*Fuzzy Associative Memory*) como se ve en el Cuadro 3.2. Normalmente en la literatura se recomienda usar un número impar de reglas difusas, pero para nuestro caso de estudio, sólo podemos usar un número par de reglas difusas (*cuatro*), esto debido al diseño del controlador  $PD$  difuso, el cual utiliza 2 funciones de membresía a la entrada.

Las FAM son matrices que representan las consecuencias de cada regla definida para cada combinación de dos entradas. Las FAM permiten realizar una representación gráfica clara de las relaciones entre dos variables lingüísticas de entrada y las variables lingüísticas de salida.

Cuadro 3.1: Tabla de reglas, donde  $e$  es el error,  $\dot{e}$  la derivada del error. Además  $ep$ ,  $en$ ,  $rp$ ,  $rn$ ,  $op$ ,  $oz$  y  $on$  son el error psotivo, error negativo, derivada del error positivo, derivada del error negativo, salida positiva salida cero, salida negativa, respectivamente.

<b>SI</b>	$e$	es	$ep$	<b>Y</b>	$\dot{e}$	es	$rp$	<b>ENTONCES</b>	$salida$	es	$op$
<b>SI</b>	$e$	es	$ep$	<b>Y</b>	$\dot{e}$	es	$rn$	<b>ENTONCES</b>	$salida$	es	$oz$
<b>SI</b>	$e$	es	$en$	<b>Y</b>	$\dot{e}$	es	$rp$	<b>ENTONCES</b>	$salida$	es	$oz$
<b>SI</b>	$e$	es	$en$	<b>Y</b>	$\dot{e}$	es	$rn$	<b>ENTONCES</b>	$salida$	es	$on$

Cuadro 3.2: Fuzzy associative memory (FAM).

<b>rp</b>	<b>rn</b>	
<i>op</i>	<i>oz</i>	<b>ep</b>
<i>oz</i>	<i>on</i>	<b>en</b>

Los parámetros de diseño de la  $BR$  incluyen:

- Selección de las variables del proceso y la variable de control de salida.
- Seleccionar el contenido de las reglas antecedentes y la regla consecuente.
- Seleccionar los conjuntos para las variables del proceso y la del control.
- Derivar el conjunto de reglas.

Una base de reglas utilizadas para sistemas de control debe satisfacer un conjunto de propiedades como:

1. **Consistencia:**

Un conjunto de reglas  $SI-ENTONCES$  es consistente si ésta no contiene contradicciones, un conjunto de reglas es inconsistente si existen dos reglas con el mismo antecedente pero diferente consecuente, por ejemplo:

$$SI \ e \text{ es } ep \text{ y } \dot{e} \text{ es } rp \text{ ENTONCES } \textit{salida es } op,$$

$$SI \ e \text{ es } ep \text{ y } \dot{e} \text{ es } rp \text{ ENTONCES } \textit{salida es } on.$$

2. **Completitud:**

Tomando la base de reglas en una estructura matricial representada en el Cuadro 3.2, cada una de las celdas representa una regla, teniendo únicamente 4 reglas, cada una de las cuales debe tener una implicación produciendo una salida.

3. **Continuidad:**

Considerando nuevamente el Cuadro 3.2, se puede definir la noción de “regla vecina” como sigue: dos reglas son vecinas, si sus celdas son vecinas. Un conjunto de reglas  $SI-ENTONCES$  son continuas si no tiene una regla vecina con un conjunto difuso de salida que tenga una intersección vacía.

### 3.2.3. Módulo mecanismo de inferencia difusa (*MID*)

Es el sistema que se encarga de interpretar las reglas del tipo *SI-ENTONCES* de una base de reglas, con el fin de obtener los valores de salida a partir de los valores actuales de las variables lingüísticas de entrada al sistema, esto es, el mecanismo de inferencia es el responsable de la combinación de los datos de entrada en un formato difuso con las reglas difusas existentes, las cuales, trabajando en las reglas de producción describen el proceso de tal forma, que se consigue por medio de inferencia el valor de salida deseado [18].

Las funciones del *MID* son:

1. *MID – F1* : Determinar el grado al cual cada regla es relevante a la situación actual según la caracterización en las entradas (acoplamiento).
2. *MID – F2* : Dar las conclusiones usando las entradas actuales y la información en la base de reglas (paso de inferencia).

#### Acoplamiento

1. Combina las entradas con las premisas de la regla.
2. Determina qué reglas están actuando.

#### Paso de inferencia

Hay dos alternativas estándar para el funcionamiento del paso de inferencia:

1. Uno que implica el uso de los conjuntos difusos implicados.
2. Y otro que utiliza el total de conjuntos difusos implicados.

Klir [18] clasifica los mecanismos de inferencia de acuerdo con la evaluación que ellas ejercen sobre la base de reglas:

1. *Modus ponens*. Se conoce como razonamiento directo y puede resumirse de la siguiente forma:

$$\frac{\begin{array}{l} \text{(Conocimiento)} \quad \text{Si } x \text{ es } A \text{ Entonces } y \text{ es } B \\ \text{(Hecho)} \qquad \qquad \qquad x \text{ es } A' \end{array}}{\text{(Consecuencia)} \qquad \qquad \qquad y \text{ es } B'}$$

Donde  $A$ ,  $A'$ ,  $B$  y  $B'$  son conjuntos difusos.

2. *Modus tollens*. Se conoce como razonamiento inverso y puede resumirse de la siguiente forma:

$$\frac{\begin{array}{l} \text{(Conocimiento)} \quad \text{Si } x \text{ es } A \text{ Entonces } y \text{ es } B \\ \text{(Hecho)} \end{array}}{\begin{array}{l} \text{(Consecuencia)} \end{array}} \quad \frac{\quad \quad \quad y \text{ es } B'}{x \text{ es } A'}$$

Donde  $A$ ,  $A'$ ,  $B$  y  $B'$  son conjuntos difusos.

### 3.2.4. Módulo de defuzzificación ( $DM$ )

Las funciones del  $DM$  son:

1.  $DM - F1$  : Realiza la defuzzificación, el cual convierte el conjunto difuso en un valor numérico (control).
2.  $DM - F2$  : Realiza una salida desnormalizada, es decir mapea el valor de salida de control en su dominio físico por un factor de escala.

El criterio de diseño es determinar cuál método de defuzzificación usar:

- Principio del máximo de la función de membresía (método de la altura).
- Método del centroide (centro de área o centro de gravedad).
- Método de peso promedio.
- Pertenencia mín-máx (medio de máximos).
- Centro de sumas.
- Centro de área más grande.
- Primer (o último) máximo.

En seguida se estudia la base de reglas para estructuras de control clásicas.

#### Método de altura

El método consiste en calcular la altura máxima que tiene una función de membresía, es decir

$$y^* = \text{máx } \mu_{B'}(y). \quad (3.1)$$

Como se muestra en la Figura 3.3a.



### Método del centroide

Este método consiste en varios pasos. Inicialmente, un punto centroide sobre el eje de las  $y$ s es determinado para cada función de membresía de salida. Entonces, las funciones de membresía son limitadas en altura por la fuerza de la regla aplicada, y las áreas de las funciones de membresía son calculadas. Finalmente, la salida sufre la defuzzificación, derivada por una media ponderada de los puntos centroides del eje de las  $y$ s y las áreas calculadas, con las áreas sirviendo como pesos como se muestra en la Figura 3.3b.

$$y^* = \frac{\int \mu_{B'}(y) \cdot y \cdot dy}{\int \mu_{B'}(y) \cdot dy}. \quad (3.2)$$

donde  $\int$  significa el operador de integración.

### Método del peso promedio

Para funciones de pertenencia simétricas,

$$y^* = \frac{\sum \mu_{B'}(y) \cdot \bar{y}}{\sum \mu_{B'}(\bar{y})}, \quad (3.3)$$

como se observa en la Figura 3.3c.

### Pertenencia mín-máx

En este método, el valor para realizar la acción de control es obtenida tomándose el punto medio de los valores de membresía máximos. Este método genera como valor de la defuzzificación el promedio de todos los valores que alcanzan el mismo máximo en la salida difusa final, es decir

$$y^* = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2}, \quad (3.4)$$

como se observa en la Figura 3.3d.

Conforme Oliveira [27], en el método de promedio de los máximos, el valor numérico de salida corresponde al punto de universo de discurso, que corresponde al promedio de los puntos de máxima localización de la función de membresía del conjunto difuso de salida, producido por el proceso de inferencia.

### Centro de sumas

Similar al método de pesos promedio, pero aquí los pesos no son  $\mu_{B'}(\bar{y})$  sino el área bajo las funciones de membresía correspondientes.

### Centro de área más grande

Solo en el conjunto difuso más activo es considerado y  $y^*$  es el centro de gravedad de esa área correspondiente.

### Primer (o último) máximo

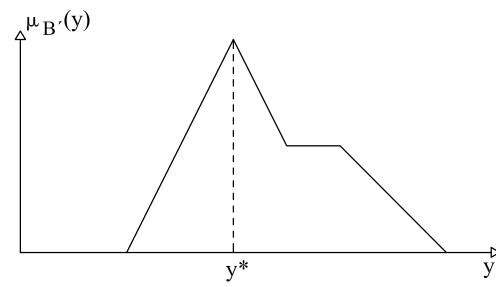
$$y^* = \inf_{y \in Y} \{y \in Y \mid \mu_{B'}(y) = h(Y)\}, \quad (3.5)$$

ó

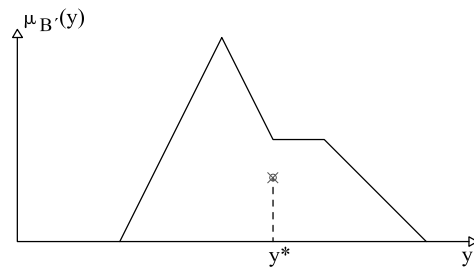
$$y^* = \sup_{y \in Y} \{y \in Y \mid \mu_{B'}(y) = h(Y)\}, \quad (3.6)$$

entonces  $y^*$  es el valor más pequeño o más grande de  $y$  el cual maximiza  $\mu_{B'}(y)$ .

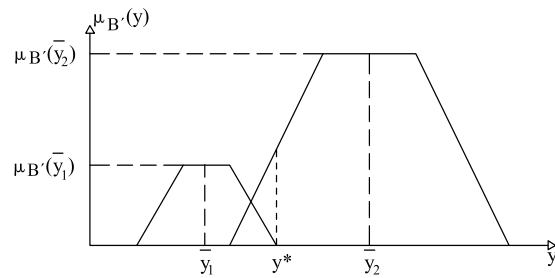
Los métodos más utilizados en el control difuso son el de centroide, el método de pesos promedio y el centro de sumas. Los otros métodos pueden introducir discontinuidades en la variable de control. En la Figura 3.3 se muestran de manera gráfica cada uno de estos métodos.



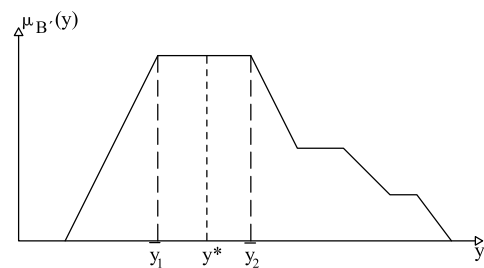
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.3: Métodos de defuzzificación: (a) Método de la altura; (b) Método del centroide; (c) Método de pesos promedio; (d) Pertenencia mín-máx.

### 3.3. Tipos de controladores

Dadas las bases de un controlador difuso en general, ahora se dan las características básicas de los controladores  $P$ ,  $I$  y  $D$  para conocer y evaluar cuál o cuáles son las mejores opciones para controlar al sistema carro-péndulo invertido.

- El controlador proporcional  $P$  tiene el efecto de reducir el tiempo de subida y puede reducir, pero nunca elimina el error de estado estacionario.
- El controlador integral  $I$  tiene el efecto de eliminar el error en estado estacionario, pero puede empeorar la respuesta transitoria.
- El control derivativo  $D$  tiene el efecto de aumentar la estabilidad del sistema, reducir el sobreimpulso y mejorar la respuesta transitoria.

Como se menciona en el Apéndice B, se pueden tener estructuras clásicas del controlador difuso (Cd) como:  $P$ ,  $PI$ ,  $PD$ ,  $PID$ . En el diagrama a bloques de la Figura 3.4 se presenta el esquema básico para un controlador difuso.

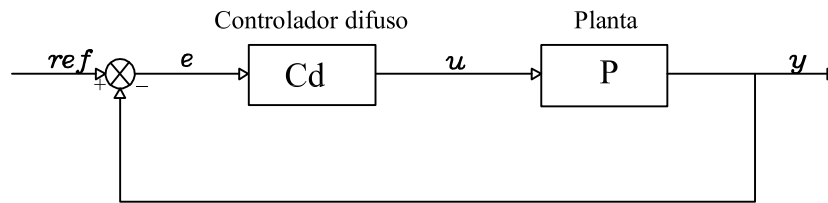


Figura 3.4: Esquema básico de un controlador difuso.

A continuación se introduce la notación empleada en el esquema básico de control:  
Variable de entrada al controlador difuso

- $ref$  = Referencia.
- $(e)$  = Error.
- $(\Delta e, \dot{e})$  = Cambio de error.
- $(\delta e)$  = Suma de errores.

Variable de salida del controlador

- $(u)$  = Acción de control.
- $(\Delta u, \dot{u})$  = Cambio de la acción de control.

Por analogía con un controlador convencional, se tiene:

- $e(k) = ref - y(k)$ .
- $\Delta e(k) = e(k) - e(k - 1)/T$ .
- $\Delta u(k) = u(k) - u(k - 1)/T$ .

Donde  $k$  : es el tiempo muestreado,  $ref$  : referencia,  $T$  : periodo de muestreo y  $y$  : salida actual.

### 3.3.1. Control proporcional ( $P$ ) difuso

La ecuación de un controlador  $P$  convencional es:

$$u(t) = k_p e(t),$$

donde  $k_p$  es la ganancia proporcional, entonces el controlador proporcional ( $P$ ) difuso tiene la siguiente estructura:

$$SI \ e \text{ es } z_1 \ ENTONCES \ u \text{ es } z.$$

### 3.3.2. Control proporcional-integral ( $PI$ ) difuso

La ecuación para un controlador  $PI$  convencional es:

$$\begin{aligned} u(t) &= k_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt \right], \\ &= k_p e(t) + k_i \int e(t) dt. \end{aligned}$$

Derivando con respecto al tiempo la última ecuación se obtiene

$$\dot{u}(t) = k_p \dot{e}(t) + k_i e.$$

De manera análoga a la observación dada anteriormente se tiene que el controlador  $PI$  difuso tiene la siguiente estructura:

$$SI \ e \text{ es } z_1 \text{ y } \Delta e \text{ es } z_2 \ ENTONCES \ \Delta u \text{ es } z.$$

En este caso, para obtener el valor de la variable de salida del control  $u(k)$ , se obtiene como:

$$u(k) = \Delta u(k) + u(k - 1),$$

una vez defuzzificado  $\Delta u$ .

### 3.3.3. Control proporcional-derivativo (*PD*) difuso

La ecuación dada para un controlador *PD* convencional es:

$$u(t) = k_p \left[ e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right], \quad (3.7)$$

$$= k_p e(t) + k_d \dot{e}. \quad (3.8)$$

Como se puede observar de (3.8) la ley de control  $u(t)$  de un *PD* clásico depende de las variables  $e(t)$  y  $\dot{e}(t)$ , por tanto el controlador *PD* difuso consiste en reglas donde la descripción simbólica de cada regla esta dada como:

$$SI \ e(k) \text{ es } z_1 \text{ y } \Delta e(k) \text{ es } z_2 \text{ ENTONCES } u(k) \text{ es } z,$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

La descripción en lenguaje natural es:

Si el valor del error es *término lingüístico* y el valor de cambio de error es *término lingüístico* entonces el valor de la acción de control es *término lingüístico*.

Por simplicidad, usualmente se omite la referencia tiempo, resultando:

$$SI \ e \text{ es } z_1 \text{ y } \Delta e \text{ es } z_2 \text{ ENTONCES } u \text{ es } z. \quad (3.9)$$

### 3.3.4. Control proporcional-integral-derivativo (*PID*) difuso

La ecuación para un *PID* convencional esta dada como:

$$u(t) = k_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right],$$

$$= k_p e(t) + k_i \int e(t) dt + k_d \dot{e}.$$

En el caso discreto de un *PID* difuso, se define un término adicional, que es la suma de errores denotada por  $\delta e$  y calculada como:

$$\delta e(k) = \sum e(i),$$

y el *PID* difuso se define como:

$$Si \ e \text{ es } z_1 \text{ y } \Delta e \text{ es } z_2 \text{ y } \Delta e \text{ es } z_3 \text{ ENTONCES } u \text{ es } z.$$

En algunos casos, cuando se conocen los parámetros del proceso y su estructura es disponible, se pueden usar las variables de estado del proceso.

La expresión simbólica para una regla en el caso de múltiples entradas y una salida (MISO) es como sigue:

$$SI \ x_1 \text{ es } A_1 \text{ y } \dots \text{ y } x_n \text{ es } A_n \text{ ENTONCES } u \text{ es } B,$$

Las reglas de este tipo son derivadas de un modelo difuso del proceso, donde:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^T,$$

son las variables que describen el estado del proceso.

### 3.4. Modelo difuso Mamdani

El sistema de inferencia difuso Mamdani [19] fue propuesto como el primer modelo para controlar un motor de vapor y unas calderas, para ésto se empleó un conjunto de reglas lingüísticas de control obtenidas de la experiencia de los operadores humanos.

En las aplicaciones Mamdani [19], dos sistemas de inferencia difusa fueron utilizados como controles para generar la entrada de calor de una caldera y apertura de una válvula reguladora del cilindro de un motor de vapor, que regulaban la presión del vapor en la caldera y la velocidad en el motor, respectivamente. Ya que la planta toma sólo valores numéricos como entradas, se utiliza una etapa de defuzzificación para convertir el conjunto difuso a valores numéricos.

Su forma básica es:

$$SI \ e \text{ es } ep \text{ Y } \acute{e} \text{ es } rp \text{ ENTONCES } Salida \text{ es } op.$$

Se tiene que el antecedente de esta regla es “*SI e es ep Y é es rp*” y el consecuente “*ENTONCES Salida es op*” que son variables lingüísticas.

Donde *e* y *é* son las variables de entrada, *ep* y *rp* son dos conjuntos difusos, *salida* es la variable de salida y *op* un conjunto difuso.

### 3.5. Comentarios

En este capítulo se han establecido los conceptos básicos de control difuso, ya que se presentó la estructura general de un controlador y de cómo funcionan e interactúan cada uno de sus módulos (módulo de fuzzificación, módulo de base de reglas, módulo de mecanismo de inferencia y módulo de defuzzificación). Por último se presentan las posibles combinaciones entre las partes *P*, *I* y *D* de los controladores difusos, resultando los *P*, *PI*, *PD* y *PID*. Es importante mencionar que en este trabajo de tesis, sólo se emplea el controlador *PD* difuso.

# Capítulo 4

## Diseño del controlador $PD$ difuso para el sistema carro-péndulo invertido

El objetivo del presente capítulo es presentar el diseño del controlador  $PD$  difuso para el sistema carro-péndulo invertido, del cual se dan los modelados matemáticos en el Apéndice C, con el uso de una cámara de visión como sensor.

Se presenta una simulación con dos funciones de membresía para las entradas y tres para las salidas, también se desarrollan dos simulaciones, cada una con cinco funciones de membresía para las entradas y cinco para las salidas. Es importante mencionar que la dinámica de la cámara es considerada como un retardo puro, esto se hace sólo para fines de simulación.

La organización de este capítulo es la siguiente: en la Sección 4.1 se presenta una introducción referente al control difuso para el carro-péndulo invertido. En la Sección 4.2 se tiene el diseño del controlador  $PD$  difuso con dos funciones de membresía, presentando también el desarrollo de la fuzzificación, base de reglas difusas y defuzzificación. En la Sección 4.3 se presentan los parámetros para el controlador  $PD$  difuso con cinco funciones de membresía, presentando de la misma manera los parámetros de fuzzificación, base de reglas difusas y defuzzificación. Finalmente, los comentarios son dados en la Sección 4.4.

### 4.1. Introducción

El sistema subactuado carro-péndulo invertido en lazo abierto se comporta de una manera inestable, esto es, el péndulo no se mantiene en una posición vertical, por lo que, debido a sus características de salida lo que se desea obtener al implementar un controlador difuso es:



- Sistema estable en lazo cerrado.
- Tiempo de respuesta transitoria rápido.
- Sobreimpulso mínimo.
- El error tienda a cero en estado estacionario.

Para la selección del controlador a ser empleado en el control del carro-péndulo invertido se consideran los siguientes puntos:

- Evaluar el comportamiento de la planta carro-péndulo invertido en lazo abierto.
- Evaluar las características (ventajas y desventajas) que proporcionan los controladores  $PI$ ,  $PD$ ,  $PID$ .

En el primer punto se tiene que el carro tiene acoplado un motor de corriente directa (ver Apéndice C) cuya función de transferencia es de primer orden, lo cual se comporta como un integrador, de esto se puede deducir que un controlador del tipo  $PD$  satisface adecuadamente las condiciones de diseño para controlar al sistema [32], cuya estructura básica en tiempo continuo se presenta en la Figura 4.1, donde la señal de control está dada como:

$$u(t) = K_u u^*(t), \tag{4.1}$$

donde  $K_u$  es una ganancia determinada por los diseñadores y  $u^*(t)$  es la salida del controlador, el cual contiene las reglas de control difuso y de defuzzificación.

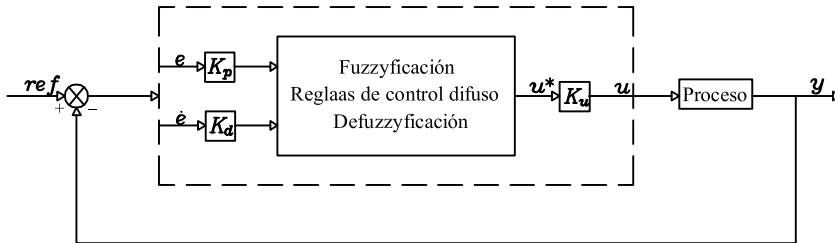


Figura 4.1: Esquema de un control  $PD$  difuso básico.

## 4.2. Controlador $PD$ difuso con 2 funciones de membresía

En esta sección se presentan los parámetros empleados para el diseño de un controlador  $PD$  difuso utilizando solo 2 funciones de membresía así como el desarrollo matemático de dicho controlador.

### 4.2.1. Fuzzificación

Como se observa en el esquema de control  $PD$  difuso, el controlador emplea dos entradas: la señal de error  $e(t)$  y la derivada del error  $\dot{e}(t)$ , donde  $e$  es definida como  $e(t) = ref(t) - y(t)$  con  $ref = r$  la señal de referencia a seguir y  $y$  la salida del sistema. El controlador difuso sólo tiene una salida  $u(t)$  la cual se emplea para alimentar al motor (previamente pasando por una etapa de potencia).

#### 4.2.1.1. Selección de funciones de membresía

Las funciones de membresía de las entradas y de la salida del controlador difuso se presentan en las Figuras 4.2 y 4.3, respectivamente. La selección del tipo y número de funciones de membresía es propuesto por los diseñadores del controlador  $PD$  difuso. Se utilizará la misma función de membresía tanto para  $e(t)$  como para  $\dot{e}(t)$  por simplicidad.

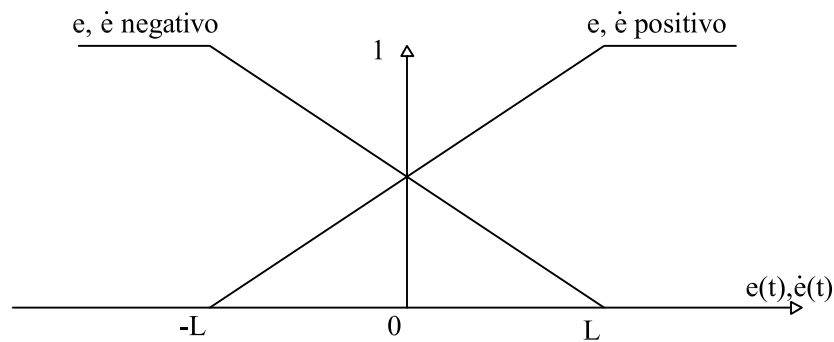


Figura 4.2: Funciones de membresía de las entradas al controlador difuso.

Para que puedan ser empleadas las mismas funciones de membresía para las dos entradas, se utilizan los factores de escalamiento  $K_p$  y  $K_d$  para  $e(t)$  y  $\dot{e}(t)$ . Lo que significa que  $K_p e(t)$  y  $K_d \dot{e}(t)$  reemplazarán a  $e(t)$  y  $\dot{e}(t)$  en la formulación final.

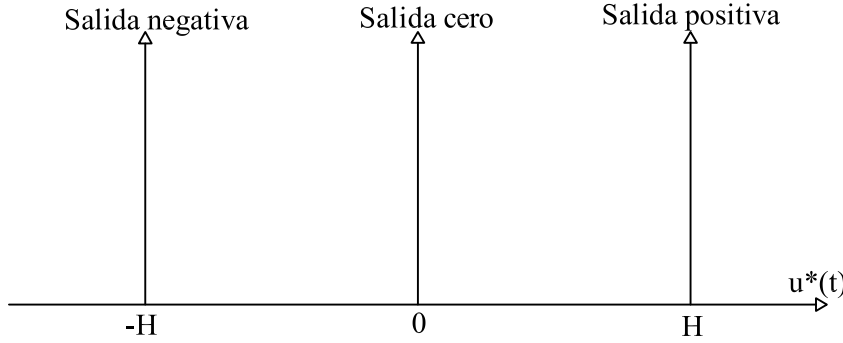


Figura 4.3: Funciones de membresía de la salida.

En las funciones de membresía de salida  $H$  y  $L$  son dos constantes positivas a ser determinadas por el diseñador; se toma que  $H = L$  para reducir los parámetros de control a determinar.

## 4.2.2. Base de reglas

Ya propuesto el tipo de controlador y las funciones de membresía tanto de la entrada como de la salida del controlador *PD* difuso dadas en las Figuras 4.2 y 4.3, se pasa a definir la base de reglas con la cual se obtendrá la señal de control, y las cuales asociarán a las posibles combinaciones de las entradas un valor de salida.

### 4.2.2.1. Método empleado para la generación de las reglas

La generación de la base de reglas *SI-ENTONCES* del controlador *PD* difuso se realizó mediante el conocimiento del comportamiento del sistema carro-péndulo invertido previamente obtenido y la lógica de los diseñadores, obteniendo la siguiente serie de reglas:

- (R1) *SI*  $e$  es  $ep$  *Y*  $\dot{e}$  es  $rp$  *ENTONCES* Salida es  $op$ ,
- (R2) *SI*  $e$  es  $ep$  *Y*  $\dot{e}$  es  $rn$  *ENTONCES* Salida es  $oz$ ,
- (R3) *SI*  $e$  es  $en$  *Y*  $\dot{e}$  es  $rp$  *ENTONCES* Salida es  $oz$ ,
- (R4) *SI*  $e$  es  $en$  *Y*  $\dot{e}$  es  $rn$  *ENTONCES* Salida es  $on$ .

Donde:

- $e$  = error.
- $\dot{e}$  = derivada del error.
- $ep$  = error positivo.
- $en$  = error negativo.
- $rp$  = derivada del error positivo.
- $rn$  = derivada del error negativo.
- $on$  = salida negativa.
- $op$  = salida positiva.
- $oz$  = salida cero.

El significado de cada una de las cuatro reglas obtenidas se puede entender de la siguiente manera:

- El problema de regulación, para una referencia constante, será utilizado como propósito de explicación, en la primera regla (**R1**)  $ep$  implica que la salida del sistema  $y$  se encuentra por debajo de la referencia  $ref$ , es decir

$$y < ref, \tag{4.2}$$

$rp$  significa que

$$\dot{y} < \dot{ref} = 0, \tag{4.3}$$

esto es, la velocidad del sistema está disminuyendo, por ello la acción de control debe ser positiva, para que la salida del sistema sea incrementada.

- Para la tercera regla (**R3**) la salida del sistema se encuentra por encima de la referencia y disminuyendo por lo tanto no es necesario aplicar ninguna acción de control

$$y > ref. \tag{4.4}$$

La segunda y cuarta regla se pueden interpretar de la misma forma ya que trabajan del mismo modo que las dos explicadas anteriormente.

### 4.2.3. Defuzzificación

Las funciones de membresía mostradas en la Figura 4.2 tanto para el error  $e(t)$  y su derivada  $\dot{e}(t)$ , vienen dadas por las expresiones analíticas (cuyo desarrollo analítico de la defuzzificación es presentado en el Apéndice D):

$$\begin{aligned}\mu_{ep} &= \frac{L + K_p e(t)}{2L}, & \mu_{en} &= \frac{L - K_p e(t)}{2L}, \\ \mu_{rp} &= \frac{L + K_d \dot{e}(t)}{2L}, & \mu_{rn} &= \frac{L - K_d \dot{e}(t)}{2L}.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Haciendo uso de éstas se obtiene las siguientes reglas:

$$\begin{aligned}\mu_{R1} &: \text{mín}(\mu_{ep}, \mu_{rp}), \\ \mu_{R2} &: \text{mín}(\mu_{ep}, \mu_{rn}), \\ \mu_{R3} &: \text{mín}(\mu_{en}, \mu_{rp}), \\ \mu_{R4} &: \text{mín}(\mu_{en}, \mu_{rn}).\end{aligned}\quad (4.6)$$

$$(4.7)$$

El método que se utiliza para la defuzzificación es el de peso promedio

$$u = H \frac{\mu_{R1} - \mu_{R4}}{\mu_{R4} + \mu_{R3} + \mu_{R2} + \mu_{R1}}.\quad (4.8)$$

## 4.3. Controlador *PD* difuso con 5 funciones de membresía

En esta sección se presentan los parámetros necesarios para llevar a cabo 2 simulaciones de un controlador *PD* difuso con 5 funciones de membresía, cabe mencionar que dichas funciones son diferentes para cada simulación. Los resultados obtenidos en las simulaciones son presentados y comparados en el Capítulo 5.

### 4.3.1. Fuzzificación

Como se observó en el diseño del controlador *PD* difuso con dos funciones de membresía, se emplean dos señales de entrada, el error y su derivada, teniendo una única salida del sistema, en este caso se utiliza el mismo sistema, por lo tanto son las mismas señales de entrada.

#### 4.3.1.1. Selección de las funciones de membresía

Se realizaron dos simulaciones con el mismo número de funciones de membresía pero diferentes tipos:

- 1.- Una función  $L$ , una función triangular, una función trapezoidal, una función triangular y una función  $\Gamma$ , como se muestra en la Figura 4.4.
- 2.- Una función  $L$ , tres funciones triangulares y una función  $\Gamma$ , como se muestra en la Figura 4.5.

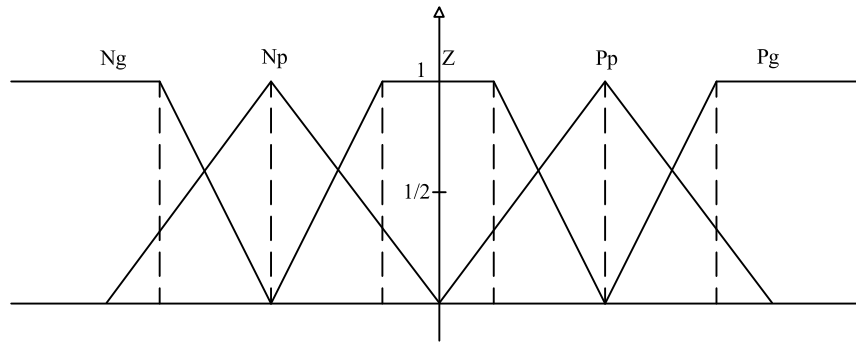


Figura 4.4: Funciones de membresía de las entradas al controlador difuso.

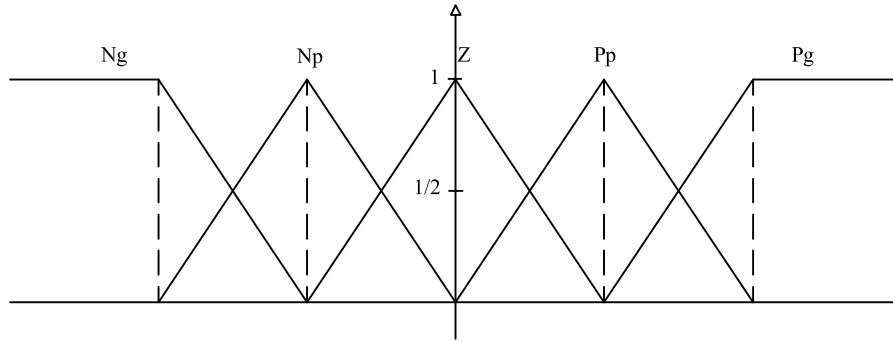


Figura 4.5: Funciones de membresía de las entradas al controlador difuso.

#### 4.3.2. Base de reglas

Para las dos simulaciones, se propone utilizar los mismos valores y las mismas variables lingüísticas tanto para  $\theta$  y  $p$ , así como sus derivadas, por lo tanto se utilizan las mismas 25 reglas para las dos simulaciones.

(R1)	SI	e	es	ng	Y	$\dot{e}$	es	ng	ENTONCES	Salida	es	pg	,
(R2)	SI	e	es	ng	Y	$\dot{e}$	es	np	ENTONCES	Salida	es	pg	,
(R3)	SI	e	es	ng	Y	$\dot{e}$	es	z	ENTONCES	Salida	es	pp	,
(R4)	SI	e	es	ng	Y	$\dot{e}$	es	pp	ENTONCES	Salida	es	pp	,
(R5)	SI	e	es	ng	Y	$\dot{e}$	es	pg	ENTONCES	Salida	es	z	,
(R6)	SI	e	es	np	Y	$\dot{e}$	es	ng	ENTONCES	Salida	es	pg	,
(R7)	SI	e	es	np	Y	$\dot{e}$	es	np	ENTONCES	Salida	es	pp	,
(R8)	SI	e	es	np	Y	$\dot{e}$	es	z	ENTONCES	Salida	es	pp	,
(R9)	SI	e	es	np	Y	$\dot{e}$	es	pp	ENTONCES	Salida	es	z	,
(R10)	SI	e	es	np	Y	$\dot{e}$	es	pg	ENTONCES	Salida	es	np	,
(R11)	SI	e	es	z	Y	$\dot{e}$	es	ng	ENTONCES	Salida	es	pp	,
(R12)	SI	e	es	z	Y	$\dot{e}$	es	np	ENTONCES	Salida	es	pp	,
(R13)	SI	e	es	z	Y	$\dot{e}$	es	z	ENTONCES	Salida	es	z	,
(R14)	SI	e	es	z	Y	$\dot{e}$	es	pp	ENTONCES	Salida	es	np	,
(R15)	SI	e	es	z	Y	$\dot{e}$	es	pg	ENTONCES	Salida	es	np	,
(R16)	SI	e	es	pp	Y	$\dot{e}$	es	ng	ENTONCES	Salida	es	pp	,
(R17)	SI	e	es	pp	Y	$\dot{e}$	es	np	ENTONCES	Salida	es	z	,
(R18)	SI	e	es	pp	Y	$\dot{e}$	es	z	ENTONCES	Salida	es	np	,
(R19)	SI	e	es	pp	Y	$\dot{e}$	es	pp	ENTONCES	Salida	es	np	,
(R20)	SI	e	es	pp	Y	$\dot{e}$	es	pg	ENTONCES	Salida	es	ng	,
(R21)	SI	e	es	pg	Y	$\dot{e}$	es	ng	ENTONCES	Salida	es	z	,
(R22)	SI	e	es	pg	Y	$\dot{e}$	es	np	ENTONCES	Salida	es	np	,
(R23)	SI	e	es	pg	Y	$\dot{e}$	es	z	ENTONCES	Salida	es	np	,
(R24)	SI	e	es	pg	Y	$\dot{e}$	es	pp	ENTONCES	Salida	es	ng	,
(R25)	SI	e	es	pg	Y	$\dot{e}$	es	pg	ENTONCES	Salida	es	ng	.

Donde:

- $e$  = error.
- $\dot{e}$  = derivada del error.
- $ng$  = negativo grande.
- $np$  = negativo pequeño.
- $z$  = cero.
- $pp$  = positivo pequeño.
- $pg$  = positivo grande.

Tomando en cuenta que por simplificación se utiliza  $e$  para sustituir a  $\theta$  y  $p$ , y  $\dot{e}$  para sustituir a  $\dot{\theta}$  y  $\dot{p}$ .

Para estas dos simulaciones se considera la base de reglas propuesta por Mac Vicar-Whelan como se observa en el Cuadro 4.1.

Cuadro 4.1: FAM para el controlador  $PD$  difuso.

<b>ng</b>	<b>np</b>	<b>z</b>	<b>pp</b>	<b>pg</b>	
pg	pg	pp	pp	z	<b>ng</b>
pg	pp	pp	z	np	<b>np</b>
pp	pp	z	np	np	<b>z</b>
pp	z	np	np	ng	<b>pp</b>
z	np	np	ng	ng	<b>pg</b>

Cuadro 4.2: FAM de los valores del controlador  $PD$  difuso.

<b>ng</b>	<b>np</b>	<b>z</b>	<b>pp</b>	<b>pg</b>	
5	3.5	2.5	1.25	0	<b>ng</b>
3.5	2.5	1.25	0	-1.25	<b>np</b>
2.5	1.25	0	-1.25	-2.5	<b>z</b>
1.25	0	-1.25	-2.5	-3.5	<b>pp</b>
0	-1.25	-2.5	-3.5	5	<b>pg</b>

### 4.3.3. Defuzzificación

La defuzzificación para estas dos simulaciones se efectúa con el mismo método utilizado en el controlador  $PD$  difuso con dos funciones de membresía, el método de peso promedio, tomando los valores del Cuadro 4.2, como se ve en el programa del Apéndice E.

En el diseño del controlador con 5 funciones de membresía no se realizó un desarrollo analítico, solamente se partió del conocimiento previo obtenido del comportamiento del sistema carro-péndulo invertido con dos funciones de membresía, así como del conocimiento experimental del sistema. El resultado obtenido de esto es el controlador propuesto que se muestra en el Apéndice E.



## 4.4. Comentarios

El empleo de un controlador  $PD$  clásico en el control de robots esta justificado y probado en [32]. Esto permite suponer que la elección de un  $PD$  difuso puede ser empleado para dicho sistema. Para las simulaciones del controlador con dos y cinco funciones de membresía se tomo por facilidad y simplificación de cálculos, la misma función de membresía tanto para el error como para su derivada (Figuras 4.2, 4.4 y 4.5).

Para la simulación con dos funciones de membresía se propone una descomposición de 20 regiones para las entradas del controlador,  $e(t)$  y  $\dot{e}(t)$ , es importante mencionar que dicha descomposición se hace a prueba y error. Analizando y evaluando las reglas de cada una de las regiones utilizando la inferencia Mamdani, se produce la defuzzificación utilizando el método de peso promedio, sintetizándolas se obtienen las ecuaciones que determinan la señal de control que actuarán sobre el sistema carro-péndulo invertido. Por otro lado, en el uso de cinco funciones de membresía no se realiza un procedimiento analítico similar al presentado en la Sección 4.2, sino un procedimiento obtenido de la experiencia práctica que se tiene con el sistema carro-péndulo invertido.

Los resultados de estas tres simulaciones se presentan y se comparan en el siguiente capítulo.

# Capítulo 5

## Resultados

Este capítulo tiene como objetivo mostrar las simulaciones en SIMULINK/MATLAB de los controladores *PD* difuso diseñados en el capítulo anterior. Los resultados que se muestran, son los obtenidos en forma gráfica del controlador *PD* difuso. Para el sistema carro-péndulo invertido haciendo uso de una cámara de visión artificial como sensor, con 2 y 5 funciones de membresía.

La organización del capítulo es la siguiente: en la Sección 5.1 se presenta una introducción a la simulación del sistema, así como de los requerimientos necesarios para poder realizarla. En la Sección 5.2 se muestran los diagramas de cada uno de los bloques que conforman el sistema controlado sin cámara, así como su funcionamiento. En la Sección 5.2.1 se presentan las gráficas obtenidas del sistema controlado. En la Sección 5.3 se presenta el modelo de la cámara y el sistema controlado con cámara con dos funciones de membresía. En la Sección 5.3.1 se muestran los resultados obtenidos de la simulación del sistema con la cámara integrada con dos funciones de membresía, una  $\Gamma$  y una  $L$ . En la Sección 5.4 se muestran los resultados gráficos obtenidos con 5 funciones de membresía, teniendo primero los resultados del control *PD* difuso con 2 funciones de membresía tipo triangular, una trapezoidal, una  $\Gamma$  y una  $L$ , posteriormente se presentan los resultados gráficos del control pero ahora con 3 funciones de membresía triangulares, una  $\Gamma$  y una  $L$ . En la Sección 5.5 se pueden observar las superficies de diseño para las simulaciones con 2 y 5 funciones de membresía. Finalmente, los comentarios son dados en la Sección 5.6.

### 5.1. Introducción

El actual crecimiento en la computación y procesamiento de datos, ha impulsado de gran manera el desarrollo de software que hace posible simular el comportamiento de sistemas mediante la simulación.

La importancia de llevar los modelos matemáticos y leyes de control a un esquema de simulación permite tener una aproximación de los resultados esperados en la implantación. Antes de implementar los algoritmos de control en el sistema en tiempo real es necesario realizar una etapa previa a ésta, como lo es la simulación, la cual se lleva a cabo mediante un programa (software) que imita las acciones del sistema que se quiere controlar. En este trabajo de tesis se hace uso del ambiente de simulación MATLAB [34]. Unos buenos resultados del desempeño del sistema en lazo cerrado garantizarán que la implementación de los algoritmos tienen grandes posibilidades de un buen funcionamiento en la implantación, es por ello que este capítulo es fundamental para la familiarización con los resultados esperados en el laboratorio.

La simulación del control del carro-péndulo invertido se desarrolla en los ambientes del editor de MATLAB (m-file) y SIMULINK en conjunto para obtener un sistema más compacto y entendible, ya que el ambiente MATLAB permite la interconexión de sus elementos.

Las 2 simulaciones del controlador  $PD$  difuso con 5 funciones de membresía, se realizaron con los siguientes parámetros: para el péndulo un rango de  $-15$  a  $15$  *grados*, partiendo de una posición vertical de  $4.6$  *grados*, para el carro un parámetro de  $-35$  a  $35$  *centímetros*, tomando en cuenta que la posición inicial del carro es de  $0$  *centímetros*; la salida de cada controlador se encuentra en un rango que va de  $-5$  a  $5$  *volts*.

## 5.2. Simulación del sistema sin cámara con 2 funciones de membresía

El propósito del control es llevar al péndulo a un estado vertical ( $0^\circ$ ). Esto se implementó utilizando un controlador  $PD$  difuso que sirve para estabilizar al sistema y mantenerlo en la posición deseada, en la Figura 5.1 se muestra el diagrama de control general del carro-péndulo invertido sin hacer uso de la cámara de visión en SIMULINK.

El diagrama consta de tres bloques, el modelo no lineal del carro-péndulo invertido (dado en el Apéndice C y el programa se presenta en el Apéndice E.1), el control difuso y la ley de conmutación (cuyos programas son presentados en el Apéndice E.3.1 y E.2, respectivamente).

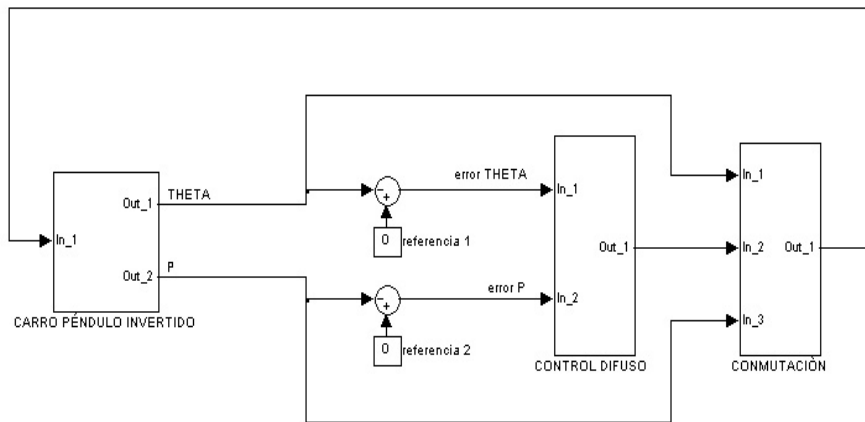


Figura 5.1: Esquema de control del carro-péndulo invertido sin cámara.

El diagrama del modelo no lineal del carro-péndulo invertido, el cual es el sistema a controlar es mostrado en la Figura 5.2, en este diagrama de simulación se observan cuatro integradores que corresponden a las variables de estado del sistema  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $p$  y  $\dot{p}$ , una entrada  $u$  que es la señal que controla el sistema y un bloque de interfaz de SIMULINK con MATLAB para llamar a la función que está en el Apéndice E.1 y que contiene los parámetros físicos del sistema, así como los algoritmos matemáticos que lo representan, interactuando con las variables de estado del sistema. Esto para simular las dinámicas del sistema carro-péndulo invertido.

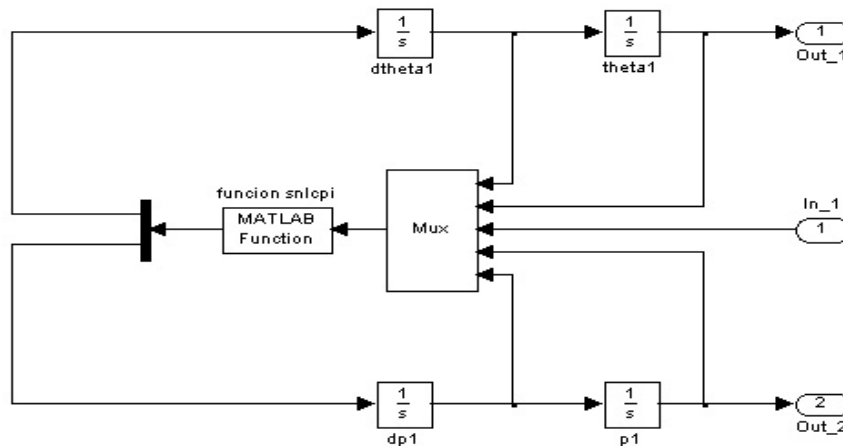


Figura 5.2: Esquema general del carro-péndulo invertido.

El diagrama de control difuso es mostrado en la Figura 5.3 con sus correspondientes ganancias y su interfaz de SIMULINK con MATLAB, para llamar a la función presentada en el Apéndice E.3.1, el cual contiene al algoritmo de control que se utilizó, descrito en el Capítulo 4.

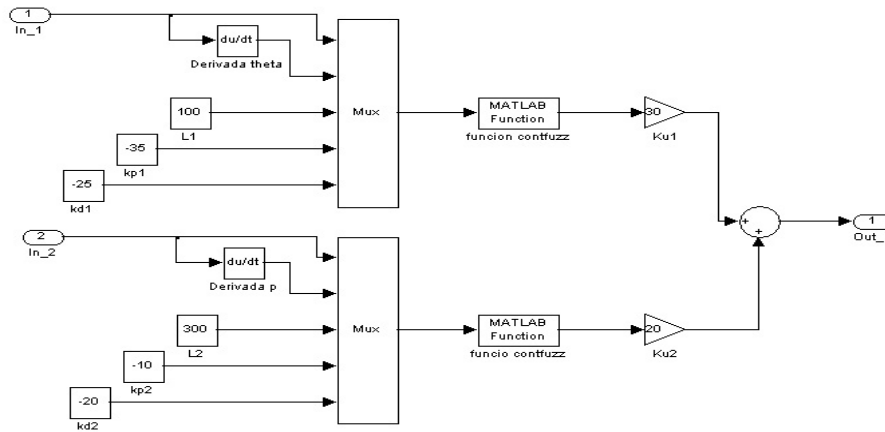


Figura 5.3: Esquema del control difuso.

En el diagrama de la ley de conmutación (Figura 5.4), se observan tres señales de entrada las cuales son  $\theta$ , la acción de control generada por el controlador y  $p$ . Con los valores de estas señales se evalúa la función *Dista* la cual es mostrada en el Apéndice E.2, obteniendo así la señal de control del sistema, dependiendo si la distancia es mayor o menor a un cierto valor determinado *d-des*.

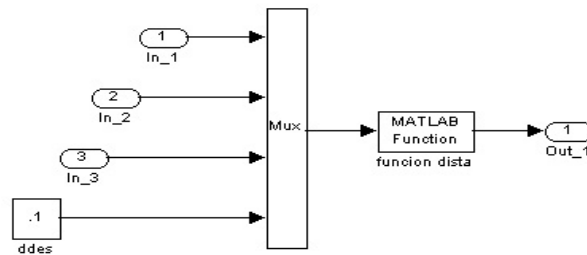


Figura 5.4: Bloque de conmutación.

Los valores de los parámetros  $L$ ,  $kp$ ,  $kd$  fueron determinados por medio de experimentación empírica. Los resultados obtenidos de la simulación se presentan en las siguientes gráficas, partiendo de las condiciones iniciales  $\theta = 5.7^\circ$  y  $p = 0$ .

### 5.2.1. Gráficas de simulación

En las Figuras 5.5-5.9 se presentan los resultados obtenidos de la simulación cuando el sistema no cuenta con la cámara de visión, recordando que la sintonización del controlador  $PD$  difuso (dado por D.50) es a prueba y error, las gráficas muestran las posiciones tanto del péndulo como la del carro así como sus derivadas y la acción de control.

En la Figura 5.5 se observa el comportamiento del péndulo mostrando su posición angular respecto al tiempo. Como se puede observar, el controlador  $PD$  difuso propuesto logra su objetivo, que es mantener la posición angular del péndulo cerca del origen. Además de mantener acotadas las variables: posición del carro y velocidades tanto del carro como la del péndulo.

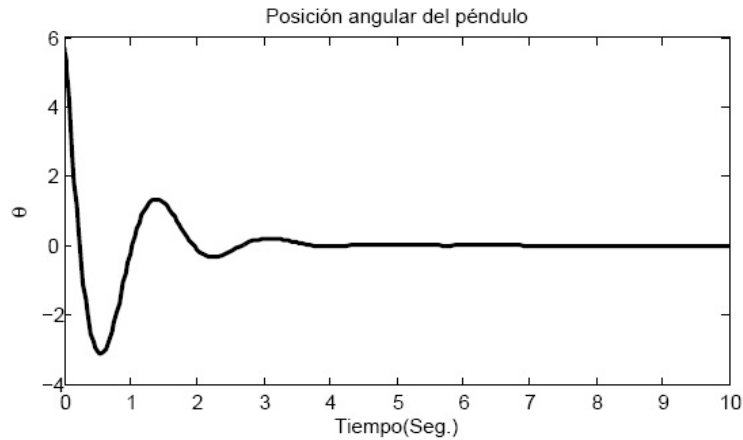


Figura 5.5: Posición angular del péndulo ( $\theta$ ).

En la Figura 5.6 se presenta la posición del carro respecto al tiempo

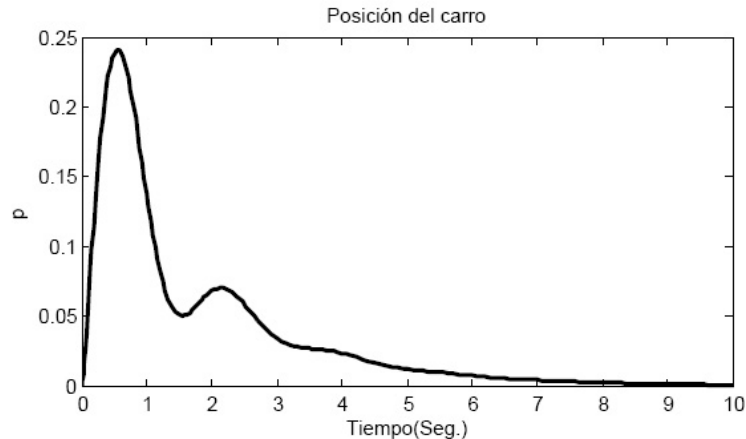


Figura 5.6: Posición del carro ( $p$ ) en lazo cerrado.

En las Figuras 5.7 y 5.8 se muestran las derivadas de la posición angular del péndulo y la posición del carro, esto es, se da la velocidad angular del péndulo y la velocidad del carro, respectivamente.

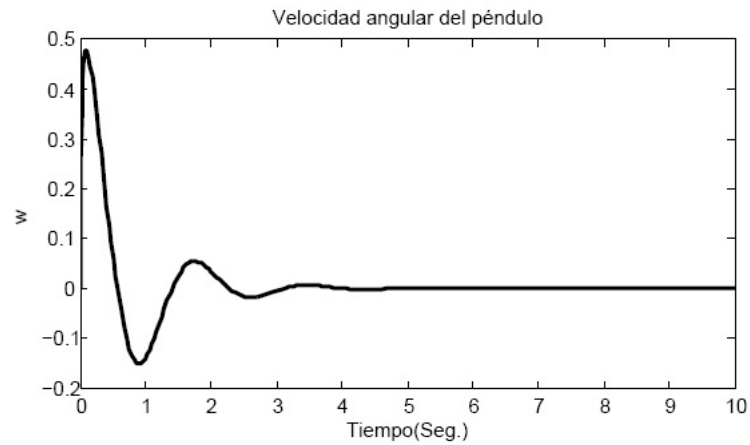


Figura 5.7: Velocidad angular del péndulo ( $w = \dot{\theta}$ ).

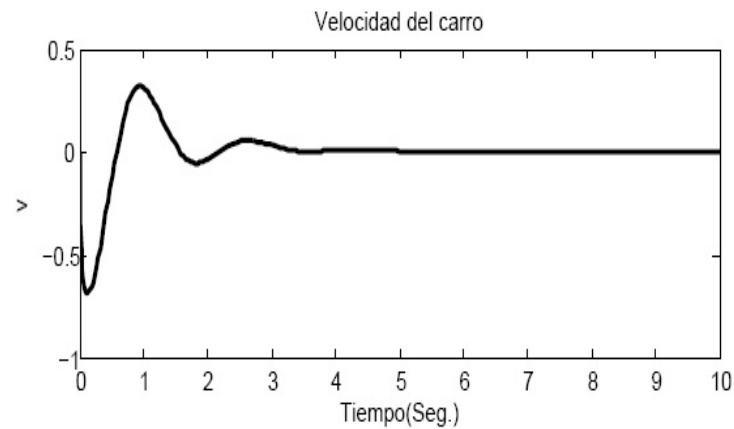


Figura 5.8: Velocidad del carro ( $v = \dot{p}$ ).

En la Figura 5.9 se presenta la señal de control del sistema sin cámara. De esta gráfica se observa que el  $PD$  propuesto, puede proponerse para ser programado en tiempo real, ya que éste se mantiene en el rango de  $-10$  a  $10$  volts.

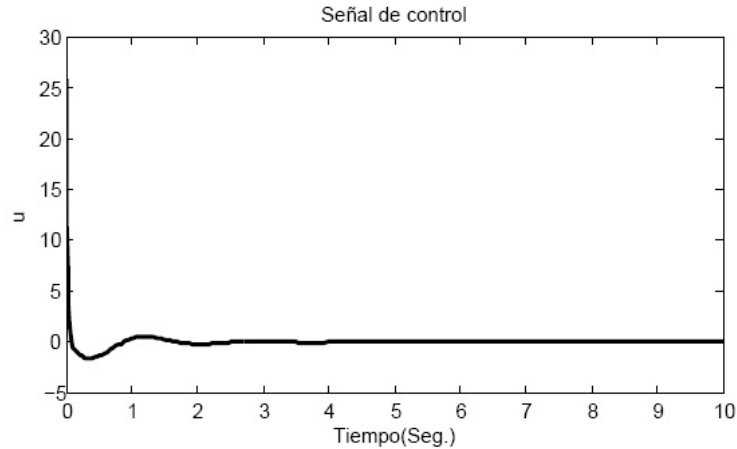


Figura 5.9: Señal de control ( $u$ ).

### 5.3. Simulación del sistema con cámara utilizando 2 funciones de membresía

En esta sección se introduce el uso de la cámara de visión en el esquema de SIMULINK, esta cámara es tomada como un retardo para fines de simulación, tomando en cuenta que sus parámetros son la ganancia del lente con un tiempo de muestreo de  $10\text{ ms}$  como se muestra en la Figura 5.10.

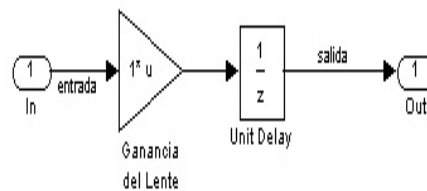


Figura 5.10: Esquema de la cámara.



Modificando el esquema de la Figura 5.1, ahora se introduce el modelo de la cámara, obteniendo un nuevo diagrama, como se observa en la Figura 5.11, las ganancias del controlador  $PD$  difuso (dado por D.50) se encuentran en la Sección E.5 del Apéndice E.

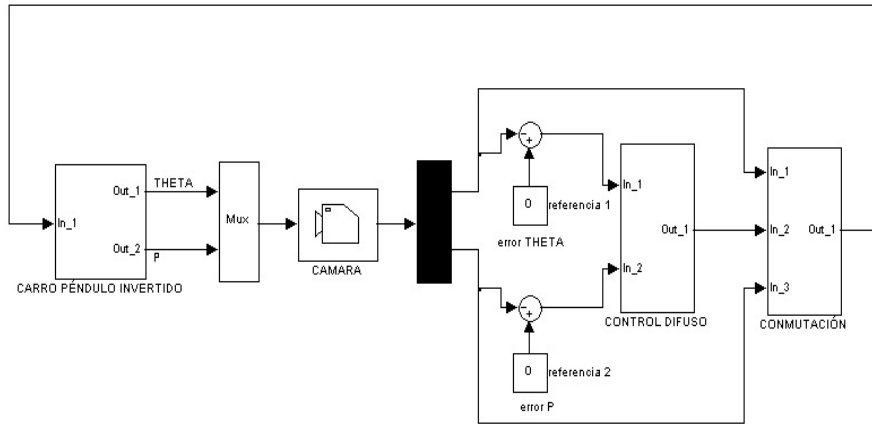


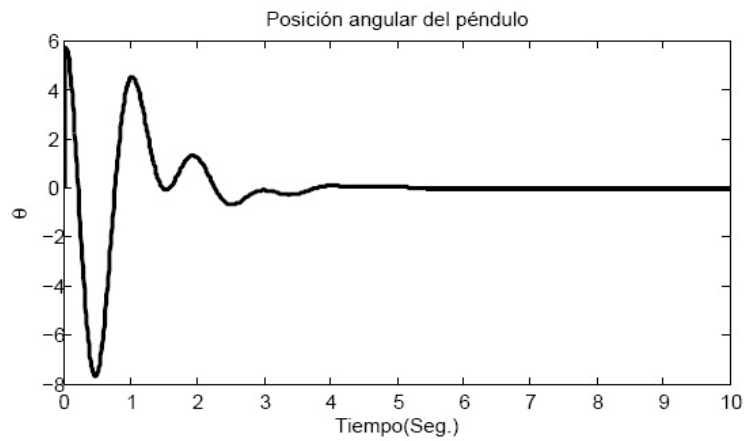
Figura 5.11: Esquema de control del carro péndulo invertido con cámara.

### 5.3.1. Gráficas de simulación

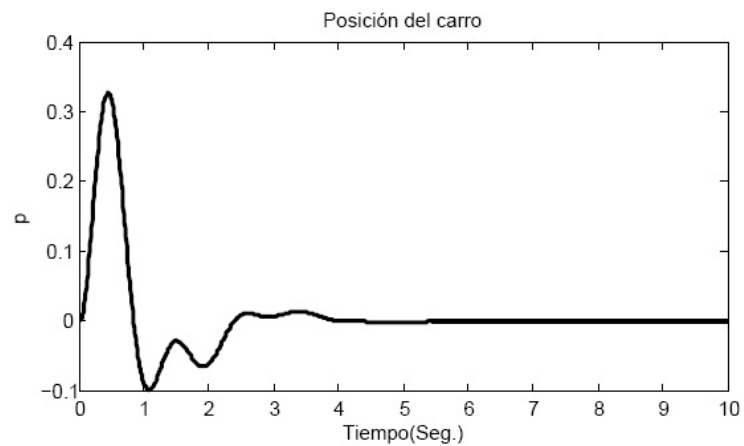
Teniendo el nuevo esquema de control, nuevamente se sintonizan las ganancias del controlador  $PD$  difuso, obteniendo las siguientes respuestas.

Las gráficas muestran las posiciones tanto del péndulo como la del carro así como sus derivadas y la acción de control. Recordando que la sintonización es a prueba y error.

En la Figura 5.12 se observa el comportamiento del péndulo mostrando su posición angular respecto al tiempo. Como se puede ver, el ángulo del péndulo inicia en 5.7 grados y después de cuatro segundos de simulación el ángulo se aproxima a cero grados. También aquí se mantienen acotadas las otras variables físicas del sistema: posición del carro, velocidad del carro y la velocidad angular del péndulo. Sin embargo, el inconveniente de este controlador es que la ley de control resultante es muy grande en el primer minuto de simulación.

Figura 5.12: Posición angular del péndulo ( $\theta$ ).

En la Figura 5.13 se presenta la posición del carro respecto al tiempo

Figura 5.13: Posición del carro ( $p$ ).

En las Figuras 5.14 y 5.15 se muestran las derivadas tanto de la posición angular del péndulo como de la posición del carro, esto es, se da la velocidad angular del péndulo y la velocidad del carro, respectivamente.

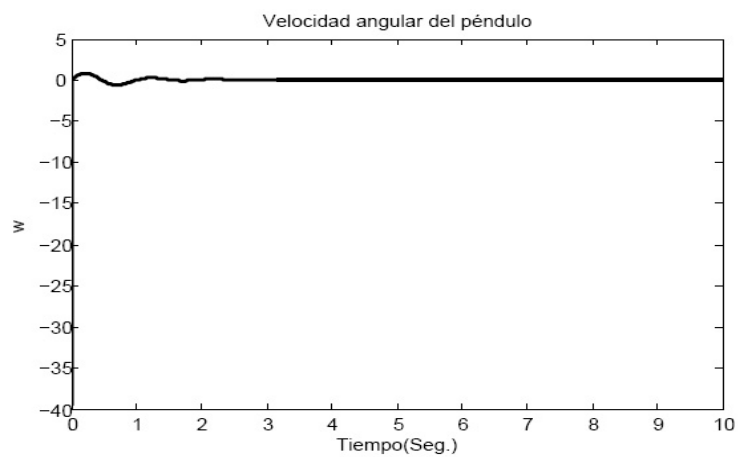


Figura 5.14: Velocidad angular del péndulo ( $w = \dot{\theta}$ ).

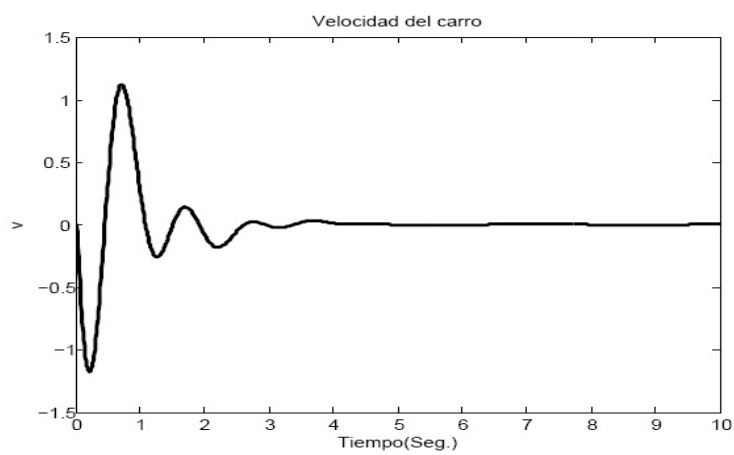


Figura 5.15: Velocidad del carro ( $v = \dot{p}$ ).

En la Figura 5.16 se presenta la señal de control del sistema con cámara. Como se puede observar, la ley de control resultante toma valores muy grandes en el tiempo inicial (primer segundo de la simulación), por lo cual no es recomendable implantar dicho controlador en tiempo real, para resolver este problema se propone incrementar el número de funciones de membresía.

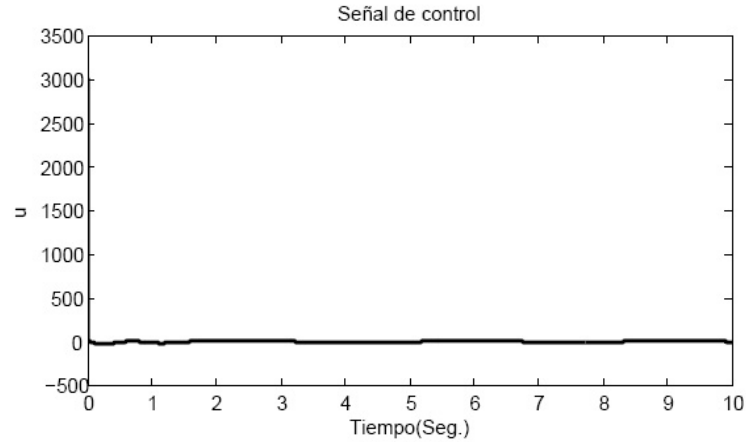


Figura 5.16: Señal de control ( $u$ ).

#### 5.4. Simulación del sistema con cámara utilizando 5 funciones de membresía

En esta simulación los esquemas del péndulo y de conmutación no sufren ningún cambio, el único esquema que es modificado es el de controlador  $PD$  difuso como se muestra en la Figura 5.17, tomando ahora sólo los valores de entrada  $\theta$ ,  $p$ ,  $k_p$  y  $k_d$  y la interfaz SIMULINK/MATLAB para llamar a las funciones del Apéndice E.4 donde se encuentran los algoritmos necesarios para generar el controlador  $PD$  difuso para estas nuevas simulaciones.

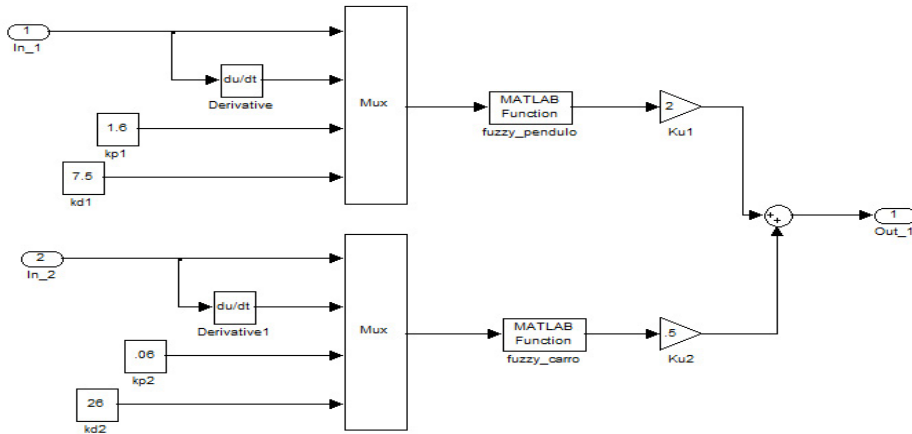


Figura 5.17: Esquema del control difuso.

En las siguientes subsecciones se presentan los resultados obtenidos de las simulaciones, utilizando cinco funciones de membresía con los parámetros de diseño presentados en el capítulo anterior.

#### 5.4.1. Simulación con una función de membresía $L$ , una triangular, una trapezoidal, una triangular y una $\Gamma$

Aquí se presentan las gráficas de respuesta tanto del péndulo como del carro, así como sus respectivas derivadas y la ley de control utilizando las funciones de membresía antes mencionadas.

##### 5.4.1.1. Gráficas de simulación

Las Figuras 5.18 y 5.19 presentan los resultados obtenidos en simulación de la posición del carro y del péndulo, respectivamente. Como se puede observar, este controlador ha mejorado el desempeño del sistema en lazo cerrado, ya que el sobre impulso es pequeño comparado con las respuestas mostradas en las Figuras 5.5 y 5.12.

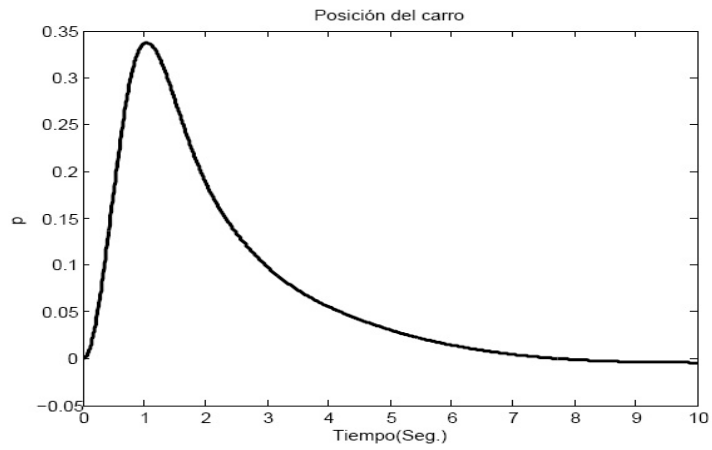


Figura 5.18: Posición del carro ( $p$ ).

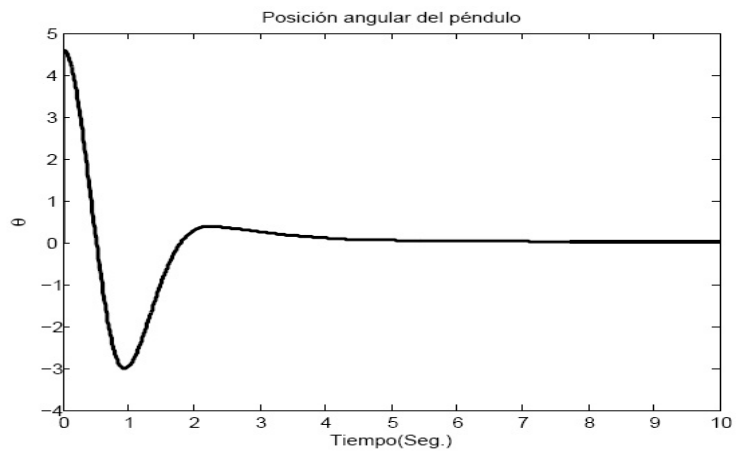


Figura 5.19: Posición angular del péndulo.

En la Figura 5.20 se presenta la velocidad del carro y en la Figura 5.21 se presenta la velocidad angular del péndulo.

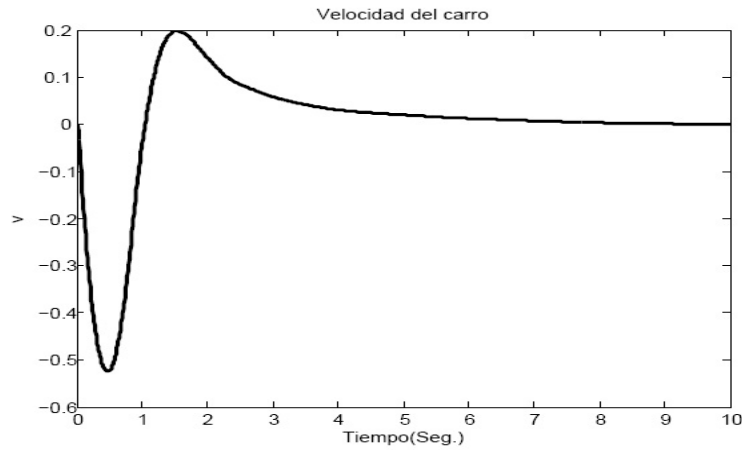


Figura 5.20: Velocidad del carro ( $v = \dot{p}$ ).

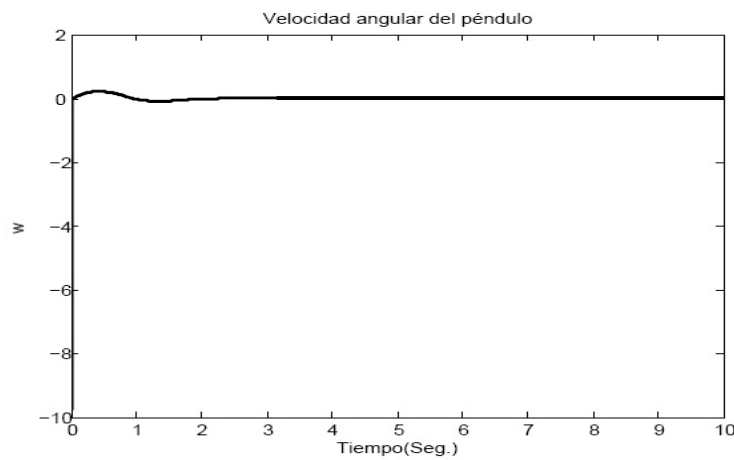


Figura 5.21: Velocidad angular del péndulo ( $w = \dot{\theta}$ ).

En la Figura 5.22 se tiene la señal de control del controlador  $PD$  difuso. Para este caso la ley de control resultante está entre  $-3$  y  $3$  volts, lo cual da la pauta para tomar la decisión de implantarse en tiempo real.

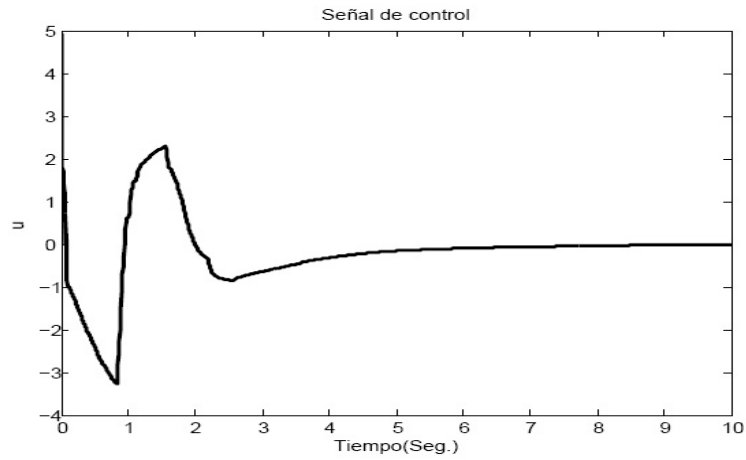


Figura 5.22: Señal de control ( $u$ ).

### 5.4.2. Simulación con una función de membresía $L$ , 3 triangulares y una $\Gamma$

En esta sección se presentan las gráficas de respuesta tanto del péndulo como del carro así como sus respectivas derivadas y la ley de control utilizando las funciones de membresía antes mencionadas.

#### 5.4.2.1. Gráficas de simulación

Las Figuras 5.23 y 5.24 presentan los resultados obtenidos en simulación de las posiciones del carro y del péndulo, respectivamente.

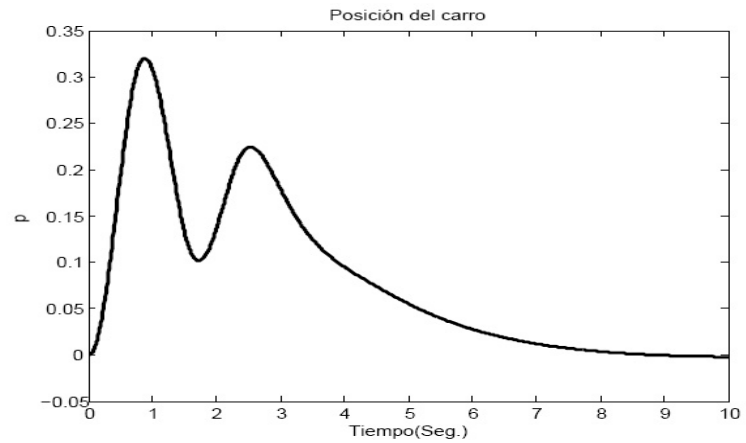


Figura 5.23: Posición del carro ( $p$ ).



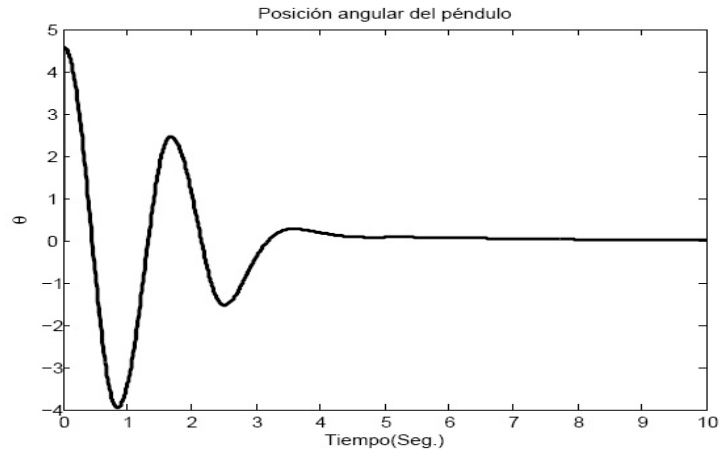


Figura 5.24: Posición angular del péndulo ( $\theta$ ).

En la Figura 5.25 se presenta la velocidades del carro y en la Figura 5.26 se presenta la velocidad angular del péndulo.

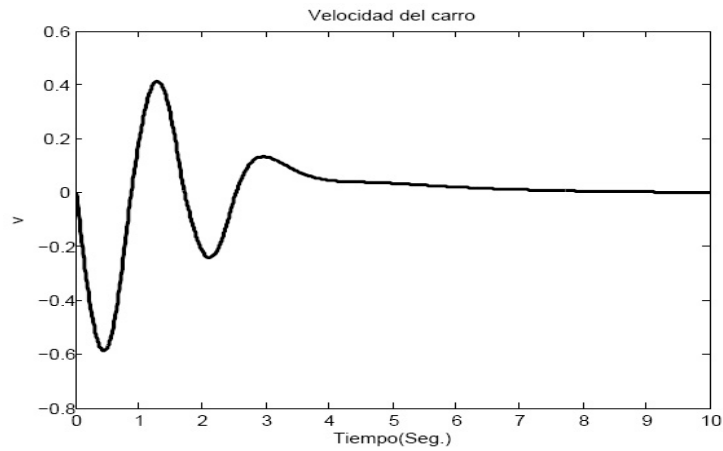


Figura 5.25: Velocidad del carro ( $v = \dot{p}$ ).

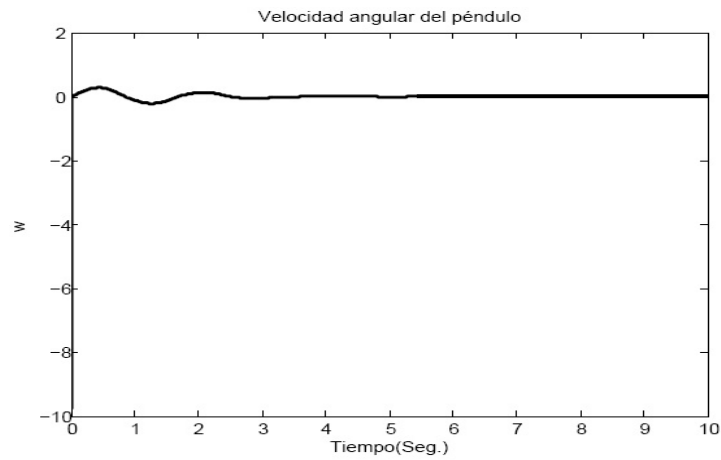


Figura 5.26: Velocidad angular del péndulo ( $w = \dot{\theta}$ ).

En la Figura 5.27 se tiene la señal de control del controlador  $PD$  difuso. Este controlador, al igual que los anteriores estabiliza al carro-péndulo invertido en lazo cerrado. También dicho controlador es un fuerte candidato a ser implantado en tiempo real.

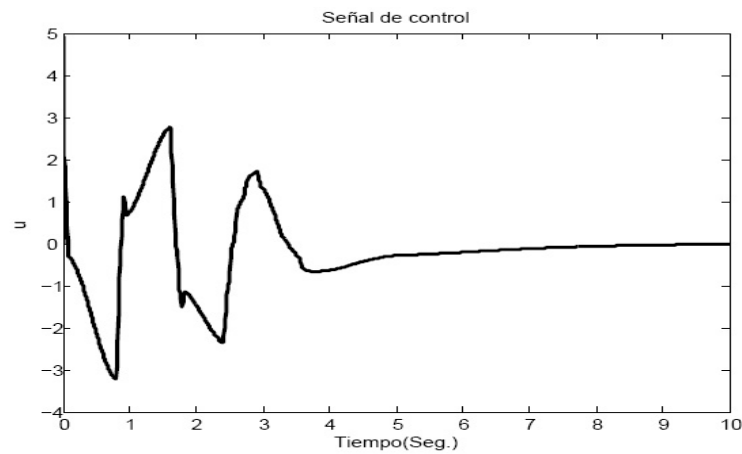


Figura 5.27: Señal de control ( $u$ ).

## 5.5. Superficies de diseño

En esta sección se presentan las superficies de diseño obtenidas de la señal de control respecto a la posición angular del péndulo ( $theta$ ) y su derivada ( $dtheta$ ), de igual manera, la señal de control respecto a la posición del carro ( $p$ ) y su derivada ( $dp$ ), para las simulaciones con dos y cinco funciones de membresía.

### Superficies de diseño para el control PD difuso con dos funciones de membresía

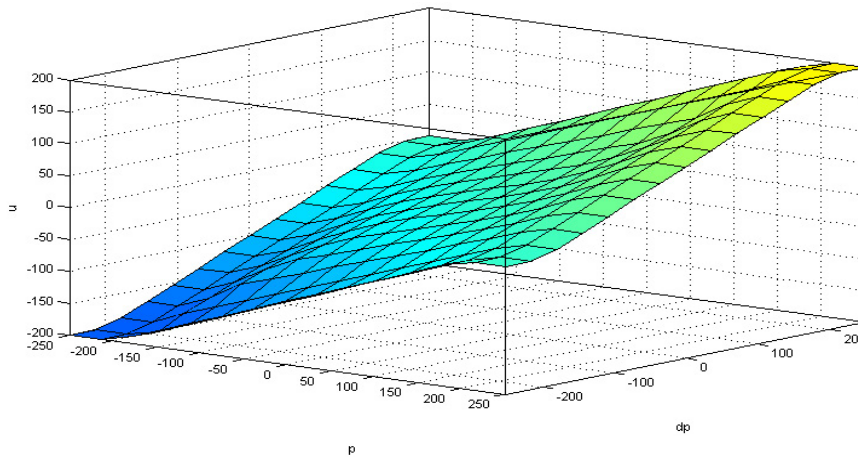


Figura 5.28: Superficie de diseño respecto al carro.

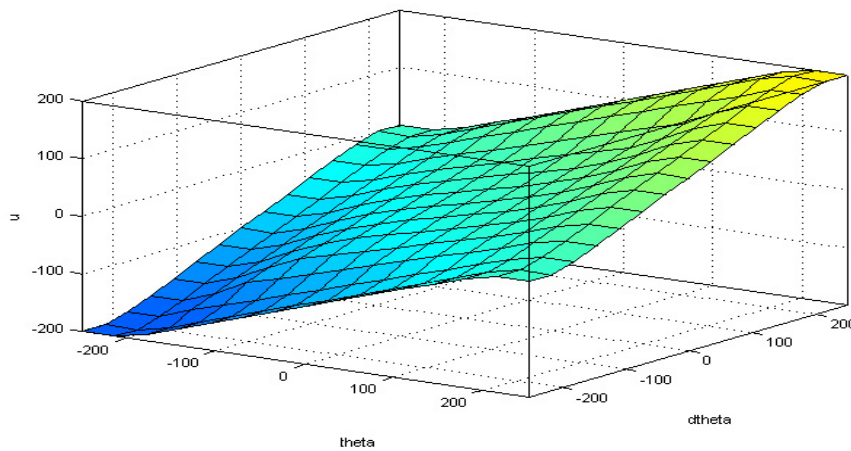


Figura 5.29: Superficie de diseño respecto al péndulo.

Superficies de diseño para el control PD difuso con una función de membresía  $L$ , una triangular, una trapezoidal, una triangular y una  $\Gamma$

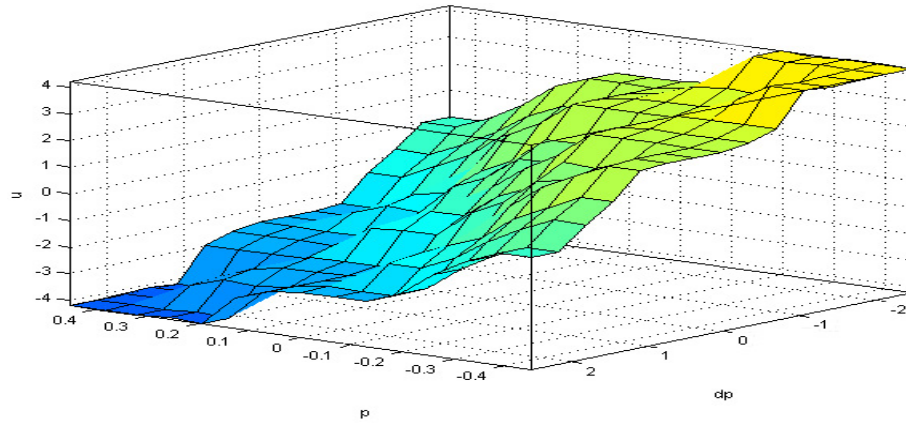


Figura 5.30: Superficie de diseño respecto al carro.

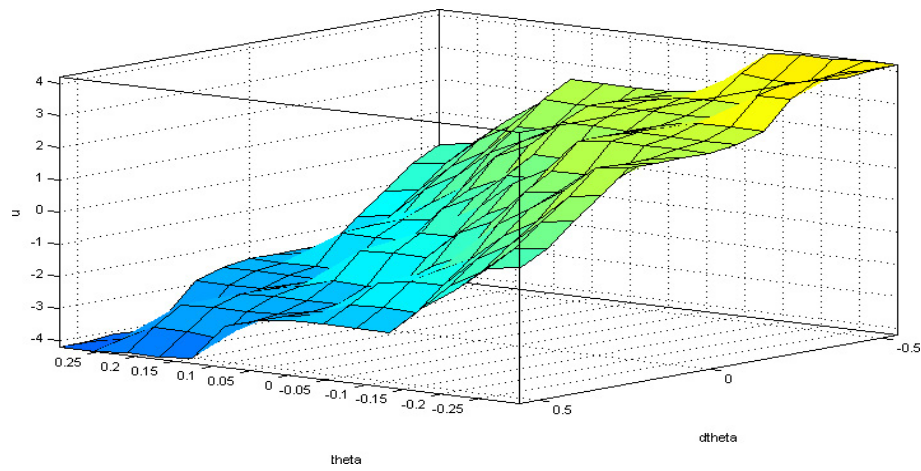


Figura 5.31: Superficie de diseño respecto al péndulo.

Superficies de diseño para el control PD difuso con una función de membresía  $L$ , 3 triangulares y una  $\Gamma$

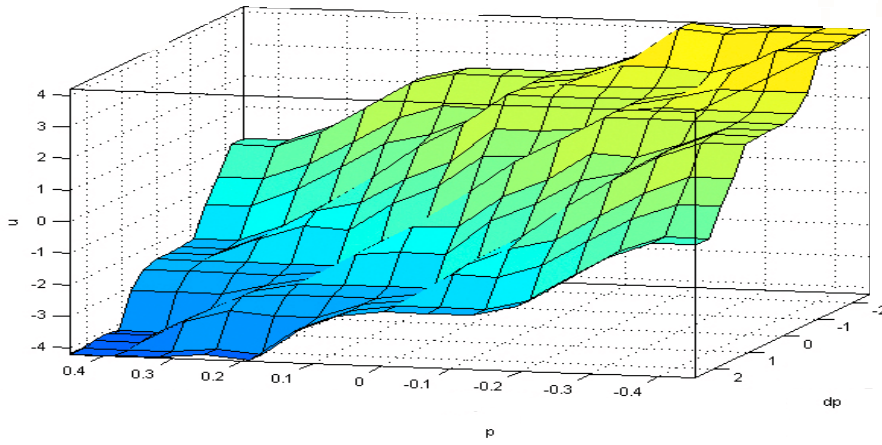


Figura 5.32: Superficie de diseño respecto al carro.

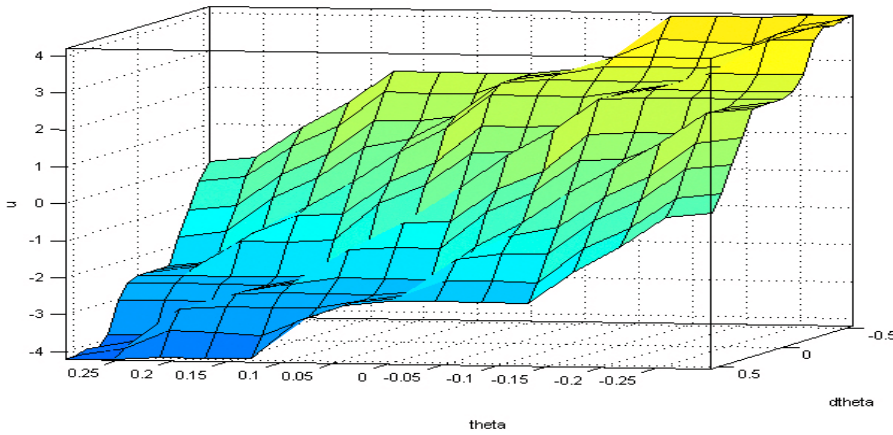


Figura 5.33: Superficie de diseño respecto al péndulo.

## 5.6. Comentarios

Es importante resaltar que el modelo matemático presentado en el Apéndice C sólo es empleado para propósitos de simulación y no para el diseño de las leyes de control presentadas en el Apéndice D.

Existen trabajos que utilizan la misma plataforma empleada en esta tesis [2, 8, 23] cuyas estrategias de control hacen uso del modelo matemático para su diseño. En [3] emplea redes neuronales para la identificación y control, la cual es una técnica que no hace uso del modelo del sistema.

También hacer notar que la sintonización del controlador se hace a prueba y error ya que no se cuenta con un método de sintonización de ganancias.

Como se puede observar en las gráficas de simulación del controlador con 5 funciones de membresía (una  $L$ , una triangular, una trapezoidal, una triangular y una  $\Gamma$ ), nos proporciona un control adecuado del carro-péndulo invertido, tomando en cuenta que a mayor número de funciones de membresía el resultado del controlador podría ser mejor, y son fuertes candidatos para la implantación en tiempo real.

# Capítulo 6

## Conclusiones y trabajos futuros

De esta tesis, se puede concluir que el desempeño del controlador difuso cumple su objetivo en simulación, manteniendo el péndulo en posición vertical, esto es, los controladores propuestos logran estabilizar el sistema en lazo cerrado, y tanto la velocidad como la posición del carro se encuentran acotadas, teniendo que a mayor número de funciones de membresía el control se vuelve más óptimo y más complejo. De lo anterior se concluye que se cumplen satisfactoriamente los objetivos planteados en la tesis tomando en cuenta las limitaciones mencionadas.

Es importante mencionar que al hacer uso de un  $PD$  clásico para el control del carro péndulo es casi imposible sintonizar las ganancias  $K_p$  y  $K_d$  del controlador, ya que el sistema es de naturaleza inestable, y por lo tanto las técnicas clásicas de sintonización no son aplicables, es aquí donde se presenta la ventaja sobresaliente entre el  $PD$  clásico y el  $PD$  difuso empleado en esta tesis, aunque es de destacar que la sintonización del  $PD$  difuso fue realizado a prueba y error, pero después de muchas pruebas fue posible sintonizarlo.

Como trabajo futuro se proponen:

1. Aplicar algún método de sintonización adaptable de las ganancias del  $PD$  difuso propuesto.
2. Hacer la adquisición de la imagen de la planta por medio de una cámara de visión que sirve como sensor, el cual toma 33 imágenes por segundo y tratarla en un procesador de señales de la familia TMS320C6711 para obtener las variables físicas: posición lineal del carro y posición angular del péndulo. La información obtenida será empleada por el controlador diseñado en esta tesis. Tanto el algoritmo de procesamiento de las imágenes como el cálculo de la ley de control serán programados en el DSP.
3. Implantación de los algoritmos en tiempo real.

# Apéndice A

## Lógica difusa

La lógica difusa es un principio de extensión de la lógica clásica convencional que fue extendida para abarcar el concepto de “parcialmente verdad” (valores entre lo “absolutamente cierto” y lo “absolutamente erróneo”). El objetivo de este capítulo es dar los fundamentos de la lógica difusa.

La organización de este apéndice es la siguiente: en la Sección A.1 se presentan los antecedentes de la lógica difusa, presentando un breve panorama histórico. En la Sección A.2 se hace un comparativo entre la lógica clásica y la lógica difusa, dando las definiciones analogas entre ambos enfoques. La Sección A.3 se enfoca a conjuntos difusos, su notación y los tipos de funciones de membresía más utilizadas en lógica difusa. En la Sección A.4 se hace referencia a las propiedades más elementales de un conjunto difuso como soporte, altura, convexidad y corte- $\alpha$ ; las operaciones básicas que se realizan en la teoría de conjuntos difusos, que son: unión, intersección, complemento y producto cartesiano, de ellas hablaremos en la Sección A.5. En la Sección A.6 se presentan los términos de variable lingüística, proposición difusa, cual es la estructura de una regla *SI-ENTONCES*, sus características y algunas implicaciones difusas. Finalmente, los comentarios se presentan en la Sección A.7.

### A.1. Antecedentes

En el siglo XVIII el filósofo y el obispo anglicano Irlandés, George Berkeley y David Hume describieron que el núcleo de un concepto atrae conceptos similares. Hume en particular, creía en la lógica del sentido común, es decir el razonamiento basado en el conocimiento que la gente adquiere en forma ordinaria mediante vivencias en el mundo. En Alemania, Immanuel Kant, consideraba que sólo los matemáticos podían proveer definiciones claras, y muchos principios contradictorios no tenían solución. Por ejemplo, la materia podía ser dividida infinitamente y al mismo tiempo no podía ser dividida infinitamente. Particularmente, la escuela americana de filosofía, llamada



pragmatismo fundada a principios de siglo por Charles Sanders Peirce, cuyas ideas se fundamentaron en estos conceptos, y fue el primero en considerar “vaguedades”, más que falso o verdadero, como forma de acercamiento al mundo y a la forma en que la gente funciona.

La idea de que la lógica produce contradicciones fue popularizada por el filósofo y matemático británico Bertrand Russell, a principios del siglo XX. Estudió las vaguedades del lenguaje, concluyendo con precisión que la vaguedad es un grado. El filósofo austriaco Ludwig Wittgenstein estudió las formas en las que una palabra puede ser empleada para muchas cosas que tienen algo en común. La primera lógica de vaguedades fue desarrollada en 1920 por el filósofo Jan Lukasiewicz, visualizó los conjuntos con un posible grado de pertenencia con valores de 0 y 1, entre los años de 1917 y 1920 introdujo un tercer valor, el de medio verdadero ó medio falso según se vea, siendo esta la primer lógica de cálculo no clásica, asignó el valor de 0.5 entre 0 y 1 al término posible y construyó las matemáticas de la lógica trivaluada, posteriormente manejo la lógica con 4, 5, 6,... valores de verdad, concluyendo que no hay impedimento formal para la generación de una lógica infinito-valorada.

La lógica difusa (combina los conceptos de la lógica y la teoría de conjuntos de Lukasiewicz mediante la definición de grados de pertenencia) fue investigada por primera vez, a mediados de los años sesenta en la Universidad de Berkeley, California por el ingeniero Lofty A. Zadeh [40], cuando se dió cuenta de lo que él llamó principio de incompatibilidad: “conforme a la complejidad de un sistema aumenta, nuestra capacidad para ser precisos y construir instrucciones sobre su comportamiento disminuye hasta el umbral más allá del cuál, la precisión y el significado son características excluyentes”. Introdujo el concepto de conjunto difuso (*fuzzy set*) bajo el cual reside la idea de que los elementos sobre los que se construye el pensamiento humano no son comunes sino etiquetas lingüísticas. La lógica difusa permite representar el conocimiento común, que es mayoritariamente del tipo lingüístico, en un lenguaje matemático a través de la teoría de conjuntos difusos y funciones características asociadas a ellos. Permite trabajar a la vez con datos numéricos y términos lingüísticos.

Una aplicación trascendente de la lógica difusa desde el punto de vista de la ingeniería de control, es la desarrollada en 1974 en el Reino Unido por Assilian y Mamdani [20], quienes desarrollaron el primer controlador difuso diseñado para una máquina de vapor, pero la primera implantación real de un controlador de este tipo fue realizada en 1980 por F. L. Smidth y otros, en una planta cementera en Dinamarca [10].

En 1983 Fuji Elec. & TIT aplica la lógica difusa para el control de inyección química en plantas depuradoras de agua [35] por primera vez en Japón y en 1987 Hitachi pone en marcha un controlador difuso para el control del tren-metro de Sendai, Japón [35] y la empresa Omron desarrolla los primeros controladores difusos comerciales.

Una vez dados los antecedentes sobre lógica difusa ahora se procede hacer un comparativo entre la lógica clásica y la lógica difusa, el cual se desarrolla en la siguiente sección.

## A.2. Lógica clásica vs lógica difusa

**Definición 1 (Lógica)** *Lógica es la ciencia que estudia las leyes y modos de las formas de raciocinio.*

La lógica clásica (binaria, trivalente, etc.) tiene bien definidos los valores que los limitan. Como en la lógica binaria o bolenana, existen dos valores como todo o nada, falso verdadero, 1 ó 0, si o no.

A diferencia de la lógica clásica, la lógica difusa no tiene bien definidos sus límites, de esta manera se puede definir que “la lógica difusa estudia las leyes y modos de las formas de raciocinio aproximado”.

La lógica difusa es mejor para situaciones del mundo real, situaciones complejas y dinámicas, que son más fácilmente caracterizadas por palabras que por expresiones matemáticas.

### A.2.1. Conjuntos clásicos

Sea  $U$  el universo de discurso, o conjunto universo, el cual contiene todos los posibles elementos de interés de cada contexto particular o aplicación. Un conjunto clásico  $A$  puede ser definido de las siguientes formas:

- 1er. **Método de lista.** Aquí el conjunto  $A$  es definido enlistando todos sus elementos y es usado sólo para conjuntos finitos y por tanto es de uso limitado. Por ejemplo sea  $U$  el conjunto de los números enteros y  $A = \{2, 4, 5, 8, 10\}$ ; otro ejemplo es cuando se considera a  $U = \text{colores}$  y  $A = \{\text{rojo}, \text{amarillo}, \text{verde}\}$ .
- 2do. **Método de la regla.** Aquí un conjunto  $A$  esta representado como:

$$A = \{x \in U \mid x \text{ satisface alguna condición}\}, \quad (\text{A.1})$$

este método es más general y puede ser empleado tanto para conjuntos finitos, e infinitos, por ejemplo, sea  $U = R^+$  y  $A = \{x \in U \mid x \geq 0\}$ .

3ro. **Método de membresía.** Introduce una función de membresía cero-uno (también llamada función característica o función indicador). Por ejemplo la función de membresía para un conjunto  $A$ , denotada por  $\mu_A(x)$ , tal que

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A; \\ 0, & \text{si } x \notin A; \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

En este caso, el conjunto  $A$  es matemáticamente equivalente a su función de membresía  $\mu_A(x)$  en el sentido que conociendo  $\mu_A(x)$  es lo mismo que conocer el conjunto  $A$ .

### A.3. Conjuntos difusos

**Definición 2 (Conjunto Difuso)** *El conjunto difuso es aquel en el cual su **función de membresía** puede tomar cualquier valor en el intervalo  $[0, 1]$ , esto es, que tiene un grado de pertenencia continua en el intervalo  $[0, 1]$ . La característica más importante de conjuntos difusos es que pueden expresar en forma numérica la cantidad de imprecisión y ambigüedad del pensamiento humano y toma de decisiones.*

Si  $U$  es el universo de discurso (rango definido de objetos) y  $x$  un objeto de este universo, se tiene que el **conjunto difuso**  $A$  en  $U$  se define como el conjunto de pares ordenados, donde el primer elemento de este par es  $x$  y el segundo elemento es la función de membresía o pertenencia, es decir:

$$A = \{ (x, \mu_A(x)) \mid x \in U \}, \quad (\text{A.3})$$

donde  $\mu_A(x)$  es llamada función de membresía la cual asigna el grado de pertenencia del objeto en el intervalo  $[0, 1]$ , es decir

$$\mu_A(x) : U \rightarrow [0, 1]. \quad (\text{A.4})$$

A continuación se dan una serie de ejemplos de conjuntos difusos:

**Ejemplo 1** *Sea  $U$  el conjunto de automóviles costosos y sea  $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in U\}$ , donde*

$$A = \{(Ferrari, 1), (RR, 1), (Mercedes, 0.8), (Cadillac, 0.6)\}.$$

**Ejemplo 2** Sea  $U$  el conjunto de números reales cerca al 6 y sea

$$A = \{(3, 0.1), (4, 0.3), (5, 0.6), (6, 1), (7, 0.6), (8, 0.3), (9, 0.1)\},$$

donde para este caso la función de membresía tiene una representación analítica de la forma

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + (x - 6)^2}.$$

### A.3.1. Notación

Zadeh creador de la lógica difusa propone una notación compacta

$$(x, \mu_A(x)) = \mu_A(x)/x,$$

hace una clasificación en función de  $U$ :

A) Cuando  $U$  es continuo. El conjunto  $A$  es comúnmente escrito como

$$A = \int_U \mu_A(x)/x. \quad (\text{A.5})$$

B) Cuando  $U$  es discreto. El conjunto es escrito como

$$A = \sum_U \mu_A(x)/x. \quad (\text{A.6})$$

El signo de integración (sumatoria) no representa integración (adición aritmética), esta denota la colección de todos los puntos  $x \in U$  con  $\mu_A(x)$  la función de membresía asociada.

### Ejemplo 3 (Discreto, ejemplo clásico Zadeh 1965)

Sea  $U$  los enteros del 1 al 10, esto es  $U = \{1, 2, \dots, 10\}$  el conjunto difuso  $A$  puede ser definido como:

$$\begin{aligned} A &= 0/1 + 0/2 + 0.5/3 + 0.8/4 + 1/5 + 1/6 + 0.8/7 + 0.5/8 + 0/9 + 0/10, \\ A &= 0.5/3 + 0.8/4 + 1/5 + 1/6 + 0.8/7 + 0.5/8, \end{aligned}$$

donde 5 y 6 pertenecen a un conjunto difuso  $A$  con grado 1; 4 y 7 con grado 0.8; 3 y 8 con grado 0.5 y 1, 2, 10 con grado cero, como se muestra en la Figura A.1.

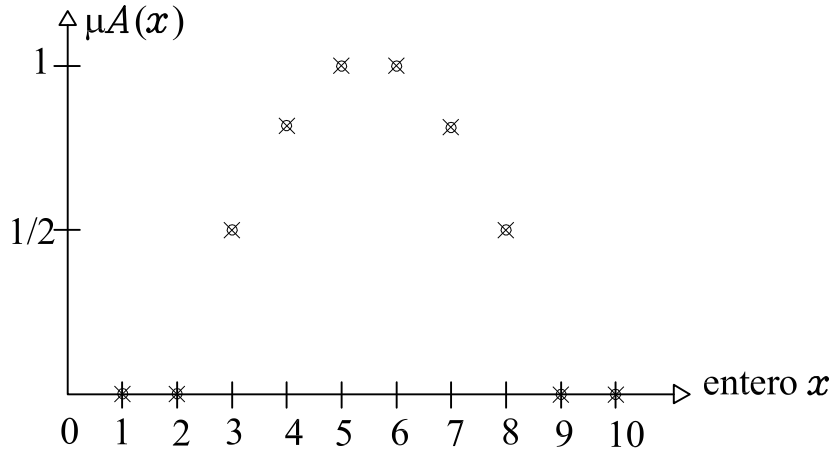


Figura A.1: Función de membresía para el conjunto A.

#### Ejemplo 4 (Continuo, ejemplo clásico Zadeh 1965)

Sea  $U$  el intervalo  $[0, 100]$ , representa la edad del ser humano. Se pueden definir conjuntos difusos “joven”, y “viejo”, como:

$$\mu_{joven}(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq x \leq 25 \\ \frac{1}{1 + \left(\frac{x-25}{5}\right)^2} & ; 25 \leq x \leq 50, \end{cases}$$

$$\mu_{viejo}(x) = \left(1 + \left(\frac{x-50}{5}\right)^2\right)^{-1} ; 50 \leq x \leq 100,$$

como se observa en la Figura A.2.

Usando la notación integral

$$Joven = \int_0^{25} 1/x + \int_{25}^{50} \left(1 + \left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right)^{-1} /x,$$

$$Viejo = \int_{50}^{100} \left(1 + \left(\frac{x-50}{5}\right)^2\right)^{-1} /x.$$

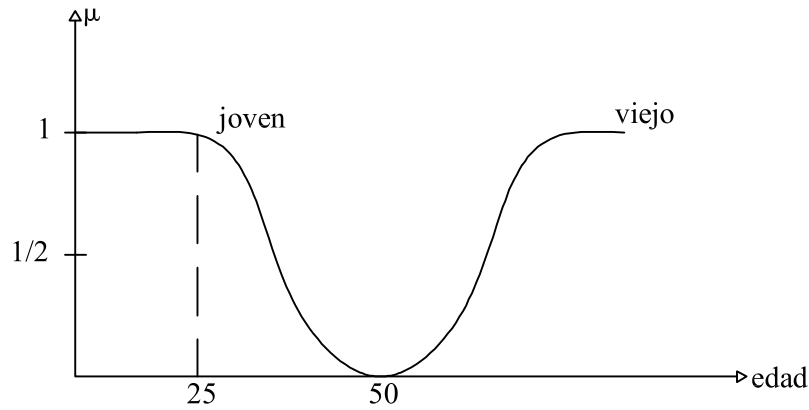


Figura A.2: Curva joven-viejo.

### A.3.2. Funciones de membresía

Es una relación que vincula cada elemento a un conjunto. Esto es, qué tanto pertenece un elemento a un conjunto. Existen numerosos tipos de funciones de membresía, algunas de las más comúnmente usadas en la práctica son la *singleton*,  $\Gamma$ , la  $L$ , la *triangular* ( $\Delta$ ), y la trapezoidal.

#### Función singleton

Esto es, para cada valor de entrada  $x$  se define un conjunto difuso  $A'$  que lo soporta, con función de membresía

$$\mu_{A'}(x') = \begin{cases} 1 & ; x' = x, \\ 0 & ; \text{para todos los otros } x' \in U \text{ en los que } x' \neq x. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Como se muestra en la Figura A.3a.

#### Función $\Gamma$

Está especificada por dos parámetros  $\{a, b\}$  de la siguiente manera:

$$\Gamma(x : a, b) = \begin{cases} 0 & ; x < a \\ (x - a)/(b - a) & ; a \leq x \leq b \\ 1 & ; x > b \end{cases} . \quad (\text{A.8})$$

Como se muestra en la Figura A.3b.

**Función  $L$** 

Está especificada por dos parámetros  $\{a, b\}$  de la siguiente manera:

$$L(x : a, b) = \begin{cases} 1 & ; x < a \\ (b - x)/(b - a) & ; a \leq x \leq b \\ 0 & ; x > b \end{cases} . \quad (\text{A.9})$$

Como se muestra en la Figura A.3c.

**Función triangular ( $\Lambda$ )**

Está especificada por tres parámetros  $\{a, b, c\}$  de la siguiente manera:

$$\Lambda(x : a, b, c) = \begin{cases} 0 & ; x < a \\ (x - a)/(b - a) & ; a \leq x \leq b \\ (c - x)/(c - b) & ; b \leq x \leq c \\ 0 & ; x > c \end{cases} . \quad (\text{A.10})$$

Como se muestra en la Figura A.4a.

**Función trapezoidal**

Está especificada por cuatro parámetros  $\{a, b, c, d\}$  de la siguiente manera:

$$\text{Trapezoidal}(x : a, b, c, d) = \begin{cases} 0 & ; x < a \\ (x - a)/(b - a) & ; a \leq x \leq b \\ 1 & ; b \leq x \leq c \\ (d - x)/(d - c) & ; c \leq x \leq d \\ 0 & ; x > d \end{cases} . \quad (\text{A.11})$$

Como se muestra en la Figura A.4b.

**Función Gaussiana**

Está especificada por dos parámetros  $\{m, \sigma\}$  de la siguiente manera:

$$\text{gaussiana}(x : m, \sigma) = \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{\sigma^2}\right) . \quad (\text{A.12})$$

Como se muestra en la Figura A.4c.

### Función campana

Está especificada por tres parámetros  $\{a, b, c\}$  de la siguiente manera:

$$\text{campana}(x : a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x - c}{a} \right|^{2b}}. \quad (\text{A.13})$$

Como se muestra en la Figura A.5a.

### Función S

Está especificada por dos parámetros  $a$  y  $b$ . Los valores de pertenencia son 0 para los puntos debajo de  $a$ , y uno para los puntos arriba de  $b$ , y 0.5 para el punto medio entre  $a$  y  $b$ .

$$S(x : a, b) = \begin{cases} 0 & ; x < a \\ 2 \left( \frac{x - a}{b - a} \right)^2 & ; a \leq x \leq \frac{a + b}{2} \\ 1 - 2 \left( \frac{x - b}{b - a} \right)^2 & ; \frac{a + b}{2} \leq x \leq b \\ 1 & ; x \geq b \end{cases}. \quad (\text{A.14})$$

Como se muestra en la Figura A.5b.

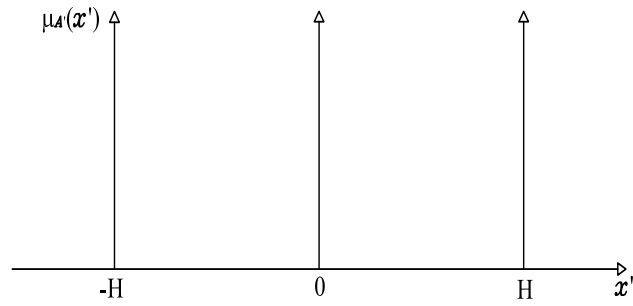
### Función $\Pi$

Está especificada por dos parámetros  $a$  y  $b$ . La función tiene un valor de pertenencia de 1 en el punto  $a$ , y de 0.5 en  $a - b$  y  $a + b$ , respectivamente. La diferencia con la función **S**, es que la función  $\Pi$  disminuye hacia cero asintóticamente conforme nos movemos lejos del punto  $a$ .

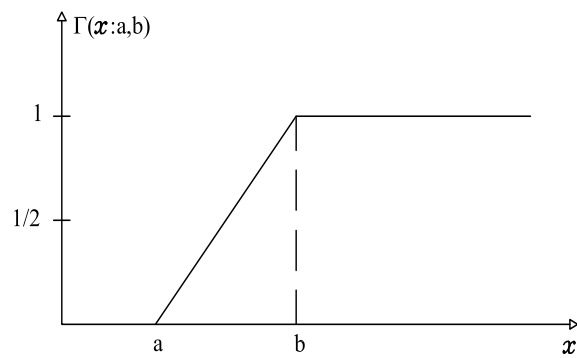
$$\Pi(x : a, b) = \frac{1}{1 + \left( \frac{x - a}{b} \right)^2}. \quad (\text{A.15})$$

Como se muestra en la Figura A.5c.

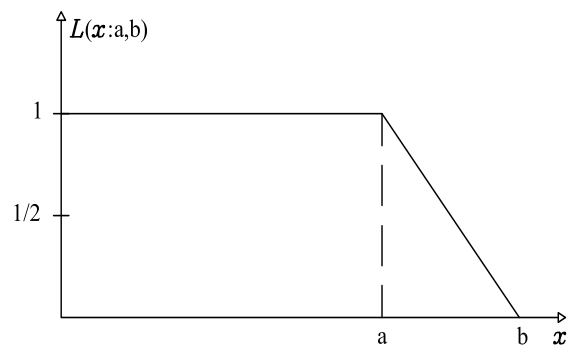




(a)

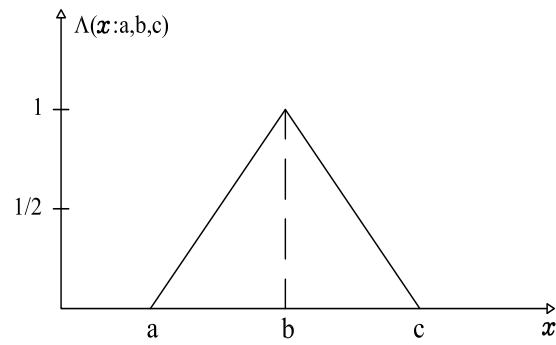


(b)

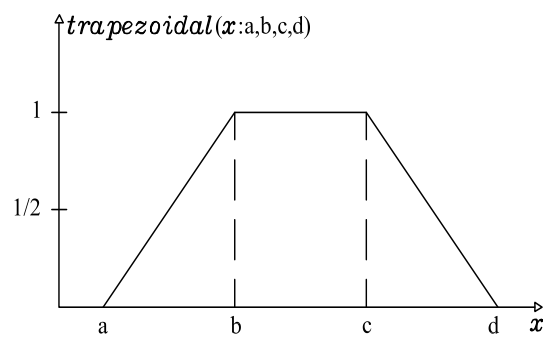


(c)

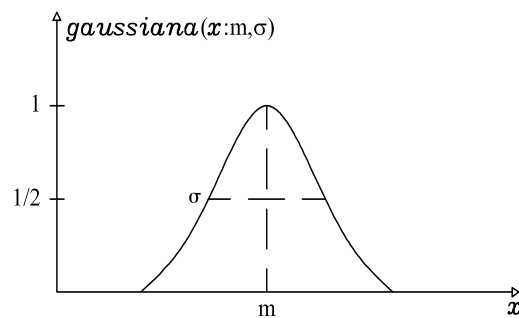
Figura A.3: Funciones de membresía: (a) Función Singleton; (b) Función  $\Gamma$ ; (c) Función  $L$ .



(a)



(b)



(c)

Figura A.4: Funciones de membresía: (a) Función triangular ( $\Lambda$ ); (b) Función trapezoidal; (c) Función gaussiana.

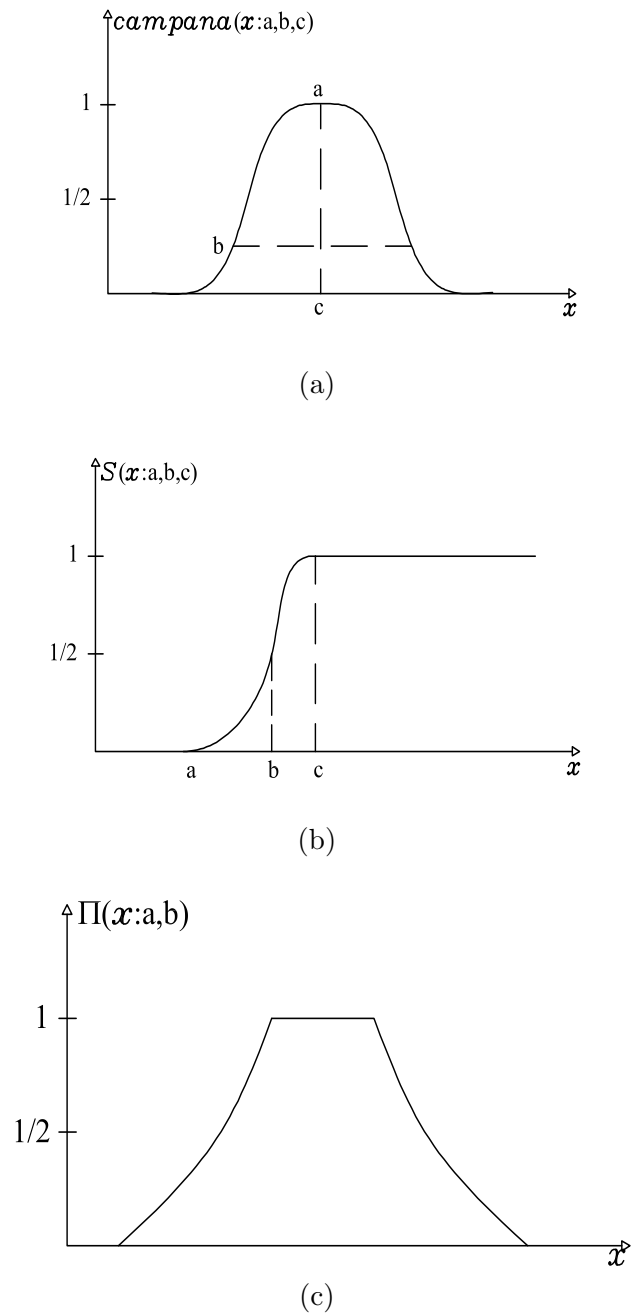


Figura A.5: Funciones de membresía: (a) Función campana; (b) Función S; (c) Función  $\Pi$ .

## A.4. Propiedades de los conjuntos difusos

A continuación se presentan las propiedades básicas que se tienen en los conjuntos difusos.

**Soporte.** Es el conjunto de todos los puntos cuyo grado de pertenencia en  $A$  es mayor a cero

$$S(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}. \quad (\text{A.16})$$

**Base.** Es el conjunto de todos los puntos cuyo grado de pertenencia en  $A$  es igual a uno

$$B(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}. \quad (\text{A.17})$$

**Corte- $\alpha$ .** Es el conjunto de todos los puntos cuyo grado de pertenencia en  $A$  es mayor a  $\alpha$

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}. \quad (\text{A.18})$$

**Altura.** Es el valor máximo de la función de membresía. Cuando el grado de pertenencia es uno el conjunto es normal, si esta por debajo de uno es subnormal

$$h(A) = \text{máx}\{\mu_A(x)\}. \quad (\text{A.19})$$

**Convexidad** Un conjunto es convexo sí y solo si para cualquier  $x_1, x_2 \in U$  y cualquier  $\lambda \in [0, 1]$

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \text{mín}\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}. \quad (\text{A.20})$$

Es decir, un conjunto es convexo si no tiene “valle”.

## A.5. Operaciones con conjuntos difusos

Se puede construir conjuntos a partir de dos o más conjuntos dados, aplicándoles las operaciones básicas que son: unión, intersección y complemento.

## Unión

La unión de dos conjuntos  $A$  y  $B$  los cuales son definidos en en el universo de discurso  $U$ , es simbolizada por  $A \cup B$  cuya función de membresía es definida por cualquiera de los siguientes métodos:

**1. Máximo:** Aquí, se define el máximo de los valores de membresía

$$\mu_{A \cup B}(u) = \text{máx}\{\mu_A(u), \mu_B(u) : u \in U\}, \quad (\text{A.21})$$

**2. Suma algebraica:** Aquí, se encuentra la suma algebraica de los valores de membresía

$$\mu_{A \cup B}(u) = \{\mu_A(u) + \mu_B(u) - \mu_A(u)\mu_B(u) : u \in U\}. \quad (\text{A.22})$$

## Intersección

La intersección de dos conjuntos  $A$  y  $B$ , los cuales son definidos en en el universo de discurso  $U$ , es simbolizado por  $A \cap B$  cuya función de membresía es definida por cualquiera de los siguientes metodos:

**1. Mínimo:** Aquí, se define el mínimo de los valores de membresía

$$\mu_{A \cap B}(u) = \text{mín}\{\mu_A(u), \mu_B(u) : u \in U\}, \quad (\text{A.23})$$

**2. Producto algebraico:** Aquí, se encuentra el producto de los valores de membresía

$$\mu_{A \cap B}(u) = \{\mu_A(u)\mu_B(u) : u \in U\}. \quad (\text{A.24})$$

## Complemento

El complemento (*not*) de un conjunto difuso  $A$  con función de membresía  $\mu_A(u)$  esta dado por  $1 - \mu_A(u)$ .

## Producto cartesiano binario

Siendo  $A$  y  $B$  dos conjuntos difusos en los universos de discurso  $U$  y  $V$ , respectivamente. Su producto cartesiano consta de todas las parejas  $(a, b)$  donde  $a \in A$  y  $b \in B$  y es denotado como  $A \times B$ , que es un conjunto en el espacio del producto  $U \times V$ , con las funciones de membresía:

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \text{mín}(\mu_A(x), \mu_B(y)). \quad (\text{A.25})$$

## A.6. Razonamiento difuso

En la vida diaria, son usadas palabras para describir variables.

Por ejemplo:

- Hoy esta caliente o equivalente.
- La temperatura es alta.

La variable *la temperatura* toma la palabra *alta* como su valor, pero dicha variable también puede tomar un valor numérico como  $25^{\circ}C$ ,  $19^{\circ}C$ , etc. Cuando una variable toma números como su valor, se tiene un marco matemático bien establecido para formular esto. Pero cuando una variable toma *palabras* como sus valores, en este caso no se tiene un marco formal para formularlo en teoría matemática clásica, esto es a lo que llamamos razonamiento difuso. Para tener un marco formal se introduce el concepto variable lingüística.

### A.6.1. Variables lingüísticas y proposiciones difusas

**Definición 3 (Variable lingüística)** *Si una variable toma “palabras” en lenguaje natural como sus valores, esta es llamada una variable lingüística, donde las palabras son caracterizadas por conjuntos difusos definidos en el universo de discurso en el cual la variable esta definida.*

#### Ejemplo 5 (Variables lingüísticas)

- Color: {rojo, amarillo, verde}.
- Temperatura: {frío, templado, caluroso}.
- Estatura: {baja, mediana, alta}.
- Error: {negativo grande, mediano, cero, positivo mediano, positivo grande}.
- Derivada del error: {negativa, cero, positiva}.

En términos más formales, una variable lingüística se define por una tupla  $(A, T(A), U, G, M)$  como se muestra en la Figura A.6, donde:

- A: Nombre de la variable.
- T(A): Conjunto de términos que nombran los valores  $x$  que puede tomar la variable A, cuyos valores son conjuntos difusos en U.

- U: Universo de discurso.
- G: Regla sintáctica para la generación de los nombres de los valores de  $x$ .
- M: Regla semántica para asociar un significado a cada valor.

**Ejemplo 6** “Temperatura” puede considerarse como una variable lingüística, de modo que  $A = \text{Temperatura}$ , es el conjunto de todos los términos que pueden hacer referencia a la temperatura, como “baja,” “media,” “alta,” etc. El universo de discurso  $U$  de esta variables va, en general, desde el cero hasta el infinito, pero en aplicaciones reales se suele restringir al rango de temperaturas que pueden presentarse en ella (por ejemplo, temperaturas entre 0 y 40°C como se observa en la Figura A.6).

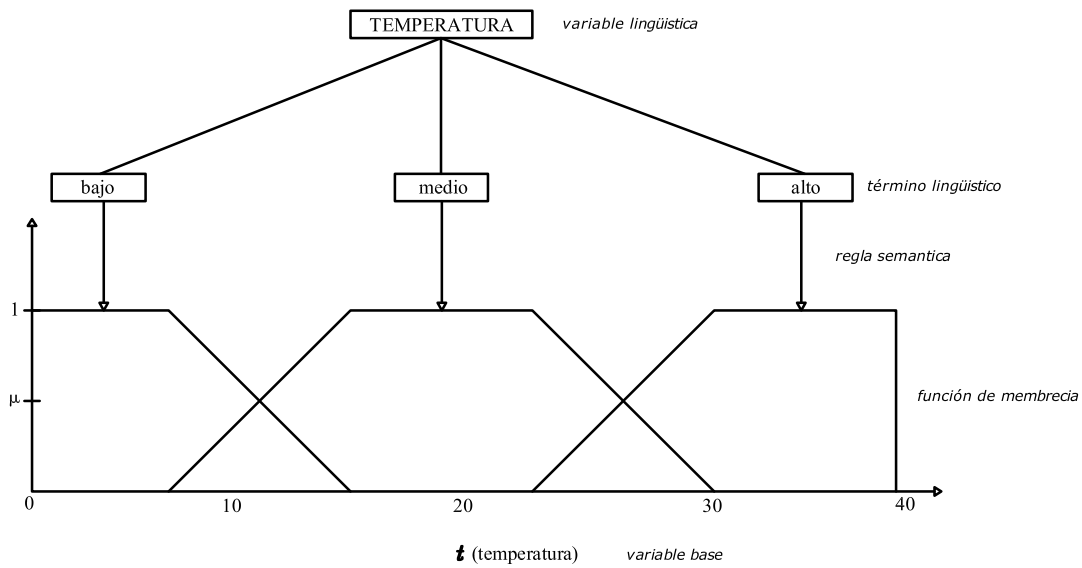


Figura A.6: Elementos de la variable lingüística.

**Ejemplo 7** Sea una variable que representa la velocidad de un automóvil que toma valores en el intervalo  $[0, V_{máx}]$ , donde  $V_{máx}$  es la velocidad máxima del automóvil. Se definen tres conjuntos difusos “lento,” “media,” y “rapida” en  $[0, V_{máx}]$ , como se muestra en la Figura A.7.

Notar que  $x$  también puede tomar números en el intervalo  $[0, V_{máx}]$  como sus valores, por ejemplo  $X = 50 \text{ Km/hr}$ ,  $35 \text{ Km/hr}$ , etc.

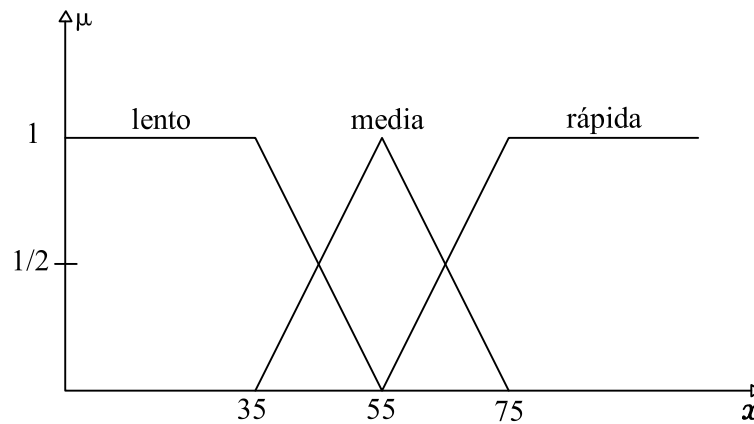


Figura A.7: La velocidad de un automóvil como una variable lingüística que toma conjuntos difusos “lento”, “media” y “rápida”, como sus valores y decir que “ $x$  es lento”, “ $x$  es media” y “ $x$  es rápida”.

### A.6.2. Reglas difusas *SI-ENTONCES*

Las reglas difusas combinan uno o más conjuntos difusos de entrada, llamados antecedentes o premisas, y les asocian un conjunto difuso de salida, llamado consecuente o consecuencia. Una regla difusa típica tiene la forma:

$$\underbrace{SI \ x \text{ es } A}_{\text{antecedente}} \ \underbrace{ENTONCES \ y \text{ es } B}_{\text{consecuente}} \ \equiv \ SI \ A \ ENTONCES \ B.$$

Los conjuntos difusos de la premisa se asocian mediante conjuntivas lógicas como *intersección*, *unión*, etc., cuando se utiliza el conjuntivo lógico *intersección* se dice que es una regla con antecedentes múltiples conjuntivos, y cuando el conjuntivo lógico *unión* es una regla con antecedentes múltiples disyuntivos:

- Antecedentes múltiples conjuntivos

$$SI \ x_1 \text{ es } A_1 \ \text{y} \ x_2 \text{ es } A_2 \ ENTONCES \ y \text{ es } B$$

que puede ser escrito como  $SI \ \mathbf{A} \ ENTONCES \ \mathbf{B}$ , con  $\mathbf{A} = A_1 \cap A_2 \dots$

- Antecedentes múltiples disyuntivos

$$SI \ x_1 \text{ es } A_1 \ \text{o} \ x_2 \text{ es } A_2 \ ENTONCES \ y \text{ es } B$$

que puede ser escrito como  $SI \ \mathbf{A} \ ENTONCES \ \mathbf{B}$ , con  $\mathbf{A} = A_1 \cup A_2 \dots$

Una regla difusa puede ser descompuesta, utilizando una operación de unión para conectar sub-reglas. Entonces se tiene:



- Un conjunto de reglas conjuntivas (unión de las conclusiones por un mínimo).
- Un conjunto de reglas disyuntivas (unión de las conclusiones por un máximo).

Las reglas difusas expresan el conocimiento que existe sobre la relación entre antecedentes y consecuentes. Para expresar este conocimiento normalmente se requiere de varias reglas, que se agrupan formando lo que se conoce como base de reglas.

## **A.7. Comentarios**

En este apéndice se presentó una comparación entre la lógica clásica y la lógica difusa, se dan a conocer los conceptos básicos generales de la teoría de lógica difusa los cuales son necesarios para la comprensión de las bases y desarrollo de esta tesis.

# Apéndice B

## Controladores *PID*

En este apéndice se profundiza un poco más en el funcionamiento y características básicas de los controladores *P*, *I* y *D*, así como sus posibles combinaciones, presentando sus ecuaciones características, tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto.

La organización de este apéndice es la siguiente: en la Sección B.1 se da una introducción a los controladores del tipo *PID*. En la Sección B.2 se explica la acción proporcional (*P*). En la Sección B.3 se explica la acción integral (*I*). En la Sección B.4 se explica la acción derivativa (*D*). En la Sección B.5 se presenta la combinación proporcional-integral (*PI*). En la Sección B.6 se tiene la acción proporcional-derivativo (*PD*), mientras que en la Sección B.7 se presenta el controlador proporcional-integral-derivativo (*PID*), por último se presentan los comentarios en la Sección B.8.

### B.1. Introducción

Para el correcto funcionamiento de un controlador *PID* que regule un proceso o sistema se necesita, al menos un **sensor**, que determine el estado del sistema (termómetro, caudalímetro, etc), un **actuador**, que modifique al sistema de manera controlada (resistencia eléctrica, motor, válvula, bomba, etc), y un **controlador**, que genere la señal que gobierna al actuador. El sensor proporciona una señal analógica al controlador, la cual representa el punto actual en el que se encuentra el proceso o sistema. La señal puede representar ese valor en tensión eléctrica, intensidad eléctrica o frecuencia. En este último caso la señal es de corriente alterna, a diferencia de los dos anteriores, que son con corriente continua.

El controlador lee una señal externa que representa el valor que se desea alcanzar. Esta señal recibe el nombre de punto de consigna, la cual es de la misma naturaleza y tiene el mismo rango de valores que la señal que proporciona el sensor.

Para hacer posible esta compatibilidad y que, a su vez, la señal pueda ser entendida por un humano, habrá que establecer algún tipo de interfaz.

El controlador resta la señal de punto actual a la señal de punto de consigna, obteniendo así la señal de error, que determina en cada instante la diferencia que hay entre el valor deseado y el valor medido. La señal de error es utilizada por cada una de las 3 componentes de un controlador *PID* propiamente dicho para generar las 3 señales que, sumadas, componen la señal que el controlador va a utilizar para gobernar al actuador. La señal resultante de la suma de estas tres señales, que posteriormente se explicará, se llama variable manipulada y no se aplica directamente sobre el actuador, si no que debe ser transformada para ser compatible con el actuador que se use.

Las tres componentes de un controlador *PID* son: la acción *Proporcional*, acción *Integral* y acción *Derivativa*. El peso de la influencia que cada una de estas partes tiene en la suma final, viene dado por la constante proporcional, el tiempo integral y el tiempo derivativo, respectivamente [26].

## B.2. Proporcional (P)

En esta acción de control la relación entre la salida del controlador  $u(t)$  y la señal de error  $e(t)$  es:

$$u(t) = k_p e(t).$$

En forma discreta se tiene:

$$u(z) = k_p e(z),$$

donde  $k_p$  es la ganancia proporcional.

El controlador proporcional es en esencia, un amplificador de ganancia ajustable no importando el mecanismo real ni la forma de la potencia de operación.

Esta acción de control toma un papel importante cuando la señal de error es grande, pero su acción se ve mermada con la disminución de dicha señal. Este efecto tiene como consecuencia la aparición de un error permanente, que hace que la parte proporcional nunca llegue a solucionar por completo el error del sistema.

La parte proporcional no considera el tiempo, por tanto la mejor manera de solucionar el error permanente y hacer que el sistema contenga alguna componente que tenga en cuenta la variación con respecto al tiempo es incluyendo y configurando las acciones integral y/o derivativa.

### B.3. Integral (I)

La acción de control integral hace que el valor de la salida del controlador  $u(t)$  se cambie a una razón proporcional a la integral de la señal de error  $e(t)$ .

La ecuación de un controlador  $I$  convencional es:

$$u(t) = k_i \int e(t) dt.$$

En tiempo discreto se tiene:

$$u(z) = k_i \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} e(z),$$

donde  $k_i$  es una variable ajustable.

El modo de control integral tiene como propósito disminuir y eliminar el error en estado estacionario, provocado por el modo proporcional.

### B.4. Derivativo (D)

La función de la acción derivativa es mantener el error al mínimo corrigiéndolo proporcionalmente con la velocidad misma que se produce; de esta manera evita que el error se incremente.

La ecuación de un controlador  $D$  convencional es:

$$u(t) = T_d \frac{de(t)}{dt}.$$

En tiempo discreto se tiene:

$$u(z) = \frac{k_d}{T} \frac{z-1}{z} e(z).$$

### B.5. Proporcional-integral (PI)

La ecuación para un controlador  $PI$  convencional se define mediante:

$$\begin{aligned} u(t) &= k_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt \right], \\ &= k_p e(t) + k_i \int e(t) dt. \end{aligned}$$

Donde  $T_i = \frac{k_p}{k_i}$  se denomina tiempo integral y es quien ajusta la acción integral, mientras que un cambio en  $k_p$  afecta las partes integral y proporcional de la acción de control.

Cuando en una planta se tiene un controlador proporcional y carece de una parte integral, hay un error en estado estable, o desplazamiento (*offset*), para una entrada escalón. Tal *offset* se elimina introduciendo la acción de control integral.

La acción integral, aunque elimina el *offset* o el error en estado estable, puede conducir a una respuesta oscilatoria de amplitud decreciente lenta ó de amplitud creciente, considerandolo inconveniente en ambos casos.

## B.6. Proporcional-derivativo (PD)

La ecuación dada para un controlador *PD* convencional es:

$$\begin{aligned} u(t) &= k_p \left[ e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right], \\ &= k_p e(t) + k_d \dot{e}. \end{aligned}$$

Donde  $T_d = \frac{k_d}{k_p}$  es una constante denominada tiempo derivativo. La acción derivativa, llamada también en algunas ocasiones control de velocidad, ocurre donde la magnitud de la salida del controlador es proporcional a la velocidad de cambio de la señal de error.  $T_d$  es el intervalo de tiempo durante el cual la acción de velocidad hace avanzar el efecto de la acción proporcional. Esta acción tiene carácter de previsión, lo que hace más rápida la acción de control, aunque tiene la desventaja de amplificar las señales de ruido y puede provocar saturación en el actuador. La acción de control derivativa nunca se utiliza por sí sola, debido a que sólo es eficaz durante períodos transitorios.

Cuando una acción de control derivativa se agrega a un controlador proporcional, permite obtener un controlador de alta sensibilidad, es decir que responde a la velocidad del cambio del error y produce una corrección significativa antes de que la magnitud del error se vuelva demasiado grande. Aunque el control derivativo no afecta en forma directa al error en estado estacionario, añade amortiguamiento al sistema y, por tanto, permite un valor más grande que la ganancia proporcional, lo cual provoca una mejora en la precisión en estado estable.

## B.7. Proporcional-integral-derivativo (PID)

Esta acción combinada reúne las ventajas de cada una de las acciones de control individuales. La ecuación para un *PID* convencional esta dada como [26]:

$$\begin{aligned} u(t) &= k \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t)dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right], \\ &= k_p e(t) + k_i \int e(t)dt + k_d \dot{e}, \end{aligned}$$

en su forma discreta se encuentra como:

$$u(z) = \left[ k_p + k_i \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} + \frac{k_d}{T} \frac{z-1}{z} \right] e(z).$$

## B.8. Comentarios

En este apéndice, se presentan las diferentes combinaciones (*P*, *PI*, *PD* y *PID*) de los controladores clásicos, resalando las características de cada uno de ellos, esto con el objeto de ayudar en la selección del controlador a ser empleado, de acuerdo a las especificaciones de diseño.

# Apéndice C

## Modelado del sistema

Este apéndice esta basado en el desarrollo de los modelos matemáticos tanto del carro-péndulo invertido como de la cámara de visión, los cuales son obtenidos con fines de simulación.

### C.1. Descripción del sistema carro-péndulo invertido

El sistema subactuado clásico en los laboratorios de control es el péndulo invertido, la importancia de este dispositivo se justifica ya que el modelo de este sistema es congruente al de otros tales como: aeronaves de despegue y aterrizaje vertical, vehículos subacuáticos, los “robots gimnastas”, el acrobot, el pendubot y otros robots móviles.

El péndulo invertido consiste en una barra cilíndrica (péndulo) que oscila libremente alrededor de un punto fijo (con ciertas restricciones mecánicas, ya que sólo se puede mover en un plano). Dicho péndulo está montado sobre una pieza móvil (carro) que se desplaza en dirección horizontal [26]. El siguiente diagrama muestra el sistema que se estudia en este trabajo

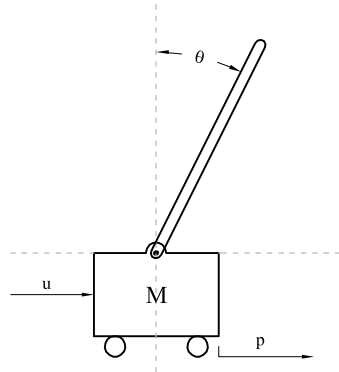


Figura C.1: Sistema carro-péndulo invertido.

Los principales parámetros y variables del sistema físico de estudio en particular se muestran en la Tabla C.1 [28].

Cuadro C.1: Variables y constantes del sistema péndulo invertido.

Variable	Nombre	Valor	Unidades
$u$	Entrada		<i>volts</i>
$p$	Posición del carro		<i>m</i>
$\theta$	Ángulo entre la vertical y la posición del péndulo		<i>rad</i>
Constante	Nombre	Valor	Unidades
	Longitud al centro de masa del péndulo	0.32	<i>m</i>
$m$	Masa del péndulo	0.23	<i>kg</i>
$M$	Masa del carro	0.52	<i>kg</i>
$g$	Constante de gravedad	9.81	<i>m/seg<sup>2</sup></i>
$J$	Inercia de la barra	0.007	<i>Kg · m<sup>2</sup></i>

## C.2. Ecuaciones dinámicas del carro-péndulo invertido

Las ecuaciones dinámicas que constituyen el modelo matemático de un sistema pueden ser determinadas a partir de la ecuación de Euler-Lagrange, la cual se basa en la energía potencial y la energía cinética del sistema.



La ecuación Euler-Lagrange esta definida por la siguiente expresión [32]

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} L \right] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} L = \tau, \quad (\text{C.1})$$

donde  $\mathbf{q}$  es el vector de coordenadas generalizadas,  $L$  denota el Lagrangiano definido como  $L = K - V$ , con  $K$  como la energía cinética y  $V$  como la energía potencial y  $\tau$  es cualquier momento aplicado al sistema tal como el torque de un motor, una fricción o una fuerza exterior.

La energía cinética de un cuerpo en movimiento está dada por

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2, \quad (\text{C.2})$$

donde  $n$  es el número de coordenadas generalizadas,  $m_i$  es la masa del  $i$ -ésimo cuerpo en movimiento y  $v_i$  es la  $i$ -ésima velocidad.

El sistema carro-péndulo invertido se analiza como dos masas independientes la del carro y la del péndulo. Primero se procede a calcular la energía cinética del carro, cuyo diagrama de cuerpo libre se muestra en la Figura C.2.

$$K_c = \frac{1}{2} M \dot{p}^2. \quad (\text{C.3})$$

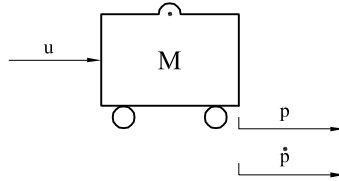


Figura C.2: Diagrama de cuerpo libre correspondiente al carro.

La energía cinética del péndulo cuyo diagrama de cuerpo libre se presenta en la Figura C.3 esta dada por

$$K_p = \frac{1}{2} m v_\theta^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2. \quad (\text{C.4})$$

Donde  $v_\theta$  es la velocidad tangencial resultante debida al movimiento angular del péndulo y la velocidad del carro dada por

$$v_\theta^2 = \left( \dot{p} + l \dot{\theta} \cos \theta \right)^2 + \left( l \dot{\theta} \sin \theta \right)^2 = \dot{p}^2 + 2l \dot{p} \dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2, \quad (\text{C.5})$$

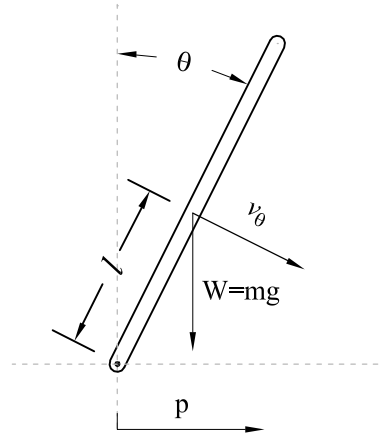


Figura C.3: Diagrama de cuerpo libre correspondiente al péndulo.

Resultando

$$K_p = \frac{1}{2}m \left( \dot{p}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{p} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2. \quad (\text{C.6})$$

La energía potencial o de posición de un cuerpo de masa  $m$  colocado a una altura  $h$  está determinada por

$$V = mgh. \quad (\text{C.7})$$

De acuerdo con (C.7) la energía potencial para el carro (Figura C.2) es cero, ya que a lo largo de su trayectoria horizontal su altura no cambia. En caso contrario el péndulo (Figura C.3) tiene una energía que depende de la altura de su centro de masa ( $l \cos \theta$ ), entonces la energía potencial del péndulo esta dada por

$$V_p = mgl \cos \theta. \quad (\text{C.8})$$

Una vez hallada la energía cinética y potencial del sistema carro-péndulo invertido se puede determinar el Lagrangiano del sistema y de esta manera obtener las ecuaciones dinámicas de acuerdo a la ecuación de Euler-Lagrange (C.1).

El Lagrangiano  $L$  del sistema esta dado por la diferencia de las energías cinéticas y potenciales de cada una de las masas independientes

$$L = \frac{1}{2}M\dot{p}^2 + \frac{1}{2}m \left( \dot{p}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{p} \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta. \quad (\text{C.9})$$

En este caso el vector de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$  (vector de posición de las masas involucradas en el sistema) está compuesto por la posición del carro y el ángulo

del péndulo con respecto a la vertical

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} p(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.10})$$

La ecuación de Euler-Lagrange (C.1) para este sistema en particular está definida por

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{p}} L \right\} - \frac{\partial}{\partial p} L = \tau_1 \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} L \right\} - \frac{\partial}{\partial \theta} L = \tau_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.11})$$

Resultando

$$(M + m) \ddot{p} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = u, \quad (\text{C.12})$$

$$(ml^2 + J) \ddot{\theta} + ml\ddot{p} \cos \theta - mgl \sin \theta = 0. \quad (\text{C.13})$$

Las ecuaciones dinámicas (C.12) y (C.13) describen el comportamiento del sistema carro-péndulo invertido sin fricción.

### C.3. Forma estandar del modelo matemático del carro-péndulo invertido

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau, \quad (\text{C.14})$$

para las ecuaciones dinámicas C.12 y C.13 que describen el comportamiento del sistema péndulo invertido sin fricción se tiene

$$D = \begin{bmatrix} ml \cos \theta & M + m \\ ml^2 + J & ml \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (\text{C.15})$$

$$C = \begin{bmatrix} -ml\dot{\theta} \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.16})$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ -mgl \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (\text{C.17})$$

$$T = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.18})$$

con:

$$q = \begin{bmatrix} \theta \\ p \end{bmatrix}, \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{p} \end{bmatrix}, \quad \ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{p} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.19})$$

se tiene que:

$$\ddot{q} = D^{-1}[-C\dot{q} - G + T]. \quad (\text{C.20})$$

La ecuación (D.1) es empleada en la Apéndice E para las simulaciones en MATLAB.

## C.4. Modelo de la cámara

El modelo de la cámara parte de un modelo ideal propuesto a partir de la ganancia del lente y de un retraso temporal, cuyo digrama se muestra en la Figura C.4.

Se observa una ganancia, la cual es originada por el aumento de la lente de la cámara, mientras que el retraso se debe al tiempo de adquisición de la imagen, también conocido como tiempo de muestreo cuya función de transferencia esta dada por

$$C_{(z)} = \frac{k_l}{z}, \quad (\text{C.21})$$

donde  $k_l$  es la ganancia del lente.

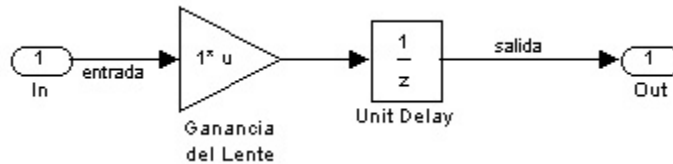


Figura C.4: Diagrama para el modelo de la cámara digital.

## C.5. Comentarios

En este apéndice se presentan los modelos dinámicos tanto del sistema carro-péndulo invertido como de la cámara, los cuales son empleados en las simulaciones desarrolladas en el Capítulo 5.

# Apéndice D

## Defuzzificación

Este apéndice presenta el desarrollo analítico de la defuzzificación del controlador *PD* difuso con dos funciones de membresía, se da la partición de las regiones, la evaluación de las mismas y las leyes de control para cada una de las regiones.

### D.1. Partición

Para el controlador *PD* difuso propuesto, los rangos de los valores de las entradas ( $e(t)$  y  $\dot{e}(t)$ ) son descompuestos en 20 regiones adyacentes de posibles combinaciones de entradas, como se muestra en la Figura D.1.

### D.2. Evaluación de las regiones

Evaluando las regiones de combinación de entradas, las reglas de control (*R1* – *R4*) y las funciones de membresía, se obtiene una ley de control difusa para cada una de las regiones y después obtener una sólo salida de control que realimenta al sistema.

Analizando la región *IC1*, Figura D.2, se tiene que  $K_p e > 0$ ,  $K_d r < 0$ ,  $K_p e > -K_d r$  y  $K_p |e| > K_d |r|$ , donde  $r = \dot{e}$ .

Con las suposiciones anteriores, se pueden evaluar las reglas para esta región en particular, obteniéndose:

$$\begin{aligned} \mathbf{R1:} \quad & \text{mín}(\mu_{e_p}, \mu_{r_p}) = \mu_{r_p}, \\ \mathbf{R2:} \quad & \text{mín}(\mu_{e_p}, \mu_{r_n}) = \mu_{r_n}, \\ \mathbf{R3:} \quad & \text{mín}(\mu_{e_n}, \mu_{r_p}) = \mu_{e_n}, \\ \mathbf{R4:} \quad & \text{mín}(\mu_{e_n}, \mu_{r_n}) = \mu_{e_n}. \end{aligned} \tag{D.1}$$

Analizando la región *IC2*, se obtendrán las mismas ecuaciones (D.1) de la región *IC1*.

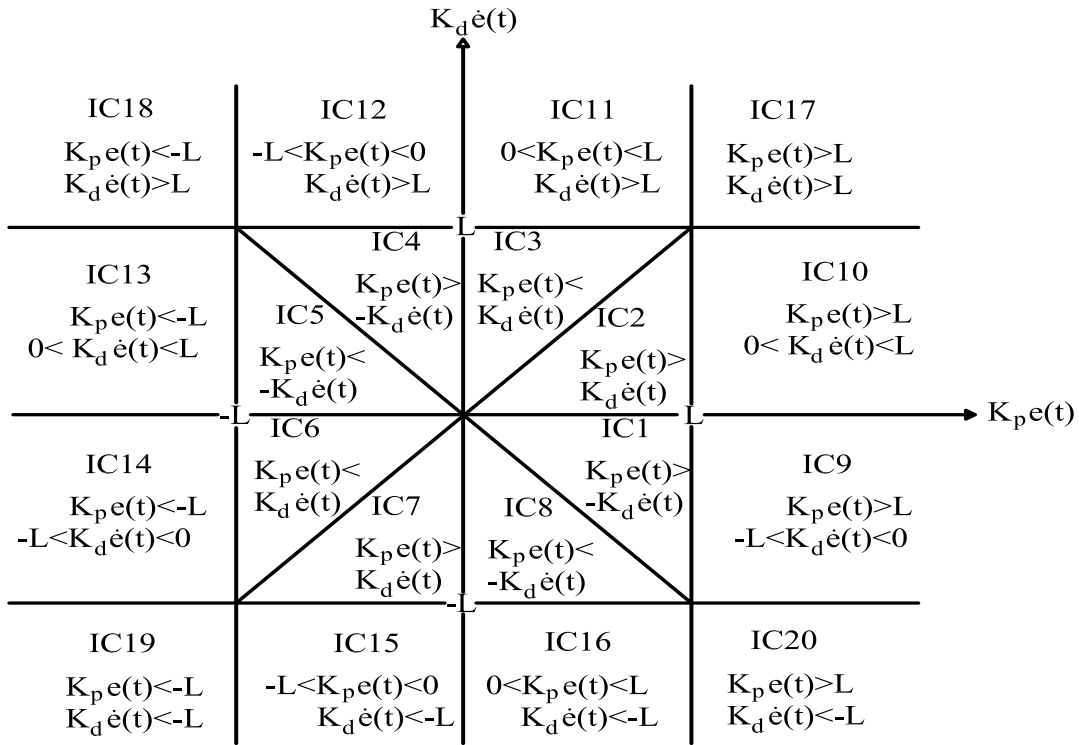


Figura D.1: Regiones de combinación de entradas.

Ahora, analizando la región  $IC5$ , Figura D.3, se tiene que  $K_p e < 0$ ,  $K_d \dot{e} > 0$ ,  $K_p e > -K_d \dot{e}$  y  $K_p |e| > K_d |\dot{e}|$ .

Para este caso se obtiene la siguiente evaluación de las reglas:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R1:} \quad & \text{mín}(\mu_{e_p}, \mu_{r_p}) = \mu_{e_p}, \\
 \mathbf{R2:} \quad & \text{mín}(\mu_{e_p}, \mu_{r_n}) = \mu_{e_p}, \\
 \mathbf{R3:} \quad & \text{mín}(\mu_{e_n}, \mu_{r_p}) = \mu_{r_p}, \\
 \mathbf{R4:} \quad & \text{mín}(\mu_{e_n}, \mu_{r_n}) = \mu_{r_n}.
 \end{aligned} \tag{D.2}$$

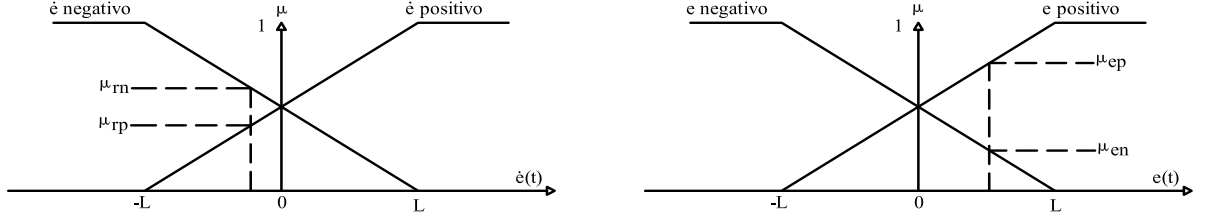


Figura D.2: Evaluación de la región IC1.

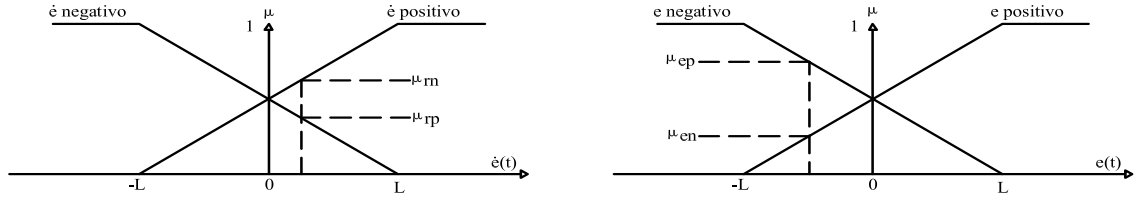


Figura D.3: Evaluación de la región IC5.

Este análisis también es válido para la región *IC6*. Ahora se continúa el análisis para cada región, utilizando la inferencia Mamdani con **a** como la función de membresía del antecedente y **b** la función de membresía de la acción de control. Como las reglas *R2* y *R3* generan la misma salida se hace una unión de reglas; esto se lleva a cabo con el operador de Lukasiewicz. Finalmente, se produce la defuzzificación utilizando el método de peso promedio:

$$u = \frac{-H \cdot S(\mu_{R4}) + 0 \cdot S(\mu_{R2+R3}) + H \cdot S(\mu_{R1})}{S(\mu_{R4}) + S(\mu_{R2+R3}) + S(\mu_{R1})}, \quad (D.3)$$

donde  $S(\cdot)$  indica la superficie respectiva, simplificando resulta:

$$u = \frac{H \cdot (S(\mu_{R1}) - S(\mu_{R4}))}{S(\mu_{R4}) + S(\mu_{R2+R3}) + S(\mu_{R1})}. \quad (D.4)$$

Puesto que *IC1* e *IC2* disparan las mismas reglas, el cálculo de la defuzzificación es el mismo:

$$u = \frac{H \cdot (S(\mu_{rp}) - S(\mu_{en}))}{S(\mu_{en}) + S(\mu_{rn+en}) + S(\mu_{rp})}, \quad (\text{D.5})$$

$$u = H \frac{\left(\frac{L+K_d r(t)}{2L}\right) - \left(\frac{L-K_p e(t)}{2L}\right)}{\left(\frac{L-K_p e(t)}{2L}\right) + \left(\frac{L-K_d r(t)}{2L} + \frac{L-K_p e(t)}{2L}\right) + \left(\frac{L+K_d r(t)}{2L}\right)}, \quad (\text{D.6})$$

$$u = \frac{H}{2(2L - K_p e(t))} (K_p e(t) + K_d r(t)), \quad (\text{D.7})$$

en IC1 e IC2  $e(t) > 0$ .

Calculando para IC5 e IC6 con la misma metodología, se obtiene:

$$u = \frac{H \cdot (S(\mu_{ep}) - S(\mu_{rn}))}{S(\mu_{rn}) + S(\mu_{ep+rp}) + S(\mu_{ep})}, \quad (\text{D.8})$$

$$u = H \frac{\left(\frac{L+K_p e(t)}{2L}\right) - \left(\frac{L-K_d r(t)}{2L}\right)}{\left(\frac{L-K_d r(t)}{2L}\right) + \left(\frac{L-K_p e(t)}{2L} + \frac{L-K_d r(t)}{2L}\right) + \left(\frac{L+K_p e(t)}{2L}\right)}, \quad (\text{D.9})$$

$$u = \frac{H}{2(2L + K_p e(t))} (K_p e(t) + K_d r(t)), \quad (\text{D.10})$$

con  $e(t) < 0$  en las regiones IC5 e IC6, por lo que se puede sintetizar una acción de control tomando las ecuaciones (D.7) y (D.10), que sean válidas para las regiones IC1, IC2, IC5 e IC6

$$u = \frac{H}{2(2L - K_p |e(t)|)} (K_p e(t) + K_d r(t)). \quad (\text{D.11})$$

Tomando ahora la región IC3, Figura D.4, para esta región en específico  $K_p e > 0$ ,  $K_d r > 0$ ,  $K_p e < K_d r$  y  $K_p |e| < K_d |r|$  donde  $r = \dot{e}$ .

Con las suposiciones anteriores, se pueden evaluar las reglas para esta región en particular, obteniéndose:

$$\begin{aligned} \mathbf{R1:} \quad & \text{mín}(\mu_{ep}, \mu_{rp}) = \mu_{ep}, \\ \mathbf{R2:} \quad & \text{mín}(\mu_{ep}, \mu_{rn}) = \mu_{rn}, \\ \mathbf{R3:} \quad & \text{mín}(\mu_{en}, \mu_{rp}) = \mu_{en}, \\ \mathbf{R4:} \quad & \text{mín}(\mu_{en}, \mu_{rn}) = \mu_{rn}. \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$



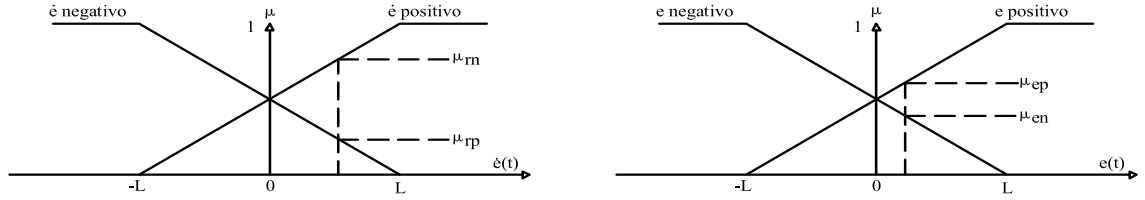


Figura D.4: Evaluación de la región IC3.

Si se hiciera lo mismo para la región IC4 se obtendrían las mismas ecuaciones (D.12). Ahora en la región IC8, Figura D.5, se tiene que  $K_p e < 0$ ,  $K_d r < 0$ ,  $-K_p e < -K_d r$  y  $K_p |e| < K_d |r|$ .

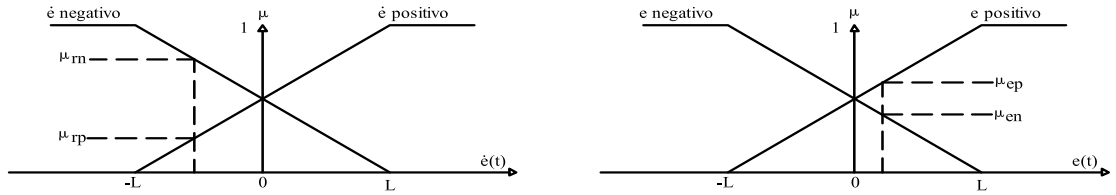


Figura D.5: Evaluación de la región IC8.

Para este caso, se obtiene la siguiente evaluación de las reglas:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R1:} \quad & \text{mín}(\mu_{e_p}, \mu_{r_p}) = \mu_{r_p}, \\
 \mathbf{R2:} \quad & \text{mín}(\mu_{e_p}, \mu_{r_n}) = \mu_{e_p}, \\
 \mathbf{R3:} \quad & \text{mín}(\mu_{e_n}, \mu_{r_p}) = \mu_{r_p}, \\
 \mathbf{R4:} \quad & \text{mín}(\mu_{e_n}, \mu_{r_n}) = \mu_{e_n}.
 \end{aligned}
 \tag{D.13}$$

Este análisis también es válido para la región IC7. Ahora se continúa el análisis para cada región, con el criterio de la inferencia de Mamdani donde **a** es la función de membresía del antecedente y **b** es la función de membresía de la acción de control. Como las reglas R2 y R3 generan la misma salida se hace una unión de reglas; esto se lleva a cabo con el operador de Lukasiewicz. Finalmente se procede a la defuzzificación

utilizando el método de peso promedio (D.3) y (D.4). Puesto que *IC3* e *IC4* disparan las mismas reglas, el cálculo de la defuzzificación es el mismo:

$$u = \frac{H \cdot (S(\mu_{ep}) - S(\mu_{rn}))}{S(\mu_{ep}) + S(\mu_{rn+en}) + S(\mu_{rn})}, \quad (\text{D.14})$$

$$u = H \frac{\left(\frac{L+K_p e(t)}{2L}\right) - \left(\frac{L-K_d r(t)}{2L}\right)}{\left(\frac{L+K_p e(t)}{2L}\right) + \left(\frac{L-K_d r(t)}{2L} + \frac{L-K_p e(t)}{2L}\right) + \left(\frac{L-K_d r(t)}{2L}\right)}, \quad (\text{D.15})$$

$$u = \frac{H}{2(2L - K_d r(t))} (K_p e(t) + K_d r(t)), \quad (\text{D.16})$$

en *IC3* e *IC4*  $r(t) > 0$ .

Calculando para *IC7* e *IC8* con la misma metodología, se obtiene:

$$u = \frac{H \cdot (S(\mu_{rp}) - S(\mu_{en}))}{S(\mu_{rp}) + S(\mu_{ep+rp}) + S(\mu_{en})}, \quad (\text{D.17})$$

$$u = H \frac{\left(\frac{L+K_d r(t)}{2L}\right) - \left(\frac{L-K_p e(t)}{2L}\right)}{\left(\frac{L+K_d r(t)}{2L}\right) + \left(\frac{L+K_p e(t)}{2L} + \frac{L+K_d r(t)}{2L}\right) + \left(\frac{L-K_p e(t)}{2L}\right)}, \quad (\text{D.18})$$

$$u = \frac{H}{2(2L + K_d r(t))} (K_p e(t) + K_d r(t)), \quad (\text{D.19})$$

con  $r(t) < 0$  en las regiones *IC7* e *IC8*. Por lo que se puede sintetizar una acción de control tomándose las ecuaciones (D.16) y (D.19) que sea válido para las regiones *IC3*, *IC4*, *IC7* e *IC8*:

$$u = \frac{H}{2(2L - K_d |r(t)|)} (K_p e(t) + K_d r(t)). \quad (\text{D.20})$$

En la región *IC9*, Figura D.6, se tiene que  $K_p e > L$ ,  $-L < K_d r < 0$ .

Para este caso se obtiene la siguiente evaluación de reglas:

$$\begin{aligned} \mathbf{R1:} \quad & \text{mín}(\mu_{ep}, \mu_{rp}) = \mu_{rp}, \\ \mathbf{R2:} \quad & \text{mín}(\mu_{ep}, \mu_{rn}) = \mu_{rn}. \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

Este mismo análisis es válido para la región *IC10* puesto que *IC9* e *IC10* disparan las mismas reglas, el cálculo de la defuzzificación es el mismo por lo que:

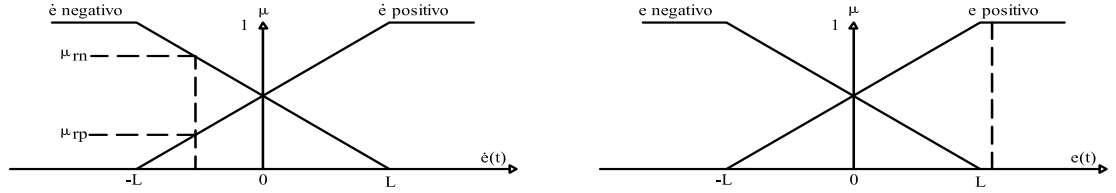


Figura D.6: Evaluación de la región IC9.

$$u = \frac{H \cdot S(\mu_{R1})}{S(\mu_{R1}) + S(\mu_{R2})}, \tag{D.22}$$

$$u = \frac{H \cdot S(\mu_{rp})}{S(\mu_{ep}) + S(\mu_{rn})}, \tag{D.23}$$

$$u = H \frac{\left(\frac{L+K_{dr}(t)}{2L}\right)}{\left(\frac{L+K_{dr}(t)}{2L}\right) + \left(\frac{L-K_{dr}(t)}{2L}\right)}, \tag{D.24}$$

$$u = \frac{H}{2L}(L + K_{dr}(t)). \tag{D.25}$$

Para la región IC11, Figura D.7, se tiene que  $K_{dr} > L$ ,  $-L < K_p e < 0$ .

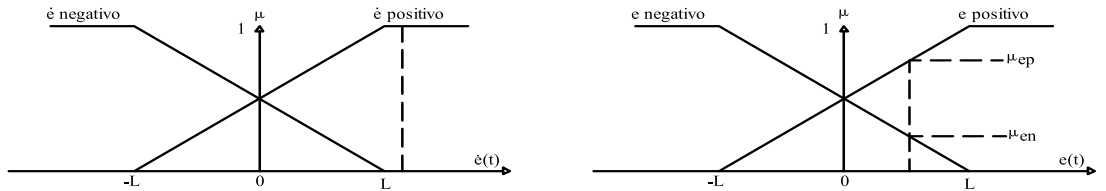


Figura D.7: Evaluación de la región IC11.

Para este caso se obtiene la siguiente evaluación de las reglas:

$$\begin{aligned} \mathbf{R1:} \quad & \text{mín}(\mu_{ep}, \mu_{rp}) = \mu_{ep}, \\ \mathbf{R3:} \quad & \text{mín}(\mu_{en}, \mu_{rp}) = \mu_{en}. \end{aligned} \tag{D.26}$$

Este mismo análisis es válido para la región  $IC12$ . Puesto que  $IC11$  e  $IC12$  disparan las mismas reglas, el cálculo es el mismo así que:

$$u = \frac{H \cdot S(\mu_{R1})}{S(\mu_{R1}) + S(\mu_{R3})}, \quad (D.27)$$

$$u = \frac{H \cdot S(\mu_{ep})}{S(\mu_{ep}) + S(\mu_{en})}, \quad (D.28)$$

$$u = H \frac{\left(\frac{L+K_p e(t)}{2L}\right)}{\left(\frac{L+K_p e(t)}{2L}\right) + \left(\frac{L-K_p e(t)}{2L}\right)}, \quad (D.29)$$

$$u = \frac{H}{2L} (L + K_p e(t)). \quad (D.30)$$

En la región  $IC13$ , Figura D.8, se tiene que  $K_p e < -L$ ,  $0 < K_d r < 1$ .

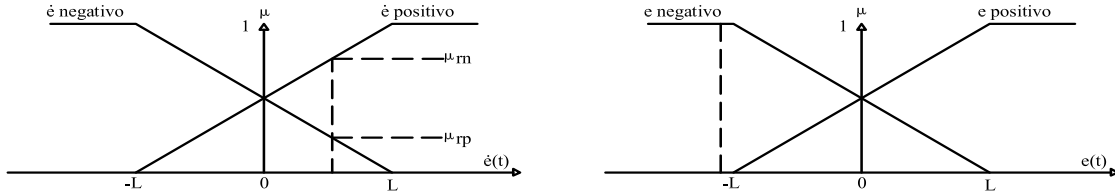


Figura D.8: Evaluación de la región  $IC13$ .

Para este caso se obtiene la siguiente evaluación de las reglas:

$$\begin{aligned} \mathbf{R3:} \quad \min(\mu_{ep}, \mu_{rp}) &= \mu_{rp}, \\ \mathbf{R4:} \quad \min(\mu_{ep}, \mu_{rn}) &= \mu_{rn}. \end{aligned} \quad (D.31)$$

Este mismo análisis es válido para la región  $IC14$ . Puesto que  $IC13$  e  $IC14$  disparan las mismas reglas, el cálculo de la defuzzificación es el mismo, entonces:

$$u = \frac{-H \cdot S(\mu_{R4})}{S(\mu_{R3}) + S(\mu_{R4})}, \quad (D.32)$$

$$u = \frac{-H \cdot S(\mu_{rn})}{S(\mu_{rp}) + S(\mu_{rn})}, \quad (D.33)$$

$$u = -H \frac{\left(\frac{L - K_d r(t)}{2L}\right)}{\left(\frac{L + K_d r(t)}{2L}\right) + \left(\frac{L - K_d r(t)}{2L}\right)}, \quad (D.34)$$

$$u = -\frac{H}{2L}(L - K_d r(t)). \quad (D.35)$$

En la región  $IC15$ , Figura D.9, se tiene que  $K_d r < -L$ ,  $-L < K_p e < 0$ .

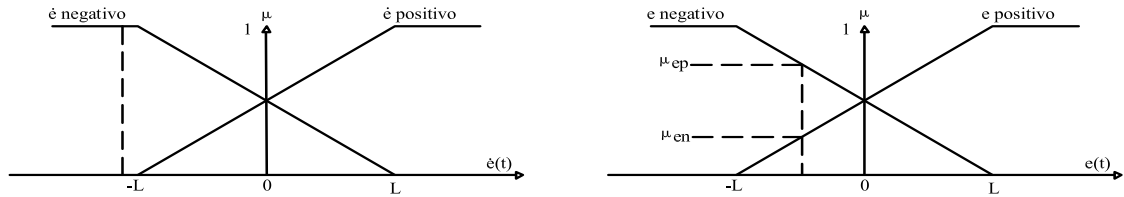


Figura D.9: Evaluación de la región  $IC15$ .

Para este caso se obtiene la siguiente evaluación de las reglas:

$$\begin{aligned} \mathbf{R2:} \quad \text{mín}(\mu_{e_p}, \mu_{r_n}) &= \mu_{e_p}, \\ \mathbf{R4:} \quad \text{mín}(\mu_{e_n}, \mu_{r_n}) &= \mu_{e_n}. \end{aligned} \quad (D.36)$$

Este mismo análisis es válido para la región *IC16*. Puesto que *IC15* e *IC16* disparan las mismas reglas, el cálculo de la defuzzificación es el mismo:

$$u = \frac{-H \cdot S(\mu_{R4})}{S(\mu_{R2}) + S(\mu_{R4})}, \quad (\text{D.37})$$

$$u = \frac{-H \cdot S(\mu_{en})}{S(\mu_{rp}) + S(\mu_{en})}, \quad (\text{D.38})$$

$$u = -H \frac{\left(\frac{L - K_p e(t)}{2L}\right)}{\left(\frac{L - K_p e(t)}{2L}\right) + \left(\frac{L + K_p e(t)}{2L}\right)}, \quad (\text{D.39})$$

$$u = -\frac{H}{2L} (L + K_p e(t)). \quad (\text{D.40})$$

En la región *IC17*, Figura D.10, se sabe que  $K_{dr} > L$ ,  $K_p e > L$ .

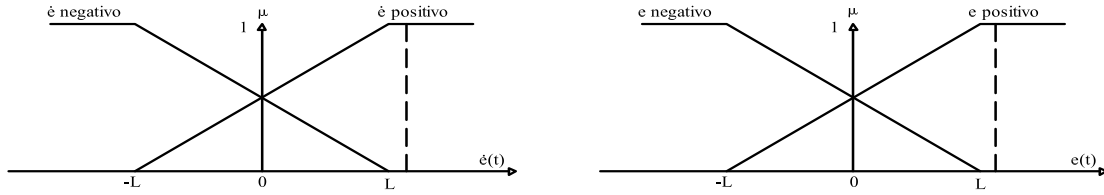


Figura D.10: Evaluación de la región *IC17*.

Para este caso se obtiene la siguiente evaluación de la regla:

$$\mathbf{R1:} \quad \min(\mu_{ep}, \mu_{rp}) = 1. \quad (\text{D.41})$$

Haciendo el cálculo de la defuzzificación utilizando el método de peso promedio (D.3):

$$u = \frac{H \cdot S(\mu_{R1})}{S(\mu_{R1})}, \quad (\text{D.42})$$

$$u = H. \quad (\text{D.43})$$

En la región IC19, Figura D.11, se sabe que  $K_{dr} < -L$ ,  $K_p e < -L$ .

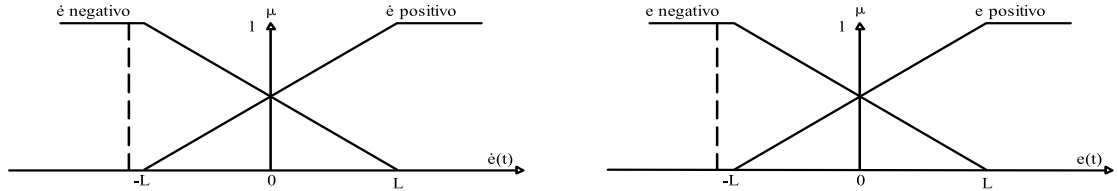


Figura D.11: Evaluación de la región IC19.

Para este caso se obtiene la siguiente evaluación de la regla:

$$\mathbf{R4:} \quad \text{mín}(\mu_{e_n}, \mu_{r_n}) = 1. \quad (\text{D.44})$$

Haciendo el cálculo de defuzzificación utilizando el método de peso promedio (D.3):

$$u = \frac{H \cdot S(\mu_{R4})}{S(\mu_{R4})}, \quad (\text{D.45})$$

$$u = -H. \quad (\text{D.46})$$

En la región IC18, Figura D.12, se tiene que  $K_{dr} > L$ ,  $K_p e < -L$ .

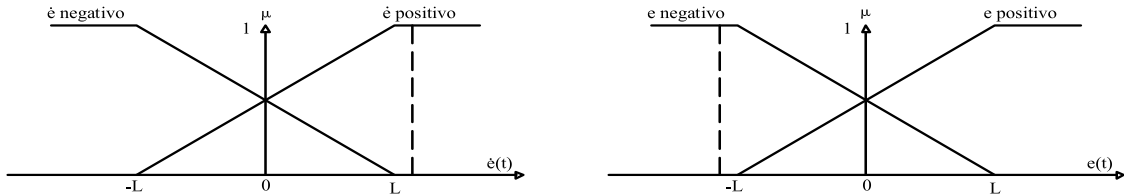


Figura D.12: Evaluación de la región IC18.

Para este caso se obtiene la siguiente evaluación de la regla:

$$\mathbf{R3:} \quad \text{mín}(\mu_{e_n}, \mu_{r_p}) = 1. \quad (\text{D.47})$$

Haciendo el cálculo de la defuzzificación utilizando el método de peso promedio (D.3):

$$u = \frac{0 \cdot S(\mu_{R1})}{S(\mu_{R1})}, \quad (\text{D.48})$$

$$u = 0. \quad (\text{D.49})$$

El mismo cálculo que aplica para la región IC20.

### D.3. Leyes de control

Tomando las ecuaciones (D.11), (D.20), (D.25), (D.30), (D.35), (D.40), (D.43), (D.46) y (D.49) considerando que  $H = L$  se obtienen las siguientes ecuaciones que determinan la señal de control dependiendo de la región:

$$\begin{aligned} u^*(t) &= \frac{L}{2(2L - K_p | e(t) |)} [K_p e(t) + K_d r(t)] \text{ en IC1, IC2, IC5, IC6.} \\ u^*(t) &= \frac{L}{2(2L - K_d | r(t) |)} [K_p e(t) + K_d r(t)] \text{ en IC3, IC4, IC7, IC8.} \\ u^*(t) &= \frac{1}{2} [L + K_d r(t)] \text{ en IC9, IC10.} \\ u^*(t) &= \frac{1}{2} [L + K_p e(t)] \text{ en IC11, IC12.} \\ u^*(t) &= \frac{1}{2} [-L + K_d r(t)] \text{ en IC13, IC14.} \\ u^*(t) &= \frac{1}{2} [-L + K_p e(t)] \text{ en IC15, IC16.} \\ u^*(t) &= L \text{ en IC17.} \\ u^*(t) &= -L \text{ en IC19.} \\ u^*(t) &= 0 \text{ en IC18, IC20.} \end{aligned} \quad (\text{D.50})$$



# Apéndice E

## Programas

En este apéndice se presentan los programas utilizados para llevar a cabo las simulaciones correspondientes de los resultados presentados en el Capítulo 5, haciendo uso del Cuadro E.5 que contiene las ganancias utilizadas para realizar la sintonización del controlador *PD* difuso.

### E.1. Modelo no lineal sin fricción del carro-péndulo invertido

```
%snlcpi.m

%Bloque del modelo no lineal sin fricción del carro péndulo invertido.

%Recibe como parámetros de entrada la derivada de la posición del carro
%(dp), la posición del carro (p), la señal de entrada (u), la derivada del
%ángulo entre la vertical y la posición del péndulo (dtheta), el ángulo
%entre la vertical y la posición del péndulo (theta).

function y = snlcpi(xin)

%Valores de las variables del sistema carro péndulo invertido:

l = 0.32;
m = 0.23;
M = 0.52;
g = 9.81;
J = 0.07;
```

%Separación de las variables de entrada.

```
dtheta = xin(1,1);
theta = xin(2,1);
u = xin(3,1);
p = xin(4,1);
dp = xin(5,1);
```

%Creación de las matrices obtenidas de las ecuaciones dinámicas C.20  
%que describen al sistema.

%Matriz de inercia.

```
D11 = m*l*cos(theta);
D12 = M+m; D21=m*l^2+J;
D22 = m*l*cos(theta);
D = [D11 D12; D21 D22];
```

%Matriz de Coriolis-Centripeta.

```
C11 = -m*l*dtheta*sin(theta);
C12 = 0;
C21 = 0;
C22 = 0;
C = [C11 C12; C21 C22];
```

%Vector de gravedad.

```
G1 = 0;
G2 = -m*g*l*sin(theta);
G = [G1; G2];
```

%Vector de entrada.

```
T = [u;0];
```

%Vector formado por las velocidades.

```
dq = [dtheta;dp];
```

%Cálculo de la segunda derivada de q, como se muestra en C.20.

```
y = inv(D)*(-C*dq-G+T);
```

## E.2. Cálculo del error entre el punto actual y el deseado

%dista.m

%Cálculo del error y selección de la salida.

%Recibe como vectores: theta, u, p y ddes.

```
function y = dista(xin)
```

%Variables utilizadas.

```
theta = xin(1,1);  
u = xin(2,1);  
p = xin(3,1);  
ddes = xin(4,1);
```

```
l = 0.32;
```

%Cálculo del error.

```
dreal = l*cos(theta);
```

%Si la ddes es mayor que la dreal deja pasar u, de lo contrario  
%deja pasar u.

```
if  
    dreal>ddes  
    y=u;  
else  
    y=u;  
end
```

### E.3. Control *PD* difuso utilizando 2 funciones de membresía

#### E.3.1. Control *PD* difuso con una función de membresía $L$ y una $\Gamma$

```
%contfuzz.m
```

```
%Control difuso del sistema no lineal, recibe como parámetros el
%error (err), la derivada del error (derr) y a la salida (u).
```

```
function y = contfuzz(xin)
```

```
%Separación de las variables de entrada
```

```
err = xin(1,1);
derr = xin(2,1);
L = xin(3,1);
kp = xin(4,1);
kd = xin(5,1);
```

```
e = err*kp;
r = derr*kd;
```

```
%Controlador difuso derivado de la región IC, mostrado en
%la Figura D.1, cuyas ecuaciones estan dadas por D.50.
```

```
if
    L>=abs(e) & abs(e)>=abs(r)
    y = (L*(e+r))/(2*((2*L)-(kp*abs(err))));
end
```

```
if
    L>=abs(r) & abs(r)>=abs(e)
    y = (L*(e+r))/(2*((2*L)-(kd*abs(derr))));
end
```

```
if
```

```
    L<abs(e) & e>abs(r)
    y = 0.5*(L+r);
end

if
    L<abs(r) & r>abs(e)
    y = 0.5*(L+e);
end

if
    L<abs(e) & -e>abs(r)
    y = 0.5*(-L+r);
end

if
    L<abs(r) & -r>abs(e)
    y = 0.5*(-L+e);
end

if
    L<e & L<r
    y = L;
end

if
    L<-e & L<-r
    y = -L;
end

if
    (L<e & L<-r) | (L<-e & L<r)
    y = 0;
end
```

#### E.4. Control *PD* difuso utilizando 5 funciones de membresía

En las siguientes secciones se presentan los programas para las simulaciones con 5 funciones de membresía: la primera con una función  $L$ , 3 triangulares y una  $\Gamma$ ; la

segunda simulación con una función  $L$ , una triangular, una trapezoidal, una triangular y una  $\Gamma$  como se muestra en las Figuras 4.5 y 4.4, respectivamente.

#### E.4.1. Función de membresía $L$

```
function[p] = p_medtrapi(a,b,x)

%Funcion que obtiene el grado de pertenencia de un valor x
%en una función trapezoidal inferior. p_medtrapi(a,b,x) donde:
%x es el valor para obtener el grado de pertenencia debe ser
%mayor que cero. a,b son los puntos del trapecio.

    if (x<=a);
        p = 1;
    elseif (x>a && x<b);
        p = (b-x)/(b-a);
    else (x>=b);
        p = 0;
    end
```

#### E.4.2. Función de membresía $\Gamma$

```
function[p] = p_medtraps(a,b,x)

%Función que obtiene el grado de pertenencia de un valor x en una
%función trapezoidal superior. p_medtraps(a,b,x) donde: x Es el
%valor para obtener el grado de pertenencia debe ser mayor que cero.
%a,b son los puntos del trapecio.

    if (x<a);
        p = 0;
    elseif(x>=a && x<=b);
        p = (x-a)/(b-a);
    else (x>b);
        p = 1;
    end
```

#### E.4.3. Función de membresía trapezoidal

```
function[p] = p_trapez(a,b,c,d,x)

%Función que obtiene el grado de pertenencia de un valor x en una
%función trapezoidal. p_trapz(a,b,c,d,x) donde: x es el valor
%para obtener el grado de pertenencia debe ser mayor que cero.
%a,b,c,d son los puntos del trapecio.
```

```
if (x<=a || x>=d);
    p = 0;
elseif (x>a && x<b);
    p = (x-a)/(b-a);
elseif (x>=b && x<=c);
    p = 1;
else (x>c && x<d);
    p = (d-x)/(d-c);
end
```

#### E.4.4. función de membresía triangular

```
function[p] = p_triangu(a,b,c,x)

%Función que retorna la pertenencia de un valor x en una función
%triangular p_traing(a,b,c,x), donde: x es el valor a evaluar.
%a,b,c son los vértices de un triángulo.
```

```
if (x<=a || x>c);
    p = 0;
elseif (x>a && x<=b);
    p = (x-a)/(b-a);
else (x>b && x<=c);
    p = (c-x)/(c-d);
end
```

#### E.4.5. Simulación con una función de membresía $L$ , una triangular, una trapezoidal, una triangular y una $\Gamma$

En esta sección se presenta el programa que calcula el control  $PD$  difuso sólo para el carro, el cual está dividido en las siguientes etapas: en la primera se declaran las variables de entrada como son el error, su derivada, la ganancia proporcional y

la derivativa, mientras que la partición del universo de discurso, así como el tipo y número de funciones de membresía se realiza en la segunda etapa. En la tercera etapa se proponen los valores de la base de reglas y se genera utilizando el criterio Mac Vicar-Whelan. En la última etapa se realiza la defuzzificación por centro de gravedad por medio del mínimo y se obtiene la salida del controlador *PD* difuso.

#### E.4.5.1. Control *PD* difuso para el carro

```
function[u] = fuzzy_carro(entrada)

%Primera etapa: variables de entrada.

    posicion = entrada(1);
    dposicion = entrada(2);
    kp = entrada(3);
    kd = entrada(4);

    e = kp*posicion;
    r = kd*dposicion;

%Segunda etapa: partición del universo de discurso.

%Posición del carro.

    c_po = [-.35 -.175 -.0584 0 .0584 .175 .35];

%Derivada de la posición del carro.

    c_dp = [-2.1 -1.05 -.35 0 .35 1.05 2.1];

%Evaluación de funciones de membresía.

%Posición del carro.

    po = [p_medtrapi(c_po(1),c_po(2),e)
          p_triang(c_po(1),c_po(2),c_po(4),e)
          p_trapez(c_po(2),c_po(3),c_po(5),c_po(6),e)
          p_triang(c_po(4),c_po(6),c_po(7),e)
          p_medtraps(c_po(6),c_po(7),e)];
```



%Derivada de la posición del carro.

```
dp = [p_medtrapi(c_dp(1),c_dp(2),r)
      p_triang(c_dp(1),c_dp(2),c_dp(4),r)
      p_trapez(c_dp(2),c_dp(3),c_dp(5),c_dp(6),r)
      p_triang(c_dp(4),c_dp(6),c_dp(7),r)
      p_medtraps(c_dp(6),c_dp(7),r)];
```

%Tercera etapa: proposición de valores de salida.

```
k1 = 5;
k2 = 2.49;
k3 = 1.66;
k4 = .83;
k5 = 0;
```

%Base de reglas Mac Vicar-Whelan.

```
      %Ng  Np  Z   Pp  Pg
bdr = [k1  k2  k3  k4  k5  %Ng
      k2  k3  k4  k5 -k4  %Np
      k3  k4  k5 -k4 -k3  %Z
      k4  k5 -k4 -k3 -k2  %Pp
      k5 -k4 -k3 -k2 -k1] %Pg

per = zeros(size(bdr));
ind1 = find(po > 0);
ind2 = find(dp > 0);

mu_d = 0;
mu_n = 0;
```

%Cuarta etapa: defuzzificación por método de peso promedio.

```
for i = min(ind1) : max(ind1)
for j = min(ind2) : max(ind2)
    xa = [po(i) dp(j)];
    per(i,j) = min(xa);
    mu_d = mu_d + per(i,j);
    mu_n = mu_n + per(i,j)* bdr(i,j);
```

```

end
end

```

```
%salida.
```

```
u = mu_n / mu_d;
```

#### E.4.5.2. Control *PD* difuso para el péndulo

De manera análoga al programa anterior, se tienen las mismas etapas para el caso del controlador *PD* difuso para el péndulo.

```
function[u] = fuzzy_pendolo(entrada)
```

```
%Primera etapa: variables de entrada.
```

```

theta = entrada(1);
dtheta = entrada(2);
kp = entrada(3);
kd = entrada(4);

```

```

e = kp*theta;
r = kd*dtheta;

```

```
%Segunda etapa: partición del universo de discurso.
```

```
%Posición angular del péndulo.
```

```
p_po = [-.262 -.131 -.0437 0 .0437 .131 .262];
```

```
%Derivada de la posición angular.
```

```
p_dp = [-.507 -.2532 -.0844 0 .0844 .2532 .507];
```

```
%Evaluación de las funciones de membresía.
```

```
%Posición angular del péndulo.
```

```

po=[p_medtrapi(p_po(1),p_po(2),e)
    p_triangu(p_po(1),p_po(2),p_po(4),e)
    p_trapez(p_po(2),p_po(3),p_po(5),p_po(6),e)

```

```

    p_triang(p_po(4),p_po(6),p_po(7),e)
    p_medtraps(p_po(6),p_po(7),e)];

%Derivada de la posición angular del péndulo.

dp=[p_medtrapi(p_dp(1),p_dp(2),r)
    p_triang(p_dp(1),p_dp(2),p_dp(4),r)
    p_trapez(p_dp(2),p_dp(3),p_dp(5),p_dp(6),r)
    p_triang(p_dp(4),p_dp(6),p_dp(7),r)
    p_medtraps(p_dp(6),p_dp(7),r)];

%Tercera etapa: proposición de valores de salida.

k1 = 5;
k2 = 2.49;
k3 = 1.66;
k4 = .83;
k5 = 0;

%Base de reglas Mac Vicar-Whelan.

      %Ng  Np  Z   Pp  Pg
bdr = [k1  k2  k3  k4  k5  %Ng
       k2  k3  k4  k5 -k4  %Np
       k3  k4  k5 -k4 -k3  %Z
       k4  k5 -k4 -k3 -k2  %Pp
       k5 -k4 -k3 -k2 -k1] %Pg

    per = zeros(size(bdr));
    ind1 = find(po > 0);
    ind2 = find(dp > 0);

    mu\_d = 0;
    mu\_n = 0;

%Cuarta etapa: defuzzificación por método de peso promedio.

    for i = min(ind1) : max(ind1)
    for j = min(ind2) : max(ind2)
        xa = [po(i) dp(j)];

```

```

    per(i,j) = min(xa);
    mu\_d = mu\_d + per(i,j);
    mu\_n = mu\_n + per(i,j)* bdr(i,j);
end
end

```

%Salida.

```

u = mu_n / mu_d;

```

#### E.4.6. Simulación con una función de membresía $L$ , 3 triangulares y una $\Gamma$

En esta sección se presenta el programa que calcula el control  $PD$  difuso sólo para el carro, el cual está dividido en las siguientes etapas: en la primera se declaran las variables de entrada como son el error, su derivada, la ganancia proporcional y la derivativa, mientras que la partición del universo de discurso, así como el tipo y número de funciones de membresía se realiza en la segunda etapa. En la tercera etapa se proponen los valores de la base de reglas y se genera utilizando el criterio Mac Vicar-Whelan. En la última etapa se realiza la defuzzificación por centro de gravedad por medio del mínimo y se obtiene la salida del controlador  $PD$  difuso.

##### E.4.6.1. Control $PD$ difuso para el carro

```

function[u] = fuzzy_carro(entrada)

```

%Primera etapa: variables de entrada.

```

    posicion = entrada(1);
    dposicion = entrada(2);
    kp = entrada(3);
    kd = entrada(4);

    e = kp*posicion;
    r = kd*dposicion;

```

%Segunda etapa: partición del universo de discurso.

%Posición del carro.

```

c_po = [-.35 -.175 0 .175 .35];

%Derivada de la posición del carro.

c_dp = [-2.1 -1.05 0 1.05 2.1];

%Evaluación de funciones de membresía.

%Posición del carro.

le = length(c_po);
po(1) = p_medtrapi(c_po(1), c_po(2), e);
for i = 2 : le-1
    po(i) = p_triangu(c_po(i-1), c_po(i), c_po(i+1), e);
end
po(le) = p_medtraps(c_po(le-1), c_po(le), e);

%Derivada de la posición del carro.

lve = length(c_dp);
dp(1) = p_medtrapi(c_dp(1), c_dp(2), r);
for i = 2 : lve-1
    dp(i) = p_triangu(c_dp(i-1), c_dp(i), c_dp(i+1), r);
end
dp(lve) = p_medtraps(c_dp(lve-1), c_dp(lve), r);

%Tercera etapa: proposición de valores de salida.

k1 = 5;
k2 = 2.49;
k3 = 1.66;
k4 = .83;
k5 = 0;

%Base de reglas Mac Vicar-Whelan.

%Ng Np Z Pp Pg
bdr = [k1 k2 k3 k4 k5 %Ng
       k2 k3 k4 k5 -k4 %Np
       k3 k4 k5 -k4 -k3 %Z

```

```

        k4  k5 -k4 -k3 -k2  %Pp
        k5 -k4 -k3 -k2 -k1] %Pg

    per = zeros(size(bdr));
    ind1 = find(po > 0);
    ind2 = find(dp >0);

    mu_d = 0;
    mu_n = 0;

%Cuarta etapa: defuzzificación por método de peso promedio.

    for i = min(ind1) : max(ind1)
    for j = min(ind2) : max(ind2)
        xa = [po(i) dp(j)];
    per(i,j) = min(xa);
    mu_d = mu_d + per(i,j);
    mu_n = mu_n + per(i,j)* bdr(i,j);
    end
    end

%Salida.

    u = mu_n / mu_d;

```

#### E.4.6.2. Control *PD* difuso para el péndulo

De manera análoga al programa anterior, se tienen las mismas etapas para el caso del controlador *PD* difuso para el péndulo.

```
function[u] = fuzzy pendulo(entrada)
```

```
%Primera etapa: variables de entrada.
```

```

    theta = entrada(1);
    dtheta = entrada(2);
    kp = entrada(3);
    kd = entrada(4);

```

```
e = kp*theta;
r = kd*dtheta;

%Segunda etapa: partición del universo de discurso.

%Posición angular del péndulo.

p_po = [-.262 -.131 0 .131.262];

%Derivada de la posición angular del péndulo.

p_dp = [-.507 -.2532 0 .2532 .507];

%Evaluación de las funciones de membresía.

%Posición angular del péndulo.

le = length(p_po);
po(1) = p_medtrapi(p_po(1), p_po(2), e);
for i = 2 : le-1
    po(i) = p_triangu(p_po(i-1), p_po(i), p_po(i+1), e);
end
po(le) = p_medtraps(p_po(le-1), p_po(le), e);

%Derivada de la posición angular del péndulo.

lve = length(p_dp);
dp(1) = p_medtrapi(p_dp(1), p_dp(2), r);
for i = 2 : lve-1
    dp(i) = p_triangu(p_dp(i-1), p_dp(i), p_dp(i+1), r);
end
dp(lve) = p_medtraps(p_dp(lve-1), p_dp(lve), r);

%Tercera etapa: proposición de valores de salida.

k1 = 5;
k2 = 2.49;
k3 = 1.66;
```

```

k4 = .83;
k5 = 0;

%Base de reglas Mac Vicar-Whelan base de reglas.

      %Ng  Np  Z   Pp  Pg
bdr = [k1  k2  k3  k4  k5  %Ng
      k2  k3  k4  k5 -k4  %Np
      k3  k4  k5 -k4 -k3  %Z
      k4  k5 -k4 -k3 -k2  %Pp
      k5 -k4 -k3 -k2 -k1] %Pg

  per = zeros(size(bdr));
  ind1 = find(po > 0);
  ind2 = find(dp > 0);

  mu_d = 0;
  mu_n = 0;

%Cuarta etapa: defuzzificación por método de peso promedio.

  for i = min(ind1) : max(ind1)
  for j = min(ind2) : max(ind2)
    xa = [po(i) dp(j)];
    per(i,j) = min(xa);
    mu_d = mu_d + per(i,j);
    mu_n = mu_n + per(i,j)* bdr(i,j);
  end
  end

%salida.

  u = mu_n / mu_d;

```

## E.5. Tablas de ganancias



**Cuadro E.1:** Ganancias del controlador *PD* difuso con dos funciones de membresía.

Ganancias	Sin cámara	Con cámara
$L_1$	100	200
$Kp_1$	-35	-9.7
$Kd_1$	-25	-22.5
$Ku_1$	30	30
$L_2$	200	200
$Kp_2$	-10	-4.5
$Kd_2$	-20	-25
$Ku_2$	20	15

**Cuadro E.2:** Ganancias del controlador *PD* difuso con cinco funciones de membresía.

Ganancias	$L/3$ triangulares/ $\Gamma$	$L$ /triangular/trapezoidal/triangular/ $\Gamma$
$Kp_1$	1.8	1.6
$Kd_1$	10	7.5
$Ku_1$	1.8	2
$Kp_2$	.07	.06
$Kd_2$	20	26
$Ku_2$	65	.5

# Glosario

**Actuador.** Dispositivo capaz de convertir energía eléctrica, hidráulica u otro tipo de energía en movimiento.

**Algoritmo.** Conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución de un problema.

**Automatización.** Ciencia que trata de sustituir en un proceso el operador humano por un determinado dispositivo, generalmente electromecánico.

**Base de reglas.** Conjunto de fórmulas lógicas que describen las relaciones o las funciones del mundo real, tales como se usan en muchos programas de inteligencia artificial como, por ejemplo, los de sistemas expertos para ejecutar inferencias. Cada regla de la base de reglas es una proposición lógica, aunque puede adoptar la forma exigida por uno cualquiera de los diversos formatos en uso. Se afirma que un sistema experto es un programa que contiene un motor de inferencia generalizado y una base de reglas particularizada. En esa nomenclatura, base de reglas y base de conocimiento son sinónimos.

**Computadora.** Es un sistema digital, capaz de recibir y procesar datos a partir de un grupo de instrucciones denominadas programas. La característica principal que la distingue de otros dispositivos similares, es que puede realizar tareas muy diversas cargando distintos programas en la memoria para que el procesador los ejecute.

**Control difuso.** Sistema de control basado en lógica difusa.

**Control.** Proceso mediante el cual un sistema es llevado a parámetros preestablecidos.

**Determinismo.** Explicación de la realidad basada en la existencia de productores de resultados predecibles. Los programas determinísticos se ramifican al llegar a un IF ... THEN, sólo en base a condiciones absolutas. El determinismo aplica habitualmente lógica dicotómica para verificar variables de tal manera de mantener bajo control el flujo del programa, llevando a éste hacia la producción de

resultados deseados. Cuanto más una técnica de programación sea comandada por los datos, tanto menos predecible es el resultado.

**Estabilidad.** Condición en la cual las variables críticas de un sistema dinámico se mantienen invariables o permanecen dentro de unos límites determinados.

**Grados de libertad.** Número de coordenadas que describen de manera única la posición de todos los eslabones de un sistema.

**Hardware.** Se dice de cualquier componente físico relacionado con cierta tecnología.

**Heurística.** Manera de alcanzar un objetivo basada en la experiencia más que en el cálculo. Esta técnica no garantiza un resultado cierto (comparada con un algoritmo, el cual cuando se aplica produce siempre el resultado deseado). Los programas de ajedrez juegan, en gran medida, de manera heurística.

**Identificación.** Conjunto de métodos para la obtención de modelos matemáticos a partir de datos experimentales de las entradas y salidas de un sistema. Evitándose la obtención de un modelo a partir de complejas leyes.

**Incertidumbre.** En teoría de la información, la certidumbre es el grado en que la información se puede considerar verdadera, completa y digna de fe. La incertidumbre se origina a partir de elementos de datos falsos o de un equívoco, a partir de datos incompletos o de un contexto ambiguo. La confianza es la respuesta humana a la certidumbre. Por ello ciertos modelos de información usan valores de confianza.

**Inferencia.** Proceso mental por el cual se extraen conclusiones a partir de premisas más o menos explícitas, proceso resultante ya sea del sentido común, ya sea de silogismos informales y formales, o bien por aplicación de las reglas muy detallistas y cálculos de la inferencia estadística.

**Inteligencia artificial.** Ciencia que intenta la creación de programas para máquinas que imiten el comportamiento y la comprensión humana.

**Inteligencia computacional.** Área de investigación que tiene por objetivo el desarrollo de técnicas computacionales inspiradas en la observación de los mecanismos exitosos aplicados por la naturaleza para la solución de sus problemas.

**Lenguaje.** En informática, conjunto de caracteres e instrucciones utilizado para escribir programas de ordenador.

**Lógica.** Derivado del griego clásico logos (la razón, principio que gobierna al universo), un conjunto de reglas usadas para gestionar inferencias creíbles. Aristóteles recomienda una lógica dicotómica, verdadero-falso. Los filósofos orientales se inclinan más bien a usar una lógica difusa multi-valorada. Ambas técnicas se están usando para modelar los procesos cognitivos humanos en la computadora.

**Modelo matemático.** Es la representación por medio de ecuaciones de la dinámica de un sistema. Es el tipo de modelo más importantes para la ciencia y la tecnología.

**Muestreo.** Proceso de transformación de una señal en tiempo continuo en una de tiempo discreto. Tipos de muestreo: periódico, de orden múltiple, multifrecuencia (múltiples frecuencias), aleatorio.

**Máquina.** Artificio o conjunto de aparatos combinados para recibir cierta forma de energía, transformarla y restituirla en otra más adecuada o para producir un efecto determinado.

**Módulo.** Es un componente autocontrolado de un sistema, el cual posee una interfaz bien definida hacia otros componentes; algo es modular si es construido de manera tal que se facilite su ensamblaje, acomodamiento flexible y reparación de sus componentes.

**Optimización.** Procedimiento en el cual se determina la mejor (óptima) solución a un problema. Para que la optimización sea significativa debe existir una función objetivo y debe existir más de una solución factible (solución que no viola las restricciones impuestas al problema).

**Planta.** Parte de un equipo o un conjunto de las partes de una máquina que funcionan juntas. Ejemplos: dispositivo mecánico, horno de calefacción, reactor químico, nave espacial, etc.

**Potenciómetro.** Instrumento de medición de potencia. El potenciómetro original es un tipo de puente de circuito para medir voltajes. La palabra se deriva de “voltaje potencial” y “potencial” era usado para referirse a “fuerza”.

**Proceso.** Operación o desarrollo natural progresivamente continuo, marcado por una serie de cambios graduales que se suceden uno al otro en una forma relativamente fija y que conducen a un resultado o propósito determinados. Operación artificial o voluntaria progresiva que consiste en una serie de acciones o movimientos controlados, sistemáticamente dirigidos hacia un resultado o propósito determinados. Ejemplos: procesos químicos, económicos y biológicos.

**Programa.** Secuencia de instrucciones que obliga a la computadora realizar una tarea determinada. Serie de instrucciones que sigue el ordenador para llevar a cabo una tarea determinada.

**Retroalimentación.** En el proceso de control consiste en la reinyección de la salida (o algunas salidas) a la entrada del sistema, con el fin de mantener cierto desempeño.

**Robot.** Dispositivo generalmente mecánico, que desempeña tareas automáticamente, ya sea de acuerdo a supervisión humana directa, a través de un programa predefinido o siguiendo un conjunto de reglas generales. Generalmente estas tareas reemplazan, asemejan o extienden el trabajo humano, como ensamblaje en manufactura, manipulación de objetos pesados o peligrosos, trabajo en el espacio, etc.

**Robótica.** Es una rama de la tecnología, que estudia el diseño y construcción de máquinas capaces de desempeñar tareas repetitivas o peligrosas para el ser humano. Las ciencias y tecnologías de las que deriva podrían ser: el álgebra, los autómatas programables, las máquinas de estados, la mecánica, la electrónica y la informática.

**Sensor.** Dispositivo que convierte un parámetro físico (como temperatura, presión, flujo, velocidad, posición) en una señal eléctrica. En algunos casos se le considera un sinónimo de transductor, pero un verdadero sensor contiene un sistema de acondicionamiento de la señal, de manera que es mucho más sencillo realizar una medición.

**Simulación.** Es el proceso de diseñar un modelo de un sistema real y llevarlo a término experiencias con él, con la finalidad de comprender el comportamiento del sistema.

**Sistema de control.** Sistema diseñado para lograr el comportamiento deseado de un sistema dinámico. Puede ser digital (microprocesado) o analógico (por ejemplo, circuitos eléctricos, sistemas hidráulicos, sistemas mecánicos, etc.), manual o automático.

**Sistema en tiempo real.** Un sistema de tiempo real (STR) es un sistema informático en el que es significativo el tiempo en el que se producen las acciones. Las acciones deben realizarse dentro de un intervalo de tiempo determinado.

**Sistema experto.** Un capítulo de la inteligencia artificial que ejecuta, a partir de una base de conocimientos o de reglas, algunas tareas que normalmente requieren cierto nivel de experiencia por parte del humano. Estos programas

usualmente logran satisfacer inferencias usando dicho conjunto de reglas para interpretar inputs y generar un output que suene a inteligente.

**Sistema subactuado.** Sistema con menos actuadores que grados de libertad.

**Sistema.** Conjunto de elementos unidos, coordinados y en interacción para lograr unos objetivos específicos. Un sistema no necesariamente es físico y puede aplicarse a fenómenos abstractos y dinámicos, tales como los que se encuentran en economía. Por tanto, la palabra sistema debe interpretarse como una implicación de sistemas físicos, biológicos, económicos y similares.

**Software.** Se dice de todos los componentes intangibles de una computadora, es decir, al conjunto de programas y procedimientos necesarios para hacer posible la realización de una tarea específica.

**Tiempo real.** Modalidad de funcionamiento de un sistema de proceso de datos que controla una actividad en curso, con un tiempo de respuesta prácticamente nulo a la recepción de las señales de entrada. Cuando una acción realizada en el ordenador progresa paralelamente al tiempo del mundo real, se dice que la acción ocurre en tiempo real. Un ejemplo sería un programa que mostrara el desarrollo de una colonia de bacterias que se reprodujeran con el mismo ritmo de crecimiento con que lo haría una colonia real.

**Visión artificial.** Conjunto de técnicas de adquisición y tratamiento computacional de imágenes que permiten obtener información del entorno a estudiar mediante métodos visuales.

**Visual servoing.** Es un enfoque para el control de robots basado en la percepción visual, involucrando el uso de cámaras para controlar la posición (y/o velocidad) del robot relativa a su entorno.

# Bibliografía

- [1] Andersen N. A., Ravn O. and Sorensen A. T., “Real-time vision based control of servomechanical systems”, 2nd International Symposium Experimental Robotics, 1991.
- [2] Aranda López N., Díaz Montiel M. and Galván Zavala V., “Control de un sistema subactuado usando visión artificial”, Tesis de licenciatura UAEH, Febrero, 2005.
- [3] Aranda López N., “Estimación y control neuronal de un sistema subactuado usando visual servoing”, Tesis de maestría, UAEH, Mayo, 2007.
- [4] Brown G. and Hall A., “Dynamic behavior and design of servomechanism”, ASEM, pp.503-524, 1946.
- [5] Chung C.C and Hauser J., “Nonlinear control of a swinging pendulum”, Automatica, vol. 31, no. 6, pp. 851-862, 1995.
- [6] Corke P.I, Hager G.D. and Hutchinson S., “A Tutorial on visual servo control”, IEEE Transactions on Robotics and Automation; vol. 12, no. 5, pp. 651-670, 1996.
- [7] Corke P.I., Hager G.D. and Hutchinson S., *Visual Control of Robots: High-Performance Servoing*, John Wiley, 1996.
- [8] Espinoza Quesada S., “Control de un sistema subactuado usando visión artificial mediante un DSP”, Tesis de maestría UAEH, Septiembre, 2006.
- [9] Fantoni I. and Lozano R., *Non-linear Control for Underactuated Mechanical System*, Springer Verlag, London, 2002.
- [10] García Cerezo A., *Aplicaciones actuales de la lógica borrosa, Automática y control.*, vol. 216, pp. 113-119, Septiembre, 1991.
- [11] Hall A., “Application of circuit theory to the design of servomechanism”, JFI, vol. 240, no. 4, pp. 279-307, 1946.

- 
- [12] Hamel T. and Mahony R., “Visual servoing of a class of under-actuated dynamic rigid-body system”, 39th IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, 2000.
- [13] Hopcorff J., “Máquinas de Turing. Investigación y ciencia”, 1984.
- [14] Isidori A., *Nonlinear Control Systems: An Introduction*, 2nd Ed. Springer-Verlag, N. Y. Inc., 1989.
- [15] Jain A. and Rodriguez G., “An analysis of the kinematics and dynamics of underactuated manipulators,” IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol. 9, no. 4, pp. 411-422, Aug., 1993.
- [16] Jang R., Sun C. and Mizutani E., “Neuro fuzzy and soft computing”, Prentice-hall, 1997.
- [17] Kelly R., “Robust asymptotically stable visual servoing of planar robots”, IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 12, no. 5, pp. 759-766, 1996.
- [18] Klir G.J. and Yuan Bo, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logics: Theory and Applications*. Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [19] Mamdani E. H. and Assilian S., “An experiment in linguistic synthesis whit a fuzzy logic controller”, International Journal of Man-Machine Studies, vol. 7, no. 1, pp. 1-13, 1975.
- [20] Mamdani E. H., “Application of fuzzy control algothims for control of simple dinamic plant”, Proceeding IEEE, vol. 121, no.12, pp. 1585-1588, USA, 1974.
- [21] Mamdani E. H., “Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic systems”, Fuzzy Sets and Systems, vol. 26, pp. 1182-1191, 1977.
- [22] Marks, “Intelligence: computational versus artificial”, IEEE, vol. 5, pp. 737-739, 1993.
- [23] Montes Austria Y., “Visual servoing de un sitema subactuado empleando wavelets 2D mediante un DSP”, Tesis de maestría UAEH, Noviembre, 2006.
- [24] Moravec H., “The future of robot and human intelligence”, Harvard university press, 1990.
- [25] Número especial sobre Computational Inteligence de la revista Proceedings of the IEEE, septiembre 1999.
- [26] Ogata K., *System Dynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1978.



- 
- [27] Oliveira S.R., *Sistemas Inteligentes-Fundamentos y Aplicaciones*. Manole Ltda, 2003.
- [28] Quanser Innovate Educate., *Lineal motion servo plants: IPO1, User manual*, 2002.
- [29] Ramos L.E., Castillo-Toledo B. and Álvarez J., “Nonlinear regulation of an underactuated system”, *Proceeding of the 1997 IEEE ICRA*, pp. 3288-3293, Albuquerque, New Mexico, April, 1997.
- [30] Reyhanoglu M., Van Der Schaft A.J., McClamroch N.H. and Kolmanovsky I., “Dynamics and control of a class of underactuated mechanical systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, pp. 1663-1671, 1999.
- [31] Spong M.W. and Block D.J., “The pendubot: A mechatronic system for control research and education”, *Proceeding of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, 1995.
- [32] Spong M.W. and Vidyasagar M., *Robot Dynamics and Control*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1989.
- [33] Takagi T. and Sugeno M., “Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control”, *IEEE Trans. Systems Man and Cybernetics*, vol. 15, no. 1, pp. 116-132, 1985.
- [34] The MathWorks, Inc., 1994-2007.
- [35] Tsukamoto Y., *An approach to fuzzy reasoning method*. En: Gupta M. Rammo-han K., Yager R. R. (eds), *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications* pp. 137- 149, North-Holland, 1979.
- [36] Weiss H., “Constant speed control theory”, vol.6, no. 4, pp.147-152, 1939.
- [37] Wiener N., “Cybernetics”, MIT press, Cambridge, 1948.
- [38] Wiener N., “Extrapolation interpolation and smoothing time series”, MIT press, Cambridge, 1949.
- [39] Zadeh L., “Fuzzy logic, neural networks and soft computing”, *Communication of the ACM*, pp. 77-84, Marzo 1994.
- [40] Zadeh L. A., *Fuzzy Sets, Information & Control.*, vol. 8, no. 1, pp. 338-353, 1965.
- [41] Zadeh L. A., “Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision process”, *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 1, pp. 28-44, 1973.

- [42] Zhang H. and Ostrowski J.P., “Visual servoing with dynamics: control of an unmanned blimp”, IEEE International Conference on Robotics and Automation, Detroit, Michigan, 1999.