



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo  
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

---

---

Área Académica de Matemáticas y Física

---

ESTUDIO ESTADÍSTICO DE LAS PROPIEDADES DE  
DISPERSIÓN Y TRANSPORTE EN LA TRANSICIÓN  
DE SIMETRÍA ORTOGONAL A UNITARIA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN FÍSICA Y TECNOLOGÍA  
AVANZADA

PRESENTA

Eladio Rivera Mociños

ASESORADO POR

Dr. José Antonio Méndez Bermúdez

Dr. Fernando Donado Pérez (Coasesor)

Pachuca Hgo.  
Abril de 2011



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	3
1.2. Modelo . . . . .	6
1.3. Organización del trabajo . . . . .	6
<b>2. Propiedades espectrales</b>	<b>7</b>
2.1. Estadística de niveles . . . . .	7
<b>3. Propiedades de transporte</b>	<b>11</b>
3.1. Arreglo dispersivo . . . . .	11
3.2. Predicciones de la Teoría de Matrices Aleatorias . . . . .	13
3.3. Acoplamiento perfecto . . . . .	14
3.4. Promedio de los elementos de la matriz de dispersión . . . . .	17
3.5. Distribución de probabilidad de la conductancia . . . . .	18
3.6. Promedio de la conductancia, varianza de la conductancia y el ruido cuántico . . . . .	19
<b>4. Conclusiones</b>	<b>31</b>
<b>A. Gráficos complementarios</b>	<b>33</b>

# Resumen

El rompimiento de la simetría de reversibilidad temporal (simetría de inversión temporal) en un sistema caótico cuantizado corresponde a la transición de simetría ortogonal a unitaria en ensambles de matrices aleatorias. En esta Tesis estudiamos, con un enfoque estadístico, las propiedades de dispersión y de transporte de sistemas caóticos cuantizados utilizando el modelo paramétrico de matrices aleatorias  $\mathbf{H}(\alpha) = \mathbf{S} + i\alpha\mathbf{A}$  que interpola del ensamble con simetría ortogonal (cuando  $\alpha = 0$ ) al ensamble con simetría unitaria (cuando  $\alpha = 1$ ). En general, observamos que el promedio de los elementos de la matriz de dispersión, la conductancia promedio, la varianza de la conductancia, la distribución de probabilidad de la conductancia y el ruido cuántico sufren una transición suave de simetría ortogonal a simetría unitaria como función de  $\alpha$ . Además, mostramos que las propiedades arriba mencionadas son invariantes ante el parámetro  $\gamma = \alpha\sqrt{N}$ , donde  $N$  es el tamaño de la matriz  $\mathbf{H}(\alpha)$ .

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

La Teoría de Matrices Aleatorias fue introducida como una poderosa herramienta física-matemática en la década de los 60's por Wigner, Dyson y Gaudin [1], donde la idea original está enfocada al entendimiento de las propiedades estadísticas de espectros energéticos de núcleos pesados, obtenidos experimentalmente a partir de reacciones nucleares [2]. En años recientes la Teoría de Matrices Aleatorias ha retomado un renovado interés principalmente por dos descubrimientos. El primero muestra que las propiedades estadísticas del espectro y de las autofunciones de sistemas caóticos cuantizados<sup>1</sup> pueden ser descritas por ensambles de matrices aleatorias [1, 3, 4, 5]. El segundo muestra que las propiedades estadísticas de la conductancia de sistemas complejos pueden ser entendidas mediante modelos de matrices aleatorias [6].

Para describir las propiedades estadísticas de sistemas caóticos cuantizados conservativos por medio de ensambles de matrices aleatorias y dependiendo de la simetría del sistema en consideración se pueden utilizar uno de los tres ensambles universales introducidos por Metha [1]. El Ensamble Gaussiano Ortogonal (GOE, por sus siglas en inglés) describe a sistemas con simetría antiunitaria (simetría asociada a inversión temporal), mientras que el Ensamble Gaussiano Unitario (GUE, por sus siglas en inglés) caracteriza sistemas sin tal simetría [4]. El tercer ensamble conocido como Ensamble Gaussiano Simpléctico (GSE, por sus siglas en inglés) caracteriza a sistemas con espín total no entero [7].

Uno de los resultados más relevantes de la Teoría de Matrices Aleatorias es el uso de la forma de la distribución del espaciamiento entre niveles  $P(s)$ ,<sup>2</sup> para la distancia  $s$  entre niveles de energía consecutivos, como signatura de la dinámica clásica en el régimen cuántico. En particular ha sido posible entender y comprobar:

- (i) la afirmación hecha por Berry y Tabor [8] de que una  $P(s)$  de tipo Poisson

$$P_{\text{Poisson}}(s) = \exp(-s) \quad (1.1)$$

es característica de sistemas integrables en el límite clásico;

- (ii) la conjetura de Bohigas, Giannoni y Smith [3, 9] que dice que para sistemas que desarrollan una dinámica clásica globalmente caótica  $P(s)$  es del tipo Wigner-Dyson y depende de la simetría del sistema de la siguiente manera [10]: En el caso del GOE

$$P_{\text{GOE}}(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right), \quad (1.2)$$

---

<sup>1</sup>Un sistema caótico cuantizado es un sistema cuántico cuyo límite clásico muestra dinámica caótica.

<sup>2</sup>En el Capítulo 2 explicaremos como construir  $P(s)$ .

para el GUE

$$P_{\text{GUE}}(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi} s^2\right) \quad (1.3)$$

y finalmente para el GSE

$$P_{\text{GSE}}(s) = \frac{2^{18}}{3^6 \pi^3} s^4 \exp\left(-\frac{64}{9\pi} s^2\right) . \quad (1.4)$$

Como  $P(s)$  sólo depende de la simetría del sistema, diferentes sistemas caóticos cuantizados se caracterizan por la misma  $P(s)$ . Por ejemplo, en la Fig. 1.1 se muestra  $P(s)$  para 6 sistemas diferentes<sup>3</sup> pero todos con simetría ortogonal. Es claro que  $P(s)$  en todos estos casos es muy similar a  $P_{\text{GOE}}(s)$ . Note que la diferencia principal entre las tres distribuciones de Wigner-Dyson se da cuando  $s \rightarrow 0$ :  $P_{\text{GOE}}(s) \propto s$ ,  $P_{\text{GUE}}(s) \propto s^2$  y  $P_{\text{GSE}}(s) \propto s^4$ . Como ejemplo en la Fig. 1.2 se muestra  $P(s)$  para el oscilador anarmónico tridimensional con simetría ortogonal, unitaria y simpléctica junto con las tres distribuciones de Wigner-Dyson.

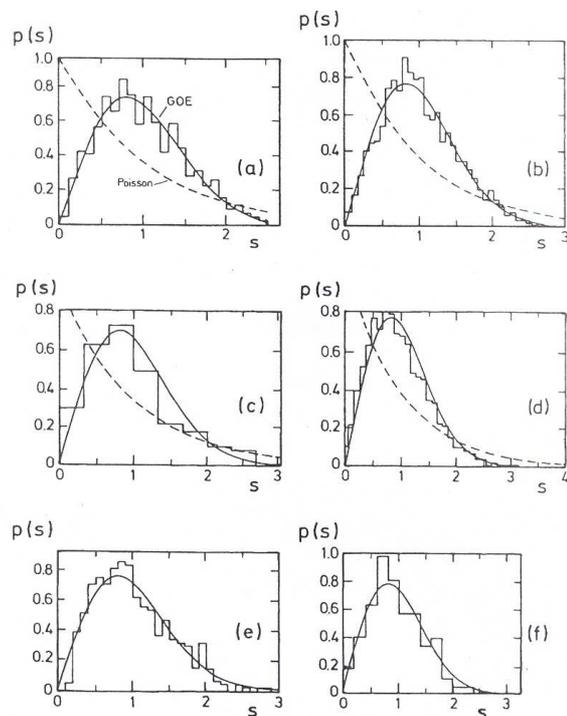


Figura 1.1: Distribución de espaciamientos de niveles  $P(s)$  (histogramas) para (a) un billar de Sinai, (b) el átomo de hidrógeno en un campo magnético intenso, (c) el espectro de excitación de una molécula de  $\text{NO}_2$ , (d) el espectro de resonancia de un bloque de cuarzo con forma de billar de Sinai, (e) el espectro de microondas de una cavidad caótica tridimensional y (f) el espectro de la vibración de una placa metálica con forma de un cuarto de estadio. Las líneas continuas son  $P_{\text{GOE}}(s)$  y las líneas punteadas son  $P_{\text{Poisson}}(s)$ . Figura tomada de [10].

<sup>3</sup>Uno de estos sistemas que se utiliza en la Fig. 1.1 es el billar de Sinai. Introducido por Yakov Sinai, éste es un billar en el que una partícula puntual se mueve en la región espacial bidimensional cuyas fronteras interna y externa son una circunferencia y un cuadrado, respectivamente. La dinámica de este billar es caótica.

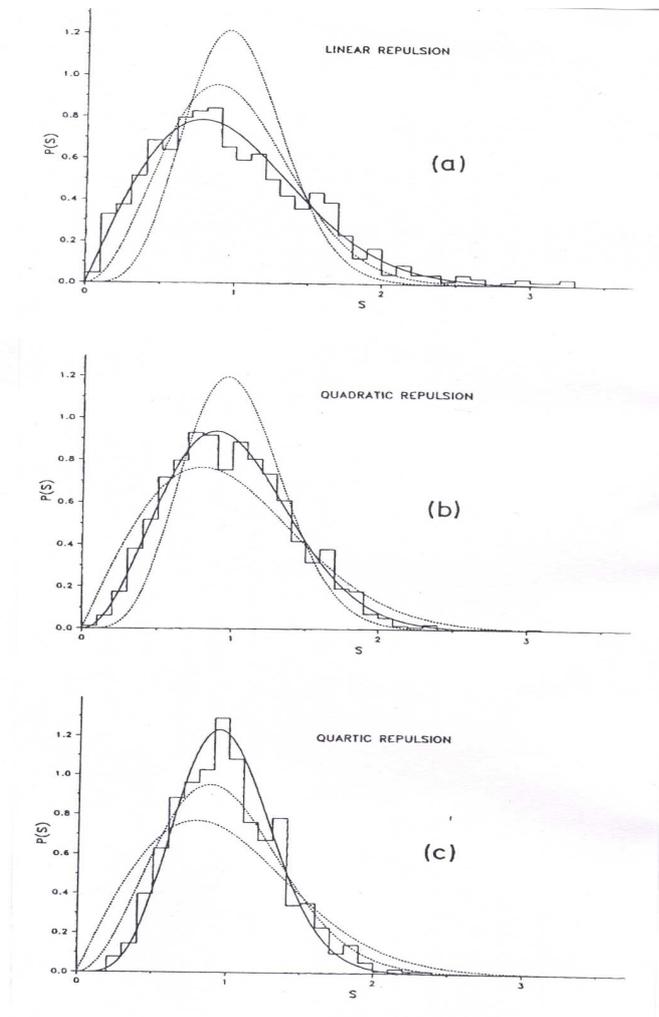


Figura 1.2: Distribución de espaciamentos de niveles  $P(s)$  (histogramas) para el oscilador anarmónico tridimensional que pertenece al ensamble (a) ortogonal, (b) unitario y (c) simpléctico. Las líneas corresponden a  $P_{GOE}(s)$ ,  $P_{GUE}(s)$  y  $P_{GSE}(s)$ . Figura tomada de [10].

Además de los sistemas que corresponden a los ensambles universales mencionados arriba, se pueden considerar familias de sistemas que muestran una transición continua entre dos ensambles. En especial, la transición entre el ensamble ortogonal y unitario es de gran interés porque corresponde al rompimiento de simetría antiunitaria en un sistema dinámico. Esta transición ha sido estudiada a fondo analíticamente [11, 12] (mediante modelos de matrices aleatorias), numéricamente [13, 14] (mediante la simulación de billares caóticos cuantizados con un campo magnético aplicado) y experimentalmente [15, 16, 17] (mediante experimentos de transmisión de microondas en billares macroscópicos con impurezas magnéticas). Sin embargo las propiedades de dispersión y de transporte en esta transición no han sido estudiadas a fondo.<sup>4</sup>

En esta Tesis nos damos a la tarea de estudiar numéricamente las propiedades de dispersión y de transporte en la transición de simetría ortogonal a unitaria. Como en nuestro estudio utilizamos

<sup>4</sup>Durante la realización de esta Tesis Kumar y Pandey publicaron dos artículos [18, 19] sobre el estudio de las propiedades de dispersión y de transporte en la transición GOE-GUE. Los resultados de estos artículos son complementarios a los reportados en esta Tesis.

un modelo de la Teoría de Matrices Aleatorias, esperamos que nuestros resultados sean universales y aplicables a una amplia variedad de sistemas, en particular a sistemas caóticos cuantizados.

## 1.2. Modelo

Como se mencionó anteriormente, un resultado importante de la Teoría de Matrices Aleatorias es que las propiedades estadísticas de los espectros y autofunciones sólo dependen de la simetría del Hamiltoniano. Si hay simetría de reversibilidad temporal (simetría de inversión temporal), la matriz Hamiltoniana correspondiente es real y simétrica. Hamiltonianos con esta simetría están representados por el Ensamble Gaussiano Ortogonal. Si tal simetría no está presente, la matriz Hamiltoniana es compleja y hermítica. En este caso dicho Hamiltoniano pertenece al Ensamble Gaussiano Unitario.

En esta Tesis utilizaremos el Hamiltoniano paramétrico [12, 13, 20, 21, 22, 23, 24, 25]

$$\mathbf{H} = \mathbf{S} + i\alpha\mathbf{A} , \quad (1.5)$$

donde  $\alpha$  es un parámetro que toma valores entre 0 y 1 y se le conoce con el nombre de parámetro de control [21]. En la expresión (1.5)  $\mathbf{S}$  denota una matriz real y simétrica de tamaño  $N \times N$  y  $\mathbf{A}$  denota una matriz antisimétrica de tamaño  $N \times N$  cuyos elementos son variables aleatorias estadísticamente independientes con distribución de probabilidad normal. La matriz  $\mathbf{A}$  juega el papel de perturbación a medida que variamos el parámetro  $\alpha$ . Cuando  $\alpha = 0$ ,  $\mathbf{H}$  es un elemento del GOE; es decir, nuestro Hamiltoniano toma la forma:

$$\mathbf{H} = \mathbf{S} . \quad (1.6)$$

Cuando  $\alpha = 1$ ,  $\mathbf{H}$  es un elemento del GUE.

La forma explícita del Hamiltoniano paramétrico, Ec. (1.5), es:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{2,1} & \cdots & S_{N,1} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & S_{N,N-1} \\ S_{N,1} & S_{N,N-1} & S_{NN} & \end{pmatrix} + i\alpha \begin{pmatrix} A_{1,1} & -A_{2,1} & \cdots & -A_{N,1} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & -A_{N,N-1} \\ A_{N,1} & A_{N,N-1} & A_{NN} & \end{pmatrix} . \quad (1.7)$$

## 1.3. Organización del trabajo

En el Capítulo 2 estudiamos las propiedades espectrales del modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5). En particular nos enfocaremos en la forma de la distribución de espaciamientos entre niveles energéticos  $P(s)$  como función del parámetro  $\alpha$ . A continuación construimos un sistema dispersivo acoplando terminales al modelo paramétrico de matrices aleatorias. Por ello en el Capítulo 3 definimos el arreglo dispersivo y estudiamos las propiedades de transporte del modelo. En particular nos enfocamos en los elementos de la matriz de dispersión, la distribución, promedio y varianza de la conductancia y el ruido cuántico como función de  $\alpha$  y del número de terminales acopladas. Finalmente, en el Capítulo 4 listamos las conclusiones obtenidas a partir del desarrollo de este trabajo.

## Capítulo 2

# Propiedades espectrales

En este capítulo se estudian las propiedades espectrales del modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5). En particular nos enfocaremos en la forma de la distribución de espaciamientos entre niveles energéticos como función del parámetro  $\alpha$ .

### 2.1. Estadística de niveles

Una herramienta ampliamente utilizada para el estudio del espectro de sistemas desordenados<sup>1</sup> y caóticos cuantizados es la distribución de espaciamientos entre niveles energéticos  $P(s)$ .  $P(s)$  se calcula de la siguiente manera: Dado un espectro de energías ordenado de manera creciente  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_N$  se definen los espaciamientos entre energías consecutivas  $\bar{s}_1 = E_2 - E_1, \bar{s}_2 = E_3 - E_2, \bar{s}_3 = E_4 - E_3, \dots, \bar{s}_{N-1} = E_N - E_{N-1}$ . A continuación se normalizan cada uno de los espaciamientos utilizando su promedio

$$s_i = \frac{\bar{s}_i}{\langle \bar{s} \rangle}. \quad (2.1)$$

Y finalmente se construye el histograma  $P(s)$ .

A continuación analizaremos la forma de  $P(s)$  como función de  $\alpha$  para el Hamiltoniano paramétrico de la Ec. (1.5), que de antemano sabemos que transitará entre  $P_{\text{GOE}}(s)$  y  $P_{\text{GUE}}(s)$  al variar  $\alpha$  entre 0 y 1. Vale la pena mencionar que la forma de  $P(s)$  en la transición GOE-GUE ha sido ampliamente estudiada [12, 13, 21, 22, 23, 24, 25], sin embargo, es importante que nosotros verifiquemos dicha transición para tener la certeza de que nuestros cálculos posteriores serán correctos.

En nuestro estudio utilizamos solamente una cuarta parte de cada uno de los espectros obtenidos al diagonalizar numéricamente<sup>2</sup> el Hamiltoniano paramétrico Ec. (1.5), ésto para evitar efectos del tamaño finito de las matrices. En la Fig. 2.1 mostramos como ejemplo dos espectros para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 100$ , uno con  $\alpha = 0$  y otro con  $\alpha = 1$ , y en la Fig. 2.2 mostramos las distribuciones de espaciamientos entre niveles consecutivos  $P(s)$  correspondientes junto con las predicciones de la Teoría de Matrices Aleatorias. Evidentemente la correspondencia entre nuestros cálculos numéricos y las predicciones analíticas es excelente, como se esperaba.

Ahora en la Fig. 2.3 reportamos  $P(s)$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 100$  y valores de  $\alpha$  entre 0 y 1. Se observa una transición suave de  $P_{\text{GOE}}(s)$  a  $P_{\text{GUE}}(s)$  como función de  $\alpha$ . Como ya lo mencionamos anteriormente  $P(s)$  ya ha sido estudiada tanto analítica como numéricamente [12, 13, 21, 22, 23, 24, 25]. Además en [24, 25] fué definido el

<sup>1</sup>Con sistemas desordenados nos referimos a sistemas cuánticos u ondulatorios no deterministas, es decir, sistemas con componentes aleatorias.

<sup>2</sup>La diagonalización numérica la realizamos con un programa en FORTRAN 90 que utiliza subrutinas comerciales.

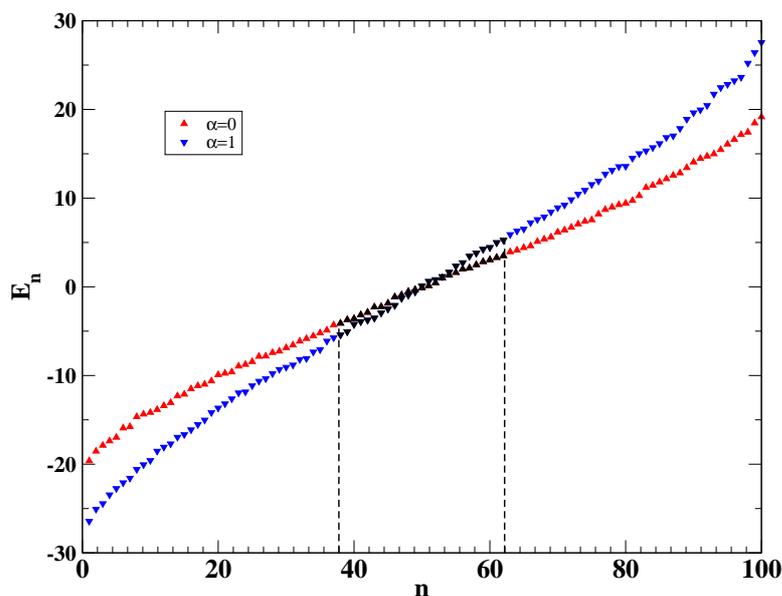


Figura 2.1: Ejemplos de espectros para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 100$  con  $\alpha = 0$  y 1. Sólo se utiliza el 25% del espectro alrededor de  $E = 0$  (en color negro) para construir  $P(s)$ .

parámetro  $\gamma$  ante el cual  $P(s)$  es invariante:

$$\gamma = \alpha\sqrt{N}. \quad (2.2)$$

Es decir, sin importar los valores de  $\alpha$  o  $N$ ,  $P(s)$  tendrá la misma forma para una  $\gamma$  fija.

En la Fig. 2.4 mostramos la invarianza de  $P(s)$  ante  $\gamma$ . Elegimos los valores  $\gamma^2 = 1/8$  y  $\gamma^2 = 1/2$  y para cada uno de estos valores utilizamos matrices de tamaños  $N = 50, 100, 200$  y  $400$ . Elegimos estos valores de  $\gamma$  por que son los que producen histogramas de  $P(s)$  claramente intermedios entre  $P_{\text{GOE}}(s)$  y  $P_{\text{GUE}}(s)$ . Evidentemente aún cuando cambiamos el tamaño de las matrices, los histogramas de  $P(s)$  caen uno sobre otro para el mismo valor de  $\gamma$ .

El parámetro  $\gamma$  es una cantidad muy importante en lo que se refiere a las propiedades espectrales del modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5). Será interesante investigar qué tan relevante es para las cantidades de transporte que estudiaremos en el siguiente capítulo.

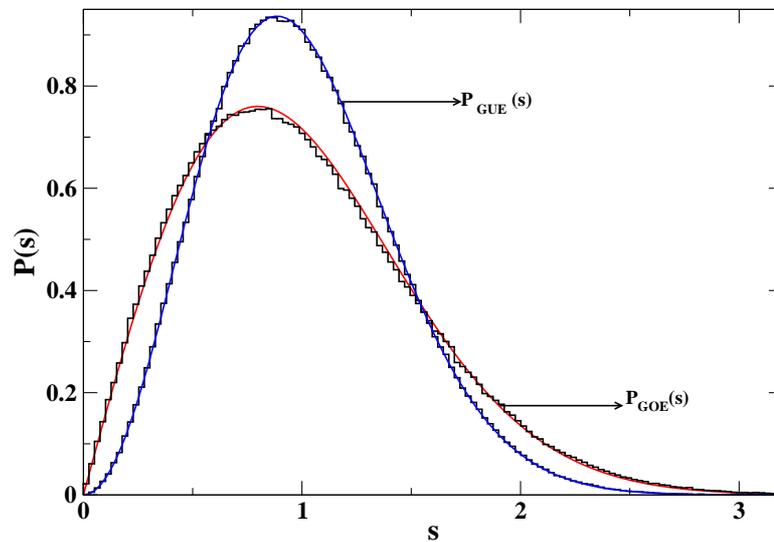


Figura 2.2: Distribución de espaciamientos entre niveles energéticos  $P(s)$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 100$  con  $\alpha = 0$  y 1. Utilizamos  $10^5$  datos para la construcción de cada histograma. Las curvas continuas corresponden a  $P_{GOE}(s)$  y  $P_{GUE}(s)$ , dadas por las Ecs. (1.2) y (1.3), respectivamente.

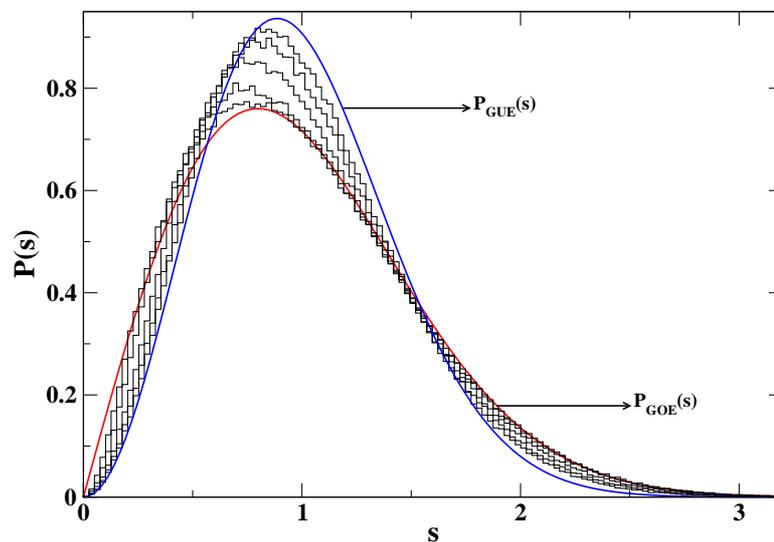


Figura 2.3: Distribución de espaciamientos entre niveles energéticos  $P(s)$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 100$  con  $\alpha = 0.02, 0.03, 0.05, 0.07$  y  $0.09$ . Utilizamos  $10^5$  datos para la construcción de cada histograma. Las curvas continuas corresponden a  $P_{GOE}(s)$  y  $P_{GUE}(s)$ , dadas por las Ecs. (1.2) y (1.3), respectivamente.

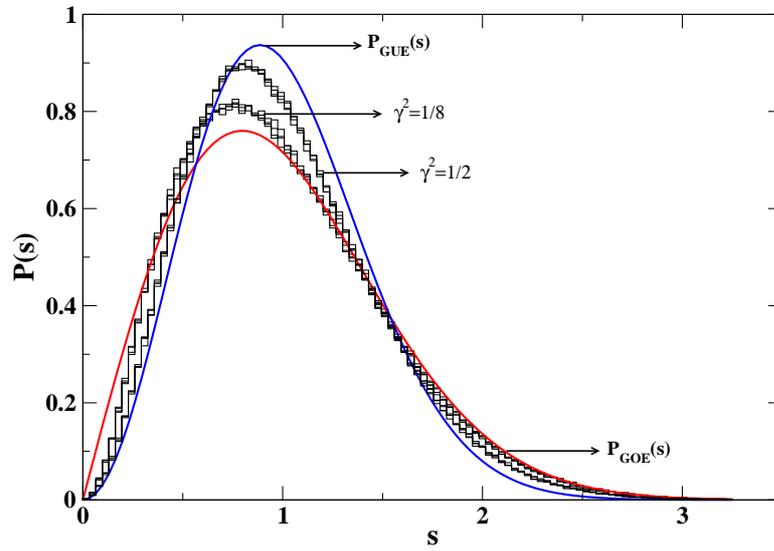


Figura 2.4: Distribución de espaciamientos entre niveles energéticos  $P(s)$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) con  $\gamma^2 = 1/8$  y  $\gamma^2 = 1/2$ . Para cada valor de  $\gamma$  se utilizaron matrices de tamaños  $N = 50, 100, 200$  y  $400$ . Utilizamos  $10^5$  datos para la construcción de cada histograma. Las curvas continuas corresponden a  $P_{\text{GOE}}(s)$  y  $P_{\text{GUE}}(s)$ , dadas por las Ecs. (1.2) y (1.3), respectivamente.

## Capítulo 3

# Propiedades de transporte

En este capítulo se estudian las propiedades de transporte del modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5). En particular nos enfocaremos en los elementos de la matriz de dispersión, la distribución, promedio y varianza de la conductancia y el ruido cuántico como función de  $\alpha$  y del número de terminales acopladas.

### 3.1. Arreglo dispersivo

En general un arreglo dispersivo se divide en dos partes: Un blanco o región de interacción que se supone desconocida y una región asintótica que se supone conocida. Ver Fig. 3.1. En el caso de nuestro arreglo dispersivo, la región de interacción estará representada por el Hamiltoniano paramétrico de la Ec. (1.5) y la región asintótica consistirá de terminales que se acoplan al blanco a través de las cuales se envían ondas (electrónicas o electromagnéticas). En el caso de blancos que representan a sistemas desordenados el acoplar una terminal cuasi-unidimensional con  $M$  modos abiertos es equivalente a acoplar  $M$  terminales unimodales. En este trabajo utilizaremos terminales que soportan un solo modo transversal, es decir terminales unimodales, porque representan alambres unidimensionales.

Para calcular las propiedades de transporte de nuestro arreglo dispersivo es necesario obtener la matriz de dispersión, matriz  $S$ , del sistema. La matriz  $S$  es una herramienta fundamental para el análisis del fenómeno de dispersión cuántico y electromagnético. La matriz  $S$  relaciona ondas que entran con ondas que salen, de una cierta región de interacción, de la siguiente manera:

$$V^{salen} = S V^{entran} , \quad (3.1)$$

donde  $V^{entran}$  y  $V^{salen}$  son vectores que especifican ondas que entran y ondas que salen de la región de interacción, respectivamente.

Consideramos  $2M$  terminales semi-infinitas<sup>1</sup> acopladas a la región de interacción. Cada terminal está descrita por un Hamiltoniano de tipo enlace fuerte definido por:

$$H_{terminal} = \sum_{n=1}^{-\infty} (|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|) . \quad (3.2)$$

Usando métodos estandarizados [26] la matriz de dispersión se puede escribir en la forma [27, 28]

$$S(E) = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} = \mathbf{1} - 2i \text{sen}(k) W^T \frac{1}{E - H_{ef}} W , \quad (3.3)$$

---

<sup>1</sup>Escogemos  $2M$  terminales porque así la matriz de dispersión se puede dividir en cuatro bloques que representan reflexión y transmisión. Si el número de terminales no es un número par la estructura de la matriz de dispersión es más complicada.

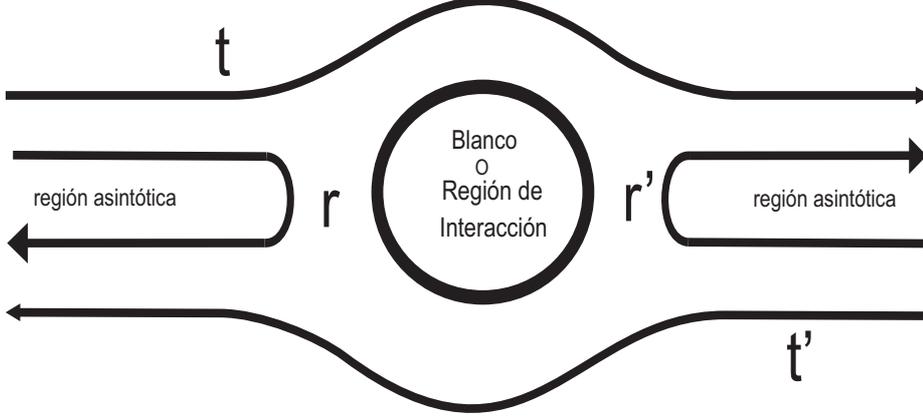


Figura 3.1: Diagrama esquemático de un arreglo dispersivo y elementos de la matriz de dispersión  $S$ .

donde  $\mathbf{1}$  es la matriz unitaria de tamaño  $2M \times 2M$ ,  $k = \arccos(E/2)$  es el vector de onda de las ondas que entran por las terminales y  $H_{ef}$  es un Hamiltoniano efectivo no hermitico dado por

$$H_{ef} = \mathbf{H} - e^{ik}WW^T . \quad (3.4)$$

Aquí,  $W$  es una matriz de tamaño  $N \times 2M$  que especifica el lugar donde las terminales se acoplan a la muestra representada por el Hamiltoniano paramétrico de la Ec. (1.5). Los elementos de  $W$  son iguales a cero o  $\epsilon$ , donde  $\epsilon$  es la magnitud del acoplamiento. Puesto que  $\arccos(E/2)$  no cambia significativamente en el centro de la banda, escogemos  $E = 0$  y despreciamos la dependencia de  $H_{ef}$  y  $S$  con la energía. Los símbolos  $t$ ,  $t'$ ,  $r$  y  $r'$  en la matriz  $S$ , Ec. (3.3), son matrices de tamaño  $M \times M$ . Los elementos de las matrices de transmisión ( $t$  y  $t'$ ) y reflexión ( $r$  y  $r'$ ) son las amplitudes de transmisión y reflexión, respectivamente. Una vez que conocemos la matriz  $S$  podemos calcular la transmisión total

$$G = \frac{1}{2M} \sum_m \sum_n |t_{mn}|^2 = \text{Tr}(tt^\dagger) , \quad (3.5)$$

donde  $G + R = 1$  y  $R$  es la reflexión total. También podemos obtener la conductancia, por medio de la fórmula de Landauer-Buttiker [29, 30]

$$T = \frac{4e}{\hbar^2} MG , \quad (3.6)$$

y cantidades relacionadas como su distribución  $w(T)$ , su promedio  $\langle T \rangle$  y su varianza  $\text{var}(T)$ . En la Ec. (3.6),  $e$  es la carga del electrón y  $\hbar$  la constante de Planck. Otra cantidad de interés que puede ser calculada a partir de la matriz de dispersión es el ruido cuántico<sup>2</sup>, definido como [31]

$$P = \langle \text{Tr}(tt^\dagger - tt^\dagger tt^\dagger) \rangle . \quad (3.7)$$

El ruido cuántico es una medida de las fluctuaciones de una corriente electrónica o fotónica a través de un dispositivo por el cual viaja un número pequeño de partículas (electrones o fotones). El número de estas partículas debe ser suficientemente pequeño como para producir fluctuaciones comparables al promedio. Esto sucede generalmente en dispositivos mesoscópicos.

En adelante utilizaremos unidades atómicas: es decir,  $2e/\hbar^2=1$ .

<sup>2</sup> Al ruido cuántico se le conoce en inglés como *shot noise*.

## 3.2. Predicciones de la Teoría de Matrices Aleatorias

Recordemos que la región de interacción de nuestro arreglo dispersivo esta descrita por el Hamiltoniano paramétrico de la Ec. (1.5), el cual interpola entre el GOE y el GUE al variar  $\alpha$  entre 0 y 1. Por lo tanto la matriz de dispersión correspondiente será un elemento del Ensamble Circular Ortogonal (COE por sus siglas en inglés) cuando  $\alpha = 0$  o un elemento del Ensamble Circular Unitario (CUE por sus siglas en inglés) cuando  $\alpha = 1$ . Los Ensamblajes Circulares son ensambles de matrices aleatorias unitarias utilizados para representar matrices de dispersión de sistemas complejos<sup>3</sup> [31]. A continuación proporcionamos las predicciones de la teoría de matrices aleatorias para las cantidades de dispersión y de transporte que analizaremos en el siguiente Capítulo.

Comenzaremos con el promedio de los elementos de la matriz  $S$ . Cuando  $M = 1$ , es decir, considerando sólo dos terminales acopladas al sistema, se sabe que [31]

$$\overline{\langle |S_{aa}|^2 \rangle}_{\text{COE}} = \frac{2}{3}, \quad (3.8)$$

$$\overline{\langle |S_{ab}|^2 \rangle}_{\text{COE}} = \frac{1}{3} \quad (3.9)$$

y

$$\overline{\langle |S_{ab}|^2 \rangle}_{\text{CUE}} = \frac{1}{2}, \quad (3.10)$$

donde  $\langle \cdot \rangle$  se refiere al promedio sobre elementos del COE o del CUE y  $\overline{\cdot}$  significa promedio sobre energía. En este trabajo para nuestros cálculos numéricos no consideraremos el promedio sobre la energía porque podemos incrementar fácilmente el número de elementos en el ensamble obteniendo así resultados estadísticamente equivalentes. Por otro lado  $w(T)$  está dada por

$$w_{\text{COE}}(T) = \frac{1}{2\sqrt{T}} \quad (3.11)$$

y

$$w_{\text{CUE}}(T) = 1. \quad (3.12)$$

Mientras que cuando  $M = 2$

$$w_{\text{COE}}(T) = \begin{cases} 3T/2, & 0 < T < 1 \\ 3(T - 2\sqrt{T-1})/2, & 1 < T < 2 \end{cases} \quad (3.13)$$

y

$$w_{\text{CUE}}(T) = 2(1 - |1 - T|)^3. \quad (3.14)$$

Para  $M$  arbitraria las predicciones para el valor promedio de  $T$  y su varianza son

$$\langle T \rangle_{\text{COE}} = -\frac{M}{2(2M+1)} + \frac{M}{2}, \quad (3.15)$$

$$\langle T \rangle_{\text{CUE}} = \frac{M}{2}, \quad (3.16)$$

$$\text{var}_{\text{COE}}(T) = \frac{M(M+1)^2}{(2M+1)^2(2M+3)} \quad (3.17)$$

y

$$\text{var}_{\text{CUE}}(T) = \frac{M^2}{4(4M^2-1)}. \quad (3.18)$$

---

<sup>3</sup>Con sistemas complejos nos referimos a sistemas cuánticos u ondulatorios no deterministas o caóticos cuantizados.

**CAPÍTULO 3. PROPIEDADES DE TRANSPORTE**  
**3.3. ACOPLAMIENTO PERFECTO**

---

Para la derivación detallada de estos resultados ver la Ref. [31].  
 Finalmente, para el ruido cuántico tenemos [18, 32, 33, 34]

$$P_{\text{COE}} = \frac{M(M+1)^2}{2(2M+1)(2M+3)} \quad (3.19)$$

y

$$P_{\text{CUE}} = \frac{(2M)^3}{16((2M)^2 - 1)}. \quad (3.20)$$

En la Tabla 3.1 reportamos los valores numéricos de  $\langle T \rangle$ ,  $\text{var}(T)$  y  $P$  obtenidos de las Ecs. (3.8-3.20) con  $M = [1, 5]$ ; éstos valores serán utilizados como referencia en el Capítulo siguiente.

Es importante mencionar que las Ecs. (3.8-3.20) son válidas sólo en el caso de acoplamiento perfecto:  $\langle S \rangle \approx 0$ . Cuando existen procesos directos,  $\langle S \rangle \neq 0$ , las predicciones de la teoría de matrices aleatorias para las cantidades listadas arriba están dadas en cuadraturas; por lo tanto, las predicciones correspondientes se deben obtener por integración numérica [31].

En las secciones siguientes presentaremos nuestros resultados numéricos para  $\langle |S_{ab}|^2 \rangle$ ,  $w(T)$ ,  $\langle T \rangle$ ,  $\text{var}(T)$  y  $P$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5). Para ello calcularemos  $S$  por medio de la Ec. (3.3) con un programa en FORTRAN 90 que utiliza subrutinas comerciales de inversión de matrices. Para cada combinación de  $\alpha$ ,  $M$  y  $N$  utilizaremos un ensamble de  $10^6$  muestras (o matrices  $\mathbf{H}$ ).

M	$\langle T \rangle_{\text{COE}}$	$\langle T \rangle_{\text{CUE}}$	$\text{var}_{\text{COE}}(T)$	$\text{var}_{\text{CUE}}(T)$	$P_{\text{COE}}$	$P_{\text{CUE}}$
1	1/3	1/2	4/45	1/12	2/15	1/6
2	4/5	1	18/175	1/15	9/35	4/15
3	9/7	3/2	16/147	9/140	8/21	216/560
4	16/9	2	100/891	16/252	50/99	32/63
5	25/11	5/2	180/1573	23/396	90/143	1000/1584

Tabla 3.1: Valores numéricos de  $\langle T \rangle$ ,  $\text{var}(T)$  y  $P$  obtenidos de las Ecs. (3.8-3.20) con  $M = [1, 5]$ .

### 3.3. Acoplamiento perfecto

En este trabajo consideraremos, sin pérdida de generalidad, la condición de acoplamiento perfecto entre las terminales y la región de interacción. En general el acoplamiento perfecto se define como el valor de  $\epsilon$ ,  $\epsilon_0$ , tal que  $\langle S \rangle \approx 0$  [31]. Donde

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2M} \sum_{ij} \langle |S_{ij}| \rangle. \quad (3.21)$$

Note que cuando  $\epsilon = 0$ , no existe acoplamiento entre las terminales y el sistema interno por lo que  $t$  y  $t'$  son iguales a cero y en consecuencia  $\langle S \rangle = 1$ . Para cualquier  $\epsilon \neq 0$ ,  $\langle S \rangle < 1$ .

Nosotros obtenemos la condición de acoplamiento perfecto graficando  $\langle S \rangle$  como función de  $\epsilon$ . Como ejemplo en la Fig. 3.2 mostramos  $\langle S \rangle$  como función de  $\epsilon$  para sistemas con  $\alpha = 0$  y  $\alpha = 1$  en el caso  $M = 1$ . La región  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  se asocia a un sistema interno con absorción. Mientras que la región  $\epsilon_0 < \epsilon$  corresponde a sistemas internos con ganancia. En general  $\epsilon_0$  depende de  $N$  y  $\alpha$  por lo que  $\epsilon_0$  se debe calcular numéricamente a partir de la Ec. (3.21) combinación de parámetros.

En las Tablas 3.2 y 3.3 reportamos  $\epsilon_0$  para los valores de  $\alpha$  que utilizaremos en el Capítulo siguiente con  $M = [1, 5]$  cuando  $N = 100$  y  $N = 200$ , respectivamente.

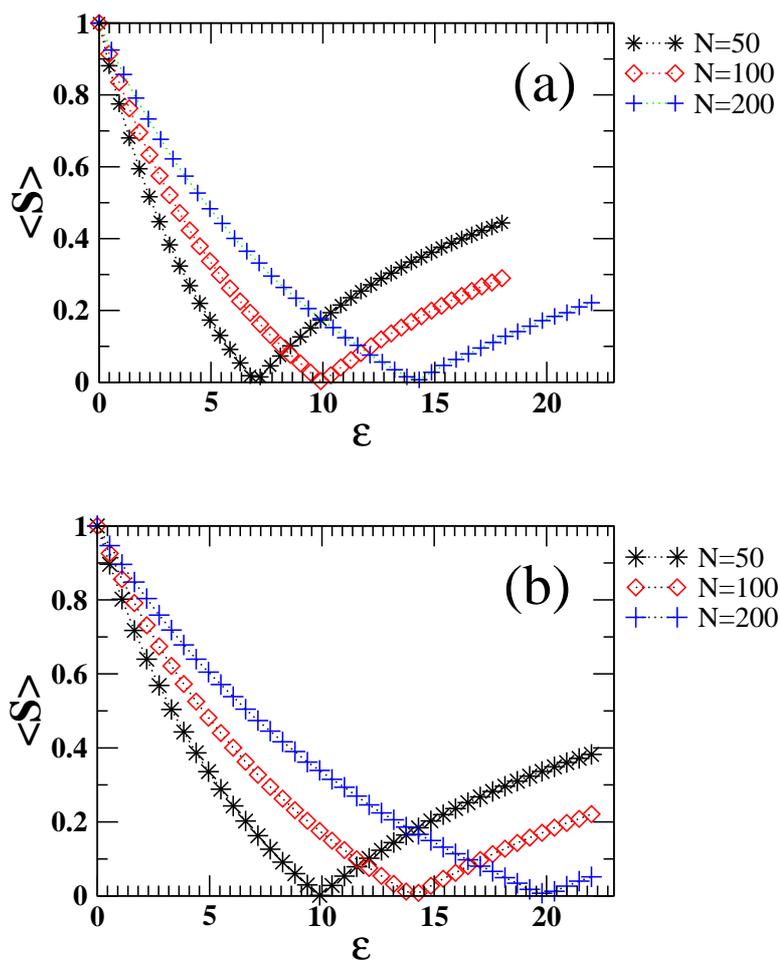


Figura 3.2:  $\langle S \rangle$  como función de  $\epsilon$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaños  $N = 50, 100$  y  $200$  con (a)  $\alpha = 0$  y (b)  $\alpha = 1$  en el caso  $M = 1$ . En (a)  $\epsilon_0 = 7,2$  para  $N = 50$ ,  $\epsilon_0 = 10$  para  $N = 100$  y  $\epsilon_0 = 14,2$  para  $N = 200$ . En (b)  $\epsilon_0 = 9,9$  para  $N = 50$ ,  $\epsilon_0 = 14,1$  para  $N = 100$  y  $\epsilon_0 = 20,2$  para  $N = 200$ . Para calcular  $\langle S \rangle$  se utilizaron ensambles de  $10^5$  matrices para cada combinación de  $N$  y  $\alpha$ .

**CAPÍTULO 3. PROPIEDADES DE TRANSPORTE**  
**3.3. ACOPLAMIENTO PERFECTO**

---

$\alpha$	M=1	M=2	M=3	M=4	M=5
0	10.0	9.90	9.80	9.80	9.80
0.001	10.0	9.90	9.80	9.80	9.80
0.002	10.0	9.90	9.80	9.80	9.80
0.004	10.0	9.90	9.80	9.80	9.80
0.01	10.0	9.90	9.80	9.80	9.80
0.03	10.0	9.90	9.80	9.80	9.80
0.06	10.0	9.90	9.80	9.80	9.80
0.1	10.0	10.0	9.90	9.80	9.80
0.15	10.1	10.0	10.0	9.90	9.80
0.3	10.4	10.4	10.3	10.2	10.2
0.6	11.5	11.6	11.5	11.4	11.4
1	14.1	14.0	13.9	13.8	13.8

Tabla 3.2:  $\epsilon_0$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) para diferentes valores de  $\alpha$  con  $M = [1, 5]$  cuando  $N = 100$ .

$\alpha$	M=1	M=2	M=3	M=4	M=5
0.001	14.2	14.0	14.0	14.0	14.0
0.002	14.2	14.0	14.0	14.0	14.0
0.004	14.2	14.0	14.0	14.0	14.0
0.01	14.2	14.0	14.0	14.0	14.0
0.02	14.2	14.0	14.0	14.0	14.0
0.04	14.2	14.0	14.0	14.0	14.0
0.1	14.2	14.0	14.0	14.1	14.0
0.2	14.4	14.5	14.4	14.3	14.3
0.4	15.2	15.5	15.1	15.1	15.0
0.6	15.8	16.5	16.4	16.4	16.4
1	20.2	20.0	19.9	20.0	19.7

Tabla 3.3:  $\epsilon_0$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) para diferentes valores de  $\alpha$  con  $M = [1, 5]$  cuando  $N = 200$ .

### 3.4. Promedio de los elementos de la matriz de dispersión

Primeramente consideramos el caso  $M = 1$  donde la matriz de dispersión es una matriz de tamaño  $2 \times 2$ . En la Fig. 3.3 graficamos el promedio de los elementos  $|S_{11}|^2$  y  $|S_{12}|^2$  como función de  $\alpha$ ,  $\langle |S_{11}|^2 \rangle$  y  $\langle |S_{12}|^2 \rangle$ . Nos concentraremos en estos dos elementos de la matriz de dispersión, que corresponden a reflexión total y transmisión total, respectivamente, ya que los otros dos elementos no proporcionan información adicional:  $\langle |S_{11}|^2 \rangle = \langle |S_{22}|^2 \rangle = R$  y  $\langle |S_{12}|^2 \rangle = \langle |S_{21}|^2 \rangle = G$  para modelos de Matrices Aleatorias y sistemas desordenados [31]. Notamos una fuerte dependencia de  $\langle |S_{11}|^2 \rangle$  y  $\langle |S_{12}|^2 \rangle$  como función de  $\alpha$  que lleva al sistema dispersivo del límite COE cuando  $\alpha = 0$  al límite CUE cuando  $\alpha = 1$ .

Además encontramos que las cantidades  $\langle |S_{11}|^2 \rangle$  y  $\langle |S_{12}|^2 \rangle$ , como función de  $\alpha$  están descritas por

$$\langle |S_{11}|^2 \rangle = 1 - \langle |S_{12}|^2 \rangle, \quad (3.22)$$

y

$$\langle |S_{12}|^2 \rangle = \langle |S_{12}|^2 \rangle_{\text{COE}} + \frac{\langle |S_{12}|^2 \rangle_{\text{CUE}} - \langle |S_{12}|^2 \rangle_{\text{COE}}}{1 + (\delta\alpha)^{-2}}, \quad (3.23)$$

donde  $\delta$  es un parámetro de ajuste. La Ec. (3.22) es una consecuencia de la relación  $R + G = 1$ . En la Fig. 3.3 graficamos los ajustes de los datos numéricos con las Ecs. (3.22) y (3.23). Como puede observarse en esta figura, la correspondencia entre los datos numéricos y las Ecs. (3.22) y (3.23) es excelente. Hemos observado que el parámetro de ajuste  $\delta$  depende de  $M$ , sin embargo no presentamos esos resultados porque no nos parecen relevantes.

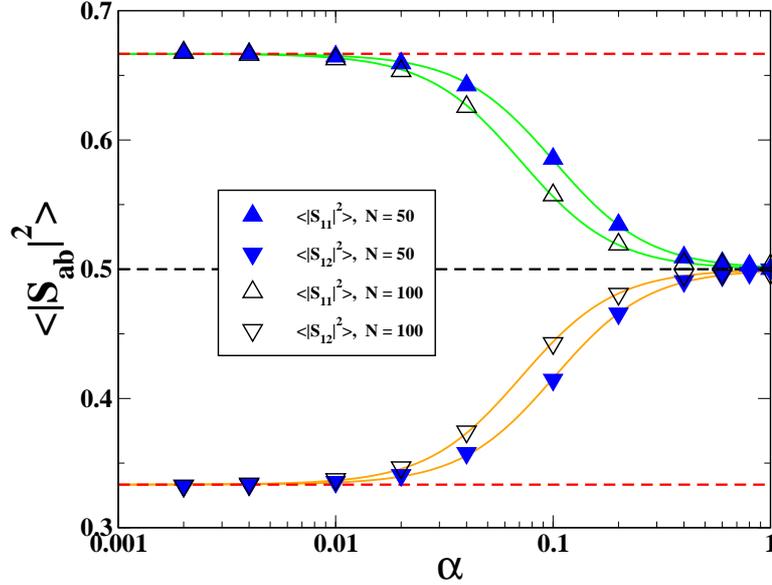


Figura 3.3:  $\langle |S_{11}|^2 \rangle$  y  $\langle |S_{12}|^2 \rangle$  como función de  $\alpha$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 50$  y  $N = 100$  con  $M = 1$ . Las líneas punteadas corresponden a las predicciones de la teoría de matrices aleatorias de las Ecs. (3.8-3.10). Las líneas continuas son los ajustes con las Ecs. (3.22) y (3.23) con  $\delta = 9.86$  para  $N = 50$  y  $\delta = 14.02$  para  $N = 100$ . Las barras de error no se muestran por ser más pequeñas que los símbolos

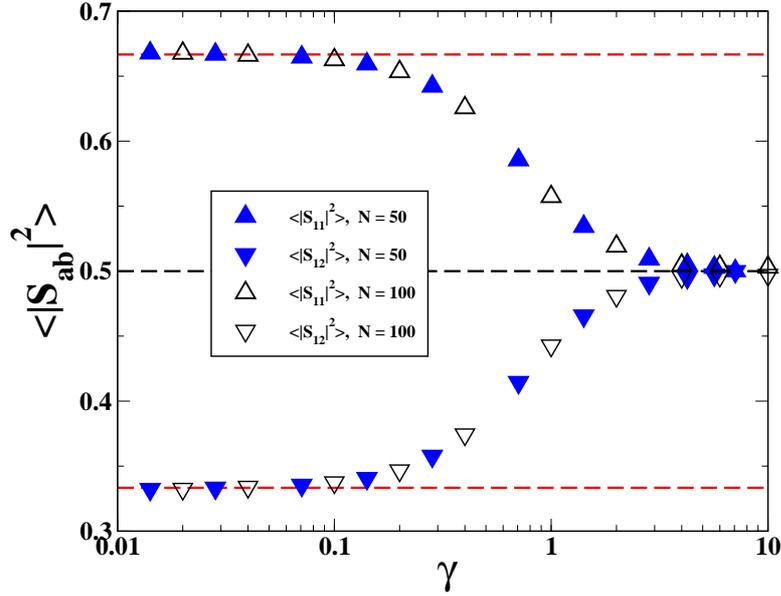


Figura 3.4: Misma información que en la Fig. 3.3 pero como función de  $\gamma$ .

Finalmente en la Fig. 3.4 mostramos que  $\langle |S_{11}|^2 \rangle$  y  $\langle |S_{12}|^2 \rangle$  como función de  $\alpha$  son independientes de  $N$  cuando se grafican como función de  $\gamma$ ; al igual que  $P(s)$ , ver Capítulo 2.

### 3.5. Distribución de probabilidad de la conductancia

En esta sección analizamos la distribución de la conductancia  $w(T)$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5). En la Fig. 3.5 mostramos  $w(T)$  para diferentes valores de  $\alpha$  cuando  $M = [1, 5]$ . En esta figura utilizamos  $N = 100$ . En todos los paneles observamos una transición suave entre los límites COE y CUE como función de  $\alpha$ . Además hemos verificado, para  $M = 1$  y  $M = 2$ , que cuando  $\alpha = 0$  y  $\alpha = 1$  se reproducen las expresiones de las Ecs. (3.11-3.14). Cuando  $M > 2$  no tenemos expresiones analíticas para  $w(T)$  por lo que sólo contamos con nuestros cálculos numéricos. Sin embargo, se sabe que en el límite  $M \gg 1$ ,  $w(T)$  tiene una forma Gaussiana y en la Fig. 3.5 esta tendencia ya se puede apreciar aún cuando  $M$  no es muy grande; ver el panel (e). Es interesante notar que cuando  $M = 2$  la Teoría de Matrices Aleatorias predice una discontinuidad en  $T = 1$  en  $w(T)$ , ver Ecs. (3.13-3.14), la cual se observa claramente en nuestros resultados numéricos, ver Fig. 3.5(b).

También vale la pena mencionar que hemos verificado que para  $M$  fija,  $w(T)$  es invariante para una  $\gamma$  fija, al igual que el promedio de los elementos de la matriz de dispersión y la distribución de espaciamientos entre energías consecutivas.

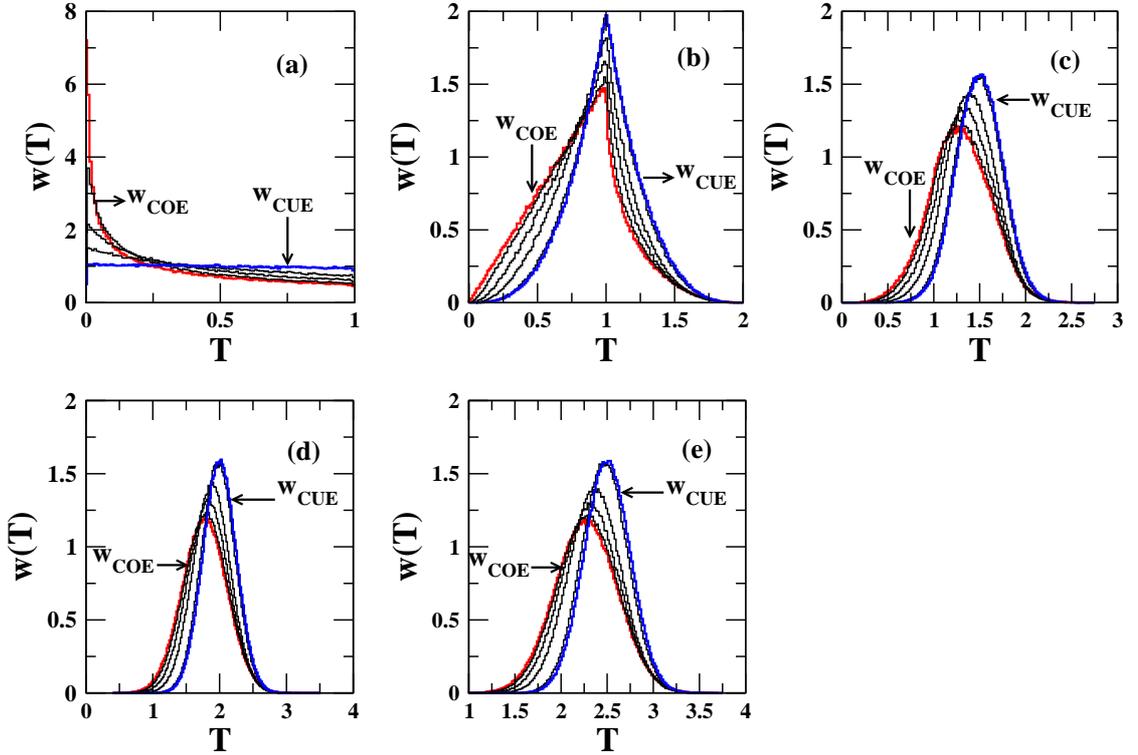


Figura 3.5: Distribución de la conductancia  $w(T)$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 100$ . Se utilizaron  $\alpha = 0, 0.001, 0.004, 0.01, 0.03, 0.06, 0.1, 0.15, 0.3, 0.6$  y  $1$ . Como referencia, en rojo (azul) se muestra  $w(T)$  cuando  $\alpha = 0$  ( $\alpha = 1$ ). (a)  $M = 1$ , (b)  $M = 2$ , (c)  $M = 3$ , (d)  $M = 4$  y (e)  $M = 5$ . Se utilizaron  $10^9$  valores de  $T$  para construir cada histograma.

### 3.6. Promedio de la conductancia, varianza de la conductancia y el ruido cuántico

Ahora nos enfocaremos en cantidades relacionadas con la conductancia como su promedio, su varianza y el ruido cuántico. Estudiaremos estas cantidades como función de  $\alpha$  y de  $M$ .

Comenzaremos con la conductancia promedio  $\langle T \rangle$ . En la Fig. 3.6 mostramos  $\langle T \rangle$  como función de  $\alpha$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 100$ . Hemos utilizado  $M$  desde uno hasta cinco; es decir, consideramos de dos a diez terminales acopladas. En esta figura se observa claramente que  $\langle T \rangle$  sufre una transición suave de COE a CUE como función de  $\alpha$  para todos los valores de  $M$  considerados en este trabajo. Sin embargo, note que  $\langle T \rangle \approx \langle T \rangle_{\text{COE}}$  para  $\alpha < 0.01$ .

Es importante hacer notar que la forma de las curvas  $\langle T \rangle(\alpha)$  es muy similar a la forma de las curvas  $\langle |S_{12}|^2 \rangle(\alpha)$ , ver Fig. 3.3. Por lo tanto proponemos la expresión

$$\langle T \rangle = \langle T \rangle_{\text{COE}} + \frac{\langle T \rangle_{\text{CUE}} - \langle T \rangle_{\text{COE}}}{1 + (\delta\alpha)^{-2}}, \quad (3.24)$$

para describir nuestros datos numéricos. En la Ec. (3.24),  $\delta$  es un parámetro de ajuste. En la Fig. 3.6 mostramos los ajustes de nuestros datos con la Ec. (3.24). Los parámetros de ajuste se reportan en la Tabla 3.4. Es claro que la expresión de la Ec. (3.24) reproduce de manera correcta nuestros datos numéricos.

### CAPÍTULO 3. PROPIEDADES DE TRANSPORTE

#### 3.6. PROMEDIO DE LA CONDUCTANCIA, VARIANZA DE LA CONDUCTANCIA Y EL RUIDO CUÁNTICO

Adicionalmente en la Fig. 3.6(f) mostramos  $\langle T \rangle^*$ , definido por

$$\langle T \rangle^* = \frac{\langle T \rangle - \langle T \rangle_{\text{COE}}}{\langle T \rangle_{\text{CUE}} - \langle T \rangle_{\text{COE}}}, \quad (3.25)$$

como función de  $\alpha\delta^{1/2}$ . De esta forma los datos, para toda  $M$ , caen sobre la misma curva  $\langle T \rangle^*(\alpha\delta^{1/2})$ .

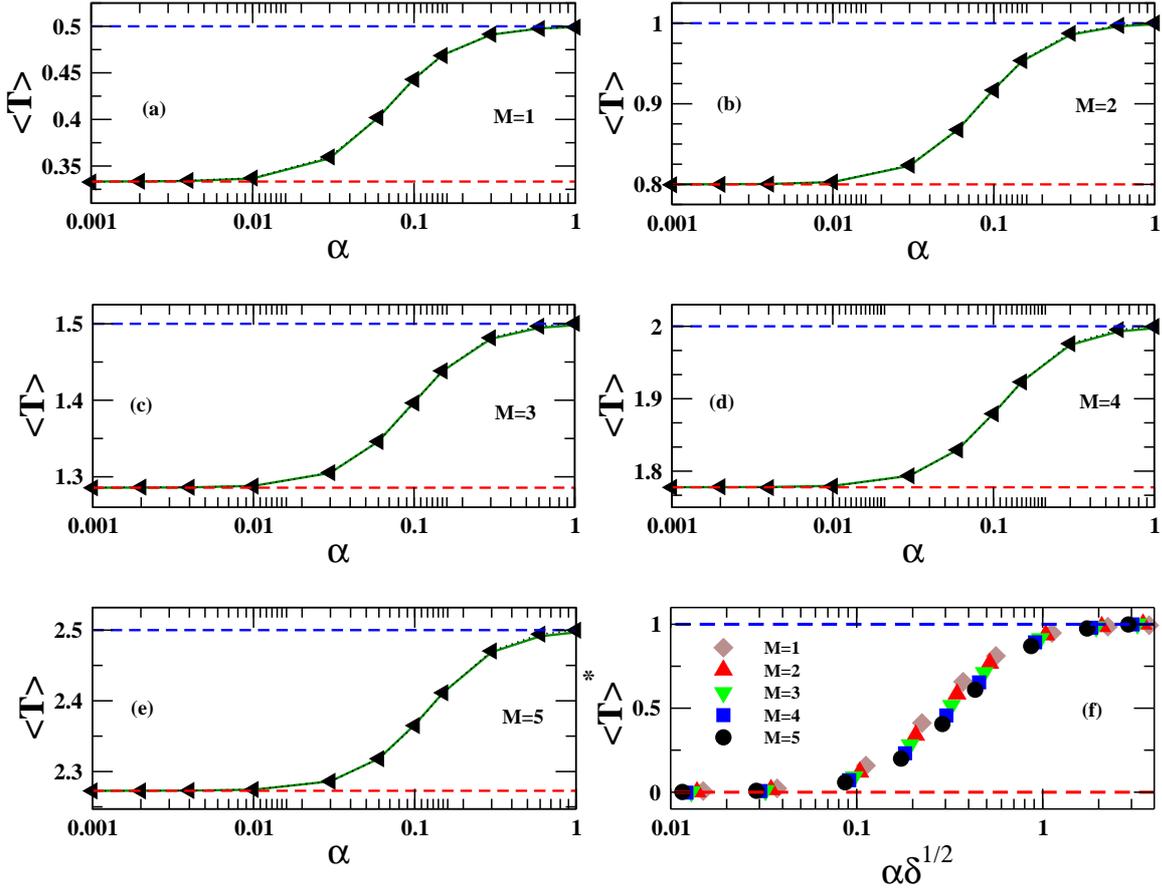


Figura 3.6: Promedio de la conductancia  $\langle T \rangle$  como función de  $\alpha$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 100$ . Como referencia, las líneas punteadas indican la predicción de la Teoría de Matrices Aleatorias para  $\langle T \rangle$  dadas en las Ecs. (3.15) (límite COE, línea punteada inferior) y (3.16) (límite CUE, línea punteada superior). (a)  $M = 1$ , (b)  $M = 2$ , (c)  $M = 3$ , (d)  $M = 4$  y (e)  $M = 5$ . La línea continua es el ajuste de los datos con la Ec. (4); los parámetros de ajuste se reportan en la Tabla 3.4. En (f) presentamos los datos reportados en (a-e) pero ahora normalizados de acuerdo a la Ec. (3.25) y como función de  $\alpha\delta^{1/2}$ . Se utilizaron  $10^4$  valores de  $T$  para cada promedio.

En la Fig. 3.6 graficamos  $\langle T \rangle$  como función de  $\alpha$  para  $M$  fija, ahora como información complementaria en la Fig. 3.7 graficamos  $\langle T \rangle$  como función de  $M$  para  $\alpha$  fija. En esta figura también se observa claramente que  $\langle T \rangle$  sufre una transición suave entre COE y CUE como función de  $\alpha$ .

Una cantidad relacionada con la conductancia promedio es la conductancia típica  $T_{\text{tip}}$  que se define como

$$T_{\text{tip}} \equiv \exp\langle \ln T \rangle. \quad (3.26)$$

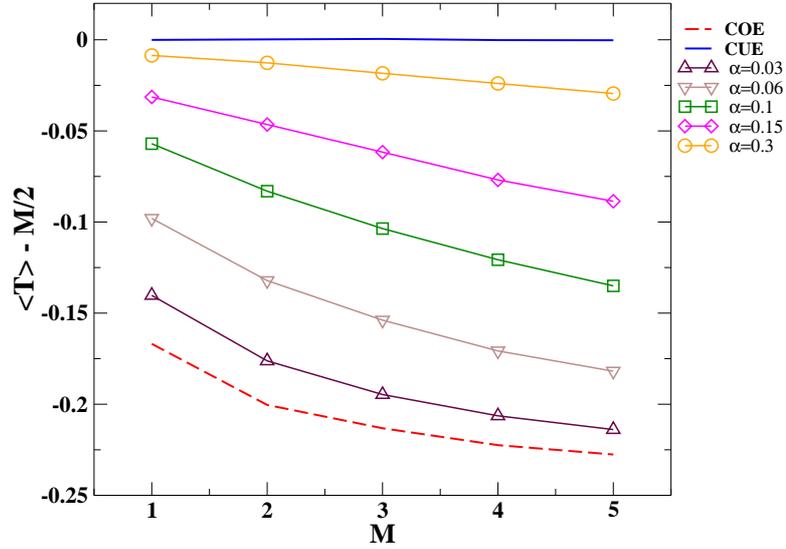


Figura 3.7: Promedio de la conductancia  $\langle T \rangle - M/2$  como función de  $M$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 100$ . Se utilizaron  $\alpha = 0.03, 0.06, 0.1, 0.15$  y  $0.3$  (de abajo hacia arriba). Como referencia, la línea punteada [continua] indica la predicción de la Teoría de Matrices Aleatorias para  $\langle T \rangle - M/2$  dada en la Ec. (3.15) para el límite COE [Ec. (3.16) para el límite CUE]. Se utilizaron  $10^4$  valores de  $T$  para cada promedio.

Por lo tanto en la Fig. 3.8 mostramos  $\langle \ln T \rangle$  como función de  $\alpha$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 100$  cuando  $M = [1, 5]$ . Al igual que  $\langle T \rangle$ :

(i)  $\langle \ln T \rangle$  sufre una transición suave entre COE y CUE como función de  $\alpha$  para todo  $M$ , ver Fig. 3.8(a-e);

(ii) la expresión

$$\langle \ln T \rangle = \langle \ln T \rangle_{\text{COE}} + \frac{\langle \ln T \rangle_{\text{CUE}} - \langle \ln T \rangle_{\text{COE}}}{1 + (\delta\alpha)^{-2}}, \quad (3.27)$$

donde  $\delta$  es un parámetro de ajuste, reproduce de manera correcta los datos numéricos, ver Fig. 3.8(a-e);

(iii) cuando graficamos  $\langle \ln T \rangle^*$ , definido por

$$\langle \ln T \rangle^* = \frac{\langle \ln T \rangle - \langle \ln T \rangle_{\text{COE}}}{\langle \ln T \rangle_{\text{CUE}} - \langle \ln T \rangle_{\text{COE}}}, \quad (3.28)$$

como función de  $\alpha\delta^{1/2}$  los datos, para toda  $M$ , caen sobre la misma curva  $\langle \ln T \rangle^*(\alpha\delta^{1/2})$ , ver Fig. 3.8(f);

(iv) cuando graficamos  $\langle \ln T \rangle$  como función de  $M$  para  $\alpha$  fija, ver Fig. 3.9, también se observa claramente que  $\langle \ln T \rangle$  sufre una transición suave entre COE y CUE como función de  $\alpha$ .

Es importante mencionar que como  $\langle \ln T \rangle$  es una cantidad mucho más difícil de tratar desde el punto de vista analítico en comparación con  $\langle T \rangle$ , para ella no contamos con predicciones de la Teoría de Matrices Aleatorias por lo que los límites COE y CUE se obtienen de manera numérica.

Es bien sabido que una distribución no se caracteriza solamente por el promedio de la cantidad bajo estudio, también es indispensable conocer la varianza de dicha cantidad. Entonces, en la

**CAPÍTULO 3. PROPIEDADES DE TRANSPORTE**

3.6. PROMEDIO DE LA CONDUCTANCIA, VARIANZA DE LA CONDUCTANCIA Y EL RUIDO CUÁNTICO

---

M	$N = 100$	$N = 200$
1	13.9655	19.8174
2	11.9964	17.0895
3	10.4482	14.7107
4	9.20578	13.0833
5	8.35176	11.887

Tabla 3.4: Parámetro  $\delta$  obtenido a partir de los ajustes de los datos de las Figs. 3.6 y A.1 con la Ec. (3.24).

M	$N = 100$	$N = 200$
1	23.5587	31.7364
2	13.969	19.7352
3	11.3011	11.3011
4	9.8351	13.9610
5	8.8066	12.4488

Tabla 3.5: Parámetro  $\delta$  obtenido a partir de los ajustes de los datos de las Figs. 3.8 y A.3 con la Ec. (3.27).

Fig. 3.10 mostramos  $\text{var}(T)$  como función de  $\alpha$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 100$  cuando  $M = [1, 5]$ . Sorprendentemente, aún cuando esta cantidad es más complicada que las estudiadas anteriormente ( $\langle |S_{12}|^2 \rangle$ ,  $\langle T \rangle$  y  $\langle \ln T \rangle$ ), encontramos muchas similitudes en el comportamiento de  $\text{var}(T)$  y dichas cantidades:

- (i)  $\text{var}(T)$  sufre una transición suave entre COE y CUE como función de  $\alpha$  para todo  $M$ , ver Fig. 3.10(a-e);
- (ii) la expresión

$$\text{var}(T) = \text{var}_{\text{COE}}(T) + \frac{\text{var}_{\text{COE}}(T) - \text{var}_{\text{CUE}}(T)}{1 + (\delta\alpha)^{-2}}, \quad (3.29)$$

donde  $\delta$  es un parámetro de ajuste, reproduce de manera correcta los datos numéricos, ver Fig. 3.10(a-e);

- (iii) cuando graficamos  $\text{var}(T)$  como función de  $M$  para  $\alpha$  fija, ver Fig. 3.11, también se observa claramente que  $\text{var}(T)$  sufre una transición suave entre COE y CUE como función de  $\alpha$ .

Sin embargo, podemos notar dos diferencias importantes en el comportamiento de  $\text{var}(T)$  con respecto a las cantidades estudiadas anteriormente. La primera: cuando graficamos  $\text{var}(T)^*$ , definido por

$$\text{var}(T)^* = \frac{\text{var}(T) - \text{var}_{\text{CUE}}(T)}{\text{var}_{\text{COE}}(T) - \text{var}_{\text{CUE}}(T)} \quad (3.30)$$

como función de  $\alpha\delta$  los datos, para toda  $M$ , caen sobre la misma curva  $\text{var}(T)^*(\alpha\delta)$ , ver Fig. 3.10(f). La segunda: las curvas  $\text{var}(T)$  decrecen como función de  $\alpha$ .

---

**CAPÍTULO 3. PROPIEDADES DE TRANSPORTE**  
 3.6. PROMEDIO DE LA CONDUCTANCIA, VARIANZA DE LA CONDUCTANCIA Y EL  
 RUIDO CUÁNTICO

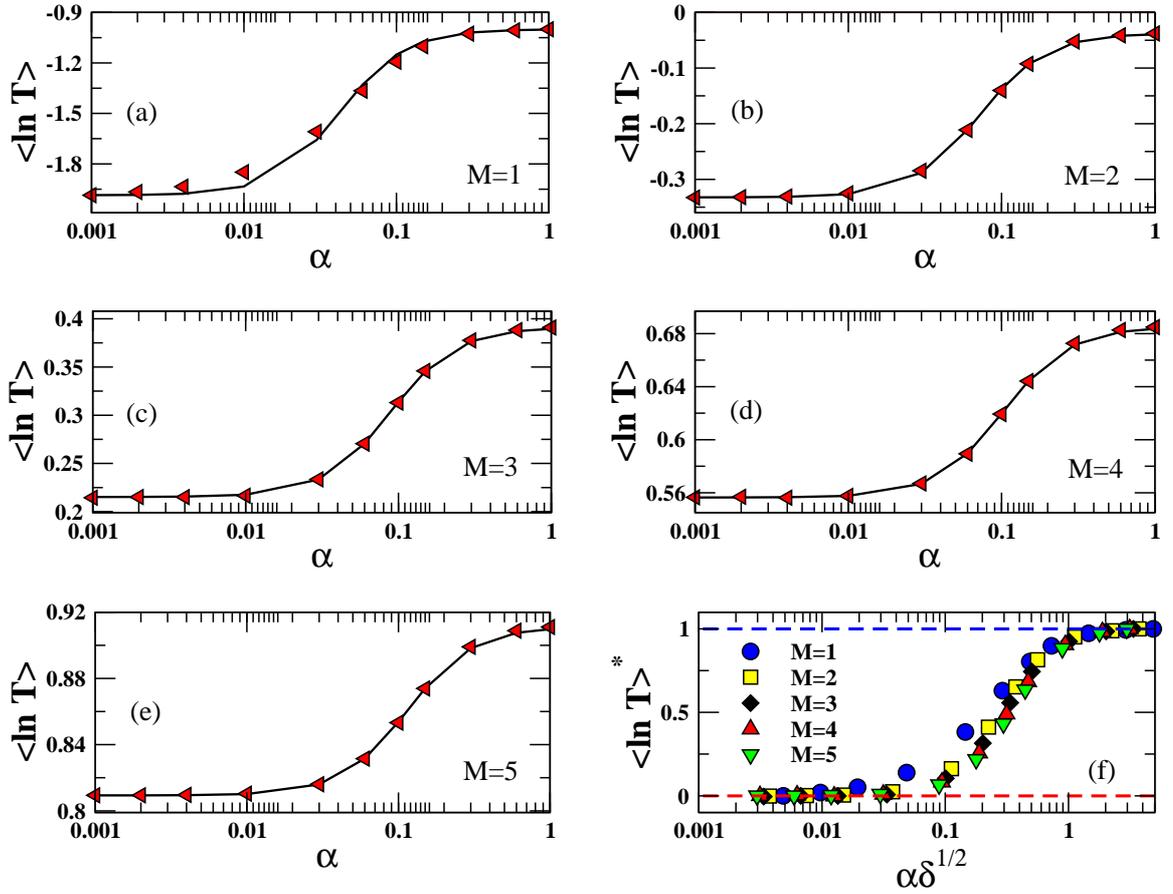


Figura 3.8: Promedio del logaritmo de la conductancia  $\langle \ln T \rangle$  como función de  $\alpha$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 100$ . (a)  $M = 1$ , (b)  $M = 2$ , (c)  $M = 3$ , (d)  $M = 4$  y (e)  $M = 5$ . La línea continua es el ajuste de los datos con la Ec. (3.27); los parámetros de ajuste se reportan en la Tabla 3.5. En (f) presentamos los datos reportados en (a-e) pero ahora normalizados de acuerdo a la Ec. (3.28) y como función de  $\alpha\delta^{1/2}$ . Se utilizaron  $10^4$  valores de  $T$  para cada promedio.

A continuación, en las Figs. 3.12 y 3.13 mostramos nuestros resultados para el ruido cuántico  $P$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 100$ , como función de  $\alpha$  para  $M$  fija y como función de  $M$  para  $\alpha$  fija, respectivamente.

En analogía con las cantidades anteriormente estudiadas, proponemos la siguiente expresión

$$P = P_{\text{COE}} + \frac{P_{\text{CUE}} - P_{\text{COE}}}{1 + (\delta\alpha)^{-2}}, \quad (3.31)$$

para tratar de describir nuestros datos. Sin embargo, como puede apreciarse en las Figs. 3.12(a-e), esta ecuación no reproduce de manera correcta nuestros resultados. Esto sucede principalmente porque las curvas de  $P$  como función de  $\alpha$  muestran un pico que sobrepasa el valor  $P_{\text{CUE}}$  y que se acentúa al incrementar  $M$ . La explicación de este efecto queda fuera del alcance de este trabajo, sin embargo consideramos que vale la pena estudiarlo a fondo en el futuro. En todo caso, en las Figs. 3.12(a-e) mostramos los ajustes de los datos con la Ec. (3.31) y en la Fig. 3.12(f) presentamos las curvas de  $P^*$ , definida como

$$P^* = \frac{P - P_{\text{COE}}}{P_{\text{CUE}} - P_{\text{COE}}}, \quad (3.32)$$

**CAPÍTULO 3. PROPIEDADES DE TRANSPORTE**

3.6. PROMEDIO DE LA CONDUCTANCIA, VARIANZA DE LA CONDUCTANCIA Y EL RUIDO CUÁNTICO

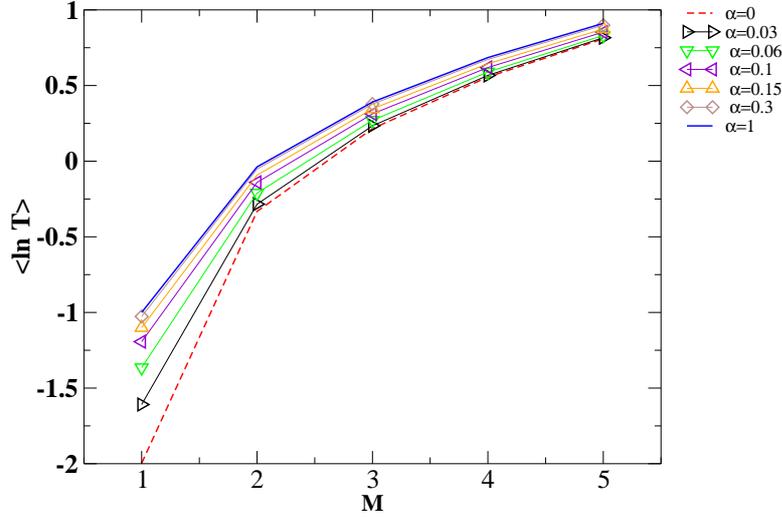


Figura 3.9: Promedio del logaritmo de la conductancia  $\langle \ln T \rangle$  como función de  $M$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 100$ . Se utilizaron  $\alpha = 0.03, 0.06, 0.1, 0.15$  y  $0.3$  (de abajo hacia arriba). Como referencia, la línea punteada [continua] indica el caso  $\alpha = 0$  [ $\alpha = 1$ ]. Se utilizaron  $10^4$  valores de  $T$  para cada promedio.

M	$N = 100$	$N = 200$
1	-41.1289	58.696
2	17.3726	25.0543
3	15.4651	22.235
4	13.9243	20.0961
5	12.6233	18.873

Tabla 3.6: Parámetro  $\delta$  obtenido a partir de los ajustes de los datos de las Figs. 3.10 y A.2 con la Ec. (3.29).

como función de  $\alpha\delta^{1/2}$ .

Finalmente, queremos recordar que todos los datos presentados en las Figs. 3.5-3.13 corresponden a matrices Hamiltonianas de tamaño  $N = 100$ . Sin embargo, nuestras conclusiones no se restringen a este caso como se puede observar en la Fig. 3.14 donde graficamos  $\langle T \rangle$ ,  $\text{var}(T)$ ,  $\langle \ln T \rangle$  y  $P$  como función de  $\gamma$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaños  $N = 100$  y  $N = 200$  cuando  $M = 1$ . Note que todas las curvas en esta figura son invariantes como función de  $\gamma$ .

Como información complementaria y para verificar la generalidad de nuestras conclusiones, en el Apéndice A mostramos gráficos similares a los de las Figs. 3.6, 3.8, 3.10 y 3.12 pero para el caso  $N = 200$ .

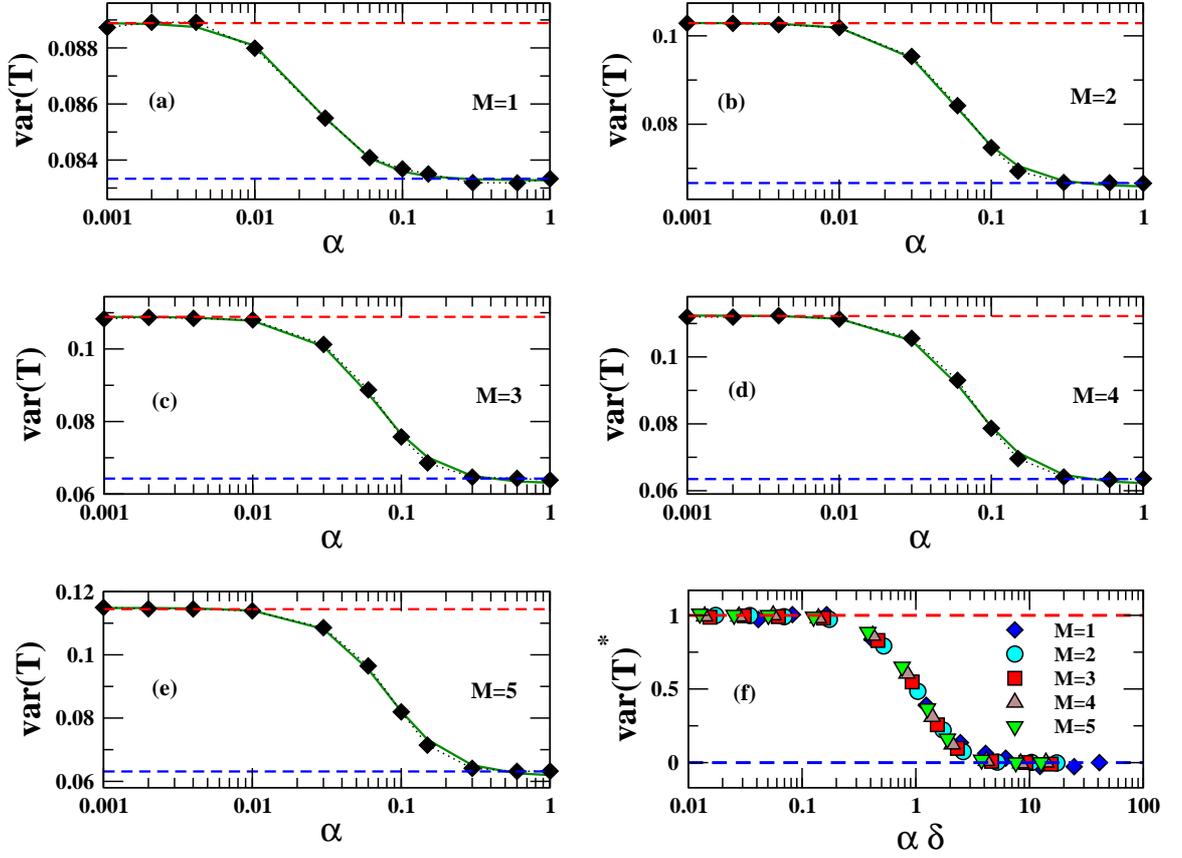


Figura 3.10: Varianza de la conductancia  $\text{var}(T)$  como función de  $\alpha$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 100$ . Como referencia, las líneas punteadas indican la predicción de la Teoría de Matrices Aleatorias para  $\text{var}(T)$  dadas en las Ecs. (3.17) (límite COE, línea punteada superior) y (3.18) (límite CUE, línea punteada inferior). (a)  $M = 1$ , (b)  $M = 2$ , (c)  $M = 3$ , (d)  $M = 4$  y (e)  $M = 5$ . La línea continua es el ajuste de los datos con la Ec. (3.29); los parámetros de ajuste se reportan en la Tabla 3.6. En (f) presentamos los datos reportados en (a-e) pero ahora normalizados de acuerdo a la Ec. (3.30) y como función de  $\alpha \delta$ . Se utilizaron  $10^4$  valores de  $T$  para el cálculo de cada  $\text{var}(T)$ .

M	$N = 100$	$N = 200$
1	25.204	35.7025
2	38.7653	56.5723
3	42.3435	58.3966
4	48.3756	60.5698
5	58.3613	64.9508

Tabla 3.7: Parámetro  $\delta$  obtenido a partir de los ajustes de los datos de las Figs. 3.12 y A.4 con la Ec. (3.31).

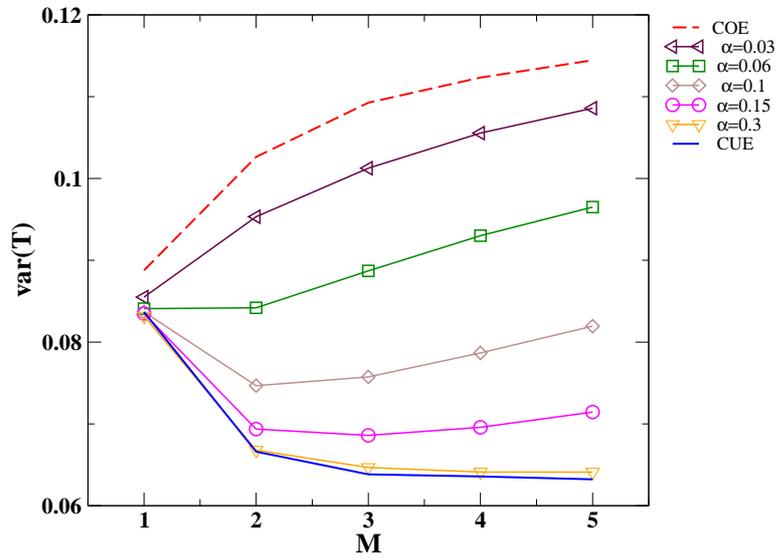


Figura 3.11: Varianza de la conductancia  $\text{var}(T)$  como función de  $M$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 100$ . Se utilizaron  $\alpha = 0.03, 0.06, 0.1, 0.15$  y  $0.3$  (de arriba hacia abajo). Como referencia, la línea punteada [continua] indica la predicción de la Teoría de Matrices Aleatorias para  $\text{var}(T)$  dada en la Ec. (3.17) para el límite COE [Ec. (3.18) para el límite CUE]. Se utilizaron  $10^4$  valores de  $T$  para el cálculo de cada  $\text{var}(T)$ .

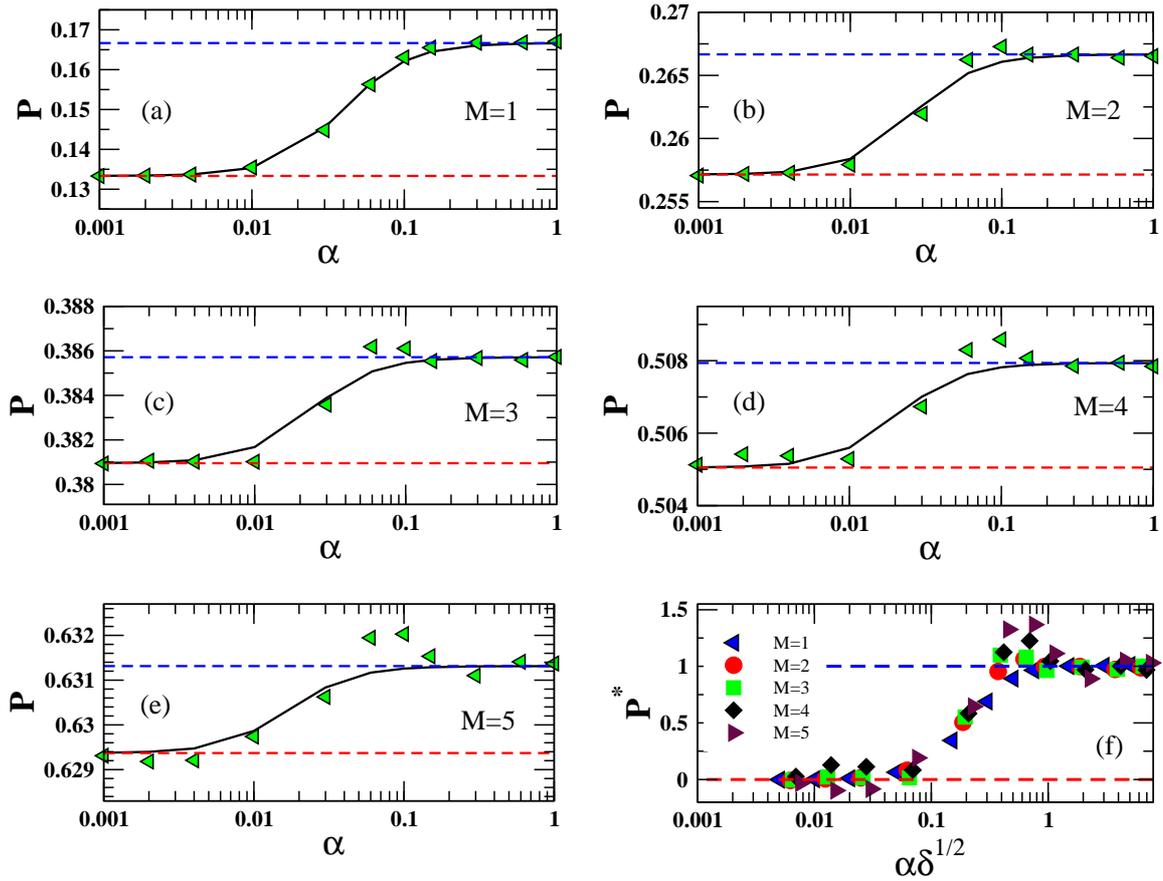


Figura 3.12: Ruido cuántico  $P$  como función de  $\alpha$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 100$ . Como referencia, las líneas punteadas indican la predicción de la Teoría de Matrices Aleatorias para  $P$  dadas en las Ecs. (3.19) (límite COE, línea punteada inferior) y (3.20) (límite CUE, línea punteada superior). (a)  $M = 1$ , (b)  $M = 2$ , (c)  $M = 3$ , (d)  $M = 4$  y (e)  $M = 5$ . La línea continua es el ajuste de los datos con la Ec. (3.31); los parámetros de ajuste se reportan en la Tabla (3.7). En (f) presentamos los datos reportados en (a-e) pero ahora normalizados de acuerdo a la Ec. (3.32) y como función de  $\alpha\delta^{1/2}$ . Se utilizaron  $10^4$  matrices  $S$  para el cálculo de cada  $P$ .

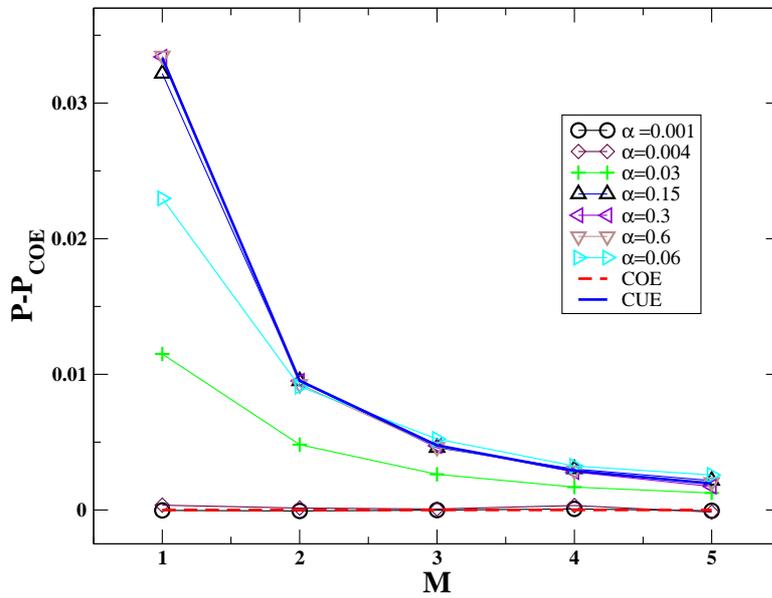


Figura 3.13: Ruido cuántico  $P$  (graficado como  $P - P_{COE}$ ) como función de  $M$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 100$ . Se utilizaron  $\alpha = 0.001, 0.004, 0.03, 0.06, 0.15, 0.3$  y  $0.6$  (de abajo hacia arriba). Como referencia, la línea punteada [continua] indica el caso  $\alpha = 0$  [ $\alpha = 1$ ]. Se utilizaron  $10^4$  matrices  $S$  para el cálculo de cada  $P$ .

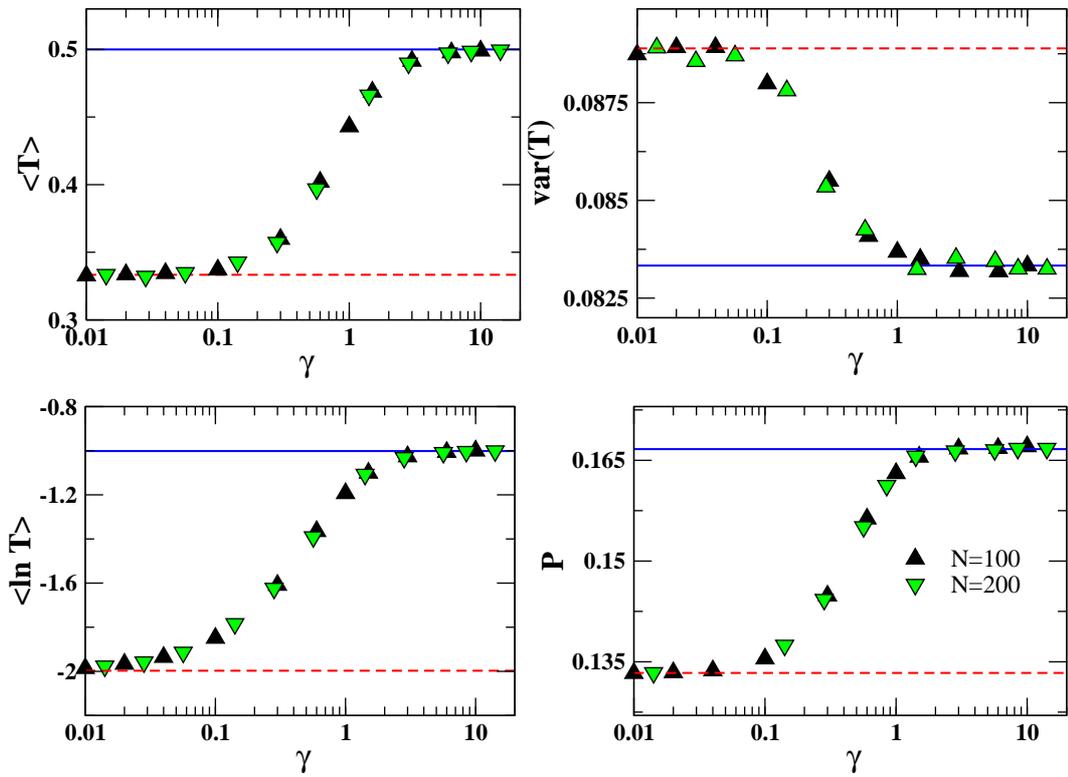


Figura 3.14:  $\langle T \rangle$ ,  $\text{var}(T)$ ,  $\langle \ln T \rangle$  y  $P$  como función de  $\gamma$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaños  $N = 100$  y  $N = 200$  cuando  $M = 1$ . Como referencia, la línea punteada [continua] indica el caso  $\alpha = 0$  [ $\alpha = 1$ ]. Se utilizaron  $10^4$  matrices  $S$  para el cálculo cada punto.

## Capítulo 4

# Conclusiones

En esta Tesis estudiamos numéricamente las propiedades de dispersión y de transporte de sistemas caóticos cuantizados utilizando el modelo paramétrico de matrices aleatorias  $\mathbf{H}(\alpha) = \mathbf{S} + i\alpha\mathbf{A}$  que interpola del ensamble con simetría ortogonal (cuando  $\alpha = 0$ ) al ensamble con simetría unitaria (cuando  $\alpha = 1$ ).

Antes de estudiar las propiedades de transporte del modelo paramétrico de matrices aleatorias, verificamos las propiedades de su espectro (mediante la distribución del espaciamiento entre energías consecutivas  $P(s)$ ) reportadas anteriormente:

(i) cuando  $\alpha = 0$ ,  $P(s) = P_{\text{GOE}}(s)$ ;

(ii) cuando  $\alpha = 1$ ,  $P(s) = P_{\text{GUE}}(s)$ ;

(iii) cuando  $0 < \alpha < 1$ ,  $P(s)$  es invariante para  $\gamma = \alpha\sqrt{N}$  fija, donde  $N$  es el tamaño de la matriz  $H(\alpha)$ .

Nosotros consideramos arreglos dispersivos en ausencia de procesos directos en los cuales  $2M$  terminales unimodales son acopladas al sistema interno representado por  $H(\alpha)$ . En general, observamos que:

(i) el promedio de los elementos de la matriz de dispersión  $\langle |S_{11}|^2 \rangle$  y  $\langle |S_{12}|^2 \rangle$ , la distribución de probabilidad de la conductancia  $w(T)$ , la conductancia promedio  $\langle T \rangle$ , la conductancia típica  $\exp\langle \ln T \rangle$ , la varianza de la conductancia  $\text{var}(T)$  y el ruido cuántico  $P$  sufren una transición suave entre el COE y el CUE como función de  $\alpha$  para todo  $M$ ; ver las Figs. 3.3, 3.5, 3.6, 3.8, 3.10 y 3.12;

(ii) la expresión

$$X = X_{\text{COE}} + \frac{X_{\text{CUE}} - X_{\text{COE}}}{1 + (\delta\alpha)^{-2}},$$

donde  $X$  representa las cantidades  $\langle |S_{11}|^2 \rangle$ ,  $\langle |S_{12}|^2 \rangle$ ,  $\langle T \rangle$ ,  $\langle \ln T \rangle$ ,  $-\text{var}(T)$  y  $P$ , donde  $\delta$  es un parámetro de ajuste, reproduce de manera correcta los datos numéricos; ver las Figs. 3.3, 3.6, 3.8, 3.10 y 3.12;

(iii) cuando graficamos  $X^*$ , definido por

$$X^* = \frac{X - X_{\text{COE}}}{X_{\text{CUE}} - X_{\text{COE}}},$$

como función de  $\alpha\delta^{1/2}$ , donde  $X^*$  representa las cantidades  $\langle T \rangle$ ,  $\langle \ln T \rangle$  y  $P$ , los datos para toda  $M$  caen sobre la misma curva; ver las Figs. 3.6, 3.8, 3.12(f);

(iv) cuando graficamos  $\langle T \rangle$ ,  $\langle \ln T \rangle$ ,  $\text{var}(T)$  y  $P$  como función de  $M$  para  $\alpha$  fija, se observa claramente que estas cantidades sufren una transición suave entre el COE y el CUE como función de  $\alpha$ ; ver las Figs. 3.7, 3.9, 3.11, 3.13.

Esperamos que nuestros resultados contribuyan al entendimiento de las propiedades de transporte de sistemas desordenados y caóticos cuantizados. En particular nuestros resultados podrían ser verificados experimentalmente utilizando:

- puntos cuánticos inmersos en un gas bidimensional de electrones con un campo magnético aplicado;
- cavidades microscópicas construidas con guías de ondas deformadas a través de las cuales viajan ondas electromagnéticas;
- cavidades macroscópicas de microondas con impurezas magnéticas.

## Apéndice A

# Gráficos complementarios

En este Apéndice mostramos, como información complementaria, gráficos similares a los de las Figs. 3.6, 3.10, 3.8 y 3.12 pero para el caso  $N = 200$ .

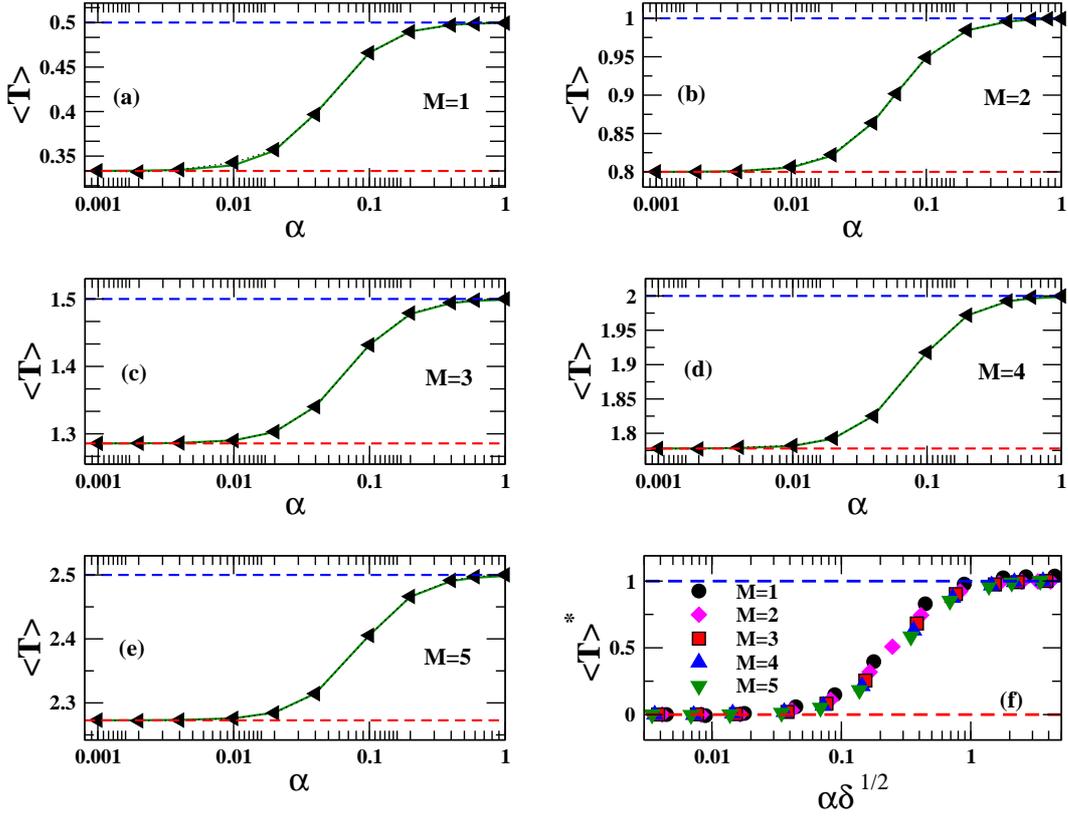


Figura A.1: Promedio de la conductancia  $\langle T \rangle$  como función de  $\alpha$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 200$ . Como referencia, las líneas punteadas indican la predicción de la Teoría de Matrices Aleatorias para  $\langle T \rangle$  dadas en las Ecs. (3.15) (límite COE, línea punteada inferior) y (3.16) (límite CUE, línea punteada superior). (a)  $M = 1$ , (b)  $M = 2$ , (c)  $M = 3$ , (d)  $M = 4$  y (e)  $M = 5$ . La línea continua es el ajuste de los datos con la Ec. (4); los parámetros de ajuste se reportan en la Tabla 3.4. En (f) presentamos los datos reportados en (a-e) pero ahora normalizados de acuerdo a la Ec. (3.25) y como función de  $\alpha\delta^{1/2}$ . Se utilizaron  $10^4$  valores de  $T$  para cada promedio.

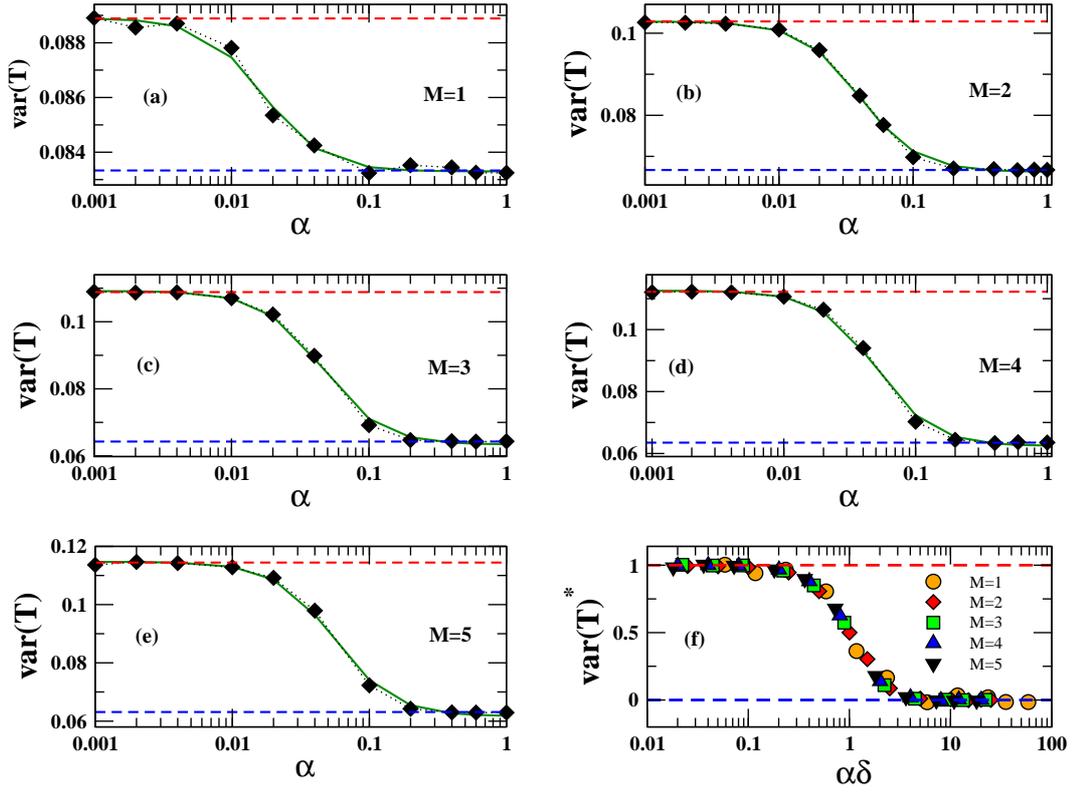


Figura A.2: Varianza de la conductancia  $\text{var}(T)$  como función de  $\alpha$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 200$ . Como referencia, las líneas punteadas indican la predicción de la Teoría de Matrices Aleatorias para  $\text{var}(T)$  dadas en las Ecs. (3.17) (límite COE, línea punteada superior) y (3.18) (límite CUE, línea punteada inferior). (a)  $M = 1$ , (b)  $M = 2$ , (c)  $M = 3$ , (d)  $M = 4$  y (e)  $M = 5$ . La línea continua es el ajuste de los datos con la Ec. (3.29); los parámetros de ajuste se reportan en la Tabla 3.6. En (f) presentamos los datos reportados en (a-e) pero ahora normalizados de acuerdo a la Ec. (3.30) y como función de  $\alpha\delta$ . Se utilizaron  $10^4$  valores de  $T$  para el cálculo de cada  $\text{var}(T)$ .

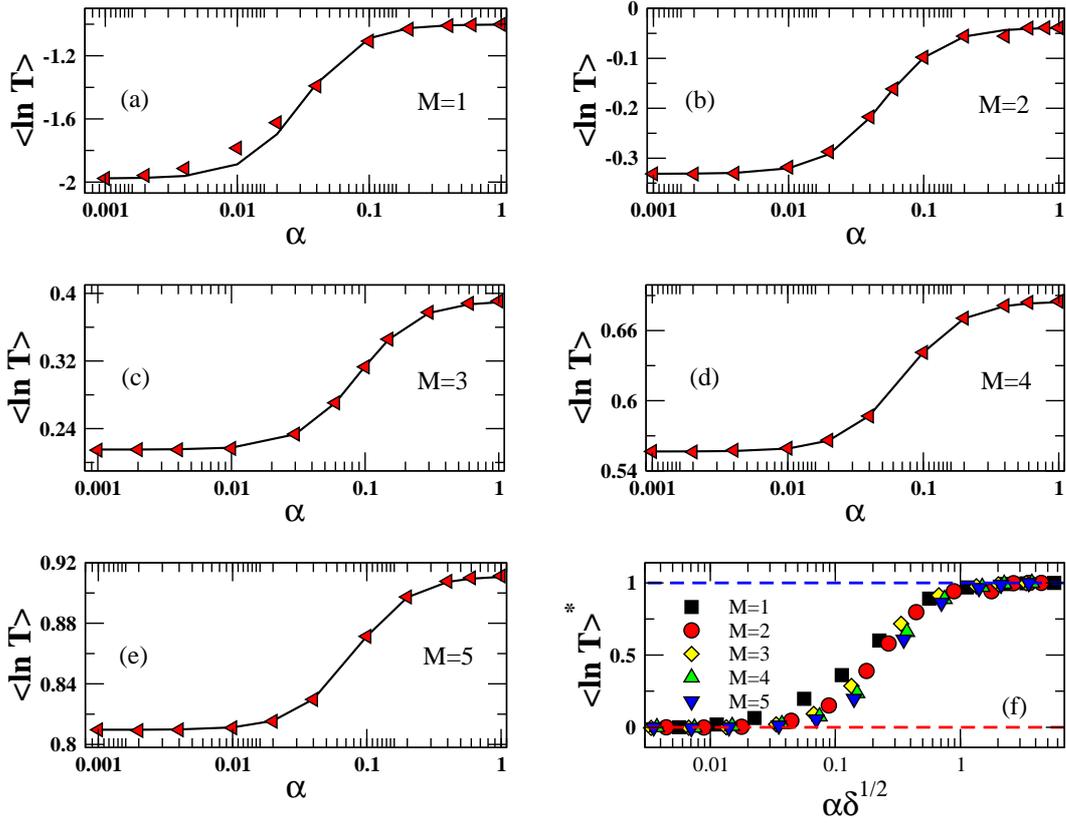


Figura A.3: Promedio del logaritmo de la conductancia  $\langle \ln T \rangle$  como función de  $\alpha$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 200$ . (a)  $M = 1$ , (b)  $M = 2$ , (c)  $M = 3$ , (d)  $M = 4$  y (e)  $M = 5$ . La línea continua es el ajuste de los datos con la Ec. (3.27); los parámetros de ajuste se reportan en la Tabla 3.5. En (f) presentamos los datos reportados en (a-e) pero ahora normalizados de acuerdo a la Ec. (3.28) y como función de  $\alpha \delta^{1/2}$ . Se utilizaron  $10^4$  valores de  $T$  para cada promedio.

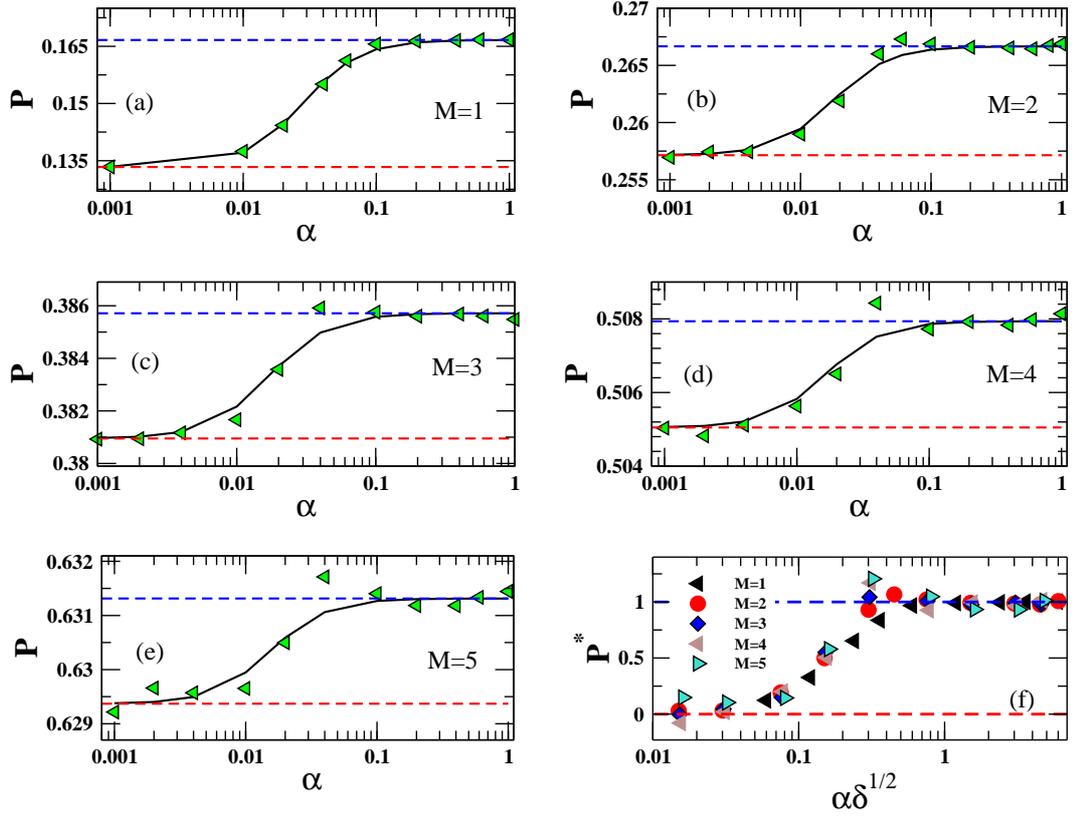


Figura A.4: Ruido cuántico  $P$  como función de  $\alpha$  para el modelo paramétrico de matrices aleatorias de la Ec. (1.5) de tamaño  $N = 200$ . Como referencia, las líneas punteadas indican la predicción de la Teoría de Matrices Aleatorias para  $P$  dadas en las Ecs. (3.19) (límite COE, línea punteada inferior) y (3.20) (límite CUE, línea punteada superior). (a)  $M = 1$ , (b)  $M = 2$ , (c)  $M = 3$ , (d)  $M = 4$  y (e)  $M = 5$ . La línea continua es el ajuste de los datos con la Ec. (3.31); los parámetros de ajuste se reportan en la Tabla (3.7). En (f) presentamos los datos reportados en (a-e) pero ahora normalizados de acuerdo a la Ec. (3.32) y como función de  $\alpha\delta^{1/2}$ . Se utilizaron  $10^4$  matrices  $S$  para el cálculo de cada  $P$ .

# Bibliografía

- [1] M. L. Mehta, *Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels*. (Academic Press, New York, 1990).
- [2] E. P. Wigner, “proceedings of the canadian mathematical congress,” **52**, 174 (1957).
- [3] Bohigas, M. Giannoni, and Schmit *Phys. Rev. Lett.*, **52** 1 (1984).
- [4] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos*. (Springer, Berlin, 1991).
- [5] O. Bohigas, *Chaos and Quantum Physics(Les-Houches Session LII)*. M. J. Giannoni and A. Voros, eds. (North Holland, Amsterdam, 1989).
- [6] C. W. J. Beenakker *J. Reviews of Modern Physics*, **69**, (1997).
- [7] R. Scharf, B. Dietz, M. Kuz, F. Haake, and M. V. Berry *Europhys. Lett.*, **5**, 383, (1988).
- [8] M. V. Berry and M. Tabor *Proc. R. Soc. London A*, **356**, 375 (1977).
- [9] G. Casati, F. Valz-Gris, and I. Guarneri *Lett. Nuovo Cimento*, **28**, 279 (1980).
- [10] H. J. Stoeckmann, *Quantum Chaos an introduction*. (Cambridge University Press, Edimburg Building Cambridge CB2 2RU UK, 2000).
- [11] A. Pandey and M. L. Mehta *Commun. Math. Phys.*, **87**, 449, (1983).
- [12] M. L. Mehta and A. Pandey *J. Phys. A: Math. Gen.*, **16**, 2655, L601 (1983).
- [13] K. Zyczkowski *A. Phys. Polonica B*, **24**, 967 (1993).
- [14] Z. Yan and R. Harris *Europhys. Lett.*, **32**, 437 (1995).
- [15] P. So, S. Anlage, E. Ott, and R. Oeter *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 2662 (1995).
- [16] S.-H. Chung, A. Gokirmak, D.-H. Wu, J. S. A. Bridgewater, E. Ott, T. M. Antonsen, and S. M. Anlage *Phys. Rev. Lett.*, **858**, 2482 (2000).
- [17] B. Dietz, T. Guhr, H. L. Harney, and A. Richter *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 254001 (2006).
- [18] S. Kumar and A. Pandey *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43**, 285101 (2010).
- [19] S. Kumar and A. Pandey *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43**, 085001 (2010).
- [20] I. Rotter *Rep. Prog. Phys.*, **54**, 635 (1991).
- [21] G. Lenz and K. Zyczkowski, “Time-reversal symetry and the statistical properties of quantum system,” *Phys. A: Math.*, **25**, 5539-5551 (1992).
- [22] A. Altland, S. Iida, and K. B. Efetov *Phys. A: Math. Gen.*, **26**, 3545-3568 (1993).

- [23] M. L. Mehta and A. Pandey, "On some gaussian ensembles of hermitian matrices," *J. Phys. A. Math. Gen.*, **16**, 2655-2684 (1983).
- [24] N. Dupuis and G. Montambaux *Physical Review B.*, **43**, 14390, (1991).
- [25] G. Lenz and F. Haake *Physical Review B.*, **67**, 1 (1991).
- [26] C. Mahaux and H. A. Weidenmuller, "Shell model approach in nuclear reactions," (North-Holland, Amsterdam, 1969).
- [27] T. Kottos and M. Weiss *Phys. Rev. Lett.*, p. 056401, **89**, 056401 (2002).
- [28] F. Steinbach, A. Ossipov, T. Kottos, and T. Geisel *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 4426 (2000).
- [29] R. Landauer *IBM J. Res. Dev.*, **1** 122 (1957).
- [30] M. Buttiker *Phys. Rev. Lett.*, **57**, (1986).
- [31] P. A. Mello and N. Kumar, *Quantum Transport in Mesoscopic Systems*. (Oxford University Press, Oxford, 2004).
- [32] E. N. Bulgakov, V. Gopar, P. A. Mello, and I. Rotter *Phys. Rev. B*, **73** (2006).
- [33] S. Heusler, S. Muller, P. Braun, and F. Haake *Phys. Rev. Lett.*, **96**, (2006).
- [34] D. V. Savin and H. J. Sommers *Phys. Rev. B*, **73** (2006).