Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Estructura celular generalizada

Tesis que para obtener el título de

Maestra en Matemáticas

presenta

Ana Gabriela Hernández Dávila

bajo la dirección de

Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz
Dra. Rocío Leonel Gómez

Pachuca de Soto, Hidalgo. Julio de 2020

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
School of Engineering and Applied Sciences

Mineral de la Reforma, Hgo., a 2 de julio de 2020

Número de control: ICBI-D/489/2020
Asunto: Autorización de impresión de tesis.

M. EN C. JULIO CÉSAR LEINES MEDÉCIGO
DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR

Por este conducto le comunico que el comité revisor asignado a la C. Ana Gabriela Hernández Dávila, alumna de la Maestría en Matemáticas con número de cuenta 294569, autoriza la impresión del proyecto de tesis titulado "Estructura celular generalizada" en virtud de que se han efectuado las revisiones y correcciones pertinentes.

A continuación se registran las firmas de conformidad de los integrantes del comité revisor.

PRESIDENTE	Dr. Rafael Villarroel Flores	
SECRETARIO	Dra. Rocío Leonel Gómez	
VOCAL	Dr. Benjamín A. Itzá Ortiz	
SUPLENTE	Dr. Federico Menendez Conde Lara	

Sin otro particular reitero a Usted la seguridad de mi atenta consideración.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

Dr. Otilio Arturo Acevedo Sandoval
Director del ICBI

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
ICBI
DIRECCIÓN

OAAS/BIO

Ciudad del Conocimiento
Carretera Pachuca-Tulancingo km 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P. 42184
Teléfono: +52 (771) 71 720 00 ext. 2231
Fax 2109
direccion_icbi@uaeh.edu.mx

Resumen

En el presente trabajo definimos lo que será una estructura celular generalizada a partir la definición de estructura celular dada por E. Tymchatyn y W. Debski en [7]. La idea de dar esta definición fue ampliar la clase de espacios que pueden ser representados como un cociente de un límite inverso de una sucesión inversa de gráficas, sin necesidad de recurrir a sistemas inversos. Así, todo espacio determinado por una estructura celular, es determinado por una estructura celular generalizada, pero no al revés. Además, presentamos algunas propiedades que satisfacen las estructuras celulares generalizadas. Se muestra que los espacios determinados por una estructura celular generalizada no necesariamente son regulares y damos algunos ejemplos que muestran que hay otras propiedades que satisfacen las estructuras celulares y no conservan las estructuras celulares generalizadas. Damos condiciones, en términos de cubiertas cerradas, para que un espacio sea determinado por una estructura celular generalizada y mostramos una familia de espacios determinados por una estructura celular generalizada, pero no por una estructura celular.

Abstract

In the present work we define what will be a generalized cell structure based on the definition of cell structure which was given by E. Tymchatyn and W. Debski in [7]. The idea of giving this definition was to expand the class of spaces that can be represented as a quotient of an inverse limit of an inverse sequence of graphs without resorting to inverse systems. Thus, if a space admits a cell structure, it admits a generalized cell structure, but not vice versa. Furthermore, some properties, that are satisfied by a generalized cell structure, are presented. It is shown that if a space admits a generalized cell structure, it isn't necessarily a regular space and some examples are given to show that there are other properties that are satisfied by cell structures and they aren't preserved by generalized cell structures. Conditions on closed covers for a space to be determined by a generalized cell structure are given, as well as a family of spaces that admit a generalized cell structure but not a cell structure.

A mis padres, Irma Elena Dávila Morales y J. Isabel Hernández Crúz.

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca otorgada durante los dos años de estudios.

Agradezco a mis asesores, la Dra. Rocío y el Dr. Itzá, por haber confiado en mí y por haber dedicado tiempo para guiarme en la realización de este trabajo. Además, les agradezco la paciencia que me tuvieron y su motivación para que este trabajo pudiera ser terminado a tiempo.

Agradezco a mis sinodales, el Dr. Fede y el Dr. Villarroel, por sus observaciones y comentarios acertados para la mejora de esta tesis.

También me gustaría agradecer al Dr. Carlos Islas, por su interés en el tema y por discutir con nosotros algunas partes de este trabajo, al Dr. Juan Manuel Burgos, por sus observaciones y comentarios sobre la tesis y al Dr. Selim Gómez, por haberse tomado el tiempo para platicar con nosotros sobre aplicaciones de las gráficas en la física.

Agradezco a mis padres, Irma Elena Dávila Morales y J. Isabel Hernández Crúz, por su motivación para que estudiara esta maestría y por la confianza que siempre han tenido en mí, con lo cual han hecho que yo confíe en mí misma.

Agradezco a mis hermanos, Paty, Gema, Tony, Salva y Pepe, quienes me han brindado su apoyo incondicional para cumplir mis metas.

Agradezco a mis amigos y compañeros de maestría, Vale y Lalo, con quienes compartí esta etapa de mi vida y quienes me ayudaron cuando tenía dudas o necesitaba discutir con alguien algún problema. También quiero agradecer a mis amigos, Yatza y Waldo, por escucharme cuando necesitaba hablar con alguien y por motivarme a seguir adelante.

Índice general

Introducción

Las gráficas han sido utilizadas para abordar distintos problemas de matemáticas, física, biotecnología y otras áreas de la ciencia. Por ejemplo, en física se han empleado gráficas combinatorias para definir las *spin networks*, las cuales fueron utilizadas, inicialmente, en mecánica cuántica y recientemente se han usado para representar el espacio de estados en la gravedad cuántica, ver [3] y [17]; en biotecnología, se han usado gráficas para representar señales electrofisiológicas para su clasificación y caracterización, ver [4]. Así, en topología general se ha buscado representar espacios topológicos utilizando gráficas de tal manera que éstas contengan información suficiente del espacio topológico.

La idea de describir espacios topológicos usando sucesiones fue utilizada por P.S. Alexandroff en 1929, ver [2], quien aproximó espacios topológicos por poliedros, para después aplicar la topología algebraica a espacios métricos compactos. Más adelante, en 1937, H. Freudental consideró funciones de sucesiones inversas de poliedros y mostró que si X es un espacio métrico y compacto entonces X es homeomorfo al límite inverso de una sucesión inversa de poliedros cuya dimensión es acotada por la dimensión de X, ver [10]. Esto no necesariamente es cierto para espacios compactos Hausdorff, lo cual fue mostrado de manera independiente por S. Mardesic, ver [14], y B. Pasynkov, ver [18]. En 1997, R. D. Kopperman y R. G. Wilson mostraron cómo obtener espacios compactos Hausdorff como reflexiones Hausdorff de límites inversos de espacios T_0 finitos, ver [13].

Por otra parte, dados dos espacios topológicos los cuales se pueden representar como límite inverso de un sistema inverso, se ha buscado representar funciones continuas entre tales espacios topológicos por sistemas de funciones entre los sistemas inversos. Con esta idea, S. Mardesic introdujo los límites inversos aproximados, ver [16] y [6]. A su vez, éstos fueron remplazados por resoluciones y más adelante por resoluciones aproximadas, ver [15]. El inconveniente en el estudio de sistemas inversos aproximados y resoluciones fue que los diagramas que se obtienen con las funciones de ligadura no necesariamente son conmutativos.

Así, para evitar los problemas de conmutatividad de los diagramas, E. Tymchatyn y W. Debski restringen su atención a sistemas inversos de espacios discretos. En 2017 fue introducido el concepto de estructura celular por E. Tymchatyn y W. Debski, considerando sucesiones inversas de gráficas, ver [7]. En este artículo caracterizan los espacios completamente metrizables utilizando sucesiones inversas de espacios discretos. Posteriormente, extendieron su definición a sistemas inversos de gráficas con lo cual caracterizan a los espacios que son imagen perfecta de espacios topológicamente completos, ver [8]. En ambos artículos citados se muestra que, para representar espacios completamente metrizables o espacios que son imagen perfecta de un espacio topológicamente completo, es suficiente usar la información contenida en gráficas.

En este trabajo hemos definido una estructura celular generalizada modificando una de las condiciones de la definición de estructura celular dada por E. Tymchatyn y W. Debski. Las estructuras celulares, obtenidas a partir de una sucesión inversa, caracterizan a los espacios completamente metrizables, así, la idea de definir una estructura celular generalizada, es ampliar la clase de espacios que pueden ser representados como un cociente de un subespacio cerrado del producto numerable de espacios discretos, sin necesidad de recurrir a sistemas inversos.

Este trabajo se divide en tres capítulos. En el primer capítulo presentamos conceptos y definiciones de topología general que serán utilizados en los demás capítulos.

En el segundo capítulo presentamos la definición de estructura celular y algunos resultados vistos en [7] relacionados con las propiedades de los espacios determinados por estructuras celulares. Presentamos ejemplos de estructuras celulares y cómo obtener estruturas celulares a partir de cubiertas cerradas. Además, introducimos la noción de completez de una estructura celular y damos algunos ejemplos relacionados con las estructuras celulares. Para finalizar el capítulo 2, presentamos la extensión de estructuras celulares a sistemas inversos.

En el capítulo 3, hablamos de estructuras celulares generalizadas, presentamos su definición y mostramos algunas de sus propiedades, por ejemplo que el espacio determinado por una estructura celular generalizada es un espacio T_2, pero no necesariamente T_3. Además, damos una condición para que el espacio determinado por una estructura celular generalizada sea normal, esa misma condición implica que podemos definir una base para el espacio determinado por la estructura celular generalizada. Presentamos una familia de espacios topológicos que son determinados por una estructura celular generalizada, pero no por una estructura celular obtenida a partir de un sucesión inversa. También, incluimos algunos resultados de estructuras celulares generalizadas que son obtenidas a partir de cubiertas cerradas de un espacio topológico y ampliamos la familia de espacios que son determinados por una estructura celular generalizada, pero no por una estructura celular obtenida a partir de un sucesión inversa. Por último, presentamos las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos definiciones y resultados que utilizaremos a lo largo de este trabajo. Comenzamos con nociones de topología general relacionadas con axiomas de separación.

1.1. Nociones de topología general

Dado un espacio topológico (X, τ) a los elementos de la topología τ les llamaremos abiertos en X y un cerrado en X es un subconjunto de X de la forma $X \backslash A$, donde $A \in \tau$.

Definición 1.1.1. Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. El espacio X es llamado $\mathbf{T_0}$ si para cada par de puntos distintos x y y en X, existe un subconjunto abierto de X que contiene solo a uno de ellos.

2. El espacio X es llamado $\mathbf{T_1}$ si para cada par de puntos distintos x y y en X, existen subconjuntos abiertos U y V con $x \in U$, $y \in V$, pero $x \notin V$ y $y \notin U$.

3. El espacio X es llamado $\mathbf{T_2}$ o ***Hausdorff*** si para cada par de puntos distintos x y y en X, existen subconjuntos abiertos y disjuntos U y V, con $x \in U$ y $y \in V$.

4. El espacio X es llamado $\mathbf{T_3}$ si para cada subconjunto cerrado $A \subset X$ y para cada $x \in X \backslash A$, existen subconjuntos abiertos y disjuntos U y V, con $x \in U$ y $A \subset V$.

5. El espacio X es llamado $\mathbf{T_4}$ si para cualesquiera dos subconjuntos cerrados A y B en X, existen subconjuntos abiertos y disjuntos U y V, con $A \subset U$ y $B \subset V$.

Definición 1.1.2. Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que X es ***regular*** si X es T_3 y T_1. Diremos que X es ***normal*** si X es T_4 y T_1. Y diremos que X es ***Tychonoff*** si X es T_1 y para cada punto $x \in X$ y cada subconjunto cerrado $A \subset X$ tal que $x \notin A$ existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(A) \subset \{1\}$.

Ejemplos de espacios normales son los espacios métricos y como cada espacio métrico es T_1, T_2, T_3, T_4, regular y Tychonoff, ya tenemos muchos ejemplos de espacios que cumplen estas condiciones.

Al conjunto de los números naturales lo denotaremos por $\mathbb{N}$, al conjunto de números reales por $\mathbb{R}$ y al conjunto $\{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ por $\mathbb{R}^2$.

Dados dos espacios topológicos X y Y y una función f de X a Y, nos referiremos a f como un mapeo si f es una función continua.

Definición 1.1.3. Sean X y Y espacios topológicos y f una función de X a Y. Diremos que f es un mapeo ***perfecto*** si f es continua, cerrada y para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ es un espacio compacto.

Teorema 1.1.4. ([9], Teorema 3.7.20, pág. 187). *La clase de espacios T_i, con $i \in \{2,3,4\}$, es invariante bajo mapeos perfectos.*

Antes de definir la topología producto definimos la topología inicial inducida por una familia de funciones.

Definición 1.1.5. Sean J un conjunto no vacío y $\{(X_j,\tau_j) : j \in J\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{F} = \{f_j : X \to X_j : j \in J\}$ una familia de funciones. Definimos la ***topología inicial*** inducida por $\mathcal{F}$, la cual denotaremos por $\tau_{\mathcal{F}}$, como la más gruesa de las topologías en X que convierte a cada función $f_i \in \mathcal{F}$ en una función continua, es decir, si τ es una topología en X tal que, para cada $j \in J$, f_j es una función continua, entonces $\tau_{\mathcal{F}} \subset \tau$, y además, $\tau_{\mathcal{F}}$ satisface: para cualquier espacio topológico Z, una función $g : Z \to (X, \tau_{\mathcal{F}})$ es continua si y sólo si $f_j \circ g$ es continua.

Definición 1.1.6. Sea $\{(X_j,\tau_j) : j \in J\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos, donde J es un conjunto no vacío. Sea, para cada $i \in J$, $p_i : \prod_{j\in J} X_j \to X_i$ la i-ésima proyección de $\prod_{j\in J} X_j$ sobre X_i, es decir, $p_i((x_j)_{j\in J}) = x_i$. Se define la ***topología producto*** o ***Tychonoff*** de los espacios X_j como la topología inicial inducida por $\mathcal{P} = \{p_j : j \in J\}$.

Lema 1.1.7. *El espacio $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto es homeomorfo a $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto.*

Demostración. Consideremos la función f definida de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ en $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ por $f((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (x_i+1)_{i\in\mathbb{N}}$. La función f es inyectiva pues si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son elementos distintos de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, entonces existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \neq y_i$. Luego, $x_i + 1 \neq y_i + 1$ y por lo tanto, $f((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) \neq f((y_i)_{i\in\mathbb{N}})$. Para ver que es suprayectiva, sea $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$, entonces $y_i \in \{1,2\}$ de modo que $y_i - 1 \in \{0,1\}$. Así, $(y_i-1)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y satisface $f((y_i-1)_{i\in\mathbb{N}}) = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Veamos que f es continua. Sea $A \subset \{1,2\}^{\mathbb{N}}$ un subconjunto abierto. Sin perder generalidad podemos suponer que A es un abierto básico, entonces existe un conjunto finito $\{j_1, j_2, ..., j_n\} \subset \mathbb{N}$ con $n \in \mathbb{N}$ tal que

$A = A_{j_1} \times \cdots A_{j_n} \times \{1,2\}^{\mathbb{N}\setminus\{j_1,j_2,\ldots,j_n\}}$, donde $A_{j_k} \subset \{1,2\}$, para cada $k \in \{1,\ldots,n\}$. Por lo tanto, $f^{-1}(A) = B_{j_1} \times \cdots B_{j_n} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}\setminus\{j_1,j_2,\ldots,j_n\}}$, donde $B_{j_k} \subset \{0,1\}$, para cada $k \in \{1,\ldots,n\}$. Así, $f^{-1}(A)$ es abierto en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, de este modo f es continua. Como $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ es compacto, $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ es T_2 y f es continua y biyectiva, f es un homeomorfismo. ■

Observación 1.1.8. *El conjunto de Cantor, al cual denotaremos por la letra C, es homeomorfo al espacio $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto, ver [21, ejemplo 17.9(c)]. Por el Lema 1.1.7, C es homeomorfo al espacio $\{1,2\}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto.*

Definimos ahora la topología final y la topología cociente.

Definición 1.1.9. Sean J un conjunto no vacío y $\{(X_j,\tau_j) : j \in J\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Sea Y un conjunto no vacío y $\mathcal{F} = \{f_j : X_j \to Y : j \in J\}$ una familia de funciones. Definimos la ***topología final*** inducida por $\mathcal{F}$, la cual denotaremos por $\tau_{\mathcal{F}}$, como la más fina de las topologías en Y que convierte a cada función $f_i \in \mathcal{F}$ en una función continua, es decir, si τ es una topología en Y tal que, para cada $j \in J$, f_j es una función continua, entonces $\tau \subset \tau_{\mathcal{F}}$, y además, $\tau_{\mathcal{F}}$ satisface: para cualquier espacio Z, una función $g : (Y,\tau_{\mathcal{F}}) \to Z$ es continua si y solo si $g \circ f_j$ es continua para toda $j \in J$.

Definición 1.1.10. Sea X un conjunto y r una relación de equivalencia. Sea X/r el conjunto de clases de equivalencia y $\pi : X \to X/r$ el mapeo cociente. Se define la ***topología cociente*** de X/r como la topología final infucida por $\mathcal{P} = \{\pi\}$.

A continuación presentamos la definición de un espacio Lindelöf.

Definición 1.1.11. Un espacio topológico X es ***Lindelöf*** si es regular y cada cubierta abierta tiene una subcubierta numerable.

Los espacios métricos compactos son ejemplos de espacios Lindelöf, pero no todos los espacios Lindelöf son compactos, por ejemplo el conjunto de los numeros reales $\mathbb{R}$ con la topología usual.

Los siguientes resultados nos serán útiles para decidir cuándo un espacio es Lindelöf, su demostración puede ser consultada en [5] y [9].

Teorema 1.1.12. ([5], ejemplo 7.30, pág. 257). *Si X es un espacio regular y segundo numerable, entonces X es un espacio Lindelöf.*

Teorema 1.1.13. ([9], Corolario 3.8.10, pág. 193). *Si X es un espacio Lindelöf y Y un espacio compacto, entonces $X \times Y$ es un espacio Lindelöf.*

Teorema 1.1.14. ([9], Teorema 3.8.7, pág. 193). *Sean X un espacio Lindelöf y Y un espacio regular. Si existe una mapeo suprayectivo f de X a Y, entonces Y es Lindelöf.*

Presentamos ahora la siguiente definición.

Definición 1.1.15. Un espacio topológico X es ***σ-compacto*** si es Hausdorff y se puede representar como una unión numerable de subespacios compactos.

Los espacios compactos Hausdorff son ejemplo de espacios σ-compactos. Pero no todo espacio σ-compacto es compacto, por ejemplo $\mathbb{N}$ con su topología usual.

Notemos que si X es un espacio σ-compacto y no vacío, entonces $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ con A_i un espacio compacto para cada $i \in \mathbb{N}$. Sin perder generalidad, se puede suponer que para cada $i \in \mathbb{N}$, A_i es no vacío, pues podemos quitar los A_j, con $j \in \mathbb{N}$, tales que $A_j = \emptyset$.

Otro resultados relacionados con los espacios Lindelöf y que utilizaremos en este trabajo son los siguientes:

Lema 1.1.16. *Si X es un espacio regular y σ-compacto, entonces X es la imagen continua de $\mathbb{N} \times Y$, donde $\mathbb{N}$ tiene la topología discreta y Y es un espacio compacto.*

Demostración. Como X es σ-compacto, entonces $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, donde cada A_i es un subespacio compacto y no vacío de X. Además $\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$ es un espacio compacto, pues producto de compactos es compacto. Definamos ahora una función F de $\mathbb{N} \times \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$ a X de la siguiente manera, para cada $(n, a_1, a_2, a_3, ...) \in \mathbb{N} \times \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$, sea $F((n, a_1, a_2, a_3, ...)) = a_n$. Notemos que F está bien definida pues a_n pertenece a X y además asigna un solo elemento de X a cada punto $(n, a_1, a_2, ...)$ en $\mathbb{N} \times \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Por otro lado, F es suprayectiva pues si $x \in X$, entonces $x \in A_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$ y $F((j, a_1, ..., a_{j-1}, x, a_{j+1}, ...)) = x$, con $a_i \in A_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Veamos por último que F es continua. Sea A un subconjunto abierto y no vacío de X y sea $(m, a_1, a_2, ..., a_m, ...) \in F^{-1}(A)$, notemos que $a_m \in A \cap A_m$. Consideremos el conjunto $D = \{(m, b_1, b_2, ..., b_{m-1}, b_m, b_{m+1}, ...) : b_m \in A \cap A_m\} = \{m\} \times (A \cap A_m) \times \prod_{i\neq m} A_i$. Se puede observar que D está contenido en $\mathbb{N} \times \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Notemos que D es un subconjunto abierto y no vacío de $\mathbb{N} \times \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$, pues $A \cap A_m$ es un subconjunto abierto de A_m y además D contiene a $(m, a_1, a_2, ..., a_m, ...)$. Veamos que $F(D) = A \cap A_m$. Sea $y \in A \cap A_m$, como $y \in A$ existe $(m, b_1, ..., b_{m-1}, b_m, b_{m+1}, ...) \in \mathbb{N} \times \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$, con $b_i \in A_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, tal que $F((m, b_1, ..., b_m, b_{m+1}, ...)) = y$ y como $y \in A_m$, $b_m = y$. Así, $(m, b_1, ..., b_{m-1}, y, b_{m+1}, ...) \in D$ y $F((m, b_1, ..., b_{m-1}, y, b_{m+1}, ...)) = y$ por lo tanto $y \in F(D)$. La otra contención es clara por definición del conjunto D. Como $A \cap A_m \subset A$, tenemos que $F(D) \subset A$. Por lo tanto $D \subset F^{-1}(A)$, es decir, $F^{-1}(A)$ es abierto en $\mathbb{N} \times \prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$. ■

Proposición 1.1.17. *Sea $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una colección de espacios regulares y σ-compactos. Entonces $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ con la topología producto es un espacio Lindelöf.*

Demostración. Notemos primero que $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ es regular, pues cada X_i es regular, ver [20, Proposición 3.1.2]. Por otra parte, aplicando el Lema 1.1.16, tenemos que para cada $i \in \mathbb{N}$, X_i es la imagen continua de algún subconjunto cerrado Z_i contenido en $\mathbb{N} \times Y_i$ con Y_i compacto. En consecuencia existe un mapeo f_i de $\mathbb{N} \times Y_i$ sobre X_i. Como Y_i es compacto, tenemos que $\prod_{i\in\mathbb{N}} Y_i$ es compacto. Además, como $\mathbb{N}$ es regular y segundo numerable, tenemos que $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{N}$ es regular y segundo numerable y por el Teorema 1.1.12, es Lindelöf. Luego, por el Teorema 1.1.13, tenemos que $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{N} \times \prod_{i\in\mathbb{N}} Y_i$ es Lindelöf, pues es el producto de un espacio Lindelöf y un compacto. Notemos además que $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{N}\times\prod_{i\in\mathbb{N}} Y_i$ es homeomorfo a $\prod_{i\in\mathbb{N}}(\mathbb{N}\times Y_i)$ al definir la función $h : \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{N}\times\prod_{i\in\mathbb{N}} Y_i \to \prod_{i\in\mathbb{N}}(\mathbb{N}\times Y_i)$ por $h((n_1, n_2, ...),(y_1, y_2, ...)) = ((n_1, y_1),(n_2, y_2), ...)$.

Definamos ahora la siguiente función $F : \prod_{i\in\mathbb{N}}(\mathbb{N} \times Y_i) \to \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ como sigue: $F(((n_1, y_1),(n_2, y_2), ...)) = (f_1(n_1, y_1), f_2(n_2, y_2), ...)$. Notemos que F está bien definida, pues para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos que f_i está bien definida en $\mathbb{N} \times Y_i$. Además si $(x_1, x_2, x_3...) \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$, entonces $x_j \in X_j$ y por lo tanto $x_j = f_j(z_j)$, con $z_j \in Z_j \subset \mathbb{N} \times Y_j$. De donde tenemos que $z_j = (n_j, y_j)$ para algunos $n_j \in \mathbb{N}$ y $y_j \in Y_j$. Concluimos así que $F(((n_1, y_1),(n_2, y_2), ...)) = (x_1, x_2, x_3, ...)$, es decir, F es suprayectiva. Veamos entonces que F es continua y por el Teorema 1.1.14, tendremos que $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ es Lindelöf. Sea D un subconjunto abierto en $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $D = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n \times \prod_{i=n+1}^{\infty} X_i$, donde $D_i \subset X_i$ es un subconjunto abierto para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Sea $((a_1, b_1),(a_2, b_2), ...) \in F^{-1}(D)$, entonces tenemos que $F(((a_1, b_1),(a_2, b_2), ...)) \in D$ y por lo tanto, $f_i(a_i, b_i) \in D_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$ y $f_i(a_i, b_i) \in X_i$ para cada $i > n$. Como para cada $j \in \mathbb{N}$ tenemos que la función f_j es continua, entonces para $j \in \{1, ..., n\}$ existen abiertos $E_j \subset \mathbb{N}$ y $F_j \subset Y_j$ tales que $(a_j, b_j) \in E_j\times F_j$ y $f_j(E_j\times F_j) \subset D_j$. Definamos $C = (\prod_{i=1}^{n} E_i\times F_i)\times(\prod_{i=n+1}^{\infty}(\mathbb{N}\times Y_i))$, el cual es un abierto en $\prod_{i\in\mathbb{N}}(\mathbb{N} \times Y_i)$ que contiene a $((a_1, b_1),(a_2, b_2), ...)$ y además $F(C) = \{(f_1((n_1, y_1)), f_2((n_2, y_2)), ...) : (n_i, y_i) \in E_i \times F_i \text{ para cada } i \in \{1, ..., n\}\}$. Como $f_j(E_j \times F_j) \subset D_j$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$ tenemos que $F(C)$ es un subconjunto de D. Por lo tanto $C \subset F^{-1}(D)$, es decir, $F^{-1}(D)$ es un abierto en $\prod_{i\in\mathbb{N}}(\mathbb{N} \times Y_i)$ y de este modo concluimos que F es continua y por el Teorema 1.1.14, $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ es Lindelöf. ■

Otras propiedades de los espacios topológicos que estaremos utilizando son secuencialmente compacto, perfectamente normal, C^*-encajado o pseudocompacto, las cuales definimos a continuación.

Definición 1.1.18. Un espacio topológico X es ***secuencialmente compacto*** si cada sucesión en X tiene una subsucesión convergente.

Un ejemplo de espacio secuencialmente compacto es la circunferencia unitaria S^1 con su topología usual, y en general cualquier espacio métrico compacto es un espacio secuencialmente compacto.

Definición 1.1.19. Sea X un espacio topológico, diremos que X es ***perfectamente normal*** si X es normal y cada subconjunto cerrado de X es un conjunto G_δ. Un conjunto G_δ es una intersección numerable de conjuntos abiertos.

Teorema 1.1.20. ([9], Corolario 4.1.13, pág. 254). *Cada espacio metrizable es perfectamente normal.*

El teorema anterior nos asegura que los espacios metrizables son perfectamente normales, pero no todo espacio perfectamente normal es metrizable, ejemplo de esto es la línea de Sorgenfrey $\mathcal{S}$, ver [9, pág. 45].

Definición 1.1.21. Sea X un espacio topológico. Un subconjunto A de X es **C*-*encajado*** en X si cada función de valores reales, continua y acotada en A puede ser extendida a X.

Un ejemplo de subespacio C^*-encajado es el siguiente. Sea Ω el conjunto de los números ordinales menores o iguales que ω_1, donde ω_1 es el primer ordinal infinito no numerable, con la topología de orden. Definamos $\Omega_0 = \Omega \backslash \{\omega_1\}$. Entonces Ω_0 es C^*-encajado en Ω, ver [21, ejemplo 17.2(c), pág. 117]. Otro ejemplo de subespacio C^*-encajado es la plancha de Tychonoff $T = \Omega \times \Omega(\omega) \backslash \{(\omega_1, \omega)\}$, definida en [21, ejemplo 17.12], el cual es C^*-encajado en $T^* = \Omega \times \Omega(\omega)$ y por lo tanto, tiene una única compactificación, ver [21, ejemplo 19.13(c) y Teorema 19.12].

Definición 1.1.22. Sea X un espacio topológico, diremos que X es ***pseudocompacto*** si X es un espacio Tychonoff y cada mapeo de valores reales definido en X es acotado.

Un ejemplo de espacio pseudocompacto es el conjunto de Cantor C y en general cualquier espacio métrico compacto, pero no todos los espacios pseudocompactos son compactos, por ejemplo la plancha de Tychonoff el cual no es compacto, pero tiene una única compactificación y por [12, Proposición 1.3.10, Pág. 16], es pseudocompacto.

Los siguientes dos resultados son relacionados con espacios métricos y su demostración puede ser consultada en [9].

Teorema 1.1.23. ([9], Teorema 4.3.11, pág. 270). *Sea (X, ρ) un espacio completo, es decir, cada sucesión de Cauchy en (X, ρ) converge a un punto de X. Entonces para cada subconjunto cerrado Y de X, el espacio (Y, ρ) es completo.*

El siguiente lema lo utilizaremos en la demostración del Teorema 2.2.1.

Lema 1.1.24. *Sea X un espacio discreto, entonces (X, d) es un espacio métrico completo, donde $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es la métrica discreta.*

Demostración. La métrica discreta genera la topología de X. Además, las sucesiones de Cauchy en X son eventualmente constantes, por lo tanto convergen en X. Concluimos así que X es un espacio métrico completo. ■

Teorema 1.1.25. ([9], Teorema 4.3.23, pág. 274). *Sea X un espacio completamente metrizable, es decir, existe una métrica ρ en X tal que el espacio (X, ρ) es completo. Si $A \subset X$ es un subespacio G_δ, entonces A es completamente metrizable.*

Otras definiciones y resultados que utilizaremos más adelante son las siguientes:

Definición 1.1.26. Sea J un conjunto no vacío y sea $\leq$ una relación de orden en J. Diremos que $(J, \leq)$ es un ***conjunto dirigido*** si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Para cada $j \in J$, $j \leq j$.
2. Para cualesquiera $i, j, k \in J$, tales que $i \leq j$ y $j \leq k$, entonces $i \leq k$.
3. Para cualesquiera $i, j \in J$, existe $k \in J$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$.

Definición 1.1.27. Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Consideremos una cubierta $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j \in J}$, donde J es un conjunto dirigido, del espacio X. Diremos que A tiene ***diámetro menor que*** $\mathcal{A}$ si existe un $j \in J$ tal que $A \subset A_j$.

Definición 1.1.28. Sea X un espacio Tychonoff. Diremos que X es ***Čech-completo*** si existe una familia numerable $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de cubiertas abiertas del espacio X que satisface que para cualquier familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de intersección finita y que contiene conjuntos de diámetro menor que A_i para cada $i \in \mathbb{N}$, tiene intersección no vacía.

Ejemplos de espacios Čech-completos son los espacios discretos y los espacios métricos compactos. El siguiente resultado caracteriza a los espacios metrizables Čech-completos.

Teorema 1.1.29. ([9], Teorema 4.3.26, pág. 274). *Un espacio topológico X es completamente metrizable si y sólo si X es un espacio Čech-completo y metrizable.*

Teorema 1.1.30. ([9], Teorema 3.9.10, pág. 199). *Sean X, Y espacios Tychonoff y f un mapeo perfecto de X sobre Y. X es Čech-completo si y solo si Y es Čech-completo.*

1.2. Gráficas

En esta sección damos algunas definiciones relacionadas con gráficas.

Definición 1.2.1. Sea X un conjunto no vacío y sean r_1 y r_2 relaciones en el conjunto X, es decir, subconjuntos de $X \times X$. La ***composición*** de r_1 y r_2, que denotaremos por $r_1 + r_2$, se define como:

$$r_1 + r_2 = \{(x, z) \in X \times X : \text{ existe } y \in X \text{ tal que } (x, y) \in r_1 \text{ y } (y, z) \in r_2\}.$$

La ***relación inversa*** de r_1, que denotaremos por $-r_1$, se define como:

$$-r_1 = \{(x, y) : (y, x) \in r_1\}.$$

Si $r_1 = r_2$, denotaremos la composición de r_1 y r_2 como $2r_1$. En general, denotaremos la composición de r consigo misma n-veces como nr.

Si X es un conjunto no vacío, denotaremos por Δ a la diagonal de $X \times X$, es decir, $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$.

Definición 1.2.2. Una relación r en un conjunto no vacío G es ***reflexiva*** si r contiene a la diagonal de G, es decir, $\Delta \subset r$. La relación r es ***simétrica*** si r es igual a su relación inversa, es decir, $r = -r$.

Definición 1.2.3. Una ***gráfica*** es una pareja ordenada (G, r), donde G es un conjunto no vacío y r una relación simétrica y reflexiva en G.

Dada una gráfica (G, r), a los elementos de G les llamaremos ***células***. Para representar la gráfica (G, r) sobre el plano, representaremos con puntos a los elementos de G y la relación entre dos células con un segmento de recta que una los puntos correspondientes.

A dos células que están relacionadas les llamaremos células ***adyacentes***.

Definición 1.2.4. Dada una gráfica (G, r) y $A \subset G$ definimos la ***vecindad*** de A, denotada por $B(A, r)$, como el conjunto de células $b \in G$ tales que b es adyacente a algún elemento de A, es decir:

$$B(A, r) = \{b \in G : (a, b) \in r \text{ para algún } a \in A\}.$$

Definimos la ***n-ésima vecindad*** de un conjunto A, denotada por $B(A, nr)$, como el conjunto de células adyacentes a las células de la $(n-1)$-ésima vecindad de A, es decir:

$$B(A, nr) = \bigcup \{B(b, r) : b \in B(A, (n-1)r)\}.$$

En particular, si A contiene una sola célula a, denotaremos la vecindad de a por $B(a, r)$ y su n-ésima vecindad por $B(a, nr)$.

Consideremos la gráfica G de la figura 1.1, a continuación presentamos la vecindad y segunda vecindad de la celula a de G.

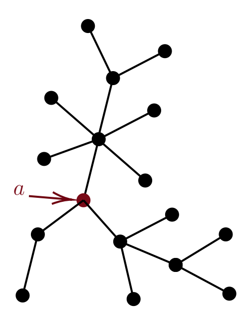

Figura 1.1: Gráfica G.

En la figura 1.2 se puede observar la vecindad de la célula a y en la figura 1.3 la segunda vecindad de la célula a.

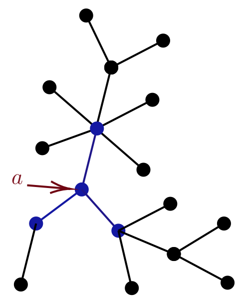

Figura 1.2: Representamos en color azul la vecindad de la célula $a \in G$.

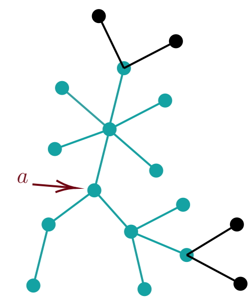

Figura 1.3: En color verde se representa la segunda vecindad de la célula a.

1.3. Espacios uniformes

En esta sección presentamos la definición de espacios uniformes, así como algunas de sus propiedades tales como la completez. Lo cual utilizaremos en la sección 2.5 del capítulo 2.

Definición 1.3.1. Sea X un conjunto no vacío y V un subconjunto de $X \times X$. Diremos que V es un ***entorno de la diagonal*** si V contiene a la diagonal de $X \times X$ y V es una relación simétrica, es decir $\Delta \subset V$ y $V = -V$. Denotaremos por $\mathcal{D}_X$ al conjunto de entornos de la diagonal.

Observación 1.3.2. *Notemos que si X es un conjunto no vacío y V y W son entornos de la diagonal, entonces V y W son relaciones en X. Por lo tanto, la composición de V y W, $V + W$, está bien definida. En particular si $V = W$ denotamos la composición $V + W$ como $2V$.*

Definición 1.3.3. Sea X un conjunto no vacío, diremos que $\mathcal{U}$ es una ***uniformidad*** en el conjunto X si $\mathcal{U}$ es una subfamilia de $\mathcal{D}_X$ que satisface las siguientes condiciones:

1. Si $V \in \mathcal{U}$ y $V \subset W$ con $W \in \mathcal{D}_X$, entonces $W \in \mathcal{U}$.

2. Si $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$, entonces $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}$.

3. Para cada $V \in \mathcal{U}$ existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $2W \subset V$.

4. $\bigcap\{V \subset X \times X : V \in \mathcal{U}\} = \Delta$.

Definición 1.3.4. Un ***espacio uniforme*** es un par $(X,\mathcal{U})$ tal que X es un conjunto y $\mathcal{U}$ es una uniformidad en el conjunto X.

Veamos un ejemplo de una uniformidad definida sobre el intervalo $[0, 1]$.

Consideremos $X = [0,1]$ y $\beta = \big\{\Delta \cup \{(x,y) : x > a, y > a\} : a \in [0,1]\big\}$, ver figura 1.4. Definamos $\mathcal{U} = \{V \in \mathcal{D}_X : B \subset V, \text{ para algún } B \in \beta\}$, entonces $\mathcal{U}$ es una uniformidad en el conjunto X.

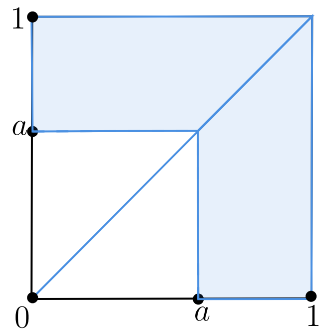

Figura 1.4: Representación de los elementos de la uniformidad $\mathcal{U}$.

Si $V \in \mathcal{U}$, entonces existe $B \in \beta$ tal que $B \subset V$. Por lo tanto si $V \subset W \in \mathcal{D}_X$, tenemos que $B \subset W$. Así $W \in \mathcal{U}$.

Si $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$, entonces existen $B_1, B_2 \in \beta$ tales que $B_1 \subset V_1$ y $B_2 \subset V_2$. Así, $B_1 = \Delta \cup \{(x,y) : x > a, y > a$ para algún $a \in [0,1]\}$ y $B_2 = \Delta \cup \{(x,y) : x > b, y > b$ para algún $b \in [0,1]\}$. Sin perder generalidad supongamos que $a < b$, por lo tanto $B_1 \subset V_1 \cap V_2$, luego $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}$.

Consideremos ahora $V \in \mathcal{U}$, entonces existe $B \in \beta$ tal que $B \subset V$. Supongamos que $B = \Delta \cup \{(x,y) : x > a, y > a\}$ con $a \in [0,1]$. Veamos que $2B \subset B$. Sea $(x,z) \in 2B$, entonces existe $y \in [0,1]$ tal que $(x,y) \in B$ y $(y,z) \in B$. Luego $x > a$, $y > a$ y $z > a$, por lo tanto $(x,z) \in B$.

Por último notemos que $\bigcap\{V \subset X \times X : V \in \mathcal{U}\} = \Delta$ se satisface.

Observación 1.3.5. *Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{U}$ una uniformidad en X. Notemos que si $V \in \mathcal{U}$, entonces V es una relación reflexiva y simétrica en X. Por lo tanto, (X,V) es una gráfica y, para cada $x \in X$, $B(x,V)$ está bien definido de acuerdo a la Definición 1.2.4.*

La demostración del siguiente resultado puede ser consultada en [9].

Teorema 1.3.6. ([9], Teorema 8.1.1, pág. 427). *Sea X un conjunto. Para cada uniformidad $\mathcal{U}$ en el conjunto X la familia $\tau = \{G \subset X :$ para cada $x \in G$ existe un $V \in \mathcal{U}$ tal que $B(x,V) \subset G\}$ es una topología en X y el espacio topológico (X,τ) es un espacio T_1.*

La topología τ definida en el Teorema 1.3.6 es llamada la topología inducida por la uniformidad $\mathcal{U}$.

De forma análoga a la comparación de topologías definidas sobre un mismo conjunto X, también podemos comparar uniformidades definidas sobre un mismo conjunto.

Definición 1.3.7. Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ cualesquiera dos uniformidades en X. Diremos que $\mathcal{U}_1$ es ***más fina*** que $\mathcal{U}_2$ (o que $\mathcal{U}_2$ es ***más gruesa*** que $\mathcal{U}_1$) si $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$.

Definición 1.3.8. Sea X un espacio Tychonoff y sea $\mathcal{U}$ la uniformidad más fina que genera la topología de X. Entonces $\mathcal{U}$ es llamada la ***uniformidad universal*** en el espacio X.

Dado un espacio topológico X y A un subconjunto de X, representaremos la cerradura de A por $Cl_X(A)$ y el interior de A por $Int_X(A)$.

Observación 1.3.9. *Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Veamos que para cada elemento $W \in \mathcal{U}$ y $x \in X$, se tiene que $Cl_X(B(x,W)) \subset B(x,2W)$. Sea $y \in Cl_X(B(x,W))$. Como, para cada $V \in \mathcal{U}$, $Int_X(B(y,V))$ es una vecindad abierta de y, entonces $Int_X(B(y,V)) \cap B(x,W) \neq \emptyset$ para cada $V \in \mathcal{U}$. En particular $B(y,W) \cap B(x,W) \neq \emptyset$, por lo tanto existe $z \in B(y,W) \cap B(x,W)$. Así, $(y,z) \in W$ y $(z,x) \in W$, luego $(y,x) \in 2W$. Concluimos que $y \in B(x,2W)$.*

Veamos que los conjuntos $B(x,V)$, con $x \in X$ y $V \in \mathcal{U}$, no necesariamente son abiertos en la topología inducida por $\mathcal{U}$.

Proposición 1.3.10. *Sea X un conjunto y $\mathcal{U}$ una uniformidad en X. Sea $\mathcal{B} = \{B(x,V) : x \in X \text{ y } V \in \mathcal{U}\}$, entonces $\mathcal{B}$ es una base para X si y sólo si la topología inducida por $\mathcal{U}$ es la topología discreta.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{B}$ es una base para Xy consideremos $x,y,z \in X$ los cuales son distintos dos a dos. Como $(x,y) \notin \Delta$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $(x,y) \notin V$, pues de lo contrario (x,y) pertenecería a la intersección de los elementos de $\mathcal{U}$, pero la intersección de los elementos de $\mathcal{U}$ es la diagonal de $X \times X$, lo cual implicaría que $x = y$ que es una contradicción. De forma análoga como $(x,z) \notin \Delta$, existe $V_1 \in \mathcal{U}$ tal que $(x,z) \notin V_1$. De esto resulta que $(x,y) \notin V \cap V_1$ y $(x,z) \notin V \cap V_1$. Como $V \cap V_1$ es un elemento de $\mathcal{U}$, entonces existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $2W \subset V \cap V_1$. Entonces, por la Observación 1.3.9, $Cl_X(B(x,W)) \subset B(x,2W) \subset B(x,V \cap V_1)$. Como $y \notin B(x,V \cap V_1)$ y $z \notin B(x,V \cap V_1)$, tenemos que $y \notin Cl_X(B(x,W))$ y $z \notin Cl_X(B(x,W))$. El conjunto $X \backslash Cl_X(B(x,W))$ es un abierto en X y por ser $\mathcal{B}$ base, resulta que para cada $z \in X \backslash Cl_X(B(x,W))$ existe $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $z \in B(z,U_0) \subset X \backslash Cl_X(B(x,W))$.

Como $z \neq y$, entonces existe $U_1 \in \mathcal{U}$ tal que $(z,y) \notin U_1$. Consideremos $U_0 \cap U_1$ el cual es un elemento de la uniformidad, entonces $(z,y) \notin U_0 \cap U_1$. Concluimos que $y \notin B(z,U_0 \cap U_1) \subset B(z,U_0) \subset X \backslash Cl_X(B(x,W))$. Por lo tanto, $B(z,U_0 \cap U_1) \cap B(x,W) = \emptyset$.

Tomemos $A_1 = W \cup \{(x,y),(y,x)\}$ y $A_2 = (U_0 \cap U_1) \cup \{(z,y),(y,z)\}$, los cuales son miembros de $\mathcal{U}$, pues contienen un elemento de $\mathcal{U}$ y son iguales a su relación inversa. Como $B(x,A_1) = B(x,W) \cup \{y\}$ y $B(z,A_2) = B(z,U_0 \cap U_1) \cup \{y\}$, concluimos que $B(x,A_1) \cap B(z,A_2) = \{y\}$.

Supongamos ahora que la topología inducida por $\mathcal{U}$ es la topología discreta, entonces $\mathcal{B} = \{B(x,V) : x \in X \text{ y } V \in \mathcal{U}\}$ es una familia de subconjuntos abiertos en X. Sea A

un conjunto abierto en la topología inducida por $\mathcal{U}$, entonces para cada $y \in A$ existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $B(y, U) \subset A$, por lo tanto $\mathcal{B}$ es base de la topología inducida por $\mathcal{U}$. ■

El siguiente resultado caracteriza a los espacios cuya topología puede ser inducida por una uniformidad.

Teorema 1.3.11. ([9], Teorema 8.1.20, pág. 434). *Sea X un espacio topológico. La topología de X es inducida por una uniformidad en el conjunto X si y solo si X es un espacio Tychonoff.*

Del Teorema 1.3.11 tenemos que si (X, d) es un espacio métrico, la topología inducida por la métrica d es inducida por una uniformidad. Además, por [9, Proposición 8.1.18, pág. 433], la métrica d induce una uniformidad en X, la cual es llamada la uniformidad inducida por la métrica d.

Veamos ahora algunas definiciones y un resultado relacionado a espacios pseudocompactos.

Definición 1.3.12. Sean $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme, $V \in \mathcal{U}$ y $A \subset X$. Diremos que A es un conjunto **V*-denso*** en $(X,\mathcal{U})$ si para cada $x \in X$ existe un $x' \in A$ tal que $(x, x') \in V$.

Definición 1.3.13. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Diremos que $(X,\mathcal{U})$ es ***totalmente acotado*** si para cada $V \in \mathcal{U}$ existe un conjunto finito $A \subset X$ el cual es V-denso en $(X,\mathcal{U})$. Una uniformidad $\mathcal{U}$ en un conjunto X diremos que es ***totalmente acotada*** si el espacio $(X,\mathcal{U})$ es totalmente acotado.

El intervalo $[0, 1]$ con la uniformidad inducida por la métrica usual y en general cualquier espacio métrico compacto con la uniformidad inducida por la métrica correspondiente, son ejemplos de espacios totalmente acotados.

Proposición 1.3.14. *Sea X un espacio pseudocompacto, entonces cada uniformidad en X es totalmente acotada.*

Demostración. Por contradicción. Supongamos que existe una uniformidad $\mathcal{U}$ en X que no es totalmente acotada. Así, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que si $A \subset X$ es un conjunto finito, entonces A no es V-denso en $(X,\mathcal{U})$. Sean $W \in \mathcal{U}$ tal que $4W \subset V$ y $x_1 \in X$. Entonces el conjunto $A_1 = \{x_1\}$ no es V-denso en $(X,\mathcal{U})$, es decir, existe $x_2 \in X$ tal que $(x_1, x_2) \notin V$. Notemos que $B(x_1, W) \cap B(x_2, W) = \emptyset$, pues si $y \in B(x_1, W) \cap B(x_2, W)$, entonces $(x_1, y) \in W$ y $(y, x_2) \in W$, luego $(x_1, x_2) \in 2W \subset V$ lo cual es una contradicción. Ahora, definamos $A_2 = \{x_1, x_2\}$. Como A_2 es finito, entonces existe x_3 tal que $(x_3, x') \notin V$ para cada $x' \in A_2$. Por inducción, supongamos que hemos elegido hasta $x_{i-1} \in X$ tal que $(x_i, x') \notin V$ para cada $x' \in A_{i-1}$. Como A_{i-1} es finito podemos encontrar un $x_i \in X$ tal que $(x_i, x') \notin V$ para cada $x' \in A_{i-1}$. Definamos $A_i = \{x_k : k \leq i\}$. Si $x_k, x_j \in A_i$, entonces $B(x_j, W) \cap B(x_k, W) = \emptyset$. Pues si $y \in B(x_k, W) \cap B(x_j, W)$, sin perder generalidad supongamos que $k > j$, entonces

$(x_j, x_k) \in 2W \subset V$, lo cual es una contradicción por la elección de x_k. Por la Proposición 1.3.10, los conjuntos $B(x,V)$ con $x \in X$ y $V \in \mathcal{U}$, no necesariamente son abiertos. Así, definamos ahora $\mathcal{A} = \{int(B(x_i, W)) : x_i \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\}$, entonces $\mathcal{A}$ es una familia de conjuntos abiertos no vacíos y disjuntos a pares. Veamos que $\mathcal{A}$ es localmente finita, sea $y \in X$ y supongamos que $B(y,W) \cap B(x_i,W) \neq \emptyset$, con $x_i \in A_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Si $B(y,W) \cap B(x_j,W) \neq \emptyset$, con $x_j \in A_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y $i \neq j$, entonces existen $y_1 \in B(y,W) \cap B(x_i,W)$ y $y_2 \in B(y,W) \cap B(x_j,W)$. Así, $(x_i,y) \in 2W$ y $(x_j,y) \in 2W$, por lo tanto $(x_i,x_j) \in 4W \subset V$, lo cual es una contradicción. Así, $int(B(y,W))$ es un abierto que contiene a y e interseca a lo más a un elemento de $\mathcal{A}$. Por lo tanto $\mathcal{A}$ es una familia infinita y localmente finita de conjuntos abiertos, esto es una contradicción pues por [12, Teorema 1.1.3, pág. 3] un espacio es pseudocompacto si y solo si cada familia localmente finita de conjuntos abiertos no vacíos es finita. ■

Para dar la definición que un espacio X sea topológicamente completo, presentamos las siguientes dos definiciones.

Definición 1.3.15. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de X. Diremos que $\mathcal{F}$ ***contiene conjuntos arbitrariamente pequeños*** si para cada $V \in \mathcal{U}$ existe un $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \times F \subset V$.

Definición 1.3.16. Un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ es ***completo*** si cada familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos cerrados de X la cual tiene la propiedad de intersección finita y contiene conjuntos arbitrariamente pequeños, tiene intersección no vacía. Una uniformidad $\mathcal{U}$ en el conjunto X es ***completa*** si el espacio $(X,\mathcal{U})$ es completo.

Teorema 1.3.17. ([9], Teorema 8.3.16, pág. 448). *Un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ es compacto si y solo si es totalmente acotado y completo.*

Definición 1.3.18. Un espacio X es llamado ***topológicamente completo*** si la uniformidad universal en X es completa.

Un espacio X topológicamente completo también es llamado Dieudonné completo, ver [9, Problema 8.5.13, pág. 464].

Los espacios métricos completos, en particular los métricos compactos, son ejemplos de espacios topológicamente completos.

Observación 1.3.19. *La plancha de Tychonoff T, es un espacio Tychonoff y por el Teorema 1.3.11, su topología es inducida por una uniformidad, pero T no es un espacio topológicamente completo. Commo T es pseudocompacto, por la Proposición 1.3.14, cada uniformidad en T es totolmente acotada, en particular la uniformidad universal $\mathcal{U}$ en T es totalmente acotada. Si $\mathcal{U}$ es completa, por el Teorema 1.3.17, T sería compacto, lo cual es una contradicción. Así, la uniformidad universal en T no es completa y por lo tanto, T no es topológicamente completo.*

1.4. Límites inversos

En esta sección presentamos la definición de límite inverso, la cual necesitaremos para definir estructura celular y estructura celular generalizada.

Definición 1.4.1. Un ***sistema inverso*** de gráficas es una familia de gráficas indexada por un conjunto dirigido J, $\{(G_j, r_j)\}_{j\in J}$ y una familia de funciones $\{g_i^j\}_{j\geq i}$, donde las funciones $g_i^j : G_j \to G_i$ satisfacen las siguientes condiciones:

1. Para todo $j \in J$, g_j^j es la identidad en G_j.
2. $g_i^k = g_i^j \circ g_j^k$ para $i < j < k$.
3. Si $(a, b) \in r_j$, entonces $(g_i^j(a), g_i^j(b)) \in r_i$, para toda $j > i$.

A un sistema inverso de gráficas lo denotaremos por $\{(G_i, r_i), g_i^j\}_{i,j\in J}$ y nos referiremos a este simplemente como sistema inverso. Si $J = \mathbb{N}$, escribiremos $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ en lugar de $\{(G_i, r_i), g_i^j\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ y le llamaremos sucesión inversa.

Veamos un ejemplo de un sistema inverso donde el conjunto de índices es $J = [0, 1]$.

Ejemplo 1.4.2. *Sea $J = [0, 1]$ y consideremos para cada $j \in J$ los conjuntos $G_j = [0, 1]$. Definamos para cada $j \in J$, $r_j = \{(x, x) : x \in G_j\} \cup \{(0, x), (x, 0) : x \in G_j\}$, g_j^j la función identidad en G_j y $g_i^j : G_j \to G_i$ por $g_i^j(x) = \frac{i}{j} \cdot x$, para cada $i < j$ y $x \in G_j$. Entonces $\{(G_i, r_i), g_i^j\}_{i,j\in J}$ define un sistema inverso.*

Por definición de las funciones g_j^j se satisface la primera condición de sucesión inversa. Para ver que se cumple la segunda condición notemos que si $i, j, k \in J$ son tales que $i < j < k$ y $x \in G_k$, entonces $g_i^k(x) = \frac{i}{k} \cdot x$ y $g_i^j(g_j^k(x)) = \frac{i}{j} \cdot \left(\frac{j}{k} \cdot x\right) = \frac{i}{k} \cdot x$. Por último veamos que la tercera condición se satisface. Sean $x, y \in G_j$ tales que $(x, y) \in r_j$. Consideremos primero el caso $x = 0$ y $y \neq 0$. Entonces $g_i^j(x) = 0$ y $g_i^j(y) = \frac{i}{j} \cdot y$, por lo tanto $(g_i^j(x), g_i^j(y)) \in r_i$. De manera similar si $x \neq 0$ y $y = 0$, entonces $g_i^j(x) = \frac{i}{j} \cdot x$ y $g_i^j(y) = 0$, por lo tanto $(g_i^j(x), g_i^j(y)) \in r_i$.

Definición 1.4.3. Sea J un conjunto dirigido. El ***límite inverso*** de un sistema inverso $\{(G_i, r_i), g_i^j\}_{i,j\in J}$ es el subconjunto del conjunto $\prod_{j\in J} G_j$ definido por:

$$\Big\{(x_j)_{j\in J} \in \textstyle\prod_{j\in J} G_j : g_i^j(x_j) = x_i, \text{ para cada } i, j \in J \text{ tal que } j > i\Big\}.$$

A cada elemento del límite inverso, $\bar{x} = (x_j)_{j\in J}$, le llamaremos ***hilo***.

Denotaremos el límite inverso del sistema inverso de gráficas $\{(G_i, r_i), g_i^j\}_{i,j\in J}$ por $\varprojlim\{(G_i, r_i), g_i^j\}_{i,j\in J}$ ó más brevemente por G_∞. Además, para cada $j \in J$, denotaremos por g_j a la función proyección p_j restringida a G_∞, es decir, $g_j = p_j|_{G_\infty}$.

Proposición 1.4.4. *Sea* $\{(G_i, r_i), g_i^j\}_{i,j\in J}$ *un sistema inverso de gráficas, definamos en* G_∞ *la relación* r *de la siguiente manera:* $\bar{x} = (x_j)_{j\in J}$ *y* $\bar{y} = (y_j)_{j\in J}$ *en* G_∞ *están relacionados si y solo si* $(x_j, y_j) \in r_j$ *para cada* $j \in J$*. Entonces* (G_∞, r) *es una gráfica.*

Demostración. Notemos que la relación r es reflexiva y simétrica, pues cada r_i es reflexiva y simétrica. Por lo tanto (G_∞, r) es una gráfica. ■

Veamos un ejemplo de un límite inverso de una sucesión inversa.

Ejemplo 1.4.5. *Para cada* $i \in \mathbb{N}$*, sea* $G_i = \{a_1, a_2, ..., a_i\}$ *y consideremos la relación* $r_i = \{(a_j, a_j) \in G_i \times G_i : j \in \{1, ..., i\}\} \cup \{(a_j, a_{j+1}), (a_{j+1}, a_j) : 1 \leq j < i\}$*. Ver figura 1.5.*

Definamos la función g_i^i *como la función identidad en* G_i *y* $g_i^{i+1} : G_{i+1} \to G_i$ *como:*

$$g_i^{i+1}(a_j) = \begin{cases} a_{\frac{j}{2}} & si \quad j \ es \ par, \\ & \\ a_{\frac{j+1}{2}} & si \ \ j \ es \ impar. \end{cases} \quad \textit{Ver figura 1.6.}$$

Entonces $\varprojlim\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}} = \{(a_1, a_1, a_1, ...)\}$.

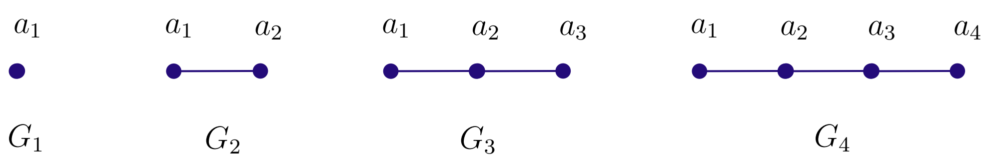

Figura 1.5: Representación de las primeras 4 gráficas del ejemplo 1.4.5.

Notemos que por definición de las funciones g_i^i se satisface la primera condición de la definición de sucesión inversa de gráficas. La segunda condición se satisface pues, para cada $k > i$ la función g_i^k es definida por $g_i^k = g_i^{i+1} \circ g_{i+1}^{i+2} \circ \cdots \circ g_{k-2}^{k-1} \circ g_{k-1}^k$.

Veamos ahora que se satisface la tercera condición. Consideremos primero el caso $k > 2$ y $a_j \in G_k$ tal que $j \in \{2, ..., k-1\}$, entonces tenemos que $B(a_j, r_k) = \{a_{j-1}, a_j, a_{j+1}\}$. Supongamos que j es par y sea $b \in B(a_j, r_k)$, sin pérdida de generalidad supongamos que $b = a_{j+1}$, entonces $g_{k-1}^k(b) = a_{\frac{(j+1)+1}{2}} = a_{\frac{j}{2}+1}$ y como $g_{k-1}^k(a_j) = a_{\frac{j}{2}}$ tenemos que $(g_{k-1}^k(a_j), g_{k-1}^k(b)) \in r_k$. De forma análoga si j es impar consideremos $b \in B(a_j, r_k)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $b = a_{j+1}$, entonces $g_{k-1}^k(b) = a_{\frac{j+1}{2}}$ y como $g_{k-1}^k(a_j) = a_{\frac{j+1}{2}}$ tenemos que $(g_{k-1}^k(a_j), g_{k-1}^k(b)) \in r_k$. Resta verificar el caso en que $k > 1$ y $j \in \{1, k\}$. Si $j = 1$, $B(a_j, r_k) = \{a_j, a_{j+1}\}$ y por lo tanto $g_{k-1}^k(B(a_j, r_k)) = \{a_1\}$. Si $j = k$, $B(a_j, r_k) = \{a_{j-1}, a_j\}$ y por lo tanto $g_{k-1}^k(B(a_j, r_k)) \subset \left\{a_{\frac{j-1}{2}}, a_{\frac{j}{2}}, a_{\frac{j+1}{2}}\right\}$. Así, $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión inversa de gráficas. Veamos entonces que el límite inverso de $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ contiene un sólo punto. Sea $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, ...) \in$

$\varprojlim\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$, entonces $x_1 = a_1$. Si $x_2 = a_2$, entonces $x_3 = a_3$ y x_4 no está definido pues no hay un elemento en G_4 que su imagen bajo la función g_3^4 sea a_3 (la imagen de a_4 y a_3 es a_2 y la imagen de a_2 y a_1 es a_1). Por lo tanto x_2 no puede ser igual a a_2, por lo que tiene que ser igual a a_1. En general, si suponemos que $x_i \neq a_1$, entonces x_{2i} no está definido, pues x_{2i} tendría que ser la imagen de a_{4i} pero en G_{2i+1} solo hay $2i+1$ células. De esta manera, concluimos que x_i tiene que ser igual a a_1 para cada $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\varprojlim\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}} = \{(a_1, a_1, a_1, ...)\}$.

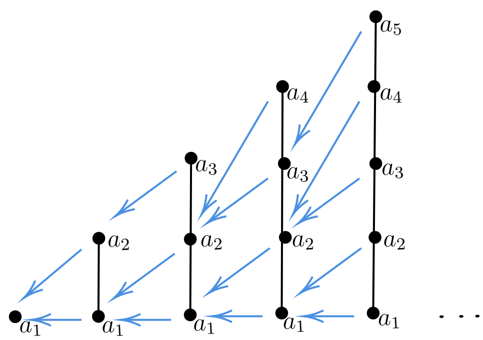

Figura 1.6: En azul representamos la acción de las funciones de ligadura del ejemplo 1.4.5.

Los siguientes resultados muestran propiedades importantes de los límites inversos, su demostración y la demostración de otras propiedades de límites inversos pueden ser consultadas en [9] y [11]. Además, en [19] encontramos una caracterización de límites inversos.

Dado un sistema inverso $\{(G_i, r_i), g_i^j\}_{i,j\in J}$, donde cada G_i tiene asociada una topología, consideraremos en G_∞ la topología que hereda como subespacio de $\prod_{i\in\mathbb{N}} G_i$ con la topología producto.

Proposición 1.4.6. ([9], Proposición 2.5.1, pág. 98). *Sea J un conjunto dirigido y $S = \{G_i, g_i^j\}_{i,j\in J}$ un sistema inverso donde, para cada $i \in J$, G_i es un espacio de Hausdorff. Entonces el límite inverso de S es un subconjunto cerrado del espacio producto $\prod_{j\in J} G_j$.*

Proposición 1.4.7. ([9], Teorema 3.2.13, pág. 141). *Sea J un conjunto dirigido y $S = \{G_i, g_i^j\}_{i,j\in J}$ un sistema inverso donde, para cada $i \in J$, G_i es un espacio compacto y Hausdorff. Entonces el límite inverso de S es un espacio no vacío, compacto y Hausdorff.*

Incluimos el siguiente teorema que utilizaremos más adelante.

Teorema 1.4.8. ([9], Teorema 4.3.12, pag. 270). *Sea $\{(X_i, \rho_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios métricos, no vacíos y tal que, para cada $i \in \mathbb{N}$, la métrica ρ_i en X_i está acotada por 1. El espacio producto $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ con la métrica definida para cada par de puntos $x = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y*

$y = \{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *como:*

$$\rho(x,y) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2i}\rho_i(x_i,y_i)$$

es completo si y solo si, para cada $i \in \mathbb{N}$, (X_i, ρ_i) *es un espacio completo.*

En particular, si $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de espacios discretos, entonces por la Observación 1.1.24, (X_i, d_i) donde d_i es la métrica discreta en X_i, es un espacio métrico completo, para cada $i \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 1.4.8, $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ es un espacio métrico completo.

Capítulo 2

Estructura celular

El concepto de estructura celular fue introducido en 2017 por E. Tymchatyn y W. Debski, considerando sucesiones inversas de gráficas, ver [7]. En este artículo, [7], se caracterizan los espacios completamente metrizables utilizando sucesiones inversas de espacios discretos. Posteriormente, extendieron el resultado a sistemas inversos y caracterizaron a los espacios que son imagen perfecta de espacios topológicamente completos, ver [8]. En ambos artículos, [7] y [8], se muestra que para representar espacios completamente metrizables o topológicamente completos, es suficiente usar la información contenida en las gráficas. La idea de describir espacios topológicos usando sucesiones inversas ya había sido utilizada por P. Alexandroff en 1929, [2]. Más adelante, en 1937, H. Freudental consideró funciones de sucesiones inversas de poliedros y mostró que si X es un espacio métrico y compacto, entonces X es homeomorfo al límite inverso de una sucesión inversa de poliedros cuya dimensión es acotada por la dimensión de X, ver [10]. Esto no necesariamente es cierto para espacios compactos Hausdorff, lo cual fue mostrado de manera independiente por S. Mardesic, ver [14], y B. Pasynkov, ver [18]. En 1997, R. D. Kopperman y R. G. Wilson mostraron como obtener espacios compactos Hausdorff como reflexiones Hausdorff de límites inversos de espacios finitos T_0, ver [13].

2.1. Estructura celular

En esta sección presentamos la definición de estructura celular con sucesiones inversas de gráficas dada por E. Tymchatyn y W. Debski, la cual utilizaremos para definir una g-estructura celular. Además, presentamos algunos ejemplos y propiedades de las estructuras celulares que aparecen en [7].

Definición 2.1.1. Una ***estructura celular***, $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$, es una sucesión inversa de gráficas, donde cada G_i tiene la topología discreta y se satisfacen las siguientes dos condiciones:

1. Para cada hilo $\bar{x} \in G_\infty$ y cada $i \in \mathbb{N}$ existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $j \geq i$ y además $g_i^j(B(x_j, 2r_j)) \subset B(x_i, r_i)$.

2. Para cada hilo $\bar{x} \in G_\infty$ y cada $i \in \mathbb{N}$ existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $j \geq i$ y $g_i^j(B(x_j, r_j))$ es finito.

En G_∞ consideraremos la topología que hereda como subespacio de $\prod_{i \in \mathbb{N}} G_i$ con la topología producto.

Veamos un ejemplo de una estructura celular.

Ejemplo 2.1.2. *Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $G_i = \{a_1, a_2, ..., a_{2^i}\}$ y consideremos la relación $r_i = \{(a_j, a_j) \in G_i \times G_i : j \in \{1, ..., 2^i\}\} \cup \{(a_j, a_{j+1}), (a_{j+1}, a_j) : 1 \leq j < 2^i, \text{ y } j \text{ impar}\}$. Ver figura 2.1.*

Definamos la función g_i^i como la función identidad en G_i y $g_i^{i+1} : G_{i+1} \to G_i$ como:

$$g_i^{i+1}(a_j) = \begin{cases} a_{\frac{j}{2}} & si \quad j \ es \ par \\ \\ a_{\frac{j+1}{2}} & si \ \ j \ es \ impar. \end{cases}$$

Entonces $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una estructura celular.

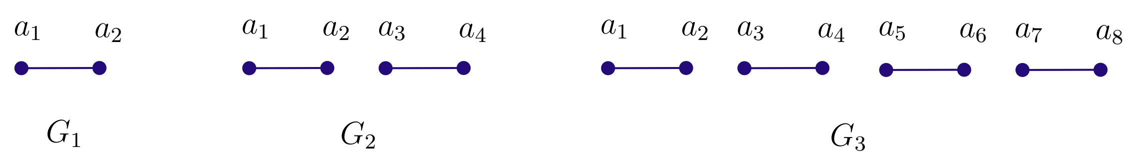

Figura 2.1: Representación de las primeras 3 gráficas del ejemplo 2.1.2.

Por definición de las funciones g_i^i y g_i^{i+1}, se tiene que $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ satisface las primeras dos condiciones de sucesión inversa de gráficas. Para verificar la tercera condición, sea $i \in \mathbb{N}$ y $a_j, a_{j+1} \in G_{i+1}$ tales que $(a_j, a_{j+1}) \in r_{i+1}$, de este modo j es impar y $g_i^{i+1}(a_j) = a_{\frac{j+1}{2}} = g_i^{i+1}(a_{j+1})$. Por lo tanto $(g_i^{i+1}(a_j), g_i^{i+1}(a_{j+1})) \in r_i$.

Veamos que $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una estructura celular. Sea $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, ...) \in G_\infty$ y sea $i \in \mathbb{N}$. Mostraremos que para cada $i \in \mathbb{N}$ y $j = i + 1$, $g_i^j(B(x_j, 2r_j)) \subset B(x_i, r_i)$. Sea $i \in \mathbb{N}$ y $x_{i+1} = a_k$ para alguna $k \in \{1, ..., 2^{i+1}\}$. Si k es impar, entonces $B(a_k, 2r_{i+1}) = \{a_k, a_{k+1}\}$, por lo tanto $B(a_k, 2r_{i+1})) = B(a_k, r_{i+1})$. De forma análoga, si k es par, $B(a_k, 2r_{i+1}) = \{a_{k-1}, a_k\}$, por lo tanto $B(a_k, 2r_{i+1})) = B(a_k, r_{i+1})$. Ahora, por lo tercera condición de sucesión inversa, se tiene que $g_i^j(B(a_k, r_{i+1})) = g_i^j(B(x_{i+1}, r_{i+1})) \subset B(x_i, r_i)$. De este modo, para cada $\bar{x} \in G_\infty$ y cada $i \in \mathbb{N}$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $j \leq i$ y $g_i^j(B(x_j, 2r_j)) \subset B(x_i, r_i)$. Por último, para cada $i \in \mathbb{N}$, $B(x_i, r_i)$ es finito, por lo tanto $g_{i-1}^i(B(x_i, r_i))$ es finito para cada $i \in \mathbb{N}$. Así, se satisface la condición 2 de estructura celular.

Proposición 2.1.3. *Sea $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ una estructura celular, entonces la familia $\beta = \{g_i^{-1}(x_i) : x_i = g_i(\bar{x})$ para algún $\bar{x} \in G_\infty, i \in \mathbb{N}\}$ es una base para G_∞ de conjuntos abiertos y cerrados.*

Demostración. Recordemos que p_i es la i-ésima proyección en $\prod_{i\in\mathbb{N}} G_i$ y $g_i = p_i|_{G_\infty}$. Ahora, para cada $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in G_\infty$ y para cada $i \in \mathbb{N}$, $g_i^{-1}(x_i) = p_i^{-1}(x_i) \cap G_\infty$. Dado que para cada $i \in \mathbb{N}$, $\{x_i\}$ es abierto y cerrado en G_i y p_i es continua, resulta que $g_i^{-1}(x_i)$ es un subconjunto abierto y cerrado en G_∞.

Veamos ahora que β es una base para G_∞. Sea U un subconjunto abierto en G_∞ y $\bar{x} \in U$. Entonces $U = V \cap G_\infty$ donde $V \subset \prod_{i\in\mathbb{N}} G_i$ es un conjunto abierto. Por lo tanto, existe un subconjunto abierto básico A en $\prod_{i\in\mathbb{N}} G_i$ que contiene a $\bar{x}$ y se queda contenido en V. Sin perder generalidad, podemos suponer que $A = \{x_{i_1}\} \times \cdots \times \{x_{i_n}\} \times \prod_{i\in\mathbb{N}\setminus\{i_1,\ldots,i_n\}} G_i$. Veamos que $A = \bigcap_{j=1}^{n} p_{i_j}^{-1}(x_{i_j})$. Sea $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, \ldots) \in A$, entonces $y_j = x_{i_j}$ para cada $j = 1, \ldots, n$, luego $\bar{y} \in g_j^{-1}(x_{i_j})$ para cada $j = 1, \ldots, n$ y de este modo $\bar{y} \in \bigcap_{j=1}^{n} p_{i_j}^{-1}(x_{i_j})$. Veamos ahora que $\bigcap_{j=1}^{n} p_{i_j}^{-1}(x_{i_j}) \subset A$. Sea $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, \ldots) \in \bigcap_{j=1}^{n} p_{i_j}^{-1}(x_{i_j})$, entonces $\bar{y} \in p_{i_j}^{-1}(x_{i_j})$ para cada $j = 1, \ldots, n$, luego $y_i = x_{i_j}$ para cada $j = 1, \ldots, n$, es decir, $\bar{y} \in A$. Por lo tanto, $A \cap G_\infty = \left(\bigcap_{j=1}^{n} p_{i_j}^{-1}(x_{i_j})\right) \cap G_\infty = \bigcap_{j=1}^{n}(p_{i_j}^{-1}(x_{i_j}) \cap G_\infty) = \bigcap_{j=1}^{n} g_{i_j}^{-1}(x_{i_j})$. Como A es un subconjunto de V, tenemos que $\bigcap_{j=1}^{n} g_{i_j}^{-1}(x_{i_j}) \subset V \cap G_\infty$. Sea $k = \max\{i_1, \ldots, i_n\}$, entonces $g_k^{-1}(x_k) \subset \bigcap_{j=1}^{n} g_{i_j}^{-1}(x_{i_j})$ y como $\bar{x} \in g_k^{-1}(x_k)$ resulta que $\bar{x} \in g_k^{-1}(x_k) \subset U$. Por lo que concluimos que β es base para G_∞ de conjuntos abiertos y cerrados. ∎

Las condiciones para que una sucesión inversa sea una estructura celular permiten definir una relación de equivalencia, como lo muestra el siguiente lema.

Lema 2.1.4. *Si $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una estructura celular, entonces la relación r en G_∞, definida como en la Proposición 1.4.4, es una relación de equivalencia.*

Demostración. Antes de comenzar la prueba recordemos como es la relación r. Dados $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ y $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$ en G_∞, $(\bar{x}, \bar{y}) \in r$ si para cada $i \in \mathbb{N}$, $(x_i, y_i) \in r_i$. Notemos que la relación r es reflexiva y simétrica, pues para cada $i \in \mathbb{N}$, r_i es reflexiva y simétrica. Veamos que la relación r es transitiva. Sean $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ en G_∞ tales que $(\bar{x}, \bar{y}) \in r$ y $(\bar{y}, \bar{z}) \in r$. Sea $i \in \mathbb{N}$, entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, $(x_k, y_k) \in r_k$ y $(y_k, z_k) \in r_k$. Así $z_k \in B(x_k, 2r_k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por la condición 1 de la definición de estructura celular, existe $j > i$ tal que $z_i = g_i^j(z_j) \in B(x_i, r_i)$. Así, $(x_i, z_i) \in r_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $(\bar{x}, \bar{z}) \in r$ y la relación r es transitiva. ∎

A partir de este momento denotaremos por $\mathbf{G}^*$ al espacio cociente G_∞/r con la topología cociente y r la relación definida en el Lema 2.1.4, y por π al mapeo cociente de G_∞ sobre G^*. Notemos que para cada $\bar{x} \in G_\infty$, $\pi^{-1}(\pi(\bar{x}))$ es el conjunto de todos los $\bar{y}$ en G_∞ que son adyacentes a $\bar{x}$, es decir, $\pi^{-1}(\pi(\bar{x})) = B(\bar{x}, r)$.

Definición 2.1.5. Un espacio topológico X es ***determinado por la estructura celular*** $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ si X es homeomorfo a G^*.

Veamos que el conjunto de Cantor es un espacio determinado por una estructura celular. Recordemos que el conjunto de Cantor C es homemorfo al producto numerable del conjunto $\{1, 2\}$ con la topología producto, ver la Observación 1.1.8.

Proposición 2.1.6. *El conjunto de Cantor con su topología usual es determinado por una estrutura celular.*

Demostración. Sea C el conjunto de Cantor. Mostraremos que C es determinado por la estructura celular definida en el ejemplo 2.1.2, es decir, $C = G_\infty/r$. Consideremos $\bar{x} = (a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3}, ...) \in G_\infty$, donde para cada $i \in \mathbb{N}$, $j_i \in \{1, ..., 2^i\}$. Para cada a_{j_i} definamos la función:

$$\chi(a_{j_i}) = \begin{cases} 1 & si\ j_i\ es\ impar \\ \\ 2 & si\ j_i\ es\ par. \end{cases}$$

Definamos ahora $\varphi : \mathrm{G}^* \to C$ como $\varphi(\pi(\bar{x})) = \{\chi(a_{j_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$. Mostraremos que φ es un homeomorfismo. Pero veamos primero que φ está bien definida. Sean $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, ...)$ y $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, ...)$ puntos distintos en G_∞, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \neq y_k$. Si $(x_k, y_k) \notin r_k$, entonces $\pi(\bar{x}) \neq \pi(\bar{y})$ pues $\bar{x}$ está relacionado con $\bar{y}$ si y solo si $(x_i, y_i) \in r_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Así, supongamos que $(x_k, y_k) \in r_k$. Sin perder generalidad podemos suponer que $x_k = a_j$ y $y_k = a_{j-1}$. Entonces $x_{k+1} = a_{2j}$ o $x_{k+1} = a_{2j-1}$ y $y_{k+1} = a_{2j-3}$ o $y_{k+1} = a_{2j-2}$, pero $(a_{2j}, a_{2j-3}), (a_{2j}, a_{2j-2}), (a_{2j-1}, a_{2j-3}), (a_{2j-1}, a_{2j-2})$ no pertenecen a r_{k+1}, luego $(x_{k+1}, y_{k+1}) \notin r_{k+1}$ y $(\bar{x}, \bar{y}) \notin r$. Por lo tanto, cada clase en G^* contiene un solo punto. Así, $\varphi(\pi(\bar{x}))$ no depende del representante de la clase $\pi(\bar{x})$.

Veamos que φ es inyectiva. Sean $\varphi(\pi(\bar{x})) = \{\chi(a_{j_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\varphi(\pi(\bar{y})) = \{\chi(a_{k_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$, donde $\bar{x} = (a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3}, ...)$ y $\bar{y} = (a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, ...)$, tales que $\varphi(\pi(\bar{x})) = \varphi(\pi(\bar{y}))$. Entonces, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\chi(a_{j_i}) = \chi(a_{k_i})$. En particular, $\chi(a_{j_1}) = \chi(a_{k_1})$ y por definición de la función χ, j_1 y k_1 son ambos pares o ambos impares. Como $G_1 = \{a_1, a_2\}$, tenemos que $j_1 = 1 = k_1$ o $j_1 = 2 = k_1$, así, $a_{j_1} = a_{k_1}$. Supongamos ahora que $a_{j_n} = a_{k_n}$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Como $\chi(a_{j_{n+1}}) = \chi(a_{k_{n+1}})$ tenemos que j_{n+1} y k_{n+1} son ambos pares o ambos son impares. Además, como $g_n^{n+1}(a_{j_{n+1}}) = a_{j_n} = a_{k_n} = g_n^{n+1}(a_{k_{n+1}})$, se tiene que $j_{n+1} = k_{n+1}$, pues por definición de la función g_n^{n+1} solo hay dos puntos $a_i \in G_{n+1}$ que su imagen es a_{j_n}, uno con subíndice par y el otro con subíndice impar. Luego, $a_{j_{n+1}} = a_{k_{n+1}}$. Por lo tanto, $\bar{x} = \bar{y}$ y $\pi(\bar{x}) = \pi(\bar{y})$.

Para ver que φ es suprayectiva, notemos que si $(z_1, z_2, z_3, ...) \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$, entonces $z_1 \in \{1, 2\}$. Definamos $x_1 = a_{z_1}$ y para cada $i \in \mathbb{N}$, $x_i = a_{2\cdot(j_{i-1}-1)+z_i}$ donde j_{i-1} satisface $x_{i-1} = a_{j_{i-1}}$. Veamos que $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ pertenece a G_∞. Sea $i \in \mathbb{N}$ y $x_i = a_{j_i}$. Si $z_{i+1} = 2$, $g_i^{i+1}(x_{i+1}) = g_i^{i+1}(a_{2\cdot(j_i-1)+z_{i+1}}) = a_{\frac{2\cdot(j_i-1)+z_{i+1}}{2}} = a_{j_i} = x_i$. Si $z_{i+1} = 1$, $g_i^{i+1}(x_{i+1}) = g_i^{i+1}(a_{2\cdot(j_i-1)+z_{i+1}}) = a_{\frac{2\cdot(j_i-1)+z_{i+1}+1}{2}} = a_{j_i} = x_i$. Por lo tanto, tenemos que $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in G_\infty$. Ahora, $\chi(a_{2\cdot(j_{i-1}-1)+z_i}) = \chi(a_{z_i})$, pues $2 \cdot (j_{i-1} - 1)$ es un número par, así la paridad de $2 \cdot (j_{i-1} - 1) + z_i$ solo depende de z_i. Entonces, $\varphi(\pi(\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}})) = \{\chi(a_{2\cdot(j_{i-1}-1)+z_i})\}_{i\in\mathbb{N}} = \{\chi(a_{z_i})\}_{i\in\mathbb{N}} = (z_1, z_2, z_3, ...)$.

Mostraremos ahora que φ es continua. Sea $B = \{z_{i_1}\} \times \{z_{i_2}\} \times \cdots \times \{z_{i_n}\} \times \{1, 2\}^{\mathbb{N}\setminus\{i_1,...,i_n\}}$ un abierto básico en C, donde $i_j \in \mathbb{N}$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$, y sea

$\bar{x} \in (\varphi \circ \pi)^{-1}(B)$. Entonces $\chi(x_{i_j}) = z_{i_j}$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Consideremos el conjunto $A = \bigcap_{j\in\{1,...,n\}} g_{i_j}^{-1}(x_{i_j})$ que es un abierto en G_∞ y contiene a $\bar{x}$. Afirmamos que $\varphi(\pi(A)) \subset B$. Sea $\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \varphi(\pi(A))$, entonces existe $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, ...) \in A$ tal que $\varphi(\pi(\bar{y})) = \{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Como $\bar{y} \in A$, para cada $j \in \{1, ..., n\}$, $y_{i_j} = x_{i_j}$. Por lo tanto, $\chi(y_{i_j}) = z_{i_j}$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$, pero $\chi(y_i) = w_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Así, $w_{i_j} = z_{i_j}$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$. Por lo tanto, $\{w_i\} \in B$.

Por último, veamos que φ es abierta. Sea A un abierto en G*, entonces $\pi^{-1}(A)$ es abierto en G_∞. Sea $\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \varphi(A)$, entonces existe $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, ...) \in \pi^{-1}(A)$ tal que $\varphi(\pi(\bar{y})) = \{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Como $\pi^{-1}(A)$ es abierto en G_∞, entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $g_j^{-1}(y_j) \subset \pi^{-1}(A)$. Consideremos ahora el conjunto abierto $\{w_1\} \times \cdots \times \{w_j\} \times \{1, 2\}^{\mathbb{N}\setminus\{1,...,j\}}$, el cual contiene a $\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Afirmamos ahora que $\{w_1\} \times \cdots \times \{w_j\} \times \{1, 2\}^{\mathbb{N}\setminus\{1,...,j\}} \subset \varphi(A)$. Sea $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \{w_1\} \times \cdots \times \{w_j\} \times \{1, 2\}^{\mathbb{N}\setminus\{1,...,j\}}$. Por la suprayectividad de φ, existe $\bar{u} \in G_\infty$ tal que $\varphi(\pi(\bar{u})) = \{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Tenemos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\chi(u_i) = z_i$ y para cada $i \leq j$, $z_i = w_i$, por lo tanto $\chi(u_i) = w_i$ para cada $i \leq j$. En particular, $\chi(u_1) = w_1$ y como $G_1 = \{a_1, a_2\}$, resulta que $u_1 = y_1$. Sea $m < j$ y supongamos que $u_m = y_m$. Como $m + 1 \leq j$, $\chi(u_{m+1}) = w_{m+1}$ y $g_m^{m+1}(u_{m+1}) = u_m = y_m = g_m^{m+1}(y_{m+1})$, entonces $u_{m+1} = y_{m+1}$ pues solo existen dos $a_k \in G_{m+1}$ tales que $g_m^{m+1}(a_k) = u_m$, uno con subíndice par y el otro con subíndice impar. Así, $u_j = y_j$, por lo tanto $\bar{u} \in g_j^{-1}(y_j) \subset \pi^{-1}(A)$. Conlcuimos así que $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \varphi(\pi(\bar{u})) \in \varphi(\pi(\pi^{-1}(A))) = \varphi(A)$. Así, $\varphi(A)$ es abierto. Por lo tanto, φ es un homeomorfismo y en consecuencia, como C es homeomorfo a G*, C es determinado por la estructura celular $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$. ■

2.2. Propiedades de una estructura celular

En esta sección presentamos el siguiente resultado mostrado por E. Tymchatyn y W. Debski en [7]: los espacios determinados por una estrutura celular son completamente metrizables. Además, presentamos otras propiedades que satisfacen las estructuras celulares, las cuales pueden ser consultadas en [7].

Proposición 2.2.1. *Sea $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una estructura celular. Entonces G_∞ es completamente metrizable.*

Demostración. Por definición de estructura celular, para cada $i \in \mathbb{N}$, G_i tiene la topología discreta y por el Lema 1.1.24, G_i es un espacio métrico completo. Así, por el Teorema 1.4.8, tenemos que $\prod_{i\in\mathbb{N}} G_i$ es un espacio métrico completo. Luego, por la Proposición 1.4.6, G_∞ es cerrado en $\prod_{i\in\mathbb{N}} G_i$ y por el Teorema 1.1.23, G_∞ es completo. Así, G_∞ es un espacio métrico completo y por lo tanto es completamente metrizable. ■

Veamos ahora algunos resultados que nos permitirán mostrar que los espacios determinados por una estructura celular son completamente metrizables.

Lema 2.2.2. *Sea* $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ *una sucesión inversa de gráficas, donde* G_i *tiene la topología discreta para cada* $i \in \mathbb{N}$. *Si para cada* $i \in \mathbb{N}$, *existe un* $j > i$ *tal que* $g_i^j(G_j)$ *es finito, entonces* G_∞ *es un espacio no vacío, compacto y metrizable.*

Demostración. Supongamos que para cada $i \in \mathbb{N}$, existe un $j > i$ tal que $g_i^j(G_j)$ es finito. Fijemos $i \in \mathbb{N}$, entonces existe un $j > i$ tal que $g_i^j(G_j)$ es finito. Por definición de sucesión inversa tenemos que para cada $k > j$, $g_i^k(G_k) \subset g_i^j(G_j) \subset G_i$ y como $g_i^j(G_j)$ es finito, $g_i^k(G_k)$ es finito para cada $k > j$. Entonces existe $B_i \subset G_i$, tal que $g_i^k(G_k) = B_i$ para cada $k > j$. Pues si no existe tal conjunto B_i, para cada $k > i$ podemos encontrar un $n > k$ tal que $g_i^n(G_n) \subsetneq g_i^k(G_k)$, lo cual sería una contradicción pues $g_i^k(G_k)$ es finito. Luego, como cada B_i es compacto y T_2, por el Teorema 1.4.7, tenemos que $G_\infty = B_\infty$ es no vacío y compacto. Además, $\prod_{i\in\mathbb{N}} B_i$ es metrizable, por lo tanto B_∞ es metrizable. ■

Lema 2.2.3. *Sea* $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ *una estructura celular y* $\bar{x} \in G_\infty$. *Entonces* $B(\bar{x}, r)$ *es un espacio no vacío, compacto y metrizable.*

Demostración. Definamos, para cada $j \in \mathbb{N}$, $A_j = B(x_j, r_j)$, entonces $(A_j, r_j|_{A_j})$ es una gráfica, pues $r_j|_{A_j}$ es simétrica y reflexiva. Considerando las funciones g_{j-1}^{j-1} y g_{j-1}^j restringidas a A_j, tenemos que $\{A_i, g_i^{i+1}|_{A_{i+1}}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión inversa de gráficas donde, para cada $j \in \mathbb{N}$, A_j es un espacio discreto pues cada G_i es discreto por ser $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una estructura celular. Por la condición 2 de la definición de estructura celular, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe un $j > i$ tal que $g_i^j(A_j)$ es finito. Así, por el Lema 2.2.2, tenemos que A_∞ es un espacio no vacío, compacto y metrizable. Veamos que $A_\infty = B(\bar{x}, r)$. Sea $\bar{y} \in A_\infty$, entonces $y_i \in A_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, es decir, $(y_i, x_i) \in r_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Luego, $\bar{y} \in B(\bar{x}, r)$. Ahora, si $\bar{y} \in B(\bar{x}, r)$, entonces, para cada $i \in \mathbb{N}$, $(x_i, y_i) \in r_i$. Así, $y_i \in A_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, es decir, $\bar{y} \in A_\infty$. Por lo tanto $B(\bar{x}, r)$ es un espacio no vacío, compacto y metrizable. ■

Otra de las propiedades que cumplen las estructuras celulares es que los espacios determinados por una estructura celular son completamente metrizables, pero para su demostración utilizarmos el siguiente teorema: Teorema 2.2.4. *La imagen de un espacio metrizable bajo un mapeo perfecto es metrizable,* que es mostrado en ([9], Teorema 4.4.15, pág. 284) y la siguiente proposición:

Proposición 2.2.5. *La imagen perfecta de un subconjunto cerrado de un producto numerable de espacios discretos es un espacio completamente metrizable.*

Demostración. Sean X un espacio topológico, $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios discretos, $A \subset \prod_{i\in\mathbb{N}} G_i$ un subconjunto cerrado y f un mapeo perfecto de A sobre X. Mostraremos que X es completamente metrizable. Como, para cada $i \in \mathbb{N}$, G_i es un espacio discreto y en consecuencia completo, por el Teorema 1.4.8, $\prod_{i\in\mathbb{N}} G_i$ es un espacio métrico completo y por lo tanto completamente metrizable. Además como $\prod_{i\in\mathbb{N}} G_i$ es metrizable y A es un subconjunto cerrado de $\prod_{i\in\mathbb{N}} G_i$, por el Teorema 1.1.20, A es un conjunto G_δ. Así, por el Teorema 1.1.25, A es completamente metrizable. Ahora, por el Teorema 2.2.4, la imagen perfecta de un espacio metrizable es metrizable y por el Teorema 1.1.30 la imagen perfecta de un espacio Čech-completo es Čech-completo, de este modo se tiene que $f(A) = X$ es metrizable y Čech completo. Luego, por el Teorema 1.1.29, como X es Čech completo y metrizable, X es un espacio completamente metrizable. ■

Utilizaremos el siguiente resultado para la demostración del Teorema 2.2.7.

Proposición 2.2.6. *([9], Corolario 2.4.10, pág. 92). Sea X un espacio topológico, $\sim$ una relación de equivalencia en X y $f : X \to X/\sim$ el mapeo cociente. El mapeo f es cerrado (abierto) si y solo si $f^{-1}(f(A)) \subset X$ es cerrado (abierto) para cada subconjunto cerrado (abierto) $A \subset X$.*

Un resultado importante que ayuda a caracterizar a los espacios con estructura celular es el siguiente.

Teorema 2.2.7. *Dada una estructura celular $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$, el mapeo cociente $\pi : G_\infty \to \mathrm{G}^*$ es un mapeo perfecto y el espacio G^* es completamente metrizable.*

Demostración. Sea $\bar{x} \in G_\infty$, entonces $\pi^{-1}(\pi(\bar{x})) = B(\bar{x}, r)$ y por el Lema 2.2.3, tenemos que $B(\bar{x}, r)$ es compacto. Veamos que π es una función cerrada. Sea A un subconjunto cerrado de G_∞ y sea $\bar{x} \in Cl_{G_\infty}(\pi^{-1}(\pi(A)))$. Como, para cada $i \in \mathbb{N}$, $g_i^{-1}(x_i)$ es un abierto básico que contiene a $\bar{x}$, entonces $\pi^{-1}(\pi(A)) \cap g_i^{-1}(x_i) \neq \emptyset$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, definamos:

$$\mathcal{A}_i = \{a \in B(x_i, r_i) : g_i^{-1}(a) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Por la condición 2 de la definición de estructura celular, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $j > i$ tal que $g_i^j(B(x_j, r_j))$ es finito. Como $\mathcal{A}_j \subset B(x_j, r_j)$, entonces $g_i^j(\mathcal{A}_j)$ es finito y por lo tanto se satisfacen las hipótesis del Lema 2.2.2. Lo cual implica que A_∞ es un conjunto no vacío. Sea $\bar{y} \in A_\infty$. Entonces, para cada $i \in \mathbb{N}$, $y_i \in A_i$ y $g_i^{-1}(y_i) \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, A interseca a cada vecindad básica de $\bar{y}$ y como A es cerrado tenemos que $\bar{y} \in A$. Ahora, como $y_i \in B(x_i, r_i)$, para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces $(\bar{y}, \bar{x}) \in r$. Así, $\bar{x} \in \pi^{-1}(\pi(A))$. Concluimos entonces que $\pi^{-1}(\pi(A))$ es un conjunto cerrado en G_∞ y por la Proposición 2.2.6, π es una función cerrada. Resulta así que π es un mapeo perfecto. Por lo tanto G^* es la imagen perfecta de un espacio completamente metrizable. Por lo tanto de Proposición 2.2.5, G^* es completamente metrizable. ■

2.3. Estructura celular definida a partir de cubiertas

En esta sección trabajaremos con estruturas celulares a partir de cubiertas cerradas. Donde una cubierta $\mathcal{A}$ de un espacio X es una familia de subconjuntos de X tal que su unión cubre al espacio X. Si los elementos de la cubierta $\mathcal{A}$ son subconjuntos abiertos diremos que $\mathcal{A}$ es una cubierta abierta, de forma análoga si los elemententes de la cubierta $\mathcal{A}$ son subconjuntos cerrados diremos que $\mathcal{A}$ es una cubierta cerrada.

Definición 2.3.1. Una cubierta $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ de un espacio X es un ***refinamiento*** de una cubierta $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j\in J}$ del mismo espacio, si para cada $B_i \in \mathcal{B}$ existe un $A_j \in \mathcal{A}$ tal que $B_i \subset A_j$ y en este caso escribiremos $\mathcal{B} < \mathcal{A}$.

Un ejemplo de refinamiento en $\mathbb{R}$ es el siguiente:

Definamos $\mathcal{A} = \left\{ \left(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right) : x \in X \right\}$ y $\mathcal{B} = \left\{ \left(x - \frac{1}{4}, x + \frac{1}{4}\right) : x \in X \right\}$. Es claro que para cada $x \in \mathbb{R}$ y $\left(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right) \in \mathcal{A}$, $\left(x - \frac{1}{4}, x + \frac{1}{4}\right) \subset \left(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right)$. Por lo que $\mathcal{B}$ es un refinamiento de $\mathcal{A}$.

Definición 2.3.2. Diremos que una cubierta $\mathcal{A}$ de un espacio X es:

- ***localmente finita*** si para cada $x \in X$ existe una vecindad V de x tal que V interseca únicamente a una cantidad finita de elementos de la cubierta $\mathcal{A}$.
- ***localmente numerable*** si para cada $x \in X$ existe una vecindad V de x tal que V interseca únicamente a una cantidad numerable de elementos de la cubierta $\mathcal{A}$.

Lema 2.3.3. *Sea $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cubiertas de un espacio topológico X tales que $\mathcal{F}_{i+1} < \mathcal{F}_i$. Consideremos para cada $\mathcal{F}_i$ la relación $r_i = \{(F, G) \in \mathcal{F}_i \times \mathcal{F}_i : F \cap G \neq \emptyset\}$ y para cada $i \in \mathbb{N}$, las funciones $g_i^i : \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}_i$ la función identidad y $g_i^{i+1} : \mathcal{F}_{i+1} \to \mathcal{F}_i$ tal que $F \subset g_i^{i+1}(F)$ y $g_i^k(F) = g_i^j(g_j^k(F))$ para $F \in \mathcal{F}_{i+1}$ y $i < j < k$. Si cada $\mathcal{F}_i$ tiene la topología discreta, entonces $\{(\mathcal{F}_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión inversa de gráficas.*

Demostración. Notemos primero que, para cada $i \in \mathbb{N}$, r_i es una relación simétrica y reflexiva, así $(\mathcal{F}_i, r_i)$ es una gráfica. Además por definición de las funciones g_i^i y g_i^{i+1} se satisfacen las dos primeras condiciones de sucesión inversa de gráficas. Para verificar la tercera condición, sean $F, G \in \mathcal{F}_{i+1}$ tales que $(F, G) \in r_{i+1}$. Entonces $F \subset g_i^{i+1}(F)$ y $G \subset g_i^{i+1}(G)$, por lo tanto $g_i^{i+1}(F) \cap g_i^{i+1}(G) \neq \emptyset$. Luego, $(g_i^{i+1}(F), g_i^{i+1}(G)) \in r_i$. ■

Considerando la notación del Lema 2.3.3 presentamos el siguiente resultado mostrado por E. Tymchatyn y W. Debski, en el cual dan condiciones en términos de cubiertas cerradas para que un espacio topológico X sea determinado por una estructura celular, [7].

Teorema 2.3.4. *Sea X un espacio T_1 y sea $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cubiertas cerradas localmente finitas de X tal que $\mathcal{F}_{i+1}$ es refinamiento de $\mathcal{F}_i$. Supongamos que la intersección de los elementos de cada hilo en $\mathcal{F}_\infty$ es un conjunto no vacío en X y que para cada conjunto abierto $U \subset X$ y $p \in U$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que cada elemento de $\mathcal{F}_i$ que contiene a p está contenido en U. Entonces $\{(\mathcal{F}_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ define una estructura celular la cual determina al espacio X.*

Demostración. Veamos que $\{(\mathcal{F}_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ satisface la condición 1 de la definición de estructura celular. Sea $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \mathcal{F}_\infty$. Observemos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $x_i \in \mathcal{F}_i$, es decir, x_i es un elemento de la cubierta cerrada $\mathcal{F}_i$, entonces por hipótesis $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i \neq \emptyset$. Sea $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$. Fijemos $i \in \mathbb{N}$, como $\mathcal{F}_i$ es localmente finita existe un subconjunto abierto V en X tal que $p \in V$ y V interseca a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{F}_i$. Sean $F_1, ..., F_n$ tales elementos, así $V \subset \bigcup_{i=1}^{n} F_i$. Entonces $U = V \backslash \{F_i : p \notin F_i \text{ y } i \in \{1, ..., n\}\}$ (el cual es no vacío, pues al menos existe un elemento en $\mathcal{F}_i$ que contiene a p) es un conjunto abierto tal que $p \in U$ y $U \subset F$ para cada $F \in \mathcal{F}_i$ que contiene a p. Por hipótesis para U existe un $j > i$ tal que todos los elementos de $\mathcal{F}_j$ que contiene a p se quedan contenidos en U. Por lo tanto, si $F \in B(x_j, r_j)$, entonces $F \cap x_j \neq \emptyset$ y como x_j contiene a p, resulta que $x_j \subset U$. Así, $F \cap x_j \subset U$, luego $F \cap U \neq \emptyset$. Por definición de las funciones de ligadura sabemos que $F \subset g_i^j(F)$, así $g_i^j(F) \cap U \neq \emptyset$ y como U interseca a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{F}_i$, solo existe una cantidad finita de elementos de la forma $g_i^j(F)$ con $F \in B(x_j, r_j)$, es decir, $g_i^j(B(x_j, r_j))$ es finito.

Para ver que $\{(\mathcal{F}_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ satisface la condición 2 de la definición de estructura celular, consideremos $\bar{x} \in \mathcal{F}_\infty$ y $p \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} x_i$. Fijemos $i \in \mathbb{N}$ y definamos $G = \bigcup\{F \in \mathcal{F}_i : p \notin F\}$. Veamos que G es un conjunto cerrado, sea $w \in X \backslash G$. Como $\mathcal{F}_i$ es localmente finita existe un subconjunto abierto V en X tal que $w \in V$ y V interseca a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{F}_i$. Sean $F_1, ..., F_n$ tales elementos, así $V \subset \bigcup_{i=1}^{n} F_i$. Entonces $U = V \backslash \{F_i : p \notin F_i \text{ y } i \in \{1, ..., n\}\}$ es un conjunto abierto que contiene a w y no interseca a ningún elemento de $\mathcal{F}_i$ que no contenga a p, por lo tanto se queda contenido en $X \backslash G$. Esto muestra que $X \backslash G$ es un conjunto abierto y por lo tanto G es cerrado y no contiene a p. Entonces existe $k > i$ tal que cada elemento de $\mathcal{F}_k$ que contine a p se queda contenido en $X \backslash G$. Esto implica que el conjunto G no puede ser unido con p por un solo elemanto de la cubierta $\mathcal{F}_k$. Ahora, definamos $H = \bigcap\{F \in \mathcal{F}_k : p \notin F\}$. De forma similar como mostramos que G es cerrado podemos mostrar que H es cerrado. Entonces $X \backslash H$ es un conjunto abierto que contiene a p, por hipótesis existe $l > k$ tal que cada elemento de $\mathcal{F}_l$ que contiene a p se queda contenido en $X \backslash H$, por lo tanto H no puede ser unido con p por un solo elemento de $\mathcal{F}_l$. Así, G no puede ser unido con p por una cadena de dos elementos de $\mathcal{F}_l$. De forma análoga podemos encontrar un $j > l$ tal que G no puede ser unido con p por una cadena de tres elementos de la cubierta $\mathcal{F}_j$.

Si $F \in B(x_j, 2r_j)$, tenemos que $F \cap G = \emptyset$. Como $F \subset g_i^j(F)$, entonces $g_i^j(F) \nsubseteq G$. Por deinición de G, tenemos que $p \in g_i^j(F)$, pues si p no pertenece a $g_i^j(F)$, entonces $g_i^j(F)$ estaría contenido en G. Por lo tanto, $g_i^j(F) \in B(x_i, r_i)$, lo cual implica que $g_i^j(B(x_j, 2r_j)) \subset B(x_i, r_i)$. Luego, $\{(\mathcal{F}_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ satisface la condición 2 de la definición de estructura celular.

Para ver que el espacio que determina la estructura celular $\{(\mathcal{F}_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ es homeomorfo a X definamos $\varphi : \mathcal{F}^* \to X$ de la siguiente manera: para cada $\bar{x} \in \mathcal{F}_\infty$ sea $\varphi(\pi(\bar{x})) = p$ donde $p \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} x_i$. Mostraremos que φ es un homeomorfismo. Sea $\bar{x} \in \mathcal{F}_\infty$ y $p \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} x_i$. Sea $q \in X$, si $q \neq p$, entonces $X \backslash \{q\}$ es un abierto que contiene a p, por lo tanto podemos encontrar un $j \in \mathbb{N}$ tal que $B(x_j, 2r_j) \subset X \backslash \{q\}$. Concluimos así que $q \notin \bigcap_{i \in \mathbb{N}} x_i$ y por lo tanto $p \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} x_i$ es único, es decir, φ está bien definida. Además para cada $\bar{y}$ tal que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} y_i = \{q\}$ tenemos que $\bar{x} \nsim \bar{y}$, por lo tanto φ es inyectiva.

Sea $p \in X$. Definamos, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_i = \{F \in \mathcal{F}_i : p \in F\}$. Sea U un subconjunto abierto de X que contiene al punto p y tal que U interseca solo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{F}_i$. Por hipótesis existe $j > i$ tal que todos los elementos de $\mathcal{F}_j$ que contienen a p están contenidos en U, es decir, $\bigcup \mathcal{A}_j \subset U$. Entonces $g_i^j(\mathcal{A}_j)$ es un conjunto no vacío, pues al menos existe un $F \in \mathcal{A}_j$ que contiene a p, y es finito, pues U interseca solo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}_i$. Por el Lema 2.2.2, existe $\bar{x} \in \mathcal{A}_\infty$. Como $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$, tenemos que $p = \varphi(\pi(\bar{x}))$. Por lo tanto φ es suprayectiva.

Sea $U \subset X$ un conjunto abierto y sea $p = \varphi(\pi(\bar{x})) \in U$. Entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que cada elemento de $\mathcal{F}_i$ que contiene a p esta contenido en U. Ahora, $\bar{x} \in \mathcal{F}_\infty$ y $\varphi(\pi(\bar{x})) \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} x_j$. Por lo tanto $\varphi(\pi(g_i^{-1}(F))) \subset F$ para cada $F \in \mathcal{F}_i$. Sea $F_x = \{F \in \mathcal{F}_i : p \in F\}$. Entonces $\varphi(\pi(g_i^{-1}(F_x))) \subset \bigcup F_x \subset U$. Así, como $g_i^{-1}(F_x)$ es un conjunto abierto en $\mathcal{F}_\infty$, $\varphi \circ \pi$ es una función continua y dado que π también es continua, tenemos que φ es continua.

Sea $G \subset \mathcal{F}^*$ un conjunto cerrado. Veamos que $\varphi(G)$ es un conjunto cerrado en X. Sea $p \in X \backslash \varphi(G)$. Supongamos que para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $F \in \mathcal{F}_i$ que contiene a p y tiene intersección no vacía con $\varphi(G)$. Definamos $\mathcal{A}_i = \{F \in \mathcal{F}_i : p \in F \text{ y } F \cap \varphi(G) \neq \emptyset\}$. Por la hipótesis tenemos que para cada $j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_j$ es no vacío y como las cubiertas $\mathcal{F}_j$ son localmente finitas, entonces p pertenece solo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{F}_j$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\mathcal{A}_j$ es finito. Así, los conjuntos $\mathcal{A}_j$ satisfacen las hipótesis del Lema 2.2.2. Entonces existe $\bar{x} \in \mathcal{A}_\infty$ con $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$ y para cada $i \in \mathbb{N}$, $x_i \cap \varphi(G) \neq \emptyset$. Sea $\beta_i = \{y_i : \bar{y} \in \pi^{-1}(G) \text{ y } y_i \cap x_i \neq \emptyset\}$. Por la condición 1 de estructura celular, tenemos que para cada $j \in \mathbb{N}$, β_j es un conjunto no vacío y satisfacen las hipótesis del Lema 2.2.2. Por lo tanto existe $\bar{z} \in \beta_\infty$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $z_i \cap x_i \neq \emptyset$ y existe $\bar{y} \in \pi^{-1}(G)$ tal que $z_i = y_i$. Como el conjunto G es cerrado, entonces $\pi^{-1}(G)$ es cerrado y como cada vecindad básica de $\bar{z}$ interseca a $\pi^{-1}(G)$, pues $\bar{y} \in g_i^{-1}(z_i)$, se tiene que $\bar{z} \in \pi^{-1}(G)$. Así, $(\bar{z}, \bar{x}) \in r$ y $\bar{x} \in \pi^{-1}(G)$. Por lo tanto, $\pi(\bar{x}) \in G$ y $p = \varphi(\pi(\bar{x})) \in \varphi(G)$. Esto es una contradicción. Por lo tanto existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que cada conjunto $F \in \mathcal{F}_i$ que tiene intersección no vacía con $\varphi(G)$ no contiene a p. Entonces $\bigcup\{F \in \mathcal{F}_i : F \cap \varphi(G) \neq \emptyset\}$ es un conjunto cerrado, por ser la unión de los elementos en $\mathcal{F}_i$ que no contienen a p, contiene a $\varphi(G)$ y no contiene a p. Por lo tanto el complemento de $\bigcup\{F \in \mathcal{F}_i : F \cap \varphi(G) \neq \emptyset\}$ es un conjunto abierto que contiene a p y se queda contenido en $X \backslash \varphi(G)$. Esta significa que $\varphi(G)$ es cerrado. Luego, φ es una función cerrada. Por el Teorema 2.2.7, X es completamente metrizable. ∎

Aplicando el Teorema 2.3.4 veamos un ejemplo de un espacio determinado por una estructura celular.

Ejemplo 2.3.5. *Sea $X = [0, 1]$ con su topología usual, entonces X es determinado por una estructura celular.*

Para cada $i \in \mathbb{N}$ definamos los siguientes conjuntos.

$$\mathcal{A}_i = \left\{ \left[\frac{a}{2^i}, \frac{a+1}{2^i} \right] : a \in \{0, ..., 2^i - 1\} \right\}.$$

Notemos que para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_i$ es una cubierta cerrada del intervalo $[0,1]$. Veamos que $\mathcal{A}_i$ es localmente finita. Sea $x \in X$, entonces $x \in \left[\frac{a}{2^i}, \frac{a+1}{2^i}\right]$, para algún $a \in \{0,...,2^i-1\}$. Así, tenemos los siguientes casos. Si $x \in \left(\frac{a}{2^i}, \frac{a+1}{2^i}\right)$, entonces $\left(\frac{a}{2^i}, \frac{a+1}{2^i}\right)$ es un abierto que contiene a x y solo interseca a un elemento de la cubierta $\mathcal{A}_i$. Si $x = \frac{a}{2^i}$, entonces $\left(\frac{a-1}{2^i}, \frac{a+1}{2^i}\right) \cap X$ es una abierto que contiene a x e interseca solo a dos elementos de la cubierta $\mathcal{A}_i$. De forma similar al caso anterior, si $x = \frac{a+1}{2^i}$, entonces $\left(\frac{a}{2^i}, \frac{a+2}{2^i}\right) \cap X$ es una abierto que contiene a x e interseca solo a dos elementos de la cubierta $\mathcal{A}_i$. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es localmente finita. Por otra parte, notemos si $A = \left[\frac{a}{2^{i+1}}, \frac{a+1}{2^{i+1}}\right]$ es un elemento de la cubierta $\mathcal{A}_{i+1}$, entonces existe $b \in \{1,...,2^i-1\}$ tal que $\frac{b}{2^i} \leq \frac{a}{2^{i+1}} < \frac{a+1}{2^{i+1}} \leq \frac{b+1}{2^i}$. Por lo tanto, A está contenido en $\left[\frac{b}{2^i}, \frac{b+1}{2^i}\right]$ el cual es un elemento de la cubierta $\mathcal{A}_i$, es decir, $\mathcal{A}_{i+1}$ es refinamiento de $\mathcal{A}_i$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, definamos $r_i = \{(F,G) \in \mathcal{A}_i \times \mathcal{A}_i : F \cap G \neq \emptyset\}$ y las funciones $g_i^i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}_i$ la función identidad y $g_i^{i+1} : \mathcal{A}_{i+1} \to \mathcal{A}_i$ definida por $g_i^{i+1}\left(\left[\frac{a}{2^{i+1}}, \frac{a+1}{2^{i+1}}\right]\right) = \left[\frac{b}{2^i}, \frac{b+1}{2^i}\right]$ tal que $\frac{b}{2^i} \leq \frac{a}{2^{i+1}} < \frac{a+1}{2^{i+1}} \leq \frac{b+1}{2^i}$ y $g_i^k(F) = g_i^j(g_j^k(F))$ para $F \in \mathcal{A}_{i+1}$ y $i < j < k$.

Sea $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, ...) \in \mathcal{A}_\infty$, entonces por definición de las funciones de ligadura tenemos que $x_{i+1} \subset x_i$. Lo anterior implica que $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ forma una sucesión anidada de intervalos compactos, entonces su intersección es no vacía. Ahora, si U es un abierto en $[0,1]$ y $p \in U$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B(p,\varepsilon) \subset U$. Para ε, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Sea $y_n \in \mathcal{A}_n$ tal que $p \in y_n$. Si $q \in y_n$, entonces $|p-q| \leq \frac{1}{2^n}$ y por lo tanto $q \in B(p,\varepsilon) \subset U$. De lo anterior, cualquier elemento de $\mathcal{A}_n$ que contiene a p se queda contenido en U. Así, $[0,1]$ es T_1, $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una cubierta cerrada localmente finita, $\mathcal{A}_{i+1} < \mathcal{A}_i$ y para cada $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, ...)$ se tiene que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$ es un conjunto no vacío en $[0,1]$ y para cada abierto U del $[0,1]$ y $p \in U$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que cada elemento de $\mathcal{A}_i$ que contiene a p se queda contenido en U. Por lo tanto se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.3.4, de este modo X es determinado por la estructura celular $\{(\mathcal{A}_i, r_i), g_i^{i+1}\}$.

La condición de que el espacio sea T_1 en el Teorema 2.3.4 es de suma importancia, pues a continuación veremos un ejemplo de un espacio que no es T_1 y a partir cual podemos construir una estructura celular utilizando cubiertas cerradas que cumplan las condiciones del Teorema 2.3.4. Así, dicha estructura celular determinará un espacio completamente metrizable y por lo tanto, T_1, el cual no puede ser homeomorfo al espacio original.

Ejemplo 2.3.6. *Sea X el abanico armónico como subconjunto de $\mathbb{R}^2$, figura 2.2, con la topología $\tau = \{(A \times [0,1]) \cap X : A \subset [0,1]$ es un abierto$\} \cup \{\emptyset, X\}$.*

Veamos primero que X no es un espacio T_1. Consideremos $(1,0)$ y $(1,1)$ en X. Si A es un subconjunto abierto que contiene a $(1,0)$, entonces $A = ((a,1] \times [0,1]) \cap X$, para algún $a < 1$. Por lo tanto, A contiene también a $(1,1)$. Así, X no es T_1.

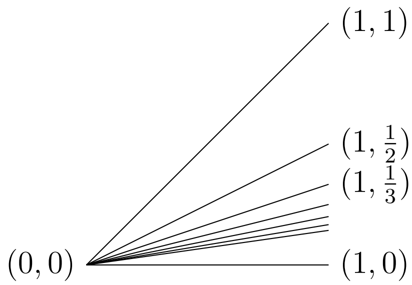

Figura 2.2: Abanico armónico.

Consideremos en X los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{B}_i = \left\{ \left(\left[\frac{a}{2^i}, \frac{a+1}{2^i} \right] \times [0,1] \right) \cap X : a \in \{0, ..., 2^i - 1\} \right\}, i \in \mathbb{N}.$$

Notemos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_i$ es una cubierta cerrada para X, Veamos que $\mathcal{B}_i$ es localmente finita. Sea $x \in X$, entonces $x \in \left(\left[\frac{a}{2^i}, \frac{a+1}{2^i}\right] \times [0,1]\right) \cap X$, para algún $a \in \{0, ..., 2^i - 1\}$. Así, tenemos los siguientes casos. Si $x \in \left(\left(\frac{a}{2^i}, \frac{a+1}{2^i}\right) \times [0,1]\right) \cap X$, entonces $\left(\left(\frac{a-1}{2^i}, \frac{a+1}{2^i}\right) \times [0,1]\right) \cap X$ es un abierto que contiene a x y solo interseca a un elemento de la cubierta $\mathcal{B}_i$. Si $x \in \left(\{\frac{a}{2^i} \times [0,1]\right) \cap X$, entonces $\left(\left[\frac{a-1}{2^i}, \frac{a+1}{2^i}\right] \times [0,1]\right) \cap X$ es una abierto que contiene a x e interseca solo a dos elementos de la cubierta $\mathcal{B}_i$. De forma similar al caso anterior, si $x \in \left(\{\frac{a+1}{2^i} \times [0,1]\right) \cap X$, entonces $\left(\frac{a}{2^i}, \frac{a+2}{2^i}\right) \cap X$ es una abierto que contiene a x e interseca solo a dos elementos de la cubierta $\mathcal{B}_i$. Por lo tanto, $\mathcal{B}_i$ es localmente finita. Por otra parte, notemos si $A = \left(\left[\frac{a}{2^{i+1}}, \frac{a+1}{2^{i+1}}\right] \times [0,1]\right) \cap X$ es un elemento de la cubierta $\mathcal{B}_{i+1}$, entonces existe $b \in \{1, ..., 2^i - 1\}$ tal que $\frac{b}{2^i} \leq \frac{a}{2^{i+1}} < \frac{a+1}{2^{i+1}} \leq \frac{b+1}{2^i}$. Por lo tanto A está contenido en $\left(\left[\frac{b}{2^i}, \frac{b+1}{2^i}\right] \times [0,1]\right) \cap X$ el cual es un elemento de la cubierta $\mathcal{B}_i$, es decir, $\mathcal{B}_{i+1}$ es refinamiento de $\mathcal{B}_i$.

Para cada $\mathcal{B}_i$, definamos $r_i = \{(F,G) \in \mathcal{B}_i \times \mathcal{B}_i : F \cap G \neq \emptyset\}$ y las funciones $g_i^i : \mathcal{B}_i \to \mathcal{B}_i$ la función identidad y $g_i^{i+1} : \mathcal{B}_{i+1} \to \mathcal{B}_i$ dada por $g_i^{i+1}(\left(\left[\frac{a}{2^{i+1}}, \frac{a+1}{2^{i+1}}\right] \times [0,1]\right)) = \left(\left[\frac{b}{2^i}, \frac{b+1}{2^i}\right] \times [0,1]\right)$ tal que $\frac{b}{2^i} \leq \frac{a}{2^{i+1}} < \frac{a+1}{2^{i+1}} \leq \frac{b+1}{2^i}$ y $g_i^k(F) = g_i^j(g_j^k(F))$ para $F \in \mathcal{B}_{i+1}$ y $i < j < k$.

Ahora, si U es un abierto en X y $(x,y) \in U$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que $((x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times [0,1]) \cap X \subset U$. Para ε, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Sea $V \in \mathcal{B}_n$ tal que $(x,y) \in V$. Si $(x',y') \in V$, entonces $|x - x'| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ y por lo tanto $(x',y') \in ((x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times [0,1]) \cap X \subset U$. De lo anterior tenemos que cualquier elemento de $\mathcal{B}_n$ que contiene a (x,y) se queda contenido en U. Por lo tanto se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.3.4. Así $\mathcal{B}^*$ es un espacio completamente metrizable, pero X no lo es, pues no es T_1.

2.4. Estructuras celulares completas

En esta sección daremos algunas definiciones para poder definir la completez de una estructura celular.

Definición 2.4.1. Sea $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una estructura celular y sean $a \in G_m$ y $b \in G_n$ dos células. Diremos que a y b están ***cerca*** si $(g_k^m(a), g_k^n(b)) \in r_k$ para $k = \text{mín}\{m, n\}$.

Veamos un ejemplo de la definición anterior.

Consideremos la estructura celular del ejemplo 2.1.2 y las células $a_4 \in G_2$ y $a_6 \in G_3$. Entonces a_4 y a_6 están cerca, pues $g_2^2(a_4) = a_4$ y $g_2^3(a_6) = a_3$. Como $(a_3, a_4) \in r_2$, se tiene que $(g_2^2(a_4), g_2^3(a_6)) \in r_2$.

Definición 2.4.2. Sea $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una estructura celular. Diremos que el grado de una célula es i si $a \in G_i$ y lo denotaremos por $grad(a) = i$.

Definición 2.4.3. Sea $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una estructura celular. Diremos que una sucesión $U = \{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de células en $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i$ es ***sucesión de Cauchy*** si se satisfacen las siguientes dos condiciones:

1. $\lim\limits_{j\longrightarrow\infty} grad\ u_j = \infty$.
2. Existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i, j > N$, entonces u_i y u_j están cerca.

El siguiente es un ejemplo de una sucesión de Cauchy.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $G_i = [0, 1]$, $r_i = \{(x, x) : x \in [0, 1]\} \bigcup \{(0, 1), (1, 0)\}$ y definamos $g_i^{i+1}(x) = 2x$, si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $g_i^{i+1}(x) = 1$, si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, ver figura 2.3. Entonces la sucesión de células $U = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^5}, \frac{1}{2^7}, \ldots, \frac{1}{2^{2n-1}}, \ldots\right\}$, donde cada $u_i \in G_{2i}$, es una sucesión de Cauchy.

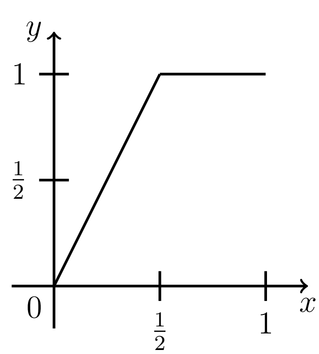

Figura 2.3: Gráfica de la función $f(x) = 2x$ en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y 1 en $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$

Definición 2.4.4. Sea $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una estructura celular. Diremos que una sucesión $U = \{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de células en $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i$ ***converge*** a un hilo $\bar{x} \in G_\infty$ si se satisface:

- $\lim\limits_{j\longrightarrow\infty} grad\ u_j = \infty$.
- Existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que x_i y u_j están cerca, para toda $i \in \mathbb{N}$ y $j > N$.

Veamos en el siguiente ejemplo que una sucesión de células puede convergen a dos puntos distintos.

Consideremos G_i, r_i y g_i^{i+1}, para cada $i \in \mathbb{N}$, como en el ejemplo anterior. Veamos que la sucesión de celulas $U_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right\}$, donde cada $u_i \in G_i$, converge a un solo punto. Pero la sucesión $U_2 = \{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots\}$, donde cada $u_i \in G_i$, converge a dos puntos distintos.

Notemos que $\bar{x} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$ es un punto en G_∞. Veamos que U_1 converge a $\bar{x}$. Observemos que por definición de U_1, para cada $i > 1$, $u_i = \frac{1}{2^{i-1}}$ y por definición de la función g_i^{i+1}, $g_i^{i+1}(u_{i+1}) = g_i^{i+1}(\frac{1}{2^i}) = \frac{1}{2^{i-1}} = u_i$. Además, para cada $i \in \mathbb{N}$, $x_i = \frac{1}{2^{i-1}}$. Por lo tanto, $(u_i, x_i) \in r_i$, para cada $i > 1$. Sean $i, j \in \mathbb{N}$ con $j > 1$ y sea $k = \min\{i, j\}$. Si $k > 1$, $(g_k^i(x_i), g_k^j(u_j)) = (x_k, u_k) \in r_k$ y si $k = 1$, $(g_k^i(x_i), g_k^j(u_j)) = (1, 1) \in r_1$. Por lo tanto x_i está cerca de u_j para cada $i, j \in \mathbb{N}$ con $j > 1$.

Veamos ahora que el punto al que converge U_1 es único. Sea $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, \ldots) \in G_\infty$ tal que U_1 converge a $\bar{y}$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}$ y $j > N$, $(g_k^i(y_i), g_k^j(u_j)) \in r_k$ con $k = \max\{i, j\}$. Supongamos que $N > 1$. En particular, para $i = j > N$, se tiene que $(y_i, u_i) \in r_i$. Notemos que, como $i > N$, $u_i \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Así, $y_i = u_i$, pues cada punto en $(0, 1)$ solo está relacionado consigo mismo. Por lo tanto $y_i = u_i$ para cada $i > N$, pero $x_i = u_i$ para cada $i > 1$ por lo tanto $y_i = x_i$ para cada $i > N$. Como $\bar{y} \in G_\infty$, y_i queda completamente determinado para cada $i = 1, \ldots, N$. Concluimos así que $\bar{y} = \bar{x}$.

Veamos ahora que la sucesión de células $U_2 = \{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots\}$ converge a dos puntos distintos. Sea $\bar{x} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots) \in G_\infty$ y sean x_i la i-ésima coordenada de $\bar{x}$ y u_j el elemento j-ésimo de la sucesión U_2. Entonces $x_i = 1$ y $u_j = 0$ ó $u_j = 1$. Sin perder generalidad, supongamos que $i < j$. Si $u_j = 1$, entonces $g_i^j(1) = 1$, por lo tanto $(x_i, g_i^j(u_j)) \in r_i$. Ahora, si $u_j = 0$, entonces $g_i^j(u_j) = g_i^j(0) = 0$. Como $(0, 1) \in r_i$, entonces $(x_i, g_i^j(u_j)) \in r_i$. Por lo tanto, x_i y u_j están cerca. Luego, la sucesión U_2 converge a $\bar{x}$.

Consideremos ahora $\bar{y} = (0, 0, 0, 0, \ldots)$ el cual también es un punto de G_∞. Sean y_i la i-ésima coordenada de $\bar{y}$ y u_j el elemento j-ésimo de la sucesión U. Entonces $y_i = 0$ y $u_j = 0$ ó $u_j = 1$. Sin perder generalidad, supongamos que $i < j$. Si $u_j = 0$, entonces $g_i^j(0) = 0$, por lo tanto $(y_i, g_i^j(u_j)) = (0, 0) \in r_i$. Ahora, si $u_j = 1$, entonces $g_i^j(u_j) = g_i^j(1) = 1$. Como $(1, 0) \in r_i$, entonces $(y_i, g_i^j(u_j)) \in r_i$. Por lo tanto y_i y u_j están cerca. Luego, la sucesión U_2 converge a $\bar{y}$.

Concluimos así que U_2 converge a dos puntos distintos, $\bar{x}$ y $\bar{y}$.

De ahora en adelante cuando escribamos sucesión de Cauchy nos estaremos refiriendo a una sucesión de células que es de Cauchy.

Del ejemplo anterior notamos que una sucesión de células puede converger a puntos distintos de G_∞, pero notemos que los dos puntos a los que converge la sucesión U_2 son adyacentes, que es lo que muestra la siguiente proposición:

Proposición 2.4.5. *Sea $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una estructura celular. Si una sucesión de Cauchy en $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i$ converge a hilos diferentes $\bar{x}$ y $\bar{y}$, entonces $(\bar{x}, \bar{y}) \in r$.*

Demostración. Sea $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i$ una sucesión de células y supongamos que converge a $\bar{x}$ y $\bar{y}$. Entonces $\lim\limits_{j\longrightarrow\infty} grad\ u_j = \infty$ y existen un $N, M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$, x_i y u_j están cerca, para todo $j > N$ y y_i y u_j están cerca, para todo $j > M$. Sea $N_0 = \text{máx}\{N, M\}$. Fijemos $i_0 \in \mathbb{N}$. Notemos que para toda $i \in \mathbb{N}$ y $j > N_0$, x_i está cerca de u_j y y_i está cerca de u_j. Esto implica que si $k = \text{mín}\{i, j\}$, entonces $(g_k^i(x_i), g_k^j(u_j)) \in r_k$ y $(g_k^i(y_i), g_k^j(u_j)) \in r_k$. Por lo tanto $g_k^i(y_i) \in B(g_k^i(x_i), 2r_k)$, es decir, para toda $i \in \mathbb{N}$ y $j > N_0$, $y_k \in B(x_k, 2r_k)$. Por la condición 1 de estructura celular, tenemos que existe $m > i_0$ tal que $g_{i_0}^m(B(x_m, 2r_m)) \subset B(x_{i_0}, r_{i_0})$. Supongamos primero que $m \geq N_0$. Considerando $i = j = m$ tenemos que $(g_m^m(x_m), g_m^m(u_m)) \in r_m$ y $(g_m^m(y_m), g_m^m(u_m)) \in r_m$. Entonces $(x_m, u_m) \in r_m$ y $(y_m, u_m) \in r_m$, luego $y_m \in B(x_m, 2r_m)$. Por lo tanto $g_{i_0}^m(y_m) \in B(x_{i_0}, r_{i_0})$, es decir, $y_{i_0} \in B(x_{i_0}, r_{i_0})$. Supongamos ahora que $m < N_0$, considerando $i = m$, $j = N_0$ tenemos que $(g_m^m(x_m), g_m^{N_0}(u_{N_0})) \in r_m$ y $(g_m^m(y_m), g_m^{N_0}(u_{N_0})) \in r_m$. Entonces $y_m \in B(x_m, 2r_m)$, por lo tanto $g_{i_0}^m(y_m) \in B(x_{i_0}, r_{i_0})$, $y_{i_0} \in B(x_{i_0}, r_{i_0})$. Así, concluimos que $(x_{i_0}, y_{i_0}) \in r_{i_0}$. Como $i_0 \in \mathbb{N}$ fue arbitrario, tenemos que para cada $i \in \mathbb{N}$, $(x_i, y_i) \in r_i$, es decir, $(\bar{x}, \bar{y}) \in r$. ∎

Definición 2.4.6. Una estructura celular es ***completa*** si cada sucesión de Cauchy converge.

Veamos ahora que si en un espacio métrico completo X tenemos cubiertas cerradas de X, que satisfagan las condiciones del Teorema 2.3.4, la estructura celular que se obtiene es completa como lo muestra el siguiente Teorema.

Teorema 2.4.7. *Sea X un espacio métrico completo y sea $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cubiertas cerradas localmente finitas de X tal que $\mathcal{F}_{i+1} < \mathcal{F}_i$ y los supremos de los diámetros de los elementos de $\mathcal{F}_i$ convergen a cero cuando i tiende a infinito. Entonces X es determinado por una estructura celular completa.*

Demostración. Notemos que se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.3.4, por lo tanto $\{(\mathcal{F}_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ define una estructura celular, donde $r_i = \{(F, G) \in \mathcal{F}_i \times \mathcal{F}_i : F \cap G \neq \emptyset\}$ y para cada $i \in \mathbb{N}$, la función $g_i^i : \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}_i$ es la función identidad y $g_i^{i+1} : \mathcal{F}_{i+1} \to \mathcal{F}_i$ satisface $F \subset g_i^{i+1}(F)$ y $g_i^k(F) = g_i^j(g_j^k(F))$ para $F \in \mathcal{F}_{i+1}$ y $i < j < k$. Para ver que es completa notemos que si $U = \{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_i$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i, j > N$ entonces u_i y u_j están cerca, es decir,

$(g_k^{grad(u_i)}(u_i), g_k^{grad(u_j)}(u_j)) \in r_k$ donde $k = \text{mín}\{grad(u_i), grad(u_j)\}$. Así por definición de r_k, $g_k^{grad(u_i)}(u_i) \cap g_k^{grad(u_j)}(u_j) \neq \emptyset$, para cada $i, j > N$. Eligiendo un $y_i \in u_i$ para cada par $i \in \mathbb{N}$, veamos que $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X. Sea $\varepsilon > 0$, como los supremos de los diámetros de los elementos de $\mathcal{F}_i$ convergen a cero cuando i tiende a infinito, existe un $M \in \mathbb{N}$ tal que si $m > M$, entonces el diámetro de u_m es menor que $\frac{\varepsilon}{2}$. Consideremos $L = \text{máx}\{N, M\}$ y sean $y_i, y_j \in \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $i, j > L$. Como $y_i \in u_i$ y $y_j \in u_j$, entonces $y_i \in g_k^{grad(u_i)}(u_i)$ y $y_j \in g_k^{grad(u_j)}(u_j)$. Además, como $i, j > N$ tenemos que $g_k^{grad(u_i)}(u_i) \cap g_k^{grad(u_j)}(u_j) \neq \emptyset$ donde $k = \text{mín}\{grad(u_i), grad(u_j)\}$ y como $i, j > M$, el diámetro de $g_k^{grad(u_i)}(u_i)$ y $g_k^{grad(u_j)}(u_j)$ es menor que $\frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto la distancia de y_i a y_j es menor que ε. Así, cada sucesión de Cauchy en $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_i$ determina una sucesión de Cauchy en el espacio X. Luego, como X es completo, la sucesión $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in X$. Considerando el hilo $\bar{x}$ en $\mathcal{F}_\infty$ que satisface $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i = \{x\}$ y para algún $N \in \mathbb{N}$, si $j > N$, entonces $y_j \in x_j$ y tenemos que U converge a $\bar{x}$. ■

En general si X es un espacio completamente metrizable podemos definir cubiertas cerradas con las cuales podemos construir una estructura celular que determine al espacio X.

Teorema 2.4.8. *Sea X un espacio completamente metrizable. Entonces X es determinado por una estructura celular completa.*

Demostración. Sea ρ una métrica completa para X. Como (X, ρ) es un espacio paracompacto, por ser un espacio métrico, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una cubierta abierta localmente finita de X, donde cada elemento de la cubierta tiene diámetro menor que ε. En particular para $\varepsilon = 1$, existe una cubierta abierta localmente finita $\mathcal{F}'_1$ de X donde cada elemento de la cubierta tiene diámetro menor que 1. Tomando la cerradura de cada elemento de $\mathcal{F}'_1$, obtenemos una cubierta cerrada localmente finita $\mathcal{F}_1$ cuyos elementos tienen diámetro menor que 1. Definiremos inductivamente cubiertas cerradas localmente finitas $\mathcal{F}_i$ de X donde cada elemento de la cubierta tiene diámetro menor que $\frac{1}{n}$ y para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_{i+1}$ es un refinamiento de $\mathcal{F}_i$. Supongamos que $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ están definidas. Entonces existe una cubierta cerrada localmente finita $\mathcal{F}$ que consiste de elementos de diámetro menor que $\frac{1}{n+1}$. Definimos $\mathcal{F}_{n+1}$ como el conjunto de todas las intersecciones no vacías de elementos de $\mathcal{F}_i$ con los elementos de $\mathcal{F}$. Por el Teorema 2.4.7, tenemos que X es determinado por una estructura celular completa. ■

2.5. Estructuras celulares con sistemas inversos

En esta sección presentamos la extensión de estructuras celulares a sistemas inversos, ver [8]. Además veremos la caracterización de los espacios determinados por estructuras celulares con sistemas inversos sobre un conjunto dirigido y no precisamente sobre el conjunto de naturales, como en la Definición 2.1.1, que la sucesión inversa estaba definida sobre los naturales. De este modo, esta definición (2.5.1) será más general que la Definición 2.1.1.

Definición 2.5.1. Sea J un conjunto dirigido. Una ***estructura celular*** es un sistema inverso de gráficas, $\{(G_i, r_i), g_i^j\}_{i,j\in J}$, donde cada G_i tiene la topología discreta y se satisfacen las siguientes dos condiciones:

1. Para cada hilo $\bar{x} \in G_\infty$ y cada $i \in J$ existe un $j \in J$ tal que $j \geq i$ y además $g_i^j(B(x_j, 2r_j)) \subset B(x_i, r_i)$.

2. Para cada hilo $\bar{x} \in G_\infty$ y cada $i \in J$ existe un $j \in J$ tal que $j \geq i$ y $g_i^j(B(x_j, r_j))$ es finito.

De forma análoga al caso de estructuras celulares con sucesiones inversas, se tiene que la familia $\beta = \{g_j^{-1}(x_j) : x_j = g_j(\bar{x})$ para algún $\bar{x} \in G_\infty, j \in J\}$ forma una base para G_∞ de conjuntos abiertos y cerrados, ver Proposición 2.1.3. Además, la relación en G_∞ definida como en la Proposición 1.4.4 es una relación de equivalencia, ver Lema 2.1.4, y de igual modo denotaremos por $\mathbf{G}^*$ al espacio cociente G_∞/r y por π al mapeo cociente de G_∞ sobre G^*.

Definición 2.5.2. Un espacio topológico X es ***determinado por la estructura celular*** $\{(G_i, r_i), g_i^j\}_{i,j\in J}$ si X es homeomorfo a G^*.

Observación 2.5.3. *Aunque en la Definición 2.5.2 utilizamos la misma notación que en la Definición 2.1.5, la diferencia es que en la Definición 2.5.2 se considera un sistema inverso de gráficas y no necesariamente una sucesión inversa de gráficas como en la Definición 2.1.5.*

Presentamos ahora algunos lemas que utilizaremos para mostrar que el mapeo cociente π es perfecto.

Lema 2.5.4. *Sean J un conjunto dirigido y $\{(A_i, r_i), g_i^j\}_{i,j\in J}$ un sistema inverso de gráficas, donde cada A_i tiene la topología discreta. Si para cada $i \in J$, existe $j > i$ tal que $g_i^j(A_j)$ es finito, entonces A_∞ es un espacio compacto y no vacío.*

Demostración. Sea $i \in J$, entonces existe un $j > i$ tal que el conjunto $g_i^j(A_j)$ es finito y tiene la menor cardinalidad, es decir, para cada $k > j$, $g_i^k(A_k) = g_i^j(A_j)$. Definamos $B_i = g_i^j(A_j)$, entonces para cada $k > j$ tenemos que $g_i^k(A_k) = B_i$. Así $\{B_i, g_i^j|_{B_j}\}_{i,j\in J}$ es un sistema inverso donde cada B_i es un espacio discreto y finito. Así, por el Teorema 1.4.7, tenemos que B_∞ es no vacío y compacto. ■

Lema 2.5.5. *Sean J un conjunto dirigido y $\{(G_i, r_i), g_i^j\}_{i,j\in J}$ una estructura celular. Entonces, para cada $\bar{x} \in G_\infty$, $B(\bar{x}, r)$ es un espacio no vacío y compacto en G_∞.*

Demostración. Definamos, para cada $j \in J$, $A_j = B(x_j, r_j)$, entonces $\{A_i, g_i^j|_{A_j}\}_{i,j\in J}$ es un sistema inverso de espacios discretos y no vacíos. Por la condición 2 de la definición 2.5.1 de estructura celular, para cada $i \in J$, existe un $j > i$ tal que $g_i^j(A_j)$ es finito. Así, por el Lema 2.5.4, A_∞ es un espacio no vacío y compacto. Veamos que $A_\infty = B(\bar{x}, r)$. Sea $\bar{z} \in A_\infty$, entonces $z_i \in A_i = B(x_i, r_i)$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Luego $(\bar{z}, \bar{x}) \in r$, es decir, $\bar{z} \in B(\bar{x}, r)$. Para ver que $B(\bar{x}, r) \subset A_\infty$, sea $\bar{y} \in B(\bar{x}, r)$. Entonces $(y_i, x_i) \in r_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Así, $y_i \in A_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$ y $\bar{y} \in A_\infty$. Por lo tanto, $B(\bar{x}, r)$ es un espacio no vacío y compacto. ■

Veamos que el mapeo cociente π es un mapeo perfecto.

Teorema 2.5.6. *Sea J un conjunto dirigido y sea $\{(G_i, r_i), g_i^j\}_{i,j\in J}$ una estructura celular, entonces $\pi : G_\infty \to \mathrm{G}^*$ es un mapeo perfecto.*

Demostración. Sea $\bar{x} \in G_\infty$. Como $\pi^{-1}(\pi(\bar{x})) = B(\bar{x}, r)$, entonces por el Lema 2.5.5 tenemos que $B(\bar{x}, r)$ es compacto, es decir, la imagen inversa de cada punto en G^* bajo el mapeo π es un compacto en G_∞.

Consideremos ahora A un subconjunto cerrado en G_∞ y sea $\bar{x} \in Cl_{G_\infty}(\pi^{-1}(\pi(A)))$. Para cada $j \in J$ tenemos que $g_j^{-1}(x_j)$ es una vecindad abierta básica de $\bar{x}$, por lo tanto $g_j^{-1}(x_j) \cap \pi^{-1}(\pi(A)) \neq \emptyset$. Para cada $j \in J$, definamos:

$$A_j = \{a \in B(x_j, r_j) : g_j^{-1}(a) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Como $g_j^{-1}(x_j) \cap \pi^{-1}(\pi(A)) \neq \emptyset$, entonces existe un $\bar{z} \in g_j^{-1}(x_j) \cap \pi^{-1}(\pi(A))$. Luego, $z_j = x_j$ y existe $\bar{w} \in A$ tal que $(\bar{w}, \bar{z}) \in r$ y por lo tanto $w_j \in B(x_j, r_j)$ y $\bar{w} \in g_j^{-1}(w_j) \cap A$. De lo anterior tenemos que $A_j \neq \emptyset$ y por la condición 2 de la Definición 2.5.1, tenemos que el sistema inverso $\{A_j, g_i^j\}_{i,j\in J}$ satisface las hipótesis del Lema 2.5.4, así $A_\infty \neq \emptyset$. Sea $\bar{y} \in A_\infty$, entonces para cada $j \in J$, $y_j \in A_j$ y $g_j^{-1}(y_j) \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, como A es cerrado y cada vecindad abierta básica de $\bar{y}$ interseca a A, tenemos que $\bar{y} \in A$. Ahora como para cada $j \in J$, $y_j \in B(x_j, r_j)$ entonces $(\bar{y}, \bar{x}) \in r$ y $\bar{x} \in \pi^{-1}(\pi(A))$. Por lo tanto, $\pi^{-1}(\pi(A))$ es un conjunto cerrado. Por el Teorema 2.2.6, tenemos que π es un mapeo cerrado. Por lo tanto, π es un mapeo perfecto. ■

Como mencionamos al inicio de esta sección, presentaremos la caracterización de los espacios que son determinados por una estructura celular, por lo cual damos la siguiente definición.

Definición 2.5.7. Sea X un espacio topológico y J un conjunto dirigido. Una ***presentación*** de X es una tripleta $(\{D_j\}_{j\in J}, F, f)$, donde F es un subconjunto cerrado de un producto de espacios discretos $\prod_{j\in J} D_j$ y f es un mapeo perfecto y suprayectivo de F sobre X.

Los espacios completamente metrizables son ejemplo de espacios que tienen una presentación. Pues si X es un espacio completamente metrizable, entonces X es determinado por una estructura celular $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$, donde para cada $i \in \mathbb{N}$, G_i es un espacio discreto. Tomando $D_j = G_j$, $F = G_\infty$ y $f = \pi : G_\infty \to \mathrm{G}^*$, tenemos que F es un subconjunto cerrado de un producto de espacios discretos $\prod_{j\in J} D_j$ y f es una función perfecta de F sobre X. Por lo tanto, X tiene una presentación.

Utilizaremos el siguiente resultado más adelante, su demostración puede ser consultada en [8].

Proposición 2.5.8. *([8], Proposición 4.3). La clase de los espacios que tienen una presentación coincide con la clase de los espacios que son imagen perfecta de un espacio topológicamente completo.*

Introducimos la notación que estaremos utilizando en el resto de esta sección.

Sea X un espacio topológico y $(\{D_j\}_{j\in J}, F, f)$ una presentación de X. Sea $\mathcal{P} = \{P \subset J : 0 < |P| < \infty\}$, entonces $\mathcal{P}$ es un conjunto dirigido con el siguiente orden: para $P, Q \in \mathcal{P}$, $P \leq Q$ si $P \subset Q$. Notemos que si $P \in \mathcal{P}$ entonces existe una cantidad finita de subconjuntos $Q \in \mathcal{P}$ tal que $Q \subset P$, pues P es finito. Así, el espacio $D_P = \prod_{j\in P} D_j$ con $P \in \mathcal{P}$ es discreto por ser el producto de una cantidad finita de conjuntos discretos. Para cada par P, Q en $\mathcal{P}$ tal que $P \leq Q$ sea $g_P^Q : D_Q \to D_P$ y $\pi_P : \prod_{j\in J} D_j \to D_P$ las proyecciones naturales. Definamos $E_P = \{a \in D_P : \pi_P^{-1}(a) \cap F \neq \emptyset\}$, entonces E_P es discreto por ser D_P discreto.

Sea $P \in \mathcal{P}$. Para $a \in D_P$, sea $F_a = f(F \cap \pi_P^{-1}(a))$. Notemos que, como F y $\pi_P^{-1}(a)$ son subconjuntos cerrados de $\prod_{j\in J} D_j$ y f es un mapeo perfecto, se tiene que F_a es cerrado para cada $a \in D_P$. Si $x \in X$, existe $y \in F \subset \prod_{j\in J} D_j$ tal que $f(y) = x$. Luego, $y \in F \cap \pi_P^{-1}(\pi_P(y))$. Por lo tanto, $f(y) \in f(F \cap \pi_P^{-1}(\pi_P(y)))$, es decir, $x \in F_{\pi_P(y)}$ y como $F \cap \pi_P^{-1}(\pi_P(y)) \neq \emptyset$, $F_{\pi_P(y)} \in E_P$. Así, la familia $F_P = \{F_a : a \in E_P\}$ es una cubierta cerrada de X.

Definamos la relación r_P en E_P de la siguiente manera: para a y b en E_P, $(a, b) \in r_P$ si $F_a \cap F_b \neq \emptyset$. Notemos que, para cada $P \in \mathcal{P}$, r_P es reflexiva y simétrica, por lo tanto (E_P, r_P) es una gráfica. Además, para $P \leq Q$, las funciones g_P^Q satisfacen las dos primeras condiciones de sucesión inversa. Veamos que satisfacen la tercera condición. Sean $a, b \in E_Q$, tales que $(a, b) \in r_Q$, es decir, $F_a \cap F_b \neq \emptyset$. Como $\pi_P = g_P^Q \circ \pi_Q$, tenemos que $\pi_P^{-1}(g_P^Q(a)) = (g_P^Q \circ \pi_Q)^{-1}(g_P^Q(a)) = \pi_Q^{-1}((g_P^Q)^{-1}(g_P^Q(a))) \supset \pi_Q^{-1}(a)$. Luego, $F \cap \pi_Q^{-1}(a) \subset F \cap \pi_P^{-1}(g_P^Q(a))$ y por lo tanto $f(F \cap \pi_Q^{-1}(a)) \subset f(F \cap \pi_P^{-1}(g_P^Q(a)))$, es decir, $F_a \subset F_{g_P^Q(a)}$. De forma análoga, $F_b \subset F_{g_P^Q(b)}$. Como $F_a \cap F_b \neq \emptyset$, resulta que $F_{g_P^Q(a)} \cap F_{g_P^Q(b)} \neq \emptyset$, de modo que $(g_P^Q(a), g_P^Q(b)) \in r_P$. Así, tenemos que $E = \{(E_P, r_P), g_P^Q|_{E_Q}\}_{P,Q\in\mathcal{P}}$ es un sistema inverso de gráficas. Definiendo ahora, para cada $P \in \mathcal{P}$, la relación r'_P en D_P como $r'_P = r_P \cup \{(a, a) : a \in D_P\}$, tenemos que $D = \{(D_P, r'_P), g_P^Q\}_{P,Q\in\mathcal{P}}$ es un sistema inverso de gráficas con límite inverso D_∞. Además $E_\infty \subset D_\infty \subset \prod_{P\in\mathcal{P}} D_P$. Identificaremos D_∞ con $\prod_{j\in J} D_j$ definiendo el mapeo $\mathcal{I}$ por: para cada $x \in \prod_{j\in J} D_j$, $\mathcal{I}(x) = y$ donde $y \in \prod_{P\in\mathcal{P}} D_P$ y para cada $P \in \mathcal{P}$, $y_P = \pi_P(x)$.

Afirmación 2.5.9. *El mapeo $\mathcal{I} : \prod_{j\in J} D_j \to D_\infty$ es un homeomorfismo.*

Veamos que $\mathcal{I}$ es inyectiva. Sea $x, x' \in \prod_{j\in J} D_j$ tales que $\mathcal{I}(x) = \mathcal{I}(x')$. Si $\mathcal{I}(x) = y$ y $\mathcal{I}(x') = y'$, entonces $y = y'$ y por tanto, $y_P = y'_P$. Así, por definición de $\mathcal{I}$, $y_P =$

$\pi_P(x) = \pi_P(x') = y'_P$, para cada $P \in \mathcal{P}$. En particular, para cada $P \in \mathcal{P}$, tal que $|P| = 1$. Por lo tanto, $x = x'$. Veamos ahora que $\mathcal{I}$ es suprayectiva, sea $y \in D_\infty$. Entonces $\pi_P(y) \in D_P$ y $y_P = g_P^Q(y_Q)$, para cada $P, Q \in \mathcal{P}$ con $P \leq Q$. Consideremos $x \in \prod_{j\in J} D_j$, tal que $\pi_{\{j\}}(x) = \pi_{\{j\}}(y)$, para cada $j \in J$. Así, $\mathcal{I}(x) = z$ donde $z \in \prod_{P\in\mathcal{P}} D_P$ y para cada $P \in \mathcal{P}$, $z_P = \pi_P(x)$. En particular, para cada $j \in J$, $z_{\{j\}} = \pi_{\{j\}}(x) = \pi_{\{j\}}(y)$, es decir, $z = y$.

Para ver que $\mathcal{I}$ es continua, sea $A \subset D_\infty$ un abierto. Entonces existe un abierto $A_0 \subset \prod_{P\in\mathcal{P}} D_P$, tal que $A = A_0 \cap D_\infty$. Sin perder generalidad, A_0 es un abierto básico en $\prod_{P\in\mathcal{P}} D_P$. Sea $A_0 = A_{P_1} \times \cdots \times A_{P_n} \times \prod_{P\in\mathcal{P}\setminus\{P_1,\ldots,P_n\}}, D_P$, donde $A_{P_j} \subset D_{P_j}$ es un abierto, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Como D_{P_j} es un producto finito, entonces podemos escribir A_{P_j} como un producto finito de abiertos, sea $A_{P_j} = A_{j_1} \times \cdots \times A_{j_{m_j}}$, donde cada A_{j_i} es un abierto en D_{j_i} y $P_j = \{j_1, \ldots, j_{m_j}\}$. Así, $\mathcal{I}^{-1}(A) = \{x \in \prod_{j\in J} D_j : \pi_{P_j}(x) \in A_{P_j}, j \in \{1, \ldots, n\}\} = \{x \in \prod_{j\in J} D_j : \pi_{j_k}(x) \in A_{j_k}, j \in \{1, \ldots, n\}, k \in \{1, \ldots, m_j\}\} = \prod_{k=1}^{m_1} A_{1_k} \times \cdots \times \prod_{k=1}^{m_n} A_{n_k} \times \prod_{j\neq j_k} D_j$. Como $\prod_{k=1}^{m_1} A_{1_k} \times \cdots \times \prod_{k=1}^{m_n} A_{n_k}$ es un producto finito, entonces $\mathcal{I}^{-1}(A)$ es abierto en $\prod_{j\in J} D_j$.

Por último, veamos que $\mathcal{I}$ es una función abierta. Sea $A \subset \prod_{j\in J} D_j$ un subconjunto abierto. Sin perder generalidad podemos suponer que $A = A_{j_1} \times \cdots \times A_{j_n} \times \prod_{j\neq j_i} D_j$, donde $A_{j_i} \subset D_{j_i}$ es un subconjunto abierto. Entonces $\mathcal{I}(A) = \{y \in D_\infty :$ existe $x \in A$ tal que $\pi_P(x) = y_P\} = \{y \in D_\infty : y_{j_i} \in A_{j_i},\ i \in \{1, \ldots, n\}\} = (A_{j_1} \times \cdots \times A_{j_n} \times \prod_{j\in J\setminus\{j_1,\ldots,j_n\}} D_j) \cap D_\infty$. Por lo tanto $I(A)$ es un subconjunto abierto en D_∞.

Con la notación anterior, presentamos a continuación algunos lemas que serán necesarios para mostrar la siguiente caracterización de los espacios determinados por una estructura celular con sistemas inversos:

Un espacio topológico X es determinado por una estructura celular si y solo si X es la imagen perfecta de un espacio topológicamente completo.

Lema 2.5.10. *Sea X un espacio topológico y $(\{D_j\}_{j\in J}, F, f)$ una presentación de X. Para cada $x \in X$ y $P \in \mathcal{P}$, existe un conjunto abierto $U \subset X$ que contiene a x y tal que $F_a \cap U \neq \emptyset$ solo para una cantidad finita de $a \in D_P$.*

Demostración. Sea $x \in X$. Como f es un mapeo perfecto de F sobre X, entonces $f^{-1}(x)$ es un subconjunto compacto de $F \subset \prod_{j\in J} D_t$. Sea $P \in \mathcal{P}$ y $x \in \prod_{j\in J} D_j$, entonces $x \in \pi_P^{-1}(\pi_P(x))$, donde $\pi_P(x) \in D_P$ y $\pi_P(x)$ es abierto pues D_P es discreto. Así, para cada $P \in \mathcal{P}$, los conjuntos $\pi_P^{-1}(a)$, con $a \in D_P$, forman una cubierta de $\prod_{j\in J} D_j$ de conjuntos abiertos y disjuntos. Por la compacidad de $f^{-1}(x)$, tenemos que $f^{-1}(x) \cap \pi_P^{-1}(a) \neq \emptyset$ solo para una cantidad finita de $a \in E_P$. Como $F_a = f(F \cap \pi_P^{-1}(a))$, entonces $x \in F_a$ solo para una cantidad finita de $a \in D_P$, pues si $x \in F_a$ para una cantidad infinita de $a \in D_P$, entonces $f^{-1}(x)$ intersecaría a una cantidad infinita de $\pi_P^{-1}(a)$. Sea $A = \{a \in D_P : x \notin F_a\}$, como D_P es discreto A es abierto y cerrado. Entonces $\pi_P^{-1}(A)$ es un conjunto abierto y cerrado de $\prod_{j\in J} D_j$. Como f es una función cerrada, tenemos que $f(\pi_P^{-1}(A) \cap F)$ es un conjunto cerrado de X. Veamos que $f(\pi_P^{-1}(A) \cap F)$ no contiene a x, por contradicción supongamos que $x \in f(\pi_P^{-1}(A) \cap F)$.

Entonces $f^{-1}(x) \cap \pi_P^{-1}(A) \neq \emptyset$, por lo que existe $a \in A$ tal que $f^{-1}(x) \cap \pi_P^{-1}(a) \neq \emptyset$. Pero como $a \in A$ resulta que $x \notin F_a = f(F \cap \pi_P^{-1}(a))$ y por tanto $f^{-1}(x) \cap \pi_P^{-1}(a) = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Así, $U = X \setminus f(\pi_P^{-1}(A) \cap F)$ es un conjunto abierto de X el cual contiene a x e interseca a una cantidad finita de F_a, con $a \in D_P$. ■

Lema 2.5.11. *Sea X un espacio topológico y $(\{D_j\}_{j \in J}, F, f)$ una presentación de X. Para cada $x \in X$ y cada conjunto abierto $U \subset X$ que contiene a x existe $P \in \mathcal{P}$ tal que cada conjunto F_a que contiene a x, con $a \in D_P$, está contenido en U.*

Demostración. Sea $x \in X$ y sea U una vecindad abierta de x. Como f es un mapeo perfecto $f^{-1}(x)$ es un subconjunto compacto de F el cual está contenido en el abierto $f^{-1}(U) \subset F$. Sea U_0 un subconjunto abierto en $\prod_{t \in J} D_t$ tal que $U_0 \cap F = f^{-1}(U)$. Para cada $v \in f^{-1}(x)$ existe $P_v \in \mathcal{P}$ tal que el conjunto abierto $\pi_{P_v}^{-1}(v)$ de $\prod_{j \in J} D_j$ contiene a v y está contenido en U_0. Por la compacidad de $f^{-1}(x)$ existe una cubierta abierta finita $\mathcal{U} = \{\pi_{P_{x_i}}^{-1}(x_i) : i \in \{1, ..., n\}\}$ de $f^{-1}(x)$ tal que $\bigcup\{\pi_{P_{x_i}}^{-1}(x_i) : \pi_{P_{x_i}}^{-1}(x_i) \in \mathcal{U}\} \subset U_0$, donde $P_{x_i} \in \mathcal{P}$ para $i \in \{1, ..., n\}$. Sea $Q = \bigcup_{i=1}^{n} P_{x_i} \in \mathcal{P}$. Ahora, si $a \in D_Q$ el conjunto $\pi_Q^{-1}(a)$ está contenido en el conjunto abierto y cerrado $\bigcup\{\pi_{P_{x_i}}^{-1}(x_i) : \pi_{P_{x_i}}^{-1}(x_i) \in \mathcal{U}\}$ o en su complemento en $\prod_{j \in J} D_j$. Por lo tanto, si $\pi_Q^{-1}(a) \cap f^{-1}(x) \neq \emptyset$, entonces $\pi_Q^{-1}(a) \cap F \subset f^{-1}(U)$. Por lo tanto, si $x \in F_a$, para algún $a \in D_Q$, entonces $F_a \subset U$. ■

Lema 2.5.12. *Sea X un espacio topológico y $(\{D_j\}_{j \in J}, F, f)$ una presentación de X. Para cada $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$ y $U \subset X$ subconjunto abierto que contiene a x, existe $P \in \mathcal{P}$ tal que para cada sucesión $F_{a_1}, ..., F_{a_n}$ con $a_i \in D_P$, $x \in F_{a_i}$ y $F_{a_{i-1}} \cap F_{a_i} \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Entonces $F_{a_i} \subset U$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$.*

Demostración. Aplicaremos inducción sobre n. Notemos que si $n = 1$ el resultado es cierto por el Lema 2.5.11. Así, supongamos que el resultado es cierto para n, mostraremos que se cumple para $n + 1$. Sea $P \in \mathcal{P}$ tal que cada conjunto F_a que contiene a x, con $a \in D_P$, está contenido en U. Definamos $V = U \setminus \bigcup_{F_a \not\subset U, a \in D_P} F_a$. Entonces $x \in V$ y por el Lema 2.5.10, V es un conjunto abierto en X. Entonces, por el Lema 2.5.11, existe $Q \in \mathcal{P}$ que satisface las hipótesis para n y el conjunto abierto V. Sin perder generalidad podemos suponer que $Q > P$. Sea $F_{a_1}, ..., F_{a_{n+1}}$ con $a_i \in D_Q$, una sucesión tal que $x \in F_{a_1}$ y $F_{a_{i-1}} \cap F_{a_i} \neq \emptyset$ para cada $i \in \{2, ..., n+1\}$. Entonces $F_{a_i} \subset U$ para cada $i \in \{1, ..., n+1\}$. ■

Lema 2.5.13. *Sea X un espacio topológico y $(\{D_j\}_{j \in J}, F, f)$ una presentación de X. Entonces $\mathcal{I}(F) = E_\infty$.*

Demostración. Sea $x \in F$. Entonces $\pi_P(x) \in E_P$, para cada $P \in \mathcal{P}$. Además $g_P^Q(\pi_Q(x)) = \pi_P(x)$ para cada $Q > P$. Por lo tanto, $\mathcal{I}(x) \in E_\infty$. Consideremos ahora $y \in E_\infty$, entonces existe $x \in \prod_{t \in J} D_t$ tal que $y = \mathcal{I}(x)$. Por lo tanto, $\pi_P(x) \in E_P$ para cada $P \in \mathcal{P}$, es decir, $\pi_P^{-1}(\pi_P(x)) \cap F \neq \emptyset$ para cada $P \in \mathcal{P}$. Como F es cerrado, tenemos que $x \in F$. ■

Lema 2.5.14. *Sea X un espacio topológico y $(\{D_j\}_{j \in J}, F, f)$ una presentación de X. Para $x, y \in F$, $(\mathcal{I}(x), \mathcal{I}(y)) \in r$ si y solo si $f(x) = f(y)$.*

Demostración. Notemos que si $(\mathcal{I}(x), \mathcal{I}(y)) \in r$, entonces $F_{\pi_P(x)} \cap F_{\pi_P(y)} \neq \emptyset$ para cada $P \in \mathcal{P}$. Esto es equivalente a $f(F \cap \pi_P^{-1}(\pi_P(x))) \cap f(F \cap \pi_P^{-1}(\pi_P(y))) \neq \emptyset$ para cada $P \in \mathcal{P}$. Por lo tanto, si $f(x) = f(y)$, entonces $(\mathcal{I}(x), \mathcal{I}(y)) \in r$. Supongamos ahora que $(\mathcal{I}(x), \mathcal{I}(y)) \in r$ y que $f(x) \neq f(y)$. Como la propiedad T_2 se preserva bajo mapeos perfectos, Teorema 1.1.4, existe subconjuntos abiertos y disjuntos $U, V \subset X$ tales que $f(x) \in U$ y $f(y) \in V$. Por el Lema 2.5.11, existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $f(F \cap \pi_P^{-1}(\pi_P(x))) \subset U$ y $f(F \cap \pi_P^{-1}(\pi_P(y))) \subset V$, lo cual es una contradicción. ■

Veamos ahora que los espacios que tienen una presentación son determinados por una estructura celular.

Teorema 2.5.15. *Sea X un espacio topológico y $(\{D_j\}_{j\in J}, F, f)$ una presentación de X. Entonces $\{(E_P, r_P), g_P^Q\}_{P,Q\subset J}$ define una estructura celular y el espacio $E^* = E_\infty/r$ es homeomorfo a X.*

Demostración. Sea $\bar{x} \in E_\infty$ y $P \in \mathcal{P}$. Por el Lema 2.5.13, existe $y \in F$ tal que $i(y) = \bar{x}$. Sea

$$U = \bigcup \{F_a : a \in D_P, f(y) \notin F(a)\}.$$

Por el Lema 2.5.10, para $f(y)$ y $P \in \mathcal{P}$ existe un subconjunto abierto $A \subset X$ que contiene a $f(y)$ y tal que $F_a \cap A \neq \emptyset$ solo para una cantidad finita de $a \in D_P$. Entonces $A \subset \bigcup_{i=1}^n F_{a_i}$, luego $A \backslash \{F_{a_i} : f(y) \notin F_{a_i}, i \in \{1, ..., n\}\}$ es un conjunto abierto en X que contiene a $f(y)$ y no interseca a U. Por lo tanto, la cerradura de U no contiene a $f(y)$. Por el Lema 2.5.12, para $f(y)$, $X \backslash Cl_X(U)$ y $n = 3$ existe $Q \in \mathcal{P}$ tal que para cada sucesión $F_{a_1}, F_{a_2}, F_{a_3}$ con $a_i \in D_Q$, $f(y) \in F_{a_i}$ y $F_{a_{i-1}} \cap F_{a_i} \neq \emptyset$, tenemos que $F_{a_i} \subset U$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Sin perder generalidad podemos suponer que $Q \geq P$. Por lo tanto, para $a \in B(x_Q, 2r)$, $f(y) \in F_{g_P^Q(a)}$. Consecuentemente, $g_P^Q(a) \in B(x_P, r_P)$. Esto significa que, para cada $P \in \mathcal{P}$, existe $Q \in \mathcal{P}$ con $Q \geq P$ tal que $g_P^Q(B(x_Q, 2r_Q)) \subset B(x_P, r_P)$. Así, se satisface la condición 1 de la Definición 2.5.1 de estrutura celular. Para mostrar la condición 2, sea $\bar{x} \in E_\infty$ y $P \in \mathcal{P}$. Entonces, por el Lema 2.5.13, existe $y \in F$ tal que $i(y) = \bar{x}$. Por el Lema 2.5.10, para $f(y)$ y $P \in \mathcal{P}$ existe un subconjunto abierto $U \subset X$ que contiene a $f(y)$ y tal que $F_a \cap U \neq \emptyset$ solo para una cantidad finita de $a \in D_P$. Por el Lema 2.5.12, para $f(y)$, U y $n = 2$ existe $Q \in \mathcal{P}$ tal que para cada sucesión F_{a_1}, F_{a_2} con $a_i \in D_Q$, $f(y) \in F_{a_i}$ y $F_{a_1} \cap F_{a_2} \neq \emptyset$, tenemos que $F_{a_i} \subset U$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Por lo tanto, $f(y) \in F_{g_P^Q(a)}$ para $a \in B(x_Q, r_Q)$. Luego, $F_{g_P^Q(a)} \cap U \neq \emptyset$. Consecuentemente el conjunto $g_P^Q(B(x_Q, r_Q))$ es finito. Por lo tanto para cada hilo $\bar{x}$ y para cada $P \in \mathcal{P}$, existe $Q \in \mathcal{P}$ con $Q \geq P$ tal que $g_P^Q(B(x_Q, r_Q))$ es finito. Concluimos así, que $\{(E_P, r_P), g_P^Q\}_{P,Q\subset J}$ define una estructura celular. Como $E_\infty = i(F)$, por el Lema 2.5.13 e $\mathcal{I}$ es un homeomorfismo, E_∞ es homeomorfo a F. Además la relación r definida en E_∞ es identificada con la relación R en F definida por x y y en F están relacionados si $f(x) = f(y)$. Notemos que como $f : F \to X$ es suprayectiva entonces $F/R = f(F) = X$. Por el Lema 2.5.14, tenemos que E_∞/r es homeomorfo a $f(F) = X$

y como las funciones $\pi : E_\infty \to E^*$ y f son mapeos cociente, entonces E^* y X son homeomorfos. ■

Probemos, ahora sí, la caracterización de los espacios determinados por una estructura celular con sistemas inversos.

Teorema 2.5.16. *Un espacio topológico X es determinado por una estructura celular si y solo si X es la imagen perfecta de un espacio topológicamente completo.*

Demostración. Supongamos que X es la imagen perfecta de un espacio topológicamente completo. Entonces, por la Proposición 2.5.8, X tiene una presentación y por el Teorema 2.5.15, X es determinado por una estructura celular.

Supongamos ahora que X es determinado por una estructura celular $\{(G_j, r_j), g_i^j\}_{i,j\in J}$, entonces X es homeomorfo a G^*. Pero como $\pi : G_\infty \to \mathrm{G}^*$ es un mapeo perfecto y G_∞ es un subconjunto cerrado de $\prod_{j\in J} G_j$, tenemos que G^* es la imagen perfecta de un subconjunto cerrado de un producto de espacios discretos. Así, $(\{G_j\}_{j\in J}, G_\infty, \pi)$ es una presentación de G^* y por lo tanto de X. Luego, X es la imagen perfecta de un espacio topológicamente completo. ■

Capítulo 3

G-estructura celular

En este capítulo definimos lo que será una estructura celular generalizada a partir de la definición de estructura celular dada por E. Tymchatyn y W. Debski. Mostraremos que se siguen cumpliendo algunas de las propiedades de los espacios determinados por una estructura celular vistas en el capítulo 2. Además, presentamos ejemplos de espacios que son determinados por una estructura celular generalizada, pero no por una estructura celular.

3.1. G-estructura celular

Iniciamos esta sección con la definición de estructura celular generalizada.

Definición 3.1.1. Una ***estructura celular generalizada*** es una sucesión inversa de gráficas $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ que satisface las siguientes dos condiciones:

1. Para cada hilo $\bar{x} \in G_\infty$ y cada $i \in \mathbb{N}$ existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $j \geq i$ y además $g_i^j(B(x_j, 2r_j)) \subset B(x_i, r_i)$.

2. Para cada hilo $\bar{x} \in G_\infty$ y cada $i \in \mathbb{N}$ existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $j \geq i$ y $g_i^j(B(x_j, r_j))$ es numerable.

Para abreviar diremos simplemente que $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una g-estructura celular.

Observemos que los cambios que estamos haciendo, con respecto a la estructura celular de la Definición 2.1.1, son: la condición 2, pues en una estructura celular se pide que, para cada hilo $\bar{x} \in G_\infty$ y cada $i \in \mathbb{N}$, el conjunto $g_i^j(B(x_j, r_j))$ sea finito para algún $j \geq i$ y en nuestro caso pedimos que sea numerable; y no pedimos que los conjuntos G_i tengan asociada una topología, a diferencia de la Definición 2.1.1, donde se pide que los conjuntos G_i sean discretos.

Veamos el siguiente ejemplo de una g-estructura celular.

Ejemplo 3.1.2. *Consideremos, para cada $i \in \mathbb{N}$, el conjunto $G_i = \mathbb{N}$ y definamos la relación $r_i = \{(n,n) : n \in G_i\} \cup \{(2^{i-1}n + k, 2^{i-1}m + k) : n, m \in \mathbb{N}, 0 \leq k < 2^{i-1}\}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea g_i^i la función identidad y $g_i^{i+1} : G_{i+1} \to G_i$ definida por $g_i^{i+1}(n) = n$.*

Notemos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, la relación r_i es reflexiva y simétrica. Así, para cada $i \in \mathbb{N}$, (G_i, r_i) es una gráfica. Además, por definición de las funciones g_i^i y g_i^{i+1}, tenemos que $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ satisface las dos primeras condiciones de sucesión inversa. Veamos que se satisface la tercera condición de sucesión inversa. Sea $(2^{i-1}n+k, 2^{i-1}m+k) \in r_{i+1}$, entonces $(g_i^{i+1}(n), g_i^{i+1}(m)) = (2^{i-1}n+k, 2^{i-1}m+k) \in r_i$. Así, $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ define una sucesión inversa de gráficas. Notemos que $B(x_j, r_j) = B(x_j, 2r_j)$ para cada $x_j \in G_j$ y $j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto se satisface la condición 1 de la definición de g-estructura celular. Además, como cada G_i es numerable y $B(x_j, r_j) \subset G_j$, se tiene que $B(x_j, r_j)$ es numerable para cada $x_j \in G_j$ con $j \in \mathbb{N}$. Concluimos que $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una g-estructura celular.

Observación 3.1.3. *Observemos que en la demostración de que r es una relación de equivalencia no se utiliza la condición 2 de la Definición 2.1.1 de estructura celular, ver [7, Lema 3.1]. Por lo tanto, dada una g-estructura celular $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ la relación r sigue siendo una relación de equivalencia.*

Definición 3.1.4. Sea $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una g-estructura celular. Si cada conjunto G_i tiene asociada una topología τ_i, definimos $\mathbf{G}^*$ como el espacio cociente G_∞/r con la topología cociente, donde G_∞ tiene la topología inicial con respecto a la inclusión $\iota : G_\infty \to \prod_{i=1}^{\infty} G_i$.

Denotaremos por $\pi : G_\infty \to \mathrm{G}^*$ al mapeo cociente.

Definición 3.1.5. Un espacio topológico X es ***determinado por la g-estructura celular*** $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ si es homeomorfo al espacio cociente G^*.

Veamos un ejemplo de un espacio determinado por una g-estructura celular.

Lema 3.1.6. *El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es determinado por una g-estructura celular.*

Demostración. Consideremos la g-estructura celular $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ definida en el ejemplo 3.1.2 y consideremos G_i con la topología discreta para cada $i \in \mathbb{N}$.

El subespacio $G_\infty \subset \prod_{i\in\mathbb{N}} G_i$ es el conjunto de los números naturales con la topología discreta, pues si $x \in G_1$ entonces $g_1^{-1}(x) = \{(x, x, x, ...)\} \subset G_\infty$, por lo tanto cada $x \in G_1$ determina un único punto $(x, x, x, ...)$ en G_∞ y además, $\{(x, x, x, ...)\}$ es un subconjunto abierto de G_∞. Mostraremos que $\pi : G_\infty \to \mathrm{G}^*$ es un homeomorfismo. Como π es un mapeo cociente, π es continua y suprayectiva. Veamos que π es inyectiva. Sean $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, ...)$ y $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, ...)$ puntos distintos en G_∞, entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \neq y_i$. Si $(x_i, y_i) \notin r_i$, $\pi(\bar{x}) \neq \pi(\bar{y})$. Así, supongamos que $(x_i, y_i) \in r_i$, entonces $x_i = 2^{i-1}n + k$ y $y_i = 2^{i-1}m + k$. Sin perder generalidad supongamos que $n > m$. Así, $x_{i+n-m} = 2^{i-1}n + k$ y $y_{i+n-m} = 2^{i-1}m + k$. Pero $r_{i+n-m} = \{(2^{i+n-m-1}n +$

$k, 2^{i+n-m-1}m + k) : m, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k < 2^{i+n-m-1}\}$. Como $n - m > 0$, $i + n - m - 1 \neq i - 1$. Luego, $(x_{i+n-m}, y_{i+n-m}) \notin r_{i+n-m}$, de modo que $\pi(\bar{x}) \neq \pi(\bar{y})$. Por lo tanto, π es inyectiva. Ahora, como G_∞ tiene la topología discreta, para cualquier subconjunto $\pi(A) \subset \mathrm{G}^*$ con $A \subset G_\infty$ abierto, se tiene que $\pi^{-1}(\pi(A))$ es un abierto en G_∞. Así, $\pi(A) \subset \mathrm{G}^*$ es abierto para cualquier subconjunto $A \subset G_\infty$ abierto, es decir, π es abierta. Concluimos que π es un homeomorfismo y por lo tanto, G^* es homeomorfo $\mathbb{N}$ con la topología discreta. ■

Veamos ahora un ejemplo en el que las gráficas G_i no necesariamente tienen la topología discreta.

Ejemplo 3.1.7. *Para cada $i \in \mathbb{N}$, consideremos $G_i = [0,1]$ con la topología usual y definamos la relación $r_i = \{(x,x) : x \in [0,1]\} \cup \{(x, 1-x), (1-x, x) : x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)\} \cup \{\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(1, \frac{1}{2}\right)\}$. Sea g_i^i la función identidad para cada $i \in \mathbb{N}$ y*

$$g_i^{i+1}(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 1 - x & si \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Ver figura 3.1. Entonces G^* es homeomorfo a S^1.

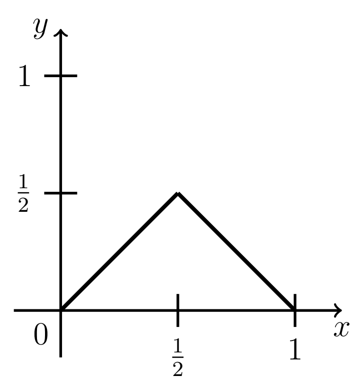

Figura 3.1: Gráfica de la función g_i^{i+1}.

Por definición de r_i tenemos que la relación r_i es simétrica y reflexiva, por lo que (G_i, r_i) es una gráfica para cada $i \in \mathbb{N}$. Además, por definición de las funciones g_i^i y g_i^{i+1} se satisfacen las condiciones 1 y 2 de sucesión inversa.

Sea $i \in \mathbb{N}$ fijo y $x, y \in G_{i+1}$, tales que $(x, y) \in r_{i+1}$. Entonces se tienen cuatro casos: $y = x$, $y = 1 - x$ con $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $x = 0$ y $y = \frac{1}{2}$ y $x = 1$ y $y = \frac{1}{2}$. Consideremos el caso $x = y$, entonces $g_i^{i+1}(x) = g_i^{i+1}(y)$ y por lo tanto $(g_i^{i+1}(x), g_i^{i+1}(y)) \in r_i$. Supongamos ahora que $y = 1 - x$ con $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, entonces $g_i^{i+1}(x) = x$ y $g_i^{i+1}(y) = 1 - y$, así tenemos que $(g_i^{i+1}(x), g_i^{i+1}(y)) = (x, x) \in r_i$. Para el caso $x = 0$ y $y = \frac{1}{2}$, tenemos $g_i^{i+1}(0) = 0$

y $g_i^{i+1}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, así $(g_i^{i+1}(x), g_i^{i+1}(y)) \in r_i$. Por último, si $x = 1$ y $y = \frac{1}{2}$, entonces $g_i^{i+1}(1) = 0$ y $g_i^{i+1}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, así tenemos que $(g_i^{i+1}(x), g_i^{i+1}(y)) = \left(0, \frac{1}{2}\right) \in r_i$. Por lo tanto, se satisface la condición 3 de la definición de sucesión inversa, luego $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión inversa de gráficas.

Considerando que cada G_i tiene asignada la topología usual del intervalo $[0, 1]$, veamos que G_∞ es homeomorfo al intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Definamos $f : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to G_\infty$ como $f(x) = (x, x, x, ...)$. Es claro que f es inyectiva, pues si $x, y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ son tales que $x \neq y$, entonces $(x, x, x, ...) \neq (y, y, y, ...)$. Para ver que f es suprayectiva, sea $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, ...) \in G_\infty$, si $x_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces x_{n+1} no está definido, ver figura 3.1. Así $x_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y por definición de la función g_n^{n+1}, $x_{n+1} = x_n$. Luego, $\bar{x} = (x_1, x_1, x_1, ...)$. Por lo tanto, $f(x_1) = \bar{x}$, es decir, f es suprayectiva. Veamos que f es continua, sea $A = \left(A_1 \times \cdots \times A_n \times \prod_{i\in\mathbb{N}}[0, 1]\right) \cap G_\infty$ un abierto básico en G_∞ donde $A_i \subset [0, 1]$ es un abierto, para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces $f^{-1}(A) = \bigcap_{i=1}^n A_i$ y por lo tanto, $f^{-1}(A)$ es abierto, es decir, f es continua. Para ver que es abierta, sea $A \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ un subconjunto abierto. Entonces $f(A) = \left\{(x, x, x, ...) : x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right\} = \left(\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \prod_{i\in\mathbb{N}}[0, 1]\right) \cap G_\infty$. Por lo tanto, $f(A)$ es abierto en G_∞. Concluimos que $\varprojlim\{G_i, g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es homeomorfo al intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ con su topología usual.

Así, si $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, ...)$ es un punto en G_∞, entonces $x_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Mostraremos que se satisface la condición 1 de g-estructura celular, sea $i \in \mathbb{N}$. Consideremos $\bar{x} \in G_\infty$ tal que $x_i \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, entonces $B(x_i, r_i) = \{x_i, 1 - x_i\}$ y $B(x_i, 2r_i) = \{x_i, 1 - x_i\}$. Por lo tanto, $B(x_i, 2r_i) = B(x_i, r_i)$ y como para cada $x \in B(x_i, r_i)$ se satisface $(g_{i-1}^i(x), x_i) \in r_{i-1}$, entonces $g_{i-1}^i(B(x, 2r_i)) \subset B(x, r_{i-1})$. Ahora, si $\bar{x} \in G_\infty$ es tal que $x_i = \frac{1}{2}$, entonces $B(x_i, r_i) = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ y $B(x_i, 2r_i) = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Esto implica que $g_{i-1}^i(B(x_i, 2r_i)) = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$, de modo que $g_{i-1}^i(B(x, 2r_i)) \subset B(x, r_{i-1})$. Por último, consideremos $\bar{x} \in G_\infty$ tal que $x_i = 0$, entonces $B(x_i, r_i) = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ y $B(x_i, 2r_i) = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Luego $g_{i-1}^i(B(x_i, 2r_i)) = \left\{0, \frac{1}{2}\right\} = B(x_i, r_{i-1})$. Concluimos así que, se satisface la condición 1 de g-estructura celular. La condición 2 se sigue del hecho de que $B(x, r_i)$ es finito para cada $i \in \mathbb{N}$ y para cada $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Concluimos así que $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ define una g-estructura celular.

Considerando la relación r en G_∞, tenemos que si $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ entonces $\bar{x} = (x, x, x, ...)$ solo está relacionado consigo mismo y los puntos $\bar{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ...\right)$ y $\bar{0} = (0, 0, 0, ...)$ están relacionados, por lo tanto se tiene que en G_∞ la única relación no trivial es entre $\bar{0}$ y $\bar{\frac{1}{2}}$. Así, G* es homeomorfo a S^1.

Observación 3.1.8. *En el ejemplo 3.1.2 las funciones de ligadura son iguales a la función identidad. Pero, dada una sucesión de gráficas $\{(G_i, r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$, definiendo las funciones de ligadura g_i^{i+1} como la función identidad, no siempre se tendrá que $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ defina una g-estructura celular. En el ejemplo 3.1.7 consideramos g_i^{i+1} la función identidad y sea $\bar{x} = (0, 0, 0, ...) \in G_\infty$. Observemos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $B\left(0, 2r_i\right) = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Entonces, para cada $j \geq i$, $g_i^j(B(0, 2r_j)) = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Así, no existe $j \geq i$ tal que $g_i^j(B(0, 2r_j)) \subset B(0, r_i) = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$, es decir, no se satisface la condición 1 de la Definición 3.1.1.*

La siguiente proposición se sigue de las definiciones de estructura celular y g-estructura celular.

Proposición 3.1.9. *Si X es un espacio determinado por una estructura celular, entonces X es determinado por una g-estructura celular.*

Demostración. Sea X un espacio determinado por la estructura celular $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ (Definición 2.1.1). Entonces, para cada $\bar{x} \in G_\infty$ e $i \in \mathbb{N}$, existe $j \geq i$ tal que $g_i^j(B(x_i, r_i))$ es finito y por lo tanto, numerable. Así, $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ define una g-estructura celular. Además, cada G_i tiene asociada la topología discreta y como X es homeomorfo al espacio cociente G*, tenemos que X es determinado por una g-estructura celular. ■

En los ejemplos anteriores se satisface la condición 2 de estructura celular (Definición 2.1.1), veamos ahora un ejemplo de un espacio determinado por una g-estructura celular, la cual no es estructura celular pues no satisface la condición 2 de la Definición 2.1.1.

Sea $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una colección disjunta de círculos de radio 1, con la topología que heredan de $\mathbb{R}^2$. Sea $p_k \in S_k$ un punto fijo en cada una de las circunferencias. En la unión disjunta de los círculos, que denotaremos por $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} S_k$, consideremos la topología usual donde un conjunto A es abierto si $h_k^{-1}(A)$ es abierto para cada $k \in \mathbb{N}$ y $h : S_k \to \sqcup_{k\in\mathbb{N}} S_k$ son las inclusiones. Consideremos en $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} S_k$ la relación de equivalencia dada por $R = \{(x,x) : x \in S_k\} \cup \{(p_i, p_j) : \forall i, j\}$ y sea $q : \sqcup_{k\in\mathbb{N}} S_k \to \sqcup_{k\in\mathbb{N}} S_k/R$ la función cociente, la cual identifica a todos los p_k como un solo punto x_0. Si tenemos una colección finita de 4 círculos la representación del espacio cociente es como se muestra en la figura 3.2. El espacio cociente $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} S_k/R$ denotado comúnmente por $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} S_k$ es llamado el coproducto reducido, ver [1, Definición 2.6.1].

Ejemplo 3.1.10. *El espacio $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} S_k$ no es completamente metrizable, pero si es determinado por una g-estructura celular.*

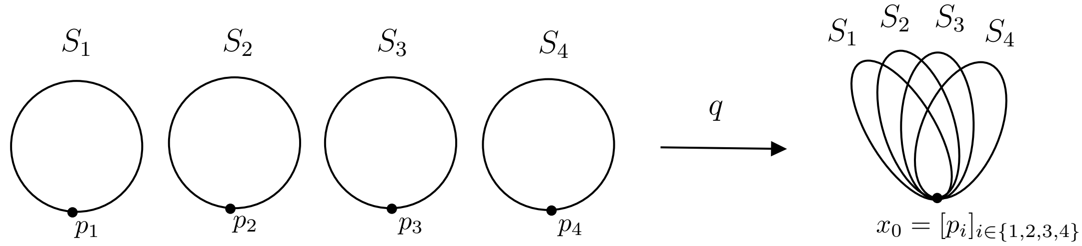

Figura 3.2: Representación sobre el plano de la identificación que hace la función q, considerando únicamente 4 espacios.

Sea $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} S_k$, veamos primero que $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} S_k$ es un espacio no metrizable. Supongamos que existe una base de vecindades numerable $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en el punto x_0. Como $q^{-1}(u_k)$

es un abierto en $\sqcup_{k\in\mathbb{N}}S_k$, entonces $q^{-1}(u_k)\cap S_k$ es un abierto en S_k. Entonces para $k\in\mathbb{N}$ existe un $r_k>0$ tal que $B(p_k,r_k)\subset q^{-1}(u_k)\cap S_k$. Para $k\in\mathbb{N}$, sea $\varepsilon_k=\frac{r_k}{2}$. Notemos que $q^{-1}\left(q\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}B(p_k,\varepsilon_k)\right)\right)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}B(p_k,\varepsilon_k)$ y por definición de la topología cociente, $q\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}B(p_k,\varepsilon_k)\right)$ es un abierto en $\bigvee_{k\in\mathbb{N}}S_k$, el cual no contiene a ninguno de los elementos de la base $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, pues si $u_i\subset q\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}B(p_k,\varepsilon_k)\right)$ se tiene que $q^{-1}(u_i)\subset q^{-1}\left(q\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}B(p_k,\varepsilon_k)\right)\right)$. Por lo tanto $q^{-1}(u_i)\cap S_i\subset B(p_i,\varepsilon_i)=B(p_i,\frac{r_i}{2})$, lo cual es una contradicción, pues $B(p_i,\frac{r_i}{2})\subsetneq B(p_i,r_i)\subset q^{-1}(u_i)\cap S_i$. Concluimos que x_0 no tiene una base de vecindades numerable, es decir, X no es primero numerable y como todo espacio métrico es primero numerable, entonces X no es un espacio metrizable.

Además, $\bigvee_{k\in\mathbb{N}}S_k$ no es secuencialmente compacto y tampoco compacto. Ya que si consideramos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de puntos antipodales a x_0, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene una subsucesión convergente y por lo tanto X no es secuencialmente compacto. Para ver que X no es compacto consideremos la cubierta abierta $\{S_k\backslash\{x_0\}\}_{k\in\mathbb{N}}\cup\{A\}$, donde A es un abierto que contiene a x_0 pero que no contiene a ninguna S_k, entonces esta cubierta no tiene una subcubierta abierta finita.

Construiremos ahora la g-estructura celular que determina el espacio $\bigvee_{k\in\mathbb{N}}S_k$, para lo cual, definamos los siguientes conjuntos:

$G_1=\{S_k:k\in\mathbb{N}\}$, $G_2=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left\{\left\{e^{2\pi is}\in S_k:s\in\left[\frac{a}{2},\frac{a+1}{2}\right]\right\}:a=0,1\right\}$ y en general para cada $n\in\mathbb{N}$, $G_n=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left\{\left\{e^{2\pi is}\in S_k:s\in\left[\frac{a}{2^{n-1}},\frac{a+1}{2^{n-1}}\right]\right\}:a=0,...,2^{n-1}-1\right\}$.

En cada G_i consideremos la topología discreta. Para cada $i\in\mathbb{N}$, definamos la relación r_i en G_i como $r_i=\{(A,B)\in G_i\times G_i:A\cap B\neq\emptyset\}$. Notemos que cada r_i es simétrica y reflexiva, entonces $\{(G_i,r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de gráficas. Definamos además, las funciones $g_i^{i+1}:G_{i+1}\to G_i$ tales que envíen cada subconjunto A en G_{i+1} en el subconjunto en G_i que lo contiene, esto es, $g_i^{i+1}(A)\supset A$ y definamos g_i^i la función identidad para cada $i\in\mathbb{N}$.

Veamos que $\{(G_i,r_i),g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ satisface las tres condiciones de la definición de sucesión inversa de gráficas. Por la definición de las funciones g_i^i y g_i^{i+1} se satisfacen las dos primeras condiciones. Para verificar la condición 3 sea $(A,B)\in r_{i+1}$, entonces $A\cap B\neq\emptyset$. Como $A\subset g_i^{i+1}(A)$ y $B\subset g_i^{i+1}(B)$, tenemos que $g_i^{i+1}(A)\cap g_i^{i+1}(B)\neq\emptyset$. Por lo tanto $(g_i^{i+1}(A),g_i^{i+1}(B))\in r_i$. Así, $\{(G_i,r_i),g_i^{i+1}\}$ define una sucesión inversa de gráficas.

Mostraremos ahora que se satisface la condición 1 de g-estructura celular. Tomemos $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3,...)$ en G_∞ y fijemos un $i\in\mathbb{N}$. Sea $A\in B(x_{i+1},2r_{i+1})$, entonces existe $B\in B(x_{i+1},r_{i+1})$ tal que $A\cap B\neq\emptyset$ y $B\cap x_{i+1}\neq\emptyset$, por definición de las funciones g_i^{i+1} tenemos que $g_i^{i+1}(A)=g_i^{i+1}(B)$ ó $g_i^{i+1}(B)=g_i^{i+1}(x_{i+1})$. Si $g_i^{i+1}(A)=g_i^{i+1}(B)$, entonces $g_i^{i+1}(A)\cap g_i^{i+1}(x_{i+1})\neq\emptyset$, por lo tanto $g_i^{i+1}(A)\in B(x_i,r_i)$. Si $g_i^{i+1}(B)=g_i^{i+1}(x_{i+1})$, entonces $g_i^{i+1}(A)\cap g_i^{i+1}(x_{i+1})\neq\emptyset$, por lo tanto $g_i^{i+1}(A)\in B(x_i,r_i)$. Concluimos que $g_i^{i+1}(B(x_{i+1},2r_{i+1}))\subset B(x_i,r_i)$.

Para verificar que la condición 2 de la Definición 2.1.1 de estructura celular no se satisface, consideremos $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3,...)\in G_\infty$ tal que $x_0\in x_i$, para cada $i\in\mathbb{N}$, recordemos que cada $x_i\in G_i$ es un intervalo. Para cada $i\in\mathbb{N}$ fijo y S_k, con $k\in\mathbb{N}$, existe al menos un $y_i^k\subset S_k$ que contiene a x_0 y tal que $y_i^k\in G_i$. Como estamos considerando una cantidad numerable de S_k, entonces $B(x_i, r_i)$ es numerable para cada $i \in \mathbb{N}$. Además para $i > 2$, si $y_i, z_i \in B(x_i, r_i)$ son tales que $y_i \neq z_i$, entonces $g^i_{i-1}(y_i) \neq g^i_{i-1}(z_i)$. Por lo tanto $g^i_{i-1}(B(x_i, r_i))$ sigue siendo numerable, es decir, se satisface la condición 2 de g-estructura celular pero no la condición 2 de estructura celular.

Mostraremos ahora que G* es homeomorfo a $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} S_k$, es decir, $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} S_k$ está determinado por g-estructura celular $\{(G_i, r_i), g^{i+1}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Definamos $\varphi : \mathrm{G}^* \to \bigvee_{k\in\mathbb{N}} S_k$ por $\varphi(\pi(\bar{x})) = p$, donde $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$ y $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in G_\infty$.

$$\begin{tikzcd}
G_\infty \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi\circ\pi"'] & & \mathrm{G}^* \arrow[dl, "\varphi"] \\
& \bigvee_{k\in\mathbb{N}} S_k &
\end{tikzcd}$$

Veamos que φ está bien definida. Sea $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$ y $q \in \bigvee_{k\in\mathbb{N}} S_k \backslash \{p\}$. Si $p, q \in S_k$, como S_k tiene la topología que hereda de $\mathbb{R}^2$, $d(x, y) > 0$. Sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{j-1}} < d(p, q)$. Como la longitud del intervalo x_j es $\frac{1}{2^{j-1}}$, $q \notin x_j$, entonces $q \notin \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$. Si $q \in S_m$ y $p \in S_k$ con $m \neq k$, entonces $q \notin x_1$. Por lo tanto, $q \notin \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$. Lo anterior implica que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i = \{p\}$. Para ver que φ es inyectiva, sean $\bar{x}, \bar{y} \in G_\infty$ tales que $\bar{x} \nsim \bar{y}$, entonces existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \cap y_i = \emptyset$. Esto implica que si $\{q\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} y_i$, entonces $q \notin x_i$ y por lo tanto $q \notin \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$. Por lo tanto $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} y_i \neq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$. De esto tenemos que $\varphi(\pi(\bar{x})) \neq \varphi(\pi(\bar{y}))$, es decir, φ es inyectiva.

Veamos que φ es suprayectiva. Sean $p \in \bigvee_{k\in\mathbb{N}} S_k \backslash \{x_0\}$ y $A_i = \{F \in G_i : p \in F\}$. Consideremos la sucesión inversa de gráficas $\{(A_i, r_i|_{A_i}), g^{i+1}_i|_{A_i}\}$ y $A_\infty = \varprojlim \{(A_i, r_i|_{A_i}), g^{i+1}_i|_{A_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Como, para cada $i \in \mathbb{N}$ y cada $a \in S_i$, a pertenece a lo más a dos intervalos en G_i, tenemos que A_i es finito y no vacío. Por lo tanto, $g^j_i(A_j)$ es finito y no vacío lo cual implica que $A_\infty \neq \emptyset$. Sea $\bar{x} \in A_\infty$, entonces $p \in x_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, por lo que $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$, de donde se sigue que $p = \varphi(\pi(\bar{x}))$. En el caso $p = x_0$, basta tomar $\bar{x}$ tal que $x_i = \left\{e^{2\pi i s} : s \in \left[0, \frac{1}{2^{i-1}}\right]\right\}$, el cual satisface que $\varphi(\pi(\bar{x})) = x_0$.

Para mostrar que φ es continua probaremos la continuidad de $\varphi \circ \pi$ y como π es continua tendremos la continuidad de φ. Sea A un subconjunto abierto y no vacío en $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} S_k$. Por definición de φ y π, tenemos que $(\varphi \circ \pi)^{-1}(A) = \{\bar{x} \in G_\infty : (\varphi \circ \pi)(\bar{x}) \in A\} = \{\bar{x} \in G_\infty : \pi(\bar{x}) \in \varphi^{-1}(A)\} = \{\bar{x} \in G_\infty : (\bar{x}, \bar{y}) \in r \text{ y } \bigcap_{i\in\mathbb{N}} y_i \subset A\}$.

Sea $\bar{z} \in (\varphi \circ \pi)^{-1}(A)$, entonces existe $\bar{w} \in G_\infty$ tal que $(\bar{z}, \bar{w}) \in r$ y $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} w_i \subset A$. Sea $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} w_i = \{q\}$. Como A es abierto y no vacío en X, entonces existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $A \cap S_k \neq \emptyset$. Luego, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $B\left(q, \frac{1}{2^r}\right) \subset S_k$ y $B\left(q, \frac{1}{2^r}\right) \subset A$. Como $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} w_i \subset w_{r+2}$ tenemos que $w_{r+2} \subset B\left(q, \frac{1}{2^r}\right)$. Además, $w_{r+2} \cap z_{r+2} \neq \emptyset$ y la longitud de w_{r+2} es $\frac{1}{2^{r+1}}$, entonces $z_{r+2} \subset B\left(q, \frac{1}{2^r}\right)$. Pero $g^{-1}_{r+2}(z_{r+2}) \subset (\varphi \circ \pi)^{-1}(z_{r+2}) \subset$

$(\varphi\circ\pi)^{-1}\left(B\left(q,\frac{1}{2^r}\right)\right)\subset(\varphi\circ\pi)^{-1}(A)$ y $\bar{z}\in g_{r+2}^{-1}(z_{r+2})$. Por lo tanto, $\bar{z}\in g_{r+2}^{-1}(z_{r+2})\subset(\varphi\circ\pi)^{-1}(A)$, es decir, $(\varphi\circ\pi)^{-1}(A)$ es un conjunto abierto.

Definamos la función $\phi:\bigvee_{k\in\mathbb{N}}S_k\to \mathrm{G}^*$ por $\phi(p)=\pi(\bar{x})$ tal que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}x_i=\{p\}$. Veamos que ϕ es la función inversa de φ. Sea $p\in\bigvee_{k\in\mathbb{N}}S_k$, por definición de ϕ, $\phi(p)=\pi(\bar{x})$ donde $\bar{x}\in G_\infty$ y $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}x_i=\{p\}$. Por definición de φ, $\varphi(\pi(\bar{x}))=q$ donde $q\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}x_i$. Como $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}x_i=\{p\}$, resulta que $p=q$. Consideremos ahora, $\pi(\bar{x})\in\mathrm{G}^*$ donde $\bar{x}\in G_\infty$. Por definición de φ, $\varphi(\pi(\bar{x}))=p$, donde $p\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}x_i$. Por lo tanto, para cada $i\in\mathbb{N}$, $p\in x_i$. Ahora, por definición de ϕ, $\phi(p)=\pi(\bar{y})$ donde $\bar{y}\in G_\infty$ y $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}y_i=\{p\}$. Luego, para cada $i\in\mathbb{N}$, $p\in y_i$. Así, para cada $i\in\mathbb{N}$, $x_i\cap y_i\neq\emptyset$. Por lo tanto, $(\bar{y},\bar{x})\in r$, es decir, $\pi(\bar{x})=\pi(\bar{y})$.

Para mostrar que φ es un homeomorfismo probaremos que ϕ es continua. Sea A un subconjunto abierto en G^*. Mostraremos que el conjunto $\phi^{-1}(A)=\{p\in X:\{p\}=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}x_i,\ \text{para algún } \bar{x}\in\pi^{-1}(A)\}$ es abierto en $\bigvee_{k\in\mathbb{N}}S_k$.

$$\begin{tikzcd}
G_\infty \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{G}^* \\
 & \bigvee_{k\in\mathbb{N}} S_k \arrow[u, "\phi"']
\end{tikzcd}$$

Sea $p\in\phi^{-1}(A)$, consideremos $B=\{\bar{x}\in G_\infty:\bigcap_{i\in\mathbb{N}}x_i=\{p\}\}$. Como $B\subset\pi^{-1}(A)$, el cual es un abierto, entonces para cada $\bar{x}\in B$ existe $g_i^{-1}(x_i)$ tal que $\bar{x}\in g_i^{-1}(x_i)\subset\pi^{-1}(A)$, luego $p\in x_i$ y $\pi(g_i^{-1}(x_i))\subset A$.

Veamos primero que $\phi(x_i)=\pi(g_i^{-1}(x_i))$. Sea $\pi(\bar{z})\in\phi(x_i)$, entonces $\bigcap_{j\in\mathbb{N}}z_j\subset x_i$ y existe un $\bar{w}\in\pi(\bar{z})$ tal que $w_i=x_i$. Luego $\bar{w}\in g_i^{-1}(x_i)$, lo cual implica que $\pi(\bar{w})\in\pi(g_i^{-1}(x_i))$. Como $\pi(\bar{w})=\pi(\bar{z})$, resulta que $\pi(\bar{z})\in\pi(g_i^{-1}(x_i))$. Consideremos ahora $\pi(\bar{z})\in\pi(g_i^{-1}(x_i))$, entonces existe $\bar{w}\in\pi(\bar{z})$ tal que $\bar{w}\in g_i^{-1}(x_i)$. Luego $x_i=w_i$ y como $\bigcap_{j\in\mathbb{N}}w_j\subset w_i$, tenemos que $\{w\}=\bigcap_{j\in\mathbb{N}}w_j\subset x_i$. Por lo tanto $\phi(w)\in\phi(x_i)$, lo cual implica que $\pi(\bar{z})\in\phi(x_i)$.

Supongamos primero que $p\neq x_0$, entonces $p\in S_k$ para algún $k\in\mathbb{N}$. Como cada punto de S_k pertenece a lo más a dos intervalos en G_i, entonces existen a lo más dos puntos en B. Consideremos primero el caso en que solo existe un punto $\bar{y}\in G_\infty$ tal que $\bigcap_{j\in\mathbb{N}}y_j=\{p\}$. Dado que $x_i\in G_i$, podemos suponer que $x_i=\left\{e^{2\pi is}:s\in\left[\frac{a}{2^{i-1}},\frac{a+1}{2^{i-1}}\right]\right\}$. Como $p\in x_i$, entonces $p\in\left\{e^{2\pi is}:s\in\left(\frac{a}{2^{i-1}},\frac{a+1}{2^{i-1}}\right)\right\}$, además $\phi\left(\left\{e^{2\pi is}:s\in\left(\frac{a}{2^{i-1}},\frac{a+1}{2^{i-1}}\right)\right\}\right)\subset\phi(x_i)$, entonces $\phi\left(\left\{e^{2\pi is}:s\in\left(\frac{a}{2^{i-1}},\frac{a+1}{2^{i-1}}\right)\right\}\right)\subset\pi(g_i^{-1}(x_i))\subset A$. Por lo tanto, $p\in\left\{e^{2\pi is}:s\in\left(\frac{a}{2^{i-1}},\frac{a+1}{2^{i-1}}\right)\right\}\subset\phi^{-1}(A)$.

Si existen dos puntos $\bar{x}$ y $\bar{y}$ en B tales que $\bigcap_{j\in\mathbb{N}}y_j=\{p\}$ y $\bigcap_{j\in\mathbb{N}}x_j=\{p\}$, entonces p pertenece a $x_i=\left\{e^{2\pi is}:s\in\left[\frac{a}{2^{i-1}},\frac{a+1}{2^{i-1}}\right]\right\}$ y a $y_i=\left\{e^{2\pi is}:s\in\left[\frac{b}{2^{i-1}},\frac{b+1}{2^{i-1}}\right]\right\}$, además ambos están contenidos en alguna S_k. Como x_i y y_i solo se intersecan en un punto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $p=e^{2\pi i\frac{a+1}{2^{i-1}}}=e^{2\pi i\frac{b}{2^{i-1}}}$. Por lo tanto, $\left\{e^{2\pi is}:s\in\left(\frac{a}{2^{i-1}},p\right]\right\}$ y $\left\{e^{2\pi is}:s\in\left[p,\frac{b+1}{2^{i-1}}\right)\right\}$ satisfacen que $\left\{e^{2\pi is}:s\in\left(\frac{a}{2^{i-1}},p\right]\right\}\cup$

$\left\{e^{2\pi is}: s\in\left[p,\frac{b+1}{2^{i-1}}\right)\right\}$ es un abierto en S_k. Además, se tienen las siguientes contenciones: $\phi\left(\left\{e^{2\pi is}: s\in\left(\frac{a}{2^{i-1}},p\right]\right\}\right)\subset\pi(g_i^{-1}(x_i))\subset A$ y $\phi\left(\left\{e^{2\pi is}: s\in\left[p,\frac{b+1}{2^{i-1}}\right)\right\}\right)\subset\pi(g_i^{-1}(y_i))\subset A$, entonces $\left\{e^{2\pi is}: s\in\left(\frac{a}{2^{i-1}},p\right]\right\}\cup\left\{e^{2\pi is}: s\in\left[p,\frac{b+1}{2^{i-1}}\right)\right\}\subset\phi^{-1}(A)$.

Por último, si $p=x_0$, B contiene una cantidad numerable de puntos, y de forma análoga al caso anterior para cada S_k podemos encontrar subconjuntos de la forma $\left\{e^{2\pi is}: s\in\left(\frac{a_k}{2^{i-1}},p\right]\right\}$ y $\left\{e^{2\pi is}: s\in\left[p,\frac{b_k+1}{2^{i-1}}\right)\right\}$ tales que si $A_k=\left\{e^{2\pi is}: s\in\left(\frac{a_k}{2^{i-1}},p\right]\right\}\cup\left\{e^{2\pi is}: s\in\left[p,\frac{b_k+1}{2^{i-1}}\right)\right\}$, entonces A_k es un conjunto abierto en S_k y A_k está contenido en $\phi^{-1}(A)$. Por lo tanto, si definimos $V=\sqcup_{k\in\mathbb{N}}A_k$ tenemos que $q(V)$ es un conjunto abierto en X contenido en $\phi^{-1}(A)$. Concluimos que ϕ es continua, luego φ es un homeomorfismo. Por lo tanto X está determinado por una g-estructura celular.

Notación: Dada una g-estructura celular, $\{(G_i,r_i),g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$, a los elementos de G^* los denotaremos por $\pi(\bar{x})$ o $[\bar{x}]$.

Enunciamos el siguiente resultado de topología general, el cual utilizaremos en la siguiente proposición.

Teorema 3.1.11. *([9], Teorema 3.8.4, pág. 192). Sea X un espacio Lindelöf y $A\subset X$ un subespacio cerrado, entonces A es Lindelöf.*

Sea $\{(G_i,r_i),g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una g-estructura celular donde cada G_i tiene la topología discreta. Veamos ahora algunas propiedades del espacio cociente G^*.

Proposición 3.1.12. *Sea $\{(G_i,r_i),g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una g-estructura celular donde cada G_i tiene la topología discreta. Entonces, para cada $\bar{x}\in G_\infty$, $B(\bar{x},r)$ es un espacio Lindelöf.*

Demostración. Sea $\bar{x}\in G_\infty$, entonces para cada $i\in\mathbb{N}$ existe un $j\in\mathbb{N}$ tal que $g_i^j(B(x_j,r_j))$ es numerable. Sea $B_i=g_i^j(B(x_j,r_j))$ para cada $i\in\mathbb{N}$. Mostraremos que cada B_i es un espacio regular y σ-compacto y por el Teorema 1.1.17, tendremos que $\prod_{i\in\mathbb{N}}B_i$ es un espacio Lindelöf. Además, por el Teorema 3.1.11, tendremos que B_∞ es Lindelöf. En este caso B_i es regular, pues cada G_i tiene la topología dicreta y por lo tanto es regular. Además, como cada B_i es numerable, se tiene que es la unión de una cantidad numerable de espacios compactos, donde cada compacto contiene un solo punto. Por ser B_i un espacio T_2, es σ-compacto. Como $B_\infty=\{\bar{y}\in G_\infty: y_i\in g_i^j(B(x_j,r_j))\}=\{\bar{y}\in G_\infty: y_i=g_i^j(z_j) \text{ con } (z_j,x_j)\in r_j, \text{ para cada } i\in\mathbb{N}\}=\{\bar{y}\in G_\infty:(y_i,x_i)\in r_i, \text{ para cada } i\in\mathbb{N}\}=B(\bar{x},r)$, entonces $B(\bar{x},r)$ es un espacio Lindelöf. ■

Lema 3.1.13. *Sea $i\in\mathbb{N}$ y $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3,...)\in G_\infty$. Entonces el conjunto $A_{x_i}=\{[\bar{z}]\in\mathrm{G}^*:(z_i,x_i)\in r_i$ y existe $j\in\mathbb{N}$ tal que $(z_j,w_j)\notin r_j,\forall\bar{w}\in g_i^{-1}(B(x_i,2r_i)\backslash B(x_i,r_i))\}$ es un abierto en G^* que contiene a $[\bar{x}]$.*

Demostración. Sea $\bar{w}=(w_1,w_2,w_3,...)\in\pi^{-1}(A_{x_i})$, entonces $[\bar{w}]\in A_{x_i}$. Luego, existe $\bar{p}\in[\bar{w}]$ tal que $(p_i,x_i)\in r_i$ y $j\in\mathbb{N}$ tal que $(p_j,y_j)\notin r_j$ para cada $\bar{y}\in g_i^{-1}(B(x_i,2r_i)\backslash B(x_i,r_i))$. Por la condición 1 de g-estructura celular, para $\bar{p}$ y j, existe

$k \in \mathbb{N}$ tal que $g_j^k(B(p_k, 2r_k)) \subset B(p_j, r_j)$.
Mostraremos que $\bar{w} \in g_k^{-1}(w_k) \cap g_i^{-1}(B(x_i, r_i)) \subset \pi^{-1}(A_{x_i})$. De la definición de $g_k^{-1}(w_k)$ se tiene que $\bar{w} \in g_k^{-1}(w_k)$. Así, solo tenemos que probar que $\bar{w} \in g_i^{-1}(B(x_i, r_i))$. Supongamos que $\bar{w} \notin g_i^{-1}(B(x_i, r_i))$. Como $(\bar{p}, \bar{w}) \in r$, entonces $(p_i, w_i) \in r_i$ y como $(p_i, x_i) \in r_i$, tenemos que $w_i \in B(x_i, 2r_i)\backslash B(x_i, r_i)$. Por lo tanto $\bar{w} \in g_i^{-1}(B(x_i, 2r_i)\backslash B(x_i, r_i)$, lo cual implica que $(w_j, p_j) \notin r_j$, contradiciendo que $(\bar{w}, \bar{p}) \in r$. Así, concluimos que $\bar{w} \in g_k^{-1}(w_k) \cap g_i^{-1}(B(x_i, r_i))$.

Consideremos ahora $\bar{u} \in g_k^{-1}(w_k) \cap g_i^{-1}(B(x_i, r_i))$ y supongamos que para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $\bar{y} \in g_i^{-1}(B(x_i, 2r_i)\backslash B(x_i, r_i))$ tal que $(u_j, y_j) \in r_j$. Sea $\bar{y} \in g_i^{-1}(B(x_i, 2r_i)\backslash B(x_i, r_i))$ tal que $(y_k, u_k) \in r_k$. Como $u_k = w_k$, entonces $(y_k, w_k) \in r_k$ y como $(\bar{w}, \bar{p}) \in r$, entonces $(w_k, p_k) \in r_k$. Por lo tanto $y_k \in B(p_k, 2r_k)$, lo cual implica que $(g_j^k(y_k), p_j) = (y_j, p_j) \in r_j$ contradiciendo la elección de j. Luego, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $(u_j, y_j) \notin r_j$, para cada $\bar{y} \in g_i^{-1}(B(x_i, 2r_i)\backslash B(x_i, r_i))$. Concluimos que $[\bar{u}] \in A_{x_i}$, es decir, $\bar{u} \in \pi^{-1}(A_{x_i})$.
Por último, notemos que $\bar{x} \in g_i^{-1}(B(x_i, r_i))$ y si $\bar{w} \in g_i^{-1}(B(x_i, 2r_i)\backslash B(x_i, r_i))$, entonces $(w_i, x_i) \notin r_i$. Por lo tanto $[\bar{x}] \in A_{x_i}$. ∎

Proposición 3.1.14. *Sea* $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ *una g-estructura celular donde cada* G_i *tiene la topología discreta. Entonces el espacio cociente* G^* *es un espacio* T_2.

Demostración. Sean $\pi(\bar{x})$ y $\pi(\bar{y})$, donde $\bar{x}, \bar{y} \in G_\infty$, elementos distintos en G^*. Entonces $(\bar{x}, \bar{y}) \notin r$, por lo tanto, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $(x_i, y_i) \notin r_i$. Por la condición 2 de g-estructura celular, tenemos que para ese i y $\bar{x}$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $g_i^j(B(x_j, 2r_j)) \subset B(x_i, r_i)$. De forma análoga, tenemos que para i y $\bar{y}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g_i^k(B(y_k, 2r_k)) \subset B(y_i, r_i)$. Sea $j_0 = \max\{j, k\}$, entonces $g_i^{j_0}(B(x_{j_0}, 2r_{j_0})) \subset B(x_i, r_i)$ y $g_i^{j_0}(B(y_{j_0}, 2r_{j_0})) \subset B(y_i, r_i)$. Para ese j_0, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_0 > j_0$ y $g_{j_0}^{k_0}(B(x_{k_0}, 2r_{k_0})) \subset B(x_{j_0}, r_{j_0})$ y $g_{j_0}^{k_0}(B(y_{k_0}, 2r_{k_0})) \subset B(y_{j_0}, r_{j_0})$. Consideremos los siguientes conjuntos:

$$A_{x_{k_0}} = \{[\bar{z}] \in \mathrm{G}^* : (z_{k_0}, x_{k_0}) \in r_{k_0} \text{ y existe } j \in \mathbb{N} \text{ tal que } (z_j, w_j) \notin r_j, \\ \forall \bar{w} \in g_{k_0}^{-1}(B(x_{k_0}, 2r_{k_0})\backslash B(x_{k_0}, r_{k_0}))\},$$

$$B_{y_{k_0}} = \{[\bar{z}] \in \mathrm{G}^* : (z_{k_0}, y_{k_0}) \in r_{k_0} \text{ y existe } j \in \mathbb{N} \text{ tal que } (z_j, w_j) \notin r_j, \\ \forall \bar{w} \in g_{k_0}^{-1}(B(y_{k_0}, 2r_{k_0})\backslash B(y_{k_0}, r_{k_0}))\}.$$

Por el Lema 3.1.13, $A_{x_{k_0}}$ y $B_{y_{k_0}}$ son conjuntos abiertos en G^* que contienen a $\pi(\bar{x})$ y $\pi(\bar{y})$, respectivamente. Mostraremos que $A_{x_{k_0}}$ y $B_{y_{k_0}}$ son disjuntos. Supongamos que existe $[\bar{z}] \in \mathrm{G}^*$ tal que $[\bar{z}] \in A_{x_{k_0}} \cap B_{y_{k_0}}$, entonces existen $\bar{w}$ y $\bar{u}$ en $[\bar{z}]$ tales que $(w_{k_0}, x_{k_0}) \in r_{k_0}$ y $(u_{k_0}, y_{k_0}) \in r_{k_0}$. Como $(w_{k_0}, u_{k_0}) \in r_{k_0}$, entonces $w_{k_0} \in B(y_{k_0}, 2r_{k_0})$. Por la elección de k_0, resulta que $(g_{j_0}^{k_0}(w_{k_0}), g_{j_0}^{k_0}(y_{k_0})) = (w_{j_0}, y_{j_0}) \in r_{j_0}$. Ahora, como $(w_{k_0}, x_{k_0}) \in r_{k_0}$, entonces $(w_{j_0}, x_{j_0}) \in r_{j_0}$. Por lo tanto, $y_{j_0} \in B(x_{j_0}, 2r_{j_0})$, lo cual implica que $(g_i^{j_0}(y_{j_0}), g_i^{j_0}(x_{j_0})) = (y_i, x_i) \in r_i$ contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto, $A_{x_{k_0}} \cap B_{y_{k_0}} = \emptyset$.

■

En el Teorema 2.3.4 se prueba que dada una estructura celular $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$, el mapeo cociente $\pi : G_\infty \to \mathrm{G}^*$ es perfecto y por lo tanto, cerrado. Pero, en el caso de g-estructuras celulares existen ejemplos en los que el mapeo π no es cerrado, como veremos en el ejemplo 3.1.21. Así, tiene sentido preguntarnos si existen condiciones con las que el mapeo π sea cerrado. En el Lema 3.1.16, damos una condición para que el mapeo π sea cerrado. Para su demostración utilizaremos la siguiente proposición.

Proposición 3.1.15. *([9], Proposición 2.4.9, pág. 92). Sea X un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- *El mapeo cociente $q : X \to X/\sim$ es cerrado (abierto).*
- *Para cada conjunto abierto (cerrado) $A \subset X$, la unión de todas las clases de equivalencia que están contenidas en A es un abierto (cerrado) en X.*

Lema 3.1.16. *Sea $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una g-estructura celular donde cada G_i tiene la topología discreta. Para cada $\bar{x} \in G_\infty$ y para cada subconjunto abierto $A \subset G_\infty$ que contiene a $B(\bar{x}, r)$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $B(g_j^{-1}(x_j), r) \subset A$ si y sólo si el mapeo cociente $\pi : G_\infty \to \mathrm{G}^*$ es cerrado.*

Demostración. Supongamos que para cada $\bar{x} \in G_\infty$ y para cada subconjunto abierto $A \subset G_\infty$ que contiene a $B(\bar{x}, r)$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $B(g_j^{-1}(x_j), r) \subset A$. Sea $A \subset G_\infty$ un subconjunto abierto no vacío y definamos $B = \{\bar{z} \in G_\infty : B(\bar{z}, r) \subset A\}$. Si $\bar{z} \in B$, entonces $B(\bar{z}, r) \subset A$ y por la hipótesis existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $B(g_j^{-1}(z_j), r) \subset A$. Veamos que $g_j^{-1}(z_j) \subset B$. Tomemos $\bar{y} \in g_j^{-1}(z_j)$, entonces $\bar{y} \in A$ y si $(\bar{w}, \bar{y}) \in r$, entonces $\bar{w} \in B(g_j^{-1}(z_j), r)$ y por lo tanto $\bar{w} \in A$. Lo anterior implica que $B(\bar{y}, r) \subset A$ y por tanto $\bar{y} \in B$. Concluimos así que $g_j^{-1}(z_j) \subset B$, es decir, B es abierto y por la Proposición 3.1.15 tenemos que π es un mapeo cerrado. Supongamos ahora que π es un mapeo cerrado. Sea A un subconjunto abierto en G_∞ que contiene a $B(\bar{x}, r)$, entonces tenemos que $B = \{\bar{z} \in G_\infty : B(\bar{z}, r) \subset A\}$ también es abierto. Luego, como $\bar{x} \in B$ y B es abierto, entonces existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $g_j^{-1}(x_j) \subset B$. Por lo tanto, para cada $\bar{y} \in g_j^{-1}(x_j)$ tenemos que $B(\bar{y}, r) \subset A$, consecuentemente tenemos que $B(g_j^{-1}(z_j), r) \subset A$. ■

En [8, Lema 3.5], se muestra que para los subconjunto abiertos A en G_∞ que son de la forma $\pi^{-1}(B)$, donde B es un subconjunto de G^*, existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $g_j^{-1}(B(x_j, r_j)) \subset A$. Por lo tanto, $B(g_j^{-1}(x_j), r) \subset A$, pues si $\bar{z} \in B(g_j^{-1}(x_j), r)$, entonces $(\bar{z}, \bar{w}) \in r$ para algún $\bar{w} \in g_j^{-1}(x_j)$. Luego, $w_j = x_j$, entonces $(z_j, x_j) \in r_j$, es decir, $z_j \in B(x_j, r_j)$. Así, $g_j^{-1}(z_j) \subset g_j^{-1}(B(x_j, r_j))$, de donde obtenemos que $\bar{z} \in g_j^{-1}(B(x_j, r_j)) \subset A$. Pero, no todos los abiertos de G_∞ son imagenes inversas de subconjuntos de G^*. El Lema 3.1.16 nos dice que si tenemos una estructura celular, en general para cualquier abierto $A \subset G_\infty$, podemos encontrar un $j \in \mathbb{N}$ tal que

$B(g_j^{-1}(x_j), r) \subset A$, esta condición también implicará que, en el caso de g-estructuras celulares, podemos construir una base para la topología de G^*, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.1.17. *Sea $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una g-estructura celular donde cada G_i tiene la topología discreta. Si para cada $\bar{x} \in G_\infty$ y para cada subconjunto abierto $A \subset G_\infty$ que contiene a $B(\bar{x}, r)$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $B(g_j^{-1}(x_j), r) \subset A$, entonces*

$$\{\mathrm{G}^*\backslash\pi(G_\infty\backslash A) : A \textit{ es abierto en } G_\infty\}$$

es una base para la topología de G^*.

Demostración. Sea $[\bar{x}] \in \mathrm{G}^*$ y $U \subset \mathrm{G}^*$ un subconjunto abierto que contiene a $[\bar{x}]$. Como $\pi^{-1}(U)$ es abierto en G_∞, entonces para cada $\bar{y} \in B(\bar{x}, r)$ existe $i_{\bar{y}}$ tal que $g_{i_{\bar{y}}}^{-1}(y_{i_{\bar{y}}}) \subset \pi^{-1}(U)$. Sea $\mathcal{V} = \bigcup\{g_{i_{\bar{y}}}^{-1}(y_{i_{\bar{y}}}) : \bar{y} \in B(\bar{x}, r) \text{ y } g_{i_{\bar{y}}}^{-1}(y_{i_{\bar{y}}}) \subset \pi^{-1}(U)\}$, entonces $\mathcal{V}$ es un abierto en G_∞ que contiene a $B(\bar{x}, r)$ y está contenido en $\pi^{-1}(U)$. Por lo tanto $G_\infty\backslash\mathcal{V} \subset G_\infty\backslash B(\bar{x}, r)$, luego $B(\bar{x}, r) \cap (G_\infty\backslash\mathcal{V}) = \emptyset$. Lo anterior implica que $[\bar{x}] \notin \pi(G_\infty\backslash\mathcal{V})$, entonces $[\bar{x}] \in \mathrm{G}^*\backslash\pi(G_\infty\backslash\mathcal{V})$. Por otro lado, como $G_\infty\backslash\pi^{-1}(U) \subset G_\infty\backslash\mathcal{V}$, entonces $\pi(G_\infty\backslash\pi^{-1}(U)) \subset \pi(G_\infty\backslash\mathcal{V})$. Veamos ahora que $\pi(\pi^{-1}(\mathrm{G}^*\backslash U)) = \mathrm{G}^*\backslash U$. Sea $[\bar{x}] \in \mathrm{G}^*\backslash U$, entonces $\pi^{-1}([\bar{x}]) = B(\bar{x}, r) \subset \pi^{-1}(\mathrm{G}^*\backslash U)$. Por lo tanto, si $\bar{y} \in B(\bar{x}, r)$, $\pi(\bar{y}) \in \pi(\pi^{-1}(\mathrm{G}^*\backslash U))$, lo cual implica que $[\bar{x}] \in \pi(\pi^{-1}(\mathrm{G}^*\backslash U))$. Para la otra contención, sea $[\bar{x}] \in \pi(\pi^{-1}(\mathrm{G}^*\backslash U))$, entonces existe $\bar{y} \in \pi^{-1}(\mathrm{G}^*\backslash U)$ tal que $(\bar{x}, \bar{y}) \in r$. Luego, $\pi(\bar{y}) \in \mathrm{G}^*\backslash U$ y por lo tanto, $[\bar{x}] \in \mathrm{G}^*\backslash U$. Además, como $\pi(G_\infty\backslash\pi^{-1}(U)) = \pi(\pi^{-1}(\mathrm{G}^*\backslash U))$, resulta que $\mathrm{G}^*\backslash\pi(G_\infty\backslash\mathcal{V}) \subset U$. Por el Lema 3.1.16, tenemos que $\pi(G_\infty\backslash\mathcal{V})$ es un subconjunto cerrado y por lo tanto, $\mathrm{G}^*\backslash\pi(G_\infty\backslash\mathcal{V})$ es abierto. ■

Incluimos el siguiente resultado que utilizaremos en la Proposición 3.1.19.

Teorema 3.1.18. *([9], Teorema 1.5.20, pág. 46). Las clases de espacios T_1, T_4 y perfectamente normales son invariantes bajo mapeos cerrados.*

Proposición 3.1.19. *Sea $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una g-estructura celular donde cada G_i tiene la topología discreta. Si para cada $\bar{x} \in G_\infty$ y para cada subconjunto abierto $A \subset G_\infty$ que contiene a $B(\bar{x}, r)$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $B(g_j^{-1}(x_j), r) \subset A$, entonces G^* es un espacio normal. Más aún, G^* es un espacio perfectamente normal.*

Demostración. Por el Lema 3.1.16, tenemos que el mapeo cociente $\pi : G_\infty \to \mathrm{G}^*$ es cerrado. Como G_∞ es metrizable, por el Teorema 1.1.20, G_∞ es perfectamente normal y por el Teorema 3.1.18, la propiedad de ser perfectamente normal es invariante bajo funciones cerradas. Por lo tanto, G^* es un espacio perfectamente normal. ■

Corolario 3.1.20. *Sea X un espacio topológico determinado por una g-estructura celular $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ donde cada G_i tiene la topología discreta. Supongamos que para cada $\bar{x} \in G_\infty$ y para cada subconjunto abierto $A \subset G_\infty$ que contiene a $B(\bar{x}, r)$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $B(g_j^{-1}(x_j), r) \subset A$, entonces X es normal.*

Demostración. Como para cada $\bar{x} \in G_\infty$ y para cada subconjunto abierto $A \subset G_\infty$ que contiene a $B(\bar{x}, r)$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $B(g_j^{-1}(x_j), r) \subset A$, por el Lema 3.1.16, el mapeo cociente $\pi : G_\infty \to \mathrm{G}^*$ es cerrado. Como G_∞ es normal, por el Teorema 3.1.18, tenemos que G^* es normal y por lo tanto, X es normal. ∎

Utilizando el Corolario 3.1.20 y la g-estructura celular que construimos en el ejemplo 3.1.10, se puede ver que el espacio $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} S_k$ es normal.

Sea $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ la g-estructura celular que construimos en el ejemplo 3.1.10, para el espacio $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} S_k$. Basta con mostrar que para un $\bar{x}$ tal que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i = \{x_0\}$ y para cada subconjunto abierto $A \subset G_\infty$ que contiene a $B(\bar{x}, r)$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $B(g_j^{-1}(x_j), r) \subset A$. Sea $\bar{x} \in G_\infty$ tal que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i = \{x_0\}$ y A un subconjunto abierto que contiene a $B(\bar{x}, r)$. Como $\bar{x} \in A$, existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $g_j^{-1}(x_j) \subset A$. Veamos que $B(g_{j+1}^{-1}(x_{j+1}), r) \subset A$. Sea $\bar{y} \in B(g_{j+1}^{-1}(x_{j+1}), r)$, entonces existe $\bar{w} \in g_{j+1}^{-1}(x_{j+1})$ tal que $(\bar{w}, \bar{y}) \in r$. Luego, $w_{j+1} = x_{j+1}$ lo cual implica que $(y_{j+1}, x_{j+1}) \in r_{j+1}$. Ahora, por definición de las gráficas, tenemos dos opciones: si y_{j+1} está contenido en la misma S_k que x_{j+1}, entonces $y_{j+1} \subset x_j$ y por lo tanto, $y_j = x_j$. Así, $\bar{y} \in A$. Si y_{j+1} está contenido en una S_m distinta a la que contiene a x_{j+1}, entonces $(\bar{y}, \bar{x}) \in r$ y como $B(\bar{x}, r) \subset A$, $\bar{y} \in A$, en consecuencia $B(g_{j+1}^{-1}(x_{j+1}), r) \subset A$ y por el Corolario 3.1.20, $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} S_k$ es normal.

En el ejemplo anterior, también se cumple que el mapeo cociente es cerrado, pero no es una condición necesaria para que el espacio determinado G^* sea normal, como podrá observarse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.21. *Consideremos para cada $i \in \mathbb{N}$ los siguientes conjuntos:*

$$G_i = \bigcup_{k=1}^{i} A_k^i, \text{ donde } A_k^i = \{a_{j,i}^k : j \in \mathbb{N}\} \text{ para cada } k \in \{1, ..., i\},$$

con la topología discreta y $r_i = \{(a, b) : a, b \in A_k^i$ para algún $k \in \{1, ..., i\}\}$. Definamos, para cada $i \in \mathbb{N}$, g_i^i como la función identidad en G_i, $g_i^{i+1} : G_{i+1} \to G_i$ por $g_i^{i+1}(a_{j,i+1}^1) = a_{j,i}^1$ y $g_i^{i+1}(a_{j,i+1}^k) = a_{j,i}^{k-1}$ si $k > 1$, ver figura 3.3. Entonces $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ define una g-estructura celular que determina un espacio normal, pero el mapeo cociente $\pi : G_\infty \to \mathrm{G}^*$ no es cerrado.

Por definición de las relaciones r_i, tenemos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, r_i es una relación reflexiva y simétrica, y por lo tanto (G_i, r_i) es una gráfica. Además, por definición de las funciones g_i^i y g_i^{i+1} tenemos que $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ satisface las dos primeras condiciones de sucesión inversa de gráficas. Veamos que se satisface la tercera condición. Observemos que A_k^i es homeomorfo a A_t^j, para cada $i, j, k, t \in \mathbb{N}$ y por definición de g_i^{i+1}, si $k > 1$, $g_i^{i+1}(A_k^{i+1}) = A_{k-1}^i$ y si $k = 1$, $g_i^{i+1}(A_1^{i+1}) = A_1^i$. Así, si $x, y \in G_{i+1}$ son tales que $(x, y) \in r_{i+1}$, entonces $x, y \in A_k^{i+1}$ para algún $k \in \{1, ..., i\}$. Por lo tanto, si $k = 1$, $g_i^{i+1}(x), g_i^{i+1}(y) \in A_1^i$ y si $k > 1$, $g_i^{i+1}(x), g_i^{i+1}(y) \in A_{k-1}^i$. Por lo tanto, en

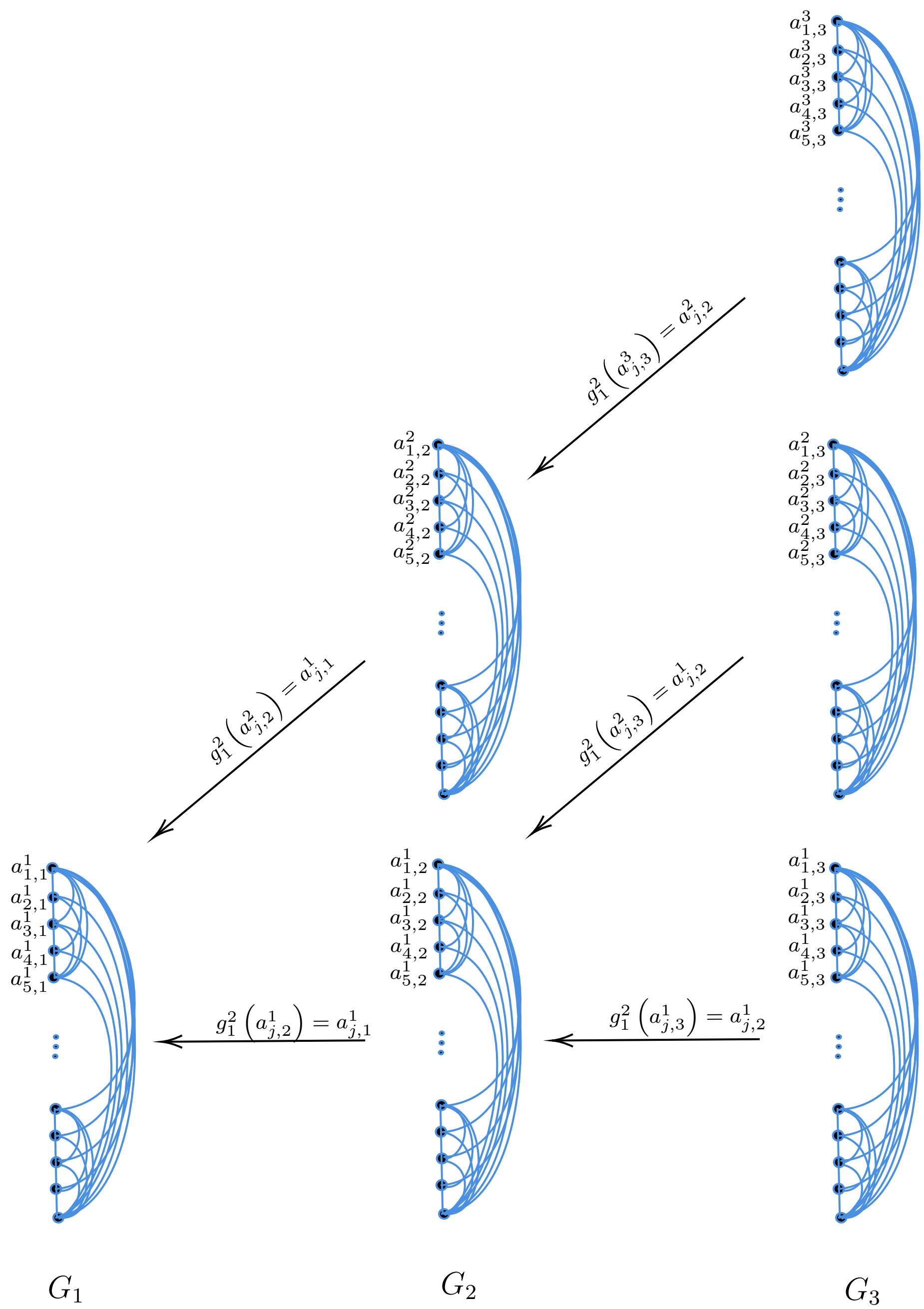

Figura 3.3: Representación de las primeras 3 gráficas del ejemplo 3.1.21

ambos casos, $(g_i^{i+1}(x), g_i^{i+1}(y)) \in r_i$. Concluimos así, que $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ define una sucesión inversa de gráficas.

Para ver que se satisface la condición 1 de la definición de g-estructura celular, sea $\bar{x} \in G_\infty$ y fijemos $i \in \mathbb{N}$. Notemos que, para cada $k \in \{1, ..., i\}$, si $a, b \in A_k^i$, entonces $(a, b) \in r_i$. Además, si $t \in \{1, ..., i\}\backslash\{k\}$, $a \in A_k^i$ y $b \in A_t^i$, entonces $(a, b) \notin r_i$, ver figura 3.3. Así, supongamos que $x_i \in A_k^i$, entonces $B(x_i, r_i) = A_k^i$ y $B(x_i, 2r_i) = A_k^i$. Como i fue arbitrario, para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $B(x_i, 2r_i) = B(x_i, r_i)$. Por lo tanto, por la condición 3 de sucesión inversa de gráficas, resulta que $g_i^{i+1}(B(x_{i+1}, r_{i+1})) \subset B(x_i, r_i)$, es decir, $g_i^{i+1}(B(x_{i+1}, 2r_{i+1})) \subset B(x_i, r_i)$. Así, tomando $j = i + 1$ tenemos que se satisface la condición 1 de la definición de g-estructura celular.

Para verificar la condición 2 de g-estructura celular sea $\bar{x} \in G_\infty$ y fijemos $i \in \mathbb{N}$. Como, para cada $j \in \mathbb{N}$ tenemos que $B(x_j, r_j)$ es numerable, en particular $B(x_{i+1}, r_{i+1})$ es numerable. Por lo tanto, el conjunto $g_i^{i+1}(B(x_{i+1}, r_{i+1}))$ es numerable. Concluimos así que $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ define una g-estructura celular.

Ahora, para ver que el mapeo π no es cerrado, mostraremos que existe $\bar{x} \in G_\infty$ y un subconjunto abierto $A \subset G_\infty$ que contiene a $B(\bar{x}, r)$ tal que para cada $j \in \mathbb{N}$, $B(g_j^{-1}(x_j), r)$ no está contenido en A y por el Lema 3.1.16, tendremos que el mapeo π no es cerrado.

Consideremos $\bar{x} = \left(a_{1,1}^1, a_{1,2}^1, a_{1,3}^1, ...\right)$ y el conjunto $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} g_i^{-1}\left(a_{i,i}^1\right)$, el cual es un abierto en G_∞. Veamos que $B(\bar{x}, r) \subset U$, sea $\bar{z} \in B(\bar{x}, r)$, entonces $\bar{z} = \left(a_{k,1}^1, a_{k,2}^1, a_{k,3}^1, ...\right)$ para algún $k \in \mathbb{N}$, por lo tanto $\bar{z} \in g_k^{-1}\left(a_{k,k}^1\right) \subset U$.

Sea $j \in \mathbb{N}$, entonces el hilo $\bar{w} = \left(a_{1,1}^1, a_{1,2}^1, ..., a_{1,j}^1, a_{1,j+1}^2, a_{1,j+2}^3, ..., a_{1,j+r-1}^r, ...\right)$ pertenece al conjunto $g_j^{-1}\left(a_{1,j}^1\right)$. Definamos ahora:

$$\bar{y} = \left(a_{j+1,1}^1, a_{j+1,2}^1, ..., a_{j+1,j}^1, a_{j+1,j+1}^2, a_{j+1,j+2}^3, ..., a_{j+1,j+r-1}^r, ...\right).$$

Como, para cada $i, k \in \mathbb{N}$, $a_{1,i}^1, a_{j+1,i}^1 \in A_1^i$ y $a_{1,i}^k, a_{j+1,i}^k \in A_k^i$, entonces $(a_{1,i}^1, a_{j+1,i}^1)$ y $(a_{1,i}^k, a_{j+1,i}^k)$ pertenecen a r_i. Así $(\bar{w}, \bar{y}) \in r$ y por lo tanto, $\bar{y}$ pertenece a $B\left(g_j^{-1}\left(a_{1,j}^1\right), r\right)$. Veamos que $\bar{y} \notin U$. Observemos que los hilos que pertenecen a U tienen una coordenada en la que sus dos subíndices coinciden y el supraíndice es 1. Así, en $\bar{y}$ la única coordenada en la que sus subíndices coinciden es $a_{j+1,j+1}^2$, pero como el supraíndice es 2, $\bar{y}$ no pertenece a U. Por lo tanto, como j fue arbitrario tenemos que para cada $j \in \mathbb{N}$, $B\left(g_j^{-1}\left(a_{1,j}^1\right), r\right)$ no está contenido en U. De este modo, el mapeo cociente π no es cerrado.

Veamos ahora que $\pi(\bar{x})$ es el único punto de G* que no es aislado. Consideremos $\bar{z} = \left(a_{k,1}^{r_1}, a_{k,2}^{r_2}, a_{k,3}^{r_3}, ...\right) \notin B(\bar{x}, r)$, entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $a_{k,j}^{r_j} \neq a_{s,j}^1$ para todo $s \in \mathbb{N}$, es decir, $r_j \neq 1$. Además, si $\bar{u} \in B(\bar{z}, r)$, entonces $\bar{u} = \left(a_{t,1}^{r_1}, a_{t,2}^{r_2}, a_{t,3}^{r_3}, ...\right)$, para algún $t \in \mathbb{N}$ y $g_j^{-1}(a_{t,j}^{r_j}) = \{\bar{u}\}$. Por lo tanto, $B(\bar{z}, r) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} g_j^{-1}\left(a_{i,j}^{r_j}\right)$. Así, $B(\bar{z}, r)$ es un abierto en G_∞ y como $\pi^{-1}(\pi(\bar{z})) = B(\bar{z}, r)$, entonces $\{\pi(\bar{z})\}$ es un conjunto abierto en G*. Veamos que $\{\pi(\bar{x})\}$ no es abierto en G*. Sea $\bar{w} = \left(a_{k,1}^1, a_{k,2}^1, a_{k,3}^1, ...\right) \in \pi^{-1}(\pi(\bar{x}))$, entonces para cada $j \in \mathbb{N}$ tenemos que $\bar{y} = \left(a_{k,1}^1, a_{k,2}^1, ..., a_{k,j}^1, a_{k,j+1}^2, a_{k,j+2}^3, ...\right)$ pertenece a $g_j^{-1}\left(a_{k,j}^1\right)$

pero $\bar{y} \notin B(\bar{x}, r)$. Por lo tanto, ninguna vecindad abierta básica de $\bar{w}$ se queda contenida en $B(\bar{x}, r)$. Luego, $\{\pi(\bar{x})\}$ no es abierto en G*.

Mostraremos que el espacio determinado por la g-estructura celular $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$, es un espacio normal. Veamos primero cuales son los elementos de G*. Sea $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3, ...) \notin B(\bar{x}, r)$, entonces existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $u_j \in A_2^j$. Sea $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3, ...) \in G_\infty$ tal que $v_t \in A_2^t$ con $t \neq j$. Si $t > j$, entonces $v_j \in A_1^j$. Luego, $(\bar{u}, \bar{v}) \notin r$. Ahora, si $t < j$, entonces $u_t \in A_1^t$, lo cual implica que $(\bar{u}, \bar{v}) \notin r$. Concluimos así que $[\bar{u}] \neq [\bar{v}]$. Por lo tanto, las clases determinadas por π y que son distintas de $[\bar{x}]$, están dadas por:

$$[k] = \{\bar{z} \in G_\infty : z_{k+1} \in A_{k+1}^2\}, \text{ para cada } k \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Así, $\mathrm{G}^* = \{[\bar{x}]\} \cup \{[k] : k \in \mathbb{N}\}$, donde $[k]$ está dado por (3.1). Definamos la función $\varphi : \Omega(\omega) \to \mathrm{G}^*$, donde $\Omega(\omega)$ es la compactificación por un punto de $\mathbb{N}$, dada por $\varphi(n) = [n]$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\varphi(w) = [\bar{x}]$. Mostraremos que φ es un homeomorfismo.

Dado que $\mathrm{G}^* = \{[\bar{x}]\} \cup \{[k] : k \in \mathbb{N}\}$, donde $[k]$ está dado por (3.1), es claro que φ es biyectiva y como $\Omega(\omega)$ es compacto y G* es T_2, resta mostrar que φ es continua.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, el conjunto $U_j = \left(\bigcup_{k\geq j}[k]\right) \cup [\bar{x}]$ es un conjunto abierto en G*, pues $\pi^{-1}(U_j) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} g_j^{-1}(a_{k,j}^1)$. Por otra parte, si A es un abierto que contiene a $[\bar{x}]$, tenemos que $\pi^{-1}(A)$ es abierto en G_∞. Así, sea $\bar{y} = \left(a_{r,1}^1, a_{r,2}^1, a_{r,3}^1, ...\right) \in B(\bar{x}, r)$, entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $g_j^{-1}\left(a_{r,j}^1\right) \subset \pi^{-1}(A)$. Consideremos $k > j$ y tomemos $\bar{w} \in [k]$ tal que $w_{k+1} = a_{r,k+1}^2$. Entonces $\bar{w} \in g_{k+1}^{-1}\left(a_{r,k+1}^2\right) \subset g_k^{-1}\left(a_{r,k}^1\right) \subset g_j^{-1}\left(a_{r,j}^1\right) \subset \pi^{-1}(A)$. Así, $[k] \in A$, para toda $k > j$, de donde se sigue que $\left(\bigcup_{k\geq j}[k]\right) \cup [\bar{x}] \subset A$. Por lo tanto, para cualquier abierto A que contiene a $[\bar{x}]$, podemos encontrar un U_j tal que $[\bar{x}] \in U_j \subset A$. Como el único punto en G* que no es aislado es $[\bar{x}]$, para mostrar la continuidad de φ basta mostrar que, para cada $j \in \mathbb{N}$, $\varphi^{-1}\left(\left(\bigcup_{k\geq j}[k]\right) \cup [\bar{x}]\right)$ es abierto en $\Omega(\omega)$. Veamos que $\varphi^{-1}\left(\left(\bigcup_{k\geq j}[k]\right) \cup [\bar{x}]\right) = \{j, j+1, ...\} \cup \{\omega\}$. Sea $n \in \{j, j+1, ...\} \cup \{\omega\}$, entonces $\varphi(n) = [n]$ o $\varphi(n) = [\bar{x}]$. Por lo tanto, $\varphi(n) \in \left(\bigcup_{k\geq j}[k]\right) \cup [\bar{x}]$, así $n \in \varphi^{-1}\left(\left(\bigcup_{k\geq j}[k]\right) \cup [\bar{x}]\right)$. Ahora, si $n \in \varphi^{-1}\left(\left(\bigcup_{k\geq j}[k]\right) \cup [\bar{x}]\right)$, entonces $\varphi(n) \in \left(\bigcup_{k\geq j}[k]\right) \cup [\bar{x}]$. Por lo tanto, $n = \omega$ o $n \geq j$, así $n \in \{j, j+1, ...\} \cup \{\omega\}$. Como $\{j, j+1, ...\} \cup \{\omega\}$ es un conjunto abierto en $\Omega(\omega)$, concluimos que φ es continua. Luego, G* es homeomorfo a $\Omega(\omega)$ y por lo tanto, es normal.

Para finalizar esta sección, presentamos el siguiente ejemplo de una g-estructura celular que determina un espacio que no es T_3. Así, no todos los espacios determinados por una g-estructura celular son regulares.

Ejemplo 3.1.22. *Definamos los siguientes conjuntos con la topología discreta:*

$$G_1 = \{a_1\} \cup \{b_1^k : k \in \mathbb{N}\}, \; G_2 = \{a_2\} \cup \{b_2^k : k \in \mathbb{N}\} \cup C_1^2 \cup \{d_2^k : k \in \mathbb{N}\}$$

donde $C_1^2 = \{c_{2,1}^1, c_{2,1}^2\}$ *y definamos* $L_2 = 1$. *En general para cada* $i > 2$ *definamos* $L_i = L_{i-1} + i - 1$, $C_k^i = \{c_{i,k}^1, c_{i,k}^2\}$ *con* $1 \leq k \leq L_i$ *y*

$$G_i = \{a_i\} \cup \{b_i^k : k \in \mathbb{N}\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{L_i} C_k^i \right) \cup \{d_i^k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ *define una g-estructura celular. Donde:*

$$r_i = \{(a_i, b_i^k), (b_i^k, a_i) : k \geq i\} \cup \{(b_i^k, b_i^n) : k, n \geq i\} \cup$$

$$\left\{(a,b) : a, b \in C_k^i, k = 1, ..., L_i\right\} \cup \left\{ \left(d_i^{(i-1)j+k}, b_i^k\right), \left(b_i^k, d_i^{(i-1)j+k}\right) : k < i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\},$$

ver figura 3.4, y para cada $i \in \mathbb{N}$, *la función* $g_i^i : G_i \to G_i$ *es la función identidad en* G_i *y* $g_i^{i+1} : G_{i+1} \to G_i$ *está definida de la siguiente manera:*

$$g_i^{i+1}(a) = \begin{cases} a_i & si\ a = a_{i+1}, & (1) \\ b_i^k & si\ a = b_{i+1}^k, & (2) \\ a_i & si\ a = c_{i+1,1}^1, & (3) \\ b_i^i & si\ a = c_{i+1,1}^2, & (4) \\ c_{i,k-1}^r & si\ a = c_{i+1,k}^r, r = 1, 2, k = 2, ..., L_i + 1, & (5) \\ d_i^{k-(L_i+1)} & si\ a = c_{i+1,k}^1, k = L_i + 2, ..., L_{i+1}, & (6) \\ b_i^{k-(L_i+1)} & si\ a = c_{i+1,k}^2, k = L_i + 2, ..., L_{i+1}, & (7) \\ d_i^{(i-1)(j+1)+n} & si\ a = d_{i+1}^k, k = i \cdot j + n \text{ con } 0 < n < i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, & (8) \\ a_i & si\ a = d_{i+1}^k, k = i \cdot j, j \in \mathbb{N} \cup \{0\} & (9). \end{cases}$$

Por definición de r_i, para cada $i \in \mathbb{N}$, r_i es una relación reflexiva y simétrica. Además, por definición de las funciones de ligadura tenemos que $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ satisface las dos primeras condiciones de sucesión inversa. Para verificar la tercera condición sean $a, b \in G_{i+1}$ tales que $(a, b) \in r_{i+1}$.

- Caso 1: Sean $a = a_{i+1}$ y $b = b_{i+1}^k$. Así, $g_i^{i+1}(a) = a_i$ y $g_i^{i+1}(b) = b_i$, por lo tanto $(g_i^{i+1}(a), g_i^{i+1}(b)) \in r_i$.
- Caso 2: Sean $a = b_{i+1}^k$ y $b = b_{i+1}^n$. Así, $g_i^{i+1}(b_{i+1}^k) = b_i^k$ y $g_i^{i+1}(b_{i+1}^n) = b_i^n$, por lo tanto $(g_i^{i+1}(a), g_i^{i+1}(b)) \in r_i$.

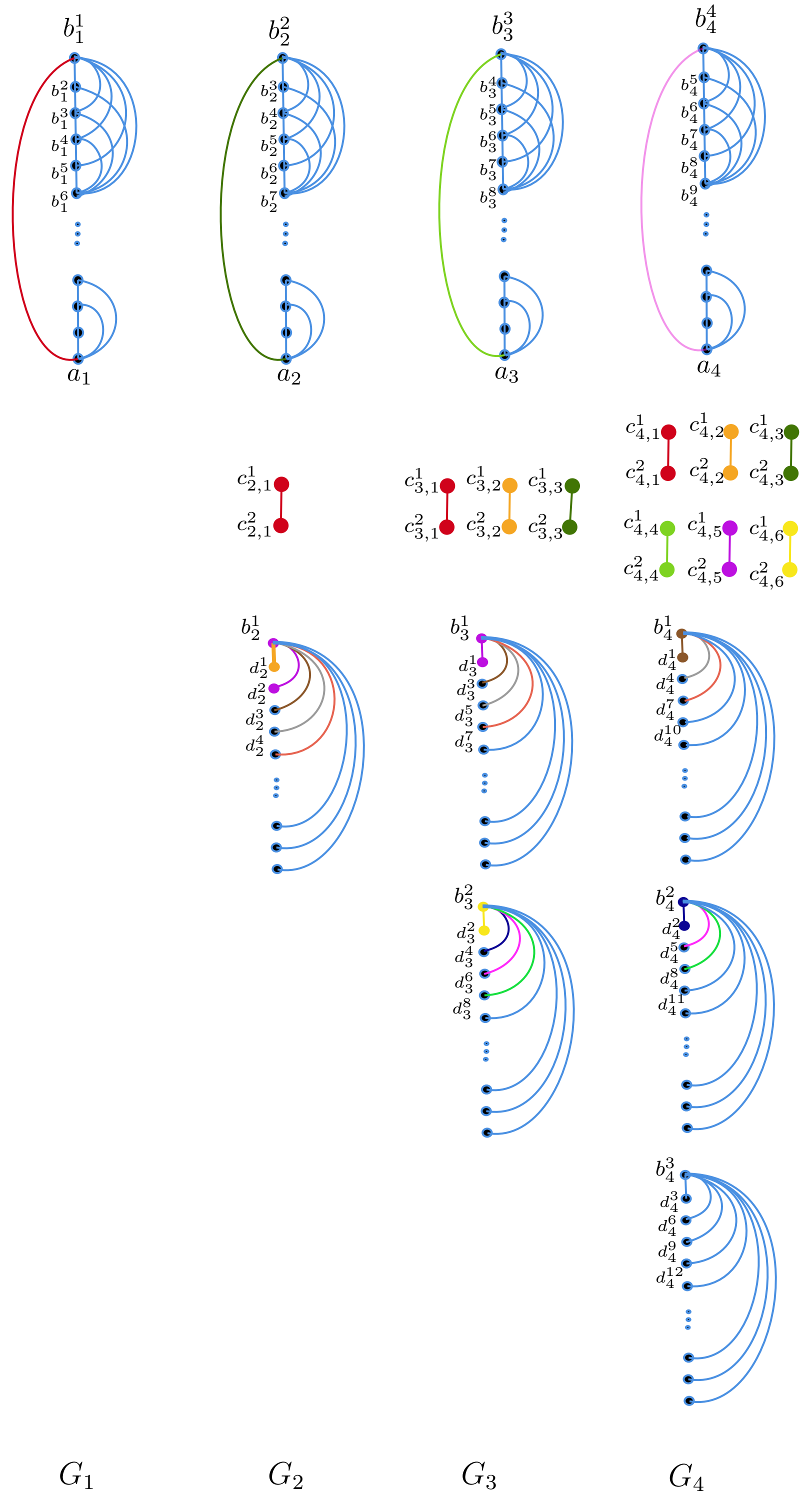

Figura 3.4: Representación de las primeras 4 gráficas y las relaciones, ejemplo 3.1.22.

- Caso 3: Sean $a, b \in C_k^{i+1}$. Supongamos que $a = c_{i+1,k}^1$ y $b = c_{i+1,k}^2$. Así, si $k = 1$, $g_i^{i+1}(a) = a_i$ y $g_i^{i+1}(b) = b_i^i$, por lo tanto $(g_i^{i+1}(a), g_i^{i+1}(b)) \in r_i$. Si $k \in \{2, ..., L_i + 1\}$, entonces $g_i^{i+1}(a) = c_{i,k-1}^1$ y $g_i^{i+1}(b) = (c^2)_{i,k-1}$, por lo tanto $(g_i^{i+1}(a), g_i^{i+1}(b)) \in r_i$. Por último, si $k \in \{L_i + 2, ..., L_{i+1}\}$, tenemos que $g_i^{i+1}(a) = d_i^{k-(L_i+1)}$ y $g_i^{i+1}(b) = b_i^{k-(L_i+1)}$, así $(g_i^{i+1}(a), g_i^{i+1}(b)) \in r_i$.

- Caso 4: Sean $b = b_{i+1}^k$, con $k < i + 1, a = d_{i+1}^{i \cdot j+k}$ con $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si $i \cdot j + k = i \cdot r$, para algún $r \in \mathbb{N}$, entonces $g_i^{i+1}(a) = a_i$ y $g_i^{i+1}(b) = b_i^k$. Luego, $(g_i^{i+1}(a), g_i^{i+1}(b)) \in r_i$. Ahora, si $i \cdot j + k = i \cdot r + n$ con $0 < n < i$, entonces $g_i^{i+1}(a) = d_i^{(i-1)(j+1)+n}$ y $g_i^{i+1}(b) = b_i^k$. Por lo tanto, como $n < i$, $(g_i^{i+1}(a), g_i^{i+1}(b)) \in r_i$.

Concluimos así que $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ define una sucesión inversa de gráficas. Como, para cada $i \in \mathbb{N}$, el conjunto G_i es numerable, se tiene que el conjunto $B(a, r_i)$ es numerable, para cada $a \in G_i$. Por lo tanto, $g_i^{i+1}(B(a, r_i))$ es numerable, para cada $a \in G_i$ e $i \in \mathbb{N}$. Luego, se satisface la segunda condición de la definición de g-estructura celular.

Antes de mostrar que se satisface la primera condición de la definición de g-estructura celular, mostraremos el siguiente lema.

Lema 3.1.23. *Sea $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3, ...) \in G_\infty$ tal que $w_i = d_i^k$ para algunos $k, i \in \mathbb{N}$. Entonces existe un $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $w_{j_0} \in C_s^{j_0}$, para algún $s \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Consideremos la preimagen de w_i bajo la función g_i^{i+1}, por definición de la función g_i^{i+1}, tenemos dos casos: en el primer caso w_i es el resultado de aplicar el renglón 6 de la función g_i^{i+1} y en el caso 2, w_i es el resultado de aplicar el renglón 8 de la función g_i^{i+1}. Si $k \leq i - 1$, tenemos el primer caso, así $w_{i+1} = c_{i+1,k+L_i+1}^1$. Por lo tanto, tomando $j_0 = i + 1$ y $s = k + L_{j_0-1} + 1$, $w_j \in C_{k+L_{j_0-1}+1}^j$. Supongamos ahora que $k > i - 1$. Entonces podemos factorizar a k de la siguiente manera $k = (i-1)(j+1) + n$, con $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $0 < n \leq i - 1$. Así, tenemos el caso 2 y por definición de g_i^{i+1} resulta que $w_{i+1} = d_{i+1}^{i \cdot j+n}$. Consideremos ahora la preimagen de w_{i+1} bajo la función g_{i+1}^{i+2}, nuevamente tenemos dos casos, en el primer caso w_{i+1} es el resultado de aplicar el renglón 6 de la función g_{i+1}^{i+2} y en el caso 2, w_{i+1} es el resultado de aplicar el renglón 8 de la función g_{i+1}^{i+2}. Si $i \cdot j + n \leq i$, tenemos el caso 1, así $w_{i+2} = c_{i+2,i \cdot j+n+L_{i+1}+1}^1$. Por lo tanto, tomando $j_0 = i + 2$ y $s = i \cdot j + n + L_{j_0-1} + 1$, $w_{j_0} \in C_{i \cdot j+n+L_{j_0-1}+1}^{j_0}$. Si $i \cdot j + n > i$, tenemos el caso 2, entonces $w_{i+2} = d_{i+2}^{(i+1)(j-1)+n}$. En general, si w_{i+t} no pertenece a algún C_k^i, entonces $w_{i+t} = d_{i+t}^{(i+t-1)(j-t+1)+n}$. Así, para $m = j + 1$ tenemos $w_{i+m} = d_{i+m}^n$. Como $0 < n < i - 1 \leq i + m - 1$, tenemos que $w_{i+m+1} = c_{i+m+1,n+L_{i+m}+1}^i$. Luego, tomando $j_0 = i + m + 1$ y $s = n + L_{j_0-1} + 1$, $w_{j_0} \in C_{n+L_{j_0-1}+1}^{j_0}$. Concluimos por lo tanto que para cada $\bar{w} \in G_\infty$ tal que $w_i = d_i^k$, para algunos $k, i \in \mathbb{N}$, existe un $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $w_{j_0} \in C_s^{j_0}$, para algún $s \in \mathbb{N}$. ■

Mostraremos, ahora sí, que se satisface la primera condición de g-estructura celular. Sea $(\bar{w}_1, w_2, w_3, ...) \in G_\infty$ e $i \in \mathbb{N}$. Veamos que si $w_i \in \{a_i\} \cup \{b_i^k : k \in \mathbb{N}\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{L_i} C_k^i\right)$, se tiene que $B(w_i, r_i) = B(w_i, 2r_i)$. Si $w_i = a_i$ o $w_i = b_i^k$ con $k \geq i$, entonces $B(w_i, r_i) = \{a_i\} \cup \{b_i^k : k \geq i\}$ y $B(w_i, 2r_i) = \{a_i\} \cup \{b_i^k : k \geq i\}$. Si $w_i = b_i^k$, con $k < i$, $B(w_i, r_i) = \{b_i^k\} \cup \{d_i^{(i-1)j+k} : j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ y $B(w_i, 2r_i) = \{b_i^k\} \cup \{d_i^{(i-1)j+k} : j \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Por último, si $w_i \in C_k^i$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces $B(w_i, r_i) = C_k^i$ y $B(w_i, 2r_i) = C_k^i$. Por lo tanto, si $w_i \in \{a_i\} \cup \{b_i^k : k \in \mathbb{N}\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{L_i} C_k^i\right)$, $B(w_i, r_i) = B(w_i, 2r_i)$. Así, consideremos $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3, ...) \in G_\infty$ tal que $w_i = d_i^k$ para algunos $k, i \in \mathbb{N}$. Entonces, por el Lema 3.1.23, existe un $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $w_{j_0} \in C_s^{j_0}$, para algún $s \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, para ese j_0 se tiene que $B(w_{j_0}, r_{j_0}) = B(w_{j_0}, 2r_{j_0})$. Así, para cada $i \in \mathbb{N}$ y $\bar{w} \in G_\infty$, existe $j \in \mathbb{N}$, tal que $g_i^j(B(w_j, 2r_j)) \subset B(w_i, r_i)$. Por lo tanto, $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ define una g-estructura celular.

Proposición 3.1.24. *El espacio* G^* *determinado por la g-estructura celular definida en el ejemplo 3.1.22, no es* T_3.

Demostración. Consideremos: $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3, ...)$, $A = \{(b_1^k, b_2^k, b_3^k, ...) : k \in \mathbb{N}\}$ y $B = \pi(A)$. Veamos que B es un conjunto cerrado en G^* que no contiene a $\pi(\bar{a})$. Sea $b_k = (b_1^k, b_2^k, b_3^k, ...) \in A$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Por definición de r_{k+1}, a_{k+1} está relacionado con b_{k+1}^t, si $t \geq k+1$. Por lo tanto, $(b_{k+1}^k, a_{k+1}) \notin r_{k+1}$, de lo cual se sigue que $(b_k, \bar{a}) \notin r$. Luego, como k fue arbitrario, $\bar{a}$ no está relacionado con ningún elemento de A. Por lo tanto, $\pi(\bar{a}) \notin B$.

Sea $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, ...) \in \pi^{-1}(\mathrm{G}^* \backslash B)$. Veamos que $\pi^{-1}(\mathrm{G}^* \backslash B) \subset G_\infty \backslash A$. Consideremos $\bar{b} \in \pi^{-1}(\mathrm{G}^* \backslash B)$, entonces $\pi(\bar{b}) \in \mathrm{G}^* \backslash B$ y por lo tanto $\pi(\bar{b}) \notin B = \pi(A)$. Así, $\bar{b} \notin A$, de modo que $\bar{b} \in G_\infty \backslash A$. Por lo tanto, $\bar{x} \notin A$. Mostraremos ahora que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_k \neq b_k^n$. Por contradicción, supongamos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_k = b_k^n$. En particular para $k = 1$, existe n_1 tal que $x_1 = b_1^{n_1}$. Como $x_1 = g_1^2(x_2)$ y para $k = 2$ existe n_2 tal que $x_2 = b_2^{n_2}$, entonces $x_2 = b_2^{n_1}$. Aplicando inducción, supongamos que $x_t = b_t^{n_1}$, para algún $t \in \mathbb{N}$. Como $x_t = g_t^{t+1}(x_{t+1})$ y para $k = t+1$ existe n_{t+1} tal que $x_{t+1} = b_{t+1}^{n_{t+1}}$, resulta que $x_{t+1} = b_{t+1}^{n_1}$. Así, $x_t = b_t^{n_1}$, para cada $t \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\bar{x} \in A$ lo cual es una contradicción. Luego, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_k \neq b_k^n$.

Veamos ahora que $g_k^{-1}(x_k)$ es un abierto que contiene a $\bar{x}$ y está contenido en $\pi^{-1}(\mathrm{G}^* \backslash B)$. Sea $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3, ...) \in g_k^{-1}(x_k)$, entonces $w_k = x_k$. Ahora, si $\bar{w} = \bar{a}$, entonces $\bar{w} \in \pi^{-1}(\mathrm{G}^* \backslash B)$, pues $\pi(\bar{a}) \in \mathrm{G}^* \backslash B$. Supongamos entonces que $\bar{w} \neq \bar{a}$, entonces $w_k = d_k^n$ o $w_k = c_{k,m}^r$, donde $n, m \in \mathbb{N}$ y $r \in \{1, 2\}$. Consideremos primero el caso en que $\bar{w}$ satisface $w_k = d_k^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 3.1.23, existe $l > k$ tal que $w_l = c_{l,t}^r$, para algún $t \in \mathbb{N}$ y $r \in \{1, 2\}$. Por lo tanto, por definición de r_l, $(w_l, b_l^s) = (c_{l,t}^r, b_l^s) \notin r_l$ para cada $s \in \mathbb{N}$. Así, $(\bar{w}, b_s) \notin r$, para cada $b_s \in A$, lo cual implica que $\pi(\bar{w}) \notin B$. Luego, $\pi(\bar{w}) \in \mathrm{G}^* \backslash B$ y por lo tanto, $\bar{w} \in \pi^{-1}(\mathrm{G}^* \backslash B)$. Para el otro caso, sea $\bar{w}$ tal que $w_k = c_{k,m}^r$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y $r \in \{1, 2\}$. Entonces $(c_{k,m}^r, b_k^s) \notin r_l$, para cada $s \in \mathbb{N}$, y de manera análoga al caso anterior, tenemos que $\bar{w} \in \pi^{-1}(\mathrm{G}^*\backslash B)$. Concluimos que $g_k^{-1}(x_k)$ es un abierto que contiene a $\bar{x}$ y $g_k^{-1}(x_k) \subset \pi^{-1}(\mathrm{G}^*\backslash B)$.

Por lo tanto, $\pi^{-1}(\mathrm{G}^*\backslash B)$ es abierto, lo cual implica que $\mathrm{G}^*\backslash B$ es abierto en G^*. Así, B es cerrado en G^*.

Para mostrar que G^* no es T_3 mostraremos que no existen abiertos disjuntos U y V en G^* tales que $\pi(\bar{a}) \in U$ y $B \subset V$.

Sean U y V conjuntos abiertos en G^* tales que $\pi(\bar{a}) \in U$ y $B \subset V$. Entonces se tiene que $\pi^{-1}(U)$ y $\pi^{-1}(V)$ son conjuntos abiertos en G_∞, los cuales satisfacen $\pi^{-1}(\pi(\bar{a})) \subset \pi^{-1}(U)$ y $\pi^{-1}(B) \subset \pi^{-1}(V)$. Además, $\pi^{-1}(\pi(\bar{a})) = \{\bar{a}\}$. Así, como $\bar{a} \in \pi^{-1}(U)$ y $\pi^{-1}(U)$ es abierto, existe un abierto básico $g_j^{-1}(u_j)$ tal que $\bar{a} \in g_j^{-1}(u_j) \subset \pi^{-1}(U)$. Luego, $a_j = u_j$ y por lo tanto, $g_j^{-1}(a_j) \subset \pi^{-1}(U)$. Por definición de r_j tenemos que $(a_j, b_j^j) \in r_j$. Consideremos ahora el hilo $b_j = (b_1^j, b_2^j, b_3^j, ..., b_{j-1}^j, b_j^j, ...)$. Entonces $b_j \in A$ y por lo tanto $b_j \in \pi^{-1}(B) \subset \pi^{-1}(V)$. Como $\pi^{-1}(V)$ es abierto, para b_j existe un abierto básico $g_i^{-1}(b_i^j)$ tal que $b_j \in g_i^{-1}(b_i^j) \subset \pi^{-1}(V)$. Luego, si $\bar{z} \in g_{i+1}^{-1}(b_{i+1}^j)$, entonces $z_{i+1} = b_{i+1}^j$, lo cual implica que $z_i = g_i^{i+1}(b_{i+1}^j) = b_i^j$ y por lo tanto $\bar{z} \in g_i^{-1}(b_i^j)$. Así, $g_{i+1}^{-1}(b_{i+1}^j) \subset g_i^{-1}(b_i^j)$ y por lo tanto, sin perder generalidad, podemos suponer que $i > j$. Recordemos que $L_{i+1} = L_i + i$, así $L_i + 2 \leq j + L_i + 1 \leq L_{i+1}$. Luego, utilizando el renglón 7 de la función de ligadura g_i^{i+1}, tenemos que $g_i^{i+1}(c^2_{i+1,j+(L_i+1)}) = b_i^j$. Consideremos ahora el hilo:

$$\bar{c} = (b_1^j, b_2^j, b_3^j, ..., b_j^j, ..., b_i^j, c^2_{i+1,j+(L_i+1)}, c^2_{i+2,j+(L_i+1)+1}, c^2_{i+3,j+(L_i+1)+2}, ...).$$

Entonces $\bar{c} \in g_i^{-1}(b_i^j)$ y por lo tanto, $\bar{c} \in \pi^{-1}(V)$. Definamos el hilo $\bar{d}$ de la siguiente manera:

$$\bar{d} = (a_1, ..., g_{i-1}^{i+1}(c^1_{i+1,j+(L_i+1)}), g_i^{i+1}(c^1_{i+1,j+(L_i+1)}), c^1_{i+1,j+(L_i+1)}, c^1_{i+2,j+(L_i+1)+1}, ...).$$

Por definición de la relación r_{i+k} con $k \in \mathbb{N}$, $(c^2_{i+k,j+(L_i+k)}, c^1_{i+k,j+(L_i+k)}) \in r_{i+k}$. Así, $(\bar{d}, \bar{c}) \in r$ y por lo tanto, $\bar{d}$ también pertenece a $\pi^{-1}(V)$. Dado que $i > j$, se tiene que $L_i + 1 \leq j + L_i + 1 \leq L_i + i = L_{i+1}$ y considerando el renglón 6 de la función de ligadura g_i^{i+1}, resulta que $g_i^{i+1}(c^1_{i+1,j+(L_i+1)}) = d_i^j$. Si $j = i-1$, utilizando el renglón 9 de la función g_{i-1}^i, resulta que $g_{i-1}^i(d_i^j) = a_{i-1} = a_j$. En otro caso ($j < i-1$), utilizando el renglón 8 de la función g_{i-1}^i, $g_{i-1}^i(d_i^j) = d_{i-1}^{i-2+j}$. Aplicando ahora la función g_{i-2}^{i-1} nuevamente tenemos dos casos. Si $j = i-2$, $g_{i-2}^{i-1}(d_{i-1}^{i-2+j}) = a_{i-2} = a_j$, en otro caso ($j < i-2$), $g_{i-2}^{i-1}(d_{i-1}^{i-2+j}) = d_{i-2}^{i-3+j}$. Como $i > j > 1$, existe $0 < l < i$ tal que $j = i - l$. Continuando con el proceso anterior hasta que $j = i - l$, tendremos que $g_{i-l}^{i-l+1}(d_{i-l+1}^{i-l+j}) = a_{i-l} = a_j$. Por lo tanto $g_j^i(d_i^j) = a_j$. Concluimos así que $\bar{d}$ pertenece a $g_j^{-1}(a_j)$ y por lo tanto $\bar{d} \in \pi^{-1}(U)$. Luego, $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) \neq \emptyset$, es decir, existe $\bar{z} \in G_\infty$ tal que $\pi(\bar{z}) \in U$ y $\pi(\bar{z}) \in V$. Por lo tanto, $\pi(\bar{z}) \in U \cap V$, concluyendo así que $U \cap V \neq \emptyset$. Hemos demostrado que cualquier par de conjuntos U y V abiertos en G^* tales que $\pi(\bar{a}) \in U$ y $B \subset V$, tienen intersección no vacía, de lo cual se sigue que G^* no es T_3. ■

3.2. Espacios con g-estructura celular

Considerando el ejemplo del coproducto reducido de círculos, ejemplo 3.1.10, podemos construir otros espacios que son determinados por una g-estructura celular, pero no por una estructura celular.

Proposición 3.2.1. *Sea $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios topológicos tales que cada X_k es discreto. Entonces el coproducto reducido $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} X_k$ es determinado por una estructura celular de acuerdo a la Definición 2.1.1.*

Demostración. Sea $X = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} X_k$ y x_0 el punto en común de los espacios X_k. Consideremos primero el caso en que cada uno de los espacios X_k es finito, supongamos $X_k = \{x_0, x_k^1, ...x_k^{r_k}\}$, entonces podemos definir la función $\varphi : X \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, como $\varphi(x_k^t) = (k, t)$ y $\varphi(x_0) = (0, 0)$. La función φ es un homeomorfismo sobre su imagen y como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es completamente metrizable, entonces $\varphi(X)$ es metrizable con la métrica discreta y por lo tanto, es completamente metrizable. Así, X tiene un estructura celular. De forma análoga si los espacios X_k son numerables, supongamos $X_k = \{x_0, x_k^1, x_k^2, ...\}$, podemos definir $\varphi(x_k^t) = (k, t)$ y $\varphi(x_0) = (0, 0)$ y el espacio X sigue teniendo una estructura celular. ■

Así, si consideremos el espacio $X_k = \mathbb{N}$ con la topología discreta. Entonces, por la Proposición 3.2.1, el espacio cociente $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} X_k = \sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k/\{1\}$, ver figura 3.5, es determinado por una estructura celular.

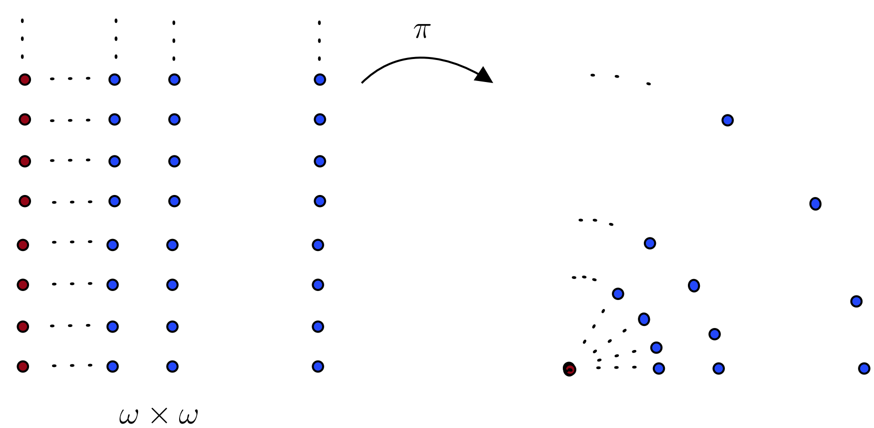

Figura 3.5: Representación del espacio cociente.

Proposición 3.2.2. *Sea $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios topológicos tales que:*

- *X_k tiene una estructura celular de acuerdo a la Definición 2.1.1.*

- *X_k no tiene puntos aislados.*

Entonces el coproducto reducido $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} X_k$ es determinado por una g-estructura celular que no es una estructura celular de acuerdo a la Definición 2.1.1.

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $(*)_k = \{(G_i^k, r_i^k), (g_k)_i^j\}_{i<j}$ la estructura celular en X_k como se define en el Teorema 2.4.8.

Notación: Para cada espacio X_k tenemos una estructura celular $(*)_k$ con la cual obtenemos un límite inverso al cual denotaremos por G_∞^k y al espacio determinado por la estructura celular lo denotaremos por G_k^*. La función proyección i-ésima restringida a G_∞^k la denotaremos por g_i^k la cual está definida de G_∞^k a G_i^k. Las funciones de ligadura de la sucesión inversa de gráficas en X_k serán denotadas por $(g_k)_i^j$ las cuales están definidas de G_j^k a G_i^k, diagrama 3.6. Las funciones cociente definidos de G_∞^k a G_k^* los denotaremos por π_k y el homeomorfismo entre G_∞^k y X_k será denotado por φ_k.

$$\begin{tikzcd}
G_1^1 & G_2^1 \arrow[l, "(g_1)_1^2"'] & G_3^1 \arrow[l, "(g_1)_2^3"'] & \cdots & G_\infty^1 \arrow[r, "\pi_1"] & \mathrm{G}^*{}_1 \arrow[r, "\varphi_1"] & X_1 \\
G_1^2 & G_2^2 \arrow[l, "(g_2)_1^2"'] & G_3^2 \arrow[l, "(g_2)_2^3"'] & \cdots & G_\infty^2 \arrow[r, "\pi_2"] & \mathrm{G}^*{}_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & X_2 \\
G_1^3 & G_2^3 \arrow[l, "(g_3)_1^2"'] & G_3^3 \arrow[l, "(g_3)_2^3"'] & \cdots & G_\infty^3 \arrow[r, "\pi_3"] & \mathrm{G}^*{}_3 \arrow[r, "\varphi_3"] & X_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
G_1^k & G_2^k \arrow[l, "(g_k)_1^2"'] & G_3^k \arrow[l, "(g_k)_2^3"'] & \cdots & G_\infty^k \arrow[r, "\pi_k"] & \mathrm{G}^*{}_k \arrow[r, "\varphi_k"] & X_k \\
\bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_1^k & \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_2^k \arrow[l, bend left, "f_1^2"] & \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_3^k \arrow[l, bend left, "f_2^3"] & \cdots & G_\infty \arrow[r, bend right, "\pi"'] & \mathrm{G}^* \arrow[r, bend right, "\varphi"'] & \bigvee_{k\in\mathbb{N}} X_k
\end{tikzcd}$$

Figura 3.6: Diagrama que muestra la construcción de las gráficas para definir la estructura celular de $X = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} X_k$.

Sea $X = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} X_k$, veamos primero que X es un espacio no metrizable y por lo tanto no tiene una estructura celular. Como cada X_k es metrizable consideremos, para cada $k \in \mathbb{N}$, ρ_k la métrica en X_k. Supongamos que existe una base de vecindades numerable $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en el punto x_0. Como $q^{-1}(u_k)$ es un abierto en $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$, entonces $q^{-1}(u_k) \cap X_k$ es un abierto en X_k. Además $q^{-1}(u_k) \cap X_k$ es no degenerado pues x_0 pertenece a ese conjunto y X_k no tiene punto aislados. Sea $y_k \in q^{-1}(u_k) \cap X_k \setminus \{p_k\}$ y $d_k = \rho_k(p_k, y_k)$. Sea A_k un conjunto abierto en X_k tal que $p_k, y_k \in A_k \subset q^{-1}(u_k) \cap X_k$. Por definición de la función cociente, $q^{-1}\left(q\left(\bigcup B(p_k, d_k)\right)\right) = \bigcup B(p_k, d_k)$, entonces por definición de la topología cociente tenemos que $q(\bigcup B(p_k, d_k))$ es un abierto en $X = \bigvee_{k\in\mathbb{N}} X_k$, el cual no contiene a ninguno de los elementos de la base $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, pues si $u_m \subset q(\bigcup B(p_k, d_k))$, entonces $q^{-1}(u_m) \subset q^{-1}(q(\bigcup B(p_k, d_k)))$ por lo tanto $q^{-1}(u_m) \cap X_m \subset B(p_m, d_m)$. Pero $A_m \subset q^{-1}(u_m) \cap X_m$, entonces $A_m \subset B(p_m, d_m)$, lo cual es una contradicción pues $y_m \in A_m$ y $y_m \notin B(p_m, d_m)$. Concluimos entonces que x_0 no tiene una base de vecindades numerable, es decir, X no es primero numerable y como todo espacio métrico es primero numerable, entonces X no es un espacio metrizable.

Además, X no es secuencialmente compacto y tampoco compacto. Consideremos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos tales que $x_k \in X_k$ y $d(x_k, p_k) > \varepsilon$, para algún $\varepsilon > 0$ fijo, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene una subsucesión convergente y por lo tanto X no es secuencialmente compacto. Para ver que X no es compacto consideremos la cubierta abierta $\{X_k \backslash \{x_0\}\}_{k\in\mathbb{N}} \cup \{A\}$, donde A es un abierto que contiene a x_0 pero que no contiene a ningún X_k, entonces esta cubierta no tiene una subcubierta abierta finita.

Para cada $i \in \mathbb{N}$ consideremos $\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_i^k, R_i\right)$, donde cada R_i está definida por:

$$R_i = \left\{(x,y) \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_i^k \times \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_i^k : (x,y) \in r_i^k,\ \text{para algún } k \in \mathbb{N}\right\} \bigcup \left\{(g_i^k(\bar{x}_k), g_i^k(\bar{x}_j)) : j,k \in \mathbb{N} \text{ y } \bar{x}_k, \bar{x}_j \text{ satisfacen } \varphi_k^{-1}(p_k) = \pi_k(\bar{x}_k) \text{ y } \varphi_j^{-1}(p_j) = \pi_j(\bar{x}_j)\right\}.$$

Para tener una idea más clara de las relaciones R_i, incluimos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
G_i^k \arrow[r, "g_i^k"] & G_\infty^k \arrow[r, "\pi_k"] & \mathrm{G}^*{}_k \arrow[r, leftrightarrow, "\varphi_k"] & X_k \\
g_i^k\,(\bar{x}_k) & \bar{x}_k \arrow[l, mapsto] & {[\bar{x}_k]} \arrow[l, mapsto] & p_k \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Veamos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, R_i es una relación simétrica y reflexiva. Sea $i \in \mathbb{N}$.

1. Para ver que R_i es reflexiva, sea $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_i^k$. Entonces $x \in G_i^t$ para algún $t \in \mathbb{N}$. Luego $(x,x) \in r_i^t$ y por lo tanto $(x,x) \in R_i$.

2. Para ver que R_i es simétrica, consideremos $(x,y) \in R_i$, entonces tenemos:

   - Si $(x,y) \in r_i^t$ para algún $t \in \mathbb{N}$. Entonces $(y,x) \in r_i^t$, por lo tanto $(y,x) \in R_i$.
   - Si $x = g_i^k(\bar{x}_k)$ y $\bar{y} = g_i^k(\bar{x}_j)$ tal que $\varphi_k^{-1}(p_k) = \pi_k(\bar{x}_k)$ y $\varphi_j^{-1}(p_j) = \pi_j(\bar{x}_j)$, entonces $(y,x) \in R_i$.

Consideremos la sucesión de gráficas $\left\{\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_i^k, R_i\right)\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ y definamos las funciones $f_i^{i+1} : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_{i+1}^k \to \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_i^k$ como $f_i^{i+1}(x) = (g_k)_i^{i+1}(x)$, donde $x \in G_{i+1}^k$. Definamos f_i^i como la función identidad. Por lo tanto $\left\{\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_i^k, R_i\right), f_i^{i+1}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ satisface las dos primeras condiciones de sucesión inversa de gráficas.

Supongamos que $(x,y) \in R_{i+1}$. Queremos motrar que $(f_i^{i+1}(x), f_i^{+1}(y)) \in R_i$.

- Caso 1: Si $(x,y) \in r_{i+1}^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Entonces $((g_k)_i^{i+1}(x), (g_k)_i^{i+1}(y)) \in r_i^k$, de donde se tiene que $(f_i^{i+1}(x), f_i^{i+1}(y)) \in r_i^k$. Así, $(f_i^{i+1}(x), f_i^{i+1}(y)) \in R_i$.

- Caso 2: Si x y y son elementos de la forma $x = g_{i+1}^k(\bar{x}_k)$, $y = g_{i+1}^k(\bar{x}_j)$ donde $\varphi_k^{-1}(p_k) = \pi_k(\bar{x}_k)$ y $\varphi_j^{-1}(p_j) = \pi_j(\bar{x}_j)$, entonces por definición de f_i^{i+1} tenemos que $f_i^{i+1}(x) = f_i^{i+1}(g_{i+1}^k(\bar{x}_k)) = (g_k)_i^{i+1}(g_{i+1}^k(\bar{x}_k)) = g_i^k(\bar{x}_k)$. De forma análoga $f_i^{i+1}(y) = g_i^k(\bar{x}_j)$, por lo tanto $(f_i^{i+1}(x), f_i^{i+1}(y)) \in R_i$.

Concluimos por tanto que $\left\{\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_i^k, R_i\right), f_i^{i+1}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión inversa de gráficas. Veamos ahora que $\left\{\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_i^k, R_i\right), f_i^{i+1}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ satisface la condición 4 de la definición de estructura celular.

Sea $\bar{x} \in G_\infty$ e $i \in \mathbb{N}$. Mostraremos que existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $j > i$ y $f_i^j(B(x_j, 2R_j)) \subset B(x_i, R_i)$. Como $\bar{x} \in G_\infty$, entonces $\bar{x} \in G_\infty^t$, para algún $t \in \mathbb{N}$. Luego, $x_i \in G_i^t$. Dado que $(*_t)$ define una estructura celular, entonces para el i que fijamos existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $(g_t)_i^j(B(x_j, 2r_j^t)) \subset B(x_i, r_i^t)$. Para ese j, consideremos $y \in B(x_j, 2R_j) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_j^k$. Entonces existe un $z \in G_j^k$ tal que $(y, z) \in R_j$ y $(z, x_j) \in R_j$. Tenemos por tanto los siguientes casos:

- Caso 1: Si $(y, z) \in r_j^t$ y $(z, x_j) \in r_j^t$, entonces $y \in B(x_j, 2r_j^t)$. Por lo tanto, $(g_t)_i^j(y) \in B(x_i, r_i^t)$, lo cual implica que $f_i^j(y) \in B(x_i, r_i^t) \subset B(x_i, R_i)$, es decir, $f_i^j(B(x_j, 2R_j)) \subset B(x_i, R_i)$.

- Caso 2: Si $x_j = g_j^k(\bar{x}_k)$, $y = g_j^t(\bar{x}_t)$ y $z = g_j^s(\bar{x}_s)$ tal que $\varphi_k^{-1}(p_k) = [\bar{x}_k]$, $\varphi_t^{-1}(p_t) = [\bar{x}_t]$ y $\varphi_s^{-1}(p_s) = [\bar{x}_s]$, entonces $(y, x_j) \in R_j$. Luego $((g_k)_i^j(y), (g_t)_i^j(x_j)) \in R_i$. Por lo tanto $f_i^j(y) \in B(x_i, R_i)$, es decir, $f_i^j(B(x_j, 2R_j)) \subset B(x_i, R_i)$.

- Caso 3: Si $(x_j, z) \in r_j^t$ y $y = g_j^s(\bar{x}_s)$, $z = g_j^t(\bar{x}_t)$. Dado que estamos considerando la estructura celular de acuerdo al Teorema 2.4.8, entonces la estructura satisface que para cada $\bar{x} \in G_\infty^k$ e $i \in \mathbb{N}$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que si $y \in B(x_j, r_j)$, entonces $(g_k)_i^j(y) = (g_k)_i^j(x_j)$. Por lo tanto, en el caso 3 tenemos que existe un $j \in \mathbb{N}$, tal que $(g_t)_i^j(z) = (g_t)_i^j(x_j)$. Como $(g_s)_i^j(g_j^s(\bar{x}_s)) = g_i^s(\bar{x}_s)$ y $(g_t)_i^j(g_j^t(\bar{x}_t)) = g_i^t(\bar{x}_t)$, entonces $(g_i^s(\bar{x}_s), g_i^t(\bar{x}_t)) \in R_i$, es decir, $((g_s)_i^j(y), (g_t)_i^j(z)) \in R_i$. Luego $(f_i^j(y), f_i^j(z)) \in R_i$, por lo tanto $(f_i^j(y), f_i^j(x_j)) \in R_i$.

Veamos ahora que la condición 2 de estructura celular no se satisface. Recordemos que x_0 denota el punto común a todos los X_i con $i \in \mathbb{N}$. Sea $\bar{x} \in G_\infty$ tal que $x_0 \in x_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Notemos que por cada uno de los espacios X_k existe un $\bar{y} \in G_\infty$ tal que $x_0 \in y_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $B(x_i, r_i)$ es numerable para cada $i \in \mathbb{N}$. Por construcción de las gráficas $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_i^k$ para cada $y_j \in B(x_j, r_j)$ existe $y_{j-1} \in G_{j-1}$ tal que $y_{j-1} = g_{j-1}^j(y_j) \supset y_j$. Por lo tanto, $g_i^j(B(x_j, r_j))$ es numerable.

Concluimos así que $\left\{\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_i^k, R_i\right), f_i^{i+1}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ define una g-estructura celular de gráficas, pero no una estructura celular.

Definamos en G_∞ la relación r por $(\bar{x}, \bar{y}) \in r$ si y solo si $(x_i, y_i) \in r_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Consideremos $\pi : G_\infty \to \mathrm{G}^* = G_\infty / r$ el mapeo cociente. Queremos mostrar que G^* es homeomorfo a X.

Definamos $\varphi : \mathrm{G}^* \to X$ por $\varphi(\pi(\bar{x})) = p$, donde $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$ y $\bar{x} \in G_\infty$.

$$\begin{tikzcd}
G_\infty \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi\circ\pi"'] & & \mathrm{G}^* \arrow[dl, "\varphi"] \\
& \bigvee_{k\in\mathbb{N}} X_k &
\end{tikzcd}$$

Sea $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$ y $q \neq p$. Si $p, q \in X_k$, como X_k es métrico, entonces $d(x, y) > 0$. Sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{10^j} < d(p, q)$. Como el diámetro de x_j es menor que $\frac{1}{10^j}$ entonces $q \notin x_j$, por lo tanto $q \notin \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$. Si $q \in X_m$ y $p \in X_k$ con $m \neq k$, entonces $q \notin x_1$. Por lo tanto $q \notin \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$. De lo anterior, $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$ es único.

Veamos que φ es inyectiva. Sean $\bar{x}, \bar{y} \in G_\infty$ tales que $\bar{x} \nsim \bar{y}$, entonces existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \cap y_i = \emptyset$. Esto implica que si $\{q\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} y_i$, entonces $q \notin x_i$. Luego, $q \notin \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$. Por lo tanto $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} y_i \neq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$. De esto tenemos que $\varphi(\pi(\bar{x})) \neq \varphi(\pi(\bar{y}))$.

Veamos ahora que φ es suprayectiva. Sea $p \neq x_0$, entonces $p \in X_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Definamos $A_i = \{F \in G_i^k : p \in F\}$, consideremos la sucesión inversa de gráficas $\{(A_i, r_i^k|_{A_i}), (g_k)_{i-1}^i|_{A_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $A_\infty = \varprojlim\{(A_i, r_i^k|_{A_i}), (g_k)_{i-1}^i|_{A_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Como cada G_i^k satisface las hipótesis del Teorema 2.3.4, p pertenece a una cantidad finita de elementos de G_i^k, entonces A_i es finito y no vacío. Por lo tanto, $g_i^j(A_j)$ es finito y no vacío, lo cual implica que $A_\infty \neq \emptyset$. Sea $\bar{x} \in A_\infty$, entonces $p \in x_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, por lo que $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$, de donde se sigue que $p = \varphi(\pi(\bar{x}))$. En el caso en que $p = x_0$, para algún $k \in \mathbb{N}$ fijo, consideremos $x_1 \in G_1^k$ tal que $x_0 \in x_1$ y tomemos $\bar{x}$ tal que $x_i = Cl_X(B(x_0, \frac{1}{i})) \cap x_{i-1}$, para $i > 1$, el cual satisface que $\varphi(\pi(\bar{x})) = x_0$.

Para mostrar que φ es continua probaremos la continuidad de $\varphi \circ \pi$ y como π es continua tendremos la continuidad de φ. Sea A un subconjunto abierto y no vacío en X. Notemos que $(\varphi \circ \pi)^{-1}(A) = \{\bar{x} \in G_\infty : (\varphi \circ \pi)(\bar{x}) \in A\} = \{\bar{x} \in G_\infty : \pi(\bar{x}) \in \varphi^{-1}(A)\} = \{\bar{x} \in G_\infty : \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i \subset A\}$.

Sea $\bar{z} \in (\varphi \circ \pi)^{-1}(A)$, entonces $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} z_i \subset A$. Por lo tanto existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} z_i \subset X_k$. Como X_k es métrico y $A \cap X_k$ es abierto y no vacío, entonces existe un $r_k \in \mathbb{N}$ tal que $B\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} z_i, \frac{1}{r_k}\right) \cap X_k \subset A$. Notemos que como $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} z_i \subset z_{r_k+1}$ y el diámetro de z_{r_k+1} es menor que $\frac{1}{r_{k+1}}$ entonces $z_{r_k+1} \subset B\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} z_i, \frac{1}{r_k}\right)$. Pero $g_{r_k+1}^{-1}(z_{r_k+1}) \subset (\varphi \circ \pi)^{-1}(z_{r_k+1}) \subset (\varphi \circ \pi)^{-1}\left(B\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} z_i, \frac{1}{r_k}\right)\right) \subset (\varphi \circ \pi)^{-1}(A)$ y $\bar{z} \in g_{r_k+1}^{-1}(z_{r_k+1})$. Por lo tanto $\bar{z} \in g_{r_k+1}^{-1}(z_{r_k+1}) \subset (\varphi \circ \pi)^{-1}(A)$.

Definamos la función $\phi : X \to \mathrm{G}^*$ por $\phi(p) = [\bar{x}]$ tal que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i = \{p\}$. Notemos que ϕ es la inversa de φ, para mostrar que φ es un homeomorfismo probaremos que ϕ es continua. Sea A un subconjunto abierto en G^*. Mostraremos que el conjunto $\phi^{-1}(A) = \{p \in X : \{p\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i, \text{ para algún } \bar{x} \in \pi^{-1}(A)\}$ es abierto en X.

$$\begin{tikzcd} G_\infty \arrow[r, "\pi"] & G^* \\ & \bigvee_{k\in\mathbb{N}} X_k \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

Sea $p \in \phi^{-1}(A)$, para cada $\bar{x} \in G_\infty$ tal que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i = \{p\}$, tenemos que $\bar{x} \in \pi^{-1}(A)$. Como $\pi^{-1}(A)$ es abierto, entonces existe $g_i^{-1}(x_i)$ tal que:

$$\bar{x} \in g_i^{-1}(x_i) \subset \pi^{-1}(A). \tag{3.2}$$

Luego $p \in x_i$ y $\pi(g_i^{-1}(x_i)) \subset A$.

Para cada $\bar{x} \in G_\infty$ tal que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i = \{p\}$ sea $g_i^{-1}(x_i)$ que satisface 3.2. Sea $S = \{x_i : \bar{x} \in g_i^{-1}(x_i) \subset \pi^{-1}(A),$ para algún $\bar{x}$ que satisface $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i = \{p\}\}$. Sin pérdida de generalidad $x_i = Cl_X(B\left(z, \frac{1}{i}\right))$ y $p \in B\left(z, \frac{1}{i}\right) \subset x_i$. Entonces $\phi(B\left(z, \frac{1}{i}\right)) \subset \phi(x_i) = \pi(g_i^{-1}(x_i)) \subset A$.

Por lo tanto, $p \in \bigcup\{B\left(z, \frac{1}{i}\right) : x_i = Cl_X(B\left(z, \frac{1}{i}\right))$ para algún $x_i \in S\} \subset \phi^{-1}(A)$. ■

Dado que los espacios que hemos construido son determinados por una g-estructura celular y son espacios cocientes en los que solo identificamos un punto, tiene sentido preguntarnos si podemos definir una g-estructura celular identificando más de un punto. Así, abordaremos este problema en la siguiente sección.

3.3. G-estructura celular definida a partir de cubiertas

En esta sección presentamos algunas definiciones y damos condiciones en términos de cubiertas para poder definir una g-estructura celular en un espacio X.

Definición 3.3.1. Sea $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j\in J}$ una cubierta de X. Definimos la ***estrella*** de un conjunto $M \subset X$ con respecto a $\mathcal{A}$, denotada por $St(M, \mathcal{A})$, como el conjunto:

$$St(M, \mathcal{A}) = \bigcup\{A_s \in \mathcal{A} : M \cap A_s \neq \emptyset\}.$$

Si $M = \{p\}$, escribiremos simplemente $St(p, \mathcal{A})$.

Como se vio en el Lema 2.3.3, dada una sucesión de cubiertas $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de un espacio topológico X tales que $\mathcal{F}_{i+1} < \mathcal{F}_i$ podemos definir las siguientes relaciones $r_i = \{(F, G) \in \mathcal{F}_i \times \mathcal{F}_i : F \cap G \neq \emptyset\}$ y considerar en cada $\mathcal{F}_i$ la topología discreta. Entonces $\{(\mathcal{F}_i, r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de gráficas. Definiendo las funciones $g_i^{i+1} : \mathcal{F}_{i+1} \to \mathcal{F}_i$ tal que $F \subset g_i^{i+1}(F)$ para $F \in \mathcal{F}_{i+1}$ y g_i^i la función identidad, $\{(\mathcal{F}_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ define una sucesión inversa de gráficas y por lo tanto, definen un límite inverso $\mathcal{F}_\infty$.

Lema 3.3.2. *Sea X un espacio T_1 y $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cubiertas cerradas, localmente numerables tales que $\mathcal{F}_{i+1} < \mathcal{F}_i$ y $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i \neq \emptyset$ para cada $\bar{x} \in \mathcal{F}_\infty$. Si para cada $\bar{x} \in \mathcal{F}_\infty$ tal que $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$ e $i \in \mathbb{N}$, existe un $j > i$ y un abierto U tal que $St(p,\mathcal{F}_j) \subset U \subset St(p,\mathcal{F}_i)$ y $U \cap G = \emptyset$, para cualquier $G \in \mathcal{F}_i$ con $p \notin G$, entonces $\{(\mathcal{F}_i, r_i), g_i^{i+1}\}$ define una g-estructura celular.*

Demostración. Veamos primero que $\{(\mathcal{F}_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ satisface la condición 2 de g-estructura celular, donde las relaciones r_i y las funciones g_i^{i+1} son como las definimos anteriormente. Sea $\bar{x} \in \mathcal{F}_\infty$, $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$ e $i \in \mathbb{N}$. Por hipótesis existe un $j > i$ y un abierto U tal que $St(p,\mathcal{F}_j) \subset U \subset St(p,\mathcal{F}_i)$ y $U \cap G = \emptyset$, para cualquier $G \in \mathcal{F}_i$ con $p \notin G$. Como $\mathcal{F}_i$ es localmente numerable, existe un abierto V tal que $p \in V$ y V interseca a lo más a una cantidad numerable de elementos de $\mathcal{F}_i$. Sea $F \in B(x_j, r_j)$ entonces $F \cap x_j \neq \emptyset$. Si F contiene a p, entonces $g_i^j(F)$ contiene a p y por lo tanto $g_i^j(F) \cap V \neq \emptyset$. Si $p \notin F$, como $p \in x_j \subset U$, entonces $F \cap U \neq \emptyset$ y por lo tanto $g_i^j(F) \cap U \neq \emptyset$. Así, $p \in g_i^j(F)$, pues $g_i^j(F)$ es un elemento de $\mathcal{F}_i$ y si no contiene a p se tendría que $U \cap g_i^j(F) = \emptyset$, de esto, $g_i^j(F) \cap V \neq \emptyset$ y considerando que V interseca solo a una cantidad numerable de elementos en $\mathcal{F}_i$, tenemos que $g_i^j(B(x_j, r_j))$ es numerable.

Sea $\bar{x} \in \mathcal{F}_\infty$ y sea $i \in \mathbb{N}$. Sea $G_0 = \bigcup\{F \in \mathcal{F}_i : p \notin F\}$. Por hipótesis existe $j \in \mathbb{N}$ y un abierto U tal que $St(p,\mathcal{F}_j) \subset U \subset St(p,\mathcal{F}_i)$ y $U \cap G = \emptyset$, para cualquier $G \in \mathcal{F}_i$ con $p \notin G$. Entonces p no puede ser unido con G_0 por un solo elemento de $\mathcal{F}_j$, pues $U \cap G_0 = \emptyset$. Aplicando nuevamente la hipótesis existe $l > j$ y un abierto U_0 tal que $St(p,\mathcal{F}_l) \subset U_0 \subset St(p,\mathcal{F}_j)$ y $U_0 \cap G = \emptyset$, para cualquier $G \in \mathcal{F}_j$ con $p \notin G$. Veamos que p no puede ser unido con G_0 por una cadena de dos elementos en $\mathcal{F}_l$. Supongamos que $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_l$ es una cadena que une al punto p con el conjunto G_0, sin pérdida de generalidad supongamos que $p \in F_1$. En este caso, F_2 no puede contener a p, pues $g_j^l(F_2)$ sería un elemento en $\mathcal{F}_j$ que une a p con el conjunto G_0, lo cual es una contradicción. De lo anterior, se deduce que $g_j^l(F_2)$ no puede contener a p, entonces $g_j^l(F_2) \cap U_0 = \emptyset$, lo cual implica que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ y por lo tanto $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_l$ no forman una cadena.

Procediendo como antes, existe un $k > l$ y un abierto U_1 tal que $St(p,\mathcal{F}_k) \subset U_1 \subset St(p,\mathcal{F}_l)$ y $U_1 \cap G = \emptyset$, para cualquier $G \in \mathcal{F}_l$ con $p \notin G$. Veamos ahora que p no puede ser unido con G_0 por un cadena de tres elementos en $\mathcal{F}_k$. Supongamos que p puede ser unido con G_0, por la cadena F_1, F_2, F_3. sin pérdida de generalidad $p \in F_1$ y $G_0 \cap F_3 \neq \emptyset$. Entonces $p \notin F_2$, pero como $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ y $F_1 \subset U_1$, entonces $F_1 \cap U_1 \neq \emptyset$, lo cual implica que $g_l^k(F_2) \cap U_1 \neq \emptyset$, por lo tanto $p \in g_l^k(F_2)$. Como $F_2 \cap F_3 \neq \emptyset$, entonces $g_l^k(F_2) \cap g_l^k(F_3) \neq \emptyset$; se sigue que $g_l^k(F_2), g_l^k(F_3)$ es una cadena de dos elementos en $\mathcal{F}_l$ que une a p con G_0, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, si $F \in B(x_k, r_k)$, $F \cap G_0 = \emptyset$. Luego $g_i^k(F) \not\subset G_0$, lo cual implica que $p \in g_i^k(F)$, de lo cual tenemos que $g_l^k(F) \cap x_i \neq \emptyset$, es decir, $g_l^k(F) \in B(x_i, r_i)$ y por lo tanto $g_i^k(B(x_k, 2r_k)) \subset B(x_i, r_i)$. ■

Lema 3.3.3. *Sea X un espacio T_1 y sea $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cubiertas cerradas, localmente finitas tales que $\mathcal{F}_{i+1}$ es refinamiento de $\mathcal{F}_i$. Supongamos que la intersección de los elementos de cada hilo en $\mathcal{F}_\infty$ es un conjunto no vacío en X y para cada conjunto abierto*

$U \subset X$ y $p \in U$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que cada elemento de $\mathcal{F}_i$ que contiene a p está contenido en U. Entonces, para cada $\bar{x} \in \mathcal{F}_\infty$ tal que $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$ e $i \in \mathbb{N}$, existe un $j > i$ y un abierto U tal que $St(p, \mathcal{F}_j) \subset U \subset St(p, \mathcal{F}_i)$ y $U \cap G = \emptyset$, para cualquier $G \in \mathcal{F}_i$ con $p \notin G$.

Demostración. Sea $\bar{x} \in \mathcal{F}_\infty$ tal que $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$ e $i \in \mathbb{N}$. Definamos $G_0 = \bigcup\{F \in \mathcal{F}_i : p \notin F\}$ y veamos que $X \backslash G_0$ es un abierto. Sea $y \in X \backslash G_0$, entonces y está contenido en los elementos de $\mathcal{F}_i$ que contienen a p y como $\mathcal{F}_i$ es localmente finita, existe una U vecindad abierta de y tal que $U \subset F_1 \cup \cdots \cup F_n$. De la colección $\{F_1, ..., F_n\}$ podemos quitar a los que no contengan a y. Así, $U \backslash \{F_i : y \in F_i \text{ y } i \in \{1, ..., n\}\}$ es un abierto que contiene a y y está contenido en $X \backslash G_0$. Entonces $X \backslash G_0$ es un abierto contenido en los elementos de $\mathcal{F}_i$ que contienen a p, es decir, $X \backslash G_0 \subset St(p, \mathcal{F}_i)$. Por hipótesis, para $X \backslash G_0$ e $i \in \mathbb{N}$, existe un j tal que cualquier elemento en $\mathcal{F}_j$ que contiene a p está contenido en $X \backslash G_0$, es decir, $St(p, \mathcal{F}_j) \subset X \backslash G_0$. Por la construcción de G_0, tenemos que si $F \in \mathcal{F}_i$ y $p \notin F$, entonces $F \cap (X \backslash G_0) = \emptyset$. ■

Proposición 3.3.4. *Sea X un espacio T_1, $\{(\mathcal{F}_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ la g-estructura celular obtenida del Lema 3.3.2 y $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_\infty \backslash r$. Si además se satisfacen las siguientes condiciones, entonces X es determinado por la g-estructura celular $\{(\mathcal{F}_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$:*

1. *Para cada $F \in \mathcal{F}_i$ y $p \in F$, existe un $G \in \mathcal{F}_{i+1}$ tal que $p \in G \subset F$.*
2. *Para cada U abierto y $\bar{x} \in \mathcal{F}_\infty$ tal que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i = \{p\}$ y $p \in U$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x_j \subset U$.*
3. *Para cada $\bar{x} \in \mathcal{F}_\infty$ con $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$, si U es la unión de elementos de $\{F \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_i : p \in F\}$ y para cualquier $\bar{y} \in \mathcal{F}_\infty$ que satisface $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} y_i = \{p\}$, existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $y_j \subset U$, entonces existe un abierto V tal que $p \in V \subset U$.*

Demostración. Veamos que $\mathcal{F}^*$ es homeomorfo a X. Definamos $\phi : \mathcal{F}^* \to X$, por $\phi(\pi(\bar{x}))$ donde $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$ para cada $\bar{x} \in \mathcal{F}_\infty$. Sea $\bar{x} \in \mathcal{F}_\infty$, con $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, ...)$ y $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$. Sea $q \neq p$, entonces $X \backslash \{q\}$ es un conjunto abierto que contiene a p, por la hipótesis 2, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $p \in x_j \subset X \backslash \{q\}$, lo cual implica que $q \notin x_j$ y por lo tanto $\phi(\pi(\bar{x})) \neq q$, es decir, $p \in \bigcap x_i$ es único y por tanto la función ϕ está bien definida.

La función ϕ es inyectiva. Sean $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{F}_\infty$ tales que $(\bar{x}, \bar{y}) \notin r$, entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $(x_i, y_i) \notin r_i$, por lo tanto $x_i \cap y_i = \emptyset$. Lo cual implica que si $\{q\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} y_i$, entonces $q \notin x_i$ y por tanto $q \neq \phi(\pi(\bar{x}))$.

Definamos $A_i = \{F \in \mathcal{F}_i : p \in F\}$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y consideremoa la sucesión inversa de gráficas $\{(A_i, r_i|_{A_i}), g_i^{i+1}|_{A_{i+1}}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Por la hipótesis 1, para cada $F \in A_i$ existe $G \in A_{i+1}$ tal que $G \subset F$. Por lo tanto, las funciones $g_i^{i+1}|_{A_{i+1}}$ son suprayectivas. Lo cual implica que $A_\infty \neq \emptyset$. Sea $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$, entonces $p = \phi(\pi(\bar{x}))$. Concluimos así que ϕ es suprayectiva.

Veamos ahora que la función ϕ es continua. Sea U un conjunto abierto en X y $\bar{x} \in (\phi \circ \pi)^{-1}(U)$. Sea $p = \phi(\pi(\bar{x})) \in U$. Entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x_j \in \mathcal{F}_j$ y $p \in x_j \subset U$. Consideremos $g_j^{-1}(x_j) \subset \mathcal{F}_\infty$ el cual es un subconjunto abierto. Veamos que se satisface $\phi(\pi(g_j^{-1}(x_j))) \subset x_j \subset U$. Sea $[\bar{z}] \in \pi(g_j^{-1}(x_j))$ entonces existe $\bar{w} \in g_j^{-1}(x_j)$ tal que $(\bar{z}, \bar{w}) \in r$. Luego $w_j = x_j$ y por lo tanto $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} w_j \subset x_j$. Sea $\{w\} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} w_j$, entonces $\phi^{-1}(w) \in \phi^{-1}(x_j)$ y por lo tanto, como $\phi^{-1}(w) = [\bar{w}] = [\bar{z}]$, se tiene que $[\bar{z}] \in \phi^{-1}(x_j)$ y $\pi(g_j^{-1}(x_j)) \subset \phi^{-1}(x_j)$. Como ϕ es suprayectiva, se tiene la contención $\phi(\pi(g_j^{-1}(x_j))) \subset x_j$. Luego $g_j^{-1}(x_j)$ es un conjunto abierto que contiene a $\bar{x}$ y está contenido en $(\phi \circ \pi)^{-1}(U)$. Por lo tanto $(\phi \circ \pi)^{-1}(U)$ es un abierto.

Por último definamos la función $\varphi : X \to \mathcal{F}^*$ por $\varphi(p) = [\bar{x}]$ tal que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i = \{p\}$. Notemos que φ es la función inversa de ϕ. Mostraremos que φ es continua. Sea A un conjunto abierto en $\mathcal{F}^*$, veamos que $\varphi^{-1}(A)$ es abierto. Veamos que $\varphi^{-1}(A) = \{p \in X : \{p\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$ para algún $\bar{x} \in \pi^{-1}(A)\}$. Sea $p \in \varphi^{-1}(A)$, entonces $\varphi(p) \in A$, así, existe $\bar{x} \in G_\infty$ tal que $\varphi(p) = [\bar{x}] \in A$ y $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i = \{p\}$. Luego, $\bar{x} \in \pi^{-1}(A)$ y por lo tanto, $p \in \{p \in X : \{p\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$ para algún $\bar{x} \in \pi^{-1}(A)\}$. Para mostrar la otra contención, sea $p \in \{p \in X : \{p\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$ para algún $\bar{x} \in \pi^{-1}(A)\}$, entonces existe $\bar{y} \in \pi^{-1}(A)$ tal que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$, así, $\varphi(p) = [\bar{y}] \in A$, por lo tanto, $p \in \varphi^{-1}(A)$. Concluimos que $\varphi^{-1}(A) = \{p \in X : \{p\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$ para algún $\bar{x} \in \pi^{-1}(A)\}$. Sea $p \in \varphi^{-1}(A)$, entonces existe $\bar{x} \in \mathcal{F}_\infty$ tal que $\bar{x} \in \pi^{-1}(A)$ y $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i = \{p\}$. Sea $B = \{\bar{x} \in \mathcal{F}_\infty : \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i = \{p\}\}$, como cada $\bar{x} \in B$ pertenece a $\pi^{-1}(A)$, entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{x} \in g_i^{-1}(x_i) \subset \pi^{-1}(A)$. Sea $U = \bigcup\{x_i :$ para algún $\bar{x} \in B, \bar{x} \in g_i^{-1}(x_i) \subset \pi^{-1}(A)\}$, por la hipótesis 3 existe un conjunto abierto V tal que $p \in V \subset U$. Como $\varphi(x_i) = \pi(g_i^{-1}(x_i)) \subset A$, entonces $x_i \subset \varphi^{-1}(A)$. Por lo tanto $U \subset \varphi^{-1}(A)$, lo cual implica que $p \in V \subset \varphi^{-1}(A)$. Concluimos entonces que $\varphi^{-1}(A)$ es un conjunto abierto.

■

Veamos el siguiente ejemplo de un espacio determinado por una g-estructura celular, la cual es definida con cubiertas que satisfacen las condiciones del Lema 3.3.2 y la Proposición 3.3.4.

Ejemplo 3.3.5. *Consideremos* $\Omega(\omega) = \{1, 2, 3, ...\} \cup \{\omega\}$ *con la topología generada por la base* $\beta_{\Omega(\omega)} = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\{n, n+1, ...\} \cup \{\omega\} : n \in \mathbb{N}\}$. *Además consideremos* $I = [0, 1]$ *con su topología usual. Definamos* $T = \Omega(\omega) \times I \backslash \{(\omega, 1)\}$ *con la topología subespacio del espacio producto* $\Omega(\omega) \times I$ *considerado con la topología producto, ver figura 3.7. Entonces el espacio* T *es determinado por una g-estructura celular.*

Demostración. Construyamos una sucesión de cubiertas cerradas para T de la siguiente manera, para cada $m \in \mathbb{N}$ sea:

$$\mathcal{F}_m = \left\{ \{n\} \times \left[\frac{a}{2^m}, \frac{a+1}{2^m} \right] : n \in \mathbb{N}, a \in \{0, ..., 2^m - 1\} \right\} \bigcup$$

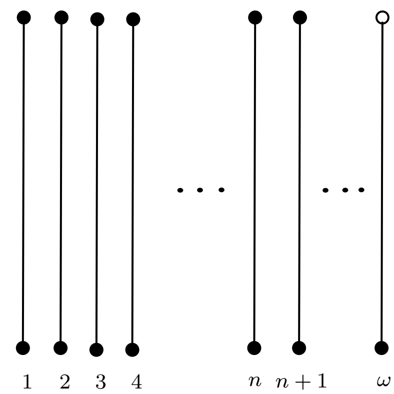

Figura 3.7: Representación del espacio $T = \Omega(\omega) \times I \backslash \{(\omega, 1)\}$.

$$\left\{ \{m, m+1, ...\} \cup \{\omega\} \times \left[\frac{a}{2^m}, \frac{a+1}{2^m}\right] : a \in \{0, ..., 2^m - 1\} \right\}.$$

Veamos ahora que la sucesión de cubiertas $\{\mathcal{F}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ satisface las hipótesis del Lema 3.3.2. Sea $m \in \mathbb{N}$ y $(x, y) \in T$. Por definición de $\mathcal{F}_m$, tenemos que $\mathcal{F}_m$ es numerable y por lo tanto, si U es una vecindad abierta de (x, y), U interseca a una cantidad nuerable de elementos de $\mathcal{F}_m$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_m$ es localmente numerable.

Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la relación $r_n = \{(A, B) \in \mathcal{F}_n \times \mathcal{F}_n : A \cap B \neq \emptyset\}$ y consideremos las funciones g_n^n la identidad en $\mathcal{F}_n$ y $g_n^{n+1} : \mathcal{F}_{n+1} \to \mathcal{F}_n$ definida por:

$$g_n^{n+1}\left(\{k\} \times \left[\frac{a}{2^{n+1}}, \frac{a+1}{2^{n+1}}\right]\right) = \{k\} \times \left[\frac{b}{2^n}, \frac{b+1}{2^n}\right] \text{ y}$$

$$g_n^{n+1}\left(\{n+1, n+2, ...\} \cup \{\omega\} \times \left[\frac{a}{2^{n+1}}, \frac{a+1}{2^{n+1}}\right]\right) = \{n, n+1, ...\} \cup \{\omega\} \times \left[\frac{b}{2^n}, \frac{b+1}{2^n}\right]$$

tal que $\frac{b}{2^n} \leq \frac{a}{2^{n+1}} < \frac{a}{2^{n+1}} \leq \frac{b+1}{2^n}$ y $g_i^k(F) = g_i^j(g_j^k(F))$ para cada $F \in \mathcal{F}_k$ y $i < j < k$.

Por lo tanto, $\{(\mathcal{F}_n, r_n), g_n^{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface las dos primeras condiciones de sucesión inversa. Como, para cada $A \in \mathcal{F}_{n+1}$, $A \subset g_n^{n+1}(A)$, tenemos que para cada $A, B \in \mathcal{F}_{n+1}$ tal que $A \cap B \neq \emptyset$, $g_n^{n+1}(A) \cap g_n^{n+1}(B) \neq \emptyset$. Así, se satisface la tercera condición de sucesión inversa. Por lo tanto, $\{(\mathcal{F}_n, r_n), g_n^{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión inversa de gráficas, cuyo límite inverso denotaremos por $\mathcal{F}_\infty$. Por otra parte, como los elementes de $\mathcal{F}_m$ son cerrados y compactos, entonces, para cada $\bar{x} \in \mathcal{F}_\infty$, $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$ es una intersección anidada de conjuntos compactos y cerrados, por lo tanto, $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i \neq \emptyset$.

Sea $\bar{x} \in \mathcal{F}_\infty$, $i \in \mathbb{N}$ y $p \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} x_j$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $p = (\omega, x)$ con $x \in [0, 1)$. Entonces los elementos en $\mathcal{F}_i$ que contienen a p son de la forma:

$$A = \{m, m+1, ...\} \cup \{\omega\} \times \left[\frac{a}{2^m}, \frac{a+1}{2^m}\right].$$

Notemos que en $\mathcal{F}_i$ a lo más hay dos elementos que contienen a p. Si solo existe uno, podemos tomar $U = \{m, m+1, ...\} \cup \{\omega\} \times \left(\frac{a}{2^m}, \frac{a+1}{2^m}\right)$. Si hay dos, estos tienen que ser de la forma: $U_1 = \{m, m+1, ...\} \cup \{\omega\} \times \left[\frac{a}{2^m}, \frac{a+1}{2^m}\right]$ y $U_2 = \{m, m+1, ...\} \cup \{\omega\} \times \left[\frac{a+1}{2^m}, \frac{a+2}{2^m}\right]$. Por lo tanto, podemos tomar $U = \{m, m+1, ...\} \cup \{\omega\} \times \left(\frac{a}{2^m}, \frac{a+2}{2^m}\right)$. En ambos casos tenemos que U es un abierto que satisface $U \subset St(p, \mathcal{F}_i)$. Además notemos que en $\mathcal{F}_{i+1}$ hay a lo más dos elementos que contienen a p y $St(p, \mathcal{F}_{i+1}) \subset U$. Por lo tanto, se satisfacen las hipótesis del Lema 3.3.2.

Veamos ahora que se satisfacen las hipótesis de la Proposición 3.3.4. Sea $i \in \mathbb{N}$ fijo, $F \in \mathcal{F}_i$ y $p \in F$. Por construcción de la cubierta $\mathcal{F}_{i+1}$, existe un $G \in \mathcal{F}_{i+1}$ tal que $p \in G \subset F$, así que se satisface la condición 1 de la Proposición 3.3.4.

Sea U un subconjunto abierto y $\bar{x} \in \mathcal{F}_\infty$ tal que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} x_i = \{p\}$ y $p \in U$. Si $p = (n, x)$, con $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [0, 1]$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $p \in \{n\} \times (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$. Así, podemos encontrar un $m \in \mathbb{N}$ tal que $p \in \{n\} \times \left[\frac{a}{2^m}, \frac{a+1}{2^m}\right] \subset \{n\} \times (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ y $x_m = \{n\} \times \left[\frac{a}{2^m}, \frac{a+1}{2^m}\right]$. Por lo tanto, $p \in x_m \subset U$. Si $p = (\omega, x)$ con $x \in [0, 1)$. Entonces existe un elemento en $\beta_{\Omega(\omega)}$ tal que:

$$p \in \{N, N+1, ...\} \cup \{\omega\} \times (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U, \text{ para algún } \varepsilon > 0.$$

De forma análoga al caso anterior, podemos encontrar un $m \in \mathbb{N}$ tal que $p \in \{N, N+1, ...\} \cup \{\omega\} \times \left[\frac{a}{2^m}, \frac{a+1}{2^m}\right] \subset \{N, N+1, ...\} \cup \{\omega\} \times (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ y $x_m = \{N, N+1, ...\} \cup \{\omega\} \times \left[\frac{a}{2^m}, \frac{a+1}{2^m}\right]$. Por lo tanto, $p \in x_m \subset U$. Concluimos así que se satisface 2 de la Proposición 3.3.4.

Por último, veamos que se satisface la condición 3. Sea $\bar{x} \in \mathcal{F}_\infty$, $p \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} x_i$ y U una unión de elementos de $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_i$ los cuales contienen a p y para cualquier $\bar{y} \in G_\infty$ tal que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} y_i = \{p\}$, existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $y_j \subset U$.

Consideraremos el caso $p = (\omega, x)$ con $x \in [0, 1)$, los demás casos son análogos. Entonces los elementos A que contienen a p y tales que $A \subset U$ son de la forma:

$$A_m^a = \{m, m+1, ...\} \cup \{\omega\} \times \left[\frac{a}{2^m}, \frac{a+1}{2^m}\right]$$

para algún $m \in \mathbb{N}$ y $a \in \{0, ..., 2^m - 1\}$.

Sea a_0 tal que $\frac{a_0}{2^n} = min\{\frac{a}{2^m} : A_m^a \subset U\}$ y sea a_1 tal que $\frac{a_1}{2^k} = \max\{\frac{a+1}{2^m} : A_m^a \subset U\}$. Entonces el conjunto $\{n, n+1, ...\} \cup \{\omega\} \times \left(\frac{a_0}{2^n}, \frac{a_1}{2^k}\right)$ es un abierto que contiene a p y se queda contenido en U. Por lo tanto, se satisfacen las hipótesis de la Proposición 3.3.4 lo cual implica que T es determinado por una g-estructura celular. ∎

Veremos un ejemplo de una familia de espacios determinados por una g-estructura celular, la cual es obtenida a partir de cubiertas cerradas que satisfacen las condiciones del Lema 3.3.2 y la Proposición 3.3.4, para lo cual introducimos la siguiente notación.

Lema 3.3.6. *Sea $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios topológicos no vacíos, $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos abiertos donde $B_i \subset X_i$ y $l_i^j : \bar{B}_j \to \bar{B}_i$ homeomorfismos tales que $(l_i^j)^{-1} = l_j^i$, $l_i^j = l_i^k \circ l_k^j$ para todo $i, j, k \in \mathbb{N}$ y l_i^i es la identidad. Sea $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos tales que $A_k \subset B_k$ y $A_k = l_k^j(A_j)$. Definamos la relación $\sim$ en $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ como sigue: $x \sim y$ si $x = y$ o $x \in A_i$ y $y \in A_j$, para algunos $i, j \in \mathbb{N}$ y $l_i^j(y) = x$. Entonces la relación $\sim$ es una relación de equivalencia y por lo tanto, $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k/\sim$ está bien definido.*

Demostración. Es claro que $\sim$ es reflexiva y simétrica. Veamos que $\sim$ es transitiva. Sean $x, y, z \in \sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ puntos distintos tales que $x \sim y$ y $y \sim z$. Entonces $x \in A_i$, $y \in A_j$, $z \in A_k$, $l_i^j(y) = x$ y $l_j^k(z) = y$, para algunos $i, j, k \in \mathbb{N}$. Luego, $l_i^j(l_j^k(z)) = l_i^j(y) = x$ y como $l_i^k = l_i^j \circ l_j^k$ para todo $i, j, k \in \mathbb{N}$, tenemos que $l_i^k(z) = x$. Así, $x \sim z$ y por lo tanto, $\sim$ es una relación de equivalencia. ∎

Con la notación del Lema 3.3.6 presentamos el siguiente lema, en el cual nos referimos como un encaje a una función f entre dos espacios topologicos X y Y que es un homeomorfismo sobre su imagen.

Lema 3.3.7. *El mapeo cociente φ obtenido del Lema 3.3.6 satisface las siguientes condiciones:*

1. *Para cada $A \subset A_m$, con $m \in \mathbb{N}$ tenemos que $\varphi^{-1}(\varphi(\cup_{k\in\mathbb{N}} l_k^m(A))) = \cup_{k\in\mathbb{N}} l_k^m(A)$.*

2. *Para cada $i \in \mathbb{N}$, $\varphi|_{X_i}$ es un encaje.*

3. *$\varphi|_{\cup_{i\in\mathbb{N}}(X_i\setminus A_i)}$ es un encaje.*

Demostración. Para mostrar la condición 1, sea $A \subset A_m$, para algún $m \in \mathbb{N}$, y para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $B_i = l_i^m(A)$. Definamos $B = \varphi(\cup_{k\in\mathbb{N}} B_k)$. Mostraremos que $\varphi^{-1}(\varphi(B)) = B$. Es claro que $B \subset \varphi^{-1}(\varphi(B))$. Sea $w \in \varphi^{-1}(\varphi(B))$ entonces $\varphi(w) \in \varphi(B)$. Así, existe $v \in B$ tal que $\varphi(v) = \varphi(w)$. Si $v = w$, entonces $w \in B$. Supongamos entonces que $v \neq w$, entonces podemos suponer que $w \in X_r$ y $v \in B_{r_0}$. Como $\varphi(v) = \varphi(w)$, por definición de φ, tenemos que $v \sim w$. Por lo tanto, $w = l_r^{r_0}(v)$ y como $v \in B_{r_0}$, entonces $v = l_{r_0}^1(v')$ para algún $v' \in B_1$. Luego $w = l_r^1(v')$ y como $l_r^1(v') \in l_r^1(B_1) = B_r$, entonces $w \in B_r$, es decir, $w \in B$.

Sea $i \in \mathbb{N}$, queremos mostrar ahora que $\varphi|_{X_i} : X_i \to \varphi(X_i)$ es un homeomorfismo. Notemos que $\varphi|_{X_i}$ es una función continua, pues es la restricción de una función continua, y es suprayectiva sobre su imagen. Para ver que es inyectiva, sean $x, y \in X_i$ tales que $x \neq y$, como x y y pertenecen al mismo X_i, entonces $x \nsim y$. Por lo tanto, $\varphi|_{X_i}(x) \neq \varphi|_{X_i}(y)$ Veamos que $\varphi|_{X_i}$ es una función abierta. Sea A un subconjunto abierto de X_i, entonces $A \cap B_i$ es un conjunto abierto en X_i. Consideremos el conjunto $C = A \cup (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} l_j^i(A \cap B_i)$ el cual es un abierto en $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ y por el inciso 1, $\varphi^{-1}(\varphi(C)) = C$. Por lo tanto, $\varphi(C)$ es abierto en $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k/\sim$ y $\varphi(C) \cap \varphi(X_i)$ es abierto en $\varphi(X_i)$. Veamos que $\varphi|_{X_i}(A) = \varphi(C) \cap \varphi(X_i)$. Sea $z \in \varphi|_{X_i}(A)$, entonces existe $y \in A$ tal que $\varphi|_{X_i}(y) = z$. Como $y \in A \subset X_i$ y $A \subset C$, $\varphi(y) \in \varphi(C)$ y

$\varphi(y) \in \varphi(X_i)$, por lo tanto, $\varphi(y) = \varphi|_{X_i}(y) = z \in \varphi(C) \cap \varphi(X_i)$. Para la otra contención, sea $z \in \varphi(C) \cap \varphi(X_i)$, entonces existe $x \in C$ tal que $\varphi(x) = z$ y $y \in X_i$ tal que $\varphi(y) = z$. Como $x \in C$, tenemos dos casos: si $x \in A \subset X_i$, entonces $\varphi(x) \in \varphi(A) = \varphi|_{X_i}(A)$. Para el caso 2, supongamos que $x \notin A$, entonces $x \in l_k^i(A \cap B_i) \subset X_k$ con $k \neq i$. Por lo tanto, existe $w \in A \cap B_i$ tal que $x = l_k^i(w)$. Por otra parte, como $\varphi(x) = \varphi(y)$, $x \sim y$ y como $x \in X_k$ y $y \in X_i$, necesariamente $x \in A_k$, $y \in A_i$ y $x = l_k^i(y)$, de donde se sigue que $w = y$ y $\varphi(w) = \varphi(y) \in \varphi(A \cap A_i) \subset \varphi(A) = \varphi|_{X_i}(A)$. Dado que $x \sim y$, se tiene que $\varphi(x) \in \varphi|_{X_i}(A)$. Por lo tanto, $\varphi|_{X_i}(A)$ es abierto en $\varphi(X_i)$ y $\varphi|_{X_i}$ es abierta. Concluimos que $\varphi|_{X_i}$ es un homeomorfismo.

Veamos ahora que la función $\varphi|_{\cup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \setminus A_i)} : \cup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \setminus A_i) \to \varphi(\cup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \setminus A_i))$ es un homeomorfismo. De forma análoga al inciso anterior, tenemos que la función $\varphi|_{\cup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \setminus A_i)}$ es continua por ser la restricción de una función continua, además es suprayectiva sobre su imagen. Para ver que $\varphi|_{\cup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \setminus A_i)}$ es inyectiva, sean $x, y \in \cup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \setminus A_i)$ tales que $x \neq y$, entonces $x \nsim y$. Por lo tanto, $\varphi|_{\cup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \setminus A_i)}(x) \neq \varphi|_{\cup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \setminus A_i)}(y)$, así $\varphi|_{\cup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \setminus A_i)}$ es inyectiva. Veamos que la función $\varphi|_{\cup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \setminus A_i)}$ es abierta. Sea A un subconjunto abierto de $\cup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \setminus A_i)$, mostraremos que $\varphi|_{\cup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \setminus A_i)}(A)$ es un subconjunto abierto en $\varphi(\cup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \setminus A_i))$. Si $x \in X_i \setminus A_i$ y $y \in X_j \setminus A_j$ con $i \neq j$, entonces $x \nsim y$. Así, $\varphi^{-1}(\varphi|_{\cup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \setminus A_i)}(A)) = A$ y por lo tanto, $\varphi|_{\cup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \setminus A_i)}(A)$ es abierto en $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k / \sim$. Además, como $\varphi^{-1}(\varphi(\cup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \setminus A_i))) = \cup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \setminus A_i)$, entonces $\varphi(\cup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \setminus A_i))$ es abierto en $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k / \sim$. Por lo tanto, $\varphi|_{\cup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \setminus A_i)}(A)$ es abierto en $\varphi(\cup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \setminus A_i))$. Así, $\varphi|_{\cup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \setminus A_i)}$ es abierta y por lo tanto, un homeomorfismo. ■

Lema 3.3.8. *Sea $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\sim$ definidos como en la Observación 3.3.6, tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $A_k \subset X_k$ es un subespacio cerrado. Entonces a partir de cubiertas para el espacio cociente $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k / \sim$ podemos construir una g-estructura celular.*

Demostración. Sea φ el mapeo cociente definido de $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ sobre $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k / \sim$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que X_k es metrizable y por lo tanto es perfectamente normal. Entonces, por el Teorema 1.1.25, los subespacios $Cl_{X_k}(B_k)$ y $X_k \setminus B_k$ son completamente metrizables.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $\{\mathcal{F}_i^k\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cubiertas cerradas localmente finitas de $X_k \setminus B_k$, construidas de acuerdo al Teorema 2.4.8. De forma análoga, para $Cl_{X_1}(B_1)$ sea $\{\mathcal{A}_i^1\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cubiertas cerradas localmente finitas, construidas de acuerdo al Teorema 2.4.8. Luego, para cada $i \in \mathbb{N}$ y $j > 1$, la familia $\mathcal{A}_i^j = \{l_j^1(A) : A \in \mathcal{A}_i^1\}$ es una cubierta cerrada localmente finita para B_j y además $\{\mathcal{A}_i^j\}_{i\in\mathbb{N}}$ satisface $\mathcal{A}_{i+1}^j < \mathcal{A}_i^j$. Veamos ahora que para cada $i \in \mathbb{N}$ el conjunto:

$$G_i = \{\varphi(F) : F \in \mathcal{F}_i^k, \text{ con } k \in \mathbb{N}\} \cup \{\varphi(A) : A \in \mathcal{A}_i^k, \text{ con } k \in \mathbb{N}\} \tag{3.3}$$

es una cubierta cerrada localmente numerable para el espacio $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k / \sim$. Sea $y \in \sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k / \sim$, entonces existe $x \in \sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ tal que $\varphi(x) = y$. Por lo tanto, $x \in X_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Si $x \in B_k$, existe $A \in \mathcal{A}_i^k$ tal que $x \in A$ y por lo tanto $y \in \varphi(A)$. Si $x \in X_k \setminus B_k$, existe $F \in \mathcal{F}_i^k$ tal que $x \in F$ y por lo tanto $y \in \varphi(F)$. Concluimos así que G_i cubre a $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k / \sim$.

Para ver que es cerrada, sea $\varphi(F) \in G_i$. Consideremos primero el caso en el que $F \in \mathcal{F}_i^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Como $F \subset X_k \backslash A_k$, $\varphi^{-1}(\varphi(F)) = F$, por lo tanto $\varphi(F)$ es un cerrado en $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k / \sim$. Supongamos ahora que $F \in \mathcal{A}_i^k$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $\varphi^{-1}(\varphi(F)) = F \cup (\sqcup_{j\neq k}(A_j \cap l_j^k(F)))$, el cual es un cerrado en $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$. Por lo tanto, G_i es una cubierta cerrada para $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k / \sim$.

Mostraremos ahora que G_i es localmente numerable. Sea $y \in \sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k / \sim$, entonces existe $x \in \sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ tal que $\varphi(x) = y$. Supongamos que $x \in X_k$ con $k \in \mathbb{N}$. Si $x \in X_k \backslash \bar{B}_k$, entonces existe una vecindad $U_x \subset X_k \backslash \bar{B}_k$ de x que interseca a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{F}_i^k$, digamos $F_1, ..., F_n$. Como U_k está completamente contenido en $X_k \backslash A_k$, resulta que $\varphi(U_k)$ es un abierto en $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k / \sim$ que contiene a y y que interseca a una cantidad finita de elementos de G_i, $\varphi(F_1), ..., \varphi(F_n)$. De manera análoga, si $x \in \partial(B_k)$. Entonces existe un abierto $U_x \subset X_k \backslash A_k$ que contiene a x y que interseca solo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}_i^k$ y $\mathcal{F}_i^k$, sean $A_1, ..., A_m, F_1, ..., F_n$ tales elementos. Como U_k está completamente contenido en $X_k \backslash A_k$, $\varphi(U_k)$ es un abierto en $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k / \sim$ que contiene a y y que interseca a una cantidad finita de elementos de G_i, $\varphi(A_1), ..., \varphi(A_n), \varphi(F_1), ..., \varphi(F_n)$. Por último, consideremos el caso en el que $x \in B_k$. Entonces existe un abierto $U_k \subset B_k$ que contiene a x y que interseca solo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}_i^k$. Entonces para cada $j \in \mathbb{N}$, tenemos que $l_j^k(U_k)$ es un subconjunto abierto que contiene a $l_j^k(x)$ y que interseca solo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}_i^j$. Por el inciso 1 del Lema 3.3.7 tenemos que $\varphi(\sqcup_{j\in\mathbb{N}} l_j^k(U_k))$ es un abierto en $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k / \sim$ que contiene a y, pues $\varphi^{-1}(\varphi(\sqcup_{j\in\mathbb{N}} l_j^k(U_k))) = \sqcup_{j\in\mathbb{N}} l_j^1(U_k)$. Además $\varphi(\sqcup_{j\in\mathbb{N}} l_j^k(U_k))$ interseca a una cantidad numerable de elementos de G_i, pues cada $l_j^k(U_k)$ interseca solo a una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}_i^k$ y $\mathcal{F}_i^k$ y por lo tanto $\varphi^{-1}(\varphi(\sqcup_{j\in\mathbb{N}} l_j^k(U_k))) = \sqcup_{j\in\mathbb{N}} l_j^1(U_k)$ interseca a una cantidad numerable de elementos de $\{F : F \in \mathcal{A}_i^k \text{ ó } F \in \mathcal{F}_i^k, \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}$.

Notemos ahora que $G_{i+1} < G_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$, pues $\mathcal{F}_{i+1}^k < \mathcal{F}_i^k$ y $\mathcal{A}_{i+1}^k < \mathcal{A}_i^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Además definiendo, para cada $i \in \mathbb{N}$, $r_i = \{(A, B) \in G_i \times G_i : A \cap B \neq \emptyset\}$, g_i^i la función identidad en G_i y $g_i^{i+1} : G_{i+1} \to G_i$ tal que $F \subset g_i^{i+1}(F)$ para cada $F \in G_{i+1}$, tenemos que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} y_i \neq \emptyset$ para cada $\bar{y} \in G_\infty$, pues $\{\mathcal{F}_i^k\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{\mathcal{A}_i^k\}_{i\in\mathbb{N}}$ satisfacen las hipótesis del Teorema 2.3.4.

Mostraremos que para cada $\bar{y} \in G_\infty$, $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} y_i$ e $i \in \mathbb{N}$, existe $j > i$ y un abierto U tal que $St(p, \mathcal{F}_j) \subset U \subset St(p, \mathcal{F}_i)$ y $U \cap G = \emptyset$, para cualquier $G \in \mathcal{F}_i$ con $p \notin G$, así por el Lema 3.3.2 tendremos que $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ define una g-estructura celular. Sea $\bar{y} \in G_\infty$, $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} y_i$, $i \in \mathbb{N}$ y definamos $D = \bigcup\{A \in G_i : p \notin A\}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $p \in \varphi(A_1)$, pues si $p \in \varphi(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \backslash A_i))$, entonces existe un solo elemento $y \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(X_i \backslash A_i)$ tal que $\varphi(y) = p$. Por lo tanto, si $y \in X_k \backslash A_k$ con $k \in \mathbb{N}$, nos podemos restringir al espacio X_k donde la sucesión de cubiertas $\{\mathcal{A}_i^k \cup \mathcal{F}_i^k\}_{i\in\mathbb{N}}$ satisfacen las hipótesis del Teorema 2.3.4 y por el Lema 3.3.3, se tiene la condición que queremos. Así, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $x_j \in A_j$ tal que $\varphi(x_j) = p$ y por lo tanto, $l_j^i(x_i) = x_j$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$. Consideremos para x_1 una vecindad abierta U_1 que interseca solo una cantidad finita de elementos de $\mathcal{A}_i^1$, sean $E_1^1, ..., E_1^n$

tales elementos. Definamos ahora:

$$W_1 = U_1 \backslash \{E_1^r : x_1 \notin E_1^r, r \in \{1, ..., n\}\}$$

y para cada $n \geq 2$, definamos

$$W_n = l_n^1(W_1).$$

Observemos que W_1 es un conjunto abierto de X_1, pues es un abierto menos una cantidad finita de cerrados. Por lo tanto W_j es abierto para cada $j \in \mathbb{N}$. Además, para cada $j \in \mathbb{N}$, x_j pertenece a W_j. Definamos ahora $W = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} W_j$. Entonces $\varphi(W)$ es un abierto en $\sqcup_{j\in\mathbb{N}} X_j/\sim$, pues por la condición 1 del Lema 3.3.7 tenemos que $\varphi^{-1}(\varphi(W)) = W$.

Veamos ahora que $\varphi(W) \subset St(p, G_i)$. Sea $\varphi(F_0) \in G_i$ tal que $p \notin \varphi(F_0)$. Supongamos que $\varphi(F_0) \cap \varphi(W) \neq \emptyset$. Sea $w \in \varphi(F_0) \cap \varphi(W)$, entonces existen $w_1 \in F_0$ y $w_2 \in W$ tales que $\varphi(w_1) = w$ y $\varphi(w_2) = w$. Podemos suponer que $w_1 \in F_0 \subset X_r$ y $w_2 \in X_{r_0}$, para algunos $r, r_0 \in \mathbb{N}$. Por definición de $\sim$, tenemos que $w_1 \sim w_2$, lo cual implica que $w_1 = l_r^{r_0}(w_2)$. Como w_2 pertenece a W_{r_0}, entonces $w_1 \in W_r$, es decir $W_r \cap F_0 \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Pues W_r no interseca a ningún elemento de $\mathcal{A}_i^r$ que no contenga a x_r. Por lo tanto, $\varphi(W)$ es un abierto que está contenido en los elementos de G_i que contienen a p, es decir, $\varphi(W) \subset St(p, G_i)$.

Ahora, como W_j es un abierto en X_j que contiene a x_j, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $m_j \in \mathbb{N}$ tal que $St(x_j, \mathcal{A}^j_{m_j}) \subset W_j$. Pero como $W_j \subset B_j$, podemos suponer que $m_k = m_1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $St(x_j, \mathcal{A}^j_{m_1}) \subset W_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, entonces $\varphi\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} St(x_j, \mathcal{A}^j_{m_1})\right) \subset \varphi\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} W_j\right) = \varphi(W)$. Veamos que $\varphi\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} St(x_j, \mathcal{A}^j_{m_1})\right) = St(p, G_{m_1})$. Sea $q \in St(p, G_{m_1})$, entonces $q \in A$ para algún $A \in G_{m_1}$. Por lo tanto, existe $F \in \mathcal{A}^j_{m_1}$ tal que $A = \varphi(F)$. Como $p \in A$, entonces $x_j \in F$, luego $F \in St(x_j, \mathcal{A}^j_{m_1})$. Así, $\varphi(F) \in \varphi\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} St(x_j, \mathcal{A}^j_{m_1})\right)$. Consideremos ahora, $\varphi(F)$ con $F \in \bigcup_{j\in\mathbb{N}} St(x_j, \mathcal{A}^j_{m_1})$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $F \in St(x_k, \mathcal{A}^k_{m_1})$. Luego $x_k \in F$, lo cual implica que $p \in \varphi(F)$. Por lo tanto $\varphi(F) \in St(p, G_{m_1})$. Así, concluimos que $St(p, G_{m_1}) \subset \varphi(W)$. Además, si $A \in G_{m_1}$ con $p \notin A$ entonces $A \cap \varphi(W) = \emptyset$. Por lo tanto, por el Lema 3.3.2, tenemos que $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ define una g-estructura celular. ∎

Teorema 3.3.9. *Sea $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\sim$ definidos como en la Observación 3.3.6, tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $A_k \subset X_k$ es un subespacio cerrado. Entonces el espacio cociente $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k/\sim$ es determinado por una g-estructura celular.*

Demostración. Veamos que la g-estructura celular $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ obtenida como en el Lema 3.3.8, donde los conjuntos G_i están definidos en 3.3 de la demostración del Lema 3.3.8, satisface las hipótesis de la Proposición 3.3.4. Para verificar la primera condición sea $A \in G_i$ y $p \in A$, entonces existe $x \in \sqcup_{j\in\mathbb{N}} X_j$ tal que $\varphi(x) = p$. Como $A \in G_i$, $A = \varphi(F)$ para algún $F \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(\mathcal{F}_i^k \cup \mathcal{A}_i^k)$ tal que $x \in F$, donde sin pérdida de generalidad podemos suponer que $F \in \mathcal{A}_i^j$ con $j \in \mathbb{N}$, ya que φ satisface 3 del Lema 3.3.7. Por construcción de las cubiertas y por el Teorema 2.4.8, existe $G \in \mathcal{A}^j_{i+1}$ tal que $x_j \in G \subset F$, entonces $\varphi(G) \subset \varphi(F)$ y $\varphi(G) \in G_{i+1}$.

Sea $\bar{x} \in G_\infty$, entonces para cada $i \in \mathbb{N}$, $x_i = \varphi(F_i)$. Dado que se satisface 3 del Lema 3.3.7, sin pérdida de generalidad podemos suponer que para cada $i \in \mathbb{N}$, $F_i \subset A_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Sea $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \varphi(F_i)$ y $U \subset \sqcup_{i\in\mathbb{N}} X_i/\sim$ un subconjunto abierto que contiene a p. Como U es abierto en $\sqcup_{i\in\mathbb{N}} X_i/\sim$, entonces $\varphi^{-1}(U)$ es abierto en $\sqcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Luego, $\varphi^{-1}(U) \cap X_j$ es un abierto en X_j, para cada $j \in \mathbb{N}$. Notemos que como $F_i \subset \mathcal{A}_i^j$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{A}_i^j$ satisface las hipótesis del Teorema 2.3.4, entonces para $y_j = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $F_m \subset X_m \cap \varphi^{-1}(U)$. Así, $\varphi(F_m) \subset U$. Concluimos por tanto que $x_m \subset U$.

Por último, veamos que se satisface la condición 3 de la Proposición 3.3.4. Sea $\bar{x} \in G_\infty$ con $p \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} x_i$ y sea U una unión de elementos de $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i$ los cuales contienen a p y tal que para todo $\bar{y} \in G_\infty$ que satisface $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} y_i = \{p\}$ existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $y_j \in U$. Utilizando nuevamente la condición 3 del Lema 3.3.7, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $p \in \varphi(A_1)$, entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $z_i \in A_i$ tal que $\varphi(z_i) = p$. Supongamos que $U = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \varphi(F_j)$, (podemos considerar que la unión es numerable porque para cada X_i puede haber una cantidad a lo más numerable de elementos de $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_k^i$ los cuales contienen a z_i y además por (2) del Lema 3.3.7 tenemos que $\varphi|_{X_i}$ es un encaje), entonces existe una colección $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que cada E_j contiene a z_1 y se queda contenido en B_1. Como X_1 es completamente metrizable y estamos considerando que su estructura celular es definida como en el Teorema 2.4.8, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $E_j = Cl_{X_1} B(v_j, r)$ para algún $v_j \in X_1$ tal que $x_1 \in B(v_j, r)$. Entonces $\cup_{j\in\mathbb{N}} B(v_j, r)$ es un abierto en X_1 que contiene a z_1 y además se queda contenido en $\cup_{j\in\mathbb{N}} E_j$. Definamos $D_1 = \cup_{j\in\mathbb{N}} E_j$ y $D_n = l_n^1(D_1)$. Por la condición 1 del Lema 3.3.7, $\varphi(\cup_{j\in\mathbb{N}} D_j)$ es un abierto en $\sqcup_{i\in\mathbb{N}} X_i/\sim$, además $\varphi(\cup_{j\in\mathbb{N}} D_j)$ contiene a p, pues para cada $j \in \mathbb{N}$, $z_j \in D_j$. Veamos que $\varphi(\cup_{j\in\mathbb{N}} D_j)$ se queda contenido en U. Sea $w \in \varphi(\cup_{j\in\mathbb{N}} D_j)$, entonces existe $w_0 \in \cup_{j\in\mathbb{N}} D_j$ tal que $\varphi(w_0) = w$. Lo cual implica que $w_0 \in D_k$, para algún $k \in \mathbb{N}$, así $w_0 \in l_k^1(D_1)$. Por lo tanto, existe un $w_1 \in E_m$, para algún $m \in \mathbb{N}$, tal que $l_k^1(w_1) = w_0$. Luego $w_1 \in F_r$, para algún $r \in \mathbb{N}$ y $\varphi(w_1) \in U$. Como $\varphi(w_1) = \varphi(w_0)$, entonces $\varphi(w_0) \in U$, es decir, $w \in U$. Así, $p \in \varphi(\cup_{j\in\mathbb{N}} D_j) \subset U$. Concluimos así que se satisfacen las hipótesis de la Proposición 3.3.4, por lo tanto $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k/\sim$ es determinado por una g-estructura celular. ∎

Veamos ahora un ejemplo de un espacio que satisface las hipótesis del resultado anterior.

Ejemplo 3.3.10. *Consideremos, para cada $k \in \mathbb{N}$, $X_k = [0,1] \times [0,1]$ y $B_k = [0,1] \times [0, \frac{1}{2})$ como subespacio de X_k. Sea, para cada $k \in \mathbb{N}$, $A_k = [0,1] \times \{0\}$ contenido en B_k. Definamos, para cada $i, j \in \mathbb{N}$, $l_i^j : Cl_{X_j} B_j \to Cl_{X_i} B_i$ por $l_i^j((x,y)) = (x,y)$. Sea $X = \sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k/\sim$, donde la relación $\sim$ está definida como: $(x,0) \sim (y,0)$ si $(x,0) \in A_i$ y $(y,0) \in A_j$, para algunos $i, j \in \mathbb{N}$ y $l_j^i((y,0)) = (x,0)$ ó $l_i^j((x,0)) = (y,0)$, ver figura 3.8. Entonces X es determinado por una g-estructura celular.*

Para ver que X es determinado por una g-estructura celular verificaremos que se satisfacen las hipótesis de Teorema 3.3.9, para lo cual es necesario mostrar que se satisfacen las condiciones de la Observación 3.3.6.

Por definición de l_i^j, $(l_i^j)^{-1} = l_j^i$, $l_i^j = l_i^k \circ l_k^j$ para todo $i, j, k \in \mathbb{N}$ y $l_i^j(A_j) = A_i$. Entonces, por la Observación 3.3.6, la relación $\sim$ definida en $\sqcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ es una relación de equivalencia. Ahora, como A_k es cerrado en X_k para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.3.9 y por lo tanto, X es determinado por una g-estructura celular.

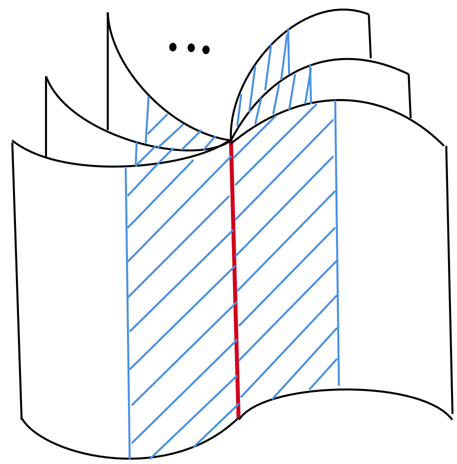

Figura 3.8: Representación del espacio cociente X del ejemplo 3.3.10. La parte con líneas azules representa la imagen bajo el mapeo cociente de los subespacios B_k y la línea marcada en rojo, la imagen bajo el mapeo cociente de los A_k.

Conclusiones

Las estructuras celulares obtenidas a partir de sucesiones inversas, definidas por E. Tymchatyn y W. Debski, determinan espacios completamente metrizables, así, en este trabajo hemos definido las estructuras celulares generalizadas con la idea de poder representar espacios topológicos, que no necesariamente son completamente metrizables, como un cociente de un límite inverso de una sucesión inversa de gráficas, sin necesidad de recurrir a sistemas inversos.

Dado un espacio topológico X, el cual es determinado por una estructura celular generalizada, $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ donde cada G_i tiene la topología discreta, hemos mostrado lo siguiente:

- El espacio X es Hausdorff (Proposición 3.1.14).
- Para cada $\bar{x} \in G_\infty$ se tiene que $B(\bar{x}, r)$ es un espacio Lindelöf (Proposición 3.1.12).
- Sea $\{(G_i, r_i), g_i^{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una g-estructura celular donde cada G_i tiene la topología discreta. Si para cada $\bar{x} \in G_\infty$ y para cada subconjunto abierto $A \subset G_\infty$ que contiene a $B(\bar{x}, r)$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $B(g_j^{-1}(x_j), r) \subset A$, entonces

  $$\beta = \{\mathrm{G}^*\backslash\pi(G_\infty\backslash A) : A \text{ es abierto en } G_\infty\}$$

  es una base para la topología de G^* (Proposición 3.1.17).
- Si X es un espacio determinado por una g-estructura celular la cual satisface que para cada $\bar{x} \in G_\infty$ y para cada subconjunto abierto $A \subset G_\infty$ que contiene a $B(\bar{x}, r)$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $B(g_j^{-1}(x_j), r) \subset A$, entonces X es normal (Corolario 3.1.20).
- El mapeo cociente $\pi : G_\infty \to \mathrm{G}^*$ no necesariamente es cerrado (ejemplo 3.1.21).
- El espacio X no necesariamente es regular (Proposición 3.1.24).

Hemos mostrado una familia de espacios que son determinados por estructuras celulares generalizadas, pero no por una estructura celular obtenida a partir de una sucesión inversa de gráficas (Proposición 3.2.2) y utilizando cubiertas cerradas hemos extendido tal familia de espacios, ver Teorema 3.3.9.

Los espacios completamente metrizables son determinados por una estructura celular generalizada, pero no todos los espacios determinados por una estructura celular generalizada son regulares, así, tiene sentido preguntarnos si todos los espacios topológicamente completos son determinados por una estructura celular generalizada o más general, si todos los espacios que son imagen perfecta de un espacio topológicamente completo son determinados por una estructura celular generalizada.

Dado, que el espacio determinado por la estructura celular generalizada construida en el ejemplo 3.1.22, no es regular y por lo tanto, no es la imagen perfecta de un espacio topológicamente completo, podemos preguntarnos ¿se puede caracterizar a los espacios que no son imagen perfecta de un espacio topológicamente completo, pero que si son determinados por una estructura celular generalizada?, con base en esto, podemos preguntarnos por algunos ejemplos particulares, como el espacio conocido como la plancha de Tychonoff, T, el cual es Tychonoff y por lo tanto regular, pero no es un espacio topológicamente completo, ver Observación 1.3.19. ¿Será T determinado por una estructura celular generalizada? o en todo caso, extendiendo la definición de g-estructura celular a sistemas inversos ¿puede T ser determinado por una estructura celular generalizada? y en este caso ¿cualquier espacio Tychonoff puede ser determinado por una g-estructura celular?

Bibliografía

[1] Aguilar, M., Gitler, S. y Prieto, C., *Topología algebraica, un enfoque homotópico*, McGRAW-HILL, México, 1998.

[2] Alexandroff, P., *Untersuchungen uber Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension*, Ann. Math. 30, 101-187, 1929.

[3] Baez, J., *An Introduction to Spin Foam Models of BF Theory and Quantum Gravity*, Lecture Notes in Physics 543, 25-94, 2000.

[4] Beltran-Parrazal, L.. Morgado-Valle C, Paredes-Hernandez, U., Rodriguez-Torres, EE., Tetlalmatzi-Montiel, M., Vazquez-Mendoza, E. y Villarroel-Flores, R., *Characterization and Classification of Electrophysiological Signals Represented as Visibility Graphs Using the Maxclique Graph*, Front. Bioeng. Biotechnol. 8:324. doi: 10.3389/fbioe.2020.00324, 2020.

[5] Casarrubias, F. y Tamariz, A., *Elementos de Topología de Conjuntos*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, México D.F., 2011.

[6] Charalambous, M., *Approximate inverse systems of uniform spaces and an applications of inverse systems*, Comm. Math.Univ. Carolin. 32,3, 551-565, 1991.

[7] Debski, W. y Tymchatyn, E.D., *Cell structures and completely metrizable spaces and their mappings*, Colloquium Mathematicum 147, pag. 181-194, 2017.

[8] Debski, W. y Tymchatyn, E.D., *Cell structures and topologically complete spaces*, Topology and its Applications 239, pag. 293-307, 2018.

[9] Engelking, R., *General Topology*, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[10] Freudental, H., *Entwicklungen von Räumen und ihren Gruppen*, Compos. Math. 4, 145-234, 1937.

[11] Hocking, J. y Young, G., *Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., London, England, 1961.

[12] Hrušák, M., Tamariz, A. y Tkachenko, M., *Pseudocompact topological spaces*, A Survey of Classic and New Results with Open Problems, Springer, 2018.

[13] Kopperman, R. y Wilson R., *Finite approximation of compact Hausdorff spaces*, Top. Proc. 22, 175-200, 1997.

[14] Mardesic, S., *On covering dimension and inverse limits of compact spaces*, III. J. Math. 4, 278-291, 1960.

[15] Mardesic, S. y Watanabe, T., *Approximate resolutions of spaces and mappings*, Glas. Mat. 24, 587–637, 1989.

[16] Mardesic, S., *On approximate inverse systems and resolutions*, Fund. Math. 142, 241-255, 1993.

[17] Nash, C., *Topology and Physics—a historical essay*, National University of Ireland, Maynooth, Ireland, 35-37, 1997.

[18] Pasynkov, B., *On polyhedral spectra and dimension of bicompacta and bicompact groups*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR,121, 45-48, 1958.

[19] Ribes, L., *Profinite graphs and groups*, A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer, 2017.

[20] Waldmann, S., *Topology, an introduction*, Springer, 2014.

[21] Willard, S., *General Topology*, Dover Publications, Inc., 2004.