



---

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO  
DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

**CONTROL DE POSICIÓN UN MÓDULO DE  
DESPLAZAMIENTO DE CD APLICANDO TÉCNICAS DE  
LÓGICA DIFUSA.**

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
INGENIERO EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES

P R E S E N T A N:  
MARTÍNEZ ORDÓÑEZ SERGIO MIGUEL  
SÁNCHEZ MÁRQUEZ FELIPE SARYMH

ASESOR: M. C. ELÍAS VARELA PAZ  
CO-ASESOR: M. C. VÍCTOR HUGO GALVÁN ZAVALA

PACHUCA DE SOTO, HIDALGO, NOVIEMBRE 2007





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO  
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA  
COORDINACIÓN ADJUNTA DE ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES

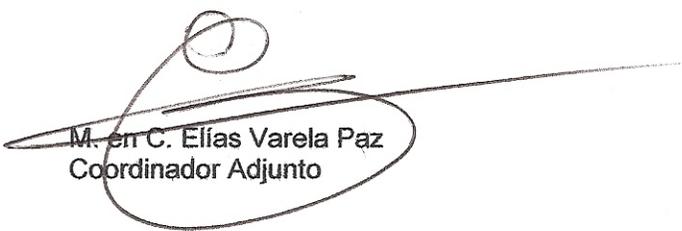
P.D.L.I.E.T.  
Martínez Ordóñez Sergio Miguel  
Sánchez Márquez Felipe Sarymh  
P R E S E N T E S

Por este conducto le comunico que el jurado que le fue asignado a su trabajo de titulación denominado "Control de posición de un módulo de desplazamiento aplicando técnicas de lógica difusa" y que después de revisarlo en reunión de sinodales han decidido autorizar la impresión del mismo, hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación se anotan las firmas de conformidad de los integrantes del jurado:

PRESIDENTE:	Ing. Miguel A. Rosas Yacotú
PRIMER SINODAL:	M. en C. Elías Varela Paz
SEGUNDO SINODAL:	Ing. J. Salvador Ávila Flores
TERCER SINODAL:	Ing. Omar Samperio Vázquez
SECRETARIO:	M. en C. Jaime Barrera Rodríguez
PRIMER SUPLENTE:	Ing. Alejandro Cerón López
SEGUNDO SUPLENTE:	Ing. Rogelio Efraín Escorcía Hernández

ATENTAMENTE  
"AMOR, ORDEN Y PROGRESO"  
Pachuca, Hgo., a 07 de Noviembre del 2007



M. en C. Elías Varela Paz  
Coordinador Adjunto

C.c.p. expediente.

Ciudad Universitaria  
Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5 C.P. 42184, Pachuca Hidalgo  
Tel. 01771 71-720 00 Ext. 6320 Fax 01771 71-7 21 09  
e-mail: evarela@uaeh.reduaeh.mx

**CONTROL DE POSICIÓN DE  
UN MÓDULO DE  
DESPLAZAMIENTO DE CD  
APLICANDO TÉCNICAS DE  
LÓGICA DIFUSA**

# Resumen

## **Control de posición de un módulo de desplazamiento de CD aplicando técnicas lógica difusa**

En esta tesis se aplican técnicas de control inteligente (lógica difusa) para el control de posición de un módulo de desplazamiento el cual consta de un motor de C.D. para su locomoción. Este módulo tiene aplicaciones importantes en el ámbito industrial, ya que se aplica como articulación de algunos robots o como módulo de desplazamiento para carga y descarga. La técnica utilizada para el control de este sistema es la lógica difusa, es decir se hace uso de los conocimientos que describen el funcionamiento del sistema para reemplazar el modelo matemático y diseñar un modelo en base a reglas difusas para la aplicación de un controlador tipo Mamdani y un controlador tipo Takagi Sugeno. Los resultados son presentados en simulación numérica e implementación.

# Índice general

Resumen . . . . .	III
Tabla de contenidos . . . . .	V
Índice de figuras . . . . .	IX
Índice de cuadros . . . . .	XIII
Agradecimientos . . . . .	XV
Dedicatoria . . . . .	XXI
<b>1. Introducción.</b>	<b>1</b>
1.1. Justificación. . . . .	2
1.2. Estado del arte. . . . .	3
1.3. Objetivos de la tesis. . . . .	5
1.3.1. Objetivos generales. . . . .	5
1.3.2. Objetivos específicos. . . . .	5
1.4. Estructura de la tesis. . . . .	5
<b>2. Fundamentos Matemáticos.</b>	<b>7</b>
2.1. Antecedentes. . . . .	7
2.1.1. La ley del tercero excluido. . . . .	8
2.1.2. La lógica trivaluada de Lukasiewicz. . . . .	8
2.1.3. Otras lógicas polivaloradas. . . . .	9
2.2. Teoría clásica de conjuntos (conjuntos nítidos o exactos). . . . .	10
2.2.1. Operaciones de conjuntos clásicos. . . . .	12

2.2.2.	Propiedades de los conjuntos clásicos. . . . .	15
2.3.	Conjuntos difusos. . . . .	16
2.3.1.	Funciones de pertenencia. . . . .	19
2.3.2.	Etiquetas lingüísticas. . . . .	26
2.3.3.	Operaciones elementales con conjuntos difusos. . . . .	29
2.4.	Razonamiento difuso. . . . .	38
2.4.1.	Inferencia difusa. . . . .	41
2.5.	Sistemas lógico difusos. . . . .	47
2.5.1.	Etapas de un sistemas lógico difuso. . . . .	47
2.6.	Sistemas difusos aplicados al control de procesos. . . . .	51
2.7.	Control clásico VS control inteligente. . . . .	52
2.7.1.	Control clásico. . . . .	52
2.7.1.1.	Definiciones de control clásico. . . . .	53
2.7.1.2.	Principios de proyecto de sistemas de control. . . . .	54
2.7.1.3.	Tareas de un sistema de control clásico. . . . .	54
2.7.1.4.	Control Difuso (Fuzzy Control - FC). . . . .	56
2.7.1.5.	Definición del control inteligente. . . . .	57
2.7.1.6.	Características de los sistemas de control inteligente. . . . .	57
2.7.1.7.	Técnicas de control inteligente . . . . .	58
2.7.1.8.	Control difuso (fuzzy control). . . . .	58
2.8.	Conclusiones . . . . .	59
<b>3.</b>	<b>Descripción del Sistema.</b>	<b>61</b>
3.1.	Introducción. . . . .	61
3.2.	Descripción del sistema. . . . .	62
3.3.	Modelado matemático del sistema . . . . .	66
3.3.1.	Función de transferencia. . . . .	68
3.3.2.	Ecuaciones de estado . . . . .	68

---

3.4. Conclusiones . . . . .	69
<b>4. Diseño de Controladores.</b>	<b>71</b>
4.1. Introducción. . . . .	71
4.2. Diseño del controlador tipo Mamdani . . . . .	72
4.3. Diseño del controlador tipo Takagi-Sugeno . . . . .	79
4.4. Conclusiones . . . . .	85
<b>5. Resultados en simulación.</b>	<b>87</b>
5.1. Introducción. . . . .	87
5.2. Respuesta en lazo abierto . . . . .	88
5.3. Simulación del controlador Mamdani . . . . .	89
5.4. Simulación del controlador Takagi-Sugeno . . . . .	93
5.5. Conclusiones . . . . .	96
<b>6. Resultados Experimentales.</b>	<b>97</b>
6.1. Introducción. . . . .	97
6.2. Controlador Mamdani . . . . .	97
6.2.1. Respuesta experimental a la referencia senoidal . . . . .	97
6.2.2. Referencia cuadrada . . . . .	100
6.3. Controlador Takagi Sugeno . . . . .	102
6.3.1. Referencia senoidal . . . . .	102
6.3.2. Referencia cuadrada . . . . .	104
6.4. Comparación de los controladores implementados . . . . .	107
6.5. Conclusiones . . . . .	107
<b>7. Conclusiones.</b>	<b>109</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>111</b>
<b>A. Simbología.</b>	<b>113</b>

**B. Glosario.****115**

# Índice de figuras

2.1. Función escalón. . . . .	11
2.2. Función característica de la función $\mu_{Chot}$ . . . . .	12
2.3. Unión. . . . .	13
2.4. Intersección. . . . .	14
2.5. Complemento. . . . .	14
2.6. Función gama . . . . .	19
2.7. Función L . . . . .	20
2.8. Función lambda o triangular . . . . .	21
2.9. Función PI o trapezoidal . . . . .	21
2.10. Función S . . . . .	22
2.11. Función II . . . . .	23
2.12. Ejemplo1. . . . .	25
2.13. Concentración. . . . .	27
2.14. Dilatación. . . . .	27
2.15. Intensificación del contraste. . . . .	28
2.16. Difuminación. . . . .	28
2.17. Complemento. . . . .	30
2.18. Complemento con $w = 2$ . . . . .	30
2.19. Complemento sugeno con $\lambda = 1/2$ . . . . .	31
2.20. T-norma del mínimo. . . . .	33
2.21. T-norma del producto. . . . .	33

2.22. T-norma del producto drástico. . . . .	34
2.23. T-conorma del máximo. . . . .	36
2.24. T-conorma de la suma. . . . .	36
2.25. T-conorma de la suma drástica. . . . .	37
2.26. Implicación Mamdani. . . . .	42
2.27. Inferencia tipo max-prod. . . . .	43
2.28. Inferencia tipo max-prod para la función $\mu_{\sim B}(v) = \max(1 - z, \mu_B(v))$ . . . . .	43
2.29. Inferencia tipo max-prod para la función $\mu_{\sim B}(v) = 1 - \min(z, 1 - \mu_B(v))$ . . . . .	44
2.30. Funciones de membresía para los conjuntos difusos $\sim A = normal$ y $\sim B = moderada$ de los universos de discurso velocidad y frenado. . . . .	45
2.31. Implicación Mamdani para el ejemplo anterior. . . . .	46
2.32. Inferencia tipo max-prod para el ejemplo anterior . . . . .	46
2.33. Sistema lógico difuso. . . . .	48
2.34. Defusificación por centro de área . . . . .	51
2.35. Sistema de control clásico . . . . .	54
3.1. Sistema real . . . . .	62
3.2. Tarjeta de adquisición de datos PCI-MultiQ . . . . .	63
3.3. Módulo de etapa de potencia VPM-2405 . . . . .	63
3.4. Computadora Compac Presario . . . . .	64
3.5. Módulo de desplazamiento sobre el eje horizontal Gantry . . . . .	64
3.6. Módulo de desplazamiento sobre el eje horizontal XRS . . . . .	65
3.7. Módulo de desplazamiento sobre el eje horizontal xm3m2 . . . . .	65
3.8. Módulo de desplazamiento sobre el eje horizontal PRKL250 . . . . .	65
3.9. Diagrama de cuerpo libre del sistema. . . . .	67
4.1. Diagrama a bloques del controlador . . . . .	72
4.2. Diagrama de entradas y salidas del controlador Mamdani . . . . .	72
4.3. Funciones de membresía del error . . . . .	73

---

4.4.	Funciones de membresía de la variación del error . . . . .	74
4.5.	Funciones de membresía de la salida . . . . .	75
4.6.	Tabla de reglas difusas para controlador Mamdani . . . . .	78
4.7.	Superficie de control del controlador Mamdani . . . . .	78
4.8.	Diagrama de entradas y salidas del controlador Takagi-Sugeno . . . . .	79
4.9.	Funciones de membresía del error . . . . .	80
4.10.	Funciones de membresía de la variación del error . . . . .	81
4.11.	Tabla de reglas difusas para controlador Sugeno . . . . .	84
4.12.	Superficie de control del controlador Sugeno . . . . .	85
5.1.	Respuesta en lazo abierto . . . . .	88
5.2.	Respuesta en lazo abierto . . . . .	89
5.3.	Respuesta a la entrada seno con controlador Mamdani . . . . .	90
5.4.	Señal de control Mamdani . . . . .	90
5.5.	Señal de error Mamdani . . . . .	91
5.6.	Respuesta a la entrada cuadrada con controlador Mamdani . . . . .	91
5.7.	Señal de control Mamdani . . . . .	92
5.8.	Señal de error Mamdani . . . . .	92
5.9.	Respuesta a la señal de entrada senoidal con controlador Sugeno . . . . .	93
5.10.	Señal de control Sugeno . . . . .	94
5.11.	Señal de error Sugeno . . . . .	94
5.12.	Señal de respuesta a una señal cuadrada . . . . .	95
5.13.	Señal de control utilizada en la simulación . . . . .	95
5.14.	Señal de error a la respuesta de la entrada de referencia cuadrada . . . . .	96
6.1.	Respuesta experimental a la entrada senoidal con controlador Mamdani . . . . .	98
6.2.	Señal de control Mamdani . . . . .	98
6.3.	Señal de error Mamdani . . . . .	99
6.4.	Derivada del error Mamdani . . . . .	99

6.5. Respuesta experimental a la entrada cuadrada con controlador Mamdani	100
6.6. Señal de control Mamdani . . . . .	101
6.7. Señal de error Mamdani . . . . .	101
6.8. Derivada del error Mamdani . . . . .	102
6.9. Respuesta experimental a la entrada senoidal con controlador Sugeno	103
6.10. Señal de control Sugeno . . . . .	103
6.11. Señal de error Mamdani . . . . .	104
6.12. Derivada del error Sugeno . . . . .	104
6.13. Respuesta experimental a la entrada cuadrada con controlador Sugeno	105
6.14. Señal de control Sugeno . . . . .	105
6.15. Señal de error Sugeno . . . . .	106
6.16. Derivada del error Sugeno . . . . .	106

# Índice de cuadros

3.1. Parámetros y variables del modulo de desplazamiento . . . . .	67
4.1. Etiquetas lingüísticas de la entrada error del controlador Mamdani . .	73
4.2. Etiquetas lingüísticas de la entrada variación del error del controlador Mamdani . . . . .	74
4.3. Etiquetas lingüísticas de la salida del controlador Mamdani . . . . .	75
4.4. Etiquetas lingüísticas de la entrada error del controlador Sugeno . . .	80
4.5. Etiquetas lingüísticas de la entrada variación del Derror del controlador Sugeno . . . . .	81
4.6. Etiquetas lingüísticas de la salida del controlador Sugeno . . . . .	82

# Agradecimientos

Agradecemos a la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, institución que nos brindó los medios para culminar nuestros estudios de licenciatura en *Ingeniería en Electrónica y Telecomunicaciones*, formarnos profesionalmente y así lograr una superación personal.

En la elaboración de esta tesis queremos agradecer profundamente a nuestro asesor M.C. Elías Varela Paz por sus aportaciones y apoyo en la realización de este trabajo.

También especialmente a nuestro co-asesor M.C. Víctor Hugo Galván Zavala por las horas que nos dedico para que se lograra este proyecto de tesis.

Agradezco primeramente con todo mi ser a Dios y a la Virgen de Guadalupe por permitirme llegar a este momento, por todo lo que me ha permitido vivir, aprender y conocer, por que gracias a la vida conocí a las personas que a continuación agradeceré. Gracias por dejarme existir.

Doy gracias a mis padres Ma. Del Pilar y Miguel Mtz., por estar siempre conmigo, por no dejarse ni dejarme vencer, por ser mi apoyo, por todo su amor, comprensión y paciencia, por que siempre apoyan mis sueños, los amo papas.

Papá quiero decirte que deseo con todo el corazón y con todas mis fuerzas algún día llegar a ser por lo menos la mitad del gran hombre que eres, también algún día significar tanto para una persona como tu significas para mi, te admiro y respeto demasiado, eres mi ejemplo a seguir, te quiero mucho papá.

Mamá a ti quiero decirte que deseo ser por lo menos una mínima parte del gran ser humano que eres, o mejor aun espero algún día encontrar a una mujer como tu, una gran mujer que este conmigo toda la vida como tu lo haz estado con mi papá y con nosotros, te admiro y agradezco tanto que no tengo palabras para expresarlo, te quiero muchísimo mamá.

Gracias hermanos Pily y Carlos por todo su apoyo, comprensión y cariño, también por que en ocasiones me apoyaron económicamente aunque quizá no les correspondía, por ser mis hermanos, los mejores hermanos que no cambiaría por nada, los quiero mucho y cuentan conmigo siempre.

Abuelita Nina muchas gracias por nunca dejarnos solos, por cuidar a mi mamá que cuida a mi papá, gracias por cuidar de toda la familia, por que eres la abuelita mas buena del mundo, la mas bonita y consentidora, gracias por todo tu amor, te quiero mucho abuelita, gracias también a mi abuelito Carlos (q.e.p.d).

Gracias tíos Rubén y Oliva por apoyar a mi familia, por el apoyo económico, moral y sentimental para conmigo, por el apoyo desinteresado, por que siempre recibo de uds. puras cosas buenas, gracias Pepe por seguir en contacto, Rubén por que juntos seremos diseñadores y Tanis por tantos momentos alegres, a todos los quiero mucho.

Tíos Meliton y Lorena, gracias por su apoyo, por darme trabajo periódico que me permitió obtener ganancias, gracias por estar con mi familia, gracias Meli por la música, Emmanuel por ser campeones del MIME y Ale por ser la prima mas pequeña y fresa de esta familia, los quiero mucho a todos.

Gracias a mis Tíos Carlos e Irene por estar con la familia, por su apoyo, felicidades por ser papas y por la nueva felicidad de la casa, gracias Carlitos Jr. por que trajiste mucha paz y alegría a la familia, te adoro chaparrito precioso, a los tres los quiero mucho.

Tío Pascual gracias también por que aun recuerdo que pasábamos buenos momentos en el patio con todos los primos.

Gracias a toda la familia de mi papá que lo quiere tanto, desde mi abuelito Adolfo (q.e.p.d.) y mi Abuelita Ernestina hasta todos sus hijos, nietos y bisnietos, a todos mis tíos, primos y sobrinos por que son parte de la felicidad de mi papá, en especial a mi prima Tania Citlali, que de esta familia de los Mtz. es mi favorita y que quiero mucho.

M.C. Elías Varela Paz, asesor de este trabajo, gracias por el apoyo para sacar adelante la tesis y lograr la titulación, por el buen trato y consejo, gracias por todo.

Gracias M.C. Víctor Hugo Galván, por ser maestro, guía, amigo, hermano, asesor y ejemplo a seguir, gracias por todo lo que me enseñaste, por toda tu ayuda en la tesis, en la escuela y en la vida, se te quiere, respeta y admira mucho.

Doy gracias también a todos mis amigos de la carrera y de la vida: gracias Mayen por que siempre en ti existe apoyo incondicional y mucho cariño, eres muy linda persona nunca cambies, se que no lo harás por que así es tu esencia, Dulce por dejarme conocerte, por que te quiero mucho y por la lección de vida, Méndez por mencionarme en tu tesis y por que en verdad como dices somos como hermanos y compartimos muy buenos momentos más los que faltan, Vera por que hasta me esperaste para egresar de la ingeniería, por que me diste trabajo y por ser un gran amigo, Are por que siempre fuiste un apoyo, por que siempre dices las cosas como son, por que como hermana de carrera me echaste siempre porras, Raciél por todo lo que me enseñaste los últimos años, por las aventuras que pasamos y pasaremos, Verito aunque te haz ausentado mucho gracias por que toda la carrera fuimos muy unidos y por que también eres mi hermana, Héctor por ser ejemplo de superación a seguir, por compartir tus viajes con los amigos, por todo lo que compartimos dentro y fuera de la universidad, Lennon por que anduvimos batallando juntos desde 5to semestre siempre apoyándonos amigo, al mijirrin Jonatan Peña gracias por los últimos semestres carnal y por apoyarme en el sueño de la maestría, el hospedaje, el buen trato en tu casa y por compartir tus conocimientos conmigo desde Hidalgo hasta Ensenada, Bene por que desde la preparatoria siempre hemos sido amigos, Nahum por que a pesar de ser mentalmente superior siempre se contaba contigo como amigo, Pablin por ser tan buena gente y un gran amigo, Yesenia por todo lo que compartiste conmigo alguna vez, Omar gracias porque siempre alientas a echarle ganas, a la banda de los guapos ( Fer, López, Ray y Alex) por los últimos semestres y la gran amistad, a Quique también por esos últimos semestres, muy buen amigo, Amigos también del pueblo Gastón y Norman que me invitaron al fútbol y por toda su amistad, Polo que siempre me llevaste a jugar fútbol rápido y por ello conocí a los 5x y a los innumerables con los que ganamos muchos campeonatos, gracias a todos los que alguna vez fueron 5x e innumerables, gracias Garzas de Plata de fútbol rápido varonil y

femenil por los viajes, amistades y alegrías, gracias Lucy Chapetiada por el convivir diario en la red, por tu linda amistad, y todos esos momentos de sonrisas contigo, gracias también a mis amigos desde la secundaria Cristian, Jorge y Osvaldo, con los que he compartido tantas cosas, amigos desde siempre, gracias Osvaldo por todo el apoyo económico que me brindaste desde que te fuiste de aquí, gracias por que cada vez que los cuatro nos reunimos otra vez pasamos buenos momentos. Gracias Anna por lo que hemos vivido en estos últimos meses te quiero mucho gracias por apoyarme en todo.

Y por último pero no menos importante, gracias Felipe, por que en realidad el orden fue aleatorio, el orden de los factores no altera el producto, por que el primero solo es Dios y por que el último no es por que sea el último, en la amistad y en los agradecimientos todos son primero y todos son igual de importantes y a todos los que menciono y a los que no menciono los quiero mucho, les agradezco infinitamente, los admiro y espero conservarlos toda la vida, gracias Felipe Sarymh Sánchez Márquez por ser mi amigo de profesión, por gusto y selección, por los momentos compartidos, por la paciencia, por ser mi amigo, compadre y compañero de tesis y por que juntos y con ayuda de todos este proyecto se logro.

Gracias a todos por todo, los quiero mucho.

Sergio Miguel

### A MIS PADRES

A mis padres por brindarme un hogar cálido y enseñarme que la perseverancia y el esfuerzo son el camino para lograr objetivos a quienes me han heredado el tesoro más valioso que puede dársele a un hijo: amor. A quienes sin escatimar esfuerzo alguno, han sacrificado gran parte de su vida para formarme y educarme. A quienes la ilusión de su vida ha sido convertirme en persona de provecho. A quienes nunca podré pagar todos sus desvelos ni aún con las riquezas más grandes del mundo. Por darme todo su apoyo en los momentos tanto difíciles como fáciles que ha habido en mi vida, por quererme, apoyarme y guiarme para seguir el camino adecuado, ayudándome y comprendiéndome en los tropiezos que tuve, pero que forjaron en mi un espíritu de constante lucha y superación personal. A pesar de las situaciones difíciles por lo que pasamos, siempre estamos unidos y luchando juntos. Sus esfuerzos para que yo lograra uno más de mis sueños y anhelos, son la mejor herencia que pudiera tener, ya que fueron con sacrificio y constante lucha por parte de los dos. Por todo esto y mucho más, con todo mi amor y respeto GRACIAS.

### A MIS HERMANOS

Shair, Josajandy y Olaff. Por ser mis mejores amigos y por el gran apoyo que siempre nos hemos brindado en todas las etapas de nuestra vida. Por las situaciones difíciles que pasamos, pero en las que siempre hemos estado unidos haciendo más fuertes nuestros lazos familiares y no dejando que nadie los rompiera. El que cada uno de nosotros vaya logrando los ideales que se ha forjado y que sabemos serán en beneficio nuestro y llegaran a ser un triunfo dedicado a nuestra familia. Con todo mi amor y respeto les doy las gracias.

Quiero expresar mi agradecimiento a mi compañero de Tesis, Ing. Sergio Miguel Martínez Ordóñez por su generosidad al brindarme la oportunidad de recurrir a su capacidad en un marco de confianza, afecto y amistad, fundamentales para la concreción de este trabajo. A mi compañero y co-asesor M. Víctor Hugo Galván Zavala por sus valiosas sugerencias y acertados aportes durante el desarrollo de este trabajo y compañerismo al compartir inquietudes, éxitos y fracasos durante la realización de los experimentos por su presencia incondicional, amistad y valiosas críticas al discutir los resultados de este trabajo por su permanente disposición y desinteresada ayuda por su continuo y afectuoso aliento. A todos mis amigos de la carrera de Ing. Electrónica y Telecomunicaciones, a mis amigos de fútbol (los innumerables, los equis, Rubén Licona, Epazoyucan, Centro universitario) a mis amigos del trabajo (E.S.T. 18), las muestras de apoyo y ánimos que me han brindado.

Por sus preciados consejos y gratos momentos.

Siempre estaré en deuda permanente.

GRACIAS!!!!!!!

Felipe Sarymh

*Dedico este trabajo a mis padres, hermanos  
a toda mi familia, a mis amigos  
a mi Universidad e Instituto  
a mis asesores y sinodales  
a todos aquellos seres queridos  
que han estado a mi lado en este crecimiento  
personal y profesional.  
y en especial a mi amigo el Ing. Felipe  
(Sergio Miguel)*

*Este trabajo lo dedico a mi familia,  
mis amigos, mi asesor y co-asesor de tesis  
por su ayuda no sólo en sentido académico,  
sino humano y amigable que siempre creyeron en mí,  
a la gente que me dio su apoyo y ayuda durante  
la elaboración de esta tesis.  
por estar conmigo en cada momento,  
(Felipe Sarymh)*

# Capítulo 1

## Introducción.

Los controles difusos son considerados la aplicación más importante de la teoría de lógica difusa. La lógica difusa es una técnica diseñada para imitar el comportamiento humano (los humanos razonan eficientemente con definiciones difusas o vagas). Esta técnica fue concebida para capturar información vaga e imprecisa. Los controles difusos trabajan diferente de los controles convencionales; para describir un sistema, el conocimiento de un experto es utilizado en lugar de ecuaciones diferenciales. Este conocimiento es expresado en una manera muy *natural* usando variables lingüísticas, las cuáles están relacionadas por conjuntos difusos. Los controles difusos siendo una rama de las matemáticas aplica una técnica en la cuál el modelo se construye de un conjunto de reglas difusas, sin necesitar un modelo matemático. Un proceso de inferencia une dichas reglas para producir la(s) salida(s) deseada(s). Las reglas asocian ideas y relacionan una situación a una acción. Las reglas son del modo ***si-entonces***:

En (***si***) situación X realiza (***entonces***) acción Y

Los controles difusos son típicamente utilizados cuando el proceso a controlar es muy complejo, no-lineal, y su modelo matemático no es fácilmente obtenible. Para muchos procesos complejos, grandes niveles de precisión son imposibles de obtener sin embargo no son requeridos para una operación efectiva del sistema. De hecho, la inexactitud o

falta de información no es un problema en los controles difusos, sino por el contrario, es bastante útil ya que esa información existente puede ser explotada con menor esfuerzo.

Utilizando la información (o experiencia) disponible acerca de la planta a ser controlada, un conjunto de reglas de control pueden ser desarrolladas para expresar esa información. Otra ventaja de los controles difusos radica en que son menos sensibles a cambios en los parámetros o perturbaciones en comparación con los controles convencionales, ya que los controles difusos han demostrado ser más robustos que los tradicionales controles PID. Además, los controles difusos tiene la ventaja de que sus parámetros pueden actualizarse de manera sencilla si los puntos de operación de la planta cambian. En muchos casos, inclusive un operador no especializado en control puede mantener la base de reglas del control, dado que no es difícil de entender dicha base porque las reglas utilizan variables lingüísticas en vez de variables numéricas.

En esta tesis se realiza el control de un módulo de desplazamiento aplicando técnicas de control con lógica difusa.

## **1.1. Justificación.**

El uso de la lógica difusa como técnica de control es justificada para situaciones como:

- Procesos complejos, si no existe un modelo de solución sencillo.
- Cuando haya que introducir la experiencia de un operador “experto”, que se base en conceptos imprecisos.
- Cuando ciertas partes del sistema a controlar son desconocidas y no pueden medirse de forma fiable (admite errores posibles).
- Cuando el ajuste de la variable puede producir el desajuste de otras.

- En general, cuando se quieran representar y operar con conceptos que tengan imprecisión o incertidumbre.

## 1.2. Estado del arte.

El arte difuso ha sido ampliamente utilizado en diferentes ramas de la ciencias y para distintos proyectos, el estado del arte difuso se ha llevado a cabo en sin número de aplicaciones como se vera a continuación.

Se uso en la Universidad del país Vasco en el proyecto llamado “Diseño de controladores adaptativos basados en lógica difusa y su integración en un sistema de tiempo real” la investigadora principal fue Marga Marcos Muñoz. El objetivo de este proyecto consistió en la incorporación de la teoría de la lógica y conjuntos difusos en la realización de un sistema de control supervisado en tiempo real teniendo como objetivo principal aumentar la funcionalidad del mismo gracias a la mayor flexibilidad que presentan la utilización de lógica difusa frente a la lógica estricta o booleana. (Muñoz, 1997)

Otro caso se llevo a cabo en el proyecto “Utilización de Técnicas de Inferencia basadas en Lógica Difusa para la Caracterización de Aceites de Oliva” con el investigador Santiago Sánchez Solano. Este Proyecto de Investigación contempló la aplicación de técnicas de inferencia basadas en lógica difusa a diferentes problemas que aparecen en los procesos de elaboración y comercialización de aceites de oliva. El conjunto de acciones abordadas vino motivado por un doble objetivo. Por un lado, facilitar el desarrollo de aplicaciones informáticas que permitieran construir sistemas expertos capaces de manejar la información difusa que aparece en los procesos de caracterización de estos productos. Por otra parte, avanzar en el diseño de una línea de instrumentación de caracterización y medida que utilice de forma eficiente el paradigma fuzzy. Donde se puede destacar como resultado del proyecto la generación de un entorno de desarrollo de sistemas difusos, basado en un nuevo lenguaje de especificación dotado de may-

or expresividad y que permite al usuario definir nuevas funciones de pertenencia y operadores difusos. El entorno incluye también nuevas herramientas que facilitan las etapas de descripción verificación y síntesis de este tipo de sistemas. (Solano, 2001)

En la Universidad Autónoma de Chihuahua, el investigador Oscar Loya Carrera llevo a cabo el proyecto “Robot fuzzy”. Este proyecto pretendía crear un robot que permita administrar sus recursos de manera autónoma e inteligente utilizando como base el proyecto iniciado por IBM llamado Robocode. Para esto se utilizo un controlador Mamdani.

En este proyecto las entradas del sistema fueron distancia y energía que a su vez generaron funciones de membresía con etiquetas lingüísticas: poca, media y mucha, y las salidas del control fue el poder con que el robot en juego realizaría los disparos abarcando de 1 a 3 disparos, y sus etiquetas lingüísticas generadas fueron: poco, normal y mucho.(Carrera, n.d.)

Así mismo los alumnos Samir Kouro R. y Rodrigo Musalem M. de Ingeniería Civil Electrónica de la Universidad Técnica Federico Santa María de Valparaíso, Chile, con el asesoramiento del profesor Juan Hernández, llevaron a cabo el proyecto que denominaron “Control mediante lógica difusa” control que llevaron a cabo en un helicóptero prototipo, proyecto en el cual se llegaron a la conclusión de que la lógica difusa tiene la ventaja de incorporar el lenguaje común al diseño de sistemas de control, hecho que se torna muy importante a la hora de incluir el conocimiento empírico de los operadores de procesos. Y el hecho de que este método no requiera de un modelo riguroso de la planta a controlar facilita en gran medida el proceso de diseño del controlador.(R. and M., 2002)

## 1.3. Objetivos de la tesis.

### 1.3.1. Objetivos generales.

Desarrollar un control de posición en un módulo de desplazamiento de C.D. haciendo uso de técnicas de lógica difusa.

### 1.3.2. Objetivos específicos.

Los Objetivos específicos de la tesis son los siguientes:

- Tener una buena base de conocimiento de la planta.
- Proponer una serie de reglas, para el control de la planta.
- Realizar simulación numérica de controladores.
- Implementar controladores en la planta.
- Realizar un análisis comparativo entre un controlador tipo Mandani y un Takagi-Sugeno.

## 1.4. Estructura de la tesis.

Esta tesis se encuentra conformada por siete capítulos, apéndice y referencias bibliográficas.

Capítulo 2, fundamentos matemáticos, proporciona las herramientas fundamentales de la teoría de lógica difusa.

Capítulo 3, *Descripción del sistema*, se describe de una manera mas detallada el sistema y se obtiene el modelo matemático por medio de su función de transferencia y sus ecuaciones de estado.

En el Capitulo 4, *Diseño de controladores*, se desarrollan 2 tipos de controladores difusos para el control del sistema, un controlador tipo Mamdani y un controlador tipo Takagi Sugeno.

El Capitulo 5, *Resultados en simulación*, se presentan los resultados en simulación numérica de los controladores diseñados en el capítulo anterior.

El Capitulo 6, *Resultados experimentales*, se presentan los resultados de aplicar los controladores diseñados en el sistema físico.

Finalmente las conclusiones y un glosario de términos técnicos.

# Capítulo 2

## Fundamentos Matemáticos.

En este capítulo se presentan las bases matemáticas para el claro entendimiento de las bases de la lógica difusa.

### 2.1. Antecedentes.

La palabra fuzzy es un término fotográfico que alude a la condición de movido o borroso en el sentido de imágenes con los contornos mal definidos. De ahí la traducción de difuso o borroso que empleamos en castellano.

En 1965 L.A. Zadeh introduce una lógica infinito valorada caracterizando el concepto de *conjunto difuso* y por extensión la *lógica difusa*.

La idea de Zadeh es hacer que el rango de valores de pertenencia de un elemento a un conjunto pueda variar en el intervalo  $[0, 1]$  en lugar de limitarse a uno de los valores del par  $\{0, 1\}$  (o lo que es lo mismo falso, verdadero).

Los conjuntos difusos fueron introducidos por L. A. Zadeh en 1965 para procesar o manipular información y datos afectados de incertidumbre o imprecisión no probabilística.

Fueron diseñados para representar matemáticamente incertidumbre y vaguedad así como para proporcionar herramientas formalizadas para trabajar con la imprecisión

intrínseca en muchos problemas.

No obstante la historia de la lógica difusa comienza mucho antes.

Realmente hay que remontarse a Aristóteles quien introdujo las denominadas Leyes del Pensamientos, como base para desarrollar una teoría concisa de lógica y posteriormente de las matemáticas.

### **2.1.1. La ley del tercero excluido.**

Esta “ley básica del pensamiento”, establece que cualquier proposición solo puede ser verdadera o falsa y que ningún otro valor de verdad intermedio está permitido.

Incluso cuando Parminedes (300aC) propuso la primera versión de esta ley ya encontró serias e inmediatas objeciones.

Heraclito propuso cosas que podían ser simultáneamente ciertas y falsas.

Seria Platón quien pusiera la “primera piedra”, de la lógica difusa indicando que “hay una tercera región entre lo verdadero y lo falso donde los opuestos se presentan juntos”.

### **2.1.2. La lógica trivaluada de Lukasiewicz.**

La primera formulación sistemática de una alternativa a la lógica bivaluada de Aristóteles fue formulada por Jan Lukasiewicz entre 1917 y 1920.

Este autor introdujo un tercer valor de verdad, que podríamos describir con el término “posible”, y formuló consecuentemente una lógica trivaluada .

Lukasiewicz asignó un valor numérico entre 0 y 1 al termino posible y construyo las matemáticas correspondientes a esa lógica trivaluada.

Adicionalmente Lukasiewicz propuso una notación completa y un sistema axiomático a partir del cual esperaba derivar “matemática moderna”.

### 2.1.3. Otras lógicas polivaloradas.

Lukasiewicz exploró posteriormente la posibilidad de manejar lógicas con cuatro, cinco o más valores de verdad, llegando a la conclusión de que no existía impedimento formal para la derivación de una lógica infinito-valorada.

Esta lógica sería completamente formalizada hacia 1930.

Lukasiewicz consideraba que la lógica trivalorada y la infinito valorada eran las más interesantes desde el punto de vista de sus propiedades, si bien la tetravalorada era la más fácilmente adaptable a los postulados aristotélicos clásicos.

Knuth argumentaba que su lógica permitía un desarrollo de las matemática mas elegante que el de la lógica bivaluada.

Los fundamentos de los sistemas difusos se encuentran en la lógica difusa. La lógica difusa o borrosa es una técnica de computación flexible que le permite a una computadora clasificar información del mundo real en una escala infinita acotada por los valores falso y verdadero; tiene como objetivo proporcionar un soporte matemático formal al razonamiento basado en el lenguaje natural, el cual se caracteriza por tratarse de un razonamiento de tipo aproximado que hace uso de proposiciones que expresan información de carácter impreciso.

Algunas características de la lógica difusa que la hacen de tanto interés son:

- Es fácil de entender, los conceptos matemáticos son bastante sencillos.
- Es flexible, su escalamiento es sencillo.
- Es tolerante a datos imprecisos.
- Puede modelar funciones no-lineales de complejidad arbitraria.
- Puede ser construida sobre la información de la experiencia de los operarios que manejan en sistema que se desea automatizar.
- Puede ser complementaria a las técnicas de control convencionales.

- Esta basada en el lenguaje utilizado por los humanos.

La lógica difusa debe ser distinguida de la incertidumbre en el sentido en que la lógica difusa describe la ambigüedad de un evento, mientras que la incertidumbre la ocurrencia de un evento. Específicamente, el concepto incerteza se refiere a la incerteza estocástica, que se caracteriza por referirse a eventos bien definidos, por ejemplo,

La probabilidad de que el motor falle es del 80 %

La lógica difusa trata con incertezas lingüísticas del tipo,

El motor falla constantemente

Ambas sentencias son muy similares, sin embargo, existe una significativa diferencia en cuanto a la forma de expresar la probabilidad. Mientras en el caso de incerteza estocástica, la probabilidad es expresada en un sentido matemático, en una incerteza lingüística la probabilidad es percibida correctamente sin que haya sido cuantificada. (Quispe, 2005)

A continuación se explican algunos conceptos que son de gran utilidad para el estudio de la lógica difusa y la teoría de conjuntos difusos.

## 2.2. Teoría clásica de conjuntos (conjuntos nítidos o exactos).

Los conjuntos clásicos (nítidos en terminología de lógica difusa) surgen de forma natural por la necesidad del ser humano de clasificar objetos y conceptos. Por ejemplo, si pensamos en los productos de alimentación, podemos hacer varios conjuntos:

*Frutas:* manzana, pera, plátano, etc.

*Verduras:* calabazas, espinacas, jitomate, etc.

*Carnes:* pescado, pollo, etc.

Los conjuntos nítidos pueden definirse de varias formas:

- Mediante un listado de sus elementos:
- Mediante una función de pertenencia  $\mu$  que toma valores 0 o 1 definida sobre el universo de discurso  $U$  (todos los elementos que pueden o no pertenecer al conjunto)

Ejemplo: sea  $U$  el conjunto de todos los alimentos. Entonces  $Frutas$  es un conjunto tal que  $\mu(manzana) = 1$ ,  $\mu(mango) = 0$ , etc.

De este modo, para definir un conjunto nítido  $A$  podemos utilizar la función de pertenencia dada por:

Es decir, una función tipo escalón centrada en el valor umbral/ valores umbrales de decisión, la Figura 2.1 muestra este tipo de función.

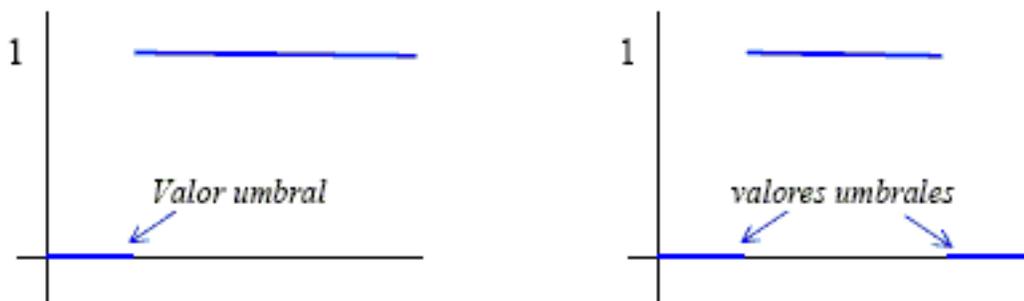


Figura 2.1: Función escalón.

En la teoría de conjuntos clásicos, un conjunto es denominado crisp y puede ser descrito por una función característica como la siguiente:

$$\mu_C : U \rightarrow \{0, 1\} \quad (2.1)$$

Donde,  $U$  es denominada universo de discurso, y los elementos del conjunto pueden ser discretos o continuos  $\mu_C$  determina la pertenencia dentro del conjunto, si el elemento esta  $\mu_C = 1$  o no esta dentro  $\mu_C = 0$ .

Considerando la función característica  $\mu_{Chot}$  representando en conjunto caliente y el Universo de discurso  $T$  representado por todas las temperaturas, la Figura 2.2 muestra la gráfica que representa este conjunto, considerando que las temperaturas mayores a 40 son calientes, por ejemplo del conjunto  $\mu_{Chot}(20) = 0$  y  $\mu_{Chot}(50) = 1$ , esto quiere decir que  $T = 20$  no se encuentra dentro del conjunto mientras  $T = 50$  si lo esta.

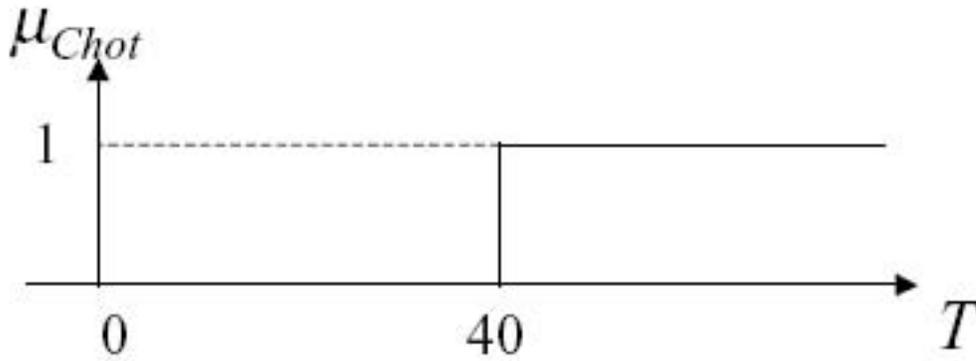


Figura 2.2: Función característica de la función  $\mu_{Chot}$ .

### 2.2.1. Operaciones de conjuntos clásicos.

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos en el universo  $U$ , y  $\mu_A(x)$  y  $\mu_B(x)$  sus funciones características de  $A$  y  $B$  en el universo de discurso en los conjuntos  $A$  y  $B$  respectivamente. La función característica  $\mu_A(x)$  es definida de la siguiente manera:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad (2.2)$$

Y  $\mu_B(x)$  esta definida como sigue:

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin B \end{cases} \quad (2.3)$$

Usando estas definiciones las operaciones básicas son:

**Unión.**

La unión entre dos conjuntos  $C = A \cup B$  donde  $\cup$  es el operador de unión, y representa todos los elementos del universo de discurso que están en los conjuntos  $A$  y  $B$ . Véase la Figura 2.3.

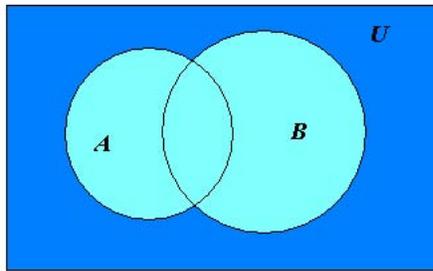


Figura 2.3: Unión.

La función característica de  $\mu_C$  es:

$$\forall x \in U : \mu_C = \text{máx}[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (2.4)$$

**Intersección.**

La intersección de dos conjuntos  $C = A \cap B$ , donde  $\cap$  es el operador de intersección, representa todos los elementos en el universo  $U$  que están presentes en ambos conjuntos  $A$  y  $B$  simultáneamente. Véase la Figura 2.4.

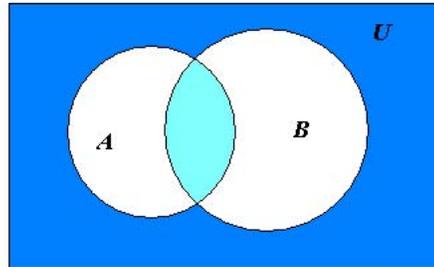


Figura 2.4: Intersección.

La función característica de  $\mu_C$  es:

$$\forall x \in U : \mu_C = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (2.5)$$

### Complemento o negación.

El complemento de un conjunto  $A$  denotado como  $\bar{A}$  se define como la colección de elementos en el universo  $U$  que no están en el conjunto  $A$ . Véase la Figura 2.5.

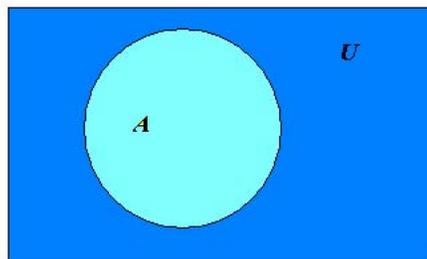


Figura 2.5: Complemento.

La función característica de  $\mu_{\bar{A}}$  es:

$$\forall x \in U : \mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A(x) \quad (2.6)$$

### 2.2.2. Propiedades de los conjuntos clásicos.

Las propiedades de los conjuntos clásicos son muy importantes de considerar porque tienen influencia en la manipulación matemática. Algunas de esas propiedades son listadas a continuación (Zilouchian and Jamshidi, 2001):

- Conmutatividad.

$$A \cup B = B \cup A \quad (2.7)$$

$$A \cap B = B \cap A \quad (2.8)$$

- Asociatividad.

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad (2.9)$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad (2.10)$$

- Distributividad.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (2.11)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (2.12)$$

- Idempotencia.

$$A \cup A = A \quad (2.13)$$

$$A \cap A = A \quad (2.14)$$

- Identidad.

$$A \cup \phi = A \quad (2.15)$$

$$A \cap X = A \quad (2.16)$$

$$A \cap \phi = \phi \quad (2.17)$$

$$A \cup X = X \quad (2.18)$$

### 2.3. Conjuntos difusos.

En los conjuntos difusos se relaja la restricción de que la función de pertenencia valga 0 ó 1, y se deja que tome valores en el intervalo  $[0, 1]$ . La necesidad de trabajar con conjuntos difusos surge de un hecho: hay conceptos que no tienen límites claros. Por ejemplo:

¿Una persona que mide 1.80 es *alta*? ¿Una temperatura de 15 grados es *baja*?. Vemos que, a diferencia de lo que ocurre en el caso de las frutas (no hay vaguedad, un alimento o bien es una fruta o bien no lo es), en otras situaciones nos vemos obligados a tratar con ella.

Antes de entrar de lleno a la teoría de la lógica difusa se verán algunas definiciones útiles:

- Se llama ***variable lingüística*** a aquella noción o concepto que vamos a calificar de forma difusa. Por ejemplo: la altura, la edad, el error, la variación del error, etc., le aplicamos el adjetivo “lingüística” porque definiremos sus características mediante el lenguaje hablado.

- Se llama **universo de discurso** al rango de valores que pueden tomar los elementos que poseen la propiedad expresada por la variable lingüística. En el caso de la variable lingüística “altura de una persona normal”, sería el conjunto de valores comprendido entre 1.4 y 2.3 m.
- Se llama **valor lingüístico** a las diferentes clasificaciones que efectuamos sobre la variable lingüística: en el caso de la altura, podríamos dividir el universo de discurso en los diferentes valores lingüísticos: por ejemplo *bajo*, *mediano* y *alto*.
- Se llama **conjunto difuso** a un valor lingüístico junto a una función de pertenencia. El valor lingüístico es el “nombre” del conjunto, y la función de pertenencia se define como aquella aplicación que asocia a cada elemento del universo de discurso el grado con que pertenece al conjunto difuso. Decimos que un conjunto es *nítido* si su función de pertenencia toma valores en  $\{0, 1\}$ , y *difuso* si toma valores en  $[0, 1]$ .

La notación habitual para los conjuntos difusos es la definida por Lofti Zadeh, que es la siguiente: sea  $\sim A$  un conjunto difuso definido sobre el universo  $U$ :

$$\sim A = \{(x, \mu_A(x))/x \in U\} \quad (2.19)$$

que indica que  $\sim A$  está formado por todos los pares ordenados  $x$  y el resultado de la función de pertenencia para todo elemento  $u$  dentro del universo de discurso  $U$ . Para denotar el conjunto difuso  $\sim A$ :

si el universo es discreto:

$$\sum_U \sim A(x)/x \quad (2.20)$$

si el universo es continuo:

$$F = \int_u \sim A(x)/x \quad (2.21)$$

La sumatoria o la integral pierden su significado habitual, en lógica difusa quieren simbolizar una mera enumeración de tuplas. La barrera tampoco indica una fracción sino que simplemente separa los dos elementos de la tupla. Así por ejemplo el conjunto difuso discreto “tirada alta del dado” podría definirse como:

$$\sim F = \{0/1 + 0/2 + 0.3/3 + 0.6/4 + 0.9/5 + 1/6\}$$

La parte derecha de la tupla indica el elemento y la parte izquierda el grado de pertenencia. Los conjuntos difusos y las funciones de pertenencia pueden emplearse de dos formas posibles:

- a) Para estimar grados de pertenencia a un conjunto. Por ejemplo, si nos dicen que una persona mide 170 cm, ¿en qué grado es una persona alta?
- b) Para expresar *posibilidades* en una situación en la que se dispone de información incompleta. Por ejemplo, si nos dicen que una persona es mediana, ¿cual será su altura? En este caso la función de pertenencia  $\mu$  puede interpretarse como una *distribución de posibilidad* que nos indica la preferencia sobre los valores que una variable de valor desconocido puede tomar.

De este modo se puede ver que la principal diferencia entre la teoría de conjuntos clásica y la difusa es que mientras que los valores de la función de pertenencia de un conjunto nítido son siempre 0 o 1, la función de pertenencia de un conjunto difuso toma valores en todo el intervalo  $[0, 1]$ <sup>1</sup>. De este modo se ve que, al contrario de los conjuntos nítidos, que pueden definirse de varias formas, los conjuntos difusos vienen siempre definidos por su función de pertenencia. A continuación se muestran las funciones de pertenencia que habitualmente se utilizan en lógica difusa.

---

<sup>1</sup> Se suele normalizar el grado de pertenencia máximo a 1

### 2.3.1. Funciones de pertenencia.

Aunque en principio cualquier función sería válida para definir conjuntos difusos, en la práctica hay ciertas funciones típicas que siempre se suelen usar, tanto por la facilidad de computación que su uso conlleva como por su estructura lógica para definir su valor lingüístico asociado. Las funciones más comunes son:

- Función GAMMA  $\Gamma$  Figura 2.6

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ (x - a)/(m - a) & \text{si } x \in (a, m) \\ 1 & \text{si } x \geq m \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{para } a < x < m \\ 1 & \text{para } x \geq m \end{cases}$$

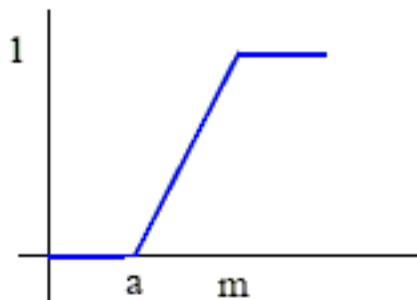


Figura 2.6: Función gama

- Función L Figura 2.7

Puede definirse simplemente como 1 menos la función GAMMA.

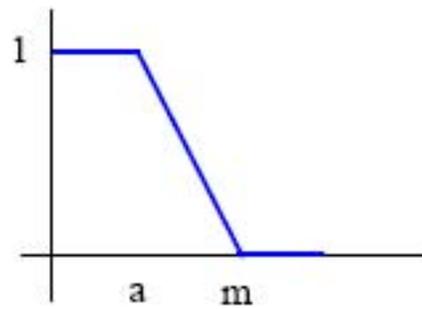


Figura 2.7: Función L

- Función LAMBDA o triangular Figura 2.8

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ (x - a)/(m - a) & \text{si } x \in (a, m] \\ (b - x)/(b - m) & \text{si } x \in (m, b) \\ 0 & \text{si } x \geq b \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{para } a < x \leq m \\ \frac{b-x}{b-m} & \text{para } m < x \leq b \\ 0 & \text{para } x > b \end{cases}$$

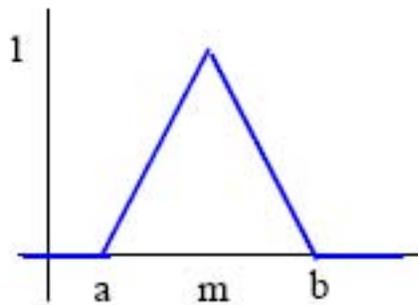


Figura 2.8: Función lambda o triangular

- Función PI o Trapezoidal Figura 2.9

$$\mu(x) \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{para } a < x \leq b \\ 1 & \text{para } b < x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{para } c < x \leq d \\ 0 & \text{para } x > d \end{cases} \quad (2.24)$$

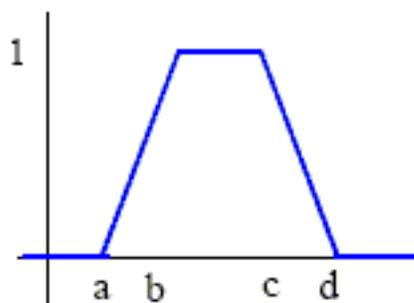


Figura 2.9: Función PI o trapezoidal

Las funciones L y GAMMA se usan para calificar valores lingüísticos extremos, tales como *bebé* o *anciano*, respectivamente. Las funciones PI y LAMBDA se usan para describir valores intermedios (como *joven*, de *mediana edad*, *maduro*). Su principal diferencia reside en que la función PI implica un margen de tolerancia alrededor del valor que se toma como más representativo del valor lingüístico asociado al conjunto difuso.

También se pueden utilizar otras funciones que no sean lineales a trozos como las siguientes funciones:

- Función S, definida mediante Figura 2.10

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq a \\ 2 \left( \frac{x-a}{c-a} \right)^2 & \text{para } a \leq x \leq \frac{a+c}{2} \\ 1 - 2 \left( \frac{x-a}{c-a} \right)^2 & \text{para } \frac{a+c}{2} \leq x \leq c \\ 1 & \text{para } x \geq c \end{cases} \quad (2.25)$$

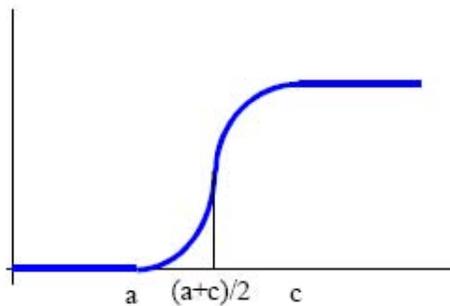


Figura 2.10: Función S

- Función Z, que es la función opuesta,

$$\mu_z(x) = 1 - \mu_S(x) \quad (2.26)$$

- Función  $\Pi$  definida mediante Figura 2.11

$$\mu_{\Pi}(x) = \begin{cases} \mu_S(x) & \text{para } x \leq b \\ \mu_Z(x) & \text{para } x > b \end{cases} \quad (2.27)$$

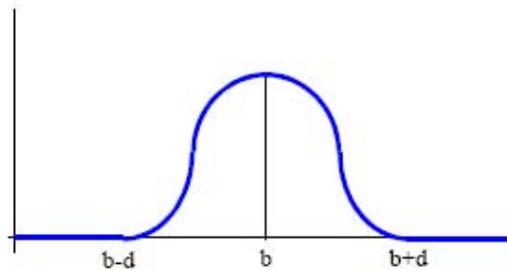


Figura 2.11: Función  $\Pi$

- Dado un conjunto difuso  $\sim A$ , se define como *alfa-corte* de  $\sim A$ , al conjunto de elementos que pertenecen al conjunto difuso  $\sim A$  con grado mayor o igual que alfa, es decir:

$$\sim A_{\alpha} = \{x \in X / \sim A(x) \geq \alpha\} \quad (2.28)$$

- Se define como *alfa corte estricto* al conjunto de elementos con grado de pertenencia estrictamente mayor que alfa, es decir:

$$\sim A_{\bar{\alpha}} = \{x \in X / \mu_A(x) > \alpha\} \quad (2.29)$$

- Se define como *soporte* de un conjunto difuso  $\sim A$ , al conjunto nítido de elementos que tienen grado de pertenencia estrictamente mayor que 0, o sea, al alfa-corte estricto de nivel 0.

En la ecuación (2.28) se puede ver :

$$\text{Soporte}(\sim A) = \{x \in X / \mu_A(x) > 0\} \quad (2.30)$$

- Se define como *núcleo* de un conjunto difuso  $\sim A$ , al conjunto nítido de elementos que tienen grado de pertenencia 1. (alfa-corte de nivel 1).

$$\text{Nucleo}(\sim A) = \{x \in X / \mu_A(x) = 1\} \quad (2.31)$$

- Se define la *altura* de un conjunto difuso  $\sim A$  como el valor más grande de su función de pertenencia.
- Se dice que un conjunto difuso está *normalizado* si y solo si su núcleo contiene algún elemento (o alternativamente, si su altura es 1), es decir:

$$\exists x \in X \mu_A(x) = 1 \quad (2.32)$$

- El elemento  $x$  de  $U$  para el cual  $\mu_F(x) = 0.5$  se llama el *punto de cruce*.
- Un conjunto difuso cuyo soporte es un único punto  $x$  de  $U$  y tal que la función de pertenencia de  $x$  es 1 (es decir, el soporte coincide con el núcleo y tienen un único punto) se llama un *conjunto difuso unitario (singleton)*.

### Ejemplo 1

Consideremos la variable lingüística “*Altura de los seres humanos*”, que toma valores en el universo de discurso  $U = [1.4, 2.50]$ . Se realiza una clasificación difusa de los seres humanos en tres conjuntos difusos (o valores lingüísticos): *bajos*, *medianos* y *altos*.

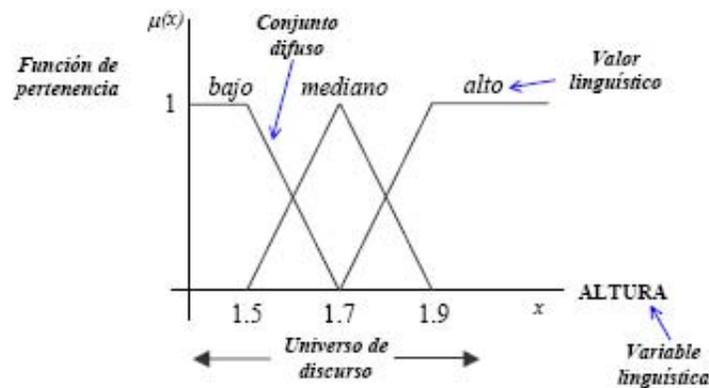


Figura 2.12: Ejemplo1.

En la Figura 2.12 se han dibujado 3 conjuntos difusos sobre la variable lingüística altura, cuyos valores lingüísticos asociados son *bajo*, *mediano* y *alto* respectivamente. Las funciones de pertenencia son de tipo L para *bajo*, Lambda o Triángulo para el *mediano* y Gamma para el *alto*. Más adelante aclararemos porqué usamos estos nombres, que únicamente determinan qué forma tendrán las funciones de pertenencia. De este modo si Luís mide 1.80 metros, la lógica difusa nos dice que es un 0.2 mediano y un 0.8 alto. De este modo se expresa que mientras un elemento puede estar dentro de un determinado conjunto, puede no cumplir las especificaciones de dicho conjunto al cien por ciento (por ejemplo, en el caso de Luís, a la vista del resultado se puede afirmar que es *poco mediano* y *más bien alto*).

En este ejemplo, dado el conjunto difuso mediano se tiene que:

- El alfa-corte 0.5 es el intervalo  $[1.6, 1.8]$ .
- El alfa corte estricto 0.5 es el intervalo  $(1.6, 1.8)$ .
- El soporte es  $(1.5, 1.9)$ .
- El núcleo es 1.7 .

- Es un conjunto difuso normalizado.
- Tiene dos puntos de cruce: 1.6 y 1.8 .

### 2.3.2. Etiquetas lingüísticas.

Tradicionalmente se han utilizado modificadores de los conjuntos difusos a los que llamamos etiquetas lingüísticas, equivalentes a lo que en lenguaje natural serían los adverbios. La interpretación en el modelo difuso de estos enunciados consiste en la composición de la función de pertenencia con una operación aritmética simple. Por ejemplo, es habitual considerar como interpretación del adverbio *muy* el cuadrado de la función de pertenencia original, Es decir, “Juan es muy alto” se interpretaría como:

$$\mu_{MUYALTO}(x) = (\mu_{ALTO}(x))^2 \quad (2.33)$$

De igual manera:

MUY

$$\mu_{MUYA}(x) = (\mu_A(x))^2 \quad (2.34)$$

De este modo, si el grado de pertenencia de una persona a la clase alto es 0.5, el grado de pertenencia a la clase muy alto es sólo 0.25.

ALGO

$$\mu_{ALGOA}(x) = \sqrt{\mu_A(x)} \quad (2.35)$$

Así, si el grado de pertenencia de una persona a la clase alto es 0.5, el grado de pertenencia a la clase algo alto es de 0.707.

Existe todo un catálogo de posibles adverbios y sus modificadores asociados, pero las modificaciones que más usualmente se aplican a un conjunto difuso son las siguientes:

- *Normalización.* Al convertir un conjunto difuso no normalizado en uno normalizado (dividiendo por la altura del conjunto).

- *Concentración.* Al componer con una función tipo  $f(y) = yp$ , con  $p > 1$ . El efecto es que la función de pertenencia toma valores más pequeños, centrándose en los valores mayores. El efecto de aplicar la concentración puede verse en la Figura 2.13 (la función de pertenencia base es la azul, y la modificada la rosa):

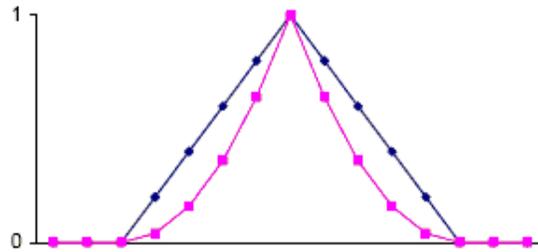


Figura 2.13: Concentración.

- *Dilatación.* Al componer con una función tipo  $f(y) = yp$  con  $0 < p < 1$ . El efecto es el contrario a la concentración como se muestra en la Figura 2.14

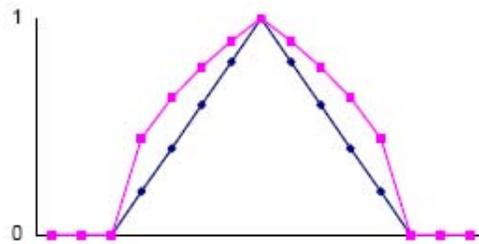


Figura 2.14: Dilatación.

- *Intensificación del contraste.* Se disminuyen los valores menores a 1/2 y se aumentan los mayores. Componemos con una función del tipo:

$$f(y) = \begin{cases} 2^{p-1}y^p & \text{para } y \leq 0.5 \\ 1 - 2^{p-1}(1 - y)^p & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.36)$$

donde  $p > 1$ . Normalmente se suele poner  $p = 2$  (a mayor  $p$ , mayor intensificación).

Cuyo efecto se muestra en la Figura 2.15

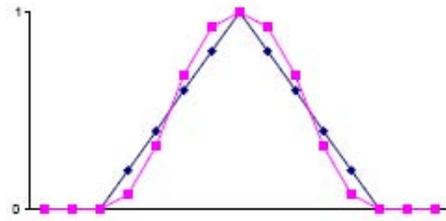


Figura 2.15: Intensificación del contraste.

- *Difuminación*. Efecto contrario al anterior. Se compone con la función:

$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{y/2} & \text{para } y \leq 0.5 \\ 1 - \sqrt{(1-y)/2} & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.37)$$

Cuyo efecto se ve en la Figura 2.16:

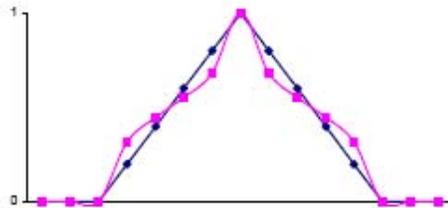


Figura 2.16: Difuminación.

### 2.3.3. Operaciones elementales con conjuntos difusos.

Al igual que en la teoría clásica de conjuntos, sobre los conjuntos difusos podemos definir las operaciones de unión, intersección, complemento, etc.

#### Complemento o negación.

Dado un conjunto  $\sim A$ , el conjunto complemento de  $\sim A$  está formado por los elementos del universo que no pertenecen a  $\sim A$ . En el caso difuso, este conjunto vendrá definido por una función de pertenencia que se calcula para cada elemento a partir de su pertenencia al conjunto  $\sim A$ . Es decir:

$$\mu_{\sim\bar{A}}(x) = c(\mu_{\sim A}(x)) \quad (2.38)$$

siendo  $c$  una función  $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que, dado el grado de pertenencia al conjunto  $A$ , nos da el grado de pertenencia al conjunto complemento de  $A$ . A esta función  $c$  desde un punto de vista intuitivo deben exigirse las siguientes características:

- Concordancia con el caso nítido:

$$c(1) = 0 \quad y \quad c(0) = 1 \quad (2.39)$$

- Estrictamente decreciente:

$$\forall \alpha, \beta \in [0, 1] \quad \alpha > \beta \Rightarrow c(\alpha) < c(\beta) \quad (2.40)$$

- Involución:

$$\forall \alpha \in [0, 1] \quad c(c(\alpha)) = \alpha \quad (2.41)$$

En general se considera como función del complemento a  $c(\alpha) = 1 - \alpha$  en la Figura 2.17 se muestra un ejemplo:

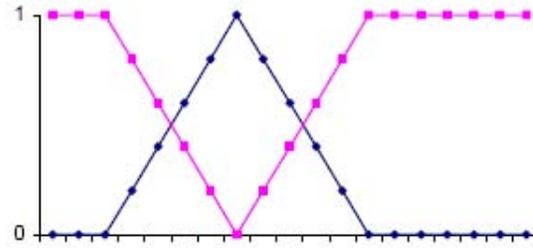


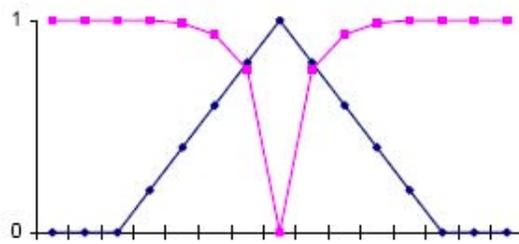
Figura 2.17: Complemento.

aunque también existen otras variantes que cumplen las propiedades antes citadas como:

- Complemento de Yager:

$$c_W(\alpha) = (1 - \alpha^W)^{1/W} \quad W \in [0, \infty] \quad (2.42)$$

En la Figura 2.18 se puede ver el ejemplo para una función triangular y con complemento Yager:

Figura 2.18: Complemento con  $w = 2$ .

- Clase de complemento de Sugeno:

$$c_\lambda(\alpha) = \frac{1 - \alpha}{1 - \lambda\alpha} \quad \lambda \in [0, 1] \quad (2.43)$$

En la Figura 2.19 se muestra el complemento sugeno para una función triangular.

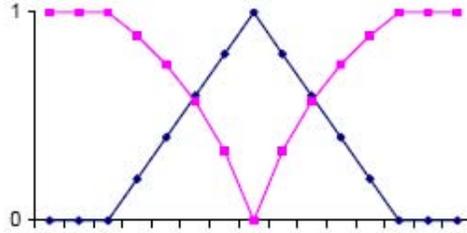


Figura 2.19: Complemento sugeno con  $\lambda = 1/2$ .

### Intersección.

En teoría de conjuntos clásica, se considera que un elemento pertenece al conjunto intersección de dos conjuntos si pertenece a ambos. En el caso difuso el problema consiste en determinar el grado de pertenencia al conjunto intersección, conocido el grado de pertenencia a cada uno de los conjuntos originales. Supongamos:

$$\mu_{A \cap B}(x) = i(\mu_A(x), \mu_B(x)) \tag{2.44}$$

Donde:

$$i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \tag{2.45}$$

Análogamente al caso anterior, imponemos las siguientes condiciones:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1] \tag{2.46}$$

- Concordancia con el caso nítido:

$$i(0, 1) = i(0, 0) = i(1, 0); \quad i(1, 1) = 1 \tag{2.47}$$

- Conmutatividad:

$$i(\alpha, \beta) = i(\beta, \alpha) \quad (2.48)$$

- Asociatividad:

$$i(\alpha, i(\beta, \gamma)) = i(i(\alpha, \beta), \gamma) \quad (2.49)$$

- Identidad:

$$i(\alpha, 1) = \alpha \quad (2.50)$$

- Monotonía:

$$\text{si } \alpha \leq \alpha' \quad \beta \leq \beta', \text{ entonces } i(\alpha, \beta) \leq i(\alpha', \beta') \quad (2.51)$$

Si se verifican los axiomas anteriores  $([0, 1], i)$  tiene estructura de semigrupo abeliano con elemento neutro. Las funciones  $i$  que verifican esta propiedad se llaman dentro de la teoría de conjuntos difusos *normas triangulares* (t-normas).

Las t-normas usadas más habitualmente son las siguientes:

- t-norma del mínimo

$$i_{\text{mín}}(\alpha, \beta) = \text{mín}(\alpha, \beta) \quad (2.52)$$

Por ejemplo en la Figura 2.20 se consideran dos funciones tipo triangular (*niño*, *adolescente*):

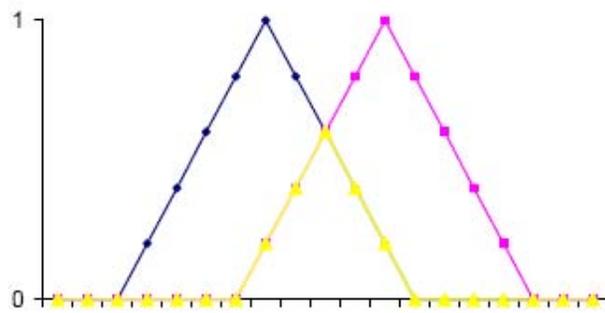


Figura 2.20: T-norma del mínimo.

- t-norma del producto

$$i * (\alpha, \beta) = \alpha * \beta \tag{2.53}$$

En la Figura 2.21 se muestra la T-norma con 2 funciones tipo triangular.

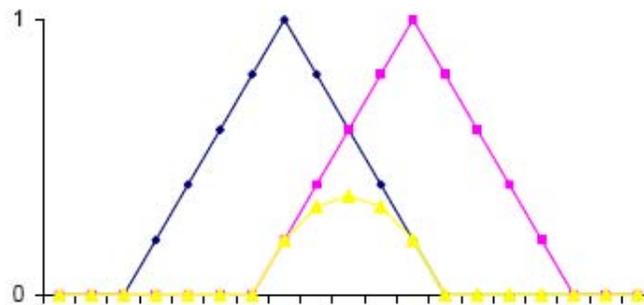


Figura 2.21: T-norma del producto.

- t-norma del producto drástico

$$i_{\text{inf}}(\alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \beta = 1 \\ \beta & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{2.54}$$

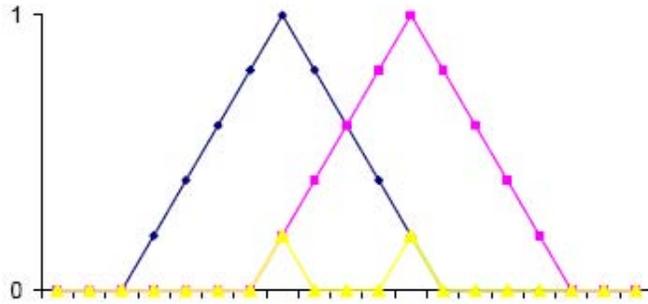


Figura 2.22: T-norma del producto drástico.

Aunque no siempre se puede decir que una t-norma es mayor que otra, se puede demostrar que toda t-norma verifica las siguientes desigualdades:

$$\forall \alpha, \beta \in [0, 1] \quad i_{\text{inf}}(\alpha, \beta) \leq i(\alpha, \beta) \leq i_{\text{mín}}(\alpha, \beta) \quad (2.55)$$

es decir, que la menor t-norma es la t-norma del producto drástico y la mayor t-norma es la norma del mínimo, vease Figura 2.22

### Unión.

Al igual que en el caso anterior podemos declarar una axiomática intuitiva para la unión de dos conjuntos difusos. Sea:

$$\mu_{A \cup B}(x) = u(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (2.56)$$

en donde:

$$u : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad (2.57)$$

que puede verificar:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1] \quad (2.58)$$

- Concordancia con el caso nítido:

$$u(0, 1) = u(1, 1) = u(1, 0) = 1; \quad u(0, 0) = 0 \quad (2.59)$$

- Conmutatividad:

$$u(\alpha, \beta) = u(\beta, \alpha) \quad (2.60)$$

- Asociatividad:

$$u(\alpha, u(\beta, \gamma)) = u(u(\alpha, \beta), \gamma) \quad (2.61)$$

- Identidad ( $A \cup 0 = A$ ):

$$u(\alpha, 0) = \alpha \quad (2.62)$$

- Monotonía:

$$\text{si } \alpha \leq \alpha' \quad \beta \leq \beta', \text{ entonces } u(\alpha, \beta) \leq u(\alpha', \beta') \quad (2.63)$$

Además, sería deseable que se mantuvieran también las siguientes propiedades:

Leyes de Morgan:

$$\begin{aligned} u(\alpha, \beta) &= c(i(c(\alpha), c(\beta))) \\ i(\alpha, \beta) &= c(u(c(\alpha), c(\beta))) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Que nos permiten calcular el grado de la unión en función de los grados del complementario y la intersección. A las funciones que verifiquen estas seis propiedades se las llama *conormas triangulares* (t-conormas).

Considerando la función de complementación  $c(\alpha) = 1 - \alpha$ , las t-conormas correspondientes a las t-normas anteriores son:

- T-conorma del máximo:

$$u_{\text{máx}}(\alpha, \beta) = \text{máx}(\alpha, \beta) \quad (2.65)$$

En la Figura 2.23 se muestra la aplicación de la T-conorma del máximo para 2 funciones triangulares.

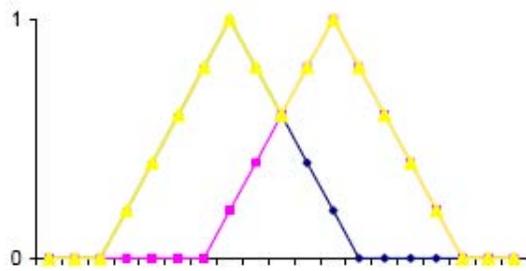


Figura 2.23: T-conorma del máximo.

- T-conorma de la suma:

$$u * (\alpha, \beta) = \alpha + \beta - \alpha * \beta \quad (2.66)$$

En la Figura 2.24 se muestra la T-conorma de la suma de 2 funciones de membresía triangulares.

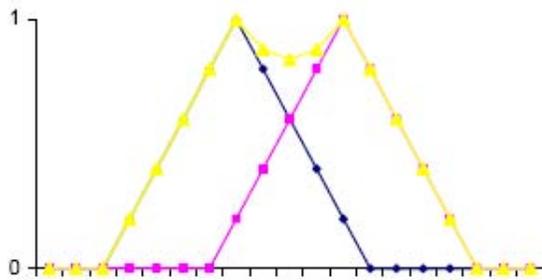


Figura 2.24: T-conorma de la suma.

- T-conorma de la suma drástica:

$$u_{\text{sup}}(\alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \beta = 0 \\ \beta & \text{si } \alpha = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.67)$$

En la Figura 2.25 se muestra la T-conorma de la suma drástica para 2 funciones de membresía triangulares.

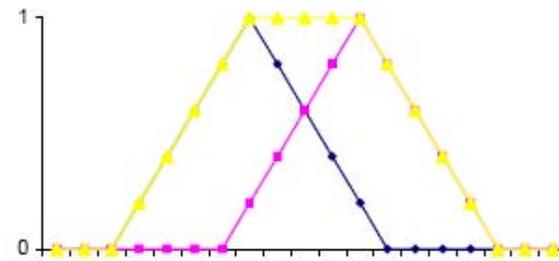


Figura 2.25: T-conorma de la suma drástica.

análogamente al caso de la intersección, se puede demostrar que cualquier t-conorma verifica las desigualdades:

$$\forall \alpha, \beta \in [0, 1] \quad u_{\text{máx}}(\alpha, \beta) \leq u(\alpha, \beta) \leq u_{\text{sup}}(\alpha, \beta) \quad (2.68)$$

Es decir, que la menor t-conorma es la del máximo y la mayor t-conorma la suma drástica. Pero las condiciones que exigimos a la unión y a la intersección no garantizan en general que se cumplan las siguientes condiciones:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1] \quad (2.69)$$

- Idempotencia ( $A \cap A = A$ ):

$$i(\alpha, \alpha) = \alpha \quad (2.70)$$

- Distributividad ( $A \cap (B \cup C)$ ):

$$i(\alpha, u(\beta, \gamma)) = u(i(\alpha, \beta), i(\alpha, \gamma)) \quad (2.71)$$

- Idempotencia ( $A \cup A = A$ ):

$$u(\alpha, \alpha) = \alpha \quad (2.72)$$

- Distributividad ( $A \cup (B \cap C)$ ):

$$u(\alpha, i(\beta, \gamma)) = i(u(\alpha, \beta), u(\alpha, \gamma)) \quad (2.73)$$

propiedades que sólo verifica la t-norma del mínimo y su t-conorma del máximo. (Valencia, 2004)

## 2.4. Razonamiento difuso.

La teoría de conjuntos difusos nos permite representar hechos y relaciones vagas (imprecisas). Se entiende por razonamiento difuso el proceso de realizar inferencias a partir de hechos y relaciones difusas, así como la combinación de evidencias difusas y la actualización de la precisión de las creencias.

Una *proposición difusa simple* es aquella que asigna un valor a una variable difusa, por ejemplo: “la estatura de Pepe es *mediana*” o “la velocidad es *normal*”. Una proposición difusa tiene por tanto asociado un conjunto difuso  $A$  (el valor lingüístico asignado, “*mediana*” en este caso) y su correspondiente función de pertenencia  $\mu_A$  definida sobre los elementos del universo de discurso  $u \in U$ .

Una *proposición difusa compuesta* es aquella que se obtiene mediante la agrupación de dos o mas proposiciones difusas simples, que pueden haber sido modificadas o no antes de la agrupación. Para agrupar proposiciones difusas simples podemos utilizar

las conectivas  $Y$  y  $O$ , y para modificar una proposición difusa simple podemos utilizar el  $NO$ . Así por ejemplo podemos construir proposiciones difusas del tipo:

“la velocidad es *normal*” y “el objeto está *cerca*”

“la velocidad es *alta*” o “el objeto está *muy cerca*”

“la velocidad *no* es *alta*”

Los *operadores lógicos difusos* pueden definirse de forma análoga a como se definieron las operaciones entre conjuntos: sean  $p$  y  $q$  dos proposiciones difusas,  $A$  y  $B$  los conjuntos difusos que intervienen en ellas, con funciones de pertenencia  $\mu_A$  y  $\mu_B$  definidas respectivamente sobre universos de discurso  $U$  y  $V$ .

Entonces, los operadores lógicos pueden definirse mediante:

- No ( $\neg p$ ) vendrá definida por una función de pertenencia tipo complemento de  $A$ , por ejemplo:

$$\mu_{\neg A}(u) = 1 - \mu_A(u) \quad (2.74)$$

- Y ( $p \wedge q$ ) vendrá definida por una función de pertenencia tipo intersección, por ejemplo:

$$\mu_{A \wedge B}(u, v) = \mu_{in}(\mu_A(u), \mu_B(v)) \quad (2.75)$$

- O ( $p \vee q$ ) vendrá definida por una función de pertenencia tipo unión, por ejemplo:

$$\mu_{A \vee B}(u, v) = \mu_{ax}(\mu_A(u), \mu_B(v)) \quad (2.76)$$

Ahora tenemos que definir lo que significa una implicación, es decir, si tiene que asignar una función de pertenencia a una agrupación antecedente consecuente del tipo  $p \rightarrow q$ . Definir el significado de la implicación permitirá razonar con reglas del tipo:

**si** “la velocidad es *normal*”

**entonces** “la fuerza de frenado debe ser *moderada*”

Esta función de pertenencia será del tipo:

$$\begin{aligned} \mu_{p \rightarrow q} : U \times V &\rightarrow [0, 1] \\ (u, v) &\rightarrow \mu_{p \rightarrow q}(u, v) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Al definir la relación de implicación surge una cuestión importante ¿qué se quiere representar mediante la relación de implicación? La cuestión es fundamental porque las relaciones de implicación son la base del razonamiento basado en reglas. Existen en principio dos posibilidades diferenciadas:

- a) Dar a la implicación el mismo significado que en la lógica clásica. Por ejemplo, en lógica clásica tenemos la equivalencia  $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ . De este modo, la función de pertenencia asociada a la regla “si  $A$  entonces  $B$ ”, donde  $A$  y  $B$  son conjuntos difusos sería:

$$\mu_{p \rightarrow q}(u, v) = \text{máx}(1 - \mu_A(u), \mu_B(v)) \quad (2.78)$$

En lógica clásica también tenemos la equivalencia  $p \rightarrow q \equiv \sim (p \wedge (\sim q))$ , que conduciría a la siguiente definición:

$$\mu_{p \rightarrow q} : 1 - \text{mín}[\mu_A(u), 1 - \mu_B(v)] \quad (2.79)$$

Ambas funciones son equivalentes.

- b) Dar a la implicación el significado de relaciones causa-efecto normalmente utilizadas en los sistemas basados en conocimiento.

El primer caso se corresponde con la implicación lógica, al segundo podemos darle el nombre de “implicación causa-efecto”. Aunque la implicación lógica difusa es interesante desde el punto de vista teórico, conduce a una formulación

inadecuada para muchas aplicaciones de sistemas basados en conocimiento, que representan las relaciones causa-efecto de un modo no consistente plenamente con la lógica. Queda entonces abierta la cuestión de como formalizar el significado de las relaciones de implicación causa-efecto. La más utilizada actualmente fue propuesta por Mamdani:

Implicación de Mamdani:

$$p \rightarrow q \equiv p \wedge q \Rightarrow \mu_{p \rightarrow q}(u) = \min(\mu_A(u), \mu_B(v)) \quad (2.80)$$

Para Mamdani, el grado de verdad de  $p \rightarrow q$  es idéntico al de la proposición  $A$  y  $B$ . Podríamos justificar esto diciendo que, para Mamdani, una condición tan solo resulta cierta cuando el antecedente es cierto y el consecuente también.

### 2.4.1. Inferencia difusa.

Con la formalización anterior pueden representarse hechos y reglas difusas, y pueden realizarse inferencias aplicando reglas de inferencia. Se verán dos casos: antecedentes nítidos y antecedentes difusos.

- Inferencia difusa con antecedentes difusos. Se va a suponer que tenemos una regla difusa del tipo:

**si**  $p$  **entonces**  $q$  y un valor de entrada difuso  $\sim p$ .

La conclusión será un hecho difuso  $\sim q$ , del cual queremos saber su función de pertenencia.

Ejemplo

Sean: la regla difusa  $p \rightarrow q \equiv$  “**si** la velocidad es *normal*, **entonces** la fuerza de frenado es *moderada*”, el hecho difuso  $p^*$ .

El resultado de la inferencia será una proposición difusa  $q^*$  con su correspondiente conjunto difuso  $\sim B$  asociado, que vendrá dado por la función de pertenencia  $\mu_{\sim B}(v)$ . Se supondrá que el hecho del que se dispone es  $\sim p =$  “la velocidad es *alta*”. Se verán dos tipos diferentes de inferencia:

**a)** Inferencia tipo max-min (implicación de Mamdani):

$$\mu_{\sim B}(v) = \text{mín}(z, \mu_B(v)) \quad (2.81)$$

donde:

$$z = \text{máx}(\text{mín}(\mu_{\sim A}(u), \mu_A(u))) \quad (2.82)$$

En la Figura 2.26 se muestra un ejemplo de la implicación tipo mamdani para el ejemplo anterior.

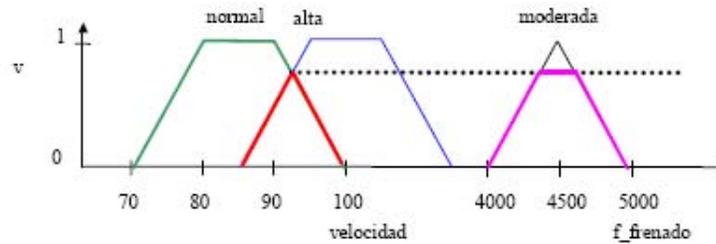


Figura 2.26: Implicación Mamdani.

Con este tipo de inferencia se está considerando la implicación como una implicación de Mamdani.

**b)** Inferencia tipo max-prod:

$$\mu_{\sim B}(v) = \text{prod}(z, \mu_B(v)) \quad (2.83)$$

donde:

$$z = \text{máx}(\text{mín}(\mu_{\sim A}(u), \mu_A(u))) \quad (2.84)$$

En la Figura 2.27 se muestra la inferencia tipo max-prod para el ejemplo.

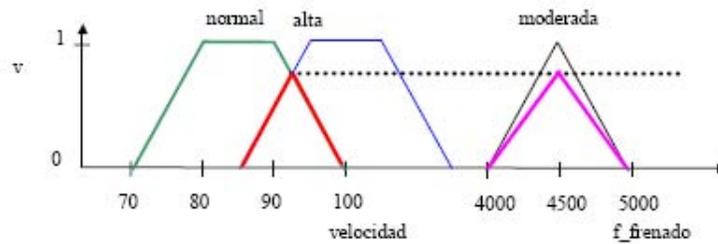


Figura 2.27: Inferencia tipo max-prod.

Se puede hacer otro tipo de inferencia interpretando la implicación como una implicación de la lógica en lugar de como una implicación de Mamdani. Para ello, las funciones utilizadas serían:

$$\mu_{\sim B}(v) = \text{máx}(1 - z, \mu_B(v)) \quad (2.85)$$

cuyo resultado se muestra en la Figura 2.28

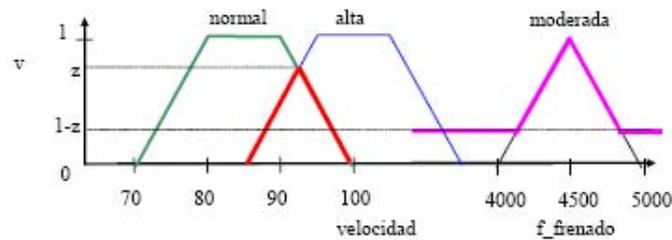


Figura 2.28: Inferencia tipo max-prod para la función  $\mu_{\sim B}(v) = \text{máx}(1 - z, \mu_B(v))$ .

o

$$\mu_{\sim B}(v) = 1 - \min(z, 1 - \mu_B(v)) \quad (2.86)$$

Cuyo resultado se muestra en la Figura 2.29

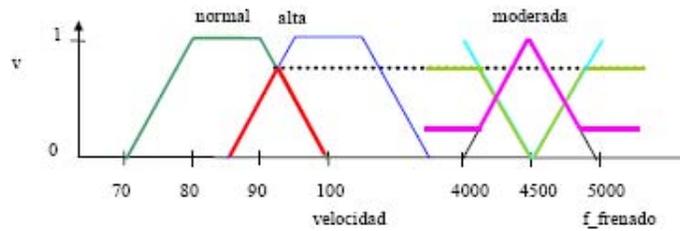


Figura 2.29: Inferencia tipo max-prod para la función  $\mu_{\sim B}(v) = 1 - \min(z, 1 - \mu_B(v))$ .

- Inferencia difusa con antecedentes nítidos. Se va a suponer que tenemos una regla difusa del tipo:

*si p entonces q* y un valor de entrada nítido  $\sim p$ .

La conclusión será un hecho difuso  $\sim q$ , del cual se quiere saber su función de pertenencia.

Ejemplo: Sean: la regla difusa

$p \rightarrow q \equiv$  “*si* la velocidad es normal, *entonces* la fuerza de frenado es moderada”, el hecho nítido

$\sim p \equiv$  “la velocidad es 75 km/h”

El hecho  $\sim p$  puede utilizarse para disparar la regla y obtener así un valor difuso para la fuerza de frenado que debe aplicarse:

*velocidad* = 75

*si* *velocidad* = normal *entonces* *fuerza frenado* = moderada

$fuerza\ frenado = \sim q$

Se supondrá que las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos  $A = normal$  y  $B = moderada$  son los que se dan en la Figura 2.30:

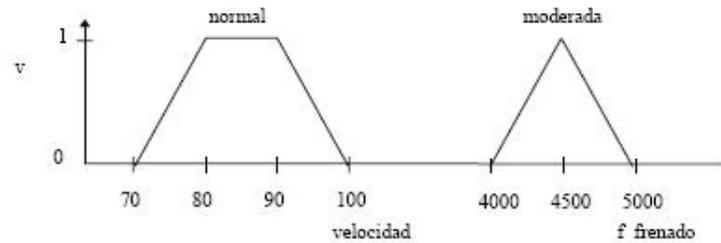


Figura 2.30: Funciones de membresía para los conjuntos difusos  $\sim A = normal$  y  $\sim B = moderada$  de los universos de discurso velocidad y frenado.

Se ve que el valor de la función de pertenencia para el hecho nítido  $p$  es  $\mu_{\sim A}(75) = 0.5$ . La función de pertenencia asociada a la regla es  $\mu_{p \rightarrow q}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$ . El resultado de la inferencia será una proposición difusa  $\sim q$  con su correspondiente conjunto difuso  $\sim B$  asociado, que vendrá dado por la función de pertenencia  $\mu_{\sim B}(y)$ .

La única diferencia con el caso difuso es la forma de escoger el valor  $z$ , que en este caso se calcula simplemente como  $z = \mu_A(x)$ , donde  $x$  es el valor nítido del que dispongamos, en nuestro ejemplo 75. La inferencia se hace entonces con cualquiera de las alternativas vistas en el apartado anterior, por ejemplo:

**a)** Inferencia tipo max-min (implicación de Mamdani):

$$\mu_{\sim B}(y) = \min(\mu_A(75), \mu_B(y)) \tag{2.87}$$

Es decir, que el resultado de la inferencia sería “velocidad es moderada”, donde la función de pertenencia del conjunto difuso  $\sim moderada$  es la

representada en la Figura 2.31

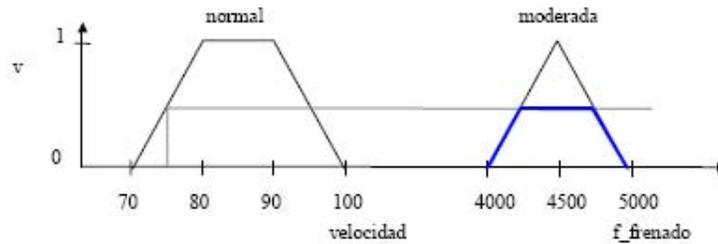


Figura 2.31: Implicación Mamdani para el ejemplo anterior.

b) Inferencia tipo max-prod:

$$\mu_{\sim B}(y) = \text{prod}(\mu_A(75), \mu_B(y)) \quad (2.88)$$

Cuyo resultado es el representado en la Figura 2.32.

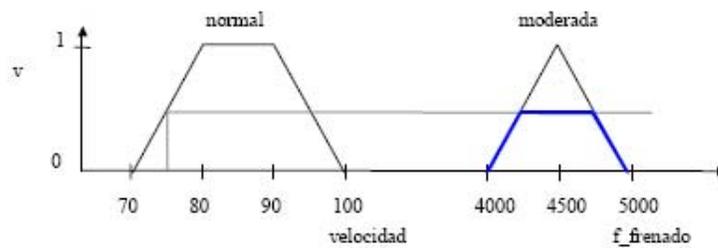


Figura 2.32: Inferencia tipo max-prod para el ejemplo anterior

Igual se haría en el caso de que la implicación se interprete como una implicación lógica.

## 2.5. Sistemas lógico difusos.

En general un sistema lógico difuso (SLD) es un mapeo no-lineal de un vector no-lineal de un vector de datos de entrada con una salida escalar, es decir mapea numeros con numeros. La teoría de los conjuntos difusos y la lógica difusa establecen las especificaciones de este mapeo no-lineal único, en cuanto es capaz de manejar datos numéricos y conceptos lingüísticos simultáneamente. Los Sistemas lógicos difusos han sido aplicados exitosamente en campos tales como el control automático, clasificación de datos, análisis de decisiones, sistemas expertos y visión por computadora. (Quispe, 2005)

### 2.5.1. Etapas de un sistemas lógico difuso.

Un SLD consta de tres etapas:

- Fusificación.
- Reglas de evaluación.
- Defusificación.

El esquema se muestra en la Figura 2.33:

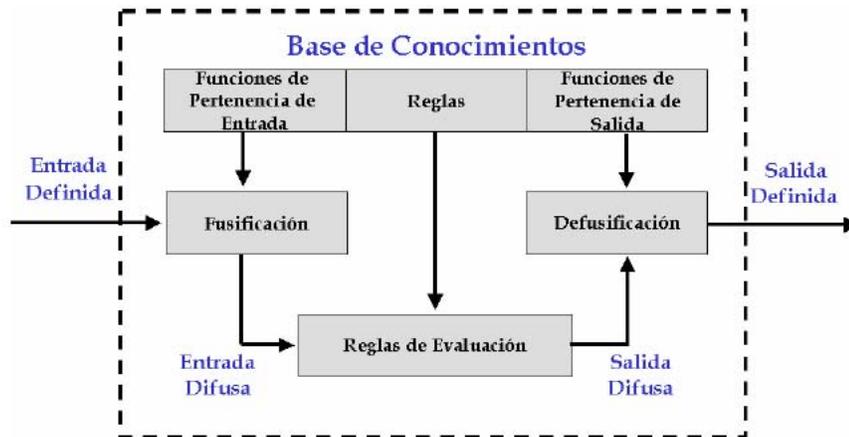


Figura 2.33: Sistema lógico difuso.

### Fusificación.

Los elementos fundamentales en esta etapa son las funciones de pertenencia de entrada. La variable del proceso (entrada definida, no-difusa o crisp) interseca las funciones de pertenencia generando las entradas difusas. Mediante este procedimiento, el fusificador establece una relación entre los puntos de entrada no difusos y sus correspondientes conjuntos difusos en el universo de discurso  $U$ .

### Reglas de evaluación.

Las reglas son sentencias *si-entonces* que describen las condiciones (antecedentes) y las acciones (consecuentes) que deben existir para tomar una decisión. La sintaxis de las reglas es la siguiente:

*si* antecedente 1 *y* antecedente 2... *entonces* consecuente 1 *y*...

El antecedente de una regla puede tener muchas partes, en tal caso todas las partes del antecedente son calculadas simultáneamente y transformadas en un

número utilizando los operadores lógicos. El consecuente de una regla puede también tener partes múltiples y todos los consecuentes son afectados de la misma manera por el antecedente.

En el caso de la lógica proposicional, evaluar las reglas **si-entonces** es sencillo. Si la premisa es verdadera, la conclusión es verdadera, por el contrario, se genera un problema cuando el antecedente es difuso, pues no se sabe como se verá afectado en consecuente. Sin embargo si el antecedente es verdadero en cierto grado, entonces el consecuente es verdadero en cierto grado.

Así, las reglas difusas permiten expresar el conocimiento que se tiene acerca de la relación entre los antecedentes y los consecuentes en un cierto grado de verdad. Para expresar este conocimiento en forma completa normalmente se precisa de varias reglas, con pesos asociados, que se agrupan formando una base o bloque de reglas.

Mediante la inferencia los sistemas difusos interpretan las reglas de tipo **if-then** contenidas en su base de conocimientos, con el fin de obtener los valores de salida a partir de los valores que tiene las variables lingüísticas de entrada al sistema. Una vez que las entradas crisp han sido convertidas a variables de valores lingüísticos (fusificación), se utiliza la inferencia difusa para identificar las reglas del tipo **si-entonces** que se aplican a la situación actual y se calculan los valores lingüísticos de salida.

La inferencia es un cálculo que consiste en tres pasos: agregación de las variables lingüísticas de entrada, composición o implicación y agregación de resultado.

- Agregación de las variables lingüísticas de entrada. Es el primer paso que se sigue para realizar una inferencia difusa, la agregación determina el grado en el que se cumple la parte **si** de la regla. Si la regla contiene varias premisas, estas suelen estar relacionadas por operadores lógico difusos como T-normas y T-conormas.

- **Composición.** Es el segundo paso que se lleva a cabo para realizar la inferencia, y es conocida también como implicación difusa. Mediante la composición se comprueba la validez de la conclusión de una regla al relacionar el grado con el que se cumple el antecedente de la regla, con el peso de la misma.
- **Agregación del resultado.** Ya que las decisiones están basadas en la prueba a de todas las reglas que forman un sistema de inferencia difuso los consecuentes de las reglas deben ser combinados de alguna manera para tomar una decisión. La agregación es el proceso a través del cual los conjuntos difusos que representan las salidas de las reglas son combinados un único conjunto difuso.

### **Defusificación.**

La salida del proceso de inferencia es hasta ahora un conjunto difuso que indica la posibilidad de realizar una acción de control. Sin embargo, las implicaciones de los sistemas difusos no pueden interpretar los valores lingüísticos obtenidos, por lo que funciones de pertenencia de salida son utilizadas para retransformar valores difusos nuevamente en valores definidos o crisp mediante la defusificación. (Quispe, 2005)

Algunos métodos de defusificación existentes son:

- Procedimiento máximo.
- Media ponderada.
- Singleton.
- Centro de masa.
- Centro de área.

Este método consiste en hallar para cada conjunto difuso, su área ( $A$ ) y su centro ( $x$ ); se suma el producto entre ellos y el resultado se divide entre la sumatoria total de las áreas como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\bar{x} = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i} \quad (2.89)$$

Y como se muestra en la Figura 2.34

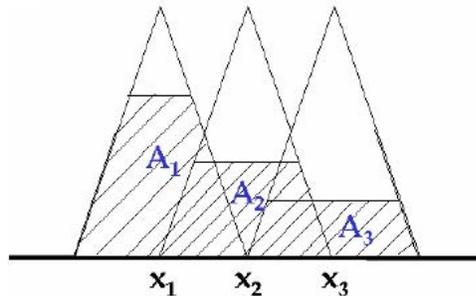


Figura 2.34: Defusificación por centro de área

## 2.6. Sistemas difusos aplicados al control de procesos.

Desde las primeras investigaciones de Mamdani sobre una aplicación práctica para el control lógico difuso, los sistemas expertos de control difuso basados en reglas conocidas como controladores lógicos difusos se han convertido sin duda en la aplicación más extendida de la lógica difusa.

El control lógico difuso provee un mecanismo para convertir una estrategia lingüística de control basada en el conocimiento de un operador experto en una estrategia de control automático. En este sentido el método de control lógico difuso puede ser considerado como una aproximación entre la matemática

convencional precisa y la toma de decisiones de los humanos. Así, el lenguaje del mundo real usado en control difuso permite a los programadores incorporar la lógica ambigua de los humanos dentro de la computadora. Además el uso de modelos lingüísticos en lugar de modelos matemáticos mejora grandemente la transparencia del sistema y facilita las potenciales modificaciones. Los sistemas difusos pueden ser utilizados en combinación con los controladores clásicos de la teoría de control para lo cual existen diversos métodos; así además el controlador difuso directo otros métodos son:

- Control difuso supervisorio.
- Control difuso adaptativo.
- Control difuso de intervención.

(Quispe, 2005)

## 2.7. Control clásico VS control inteligente.

### 2.7.1. Control clásico.

Los métodos de respuesta de frecuencia y del lugar de las raíces, son el corazón de la teoría de control clásica.

Las plantas modernas con muchas entradas y salidas se van haciendo más complejas, la descripción de un sistema moderno de control requiere una gran cantidad de ecuaciones. La teoría de control clásica que trata de de sistemas de entrada y salida única, se vuelve absolutamente impotente ante sistemas de múltiples entradas y salidas.

Desde aproximadamente 1960, se han desarrollado la teoría de control moderna para afrontar la complejidad creciente de las plantas modernas y las necesidades rigurosas de exactitud.

Dada la fácil disponibilidad de computadoras electrónicas analógicas, digitales e híbridas para uso en cálculos complejos, el uso de las mismas en el proyecto de sistemas de control y en el control de operación de los mismos se está convirtiendo ahora en práctica habitual. (Ogata, 1998)

#### 2.7.1.1. Definiciones de control clásico.

- **Plantas.** Una planta es un equipo, quizá un simple juego de piezas de una maquina funcionando juntas, cuyo objetivo es realizar una operación determinada. En esta tesis se ha de designar *planta* a cualquier objeto físico que ha de ser controlado.
- **Proceso.** Se denomina proceso en esta tesis a cualquier operación que se vaya a controlar.
- **Perturbaciones.** Una perturbación es una señal que tiende a afectar adversamente el valor de la salida de un sistema. Si la perturbación se genera dentro del sistema, se le denomina *interna*, mientras que una perturbación externa se genera fuera del sistema y constituye una entrada.
- **Control de realimentación.** Es una operación que, en presencia de perturbaciones tiende a reducir la diferencia entre la salida y la entrada de referencia de un sistema y que lo hace sobre la base de esta diferencia.
- **Sistemas de control realimentado.** Es aquel que tiende a mantener una relación preestablecida entre la salida y la entrada de referencia, comparando ambas y utilizando la diferencia como parámetro de control.
- **Servomecanismo.** Es un sistema de control realimentado en el cual la salida es alguna posición, velocidad o aceleración mecánica.

### 2.7.1.2. Principios de proyecto de sistemas de control.

- **Requerimientos de un sistema de control.** Cualquier sistema de control debe ser estable, es un requerimiento primario. Además de estabilidad absoluta debe tener estabilidad relativa razonable; es decir, la velocidad de respuesta debe ser razonablemente rápida y la respuesta debe presentar razonable amortiguamiento. Un sistema de control debe también poder reducir a cero, o a un valor tolerablemente pequeño, los errores.

### 2.7.1.3. Tareas de un sistema de control clásico.

- Captura de datos (sensores).
- Cálculo de actuaciones (reguladores).
- Acciones de control (actuadores).

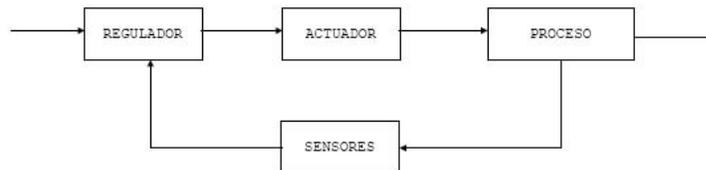


Figura 2.35: Sistema de control clásico

Se han requerido muchos años para desarrollar los actuales algoritmos para el control de procesos complejos. Basándose en esquemas tales como la teoría de sistemas lineales, las teorías de control óptimo y estocástico y sus extensiones, las teorías de control adaptativo y control robusto, ha sido construida una amplia y sólida base teórica. En todas estas teorías de diseño, tanto el conocimiento del proceso que se desea controlar, como la inteligencia del ingeniero para decidir la estrategia de control correcta, se capturan bajo un esquema definido como “fuera de línea”. Existen

casos donde el proceso no puede ser descrito mediante modelos lineales, o donde los requerimientos no pueden ser traducidos en un criterio simple para medir la calidad de actuación (como por ejemplo una función de coste cuadrática). En tales situaciones no es posible encontrar una solución analítica basada en los esquemas antes mencionados, y el problema de diseño del controlador debe de ser traducido a un problema de optimización numérica. Aunque en este último caso también son necesarios modelos matemáticos, la experiencia y el conocimiento del experto son requeridos en una fase posterior del ciclo de diseño del controlador cuando la optimización numérica es realizada mediante extensivas ejecuciones de simulación.

Aún así, existen condiciones bajo las cuales, las técnicas de control clásicas no pueden ser aplicadas y puede ser muy ventajoso basar la estrategia de diseño en un enfoque diferente.

Algunas de tales condiciones pueden ser:

- No se cuenta con un modelo matemático del proceso a ser controlado, o éste, sólo puede ser obtenido con gran esfuerzo y costo.
- Aunque se tiene un modelo matemático parcial del proceso a ser controlado, la influencia de la dinámica no modelada en la calidad de actuación del controlador es significativa y no puede ser despreciada.
- Cualesquiera de los parámetros del proceso o del punto de operación cambian de manera imprevisible.
- Sólo una parte de la información del proceso se encuentra disponible en forma cuantitativa, mientras que el resto de la información, es asequible únicamente en forma cualitativa.
- Los datos que se obtienen del proceso son incompletos y/o imprecisos.

Los puntos mencionados anteriormente no son en manera alguna mutuamente excluyentes. Enfatizan diferentes aspectos de un tema común: control en ausencia del

conocimiento completo respecto de la planta a ser controlada, respecto de su entorno, o de ambos.

En situaciones tales como éstas, las aproximaciones matemáticas puramente cuantitativas suelen no trabajar bien y pueden ser reemplazadas con éxito por métodos alternativos de la Inteligencia Artificial, es decir, por métodos que trabajan utilizando como base una descripción del comportamiento del proceso compuesta por la mezcla de información cualitativa y de la información cuantitativa medida con que se cuenta. Un método alternativo que ha sido comúnmente usado bajo estas situaciones es el control difuso. (Mugica, n.d.)

#### **2.7.1.4. Control Difuso (Fuzzy Control - FC).**

Es una tecnología actualmente muy bien situada que permite utilizar conocimiento de naturaleza heurística para controlar un sistema. Tiene la propiedad de poder manejar imprecisión y vaguedad en la información que utiliza. Han tenido una gran popularidad ya que, aún sin aprobar del todo la rigurosa métrica que la teoría de control impone, han captado el interés de fabricantes de equipos electrónicos y de control al ser aplicados con éxito a un sinnúmero de aparatos. Actualmente existen y se continúan diseñando circuitos integrados y microprocesadores especializados para desarrollar este tipo de controladores.

En estas nuevas aproximaciones, conceptos de la teoría de control clásico tales como estabilidad, observabilidad, o controlabilidad no pueden ser evaluados con facilidad. Es por esta razón que muchos investigadores dentro de la comunidad de la Ingeniería de Control no están convencidos aún del alcance de estos métodos. Sin embargo, miembros más pragmáticos de esta comunidad han sido atraídos por el innegable éxito obtenido al tratar muchas aplicaciones prácticas, y muy particularmente cuando la utilización de los métodos convencionales ha resultado difícil. Añadiendo estas nuevas técnicas al conjunto de opciones disponibles para resolver los problemas de diseño de controladores en aplicaciones prácticas, estos investigadores han creado una nueva y

creciente rama de métodos de control llamada *control inteligente*. (Mugica, n.d.)

#### 2.7.1.5. Definición del control inteligente.

- Control convencional: Teorías y métodos que se basan en la descripción por ecuaciones diferenciales o en diferencias.
- Control inteligente:
  - Sistema que tiene la habilidad para actuar de forma apropiada en un entorno incierto.
  - Inteligencia es proceso de análisis, organización y conversión de datos en información estructurada (conocimiento).
  - Sustitución a la mente humana en la toma de decisiones, planificación y aprendizaje.
  - Utiliza de forma combinada técnicas de Inteligencia Artificial, Investigación Operativa y Control.
  - Capacidad del sistema de asemejar el comportamiento de alguno de sus elementos a alguna de las cualidades cognoscitivas del comportamiento humano, como el aprendizaje, el razonamiento simbólico, la planificación o la adaptación a un medio cambiante.

#### 2.7.1.6. Características de los sistemas de control inteligente.

- Nacen de la interacción directa con el proceso que evoluciona en el tiempo: Sistema de tiempo real. Tiempo de respuesta garantizado
  - a) Operación continua.
  - b) Gestión de eventos asíncronos.
  - c) Razonamiento temporal.

- d) Razonamiento no monotónico.
- e) Razonamiento con incertidumbre y datos incompletos.
- f) Eficiencia computacional.
- g) Interfaz con otros componentes: Acceso a datos de E/S, acceso a bases de datos, interfaz de usuario, etc.

#### 2.7.1.7. Técnicas de control inteligente

- Sistemas expertos en tiempo real.
  - a) Sistemas de control basados en reglas.
  - b) Control basado en modelos.
  - c) Diagnóstico de fallos.
  - d) Planificación.
- *Control borroso o difuso (fuzzy control).*
- Control con redes neuronales.
- Técnicas de optimización no convencionales.
  - a) Algoritmos genéticos.
- Aprendizaje. (*Introducción al control inteligente, 2006*)

#### 2.7.1.8. Control difuso (fuzzy control).

- Modelado de conceptos ambiguos o que no están bien definidos.
- Pretende incorporar la experiencia del operador.
- Tipo especial de sistema basado en el conocimiento.

- Utilización de lógica específica.
- Multitud de aplicaciones.
  1. Control de hornos de cemento.
  2. Control de procesos de depuración de aguas.
  3. Control de tráfico.
  4. Conducción automática de trenes.
  5. Productos domésticos: aire acondicionado, lavadoras, cámaras de vídeo, cámaras fotográficas, etc.

## 2.8. Conclusiones

En este capítulo se presentó los antecedentes históricos y las bases matemáticas de la lógica difusa, a través de una introducción a las diversas teorías de conjuntos clásicos y difusos, definiciones y comparaciones de control clásico contra control inteligente.

# Capítulo 3

## Descripción del Sistema.

### 3.1. Introducción.

El objetivo de este capítulo es la obtención de un sistema de ecuaciones que determinen la dinámica del módulo de desplazamiento.

El modelo matemático de un sistema se define como un conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del sistema. La dinámica de una gran parte de sistemas, se determina en términos de ecuaciones diferenciales donde dichas ecuaciones se obtienen a partir de leyes físicas inherentes al sistema estudiado, tales como las leyes de Newton y Euler-Lagrange para sistemas mecánicos y las leyes de Kirchhoff para sistemas eléctricos. La obtención de un modelo matemático razonable es la parte más importante de todo el análisis. El modelado es el primer paso en el diseño de una ley de control.

El modelo matemático se determinará a partir de la segunda ley de Newton que nos habla sobre la igualdad de la fuerza con el producto de la masa y la aceleración, obteniéndose con igualdades una ecuación de segundo orden, posteriormente obtendremos su transformada de Laplace para así obtener el modelo matemático del sistema. Cabe mencionar que el modelo matemático solo se obtuvo para cuestiones de simu-

lación, en la práctica el control con lógica difusa, se basa en el conocimiento de un experto que es utilizado en lugar de las ecuaciones.

## 3.2. Descripción del sistema.

El sistema sobre el cual se aplican las leyes de control difuso de esta tesis es un módulo de desplazamiento sobre el eje horizontal el cual consta de un motor de CD. La Figura 3.1 muestra el sistema real bajo estudio.

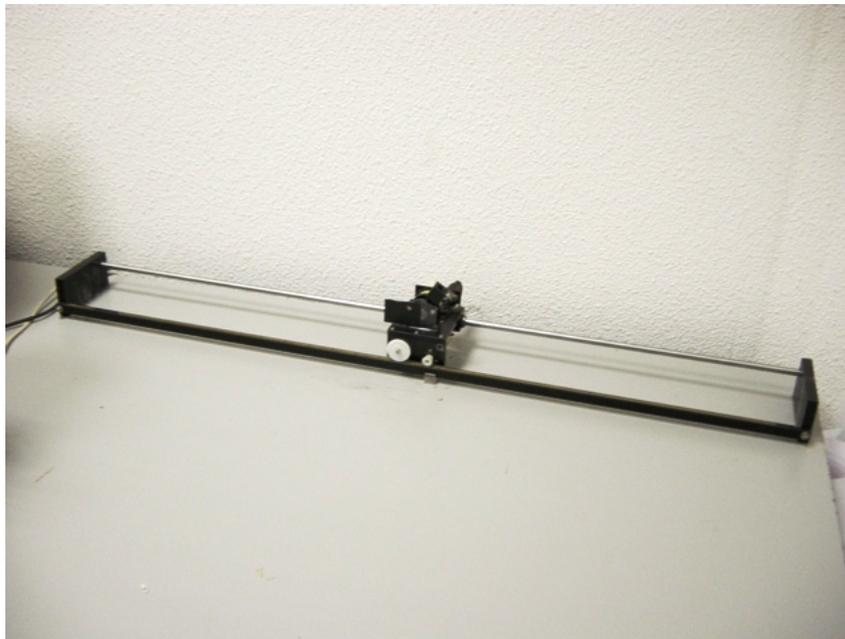


Figura 3.1: Sistema real

Como puede verse el desplazamiento horizontal del módulo esta limitado a un riel de longitud 1.20 mts. Ya que las leyes de control que se diseñen se implementaran en el sistema real se utilizó una tarjeta de adquisición de datos PCI-MultiQ con entradas y salidas analógicas y digitales como la que se muestra en la Figura 3.2.

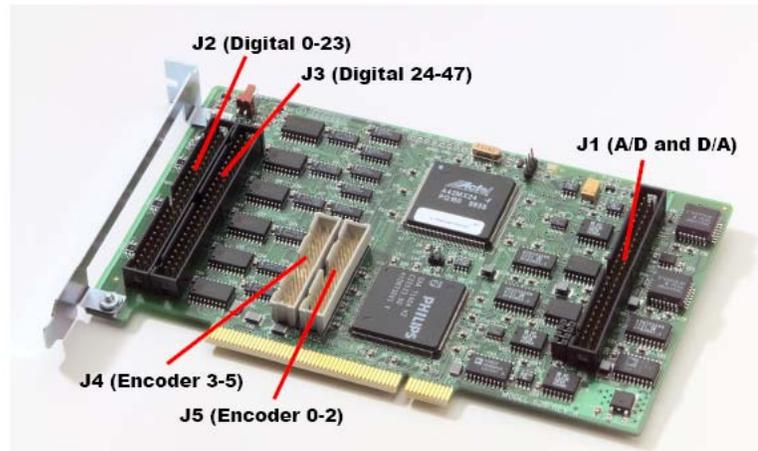


Figura 3.2: Tarjeta de adquisición de datos PCI-MultiQ

Además se ocupó un módulo de etapa de potencia VPM-2405 como la mostrada en la Figura 3.3



Figura 3.3: Módulo de etapa de potencia VPM-2405

También se hizo uso de una computadora Compac Presario con procesador pentium

IV a 2.2 MHz y con memoria Ram de 1G como se muestra en la Figura 3.4



Figura 3.4: Computadora Compac Presario

El sistema de control de posición de un módulo de desplazamiento se justifica ya que algunos robots industriales constan de articulaciones de este tipo de módulos Figura 3.5, Figura 3.6, Figura 3.7, Figura 3.8, además se emplea como mecanismo de transporte para carga y descarga.

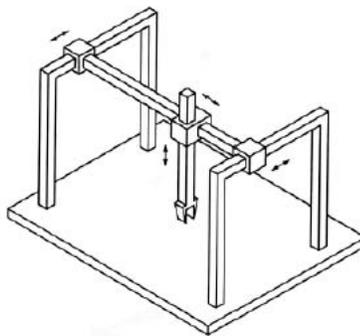


Figura 3.5: Módulo de desplazamiento sobre el eje horizontal Gantry



Figura 3.6: Módulo de desplazamiento sobre el eje horizontal XRS



Figura 3.7: Módulo de desplazamiento sobre el eje horizontal xm3m2



Figura 3.8: Módulo de desplazamiento sobre el eje horizontal PRKL250

Estas aplicaciones han tenido una gran popularidad ya que, aún sin aprobar del todo la rigurosa métrica que la teoría de control impone, han captado el interés de fabricantes de equipos electrónicos y de control al ser aplicados con éxito a un sinnúmero de aparatos. Actualmente existen y se continúan diseñando circuitos integrados y microprocesadores especializados para desarrollar este tipo de controladores.

En esta tesis se realiza el control de posición del módulo (con ciertas limitaciones mecánicas y eléctricas) montado sobre un riel de 1.20 metros utilizando técnicas difusas.

La posición y dirección del sistema es la entrada mientras que la salida es la magnitud de la posición del motor. Una de las ventajas que ofrece la Lógica Difusa es que no se necesita saber el comportamiento total del sistema, esto permite conocer el conocimiento a priori del sistema para facilitar el control del sistema, así antes del control del sistema se utilizó conocimiento obvio acerca del comportamiento del motor en la creación del controlador Mamdani y Takagi-Sugeno y las reglas.

El sistema de control difuso del módulo de CD se realizó con un controlador Mamdani y un controlador Takagi-Sugeno que están compuestos por reglas los cuales contienen el conocimiento del proceso del comportamiento deseado de las reglas *si-entonces*.

### 3.3. Modelado matemático del sistema

Existen muchos métodos para obtener un modelo matemático de sistemas mecánicos, en este trabajo hacemos uso de la segunda ley de Newton, basada en la igualdad de la fuerza con el producto de la masa por la aceleración. (Kuo, 1991)

La segunda ley de Newton está definida por la siguiente ecuación:

$$F = ma \tag{3.1}$$

Donde  $F$  es la fuerza exterior aplicada al cuerpo,  $m$  es la masa del cuerpo y  $a$  es la aceleración.

En la Figura 3.9 se muestra el diagrama de cuerpo libre del sistema para la obtención del modelo matemático.

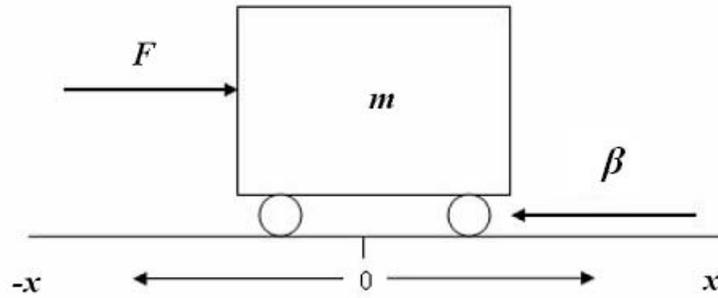


Figura 3.9: Diagrama de cuerpo libre del sistema.

Los parametros reales del sistema se muestran en el siguiente Cuadro:

Simbología	Nombre	Valor	Unidades
$F$	Fuerza		N
$m$	Masa del módulo	1.5	Kg
$a$	Aceleración		$m/s^2$
$u$	Entrada		volts
$\beta$	Coefficiente de fricción	0.1	$N \cdot seg/m$
$x$	Salida		m
$l$	Longitud del eje horizontal	1.2	m

Cuadro 3.1: Parámetros y variables del modulo de desplazamiento

Analizando el diagrama de cuerpo libre de la Figura 3.9 y aplicando la segunda Ley de Newton ecuación 3.1 se tiene:  $F$  es la fuerza aplicada al módulo la cual es igual a  $u$ ,  $m$  es la masa del módulo,  $\beta$  es el coeficiente de fricción que se opone al movimiento del módulo y  $a$  es la doble derivada de la posición, así se tiene la siguiente expresión.

$$u - \beta \dot{x} = m\ddot{x} \tag{3.2}$$

La cual es una ecuación diferencial de 2do orden que describe las dinamicas del módulo.

### 3.3.1. Función de transferencia.

La función de transferencia es la relación que existe entre la entrada y la salida, de la transformada de Laplace del sistema con *c.i.* = 0.

Aplicando la transformada de Laplace de 3.2 se obtiene.

$$u(s) = ms^2x(s) + \beta s x(s) \quad (3.3)$$

Factorizando  $x(s)$  y obteniendo la relación entrada salida resulta.

$$x(s) = \frac{1}{ms^2 + \beta s} \cdot u(s) \quad (3.4)$$

Y que es la función de transferencia del sistema.

### 3.3.2. Ecuaciones de estado

Las ecuaciones de estado (e.e.) de un sistema es la descripción de un sistema en terminos de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden de forma matricial.

Haciendo uso de la ecuación 3.2 proponemos estados:

$$\begin{aligned} w_1 &= x \\ w_2 &= \dot{x} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Derivando los estados propuestos se obtienen lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \dot{x} \\ \dot{w}_2 &= \ddot{x} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Despejando a  $\ddot{x}$  de la ecuación 3.2 se obtiene:

$$\ddot{x} = \frac{u - \beta \dot{x}}{m} \quad (3.7)$$

Quedando las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= \dot{x} = w_2 \\ \dot{w}_2 &= \ddot{x} = \frac{u - \beta \dot{x}}{m}\end{aligned}\tag{3.8}$$

Que en representación matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\beta}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u\tag{3.9}$$

Y en donde la salida del sistema queda como.

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}\tag{3.10}$$

### 3.4. Conclusiones

En este capítulo se obtuvo el modelo matemático dado por las ecuaciones 3.4 y 3.10 las cuales nos servirán solamente para cuestiones de simulación, en la práctica la aplicación de un control con lógica difusa se basa en el conocimiento de un experto que es utilizado en lugar de ecuaciones matemáticas.

# Capítulo 4

## Diseño de Controladores.

En este capítulo se realiza el diseño de las leyes de control difuso que serán aplicadas al sistema primeramente se realiza el diseño de un controlador Mamdani y por último un controlador Takagi-Sugeno.

### 4.1. Introducción.

Se llama controlador lógico difuso a aquel que utiliza conocimientos de naturaleza heurística para controlar un sistema. Tiene la propiedad de poder manejar imprecisión y vaguedad en la información que utiliza. El controlador lógico difuso es aquel que por medio de reglas difusas basadas en funciones de membresía a criterio y conocimiento de cada experto permite el control de un sistema. Al conocer el funcionamiento de la planta o el sistema a controlar podemos hacer uso del control difuso.

En este capítulo se desarrollarán las técnicas de control difuso realizando primeramente el análisis del comportamiento del sistema con el modelo matemático en simulación, posteriormente se diseñará el controlador difuso por medio de las reglas difusas, usando tanto la técnica de controlador tipo Mamdani, y controlador tipo Takagi-Sugeno. En la Figura 4.1 se muestra el diagrama a bloques del controlador que se usará, como se ve es un control a lazo cerrado con su bloque controlador de lógica difusa, donde

$r$  representa la señal de referencia,  $de$  la variación del error,  $u$  la señal de control y  $y$  la salida del sistema.

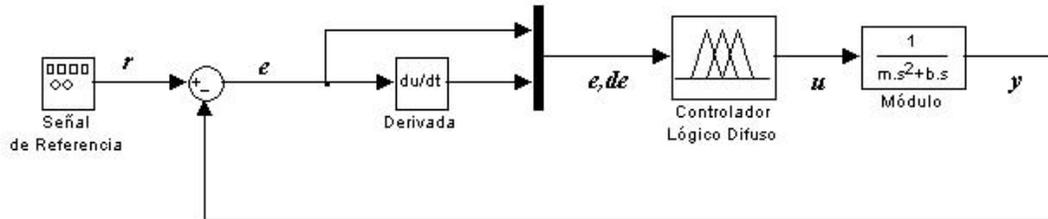


Figura 4.1: Diagrama a bloques del controlador

## 4.2. Diseño del controlador tipo Mamdani

Para este controlador se utilizan dos señales de entrada y una de salida. Las señales de entrada son la señal de error  $e$  y la variación del error  $de$  (derivada del error). Como se muestra en la Figura 4.2.

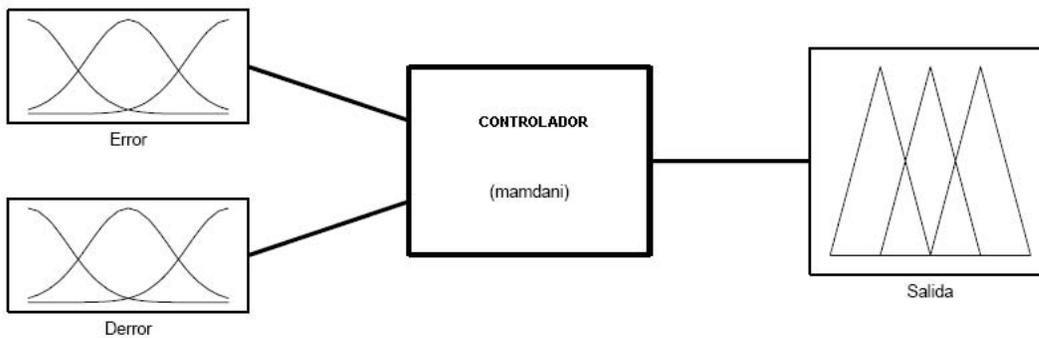


Figura 4.2: Diagrama de entradas y salidas del controlador Mamdani

Para el error  $e$  se ocupa un Universo de discurso  $U = [-1.2, 1.2]$  que significa que el error máximo y mínimo puede ser de 1.2 metros en la posición del modulo de desplazamiento con respecto a la referencia. En esta misma entrada se utilizan 5 funciones de membresia de las cuales 3 son triangulares que abarcan la región media desde -0.6 a 0.6 y ambos extremos abarcados por funciones de membresia trapezoidales la Figura 4.3 muestra las funciones de membresia del error de manera gráfica con sus respectivas etiquetas lingüísticas y rangos antes mencionados. A continuación se muestra el cuadro con la descripción completa para la entrada *error* del controlador:

Tipo de Función	Etiqueta lingüística	Significado	Rango
Trapezoidal	Negativo	Error negativo	-2.5 a -0.4
Triangular	PoN	Error poco negativo	-2.5 a -0.4
Triangular	Z	Error cero	-0.2 a 0.2
Triangular	PoP	Error poco positivo	0.1 a 0.6
Trapezoidal	Positivo	Error positivo	0.4 a 2.5

Cuadro 4.1: Etiquetas lingüísticas de la entrada error del controlador Mamdani

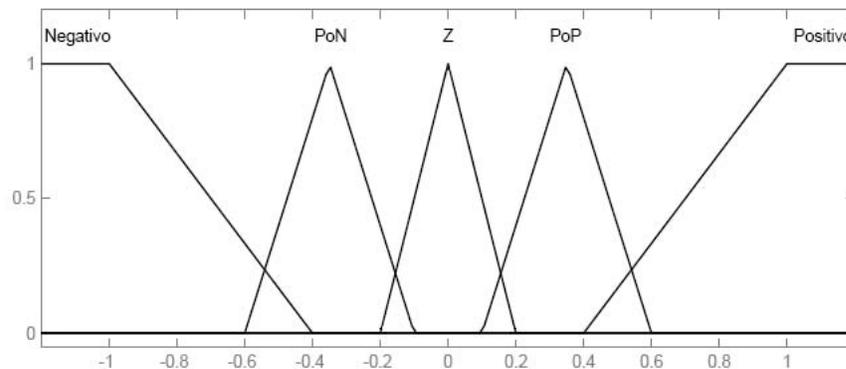


Figura 4.3: Funciones de membresia del error

Para la variación del error  $de$  se ocupa un Universo de discurso  $U = [-1, 1]$  que significa que la variación máxima y mínima del error puede ser de 1 rad/seg . En

esta entrada se utilizan 5 funciones de membresía de las cuales 3 son triangulares que abarcan la región media desde -0.4167 a 0.4167 y ambos extremos abarcados por funciones de membresía trapezoidales, la Figura 4.4 muestra las funciones de membresía de la variación del error de manera gráfica con sus respectivas etiquetas lingüísticas y rangos antes mencionados. En el cuadro siguiente se muestra la descripción completa para la entrada *Error* del controlador Mamdani.

Tipo de función	Etiqueta lingüística	Significado	Rango
Trapezoidal	Negativo	Error negativa	-1.667 a -0.33
Triangular	PoN	Error poco negativa	-.4167 a 0
Triangular	Z	Error cero	-0.1667 a 0.1667
Triangular	PoP	Error poco positivo	0 a 0.4167
Trapezoidal	Positivo	Error positivo	0.33 a 1.667

Cuadro 4.2: Etiquetas lingüísticas de la entrada variación del error del controlador Mamdani

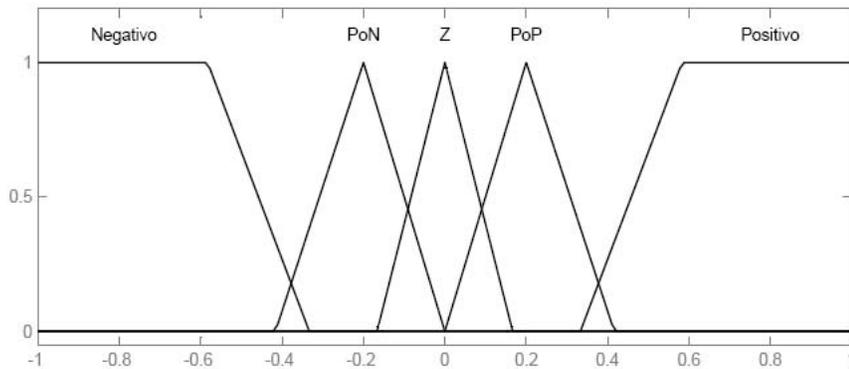


Figura 4.4: Funciones de membresía de la variación del error

La salida del controlador Mamdani ocupa un Universo de discurso  $U = [-3, 3]$  que significa que la señal de control  $u$  puede tomar valores de voltaje de  $-3$  a  $3$  volts.

En esta salida se utilizan 5 funciones de membresía de las cuales 3 son triangulares que abarcan la región media desde -2 a 2 y ambos extremos abarcados por funciones de membresía trapezoidales, la Figura 4.5 muestra las funciones de membresía de la salida de manera gráfica con sus respectivas etiquetas lingüísticas y rangos antes mencionados. El cuadro siguiente muestra la descripción completa de la salida del controlador Mamdani.

Tipo de función	Etiqueta lingüística	Significado	Rango
Trapezoidal	Negativo	Salida negativa	-4.25 a -1.25
Triangular	PoN	Salida poco negativa	-2 a -0.5
Triangular	Z	Salida cero	-0.75 a 0.75
Triangular	PoP	Salida poco positiva	0.5 a 2
Trapezoidal	Positivo	Salida positiva	1.25 a 4.25

Cuadro 4.3: Etiquetas lingüísticas de la salida del controlador Mamdani

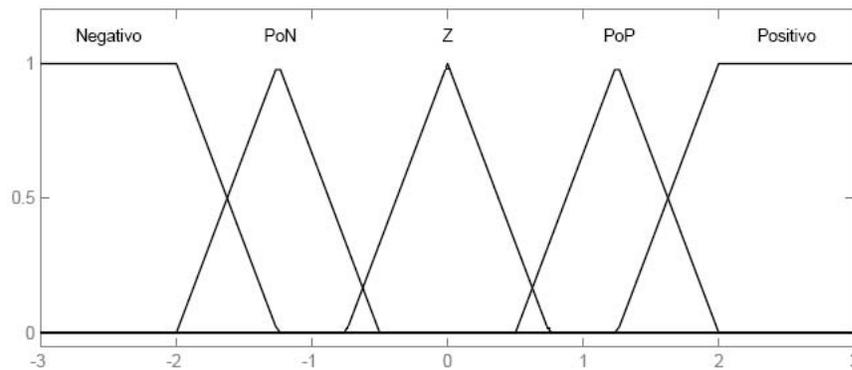


Figura 4.5: Funciones de membresía de la salida

Las reglas difusas para el Controlador Mamdani son:

1. **Si** el error es Negativo y la Derivada del error es Negativa **entonces** la Salida es Negativa.

2. **Si** el error es Negativo y la Derivada del error es Poco Negativa **entonces** la Salida es Negativa.
3. **Si** el error es Negativo y la Derivada del error es Cero **entonces** la Salida es Negativa.
4. **Si** el error es Negativo y la Derivada del error es Poco Positiva **entonces** la Salida es Negativa.
5. **Si** el error es Negativo y la Derivada del error es Positivo **entonces** la Salida es Poco Negativa.
6. **Si** el error es Poco Negativo y la Derivada del error es Negativa **entonces** la Salida es Negativa.
7. **Si** el error es Poco Negativo y la Derivada del error es Poco Negativa **entonces** la Salida es Negativa.
8. **Si** el error es Poco Negativo y la Derivada del error es Cero **entonces** la Salida es Negativa.
9. **Si** el error es Poco Negativo y la Derivada del error es Poco Positiva **entonces** la Salida es Negativa.
10. **Si** el error es Poco Negativo y la Derivada del error es Positiva **entonces** la Salida es Positivo.
11. **Si** el error es Cero y la Derivada del error es Negativa **entonces** la Salida es Negativa.
12. **Si** el error es Cero y la Derivada del error es Poco Negativa **entonces** la Salida es Poco Negativa.
13. **Si** el error es Cero y la Derivada del error es Cero **entonces** la Salida es Cero.

14. **Si** el error es Cero y la Derivada del error es Poco Positiva **entonces** la Salida es Poco Positiva.
15. **Si** el error es Cero y la Derivada del error es Positiva **entonces** la Salida es Positiva.
16. **Si** el error es Poco Positivo y la Derivada del error es Negativa **entonces** la Salida es Negativa.
17. **Si** el error es Poco Positivo y la Derivada del error es Poco Negativa **entonces** la Salida es Positiva.
18. **Si** el error es Poco Positivo y la Derivada del error es Cero **entonces** la Salida es Positiva.
19. **Si** el error es Poco Positivo y la Derivada del error es Poco Positiva **entonces** la Salida es Positiva.
20. **Si** el error es Poco Positivo y la Derivada del error es Positiva **entonces** la Salida es Positiva.
21. **Si** el error es Positivo y la Derivada del error es Negativa **entonces** la Salida es Poco Positivo.
22. **Si** el error es Positivo y la Derivada del error es Poco Negativa **entonces** la Salida es Positiva.
23. **Si** el error es Positivo y la Derivada del error es Cero **entonces** la Salida es Positiva.
24. **Si** el error es Positivo y la Derivada del error es Poco Positiva **entonces** la Salida es Positiva.
25. **Si** el error es Positivo y la Derivada del error es Positiva **entonces** la Salida es Positiva.

La descripción compacta del diseño del controlador tipo Mamdani se muestra en la Figura 4.6.

E	dE				
	N	PoN	Z	PoP	P
N	N	N	N	N	PoN
PoN	N	N	N	N	P
Z	N	PoN	Z	PoP	P
PoP	N	P	P	P	P
P	PoP	P	P	P	P

Figura 4.6: Tabla de reglas difusas para controlador Mamdani

A partir de las reglas difusas propuestas resulta una superficie de control mostrada en la Figura 4.7.

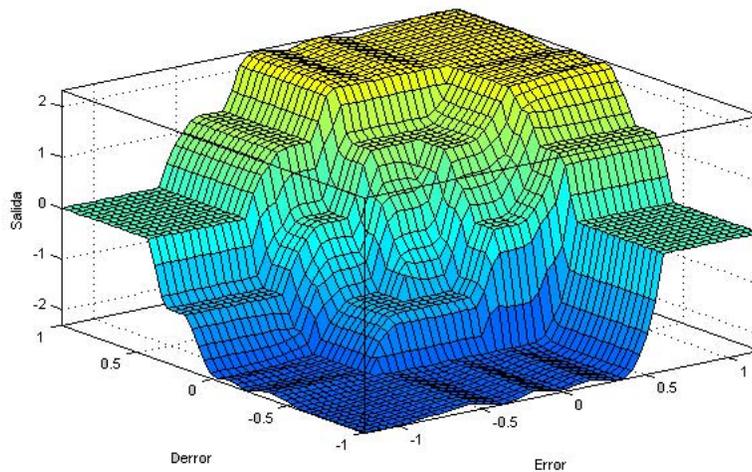


Figura 4.7: Superficie de control del controlador Mamdani

### 4.3. Diseño del controlador tipo Takagi-Sugeno

En este controlador hacemos uso de dos entradas, una llamada error  $e$  y la segunda que es la variación del error  $de$  que significa derivada del error, y una salida. Como se ve en la Figura 4.8.

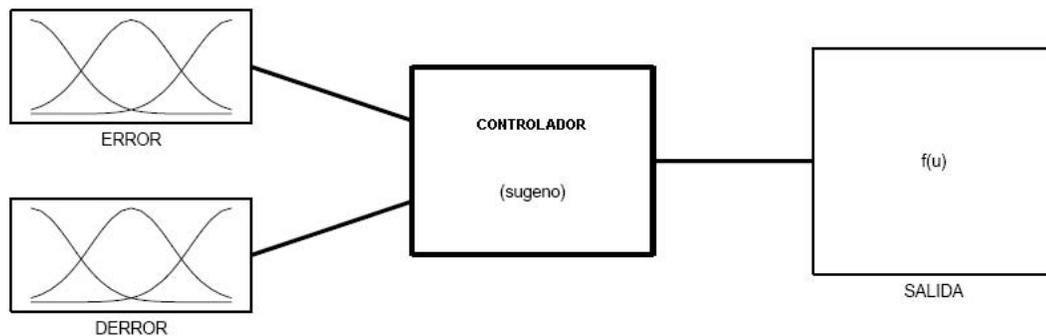


Figura 4.8: Diagrama de entradas y salidas del controlador Takagi-Sugeno

En el error de este controlador se ocupa un Universo  $U = [-1.2, 1.2]$  que significa que el error máximo y mínimo puede ser de 1.2 metros en la posición del modulo de desplazamiento con respecto a la referencia. En esta misma entrada se utilizan 5 funciones de membresía de las cuales 3 son triangulares que abarcan la región media desde -0.3 a 0.3 y ambos extremos abarcados por funciones de membresía trapezoidales, la Figura 4.9 muestra las funciones de membresía del error de manera gráfica con sus respectivas etiquetas lingüísticas y rangos antes mencionados. En el cuadro de a continuación se muestra la descripción completa para la entrada error del controlador.

Tipo de función	Etiqueta lingüística	Significado	Rango
Trapezoidal	Negativo	Error negativo	-2.5 a -0.15
Triangular	PoN	Error poco negativo	-0.3 a 0
Triangular	Z	Error cero	-0.15 a 0.15
Triangular	PoP	Error poco positivo	0 a 0.3
Trapezoidal	Positivo	Error positivo	0.15 a 2.5

Cuadro 4.4: Etiquetas lingüísticas de la entrada error del controlador Sugeno

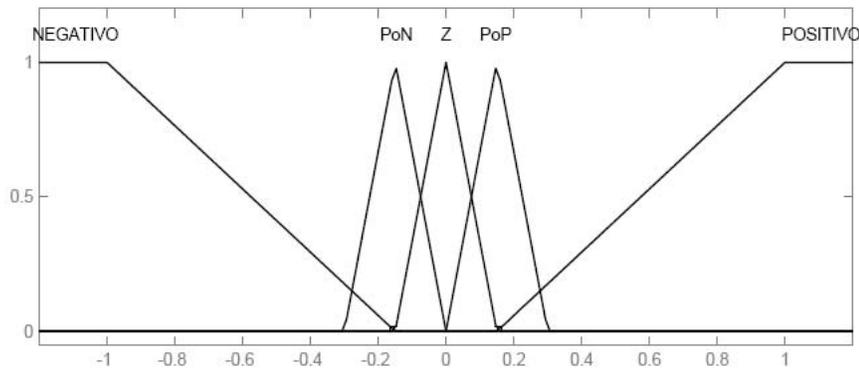


Figura 4.9: Funciones de membresía del error

Para la variación del error  $de$  se ocupa un Universo de discurso  $U = [-1.5, 1.5]$  que significa que la variación máxima y mínima del error puede ser de  $1.5 \text{ rad/seg}$ . En esta entrada se utilizan 5 funciones de membresía de las cuales 3 son triangulares que abarcan la región media desde -0.6071 a 0.6252 y ambos extremos abarcados por funciones de membresía trapezoidales, la Figura 4.10 muestra las funciones de membresía de la variación del error de manera gráfica con sus respectivas etiquetas lingüísticas y rangos antes mencionados. El cuadro siguiente muestra la descripción completa para la entrada Derror del controlador Takagi-Sugeno.

Tipo de función	Etiqueta lingüística	Significado	Rango
Trapezoidal	Negativo	Error negativa	-4.5 a -0.15
Triangular	PoN	Error poco negativa	-.6071 a 0
Triangular	Z	Error cero	-0.15 a 0.15
Triangular	PoP	Error poco positivo	0 a 0.6252
Trapezoidal	Positivo	Error positivo	0.15 a 4.5

Cuadro 4.5: Etiquetas lingüísticas de la entrada variación del Derror del controlador Sugeno

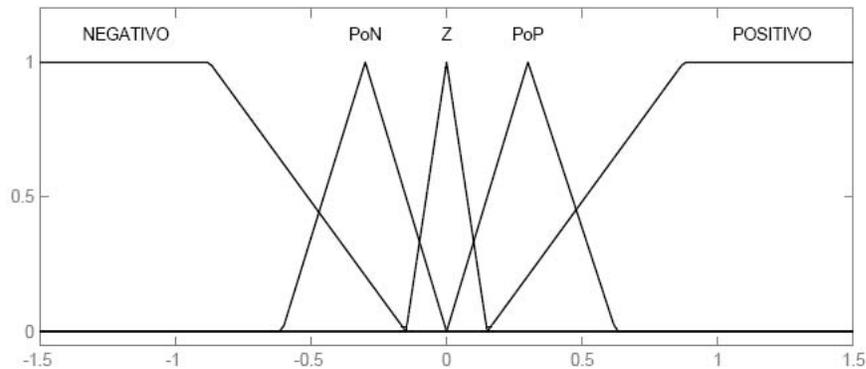


Figura 4.10: Funciones de membresía de la variación del error

En la salida del controlador Sugeno se ocupa un Universo de discurso  $U = [0 \ a \ 1]$  que significa que la señal de control puede  $u$  puede tomar valores de voltaje de 0 a 1 volt. En esta salida se utilizan 7 funciones de membresía, las reglas que se usan en el bloque controlador de lógica difusa se muestran como sigue en la siguiente Figura 4.11.

En el cuadro siguiente se muestra la descripción completa para la salida del controlador Takagi-Sugeno.

Tipo de función	Etiqueta lingüística	Significado	Valor
Singleton	Negativo	Salida negativa	-6
Singleton	PoN	Salida poco negativa	-3
Singleton	PoPoN	Salida poco poco negativa	-1.5
Singleton	Z	Salida cero	0
Singleton	PoPoP	Salida poco poco positiva	1.5
Singleton	PoP	Salida poco positiva	3
Singleton	Positivo	Salida positiva	6

Cuadro 4.6: Etiquetas lingüísticas de la salida del controlador Sugeno

Las reglas difusas para el diseño del Controlador difuso tipo Takagi-Sugeno.

1. **Si** el error es Negativo y la Derivada del error es Negativa **entonces** la Salida es Negativa.
2. **Si** el error es Negativo y la Derivada del error es Poco Negativa **entonces** la Salida es Negativa.
3. **Si** el error es Negativo y la Derivada del error es Cero **entonces** la Salida es Negativa.
4. **Si** el error es Negativo y la Derivada del error es Poco Positiva **entonces** la Salida es Negativa.
5. **Si** el error es Negativo y la Derivada del error es Positivo **entonces** la Salida es Poco Poco Negativa.
6. **Si** el error es Poco Negativo y la Derivada del error es Negativa **entonces** la Salida es Negativa.
7. **Si** el error es Poco Negativo y la Derivada del error es Poco Negativa **entonces** la Salida es Poco Poco Negativa.

8. **Si** el error es Poco Negativo y la Derivada del error es Cero **entonces** la Salida es Poco Negativa.
9. **Si** el error es Poco Negativo y la Derivada del error es Poco Positiva **entonces** la Salida es Positiva.
10. **Si** el error es Poco Negativo y la Derivada del error es Positiva **entonces** la Salida es Positiva.
11. **Si** el error es Cero y la Derivada del error es Negativa **entonces** la Salida es Negativa.
12. **Si** el error es Cero y la Derivada del error es Poco Negativa **entonces** la Salida es Poco Negativa.
13. **Si** el error es Cero y la Derivada del error es Cero **entonces** la Salida es Cero.
14. **Si** el error es Cero y la Derivada del error es Poco Positiva **entonces** la Salida es Poco Positiva.
15. **Si** el error es Cero y la Derivada del error es Positiva **entonces** la Salida es Positiva.
16. **Si** el error es Poco Positivo y la Derivada del error es Negativa **entonces** la Salida es Negativa.
17. **Si** el error es Poco Positivo y la Derivada del error es Poco Negativa **entonces** la Salida es Negativa.
18. **Si** el error es Poco Positivo y la Derivada del error es Cero **entonces** la Salida es Poco Positiva.
19. **Si** el error es Poco Positivo y la Derivada del error es Poco Positiva **entonces** la Salida es Poco Poco Positiva.

20. **Si** el error es Poco Positivo y la Derivada del error es Positiva **entonces** la Salida es Positiva.
21. **Si** el error es Positivo y la Derivada del error es Negativa **entonces** la Salida es Poco Poco Positiva.
22. **Si** el error es Positivo y la Derivada del error es Poco Negativa **entonces** la Salida es Positiva.
23. **Si** el error es Positivo y la Derivada del error es Cero **entonces** la Salida es Positiva.
24. **Si** el error es Positivo y la Derivada del error es Poco Positiva **entonces** la Salida es Positiva.
25. **Si** el error es Positivo y la Derivada del error es Positiva **entonces** la Salida es Positiva.

La descripción compacta del diseño del controlador tipo Takagi-Sugeno se muestra en la Figura 4.11.

E \ dE	dE				
	N	PoN	Z	PoP	P
N	N	N	N	N	PoPoN
PoN	N	PoPoN	PoN	P	P
Z	N	PoN	Z	PoP	P
PoP	N	N	PoP	PoPoP	P
P	PoPoP	P	P	P	P

Figura 4.11: Tabla de reglas difusas para controlador Sugeno

A partir de las reglas difusas propuestas resulta una superficie de control mostrada en la Figura 4.12:

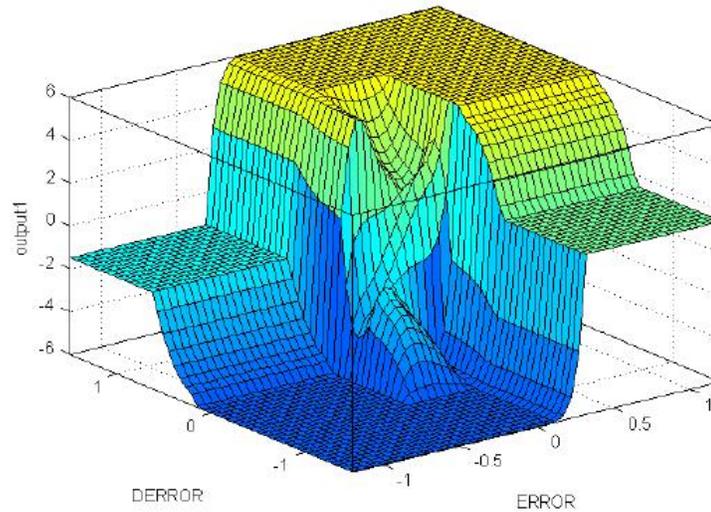


Figura 4.12: Superficie de control del controlador Sugeno

## 4.4. Conclusiones

Este capítulo contiene todo el diseño de los controladores tanto del tipo Mamdani como el Takagi Sugeno, definiendo el número de entradas y salidas, el universo de discurso, número y tipo de las funciones de membresía de cada una de las entradas y de la salida, así como su respectiva superficie de control que se muestra gráficamente. Ambos controladores se conformaron con 25 reglas difusas expresadas de forma escrita y en sus respectivas tablas, reglas que necesitaron de varias modificaciones en el transcurso de las simulaciones hasta obtener los resultados deseados.

# Capítulo 5

## Resultados en simulación.

En este capítulo se presentan los resultados en simulación numérica de los controladores diseñados en el capítulo anterior. Se hizo uso de Matlab Simulink con la toolbox de lógica difusa.

### 5.1. Introducción.

La computación, el procesamiento de datos y el desarrollo de software que han evolucionado a pasos agigantados nos permiten ahora realizar simulaciones del comportamiento de un sistema para conocer de manera aproximada los resultados que presentara cuando sea implementado físicamente

Los errores entre el sistema real y el sistema simulado pueden ser clasificados en dos grupos: errores de análisis cuando los modelos matemáticos no son lo suficientemente aproximados a los modelos físicos y errores de aproximación de datos éste último es menos perceptible y se hace presente en el momento de realizar ciertas operaciones sobre datos de tamaño finito ó en términos computacionales en registros de dimensión fija. Un simulador es un programa (software) que imita las acciones del sistema que se quiere controlar. Con el uso de un simulador, se pueden reproducir comportamientos normales o anormales del sistema estudiado. Incluso cuando se ha terminado el

sistema final, ciertos estados de error solamente se pueden calcular con ayuda de un simulador. Los simuladores pueden reproducir de manera bastante eficiente la secuencia de eventos esperada en el sistema verdadero. (Zavala *et al.*, 2005)

Simulación numérica del control del sistema se aplica la herramienta MATLAB Simulink. (MatLab, 2006)

## 5.2. Respuesta en lazo abierto

En la Figura 5.1 se muestra el diagrama del sistema a controlar en lazo abierto para comprobar la respuesta del sistema sin control.

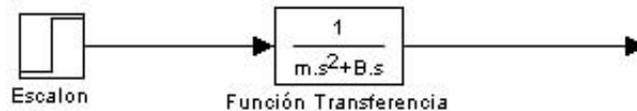


Figura 5.1: Respuesta en lazo abierto

En la Figura 5.2 vemos la gráfica de la entrada de referencia, en este caso un escalón y la salida del sistema, como podemos ver es un sistema inestable, no controlado de manera natural.

Así hemos comprobado que el sistema que deseamos controlar, no es un sistema previamente controlado por la naturaleza, y aquí la validez de nuestro trabajo realizado para poder controlarlo.

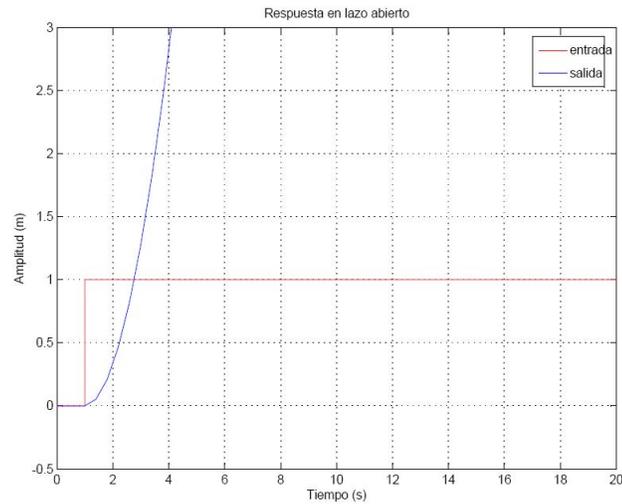


Figura 5.2: Respuesta en lazo abierto

### 5.3. Simulación del controlador Mamdani

#### Entrada senoidal

A continuación se muestran las gráficas de las simulaciones del controlador tipo mamdani.

La Figura 5.3 muestra la respuesta obtenida a una entrada de referencia de tipo senoidal de magnitud 0.6m y un periodo de  $T = 12.5$  seg.

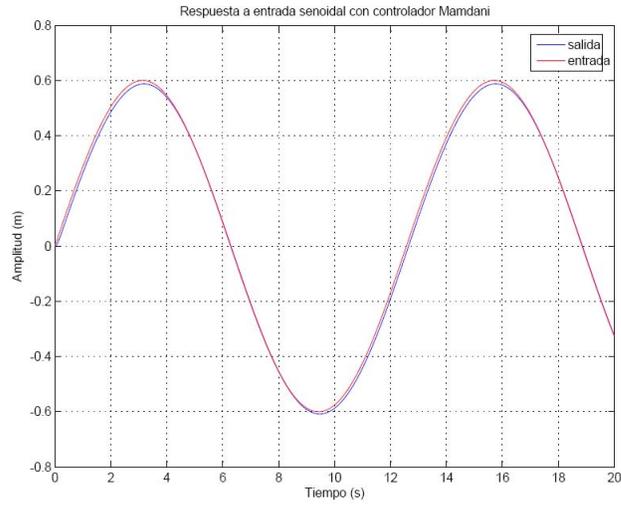


Figura 5.3: Respuesta a la entrada seno con controlador Mamdani

La señal de control correspondiente se muestra en la Figura 5.4.

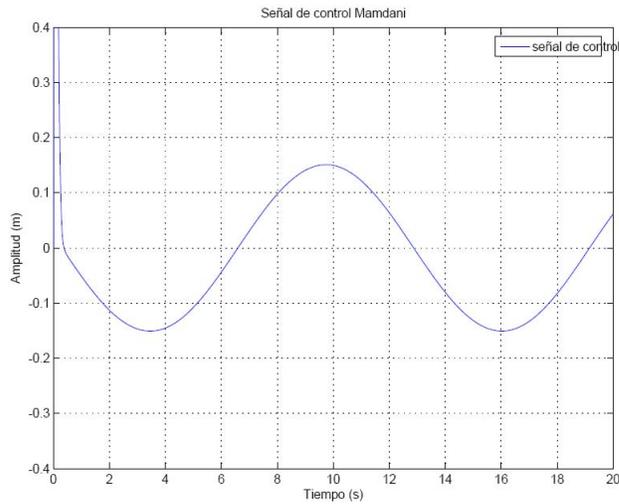


Figura 5.4: Señal de control Mamdani

La señal de error del sistema se muestra en la Figura 5.5

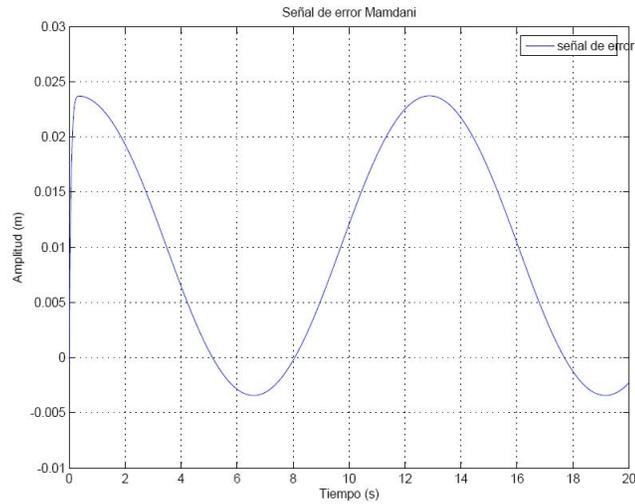


Figura 5.5: Señal de error Mamdani

## Entrada cuadrada

La Figura 5.6 muestra los resultados en simulación realizada con entrada de referencia cuadrada, de magnitud 0.6 m y periodo  $T = 12.5\text{seg}$ .

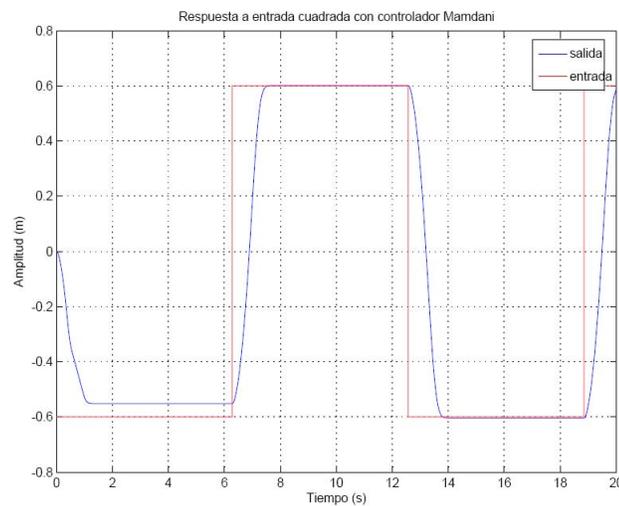


Figura 5.6: Respuesta a la entrada cuadrada con controlador Mamdani

La señal de control se muestra en la Figura 5.7.

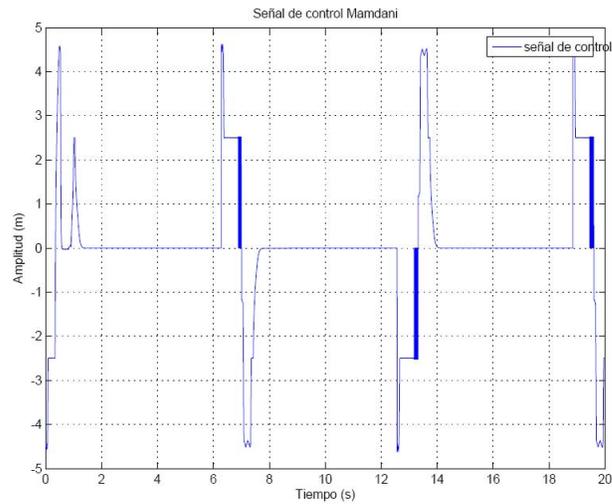


Figura 5.7: Señal de control Mamdani

Por último en la Figura 5.8 se muestra la señal de error.

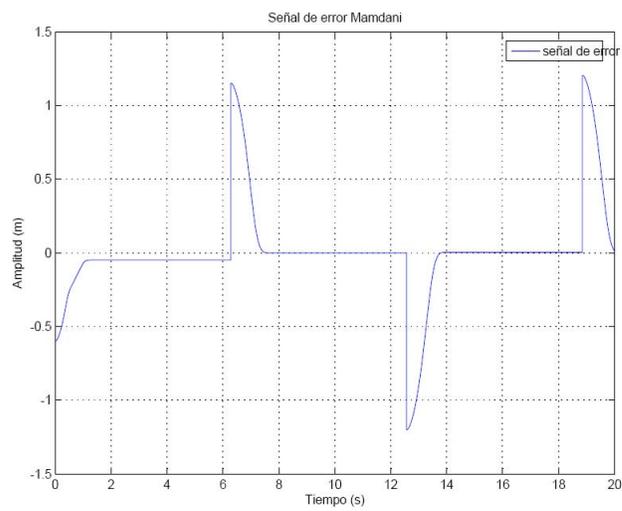


Figura 5.8: Señal de error Mamdani

## 5.4. Simulación del controlador Takagi-Sugeno

### Entrada senoidal

A continuación se muestran los resultados obtenidos en las simulaciones con el controlador tipo Takagi Sugeno.

La Figura 5.9 muestra la respuesta obtenida con una entrada de referencia de tipo senoidal, de magnitud 0.6 m y de periodo  $T = 12.5\text{seg}$ .

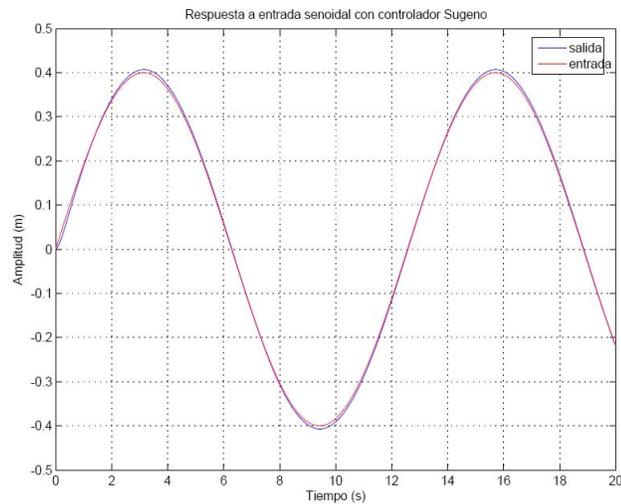


Figura 5.9: Respuesta a la señal de entrada senoidal con controlador Sugeno

La señal de control se muestra en la Figura 5.10.

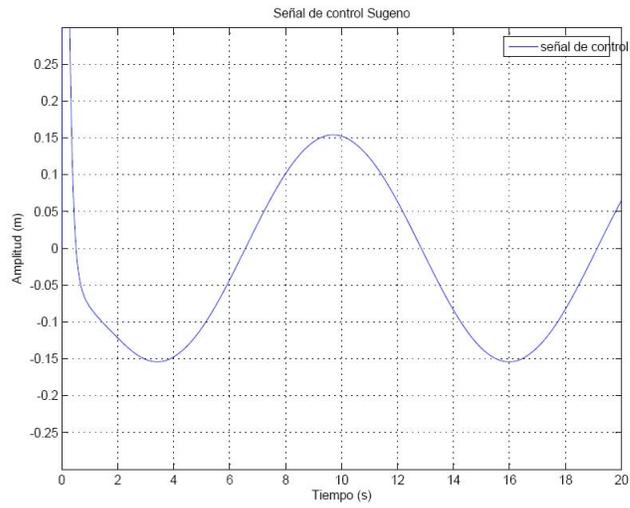


Figura 5.10: Señal de control Sugeno

La señal de error del sistema se muestra en la Figura 5.11.

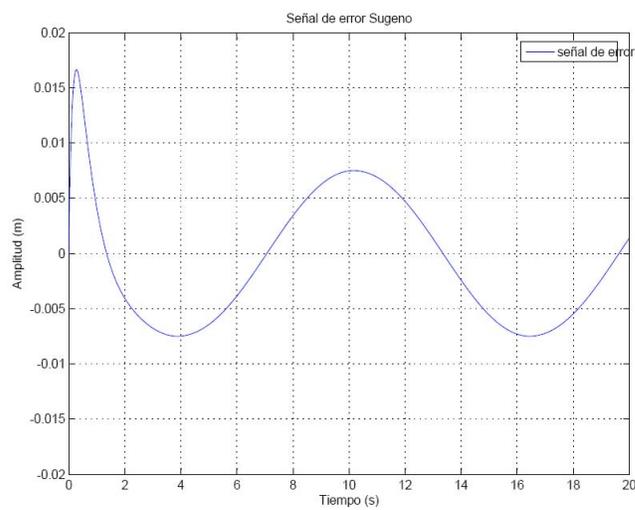


Figura 5.11: Señal de error Sugeno

## Entrada cuadrada

La Figura 5.12 muestra los resultados en simulación realizada con entrada de referencia cuadrada, de magnitud 0.6 m y periodo  $T = 12.5\text{seg}$ .

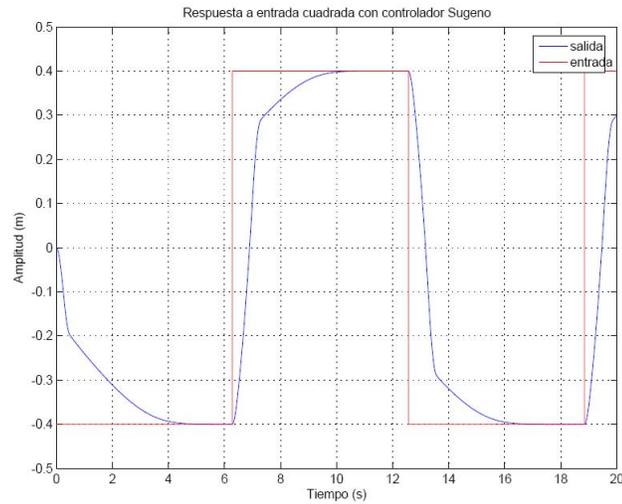


Figura 5.12: Señal de respuesta a una señal cuadrada

La señal de control se muestra en la Figura 5.13

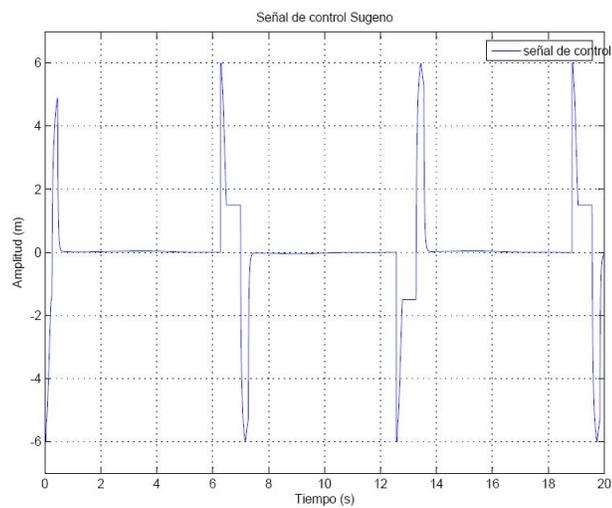


Figura 5.13: Señal de control utilizada en la simulación

Para finalizar en la Figura 6.15 se muestra la señal de error.

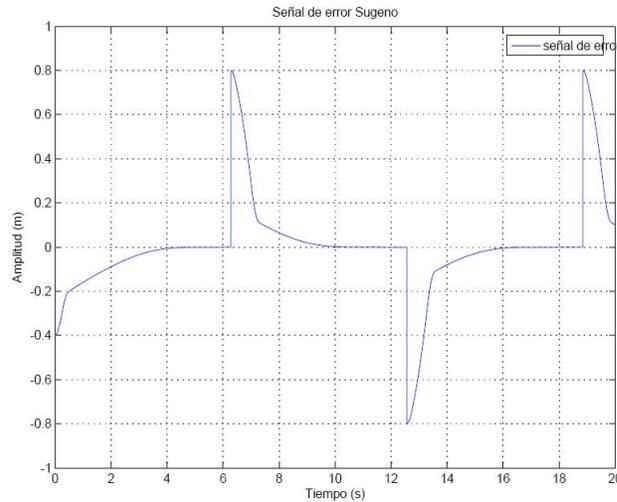


Figura 5.14: Señal de error a la respuesta de la entrada de referencia cuadrada

## 5.5. Conclusiones

Al concluir este capítulo se tiene las bases favorables para poder llevar a cabo física y experimentalmente ambos controladores, en este capítulo se hizo uso del Simulink y Fuzzy para realizar las simulaciones los cuales trabajan sobre un entorno completamente gráfico.

Se pudo notar que el controlador del tipo Mamdani tiene una mejor señal de control así como mínimas variaciones en la señal de error y derivada del error lo que nos permite tener mayor rapidez de respuesta a la señal de referencia, y hacer de este controlador el más estable a comparación del Takagi Sugeno.

# Capítulo 6

## Resultados Experimentales.

### 6.1. Introducción.

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos de aplicar los controladores diseñados en el sistema físico. Se hizo uso de Matlab Simulink con la toolbox real time windows tarjet y la toolbox de lógica difusa.

### 6.2. Controlador Mamdani

A continuación se muestran los resultados experimentales de la aplicación del controlador Mamdani ante entradas de referencia seno y cuadrada.

#### 6.2.1. Respuesta experimental a la referencia senoidal

La primera señal de referencia que se implemento al controlador Mamdani fue la señal tipo senoidal, con amplitud 0.2 m y periodo  $T = 12.5seg$ .

La Figura 6.1 muestra la respuesta obtenida del sistema a una entrada de referencia del tipo senoidal.

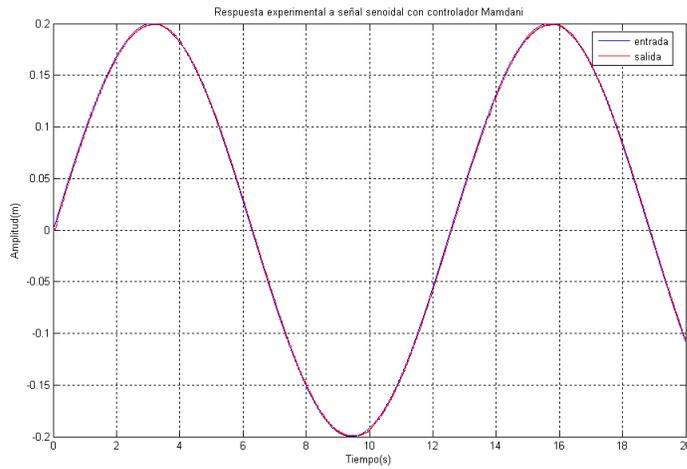


Figura 6.1: Respuesta experimental a la entrada senoidal con controlador Mamdani

La Figura 6.2 muestra la señal de control que es requerida para tener una respuesta favorable a la referencia senoidal.

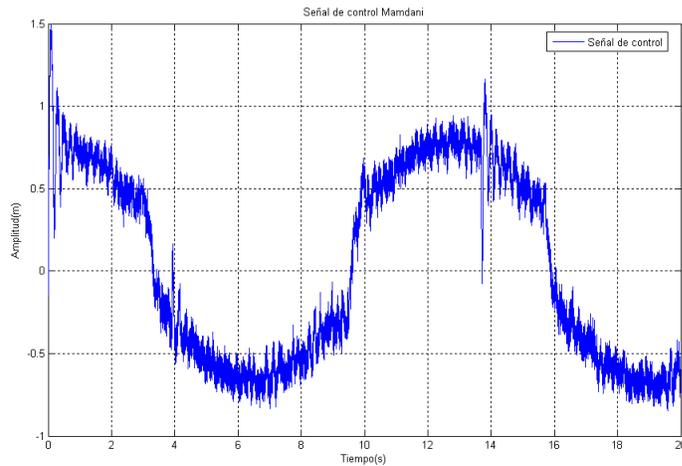


Figura 6.2: Señal de control Mamdani

En la Figura 6.3 se muestra la señal de error generada que de antemano se considera que debe ser mínima por lo mostrado en la Figura 6.1.

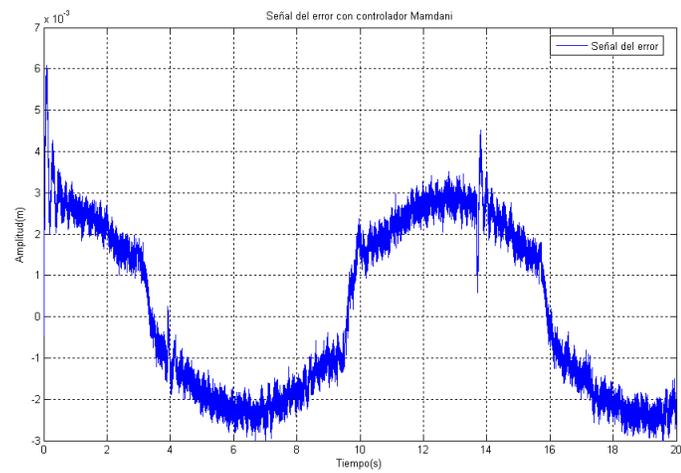


Figura 6.3: Señal de error Mamdani

Por último se muestra en la Figura 6.4 la variación del error que se produce al momento de la aplicación del control.

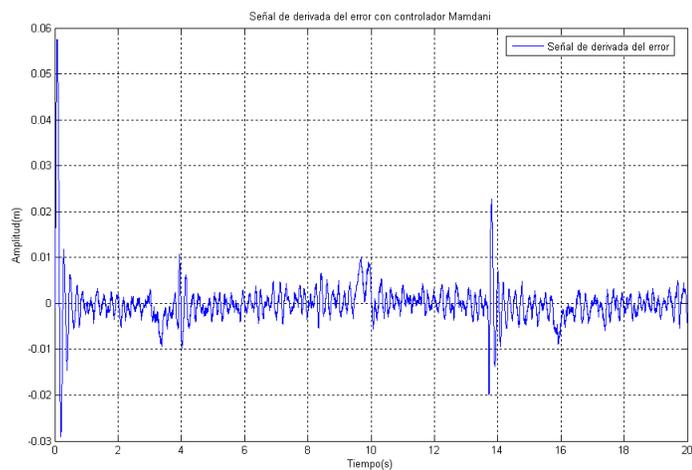


Figura 6.4: Derivada del error Mamdani

Todos los resultados mostrados con anterioridad fueron en respuesta a una entrada senoidal, a continuación mostraremos los obtenidos con el mismo controlador Mamdani pero en respuesta a una señal de referencia cuadrada.

### 6.2.2. Referencia cuadrada

La segunda referencia que se desea implementar con el controlador Mamdani fue la señal tipo cuadrada por sus variaciones drásticas en un instante de tiempo, los resultados obtenidos se muestran como sigue.

La Figura 6.5 muestra la respuesta obtenida a una entrada de referencia tipo cuadrada.

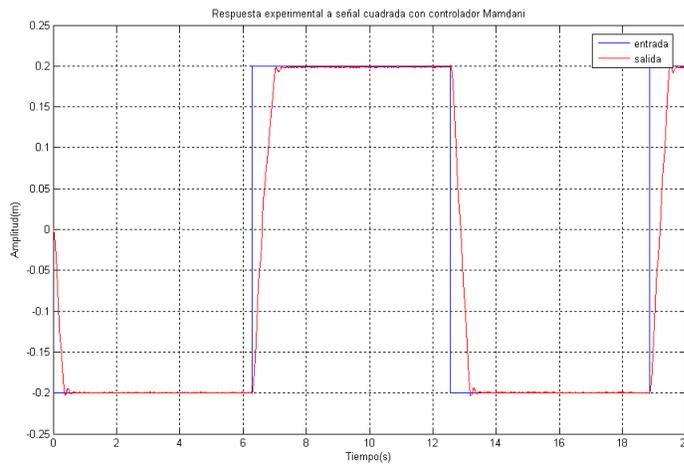


Figura 6.5: Respuesta experimental a la entrada cuadrada con controlador Mamdani

La Figura 6.6 muestra la señal de control que es requerida para tener una respuesta favorable a la referencia cuadrada.

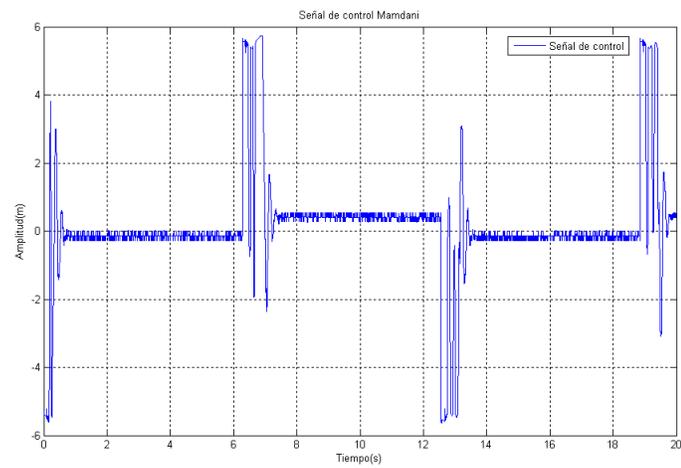


Figura 6.6: Señal de control Mamdani

El error de respuesta a la referencia cuadrada se muestra en la Figura 6.7

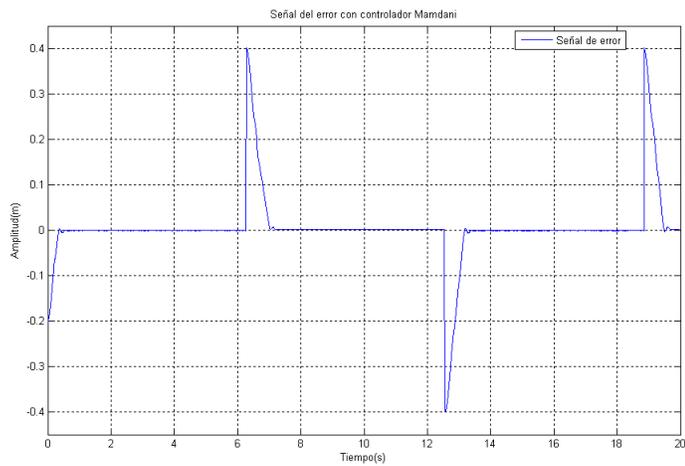


Figura 6.7: Señal de error Mamdani

La variación del error en la implementación es la que se muestra en la Figura 6.8

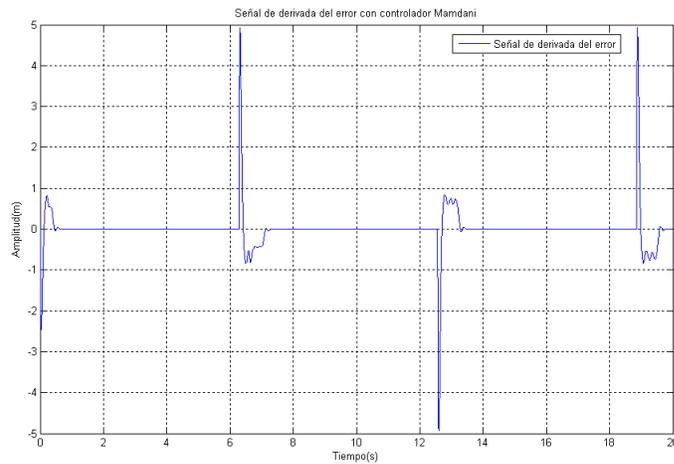


Figura 6.8: Derivada del error Mamdani

### 6.3. Controlador Takagi Sugeno

Al igual que al controlador Mamdani, se aplica el controlador Takagi Sugeno a un sistema para obtener sus respuestas a las entradas de referencia senoidal y cuadrada.

#### 6.3.1. Referencia senoidal

Nuevamente se implemento la entrada de referencia senoidal obteniendo los resultados siguientes.

La Figura 6.9 presenta la respuesta del sistema a la entrada senoidal con el controlador Sugeno.

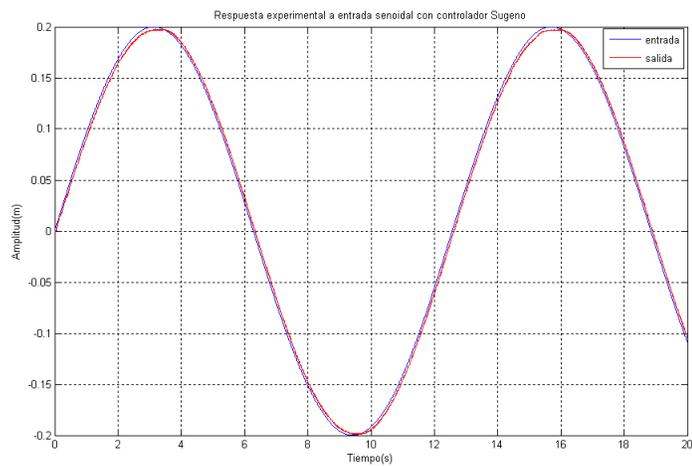


Figura 6.9: Respuesta experimental a la entrada senoidal con controlador Sugeno

La Figura 6.10 muestra la señal de control que es requerida para tener una respuesta favorable con el controlador Sugeno a la referencia senoidal.

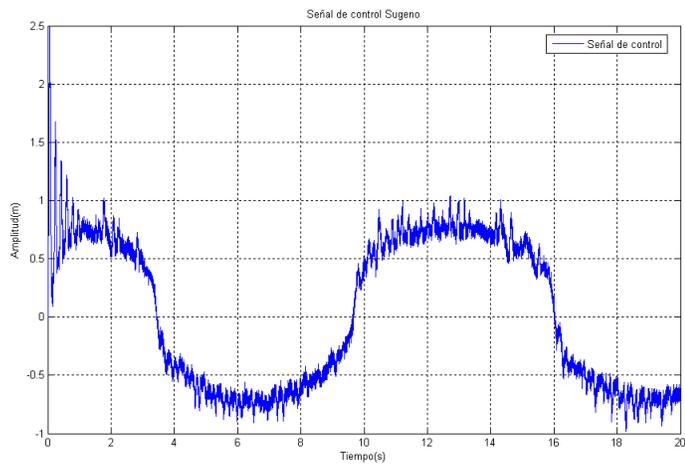


Figura 6.10: Señal de control Sugeno

El error de respuesta a la referencia senoidal se muestra en la Figura 6.11

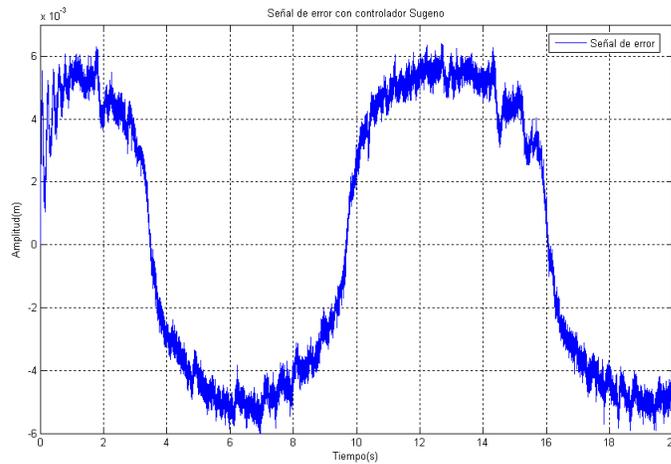


Figura 6.11: Señal de error Mamdani

La variación del error en la implementación se muestra en la Figura 6.12

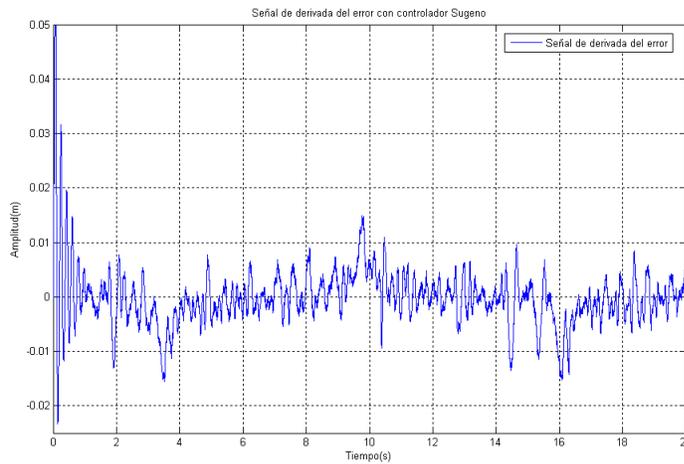


Figura 6.12: Derivada del error Sugeno

### 6.3.2. Referencia cuadrada

La segunda referencia que se implementó con el controlador Sugeno al igual que con el controlador Mamdani fue la señal tipo cuadrada por sus variaciones ya mencionadas,

los resultados obtenidos se muestran como sigue.

La Figura 6.13 muestra la respuesta obtenida a una entrada de referencia tipo cuadrada.

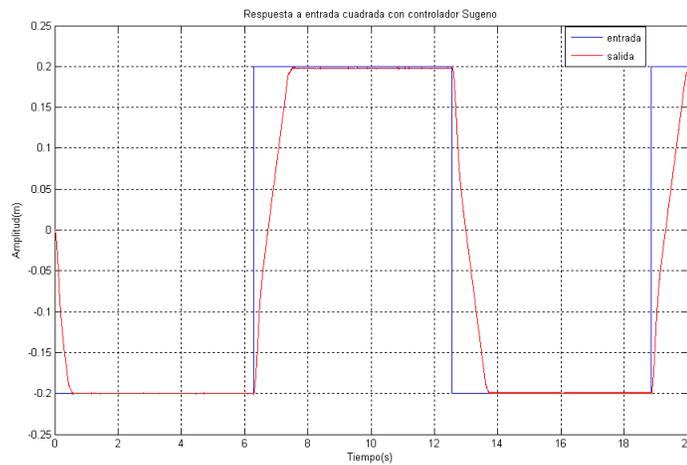


Figura 6.13: Respuesta experimental a la entrada cuadrada con controlador Sugeno

La Figura 6.14 muestra la señal de control que es requerida para tener una respuesta favorable a la referencia.

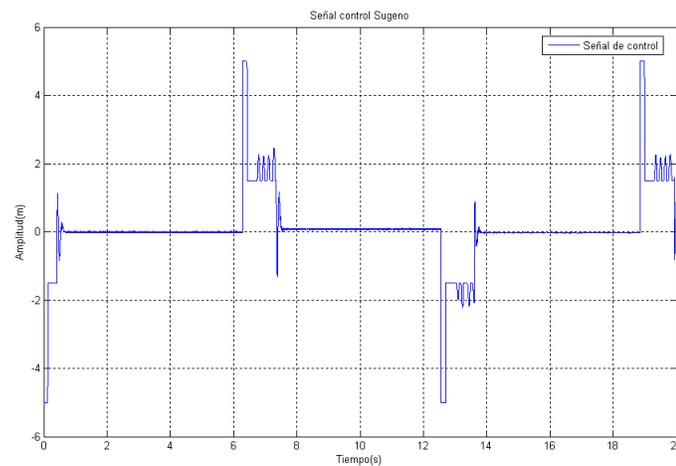


Figura 6.14: Señal de control Sugeno

El error de respuesta a la referencia cuadrada se muestra en la Figura 6.15

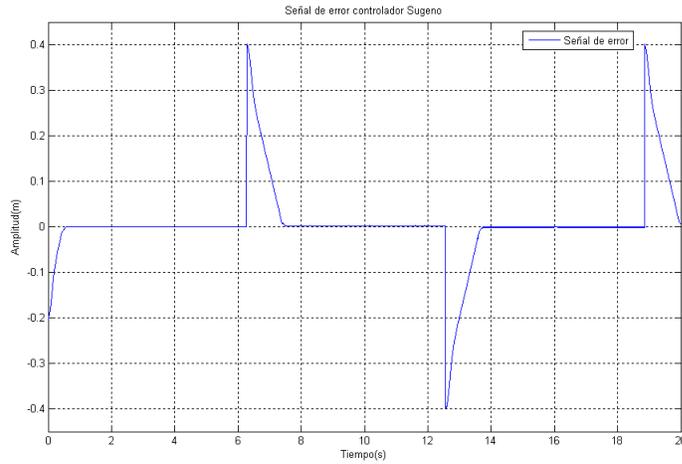


Figura 6.15: Señal de error Sugeno

La variación del error en la implementación es la que se muestra en la Figura 6.16.

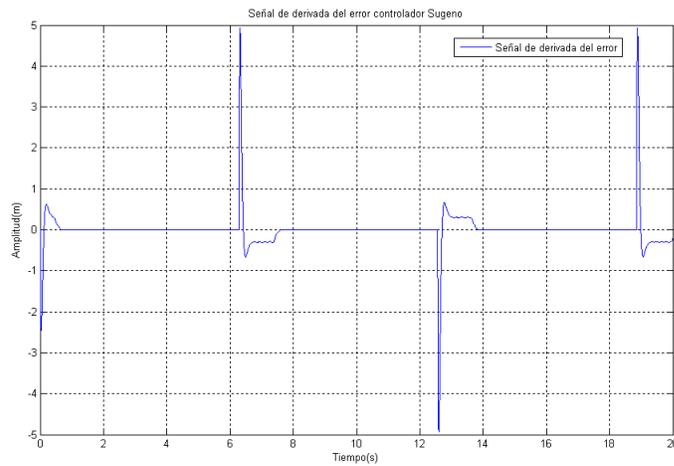


Figura 6.16: Derivada del error Sugeno

## 6.4. Comparación de los controladores implementados

Observando los resultados en simulación y experimentación tanto físicamente, como por medio del software MATLAB, a través de la computadora, se llega a la conclusión de que el controlador Mamdani tiene mejor respuesta a una entrada senoidal, la señal de error resulta mayor con el controlador Sugeno y la variación del error oscila menos con el Mamdani, en ambos controladores la señal de control parece muy similar, pero se puede notar que el controlador Mamdani genera una señal de control mas rápida y estable, no se aleja considerablemente de la referencia haciendo que el control sea satisfactorio.

La respuesta a la señal de referencia cuadrada también es mejor con el controlador Mamdani, alcanza más rápido los puntos máximos y mínimos aunque presenta ligeras oscilaciones al acercarse a ellos, el error con este controlador decrece más rápidamente que con el controlador Sugeno aunque la variación del error presenta ligeras oscilaciones en los puntos máximos y mínimos al alcanzar la referencia, el controlador Sugeno en ese aspecto es mas estable, con ambos se obtienen respuestas favorables, pero considerablemente mejor la respuesta con el controlador Mamdani, además de que las modificaciones que se debieron de hacer al aplicar físicamente los controladores fueron mínimas en el controlador Mamdani en comparación con las simulaciones, y no así para el controlador Sugeno que requirió de varias modificaciones en cuanto a reglas difusas usadas en simulación, como las usadas en la aplicación experimental.

## 6.5. Conclusiones

Los resultados en aplicación experimental muestran un buen desempeño en el sistema de control con ambos tipos de controladores difusos, tanto tipo Mamdani como tipo Takagi Sugeno, fue necesario hacer algunas modificaciones con respecto al diseño

de los controladores obtenidos en simulación por cuestiones físicas que no pueden ser tomadas en cuenta en una simulación por computadora, pero las modificaciones fueron mínimas y al final de este capítulo los resultados experimentales fueron favorables a los objetivos generales y específicos que se tenían previstos al inicio de este trabajo.

# Capítulo 7

## Conclusiones.

En esta tesis se ha implementado físicamente con resultados favorables el control de un sistema por medio de controladores que hacen uso de la lógica difusa. Se le encuentra gran importancia a este tipo de control por el método práctico con el que se puede diseñar porque existen condiciones bajo las cuales, las técnicas de control clásicas no pueden ser aplicadas y puede ser muy ventajoso basar la estrategia de diseño en un enfoque diferente. Algunas de tales condiciones pueden ser:

- No se cuenta con un modelo matemático del proceso a ser controlado, o éste, sólo puede ser obtenido con gran esfuerzo y costo,
- Cualesquiera de los parámetros del proceso o del punto de operación cambian de manera imprevisible.
- Sólo una parte de la información del proceso se encuentra disponible en forma cuantitativa, mientras que el resto de la información, es asequible únicamente en forma cualitativa.
- Los datos que se obtienen del proceso son incompletos y/o imprecisos.

Así los controladores lógico difusos es una tecnología actualmente muy bien situada que permite utilizar conocimiento de naturaleza heurística para controlar un sistema.

Tiene la propiedad de poder manejar imprecisión y vaguedad en la información que utiliza. Han tenido una gran popularidad ya que, aún sin aprobar del todo la rigurosa métrica que la teoría de control impone, han captado el interés de fabricantes de equipos electrónicos y de control al ser aplicados con éxito a un sinnúmero de aparatos. Actualmente existen y se continúan diseñando circuitos integrados y microprocesadores especializados para desarrollar este tipo de controladores.

En este trabajo los controladores tanto del tipo Mamdani como el Takagi Sugeno, se fueron definiendo desde el número de entradas y salidas, el universo de discurso, número y tipo de las funciones de membresía de cada una de las entradas y de la salida, así como su respectiva superficie de control.

Ambos controladores se conformaron con 25 reglas difusas expresadas de forma escrita y en sus respectivas tablas, reglas que necesitaron de varias modificaciones en el transcurso de las simulaciones hasta obtener los resultados deseados.

Los resultados obtenidos en simulación y en implementación experimental muestran un buen desempeño del control en ambos controladores, tanto el Mamdani como el Takagi Sugeno, con la diferencia que el controlador Mamdani presentó menos correcciones al momento de implementar físicamente en el sistema.

# Bibliografía

Carrera, Oscar Loya (n.d.). Fuzzy robot. Technical report. Universidad Autónoma de Chihuahua.

*Introducción al control inteligente* (2006). *Control avanzado de sistemas*.

Kuo, B.C. (1991). *Sistemas de control automático*. Prentice Hall.

MatLab (2006). Matworks matlab. *version 7.0*.

Mugica, Francisco (n.d.). Diseño sistemático de controladores difusos usando razonamiento inductivo. Technical report. Instituto de Investigaciones Eléctricas: Departamento de Energía Nuclear, Cuernavaca Morelos.

Muñoz, Marga Marcos (1997). Diseño de controladores adaptativos basados en lógica difusa y su integración en un sistema de tiempo real. Technical report. Universidad del país Vasco.

Ogata, Katsuhiko (1998). *Ingeniería de control moderna*. Prentice Hall.

Quispe, J. C. Chahuara (2005). Control neuro-difuso aplicado a una grúa torre. Tesis para obtener al título de ingeniero electrónico. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima Perú.

R., Samir Kouro and Rodrigo Musalem M. (2002). Control mediante lógica difusa. Technical report. Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile.

Solano, Santiago Sánchez (2001). Utilización de técnicas de inferencia basadas en lógica difusa para la caracterización de aceites de oliva. Technical report.

Valencia, C. A. Cardona (2004). Evaluación de algoritmos basados en lógica difusa aplicados al preproceso y detección de bordes en imágenes digitales. Tesis para optar al título de ingeniero electrónico. Universidad Nacional de Colombia.

Zavala, V. H. Galván, M. G. Díaz Montiel and N. J. Aranda López (2005). Control de un sistema subactuado usando visión artificial. Tesis que para obtener el título de ingeniero en electrónica y telecomunicaciones. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

Zilouchian, Ali and Mo Jamshidi (2001). *Intelligent Control Systems Using Soft Computing Methodologies*. CRC Press.

# Apéndice A

## Simbología.

A continuación en el Cuadro A se describe algunos de los símbolos utilizados en el desarrollo de este trabajo de investigación.

Simbología	Descripción
$\det A$	Determinante de una matriz $A$
$\mu$	Función de pertenencia
$\{.\}$	Conjunto de elementos
$[\cdot]$	Intervalo cerrado
$(\cdot)$	Intervalo abierto
$\mathcal{L}$	Operador transformada de Laplace
$I$	Matriz identidad
f. t.	Función de transferencia
c. i.	Condiciones iniciales
$A^{-1}$	Inversa de una matriz
$\in$	Pertenece a
$U$	Universo de discurso
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Espacio matricial real
$A$	Conjunto exacto
$\sim A$	Conjunto difuso

# Apéndice B

## Glosario.

- **Actuador:** Es aquél elemento de un sistema de control que convierte una señal en una acción física.
- **Conjunto difuso:** Es el valor lingüístico junto a una función de pertenencia.
- **Control de realimentación:** Es una operación que, en presencia de perturbaciones tiende a reducir la diferencia entre la salida y la entrada de referencia de un sistema y que lo hace sobre la base de esta diferencia.
- **Estocástico:** Se le denomina a aquel sistema que funciona, sobre todo, por el azar.
- **Etiquetas lingüísticas:** En el lenguaje natural serían lo equivalente a los adverbios. La interpretación en el modelo difuso de estos enunciados consiste en la composición de la función de pertenencia con una operación aritmética simple.
- **Función de Membresía, también llamado de Pertenencia:** Es el conjunto de todos los grados de membresía.
- **Fuzzy:** En inglés término fotográfico que alude a la condición de movido o borroso en el sentido de imágenes con los contornos mal definidos. En esta

tesis fuzzy se usa para la información afectados de imprecisión, vaguedad o incertidumbre.

- **Grado de membresía:** Valor asignado en el intervalo de  $[0,1]$  por la función de membresía a cada elemento del conjunto, del universo de discurso.
- **Grupo abeliano:** En matemáticas es también llamado grupo conmutativo. Es decir, grupos donde el orden de los factores no altera el producto.
- **PDI:** Control proporcional integral derivativo: Es un sistema de control que, mediante un actuador, es capaz de mantener una variable o proceso en un punto deseado dentro del rango de medición del sensor que la mide. Es uno de los métodos de control más frecuentes y precisos dentro de la regulación automática.
- **Perturbaciones:** Una perturbación es una señal que tiende a afectar adversamente el valor de la salida de un sistema. Si la perturbación se genera dentro del sistema, se le denomina *interna*, mientras que una perturbación externa se genera fuera del sistema y constituye una entrada.
- **Planta:** Una planta es un equipo, quizá un simple juego de piezas de una maquina funcionando juntas, cuyo objetivo es realizar una operación determinada. En esta tesis se ha de designar *planta* a cualquier objeto físico que ha de ser controlado.
- **Proceso:** Se denomina proceso en esta tesis a cualquier operación que se vaya a controlar.
- **Proposición difusa compuesta:** Es aquella que se obtiene mediante la agrupación de dos o mas proposiciones difusas simples. Por ejemplo: “La velocidad es *normal*” y “el objeto está *cerca*”.

- **Proposición difusa simple:** Es aquella que asigna un valor a una variable difusa, por ejemplo: “La velocidad es *normal*”.
- **Servomecanismo:** Es un sistema de control realimentado en el cual la salida es alguna posición, velocidad o aceleración mecánica.
- **Sistemas de control realimentado:** Es aquel que tiende a mantener una relación preestablecida entre la salida y la entrada de referencia, comparando ambas y utilizando la diferencia como parámetro de control.
- **SLD:** Sistema Lógico Difuso, En general es un mapeo no-lineal de un vector no-lineal de un vector de datos de entrada con una salida escalar, es decir mapea números con números.
- **T-normas:** Dentro de la teoría de conjuntos difusos son las llamadas normas triangulares que verifican algunas propiedades de los conjuntos difusos.
- **Tupla:** En matemáticas una tupla es una secuencia ordenada de objetos, esto es una lista con un número limitado de objetos. Las tuplas se emplean para describir objetos matemáticos que tienen estructura, es decir que son capaces de ser descompuestos en un cierto número de componentes.
- **Universo de discurso:** Rango de valores que pueden tomar los elementos que poseen la propiedad expresada por la variable lingüística.
- **Valor lingüístico:** Son las diferentes clasificaciones que efectuamos sobre la variable lingüística, en el caso de la altura podrían ser valores lingüísticos: alto, mediano y bajo.
- **Variable lingüística:** Es aquella noción o concepto que vamos a calificar de forma difusa. Por ejemplo: altura, edad, error, etc.