Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Operadores de desplazamiento y operador multiplicación en espacios de Hardy sobre árboles

Tesis que para obtener el grado de

Maestro en Matemáticas

presenta

Adán Ángeles Romero

bajo la dirección de

Dr. Rubén A. Martínez Avendaño

Pachuca, Hidalgo. Julio de 2019.

Resumen

En este trabajo damos la definición del espacio de Hardy generalizado discreto y el espacio de Hardy generalizado discreto pequeño. Tales definiciones se hacen sobre gráficas infinitas con raíz, conexas y localmente finitas. Mencionamos propiedades de estos espacios, tales como separabilidad. Demostramos que no pueden ser espacios de Hilbert y damos una pequeña motivación para caracterizar el espacio dual del espacio de Hardy generalizado discreto pequeño.

En estos espacios de Hardy discretos estudiamos a tres operadores actuando en ellos: el operdor de desplazamiento hacia adelante, el operador de desplazamiento hacia atrás y el operador multiplicación. Para estos tres operadores estudiamos conceptos tales como acotabilidad, isometría, compacidad, espectro e hiperciclicidad.

Abstract

In this thesis, we give the definition of the discrete generalized Hardy space and of the discrete generalized little Hardy space. We define these spaces on infinite graphs with root, and which are connected and locally finite. We mention properties of these spaces, such as separability. We show that they cannot be Hilbert spaces and we give a small motivation to characterize the dual space of the discrete small generalized Hardy space.

In these discrete Hardy spaces we study three operators acting on them: the forward shift operator, the backward shift operator and the multiplication operator. For these three operators we study concepts such as boundedness, compactness, whether they are isometries, their spectrum and whether they are hypercyclic.

Esta tesis está dedicada a ustedes que forman más que un conjunto denso en mi vida.
A mi mamá, mi papá, mi hermano Daniel y Flor.

Agradecimientos

Agradezco primeramente a mi mamá Isabel Romero Domínguez, mi papá Ignacio Ángeles Martínez y a Dios, quienes me enseñaron a trabajar desde pequeño, porque gracias a sus enseñanzas, sus valores inculcados y su amor que me han brindado, hoy este trabajo es uno de los pequeños frutos que se cosechan en la familia. A mi mamá que es mi razón de vivir y a mi papá que a pesar de su ausencia física, es incríble como me sigue ayudando en todos los aspectos de mi vida. Gracias padres por ser un ejemplo para mi, gracias por todo. Gracias Dios por la vida.

Agradezco a mis hermanos, en especial a mi hermano Daniel Ángeles Romero quien me ha brindado todo el apoyo, no solo para la realización de este trabajo sino por el apoyo en toda la vida que llevamos juntos.

Agradezco a Floricel Jiménez Mendoza, por motivarme e inspirarme en la realización de este trabajo, gracias por el apoyo que he recibido en todos los aspectos. Gracias por creer en mi, gracias por el amor brindado.

Estoy inmensamente agradecido con mi asesor de tesis, el Dr. Rubén A. Martínez Avendaño quien ha tenido una paciencia infinita hacia mi, gracias por su tiempo, gracias por todos los conocimientos que me pudo transmitir, gracias por todo el apoyo brindado para que este trabajo pudiera realizarse y concluir de la mejor manera. Gracias por creer en mi.

Agradezco a mis tíos Felix Herminio y Eladio Ortíz quienes me han brindado todo su apoyo desde la licenciatura, sin duda son pieza clave para que este trabajo exista.

Agradezco a mis compañeritos de la maestría por el tiempo que pasamos juntos en la escuela, por los conocimientos compartidos y ser parte del camino en la realización de este trabajo. Agradezco a Betzabé por regañarme y motivarme a tener todos los requisitos de titulación, muchas gracias. Agradezco también a mi amigaza del alma Annel Ayala Velazco por las pláticas, consejos y motivación brindada para la realización de este trabajo y para la vida.

Agradezco a aquellos alumnos que siempre me preguntaban sobre mi trabajo de tesis, en particular mis alumnos de matemáticas aplicadas de quienes he recibido más que aprecio desde que los conozco.

Agradezco a mi amiga Selene Hernández Rufino por todos los ánimos y buenos deseos que me ha brindado.

Agradezco a mis sinodales, los doctores Federico Menendez Conde y Jorge Viveros por las observaciones hechas a este trabajo con el fin de mejorarlo.

Agradezco al Dr. Benjamín A. Itzá Ortiz por el trabajo que realiza como coordinador de la maestría y apoyo brindado a los alumnos. En lo particular gracias por todo el apoyo con los tramites de titulación.

Agradezco al Dr. Fernando Barrera Mora, por los consejos, motivación y apoyo que me ha brindado en la licenciatura y maestría.

Gracias a todas aquellas personas que no menciono aquí pero que contribuyeron en la realización y mejora de este trabajo.

Por último quiero agradecer el apoyo de la beca conacyt, ya que gracias a este apoyo pude concluir un escalón más en el ámbito profesional.

Índice general

Introducción

Una de las ramas modernas del análisis funcional que ha surgido a partir del trabajo de muchos autores, se centra en el estudio de transformaciones lineales en espacios de Banach [37]. A estas transformaciones se les llama operadores. Este estudio, entre otras cosas, pretende conocer propiedades generales de operadores en espacios de Banach concretos. Con la finalidad de entender a los operadores, se desea determinar propiedades que se pueden heredar al operador dada la geometría del espacio de Banach en donde actúa y viceversa.

El espacio de Hardy generalizado discreto es un ejemplo de espacios de Banach. Estos espacios de Hardy discretos son espacios de funciones definidas en gráficas. En este trabajo estudiaremos a operadores de desplazamiento y al operador multiplicación actuando en estos espacios. Daremos algunas características del espacio y de los operadores tales como acotabilidad, isometría, espectro e hiperciclicidad.

Se dice que un operador definido en un espacio vectorial topológico es *hipercíclico* si existe un vector en el espacio tal que su órbita bajo el operador es densa en el espacio. El estudio de la dinámica de operadores lineales actuando en espacios de dimensión infinita ya era estudiado en el año 1929 con el artículo [8] donde Birkhoff demuestra implícitamente que para $a \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$ el operador de traslación actuando en el espacio de funciones enteras de variable compleja $T_a : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ definido por $T_a f(z){=}f(z{+}a)$, es hipercíclico. Más tarde, en 1952, G.R. MacLane [28] mostró propiedades análogas con el operador de diferenciación en el mismo espacio $H(\mathbb{C})$. Un ejemplo de operador hipercíclico en un espacio de Banach fue dado por S. Rolewicz [35] en 1969, en donde demuestra la existencia de vectores hipercíclicos para el operador λB, en donde B es el operador de desplazamiento hacia atrás en ℓ^p y $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > 1$. Por otro lado, G. Godefroy y J.H. Shapiro [18] también estudian propiedades y generalizan resultados para los operadores ya mencionados. El estudio de hiperciclicidad de operadores en espacios de Banach ha sido estudiada por varios autores; entre ellos destacan: Kitai [24], Beauzamy [6], Gethner y Shapiro [34]. Para más información a cerca de caracterizaciones y resultados de hiperciclicidad puede consultar [20, 21].

Existe una gran variedad de espacios de Banach, por ejemplo la teoria de espacios de funciones definidas en el disco unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ es un tema muy bien desarrollado. En las referencias [16, 29, 33, 39] se proporciona un sólido estudio de varios espacios de funciones en el disco unitario, y en [10, 17, 22] se hacen estudios sobre más espacios de Banach como los espacios de Hardy.

También se le ha dado interés al estudio de espacios de funciones en conjuntos discretos tales como gráficas y particularmente en árboles, consultar, por ejemplo, los artículos [2, 12]. En los artículos [7, 25] se estudian operadores en espacios de Hardy sobre árboles. El operador de composición y el operador de multiplicación son de los más estudiados [1, 3, 5, 12, 13]. De hecho, según la bibliografía el interés del estudio de los operadores sobre los árboles infinitos está motivado principalmente por la investigación en el análisis armónico y el comportamiento del operador de Laplace sobre estructuras discretas. El artículo [29] menciona que una de las razones de estudiar árboles es que en particular los árboles infinitos pueden verse como las discretizaciones naturales del disco hiperbólico: más información sobre estos temas se puede encontrar en los artículos [3, 4, 11]. Cabe mencionar que el trabajo [32] estudia la hiperciclicidad para los operadores de composición definidos en espacios de funciones con dominio árboles no dirigidos.

Por otra parte Jablonski, Jung y Stochel, en [19], estudian operadores de desplazamiento sobre espacios de Hilbert de funciones definidas en árboles dirigidos infinitos; en su trabajo estudian varias propiedades teóricas de operadores, tales como propiedades espectrales. En la referencia [29], Martínez-Avendaño estudia la hiperciclicidad del operador de desplazamiento hacia atrás y el operador de desplazamiento hacia adelante, en espacios L^p de árboles dirigidos con peso.

En [31] se define lo que es el espacio de Hardy generalizado discreto y el de Hardy generalizado discreto pequeño para árboles regulares con raíz; se estudian sus diferentes características y se dan algunas propiedades del operador multiplicación actuando en estos espacios. Una pregunta interesante es determinar propiedades de otros operadores en estos espacios, la cual es una motivación de nuestra tesis. En el presente trabajo se estudiarán algunas propiedades de estos espacios de Hardy pero ahora sobre gráficas infinitas con raíz, conexas y localmente finitas. Trataremos de obtener características para operadores de desplazamiento actuando en estos espacios, similares a las que se obtienen en [29] como acotamiento, norma, espectro e hiperciclicidad.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera. El capítulo 1 lo usamos para preliminares, damos definiciones, notación y resultados básicos que usaremos a lo largo de la tesis.

En el capítulo 2 introducimos la definición del espacio de Hardy generalizado discreto y del espacio de Hardy generalizado discreto pequeño, así como en [31] pero ahora la definición hecha en general para gráficas infinitas con raíz, conexas y localmente finitas. Damos características de este espacio y mencionamos resultados del operador multiplicación actuando en estos espacios, tales como acotamiento, isometría, entre otros. En la parte final de este capítulo, presentamos resultados propios de este trabajo de tesis y que ya no son mencionados en [31] (el cual es el artículo base para este trabajo). Demostramos el teorema 2.24 el cual nos dice que el espacio de Hardy generalizado discreto no puede ser un espacio de Hilbert; esta era una pregunta abierta planteada en [31]. Mostramos el teorema 2.25 que habla sobre la hiperciclicidad del operador multiplicación y finalmente damos con el ejemplo 2.29 una motivación para estudiar al espacio dual del espacio de Hardy generalizado discreto pequeño.

En el capítulo 3 introducimos la definición del operador de desplazamiento hacia adelante S en el espacio de Hardy generalizado discreto. En los teoremas 3.2 y 3.3 encontramos condiciones necesarias y suficientes para que S sea acotado en el espacio de Hardy generalizado discreto y en el espacio de Hardy generalizado discreto pequeño. En el ejemplo 3.4 describimos a un árbol donde el operador S no es acotado y en el ejemplo 3.5 describimos a un árbol donde el operador S sí es acotado, en los espacios de Hardy discretos. Damos en los teoremas 3.6 y 3.7 ejemplos de árboles donde este operador resulta ser una isometría. Por último, en el teorema 3.8 demostramos que este operador no puede ser hipercíclico en el espacio de Hardy generalizado discreto pequeño.

En el capítulo 4 damos la definición del operador de desplazamiento hacia atrás B en el espacio de Hardy generalizado discreto. En los teoremas 4.2 y 4.3 encontramos condiciones necesarias y suficientes para que B sea acotado en el espacio de Hardy generalizado discreto y en el espacio de Hardy generalizado discreto pequeño. En el ejemplo 4.4 describimos a un árbol donde el operador B no es acotado en estos espacios de Hardy discretos. En el teorema 4.7 mencionamos condiciones necesarias y suficientes para que el operador B sea hipercíclico en el espacio de Hardy generalizado discreto pequeño. Finalmente determinamos el espectro del operador B en el espacio de Hardy generalizado discreto, para distintas clases de árboles, entre los que destacan los árboles regulares.

Incluimos un apéndice A, donde damos la definición y algunas características del espacio de Hardy clásico, el cual nos servirá para hacer una pequeña comparación con los espacios definidos en el capítulo dos.

CAPÍTULO 1

Preliminares y notación

Este capítulo está dedicado a introducir algunos conceptos elementales, definiciones, notación y algunos resultados que usaremos en el cuerpo de la tesis.

En este trabajo denotamos como $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ y $\mathbb{C}$ a los conjuntos de los números naturales, los enteros no negativos y los números complejos, respectivamente. Al disco unitario $\{x \in \mathbb{C} : |x| < 1\}$ lo denotamos por $\mathbb{D}$. Los espacios vectoriales con los que trabajaremos se toman todos sobre los números complejos.

1.1. Gráficas

Entenderemos por una *gráfica* a una pareja $G = (V, E)$ de conjuntos donde $V \neq \emptyset$ y $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$. A los elementos de V les llamaremos vértices y a los de E aristas. Decimos que dos vértices x, y son vecinos, denotado $x \sim y$, si existe una arista $\{x, y\} \in E$. Una gráfica *regular* es una gráfica en la cual todos sus vértices tienen el mismo número de vecinos. Si todo vértice tiene k vecinos diremos que la gráfica es *k-regular*. Un *camino* es una sucesión finita $v_0, v_1, \cdots, v_n$ o infinita $v_0, v_1, v_2, ...$ de vértices distintos con $v_k \sim v_{k+1}$ para cada k. Cuando un camino sea infinito le llamaremos *fin*. La longitud de un camino es el número de aristas que hay en el. Un *ciclo* es un camino con un número finito de vértices en donde el primer y último vértice son iguales.

Una gráfica es llamada *conexa* si hay un camino entre cualquiera dos de sus vértices. Una gráfica se llama localmente finita si todo vértice tiene un número finito de vecinos. La *distancia* entre cualesquiera dos de los vértices de una gráfica conexa es el mínimo de las longitudes de los caminos que los conectan.

Una *gráfica con raíz* es un gráfica donde se selecciona un vértice cualquiera el cual se fija durante el trabajo, a este vértice se le llama raíz. En una gráfica conexa con raíz, a la distancia entre el vertice v y la raíz la denotaremos por $|v|$, y denotaremos por $\gamma(n)$ el número de vértices v tales que $|v| = n$.

Una gráfica conexa, localmente finita y sin ciclos es llamada un *árbol*. En un árbol G, el *padre* de un vértice v distinto de la raíz, denotado por $\operatorname{par}(v)$, es el único vértice $w \in G$ tal que $w \sim v$ y $|w| = |v| - 1$. En un árbol, para un entero $n \geq 2$ definimos inductivamente par^n como $\operatorname{par}^n(v) := \operatorname{par}(\operatorname{par}^{n-1}(v))$, donde $\operatorname{par}^{n-1}(v)$ es distinto de la raíz. En este caso diremos que v tiene un n-ancestro y denotamos al conjunto de todos los vértices que tienen n-ancestros como V^n. Si $w = \operatorname{par}(v)$ decimos que v es un *hijo* de w y al conjunto de todos los hijos de w le denotamos por $\operatorname{Chi}(w)$.

Para $n \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto

$$\operatorname{Chi}^n(u) := \{v \in G : \operatorname{par}^n(v) = u\}.$$

Sea T un árbol con raíz, $w \in T$ y $r \in \mathbb{N}$. Si $v \in \operatorname{Chi}^r(w)$ decimos que v es un r-hijo de w, denotamos por $\gamma(r, w)$ al número de r-hijos de w (Observe que $\gamma(n, w) = \gamma(n)$), y para $n \in \mathbb{N}_0$ definimos $K(r, n) := \max\{\gamma(r, w) : |w| = n\}$.

En este trabajo, cuando hagamos referencia a que G es una gráfica, por convención G denotará al conjunto de vértices. Así mismo si decimos que T es un árbol nos estaremos refiriendo a que T es el conjunto de vértices. Entonces cuando hagamos referencia a funciones definidas en una gráfica se entiende que estas están definidas en los vértices.

En una gráfica conexa G con raíz, si A es un conjunto de vértices de la gráfica, denotaremos a la función indicadora de A como χ_A la cual es definida como

$$\chi_A(u) := \begin{cases} 1, & \text{si } u \in A, \\ 0, & \text{si } u \notin A. \end{cases}$$

Si $B = \{u \in A : |u| = n\}$ entonces a la función indicadora χ_B simplemente la denotaremos como χ_n.

1.2. Algunos conceptos de análisis funcional

Las siguientes definiciones son muy conocidas en la literatura, ver por ejemplo [26].

Definición 1.1. Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Decimos que T es acotado si existe una constante $c > 0$ tal que para todo $x \in X$ se tiene

$$\|Tx\| \leq c\|x\|,$$

donde por simplicidad utilizamos el mismo símbolo $\|\cdot\|$ para denotar a la norma en X y en Y.

Se puede demostrar que T es un operador lineal acotado si y solo si T es continuo [14]. Más aún si X y Y son espacios vectoriales normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal acotado se prueba que

$$\|T\| := \text{ínf}\{c > 0 : \|Tx\| \leq c\|x\| \text{ para } x \in X\}$$

es una norma en el espacio de todos los operadores acotados de X en Y, denotado por $B(X, Y)$ [14, 23] y además

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}\\ &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}\\ &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\}.\end{aligned}$$

Definición 1.2. Sea X un espacio lineal normado y A un operador lineal acotado en X. El espectro puntual $\sigma_p(A)$ de A consiste de todos los números $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $A - \lambda I$ no es inyectivo. Entonces $\lambda \in \sigma_p(A)$ si y solo si existe algún vector no cero $x \in X$ tal que $Ax = \lambda x$. El espectro puntual aproximado $\sigma_{ap}(A)$ de A consiste de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales no existe ninguna constante $c > 0$ tal que $\|(A - \lambda I)x\| \geq c\|x\|$ para todo $x \in X$. El espectro $\sigma(A)$ de A es el conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $A - \lambda I$ no es invertible.

Directamente de la definición anterior se puede observar que $\sigma_p(A) \subset \sigma_{ap}(A) \subset \sigma(A)$.

Definición 1.3. Sea X un espacio lineal normado y A un operador lineal acotado en X. Se define el radio espectral $r(A)$ de A como $r(A) := \sup\{|\alpha| : \alpha \in \sigma(A)\}$.

Los siguientes dos resultados nos dan una definición equivalente para el espectro puntual aproximado así como una manera alternativa de calcular el radio espectral.

Proposición 1.4. [14, Proposición 6.4] *Sea X es un espacio lineal normado y A es un operador lineal acotado en X. Entonces $\lambda \in \sigma_{ap}(A)$ si y solo si existe una sucesión $\{x_n\}$ en X tal que $\|x_n\| = 1$ para cada n y $\|Ax_n - \lambda x_n\| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.*

El siguiente teorema se utilizará para describir a los ejemplos mencionados en el capítulo cuatro.

Proposición 1.5. [14, Proposición 3.8] *Sea X es un espacio de Banach y A es un operador lineal acotado en X. Entonces*

$$r(A) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Los cuatro teoremas que enunciaremos enseguida dan características del espectro y características de operadores compactos. Estos teoremas se utilizarán en el capítulo dos para la demostración de los teoremas 2.19 y 2.20.

Teorema 1.6. [14, Teorema 3.6] *Sea X un espacio de Banach, si T es un operador lineal acotado en X entonces el espectro $\sigma(T)$ es un subconjunto compacto y no vacío de $\mathbb{C}$.*

Teorema 1.7. [27, Teorema 2.5] *Sea X un espacio de Banach, si T es un operador lineal acotado en X entonces el espectro puntual aproximado $\sigma_{ap}(T)$ es un subconjunto cerrado y no vacío de $\mathbb{C}$ que incluye a la frontera de $\sigma(T)$.*

Teorema 1.8. [37, Teorema 4.25] *Sea X un espacio de Banach y T un operador lineal acotado en X, si T es compacto entonces el espectro $\sigma(T)$ es numerable con cero el único punto límite.*

Teorema 1.9. [37, Teorema 4.18] *Sean X y Y espacios de Banach.*

a) Si $T : X \longrightarrow Y$ es un operador lineal acotado y el rango de T es un espacio de dimensión finita entonces T es compacto.

b) El conjunto de los operadores compactos forman un subespacio cerrado en el espacio de los operadores lineales acotados de X en Y.

c) Si $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal acotado, si T es compacto y $\lambda \neq 0$ entonces $\ker(T - \lambda I)$ *es de dimensión finita.*

El siguiente teorema lo utilizamos en el teorema 2.22.

Teorema 1.10. [14, Teorema 4.1] *Sea $K(X)$ el conjunto de todos los operadores compactos en X, si A es un operador acotado en X, se tiene que*

$$\|A\|_e := \operatorname{dist}(A, K(X)) = \inf\{\|A - L\| : L \in K(X)\}$$

es una norma en el espacio cociente $B(X,X)/K(X)$.

La siguiente desigualdad es un caso particular de la desigualdad de Jensen discreta y la mencionamos pues la estaremos utilizando en distintas pruebas que serán parte de este trabajo. Para la demostración véase por ejemplo [36, Teorema 3.3].

Teorema 1.11 (Desigualdad de Jensen discreta). *Sean $p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y $x_k \geq 0$ $(k = 1, \cdots, n)$. Entonces,*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n}\right)^p \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k)^p}{n}.$$

1.3. Hiperciclicidad

Dentro del análisis funcional un concepto que se ha estudiado es el que se da en la siguiente definición.

Definición 1.12. Sea X un espacio de Banach y $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal acotado. Decimos que T es *hipercíclico* si existe un vector $x \in X$ tal que el conjunto

$$Orb(T, x) := \{T^n x : n \in \mathbb{N}_0\}$$

es denso en X. El vector x (distinto de cero necesariamente) es llamado un vector hipercíclico para T.

El término *hipercíclico* se le atribuye a Beauzamy [21]. Los operadores hipercíclicos están ligados al problema de existencia de subconjuntos invariantes: dado X es un espacio de Banach y $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal, ¿es posible encontrar un subconjunto cerrado no trivial F, es decir un subconjunto distinto de $\{0\}$ y distinto de X tal que $T(F) \subseteq F$? De hecho, no es dificil demostrar que un operador $T : X \longrightarrow X$ no tiene subconjuntos invariantes cerrados no triviales si y solo si todo vector distinto de cero es hipercíclico [**?**].

Teorema 1.13. *Sea X un espacio de Banach y $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal. Entonces T no tiene subconjuntos invariantes cerrados no triviales si y solo si todo vector distinto de cero es hipercíclico.*

Demostración. Suponga primero que T no tiene subconjuntos invariantes cerrados no triviales. Sea $x \in X$ con $x \neq 0$, observe que el conjunto $\overline{Orb(T, x)}$ es invariante bajo T ya que si $y \in T(\overline{Orb(T, x)})$ entonces $y = T(z)$ para algún $z \in \overline{Orb(T, x)}$ por lo que existe una sucesión $z_n \in Orb_T(x)$ tal que $z_n \longrightarrow z$, por ser T continua se cumple que $T(z_n) \longrightarrow T(z)$, observe que en particular $T(z_n) \in Orb(T, x)$ y por tanto $y = T(z) \in \overline{Orb(T, x)}$. Tenemos que $\overline{Orb(T, x)}$ es un subconjunto cerrado e invariante, entonces tiene que ser denso pues de lo contrario tendríamos una contradicción a nuestras hipótesis. Por tanto T es hipercíclico.

Por otra parte si todo vector distinto de cero es hipercíclico para T, entonces T no tiene subconjuntos invariantes cerrados no triviales pues si existiera $F \subseteq X$ que cumpliera con tales características, al ser F no trivial podemos escoger $x \in F$ distinto de cero, al ser F invariante sabemos que $Orb(T, x) \subseteq F$. Por hipótesis x es hipercíclico y al ser F cerrado entonces se tendría $X = \overline{Orb(T, x)} \subseteq F$, luego $X = F$ lo cual es una contradicción al suponer F no trivial. Entonces T no tiene subconjuntos invariantes cerrados no triviales y el teorema queda demostrado. $\square$

Por otro lado observe que si el operador $T : X \longrightarrow X$ es hipercíclico entonces el espacio X es necesariamente separable. Observe también que si x es un vector hipercíclico para T, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, el vector $T^n x$ también será un vector hipercíclico y por tanto hay un conjunto denso de vectores hipercíclicos.

No es necesario encontrar explícitamente un vector x que satisfaga la definición para mostrar que el operador $T : X \longrightarrow X$ es hipercíclico. El siguiente teorema nos da una condición suficiente para la hiperciclicidad. Este teorema lo usaremos en el capítulo cuatro para mostrar que el operador de desplazamiento hacia atrás es hipercíclico.

Teorema 1.14 (**Criterio de hiperciclicidad**). *Sea X un espacio de Banach separable y $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal acotado. Si existen un subconjunto denso $X_0 \subset X$, una sucesión creciente de números naturales $\{n_k\}$ y una sucesión de funciones $A_{n_k} : X_0 \longrightarrow X$ tal que*

1. $T^{n_k} x \longrightarrow 0$ *para todo* $x \in X_0$,
2. $A_{n_k} x \longrightarrow 0$, *para todo* $x \in X_0$, *y*
3. $T^{n_k} A_{n_k} x \longrightarrow x$ *para todo* $x \in X_0$,

entonces T *es hipercíclico.*

La prueba de este teorema puede encontrarse en [21, Teorema 3.12].

La siguiente proposición nos menciona una condición necesaria para que un operador sea hipercíclico, este resultado lo utilizaremos en el capítulo dos para mostrar que el operador multiplicación no es hipercíclico. Es importante mencionar que en la siguiente proposición X^* es el espacio de los funcionales lineales acotados en X y $T^* : X^* \longrightarrow X^*$.

Proposición 1.15. [21, Proposición 5.1] *Sea T un operador hipercíclico sobre un espacio de Banach X. Entonces T^* no tiene eigenvalores, es decir $\sigma_p(T^*) = \emptyset$.*

CAPÍTULO 2

Espacio de Hardy generalizado discreto

En [31], P. Muthukumar y S. Ponnusamy establecen las siguientes definiciones y resultados para árboles regulares con raíz. En este capítulo mostraremos que las definiciones y resultados en [31] se pueden obtener de manera similar con la definición hecha para cualquier gráfica infinita con raíz, que sea conexa y localmente finita y no solamente para árboles regulares con raíz.
En este capítulo se define el espacio de Hardy generalizado discreto y el espacio de Hardy generalizado discreto pequeño, se mencionan propiedades generales de estos espacios y se dan propiedades del operador multiplicación actuando en estos espacios.

Definición 2.1. Sea G una gráfica infinita, conexa y localmente finita con raíz. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y $p \in (0, \infty)$ defina

$$M_p(n, f) := \left(\frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |f(v)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $p \in (0, \infty)$ el espacio de Hardy generalizado discreto, denotado por $\mathbb{H}^p(G)$, se define por

$$\mathbb{H}^p(G) := \{f : G \longrightarrow \mathbb{C} : \sup_{n \in \mathbb{N}_0} M_p(n, f) < \infty\}.$$

El espacio de Hardy generalizado discreto pequeño, denotado por $\mathbb{H}^p_0(G)$, se define por

$$\mathbb{H}^p_0(G) := \{f : G \longrightarrow \mathbb{C} : \lim_{n \longrightarrow \infty} M_p(n, f) = 0\}.$$

Es fácil convencerse que $\mathbb{H}^p_0(G)$ es un subconjunto de $\mathbb{H}^p(G)$. En ambos espacios $\mathbb{H}^p(G)$ y $\mathbb{H}^p_0(G)$ definimos

$$\|f\|_p := \sup_{n \in \mathbb{N}_0} M_p(n, f).$$

Observe que en la definición A.1 del espacio de Hardy generalizado la cual mostramos en el apéndice A, cuando calculamos $M_p(r, f)$ estamos obteniendo el "promedio" de los valores de la función f sobre círculos de radio r. En la definición 2.1 del espacio de Hardy generalizado discreto hecha en el parrafo anterior se está haciendo algo similar pues al calcular $M_p(n, f)$ lo que se está haciendo es un promedio de los valores de la función f sobre todos los vértices que están a distancia n de la raíz.

2.1. Propiedades topológicas de $\mathbb{H}^p(G)$ y $\mathbb{H}^p_0(G)$

Es importante volver a recalcar que los resultados descritos a continuación están hechos en [31] para árboles regulares. Nosotros los estamos generalizando para gráficas arbitrarias con raíz, infinitas, conexas y localmente finitas. En el resto de este capítulo cuando hagamos referencia al espacio $\mathbb{H}^p(G)$ o al espacio $\mathbb{H}^p_0(G)$ lo consideramos sobre G una gráfica arbitraria con raíz, infinita, conexa y localmente finita, a menos de que se diga lo contrario. A continuación describiremos la estructura de estos espacios y mencionamos características que usaremos más adelante.

Teorema 2.2. *Para $1 \leq p < \infty$, la función $\|\cdot\|_p$ induce una estructura de espacio de Banach en $\mathbb{H}^p(G)$.*

Demostración. Primero demostraremos que $\|\cdot\|_p$ es una norma.
(i) Si $f \equiv 0$, entonces $M_p(n, f) = 0$ para toda n y por tanto $\|f\|_p = 0$. Por otra parte, si $\|f\|_p = 0$ entonces $M_p(n, f) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ lo cual implica que $\sum_{|v|=n} |f(v)|^p = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y entonces $f \equiv 0$.
(ii) Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\begin{aligned} M_p(n, \alpha f) &= \left(\frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |\alpha f(v)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |\alpha|^p |f(v)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\alpha| \left(\frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |f(v)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\alpha| M_p(n, f) \end{aligned}$$

y esto implica que $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p$.
(iii) Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y $f, g \in \mathbb{H}^p(G)$, dado que $p \geq 1$ y utilizando la desigualdad de Minkowsky tenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}
M_p(n, f+g) &= \left(\frac{1}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{|v|=n} |f(v)+g(v)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\frac{1}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\sum_{|v|=n} |f(v)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|v|=n} |g(v)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\
&= \left(\frac{1}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{|v|=n} |f(v)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{|v|=n} |g(v)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= M_p(n, f) + M_p(n, g),
\end{aligned}$$

por tanto

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Los tres puntos anteriores muestran que $\|\cdot\|_p$ es una norma, más aun, muestran que $(\mathbb{H}^p(G), \|\cdot\|_p)$ es un espacio vectorial normado.

Ahora probaremos que $\mathbb{H}^p(G)$ es completo. Considere $\{f_k\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{H}^p(G)$, sea $v \in G$, sea $\epsilon > 0$ y denotemos $m = |v|$. Sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $M_p(n, f_k - f_l) \leq \|f_k - f_l\|_p < \epsilon(\gamma(m))^{-\frac{1}{p}}$ para todo $k, l \geq N$ y $n \in \mathbb{N}_0$. De la definición de $M_p(n, f_k - f_l)$ tenemos que

$$\frac{|(f_k - f_l)(v)|}{(\gamma(m))^{\frac{1}{p}}} \leq M_p(m, f_k - f_l)$$

para todo $k, l \geq N$, de donde se sigue $|(f_k - f_l)(v)| < \epsilon$, entonces $\{f_k(v)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$, luego como $\mathbb{C}$ es completo entonces $\{f_k\}$ converge puntualmente a una función f.

Ahora, sabemos que para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $M_p(n, f_k - f_l) < \epsilon$ para todo $k, l \geq N$ y $n \in \mathbb{N}_0$.

Como $M_p(n, f_k - f_l)$ es una suma finita y la función $|\cdot|$ es continua en $\mathbb{C}$, tomando el siguiente límite cuando $l \longrightarrow \infty$, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{l\longrightarrow\infty} M_p(n, f_k - f_l) &= \lim_{l\longrightarrow\infty}\left(\frac{1}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{|v|=n}|f_k(v)+f_l(v)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \left(\frac{1}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{|v|=n}\lim_{l\longrightarrow\infty}|f_k(v)+f_l(v)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \left(\frac{1}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{|v|=n}|f_k(v)+f(v)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= M_p(n, f_k - f),
\end{aligned}
$$

por tanto $M_p(n, f_k - f) \leq \epsilon$ para todo $k \geq N$ y $n \in \mathbb{N}_0$. Luego, por definición de supremo tenemos que $\|f_k - f\|_p \leq \epsilon$ para todo $k \geq N$, esto implica que $f_k - f \in \mathbb{H}^p(G)$ para todo $k \geq N$ y como $f_k \in \mathbb{H}^p(G)$ entonces $f \in \mathbb{H}^p(G)$ y además $f_k \longrightarrow f$. Esto completa la prueba del teorema. $\square$

Proposición 2.3. *Para $0 < p < 1$, $\mathbb{H}^p(G)$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. Sean f, g dos funciones en $\mathbb{H}^p(G)$, defina a la función $d : \mathbb{H}^p(G) \times \mathbb{H}^p(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$d(f, g) := \|f - g\|_p^p,$$

probaremos que d es una métrica.

Sean $f, g, h \in \mathbb{H}^p(G)$, se verifica directamente de la definición que $d(f, f) = 0$ y que $d(f, g) = d(g, f)$.

Para probar la desigualdad del triángulo primero mostraremos la siguiente observación:

La función $F : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $F(x) := 1 + x^p - (1 + x)^p$ tiene como derivada $F'(x) = px^{p-1} - p(1 + x)^{p-1}$, observe que como $0 < p < 1$ entonces para todo $x > 0$ se tiene $(1 + x)^{1-p} > x^{1-p}$ lo cual implica que $x^{p-1} > (1 + x)^{p-1}$ y por tanto $F'(x) > 0$, es decir F es creciente en $(0, \infty)$. Como además tenemos $F(0) = 0$, concluimos que $F(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$, es decir $1 + x^p \geq (1 + x)^p$ para todo $x \geq 0$.

Por otro lado si $a, b \geq 0$ probaremos que $(a + b)^p \leq a^p + b^p$ para $0 < p < 1$. Si $a = b = 0$ la desigualdad es cierta trivialmente. Si alguno de a o b es distinto de cero, supongamos sin pérdida de generalidad que $b \neq 0$. Tenemos que $(a + b)^p \leq a^p + b^p$ si y solo si $\frac{(a+b)^p}{b^p} \leq \frac{a^p+b^p}{b^p}$ si y solo si $(1 + \frac{a}{b})^p \leq 1 + (\frac{a}{b})^p$ si y solo si $1 + x^p \geq (1 + x)^p$

para todo $x \geq 0$ lo cual se acaba de demostrar en el párrafo anterior. Por tanto concluimos que $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ para todo $a, b \geq 0$ con $0 < p < 1$. Usaremos este hecho en lo siguiente.

Aplicando la desigualdad del triángulo y usando que

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p$$

para todo $a, b \geq 0$, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene

$$\begin{aligned} M_p^p(n, f-h) &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |(f-h)(v)|^p \\ &\leq \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} (|(f-h)(v)| + |(g-h)(v)|)^p \\ &\leq \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |(f-h)(v)|^p + \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |(g-h)(v)|^p \\ &= M_p^p(n, f-g) + M_p^p(n, g-h). \end{aligned}$$

Esta desigualdad implica que

$$d(f,h) = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} M_p^p(n, f-h) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}_0} M_p^p(n, f-g) + \sup_{n \in \mathbb{N}_0} M_p^p(n, g-h) = d(f,g) + d(g,h).$$

Concluimos entonces que d es una métrica.

La prueba de que $\mathbb{H}^p(G)$ es un espacio completo con la métrica d es similar a la del teorema anterior. □

Teorema 2.4. *Para $1 \leq p < \infty$, $\|\cdot\|_p$ induce una estructura de espacio de Banach en $\mathbb{H}_0^p(G)$.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$, $f, g \in \mathbb{H}^p(G)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, en la prueba del teorema 2.2 mostramos que $M_p(n, \alpha f) = |\alpha| M_p(n, f)$ y que $M_p(n, f+g) \leq M_p(n, f) + M_p(n, g)$. En particular, si $f, g \in \mathbb{H}_0^p(G)$ se tiene que $M_p(n, \alpha f + g) \leq |\alpha| M_p(n, f) + M_p(n, g)$, tomando límites en ambos lados de esta desigualdad cuando $n \longrightarrow \infty$ tenemos que $\lim_{n \longrightarrow \infty} M_p(n, \alpha f + g) = 0$ por tanto $\alpha f + g \in \mathbb{H}_0^p(G)$, concluyendo así que $\mathbb{H}_0^p(G)$ es un subespacio de $\mathbb{H}^p(G)$.

Ahora probaremos que $\mathbb{H}_0^p(G)$ es cerrado en $\mathbb{H}^p(G)$. Sea $\{f_k\}$ una sucesión en $\mathbb{H}_0^p(G)$ tal que $f_k \longrightarrow f$, como $\mathbb{H}^p(G)$ es completo sabemos entonces que $f \in \mathbb{H}^p(G)$. Probaremos que $f \in \mathbb{H}_0^p(G)$. Sea $\epsilon > 0$, sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_k - f\|_p < \frac{\epsilon}{2}$. Por otro lado, dado que $f_k \in \mathbb{H}_0^p(G)$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$M_p(n, f_k) < \frac{\epsilon}{2}$ y $M_p(n, f_k - f) < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n \geq N$. De la desigualdad $M_p(n, f) \leq M_p(n, f - f_k) + M_p(n, f_k)$ se sigue que $M_p(n, f) \leq \epsilon$ para todo $n \geq N$ y por tanto $\lim_{n \longrightarrow \infty} M_p(n, \alpha f) = 0$, entonces $f \in \mathbb{H}_0^p(G)$ lo cual prueba que $\mathbb{H}_0^p(G)$ es cerrado en $\mathbb{H}^p(G)$.
Concluimos que $\mathbb{H}_0^p(G)$ es completo ya que es un subespacio cerrado de $\mathbb{H}^p(G)$ el cual es completo. Esto termina la demostración. $\square$

Lema 2.5. *Para $0 < r < s < \infty$, y para toda función f con valores en los complejos definida en G una gráfica infinita con raíz, conexa y localmente finita, se tiene que $M_r(n, f) \leq M_s(n, f)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Considere la $p-$norma $\| \cdot \|_p$ en $\mathbb{C}^N$ definida para $x := (x_1, x_2, \cdots, x_N) \in \mathbb{C}^N$ por $\|x\|_p^p := \sum_{k=1}^{N} |x_k|^p$, aplicando la desigualdad de *Hölder* para sumas finitas tenemos que

$$\|x\|_r^r = \sum_{k=1}^{N} |x_k|^r \leq \left(\sum_{k=1}^{N} (|x_k|^r)^{\frac{s}{r}} \right)^{\frac{r}{s}} \left(\sum_{k=1}^{N} 1^{\frac{s}{s-r}} \right)^{\frac{s-r}{s}} = N^{\frac{s-r}{s}} \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^s \right)^{\frac{r}{s}},$$

estas desigualdades implican que $||x||_r \leq N^{\frac{s-r}{sr}} ||x||_s$ y por tanto $||x||_r \leq N^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}} ||x||_s$.

Recuerde que para $n \in \mathbb{N}_0$, $\gamma(n)$ es el número de vértices v con $|v| = n$. Aplicando la desigualdad anterior para $N = \gamma(n)$ se tiene

$$\left(\sum_{|v|=n} |f(v)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq (\gamma(n))^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}} \left(\sum_{|v|=n} |f(v)|^s \right)^{\frac{1}{s}},$$

esta igualdad la podemos escribir como

$$\left(\frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |f(v)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |f(v)|^s \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Esto completa la demostración de que $M_r(n, f) \leq M_s(n, f)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Una consecuencia inmediata del lema anterior es el siguiente teorema, donde se establecen contenciones para los espacios de Hardy. Después del teorema mostraremos la contención estricta.

Teorema 2.6. *Para $0 < r < s < \infty$, se tiene que $\mathbb{H}^s(G) \subseteq \mathbb{H}^r(G)$ y que $\mathbb{H}_0^s(G) \subseteq \mathbb{H}_0^r(G)$.*

Demostración. Sea $0 < r < s < \infty$ y $f \in \mathbb{H}^s(G)$. Por el lema anterior sabemos que $M_r(n,f) \leq M_s(n,f)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, por tanto $M_r(n,f) \leq M_s(n,f) \leq \|f\|_s < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. La definición de supremo implica que $||f||_r \leq ||f||_s < \infty$ lo cual prueba la primera contención $\mathbb{H}^s(G) \subseteq \mathbb{H}^r(G)$.
Por otro lado, si $f \in \mathbb{H}_0^s(G)$, en particular se cumple que $f \in \mathbb{H}^s(G)$ y por tanto $M_r(n,f) \leq M_s(n,f)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, usando esta desigualdad y dado que $f \in \mathbb{H}_0^s(G)$ se tiene $\lim_{n\longrightarrow\infty} M_r(n,f) = 0$, entonces $f \in \mathbb{H}_0^r(G)$ lo cual prueba $\mathbb{H}_0^s(G) \subseteq \mathbb{H}_0^r(G)$. □

Proposición 2.7. *Si $\gamma(n) \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$, las contenciones en el teorema anterior son estrictas.*

Demostración. Para $0 < r < p < s \leq \infty$, seleccionamos una sucesión de vértices $\{v_n\}$ tal que $|v_n| = n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Considere a la función f definida por

$$f(v) := \begin{cases} (\gamma(n))^{\frac{1}{p}}, & \text{si } v = v_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Para $n \in \mathbb{N}_0$, tenemos que

$$M_r(n,f) = \left(\frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |f(v)|^r \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{1}{\gamma(n)} | \, (\gamma(n))^{\frac{1}{p}} \, |^r \right)^{\frac{1}{r}} = (\gamma(n))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}$$

por tanto, como $p > r$ se tiene que $\frac{1}{p} - \frac{1}{r} < 0$ y entonces $M_r(n,f) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, esto prueba que $f \in \mathbb{H}_0^r(G)$.

Por otro lado, también tenemos que $M_s(n,f) = (\gamma(n))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{s}}$ y en este caso, encontramos que $M_s(n,f) \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$ por lo que $f \notin \mathbb{H}_0^s(G)$. La existencia de la función f muestra que $\mathbb{H}_0^s(G)$ es un subespacio propio de $\mathbb{H}_0^r(G)$.

Observe que el ejemplo anterior también muestra que $\mathbb{H}^s(G)$ es un subespacio propio de $\mathbb{H}^r(G)$ pues, primero, es claro que $f \in \mathbb{H}^r(G)$ pues $f \in \mathbb{H}_0^r(G)$, y observe que $f \notin \mathbb{H}^s(G)$ pues $M_s(n,f) \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$. □

Para presentar los resultados de separabilidad de los espacios de Hardy con los que estamos trabajando introducimos la siguiente notación. Si G es una gráfica infinita con raíz, conexa y localmente finita, denotamos por $C_c(G)$ el conjunto de todas las funciones $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $M_s(n,f) = 0$ excepto para una cantidad finita de valores de n. Esto equivale a que f sea diferente de cero en a lo más una cantidad finita de vértices. La clausura de $C_c(G)$ bajo la función $\| \cdot \|_p$ es denotada por $\overline{C_c(G)}$. recuerde que $\| \cdot \|_p$ solo es una norma para $p \geq 1$.

Lema 2.8. *Para $0 < p < \infty$, se tiene que $\overline{C_c(G)} = \mathbb{H}_0^p(G)$.*

Demostración. La contención $C_c(G) \subseteq \mathbb{H}_0^p(G)$ es clara y dado que $\mathbb{H}_0^p(G)$ es cerrado tenemos $\overline{C_c(G)} \subseteq \mathbb{H}_0^p(G)$. Ahora mostraremos la contención $\overline{C_c(G)} \supseteq \mathbb{H}_0^p(G)$. Sea $f \in \mathbb{H}_0^p(G)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $\{f_n\}$ por

$$f_n(v) := \begin{cases} f(v), & \text{si } |v| \leq n \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Observe que $f_n \in C_c(T)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$M_p(k, f - f_n) := \begin{cases} M_p(k, f), & \text{si } k > n \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Por tanto

$$\|f - f_n\| = \sup_{m \in \mathbb{N}_0} M_p(m, f - f_n) = \sup_{m > n} M_p(m, f)$$

luego como $f \in \mathbb{H}_0^p(G)$ entonces $M_p(m, f) \longrightarrow 0$ cuando $m \longrightarrow \infty$, se sigue entonces que $\|f - f_n\| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Este último límite implica que $f \in \overline{C_c(G)}$ y por tanto $\overline{C_c(G)} \supseteq \mathbb{H}_0^p(G)$ concluyendo así la prueba del teorema. $\square$

Teorema 2.9. *Para $0 < p < \infty$, se tiene que $\mathbb{H}_0^p(G)$ es un espacio separable.*

Demostración. Mostraremos que $B := \{\chi_{\{v\}} : v \in G\}$ es una base para $C_c(G)$. En efecto demostraremos que B es un conjunto linealmente independiente maximal.
Primero B es linealmente independiente pues si $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es un conjunto finito de vértices en G y consideramos escalares $a_1, a_2, \cdots, a_n$ en $\mathbb{C}$ tal que $a_1\chi_{\{v_1\}} + a_2\chi_{\{v_2\}} + \cdots + a_n\chi_{\{v_n\}} = 0$, observe que al evaluar a la función $a_1\chi_{\{v_1\}} + a_2\chi_{\{v_2\}} + \cdots + a_n\chi_{\{v_n\}}$ en cada vértice v_j para $j = 1, \cdots, n$ tendremos que $a_j = 0$ para todo $j = 1, \cdots, n$.
Segundo, se tiene que B es linealmente independiente maximal, pues si no fuera maximal existiría $f \neq 0$, $f \in C_c(G)$ tal que $B \cup \{f\}$ es linealmente independiente. Como $f \in C_c(G)$ se tiene que f toma el valor de cero excepto en una cantidad finita de vértices de G; supongamos que tales vértices son $\{u_1, u_2, \cdots, u_N\}$. Es fácil darse cuenta de que

$$f = \sum_{j=1}^{N} f(u_j)\chi_{\{v_j\}}$$

lo cual contradice que $B \cup \{f\}$ es linealmente independiente. Por tanto B es una base para $C_c(G)$.

Por otro lado, al ser G infinita numerable implica que B es numerable y por tanto $C_c(G)$ es separable. Por el lema anterior tenemos que $C_c(G)$ es denso en $\mathbb{H}_0^p(G)$ y entonces concluimos que $\mathbb{H}_0^p(G)$ es separable. $\square$

Teorema 2.10. *Para $0 < p < \infty$, se tiene que $\mathbb{H}^p(G)$ no es un espacio separable.*

Demostración. Diremos que una función $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ es una *función radial* si $f(v) = f(w)$ siempre que $|v| = |w|$.
Sea $E \subset \mathbb{H}^p(G)$ el conjunto de las funciones radiales f cuyo rango es un subconjunto de $\{0, 1\}$. Sean $f, g \in E$ con $f \neq g$. Esto implica que existe $v \in T$ tal que $f(v) \neq g(v)$. Es claro que como $f, g \in E$ entonces $M_p(n, f - g) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado como f, g son funciones radiales se tiene que $M_p(|v|, f - g) = 1$ y por tanto $\|f - g\|_p = \sup_{n\in\mathbb{N}} M_p(n, f - g) = 1$.
Observe que a cada elemento de E lo podemos ver como una sucesión de ceros y unos, usando el argumento de la diagonalización de Cantor se prueba que E es un subconjunto no numerable de $\mathbb{H}^p(G)$.
Los argumentos siguientes se harán para el caso en que $\|\cdot\|_p$ es una norma ($1 \leq p < \infty$) pero el lector podrá darse cuenta de que tales argumentos funcionan de la misma forma con $0 < p < 1$ al considerar al espacio métrico $\mathbb{H}^p(G)$ con la métrica $d(f, g) = \|f - g\|_p^p$. Sea A un subconjunto denso de $\mathbb{H}^p(G)$, considere a la función $\Theta : E \longrightarrow A$ definida como $\Theta(e) := h$ donde h se elige de tal manera que $\|e - h\|_p < \frac{1}{2}$; observe que h existe por ser A denso. Probaremos que Θ es inyectiva. Si $\Theta(f) = \Theta(g) = h$ entonces tendremos que $\|f - h\|_p < \frac{1}{2}$ y $\|g - h\|_p < \frac{1}{2}$, usando la desigualdad del triángulo tenemos que $\|f - g\|_p < 1$ lo cual es posible solo si $f = g$ pues en el párrafo anterior mostramos que si $f \neq g$ entonces $\|f - g\|_p = 1$. Concluimos entonces al ser Θ inyectiva que A es no numerable y por tanto $\mathbb{H}^p(G)$ no es separable. $\square$

Lema 2.11. *Sea G una gráfica infinita con raíz, conexa y localmente finita y $0 < p < \infty$. Entonces, para $v \in G$ se tiene lo siguiente:*

(a) Si $f \in \mathbb{H}^p(G)$ entonces $|f(v)| \leq (\gamma(|v|))^{\frac{1}{p}} \|f\|_p$.

(b) Si $f \in \mathbb{H}_0^p(G)$ entonces

$$\lim_{|v|\longrightarrow\infty} \frac{f(v)}{(\gamma(|v|))^{\frac{1}{p}}} = 0.$$

La cota en el inciso (a) es óptima.

Demostración. Sea $v \in G$ y defina $n := |v|$. Entonces

$$|f(v)|^p \leq \sum_{|w|=n} |f(w)|^p = \gamma(n) M_p^p(n, f),$$

luego $|f(v)| \leq (\gamma(n))^{\frac{1}{p}} M_p(n,f)$, esta desigualdad y dado que $M_p(n,f) \leq \|f\|_p$ se tiene el resultado del inciso (a).
Por otro lado, si $f \in \mathbb{H}_0^p(G)$ sabemos que $\lim_{n\longrightarrow\infty} M_p(n,f) = 0$, entonces tomando límites cuando $n \longrightarrow \infty$ en la desigualdad

$$\frac{|f(v)|}{(\gamma(n))^{\frac{1}{p}}} \leq M_p(n,f)$$

implica el resultado del inciso (b).

Ahora, para probar que la cota es óptima en el inciso (a) mostraremos a una función donde se alcance la igualdad. Sea $v \in G$ fijo, denotemos $m = |v|$, defina la función f sobre G como

$$f(w) := \begin{cases} (\gamma(m))^{\frac{1}{p}}, & \text{si } w = v, \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases}$$

por la definición de f se tiene que $M_p(n,f) = 0$ para todo $n \neq m$ y

$$M_p(m,f) := \left(\frac{1}{\gamma(m)} \sum_{|w|=m} |f(w)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{\gamma(m)} |f(v)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 1.$$

Entonces concluimos que $\|f\|_p := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} M_p(n,f) = 1$ y por tanto

$$|f(v)| = f(v) = (\gamma(m))^{\frac{1}{p}} \|f\|_p,$$

probando así que la cota es óptima en el inciso (a) pues la igualdad se alcanza. □

Proposición 2.12. *Sea G una gráfica infinita con raíz, conexa y localmente finita, entonces para $1 \leq p < \infty$ la convergencia en $\|\cdot\|_p$ implica la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de G.*

Demostración. Observe que si en G consideramos a la distancia de contar el número de aristas, esta induce la topología discreta. Por tanto los únicos conjuntos compactos en G serán los conjuntos finitos.

Sea K un subconjunto compacto arbitrario de G, por lema anterior sabemos que dada una función $f \in \mathbb{H}^p(G)$ se tiene

$$|f(v)| \leq (\gamma(|v|))^{\frac{1}{p}} \|f\|_p$$

para todo $v \in K$. Usando el hecho de que K es finito defina $N := \max\{\gamma(|v|) : v \in K\}$, entonces para todo $v \in K$

$$|f(v)| \leq (\gamma(|v|))^{\frac{1}{p}} \|f\|_p \leq N^{\frac{1}{p}} \|f\|_p,$$

luego tenemos que $\sup_{v \in K} |f(v)| \leq N^{\frac{1}{p}} \|f\|_p$ para toda $f \in \mathbb{H}^p(G)$.

Sea f_n una sucesión de funciones en $\mathbb{H}^p(G)$ que converge a $f \in \mathbb{H}^p(G)$ en la norma $\| \cdot \|_p$. Aplicando a $f_n - f$ la desigualdad $|f(v)| \leq N^{\frac{1}{p}} \|f\|_p$ y tomando supremos tenemos que $\sup_{v \in K} |(f_n - f)(v)| \leq N^{\frac{1}{p}} \|f_n - f\|_p$ para toda $f \in \mathbb{H}^p(G)$ y para todo K compacto en G, esta última desigualdad muestra que la convergencia de f_n a f en la norma $\| \cdot \|_p$ implica la convergencia en subconjuntos compactos de G. $\square$

2.2. El operador de multiplicación en $\mathbb{H}^p(G)$ y $\mathbb{H}_0^p(G)$

Uno de los principales objetivos de este trabajo es estudiar a operadores acotados en los espacios ya definidos. Uno de los operadores que más aparece en la literatura y el cual es estudiado en diversos espacios es el operador de multiplicación. Para este se han encontrado diversas características similares independientemente del espacio donde esté actuando, ver por ejemplo las referencias [1, 2, 3, 5, 12, 13]. El operador multiplicación se define de la siguiente manera [31].

Definición 2.13. Sea X un espacio lineal normado complejo que consiste de funciones con valores en los complejos definidas en un conjunto Ω. Si ψ es una función con valores en los complejos definida en Ω, entonces el operador multiplicación con símbolo ψ es definido por $M_\psi f = \psi f$ para todo $f \in X$.

En este trabajo nos va a interesar considerar al operador multiplicación $M_\psi : X \longrightarrow X$ donde X es $\mathbb{H}^p(G)$ o $\mathbb{H}_0^p(G)$ y por tanto uno de los ejercicios a realizar en lo que sigue es ver que los valores de M_ψ en efecto caigan en su respectivo codominio.

En la referencia [15] se menciona la siguiente definición y el siguiente lema, los cuales usaremos más adelante.

Definición 2.14. Un *espacio de Banach funcional* es un espacio de Banach X cuyos elementos son funciones con valores complejos y definidas sobre un conjunto Ω, tal que para cada $v \in \Omega$: el mapeo evaluación $e_v : f \in X \mapsto f(v)$ es un funcional lineal acotado en X y además no existe ningún punto de Ω en donde todas las funciones de X se anulen.

Lema 2.15. [15, Lema 11] *Sea X un espacio de Banach funcional sobre el conjunto Ω y ψ una función con valores en los complejos sobre Ω tal que M_ψ mapea X en sí mismo. Entonces M_ψ es acotado en X y $|\psi(v)| \leq \|M_\psi\|$ para todo $v \in \Omega$. En particular ψ es una función acotada.*

Con la definición anterior es natural preguntarse si $\mathbb{H}^p(G)$ y $\mathbb{H}_0^p(G)$ son espacios de Banach funcionales. La respuesta a esta pregunta se da en la siguiente proposición.

Proposición 2.16. *Para $1 \leq p < \infty$ se tiene que $\mathbb{H}^p(G)$ y $\mathbb{H}_0^p(G)$ son espacios de Banach funcionales.*

Demostración. Sea $v \in G$. Demostrar que el mapeo evaluación e_v es lineal es directo de la definición. Por otro lado por el lema 2.11 sabemos que e_v es un funcional lineal acotado en $\mathbb{H}^p(G)$ con $\|e_v\| \leq (\gamma(|v|))^{\frac{1}{p}}$. Este argumento también muestra que e_v es acotado en $\mathbb{H}_0^p(G)$. Por otra parte dado $v \in G$ si definimos a la función f como

$$f(w) := \begin{cases} 1, & \text{si } w = v, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

claramente $f \in \mathbb{H}_0^p(G)$. La existencia de esta función f muestra que no existe ningún vértice en G tal que todas las funciones tanto en $\mathbb{H}^p(G)$ o $\mathbb{H}_0^p(G)$ se anulen y esto completa la prueba de que $\mathbb{H}^p(G)$ y $\mathbb{H}_0^p(G)$ son espacios de Banach funcionales. □

Una de las principales características que nos interesa del operador multiplicación es saber cuando es acotado. La respuesta nos la da el siguiente teorema.

Teorema 2.17. *Sea $0 < p < \infty$, llamemos X el espacio $\mathbb{H}^p(G)$, $\mathbb{H}_0^p(G)$ o $C_c(G)$ equipados con $\|\cdot\|_p$ (observe que para $1 \leq p < \infty$ es una norma) y sea ψ una función en G. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) M_ψ es un operador lineal acotado de X en X.

(b) ψ es una función acotada en G.

Demostración. Primero suponga M_ψ un operador lineal acotado de X en X, mostraremos la primera implicación por contradicción. Suponga que ψ es una función no acotada en G, entonces existe una sucesión de vértices v_k tal que $|v_1| < |v_2| < |v_3| \cdots$ y además $\psi(v_k) \geq k$.

Para cada k, defina $f_k : G \longrightarrow \mathbb{C}$ por $f_k = C_{k,p}\chi_{\{v_k\}}$ donde cada constante $C_{k,p}$ es seleccionada de tal forma que $\|f_k\|_p = 1$. Note que $f_k \in X$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por la forma de elegir a la sucesión v_k, por la definición de cada función f_k y por la definición de supremo tenemos que

$$k = k\|f_k\|_p \leq |\psi(v_k)|\|f_k\|_p = |\psi(v_k)|M_p(|v_k|, f_k) = M_p(|v_k|, \psi f_k) \leq \|\psi f_k\|_p = \|M_\psi f_k\|_p$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, esto nos da una contradicción con que M_ψ es un operador lineal acotado.

Ahora suponga que ψ es una función acotada en G. Es fácil probar la linealidad de M_ψ, pues si $f, g \in X$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\begin{aligned} M_\psi(\alpha f + g)(w) &= \psi(w)(\alpha f + g)(w) \\ &= \psi(w)(\alpha f(w) + g(w)) \\ &= \alpha\psi(w)f(w) + \psi(w)g(w) \\ &= \alpha M_\psi f(w) + M_\psi g(w). \end{aligned}$$

Para probar que M_ψ es acotado observe que para cualquier $f \in X$ se tiene que

$$M_p(n, M_\psi f) = \left(\frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |(M_\psi f)(v)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |\psi(v)|^p |f(v)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

esta desigualdad y usando que $\|\psi\|_\infty \geq |\psi(v)|$ para todo $v \in G$, tenemos que

$$M_p(n, M_\psi f) \leq \|\psi\|_\infty M_p(n, f),$$

de esta última desigualdad podemos observar que $M_\psi f \in X$ siempre que $f \in X$, luego tomando supremos en ambos lados de esta misma desigualdad sobre $n \in \mathbb{N}_0$, concluimos que $\|M_\psi f\|_p \leq \|\psi\|_\infty \|f\|_p$, entonces M_ψ es un operador lineal acotado de X en X con $\|M_\psi f\| \leq \|\psi\|_\infty$. □

Observación 2.18. Sea X el espacio $\mathbb{H}^p(G)$ o $\mathbb{H}_0^p(G)$ con la norma $\|\cdot\|_p$, donde $1 \leq p < \infty$. En estos casos se tiene que X es un espacio de Banach funcional. Entonces por el lema 2.15 tenemos que $|\psi(v)| \leq \|M_\psi\|$ para todo $v \in G$, la definición de supremo en esta desigualdad implica $\|\psi\|_\infty \leq \|M_\psi\|$. Por el teorema 2.17 se tiene $\|M_\psi\| \leq \|\psi\|_\infty$ y por tanto $\|M_\psi\| = \|\psi\|_\infty$.

El siguiente teorema nos dará algunas relaciones entre el espectro, el espectro puntual y el espectro puntual aproximado de un operador multiplicación acotado.

Teorema 2.19. *Sea $0 < p < \infty$, llamemos X el espacio $\mathbb{H}^p(G)$, $\mathbb{H}_0^p(G)$ o $C_c(G)$ equipados con $\|\cdot\|_p$ y sea M_ψ un operador de multiplicación acotado en X. Entonces*

(a) $\sigma_p(M_\psi) = \psi(G)$;

(b) $\sigma(M_\psi) = \sigma_{ap}(M_\psi) = \overline{\psi(G)}$.

Demostración. Primero probaremos el inciso (a). Sea $\lambda \in \sigma_p(M_\psi)$, entonces existe una función no cero f tal que $\psi f = M_\psi f = \lambda f$. Como $f \neq 0$ existe un vértice v tal que $f(v) \neq 0$ y

$$(\psi(v) - \lambda)f(v) = 0,$$

entonces $\lambda = \psi(v)$ y por tanto $\lambda \in \psi(G)$ probando así que $\sigma_p(M_\psi) \subseteq \psi(G)$.
Por otra parte, si $\alpha \in \psi(G)$ entonces existe un vértice v tal que $\psi(v) = \alpha$, por tanto

$$M_\psi(\chi_{\{v\}}) = \alpha\chi_{\{v\}}.$$

Dado que $\chi_{\{v\}} \in X$ es distinta de cero se tiene que $\alpha \in \sigma_p(M_\psi)$, esto prueba que $\psi(G) \subseteq \sigma_p(M_\psi)$, esto junto con la contención obtenida anteriormente prueba el inciso (a).

Ahora probaremos el inciso (b). Sea $\lambda \notin \overline{\psi(G)}$. Dado que el complemento de $\overline{\psi(G)}$ es abierto, sabemos que existe $r > 0$ tal que el disco de radio r centrado en λ es un subconjunto de $\mathbb{C} \setminus \overline{\psi(G)}$, por tanto $|\psi(v) - \lambda| \geq r$ para todo $v \in G$. Entonces tenemos que $\frac{1}{\psi - \lambda}$ es una función acotada y por el teorema 2.17 tenemos que $M_{\frac{1}{\psi-\lambda}}$ es un operador acotado en X. Esto junto con el hecho de que para toda $f \in X$ y $v \in G$ se tiene que $((M_{\psi-\lambda}M_{\frac{1}{\psi-\lambda}})f)(v) = f(v)$ y $((M_{\frac{1}{\psi-\lambda}}M_{\psi-\lambda})f)(v) = f(v)$ nos permite concluir que $M_{\psi-\lambda}$ es invertible.
Como $M_\psi - \lambda I = M_{\psi-\lambda}$, concluimos que $\lambda \notin \sigma(M_\psi)$ lo cual implica la contención $\sigma(M_\psi) \subseteq \overline{\psi(G)}$.
Observe que $\psi(G) = \sigma_p(M_\psi) \subseteq \sigma_{ap}(M_\psi) \subseteq \sigma(M_\psi) \subseteq \overline{\psi(G)}$ si tomamos cerradura en las contenciones anteriores y utilizando que el espectro y el espectro puntual aproximado son subconjuntos cerrados de $\mathbb{C}$ (ver teoremas 1.6 y 1.7) se tiene $\sigma(M_\psi) = \sigma_{ap}(M_\psi) = \overline{\psi(G)}$ probando asi el inciso (b). $\square$

El siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para que el operador de multiplicación sea compacto en los espacios de Hardy discretos.

Teorema 2.20. *Sea X el espacio $\mathbb{H}^p(G)$ o $\mathbb{H}^p_0(G)$, donde $1 \leq p < \infty$ y sea $M_\psi : X \longrightarrow X$ un operador de multiplicación acotado en X. Entonces M_ψ es un operador compacto en X si y solo si $\psi(v) \longrightarrow 0$ cuando $|v| \longrightarrow \infty$.*

Demostración. Suponga primero que M_ψ es un operador compacto en X. Por el teorema 1.8 sabemos que el espectro de un operador compacto es un conjunto numerable con 0 el único posible punto límite. Procederemos por contradicción, suponga que $\psi(v) \nrightarrow 0$ cuando $|v| \longrightarrow \infty$. Entonces existe $\epsilon > 0$ y una sucesión de vértices $\{v_k\}$ en G tal que $|v_k| \longrightarrow \infty$ y $|\psi(v_k)| \geq \epsilon$ para todo k.

Observe que la sucesión $\{\psi(v_k)\}$ no puede ser constante, pues de hecho si esta sucesión tomara el mismo valor una infinidad de veces se tiene una contradicción ya que si λ es el valor que se repite una infinidad de veces entonces $\lambda = \psi(v)$ para algún $v \in \{v_k\}$. Observe que $M_\psi \chi_{\{v\}} = \psi(v)\chi_{\{v\}}$, luego $\chi_{\{v\}} \in \ker(M_\psi - \psi(v))$ por tanto $\chi_{\{v\}} \in \ker(M_\psi - \lambda)$. Entonces $\{\chi_{v_k} : \psi(v_k) = \lambda\} \subseteq \ker(M_\psi - \lambda)\}$, por lo que $\ker(M_\psi - \lambda)$ sería de dimensión infinita lo cual es una contradicción pues como M_ψ es compacto $\ker(M_\psi - \lambda)$ es de dimensión finita (ver teorema 1.9, parte (c)).
Por tanto, por el teorema de Bolzano-Weierstrass sabemos que $\{\psi(v_k)\}$ tiene un punto límite. Como $|\psi(v_k)| \geq \epsilon$ para todo k se tiene una contradicción pues 0 es el único posible punto límite. Por tanto $\psi(v) \longrightarrow 0$ cuando $|v| \longrightarrow \infty$.

Para probar la otra dirección del teorema usaremos el hecho de que el conjunto de operadores compactos en X es un subespacio cerrado del conjunto de operadores acotados en X (ver teorema 1.9, parte (b)).

Primero analizaremos el caso cuando $\psi \in C_c(G)$, en este caso existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\psi(v) = 0$ para todo $|v| > N$, por tanto $(M_\psi f)(v) = \psi(v)f(v) = 0$ para todo $|v| > N$ y para todo $f \in X$. En este caso el rango de M_ψ es un espacio de dimensión finita, pues $\operatorname{ran}(M_\psi) \subseteq \operatorname{span}\{\chi_{\{v\}} : |v| \leq N\}$, de hecho para $f \in \mathbb{H}^p(G)$ se tiene que $M_\psi(f) = \sum_{|v|\leq N} \psi(v)f(v)\chi_{\{v\}}$ esto muestra que M_ψ es un operador compacto (ver teorema 1.9, parte (a)).

Ahora, sea ψ una función arbitraria tal que $\psi(v) \longrightarrow 0$ cuando $|v| \longrightarrow \infty$. Para cada n defina $\{f_n\}$ como

$$f_n(v) := \begin{cases} \psi(v), & \text{si } |v| \leq n \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observe que por definición $f_n \in C_c(G)$ para todo n, por lo probado anteriormente tendremos también que M_{f_n} es un operador compacto para todo n, más aun se tiene que

$$\|M_{f_n} - M_\psi\| = \|M_{f_n - \psi}\| = \|f_n - \psi\|_\infty = \sup_{|v|>n} |\psi(v)|.$$

Observe entonces que la hipótesis de que $\psi(v) \longrightarrow 0$ cuando $|v| \longrightarrow \infty$ implica que $\|M_{f_n} - M_\psi\| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Entonces M_ψ es el límite de una sucesión $\{M_{f_n}\}$ de operadores compactos y por tanto M_ψ es compacto en X, terminando así la prueba del teorema.

□

Lema 2.21. *Sea X el espacio $\mathbb{H}^p(G)$, $\mathbb{H}^p_0(G)$, donde $1 \leq p < \infty$ y sea $M_\psi : X \longrightarrow X$ un operador de multiplicación acotado en X. Si M_ψ es un operador compacto en X,* *entonces para toda sucesión acotada $\{f_n\}$ en X que converja puntualmente a cero se tiene que $\|\psi f_n\| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.*

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión acotada en X que converge puntualmente a 0, probaremos que $\|M_\psi(f_n)\| = \|\psi f_n\| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Procederemos por contradicción, supongamos que $\|M_\psi(f_n)\| \not\rightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, entonces existe una subsucesión $g_m := f_{n_m}$ y $\epsilon > 0$ tal que $\|M_\psi(g_m)\| \geq \epsilon$ para todo m. Observe que $\{g_m\}$ es una sucesión acotada que converge puntualmente a 0 pues $\{f_n\}$ lo es. Dado que M_ψ es un operador compacto y como $\{g_m\}$ está acotada entonces existe una subsucesión $\{g_{m_k}\}$ de $\{g_m\}$ tal que $\{\psi g_{m_k}\} = \{M_\psi(g_{m_k})\}$ converge en la norma $\|\cdot\|_p$ a una función digamos g, luego por 2.12 sabemos que ψg_{m_k} converge uniformemente en conjuntos compactos a g, en particular ψg_{m_k} converge a g puntulmente y por tanto g es la función idénticamente cero, teniendo así que $\lim_{k\longrightarrow\infty} \|\psi g_{m_k}\|_p = \|g\|_p = 0$, es decir ψg_{m_k} converge a cero en la norma $\|\cdot\|_p$ lo cual es imposible pues $\|M_\psi(g_m)\| \geq \epsilon$ para todo m lo cual es una contradicción. Entonces $\|M_\psi(f_n)\| = \|\psi f_n\| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ terminando así la prueba del teorema. $\square$

Sea $K(X)$ el conjunto de todos los operadores compactos en X, si A es un operador acotado en X mencionamos en el teorema 1.10 que

$$\|A\|_e := \operatorname{dist}(A, K(X)) = \inf\{\|A - L\| : L \in K(X)\}.$$

es una norma en el espacio cociente $B(X, X)/K(X)$. Para más información consultar [14, Teorema 4.1].

Teorema 2.22. *Sea $M_\psi : X \longrightarrow X$ un operador de multiplicación acotado en $\mathbb{H}^p(G)$ o $\mathbb{H}_0^p(G)$, donde $1 \leq p < \infty$. Entonces*

$$\|M_\psi\|_e \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{|v|\geq n} |\psi(v)|$$

.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $\{\psi_n\}$ como

$$\psi_n(v) := \begin{cases} \psi(v), & \text{si } |v| < n, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observe que para cada n se tiene que $\psi_n(v) \longrightarrow 0$ cuando $|v| \longrightarrow \infty$, pues de hecho $\psi_n(v) = 0$ para $|v| \geq n$. Entonces por el teorema 2.20 tenemos que M_{ψ_n} es un operador compacto para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la definición de la norma $\|\cdot\|_e$ y la definición de ínfimo se tiene

$$\begin{aligned}
\|M_\psi\|_e &= \inf\{\|M_\psi - L\| : L \in K(X)\} \\
&\leq \|M_\psi - M_{\psi_n}\| \\
&= \|\psi - \psi_n\|_\infty \\
&= \sup_{v \in T} |\psi(v)| \\
&= \sup_{|v| \geq n} |\psi(v)|.
\end{aligned}$$

Tomando límites cuando $n \longrightarrow \infty$ de ambos lados en la desigualdad anterior tenemos que

$$\|M_\psi\|_e \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \sup_{|v| \geq n} |\psi(v)|.$$

Observe que el límite de la parte derecha en la desigualdad anterior es finito pues ψ es acotada. Esta desigualdad completa la prueba del teorema. $\square$

Teorema 2.23. *Sea X el espacio $\mathbb{H}^p(G)$ o $\mathbb{H}_0^p(G)$, donde $0 < p < \infty$ y sea $M_\psi : X \longrightarrow X$ es un operador de multiplicación acotado en X. Entonces M_ψ es una isometría en X si y solo si $|\psi(v)| = 1$ para todo $v \in G$.*

Demostración. Primero suponga que $|\psi(v)| = 1$ para todo $v \in G$. Se tiene que

$$M_p(n, \psi f) = \left(\frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |\psi(v)|^p |f(v)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |f(v)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = M_p(n, f).$$

Tomando supremos de ámbos lados de la igualdad anterior tenemos que

$$\|f\|_p = \|\psi f\|_p = \|M_\psi(f)\|_p$$

lo cual prueba que M_ψ es una isometría en X.

Ahora suponga que M_ψ es una isometría en X. Dado $v \in G$, considere a la función $f := \chi_{\{v\}}$, por hipótesis tenemos que

$$\|M_\psi(f)\|_p = \|f\|_p$$

pero observe

$$\|M_\psi(f)\|_p = \left(\frac{1}{\gamma(n)} |\psi(v) f(v)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{\gamma(n)} |\psi(v)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

y también

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

por tanto tenemos que

$$\left(\frac{1}{\gamma(n)}|\psi(v)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

entonces $|\psi(v)| = 1$ para todo $v \in G$. $\square$

Es importante mencionar que todos los resultados descritos de aquí en adelante ya no aparecen en el artículo [31] el cual es base de este trabajo. En el artículo [31] se planteaban la pregunta de si era posible definir un producto interno de tal manera que $\mathbb{H}^2(G)$ llegara a ser un espacio de Hilbert. La respuesta a esta pregunta queda plasmada en el siguiente teorema.

Teorema 2.24. *Sea G una gráfica infinita, conexa y localmente finita con raíz, entonces para $p \geq 1$ se tiene que $\mathbb{H}^p(G)$ no es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Construiremos dos funciones f y g definidas en tal gráfica, de tal manera que no cumpla con la identidad del paralelogramo.
Sea o la raíz de G. Sobre G definimos a la función f como

$$f(v) := \begin{cases} 1, & \text{si } |v| = 0, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Por otro lado considere $w \in G$ fijo tal que $w \neq o$. Definimos sobre G a la función g como

$$g(v) := \begin{cases} 1, & \text{si } v = w, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Un simple cálculo muestra que para todo $p \geq 1$ se tiene que

$$2\|f\|_p^2 + 2\|g\|_p^2 = 2 + 2\frac{1}{(\gamma(|w|))^{\frac{2}{p}}} \neq 1 + 1 = \|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2.$$

Concluimos que $\mathbb{H}^p(G)$ no puede ser un espacio de Hilbert respecto de la norma $\|\cdot\|_p$. $\square$

Otra de las preguntas que nos interesaba analizar es si el operador multiplicación podía ser hipercíclico en $\mathbb{H}^p(G)$, la respuesta la presentamos en el siguiente teorema.

Teorema 2.25. *Sea G una gráfica infinita, conexa y localmente finita con raíz o, para $p \in (0, \infty)$, se tiene que el operador multiplicación M_φ actuando en $\mathbb{H}_0^p(G)$ no es hipercíclico.*

Demostración. Probaremos que el espectro puntual del adjunto de M_φ es no vacío. Para $w \in G$ considere al funcional evaluación e_w definido como $e_w(f) := f(w)$, observe que e_w es acotado pues por el lema 2.11 probado anteriormente tenemos que para toda $f \in \mathbb{H}_0^p(G)$

$$|e_w(f)| = |f(w)| \leq (\gamma(|w|))^{\frac{1}{p}} \|f\|_p.$$

Sea $v \in G$ y $g \in \mathbb{H}_0^p(G)$, defina $\lambda := \varphi(v)$. Observe que

$$e_v(M_\varphi g) = e_v(\varphi g) = \varphi(v)g(v) = \lambda g(v) = e_v(\lambda g),$$

usando esto y aplicando la definición del adjunto tenemos que

$$(M_\varphi^* e_v)(g) = e_v(M_\varphi g) = e_v(\lambda g) = (\lambda g)(v) = (\lambda e_v)(g),$$

como esto es cierto para toda $g \in \mathbb{H}_0^p(G)$ concluimos que $M_\varphi^* e_v = \lambda e_v$ La existencia de λ implica que el espectro puntual de M_φ^* es no vacío y por la proposición 1.15 concluimos que M_φ no puede ser hipercíclico. $\square$

En el caso clásico del espacio de Hardy (ver apéndice A) los límites de los valores de una función en la frontera del disco unitario existen casi en todas partes. Los límites de una función en $\mathbb{H}_0^p(G)$ a lo largo de un fin (camino infinito), forman de alguna manera los valores en la "frontera". Una pregunta interesante sería tratar de ver si se puede definir una frontera en una gráfica infinita para después ver si se cumple algo similar al caso clásico $H^p(\mathbb{D})$. En el artículo [9] P. Cartier define la *frontera de Poisson* de una gráfica infinita y menciona algunas características; mismas que describe M. Pavone de manera más resumida en el artículo [32]. A continuación escribimos las definiciones y propiedades descritas en [32].

Definición 2.26. Sea $q \in \mathbb{N}$ y sea T un árbol con raíz o, donde cada vértice tiene exactamente $q + 1$ vecinos. Definimos Ω como el conjunto de todos los caminos infinitos que comienzan en la raíz o, y para $v \in T$ definimos $E(v) \subseteq \Omega$ a el conjunto de todos los caminos infinitos que comienzan en o y que contienen a v.

Resulta que la topología generada por los conjuntos $E(v)$ con $v \in T$, hacen de Ω un espacio compacto el cual juega el rol de la frontera de T. Se observa también que para n un entero fijo positivo hay exactamente $(q+1)q^{n-1}$ vértices en T a distancia n

de la raíz, dada esta observación, se demuestra que los correspondientes subconjuntos $\{E(v) : d(v, o) = n\}$ forman una partición de Ω en subconjuntos compactos abiertos y se define además una medida μ_o en Ω la cual asigna el número $\frac{1}{(q+1)q^{n-1}}$ a cada uno de los subconjuntos $E(v)$ tales que $d(v, o) = n$. Se menciona también en este artículo [32] que μ_o se extiende a una única medida de probabilidad de Borel regular sobre Ω, y el espacio (Ω, μ_o) es llamado *la frontera de Poisson de T*.

En el caso del espacio de Hardy clásico (ver apéndice A), los límites radiales de los valores de una función en la frontera del disco unitario existen casi en todas partes y eso se plasma en el siguiente teorema.

Teorema 2.27. [30, Corolario 1.1.28] *Sea $f \in \mathbb{H}^p(\mathbb{D})$, entonces*

$$\lim_{r \longrightarrow 1^-} f(re^{i\theta})$$

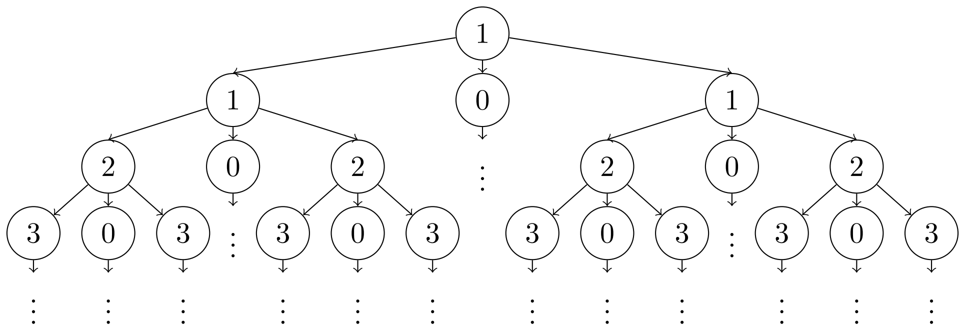
existe para casi todo $\theta \in [0, 2\pi)$.

Este resultado se usa fuertemente en la demostración del siguiente teorema, en el cual se caracteriza al dual del espacio de Hardy clásico [16].

Teorema 2.28. [16, Teorema 7.3] *Para $1 \leq p < \infty$, el espacio dual $(\mathbb{H}^p)^*$ es isométricamente isomorfo a $L^p/\mathbb{H}^q$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Sería interesante saber si en los espacios de Hardy de una gráfica infinita sucede algo similar al teorema 2.28, y por tanto uno de los objetivos que nos propusimos estudiar en esta tesis es tratar de encontrar al espacio dual de $\mathbb{H}_0^p(G)$, sin embargo el único resultado que encontramos es el ejemplo que mencionamos a continuación.

Ejemplo 2.29. Sea T un árbol infinito con raíz o, donde cada vértice tiene 3 hijos y sea f una función definida en T de tal manera que $f(o) = 1$ y f toma el valor 1 para dos vértices a distancia 1 de la raíz y el valor 0 para el otro vértice a esta misma distancia, por convención nosotros tomaremos al vértice de enmedio.
Teniendo estos valores definidos, pedimos que f tome el valor de cero en todos los hijos de v siempre que $f(v) = 0$, y para cada vértice v tal que $|v| \geq 1$ y $f(\mathrm{par}(v)) \neq 0$ pedimos que f tome el valor $|v| + 1$ para exactamente 2 hijos de v y el valor 0 en el hijo restante.
La siguiente figura muestra el árbol descrito anteriormente, donde se define a una función f con las características descritas.



Observe que para $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned} M_p^p(n,f) &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |f(v)|^p \\ &= \frac{1}{3^n} \sum_{i=1}^{2^n} |n|^p \\ &= \frac{2^n}{3^n} |n|^p \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n |n|^p. \end{aligned}$$

Como el límite

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} |n+1|^p}{\left(\frac{2}{3}\right)^n |n|^p} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right) \left|1 + \frac{1}{n}\right|^p = \frac{2}{3}$$

es menor que 1, podemos concluir que la siguiente serie converge

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^n |n|^p$$

y por tanto

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} M_p(n,f) = 0.$$

concluyendo así que $f \in \mathbb{H}_0^p(G)$.

Ahora definamos

$$C := \{\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \lim_{n \longrightarrow \infty} f(v_n) = \infty\},$$

observe que C es el conjunto de caminos infinitos en T sobre los cuales el límite de la función f es infinito.
Como cada vértice tiene tres hijos, etiquetamos a cada hijo empezando de izquierda a derecha por los números 0, 1 y 2 respectivamente. Observe que cualquier camino infinito de la gráfica anterior es una sucesión con valores en $\{0, 1, 2\}$.
Nótese que los caminos infinitos correspondientes a sucesiones con valores en $\{0, 2\}$, corresponden a caminos infinitos $\{v_n\} \in C$, por el argumento de diagonal de cantor sabemos que hay una cantidad no numerable de estas sucesiones. Entonces C es un conjunto no numerable.

Por otro lado, utilizando la definición 2.26 para el árbol mencionado, si consideramos a (Ω, μ_o) la frontera de Poisson de T tenemos en particular que la medida del conjunto C se obtiene restandole a la medida de T las medidas de los caminos donde la función tiene el valor de cero. Es decir

$$\begin{aligned}
\mu_o(C) &= 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} - \frac{8}{81} - \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} - \frac{4}{3^3} - \frac{8}{3^4} - \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{8}{3^3} + \cdots\right) \\
&= 1 - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots\right) \\
&= 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{(3)}(3) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Observe que con este ejemplo tenemos una gráfica infinita, conexa y localmente finita en donde podemos definir una función en $\mathbb{H}_0^p(G)$ de tal manera que el límite de esta no existe para una cantidad no numerable de fines pero que sin embargo el conjunto de estos caminos infinitos es un conjunto de medida cero. Podemos concluir con este ejemplo que no queda descartada la posibilidad de que se pueda obtener un resultado similar al teorema 2.28, para el caso clásico.

CAPÍTULO 3

El operador de desplazamiento hacia adelante en $\mathbb{H}^p(T)$ y $\mathbb{H}_0^p(T)$

El objetivo de este trabajo de tesis es estudiar operadores acotados en los espacios de Hardy definidos anteriormente. Un operador muy conocido en la literatura y para el cual obtendremos algunos resultados es el operador de desplazamiento hacia adelante. Daremos la definición de este operador, demostraremos condiciones necesarias y suficientes para cuando este es acotado, se estudiará el concepto de hiperciclicidad y el de isometría. Es importante aclarar que en este capítulo estaremos trabajando sobre árboles infinitos, localmente finitos con raíz y no en gráficas en general.

3.1. Definición y acotabilidad

Enseguida definimos al operador de desplazamiento hacia adelante, definición originalmente dada en [19].

Definición 3.1. Sea T un árbol con raíz y $\mathcal{F}$ el conjunto de las funciones definidas en T con valores en $\mathbb{C}$. Dado $f \in \mathcal{F}$ definimos al ***operador de desplazamiento hacia adelante*** como

$$(Sf)(v) := \begin{cases} f(\text{par}(v)), & \text{si } v \text{ es distinto de la raiz,} \\ 0, & \text{si } v \text{ es la raíz.} \end{cases}$$

Recuerde que en un árbol con raíz o para $r \in \mathbb{N}$ denotamos como $\gamma(r, w)$ al número de r-hijos del vértice w. Para $n \in \mathbb{N}_0$ definimos $K(r, n) := \text{máx}\{\gamma(r, w) : |w| = n\}$ y $\gamma(n)$ el número de vértices que están a distancia n de la raíz, observe que $\gamma(n) =$

$\gamma(n,o)$.
Los siguientes dos teoremas nos permiten caracterizar cuando el operador S es acotado en $\mathbb{H}^p(T)$ y $\mathbb{H}_0^p(T)$, más aún nos dan el valor de la norma en cada uno de estos espacios.

Teorema 3.2. *El operador de desplazamiento hacia adelante es acotado en* $\mathbb{H}^p(T)$ *si y solo si el conjunto* $\left\{\frac{K(1,n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$ *es acotado. Más aún se tiene que*

$$\|S\| = \sup_{n\geq 1}\left(\frac{K(1,n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración. Sea $f \in \mathbb{H}^p(T)$. Para todo $n \geq 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
M_p^p(n,Sf) &= \frac{1}{\gamma(n)}\sum_{|w|=n}|(Sf)(w)|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(n)}\sum_{|w|=n}|f(\mathrm{par}(w))|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(n)}\sum_{|w|=n-1}\gamma(1,w)|f(w)|^p \\
&\leq \frac{1}{\gamma(n)}\sum_{|w|=n-1}K(1,n-1)|f(w)|^p \\
&= \frac{K(1,n-1)}{\gamma(n)}\frac{\gamma(n-1)}{\gamma(n-1)}\sum_{|w|=n-1}|f(w)|^p \\
&= \frac{K(1,n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)}M_p^p(n-1,f).
\end{aligned}$$

Suponga primero que el el conjunto $\left\{\frac{K(1,n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$ es acotado y defina

$$C := \sup_{n\geq 1}\left\{\frac{K(1,n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)}\right\}.$$

Utilizando la desigualdad obtenida anteriormente tenemos que

$$M_p^p(n,Sf) \leq C M_p^p(n-1,f),$$

por tanto para todo $n \geq 1$,

$$M_p^p(n,Sf) \leq C\|f\|_p^p.$$

Esta desigualdad y dado que $M_p^p(0, Sf) = 0$ implican que $Sf \in \mathbb{H}^p(T)$, además se tiene que $\|Sf\|_p^p \leq C\|f\|_p^p$, por tanto $\|Sf\|_p \leq C^{\frac{1}{p}}\|f\|_p$ lo cual muestra que S es acotado en $\mathbb{H}^p(T)$ y que

$$\|S\| \leq C^{\frac{1}{p}}. \tag{3.1}$$

Para mostrar la otra implicación del teorema haremos lo siguiente. Considere una sucesión de vértices $\{w_n\}_{n\geq 0}$ tal que $|w_n| = n$ y que $\gamma(1, w_n) = K(1, n)$. Defina a la función f como

$$f(v) := \begin{cases} (\gamma(n))^{\frac{1}{p}}, & \text{si } v = w_n, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3.2}$$

Observe que para todo $n \geq 0$ se tiene

$$M_p^p(n, f) = \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |f(v)|^p = \frac{1}{\gamma(n)} |f(w_n)|^p = \frac{1}{\gamma(n)} |[\gamma(n)]^{\frac{1}{p}}|^p = 1,$$

por tanto $\|f\|_p = 1$ y en particular $f \in \mathbb{H}^p(T)$.

Por otro lado tenemos que para todo $n \geq 1$

$$\begin{aligned} M_p^p(n, Sf) &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |(Sf)(v)|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |f(\text{par}(v))|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{v \in \text{Chi}(w_{n-1})} |f(\text{par}(v))|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} \gamma(1, w_{n-1}) |f(w_{n-1})|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} K(1, n-1) |[\gamma(n-1)]^{\frac{1}{p}}|^p \\ &= \frac{K(1, n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)}. \end{aligned}$$

Sacando raíz p-ésima en la igualdad anterior se tiene

$$M_p(n, Sf) = \left(\frac{K(1, n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observe que si el conjunto $\left\{\frac{K(1,n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$ no es acotado entonces también se cumplirá que $\{M_p(n, Sf) : n \in \mathbb{N}\}$ no es acotado, luego $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} M_p(n, Sf)$ no existe. Entonces $Sf \notin \mathbb{H}^p(T)$ lo cual prueba que S no es acotado y entonces quedan demostradas las dos implicaciones del teorema.

Ahora calcularemos la norma del operador S. Suponga S acotado en $\mathbb{H}^p(T)$. Entonces se tiene que el siguiente supremo existe

$$C := \sup_{n\geq 1}\left\{\frac{K(1,n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)}\right\}.$$

Tomemos f como en la expresión (3.2). Como $\|f\|_p = 1$ y además $\|Sf\|_p = C^{\frac{1}{p}}$ entonces $\|S\| \geq C^{\frac{1}{p}}$. Este resultado y el obtenido en la ecuación (3.1) implican que

$$\|S\| = C^{\frac{1}{p}} = \sup_{n\geq 1}\left(\frac{K(1,n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\square$

Teorema 3.3. *El operador de desplazamiento hacia adelante es acotado en* $\mathbb{H}_0^p(T)$ *si y solo si el conjunto* $\left\{\frac{K(1,n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$ *es acotado. Más aún se tiene que*

$$\|S\| = \sup_{n\geq 1}\left(\frac{K(1,n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración. Para cada $n \geq 1$ defina la sucesión $a_n := \frac{K(1,n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)}$. Para probar el teorema suponga primero que el conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado y defina $C := \sup_{n\geq 1}\{a_n\}$.
En el teorema anterior ya demostramos que S es acotado en $\mathbb{H}^p(T)$, para demostrar que S es acotado en $\mathbb{H}_0^p(T)$ basta mostrar que si $f \in \mathbb{H}_0^p(T)$ entonces $Sf \in \mathbb{H}_0^p(T)$. Sea $f \in \mathbb{H}_0^p(T)$, como en particular $f \in \mathbb{H}^p(T)$ en la prueba del teorema anterior mostramos que para $n \geq 1$

$$M_p^p(n, Sf) \leq CM_p^p(n-1, f),$$

tomando límites cuando $n \longrightarrow \infty$ en esta desigualdad es claro que como $f \in \mathbb{H}_0^p(T)$ entonces $Sf \in \mathbb{H}_0^p(T)$ probando que S es acotado en $\mathbb{H}_0^p(T)$ y también se tiene que

$$\|S\| \leq C^{\frac{1}{p}}. \tag{3.3}$$

Para mostrar la otra implicación del teorema probaremos la contrapositiva, es decir probaremos que si $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ no es acotado entonces el operador de desplazamiento hacia adelante S no manda todos los elementos de $\mathbb{H}_0^p(T)$ en $\mathbb{H}_0^p(T)$ y por tanto S no es acotado en $\mathbb{H}_0^p(T)$.
Suponga entonces que a_n no es acotada, entonces sabemos que existe una subsucesión a_{n_k} tal que $a_{n_k} \longrightarrow \infty$. Mostraremos que si esto sucede podemos exhibir a una función $f \in \mathbb{H}_0^p(T)$ pero tal que $Sf \notin \mathbb{H}_0^p(T)$.
Defina a la sucesión $\{c_n\}$ como

$$c_n := \begin{cases} \frac{1}{a_{n_k}}, & \text{si } n = n_k \text{ para algún } k, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

observe que $c_n \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Por otro lado considere una sucesión de vértices $\{w_n\}_{n \geq 0}$ tal que $|w_n| = n$ y tal que $\gamma(1, w_n) = K(1, n)$. Defina a la función f como

$$f(v) := \begin{cases} 1, & \text{si } v \text{ es la raiz,} \\ (c_{n+1}\gamma(n))^{\frac{1}{p}}, & \text{si } v = w_n, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

observe que para todo $n \geq 1$ se tiene

$$M_p^p(n, f) = \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |f(v)|^p = \frac{1}{\gamma(n)} |f(w_n)|^p = \frac{1}{\gamma(n)} |[c_{n+1}\gamma(n)]^{\frac{1}{p}}|^p = c_{n+1},$$

entonces como $c_n \longrightarrow 0$ se tiene que $f \in \mathbb{H}_0^p(T)$.

Por otro lado tenemos que para todo $n \geq 1$

$$\begin{aligned} M_p^p(n, Sf) &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |(Sf)(v)|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |f(\mathrm{par}(v))|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{v \in \mathrm{Chi}(w_{n-1})} |f(w_{n-1})|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} \gamma(1, w_{n-1}) |f(w_{n-1})|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} K(1, n-1) |[c_n \gamma(n-1)]^{\frac{1}{p}}|^p \\ &= \frac{K(1, n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)} c_n \\ &= a_n c_n. \end{aligned}$$

Observe que

$$a_n c_n := \begin{cases} 1, & \text{si } n = n_k \text{ para algún } k, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

luego como la subsucesión $a_{n_k} c_{n_k} = 1$ para todo k, esto implica que el siguiente límite no es igual a cero

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} M_p(n, Sf) = \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n c_n$$

y por tanto concluimos que $Sf \notin \mathbb{H}_0^p(T)$. Entonces S no es acotado en $\mathbb{H}_0^p(T)$ probando así las dos implicaciones del teorema.

Ahora calcularemos la norma del operador S. Suponga S acotado en $\mathbb{H}_0^p(T)$, considere una sucesión de vértices $\{w_n\}_{n \geq 1}$ tal que $|w_n| = n$ y tal que $\gamma(1, w_n) = K(1, n)$. Defina a la siguiente sucesión de funciones $\{f_k\}_{k \geq 1}$ donde

$$f_k(v) := \begin{cases} 1, & \text{si } v \text{ es la raiz,} \\ (\gamma(n))^{\frac{1}{p}}, & \text{si } v = w_n \text{ y } 1 \leq n \leq k, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $k \geq 1$ fijo, observe que para todo $1 \leq n \leq k$ se tiene

$$M_p^p(n, f_k) = \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |f_k(v)|^p = \frac{1}{\gamma(n)} |f_k(w_n)|^p = 1,$$

para $n > k$ se tiene $M_p^p(n, f_k) = 0$ y como $M_p^p(0, f_k) = 1$ entonces $f_k \in \mathbb{H}_0^p(T)$ y $\|f_k\|_p = 1$ para todo $k \geq 1$.
Por otro lado para todo $1 \leq n \leq k+1$ tenemos que

$$\begin{aligned} M_p^p(n, Sf_k) &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |(Sf_k)(v)|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |f_k(\mathrm{par}(v))|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{v \in \mathrm{Chi}(w_{n-1})} |f_k(w_{n-1})|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} \gamma(1, w_{n-1}) |f(w_{n-1})|^p \\ &= \frac{K(1, n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)}, \end{aligned}$$

para $n > k+1$ se tiene $M_p^p(n, Sf_k) = 0$ y como $M_p^p(0, Sf_k) = 0$, se sigue

$$\begin{aligned} \|Sf_k\|_p^p &= \sup_{n \in \mathbb{N}_0} M_p^p(n, Sf_k) \\ &= \sup_{1 \leq n \leq k+1} M_p^p(n, Sf_k) \\ &= \sup_{1 \leq n \leq k+1} \frac{K(1, n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)}, \end{aligned}$$

entonces para todo $k \geq 1$ se cumple

$$\|S\| = \sup\{\|Sf\|_p : f \in \mathbb{T}_p,\ \|f\|_p = 1\} \geq \|Sf_k\|_p = \sup_{1 \leq n \leq k+1} \left(\frac{K(1, n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

tomando límites cuando $k \longrightarrow \infty$ tenemos que

$$\|S\| \geq \sup_{n \geq 1} \left(\frac{K(1, n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Esta desigualdad junto con la ecuación (3.3) implican

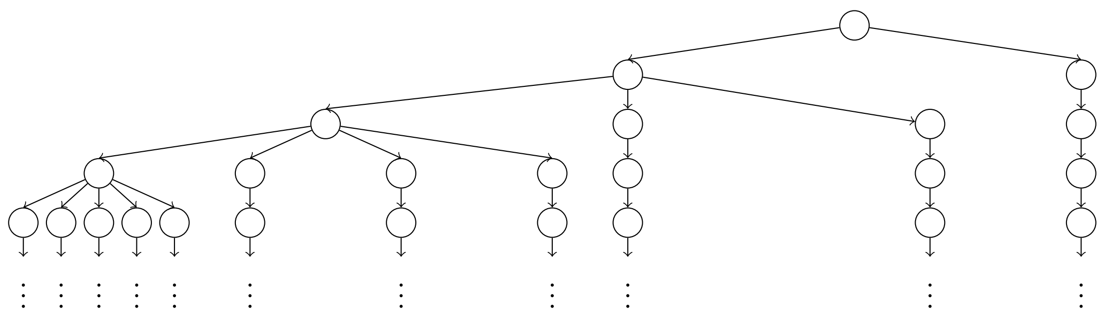
$$\|S\| = \sup_{n \geq 1} \left(\frac{K(1, n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

como se quería. $\square$

En los siguientes dos ejemplos mostramos a un árbol donde el operador S no es acotado y otro árbol donde sí es acotado.

Ejemplo 3.4. Sea T el árbol con raíz que se construye como: la raíz tendrá dos hijos, teniendo a estos dos vértices, el siguiente proceso de construcción se aplicará de forma consecutiva; para el primer vértice v que está más hacia la izquierda le pediremos que tenga $|v|+1$ hijos y los demás vértices tendrán un solo hijo. Entonces el operador S no es acotado en los espacios $\mathbb{H}^p(T)$ y $\mathbb{H}_0^p(T)$.

Demostración. Antes de comenzar la prueba, en la siguiente figura mostramos al árbol descrito en este ejemplo.



Para mostrar que el operador S no es acotado en $\mathbb{H}^p(T)$ y $\mathbb{H}_0^p(T)$ utilizaremos los teoremas 3.2 y 3.3. Mostraremos que el conjunto

$$\left\{\frac{K(1,n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

no es acotado.

Sea $n \in \mathbb{N}$, recuerde que en un árbol con raíz o para $r \in \mathbb{N}$ denotamos como $\gamma(r,w)$ al número de r-hijos del vértice w. Para $n \in \mathbb{N}_0$ definimos $K(r,n) := \max\{\gamma(r,w) : |w| = n\}$ y $\gamma(n)$ el número de vértices que están a distancia n de la raíz, observe que $\gamma(n) = \gamma(n,o)$.

Observe que $K(1,n-1) = n+1$ y que

$$\gamma(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{n^2+n+2}{2},$$

por tanto

$$\frac{K(1,n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)} = \frac{n^3+n+2}{n^2+n+2}.$$

entonces

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{K(1,n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)} = \infty,$$

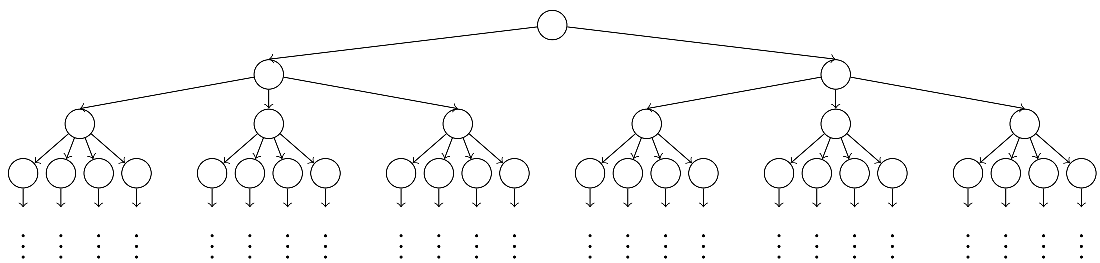
por tanto el conjunto

$$\left\{\frac{K(1,n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

no es acotado. Esto prueba que el operador S no es acotado. $\square$

Ejemplo 3.5. Sea T el árbol con raíz tal que cada vértice v (incluyendo a la raíz) tiene exactamente $|v|+1$ hijos. Entonces el operador S es acotado en los espacios $\mathbb{H}^p(T)$ y $\mathbb{H}_0^p(T)$, más aun se tiene que $\|S\| = 1$.

Demostración. Antes de comenzar la prueba, en la siguiente figura mostramos al árbol descrito en este ejemplo.



Para mostrar que el operdor S es acotado en $\mathbb{H}^p(T)$ y $\mathbb{H}_0^p(T)$ utilizaremos a los teoremas 3.2 y 3.3. Mostraremos que el conjunto

$$\left\{\frac{K(1,n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

es acotado.

Sea $n \in \mathbb{N}$, Observe que $K(1,n-1) = n+1$ y que $\gamma(n) = 1\cdot 2\cdots n\cdot(n+1)$, por tanto

$$\begin{aligned}\frac{K(1,n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)} &= \frac{(n+1)(1\cdot 2\cdots n)}{1\cdot 2\cdots n\cdot(n+1)}\\ &= 1.\end{aligned}$$

por tanto el conjunto

$$\left\{\frac{K(1,n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

es acotado. Por los teoremas 3.2 y 3.3 se tiene que el operador S es acotado y además $\|S\| = 1$. $\square$

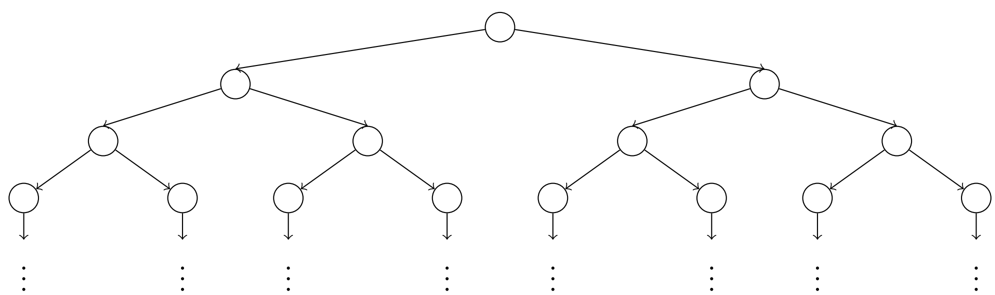
3.2. Isometría

Otro de los conceptos estudiados en análisis es el concepto de isometría. Un mapeo T de un espacio lineal normado $(X, \|\cdot\|_X)$ a un espacio lineal normado $(Y, \|\cdot\|_Y)$ se dice que es una isometría si $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$ para todo $x \in X$.

Los siguientes teoremas nos dan ejemplos de árboles donde el operador de desplazamiento hacia adelante es una isometría.

Teorema 3.6. *Sea T un árbol con raíz donde cada vértice tiene exactamente q hijos y S el operador de desplazamiento hacia adelante en $\mathbb{H}^p(T)$, donde $1 \leq p < \infty$. Entonces S es una isometría.*

Demostración. Observe que como cada vértice tiene exactamente q hijos, en automático S es acotado. En la siguiente figura se muestra un árbol donde cada vértice tiene exactamente dos hijos.



Sea f una función en $\mathbb{H}^p(T)$. Observe que $M_p(0, f) = M_p(1, Sf)$ y que $M_p(0, Sf) = 0$, además para $n \geq 1$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} M_p^p(n, f) &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |f(v)|^p \\ &= \frac{1}{q^n} \sum_{|v|=n} |f(v)|^p, \end{aligned}$$

y por otro lado, dado que cada vértice v con $|v| = n$ es padre de q elementos del conjunto de vértices $\{v : |v| = n+1\}$, entonces

$$\begin{aligned} M_p^p(n+1, Sf) &= \frac{1}{\gamma(n+1)} \sum_{|v|=n+1} |(Sf)(v)|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n+1)} \sum_{|v|=n+1} |f(\mathrm{par}(v))|^p \\ &= \frac{1}{q^{n+1}} \sum_{|v|=n} q|f(v)|^p \\ &= \frac{1}{q^n} \sum_{|v|=n} |f(v)|^p \\ &= M_p^p(n, f). \end{aligned}$$

Entonces para todo $n \geq 0$ hemos mostrado que $M_p(n, f) = M_p(n+1, Sf)$ y como $M_p(0, Sf) = 0$ concluimos que

$$\|f\|_p = \|Sf\|_p$$

y por tanto S es una isometría. $\square$

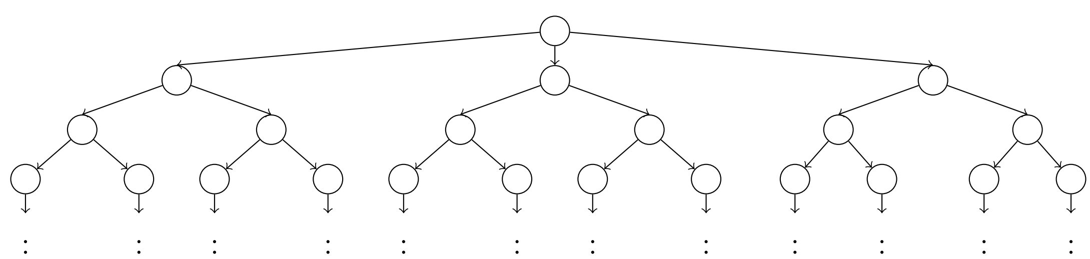
Teorema 3.7. *Sea $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números naturales y sea T un árbol con raíz y tal que $\gamma(1, v) = s_{|v|+1}$ para todo vértice v de T y S el operador de desplazamiento hacia adelante $\mathbb{H}^p(T)$, donde $1 \leq p < \infty$. Entonces S es una isometría.*

Demostración. Primero, observe que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene lo siguiente $\gamma(n) = s_1 s_2 \cdots s_n$ y $K(1, n-1) := \max\{\gamma(1, w) : |w| = n-1\} = s_n$. Entonces tenemos

$$\frac{K(1, n-1)\gamma(n-1)}{\gamma(n)} = \frac{s_n s_1 s_2 \cdots s_{n-1}}{s_1 s_2 \cdots s_n} = 1,$$

y por tanto el operador S es acotado.

En la siguiente figura se muestra un árbol donde cada vértice tiene exactamente tres vecinos. Observe que dicho árbol es un ejemplo de este teorema con la sucesión $\{3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \cdots\}$.



Mostraremos que S es una isometría. Sea f una función en $\mathbb{H}^p(T)$. Observe primero que $M_p(0,f) = M_p(1,Sf)$ y que $M_p(0,Sf) = 0$. Además para $n \geq 1$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} M_p^p(n,f) &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |f(v)|^p \\ &= \frac{1}{s_1 s_2 \cdots s_n} \sum |f(v)|^p, \end{aligned}$$

y por otro lado, dado que cada vértice v con $|v| = n$ es padre de s_{n+1} elementos del conjunto de vértices $\{v : |v| = n+1\}$, tenemos que

$$\begin{aligned} M_p^p(n+1,Sf) &= \frac{1}{\gamma(n+1)} \sum_{|v|=n+1} |(Sf)v|^p \\ &= \frac{1}{s_1 s_2 \cdots s_{n+1}} \sum_{|v|=n} s_{n+1}|f(v)|^p \\ &= \frac{s_{n+1}}{s_1 s_2 \cdots s_{n+1}} \sum_{|v|=n} |f(v)|^p \\ &= \frac{1}{s_1 s_2 \cdots s_n} \sum_{|v|=n} |f(v)|^p \\ &= M_p^p(n,f) \end{aligned}$$

Entonces para todo $n \geq 0$ se tiene $M_p(n,f) = M_p(n+1,Sf)$ y como $M_p(0,Sf) = 0$ concluimos que

$$\|f\|_p = \|Sf\|_p$$

y por tanto S es una isometría. $\square$

3.3. El operador S no es hipercíclico.

Al igual que con el operador multiplicación, nos preguntamos si el operador de desplazamiento hacia adelante podría ser hipercíclico y llegamos al siguiente resultado. Observe que el concepto de hiperciclicidad solo tiene sentido estudiarlo en $\mathbb{H}_0^p(T)$ el cual es un espacio separable a diferencia de $\mathbb{H}^p(T)$ que no es separable.

Teorema 3.8. *Sea T un árbol con raíz o y S el operador de desplazamiento hacia adelante. Supongamos que S es acotado en $\mathbb{H}_0^p(T)$, donde $1 \leq p < \infty$. Entonces S no es hipercíclico en $\mathbb{H}_0^p(T)$.*

Demostración. Procederemos por contradicción. Suponga que S es hipercíclico, entonces existe $f \in \mathbb{H}_0^p(T)$ tal que $\overline{Orb(S,f)} = \mathbb{H}_0^p(T)$. Sea $g \in \mathbb{H}_0^p(T)$ tal que $g(o) \neq 0$. Como la órbita de f bajo S es densa en X entonces existe una sucesión $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $S^{n_k}(f) \longrightarrow g$.
Sea $\epsilon > 0$ sabemos entonces que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|S^{n_k} f - g\|_p < \epsilon$ para todo $k \geq N$, luego por la manera en que se define a la norma $\|\cdot\|_p$ tenemos que $M_p(r, S^{n_k} f - g) < \epsilon$ para todo $k \geq N$ y todo $r \in \mathbb{N}_0$, en particular para toda $k \geq N$ se tiene

$$\begin{aligned} \epsilon &> M_p(0, S^{n_k} f - g) \\ &= |(S^{n_k} f - g)(o)| \\ &= |(S^{n_k} f)(o) - g(o)| \\ &= |g(o)|, \end{aligned}$$

luego como ϵ es arbitrario concluimos que $g(o) = 0$, lo cual es una contradicción. Entonces S no puede ser hipercíclico en $\mathbb{H}_0^p(T)$. $\square$

Otro de los objetivos que nos habíamos propuesto para este trabajo era calcular el espectro del operador S, sin embargo por limitaciones de tiempo ya no fue posible atacar este problema y lo dejamos para un trabajo futuro.

CAPÍTULO 4

El operador de desplazamiento hacia atrás en $\mathbb{H}^p(T)$ y $\mathbb{H}_0^p(T)$

Otro de los operadores que aparece en la literatura y el último que estudiaremos en estos espacios de Hardy, es el operador de desplazamiento hacia atrás, la definición de este se da originalmente en [29]. Daremos condiciones necesarias y suficientes para que sea acotado, condiciones necesarias y suficientes para decidir cuándo es hipercíclico y finalmente mostraremos algunos resultados sobre su espectro. Es importante aclarar que así como en el capítulo anterior, en este también estaremos trabajando solo sobre árboles infinitos, localmente finitos con raíz, y no en gráficas en general.

4.1. Definición y acotabilidad

Definición 4.1. Sea T un árbol con raíz y $\mathcal{F}$ el conjunto de las funciones definidas en T. Dado $f \in \mathcal{F}$ definimos al ***operador de desplazamiento hacia atrás*** como

$$(Bf)(v) = \sum_{w \in \mathrm{Chi}(v)} f(w).$$

Recuerde que en un árbol con raíz o para $r \in \mathbb{N}$ denotamos como $\gamma(r, w)$ al número de r-hijos del vértice w. Para $n \in \mathbb{N}_0$ definimos $K(r, n) := \text{máx}\{\gamma(r, w) : |w| = n\}$ y a $\gamma(n)$ como el número de vértices que están a distancia n de la raíz. Observe que $\gamma(n) = \gamma(n, o)$.
Los siguientes dos teoremas nos permiten caracterizar cuando el operador B es acotado en $\mathbb{H}^p(T)$ y $\mathbb{H}_0^p(T)$, más aún nos dan el valor de la norma en cada uno de estos espacios. En este capítulo se estará haciendo uso en distintas ocasiones de la desigualdad de Jensen (Teorema 1.11).

Teorema 4.2. *para $p \geq 1$, el operador de desplazamiento hacia atrás es acotado en $\mathbb{H}^p(T)$ si y solo si el conjunto $\left\{\frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$ es acotado. Más aún se tiene que*

$$\|B\| = \sup_{n\geq 0}\left(\frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración. Sea $f \in \mathbb{H}^p$. Para todo $n \geq 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
M_p^p(n,Bf) &= \frac{1}{\gamma(n)}\sum_{|w|=n}|(Bf)(w)|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(n)}\sum_{|w|=n}\left|\sum_{v\in\mathrm{Chi}(w)} f(v)\right|^p \\
&\leq \frac{1}{\gamma(n)}\sum_{|w|=n}\left(\sum_{v\in\mathrm{Chi}(w)}|f(v)|\right)^p \\
&\leq \frac{1}{\gamma(n)}\sum_{|w|=n}\gamma(1,w)^{p-1}\sum_{v\in\mathrm{Chi}(w)}|f(v)|^p \quad \text{(por la desigualdad de Jensen)} \\
&\leq \frac{(K(1,n))^{p-1}}{\gamma(n)}\frac{\gamma(n+1)}{\gamma(n+1)}\sum_{|v|=n+1}|f(v)|^p \\
&= \frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)}M_p^p(n+1,f).
\end{aligned}$$

Suponga primero que el conjunto $\left\{\frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$ es acotado y defina

$$C := \sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left\{\frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)}\right\}.$$

Utilizando la desigualdad obtenida anteriormente tenemos que

$$M_p^p(n,Bf) \leq \frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)}M_p^p(n+1,f) \leq CM_p^p(n+1,f).$$

Por tanto para todo $n \geq 0$,

$$M_p^p(n,Bf) \leq C\|f\|_p^p.$$

Esta desigualdad implica que $Bf \in \mathbb{H}^p(T)$, además se tiene que $\|Bf\|_p^p \leq C\|f\|_p^p$, por tanto
$$\|Bf\|_p \leq C^{\frac{1}{p}}\|f\|_p,$$
lo cual muestra que B es acotado en $\mathbb{H}^p(T)$ y además
$$\|B\|_p \leq C^{\frac{1}{p}}. \tag{4.1}$$

Para mostrar la otra implicación del teorema haremos lo siguiente. Considere una sucesión de vértices $\{w_n\}_{n\geq 0}$ tal que $|w_n| = n$ y que $\gamma(1, w_n) = K(1, n)$. Defina a la función f como

$$f(v) := \begin{cases} 1, & \text{si } v \text{ es la raiz,} \\ \left(\frac{\gamma(n)}{K(1,n-1)}\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } v \in \mathrm{Chi}(w_{n-1}) \text{ para algún } n \geq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Observe que $M_p^p(0, f) = 1$ y para todo $n \geq 1$ se tiene

$$\begin{aligned} M_p^p(n, f) &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |f(v)|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{v \in \mathrm{Chi}(w_{n-1})} |f(v)|^p \\ &= \frac{K(1, n-1)}{\gamma(n)} \left| \left(\frac{\gamma(n)}{K(1, n-1)} \right)^{\frac{1}{p}} \right|^p \\ &= 1, \end{aligned}$$

por tanto $\|f\|_p = 1$ y en particular $f \in \mathbb{H}^p(T)$. Por otro lado tenemos que para todo

$n \geq 0$

$$\begin{aligned}
M_p^p(n, Bf) &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |(Bf)(v)|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(n)} |Bf(w_n)|^p \qquad \text{(pues } Bf(v) \neq 0 \text{ si y solo si } v = w_n) \\
&= \frac{1}{\gamma(n)} \left| \sum_{v \in \mathrm{Chi}(w_n)} f(v) \right|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(n)} \left| \gamma(1, w_n) \left(\frac{\gamma(n+1)}{K(1,n)} \right)^{\frac{1}{p}} \right|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(n)} \left| K(1,n) \left(\frac{\gamma(n+1)}{K(1,n)} \right)^{\frac{1}{p}} \right|^p \\
&= \frac{(K(1,n))^{p-1} \gamma(n+1)}{\gamma(n)}.
\end{aligned}$$

Sacando raiz p-ésima en la desigualdad anterior se tiene que

$$M_p(n, Bf) = \left(\frac{(K(1,n))^{p-1} \gamma(n+1)}{\gamma(n)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Observe que si el conjunto $\left\{ \frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)} : n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ no es acotado entonces también se cumplirá que el conjunto $\{M_p(n, Bf) : n \in \mathbb{N}_0\}$ no es acotado y por tanto $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} M_p(n, Bf)$ no existe. Entonces $Bf \notin \mathbb{H}^p(T)$. Esto muestra que B no es acotado y entonces quedan demostradas las dos implicaciones del teorema.

Ahora calcularemos la norma del operador B. Suponga B acotado en $\mathbb{H}^p(T)$. Entonces se tiene que el siguiente supremo existe

$$C := \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left\{ \frac{(K(1,n))^{p-1} \gamma(n+1)}{\gamma(n)} \right\}.$$

Tomemos f como en la expresión (4.2), como $\|f\|_p = 1$ y además $\|Bf\|_p = C^{\frac{1}{p}}$, se tiene entonces que

$$\|B\| \geq C^{\frac{1}{p}},$$

este resultado junto con la ecuación (4.1) implican

$$\|B\| = C^{\frac{1}{p}} = \sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

demostrando así el teorema. □

Teorema 4.3. *Para $p \geq 1$, el operador de desplazamiento hacia atrás B es acotado en $\mathbb{H}_0^p(T)$ si y solo si el conjunto $\left\{\frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$ es acotado. Más aún se tiene que*

$$\|B\| = \sup_{n\geq 0}\left(\frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración. Para cada $n \geq 0$ defina la sucesión $a_n := \frac{(K(n,1))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)}$. Para probar el teorema suponga primero que el conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ es acotado y defina $C := \sup_{n\in\mathbb{N}_0}\{a_n\}$. En el teorema anterior ya demostramos que B es acotado en $\mathbb{H}^p(T)$, para demostrar que B es acotado en $\mathbb{H}_0^p(T)$ basta mostrar que si $f \in \mathbb{H}_0^p(T)$ entonces $Bf \in \mathbb{H}_0^p(T)$.

Sea $f \in \mathbb{H}_0^p(T)$. Como en particular $f \in \mathbb{H}^p(T)$ en la prueba del teorema anterior mostramos que para $n \geq 0$

$$M_p^p(n, Bf) \leq \frac{(K(n,1))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)} M_p^p(n+1, f) \leq C M_p^p(n+1, f),$$

si tomamos límites cuando $n \longrightarrow \infty$ en esta desigualdad es claro que como $f \in \mathbb{H}_0^p(T)$ entonces $Bf \in \mathbb{H}_0^p(T)$ probando que B es acotado en $\mathbb{H}_0^p(T)$ y también se tiene que

$$\|B\| \leq C^{\frac{1}{p}}. \tag{4.3}$$

Para mostrar la otra implicación del teorema probaremos que si a_n no es acotada entonces el operador de desplazamiento hacia atrás no es acotado en $\mathbb{H}_0^p(T)$. Suponga que a_n no es acotada, entonces sabemos que existe una subsucesión a_{n_k} tal que $a_{n_k} \longrightarrow \infty$. Mostraremos que si esto sucede podemos exhibir a una función $f \in \mathbb{H}_0^p(T)$ pero tal que $Bf \notin \mathbb{H}_0^p(T)$.

Para cada $n \geq 0$ defina

$$c_n := \begin{cases} \frac{1}{a_{n_k}}, & \text{si } n = n_k \text{ para algún } k, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

observe que $c_n \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Considere una sucesión de vértices $\{w_n\}_{n\geq 0}$ tal que $|w_n| = n$ y que $\gamma(1, w_n) = K(1, n)$. Defina a la función f como

$$f(v) := \begin{cases} 1, & \text{si } v \text{ es la raiz} \\ \left(\frac{c_{n-1}\gamma(n)}{K(1,n-1)}\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } v \in \mathrm{Chi}(w_{n-1}) \text{ para algún } n \geq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observe que para todo $n \geq 1$ se tiene

$$\begin{aligned} M_p^p(n, f) &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |f(v)|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{v \in \mathrm{Chi}(w_{n-1})} |f(v)|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} \gamma(1, w_{n-1}) \left| \left(\frac{c_{n-1}\gamma(n)}{K(1, n-1)} \right)^{\frac{1}{p}} \right|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} K(1, n-1) \left| \left(\frac{c_{n-1}\gamma(n)}{K(1, n-1)} \right)^{\frac{1}{p}} \right|^p \\ &= c_{n-1} \end{aligned}$$

entonces como $c_n \longrightarrow 0$ se tiene que $f \in \mathbb{H}_0^p(T)$.

Por otro lado tenemos que para todo $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
M_p^p(n, Bf) &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |(Bf)(v)|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} \left| \sum_{w \in \mathrm{Chi}(v)} f(w) \right|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(n)} \left| \sum_{v \in \mathrm{Chi}(w_n)} f(v) \right|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(n)} \left| \gamma(1, w_n) \left(\frac{c_n \gamma(n+1)}{K(1,n)} \right)^{\frac{1}{p}} \right|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(n)} \left| K(1,n) \left(\frac{c_n \gamma(n+1)}{K(1,n)} \right)^{\frac{1}{p}} \right|^p \\
&= \frac{(K(n,1))^{p-1} \gamma(n+1)}{\gamma(n)} c_n \\
&= a_n c_n.
\end{aligned}$$

Observe que

$$a_n c_n := \begin{cases} 1, & \text{si } n = n_k \text{ para algún } k, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

Por tanto el siguiente límite no es igual a cero (si es que existe)

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} M_p(n, Bf) = \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n c_n$$

y por tanto $Bf \notin \mathbb{H}_0^p(T)$. Entonces B no es acotado, probando así las dos implicaciones del teorema.

Ahora calcularemos la norma del operador B. Suponga B acotado en $\mathbb{H}_0^p(T)$, considere una sucesión de vértices $\{w_n\}_{n \geq 0}$ tal que $|w_n| = n$ y que $\gamma(1, w_n) = K(1, n)$. Defina a la siguiente sucesión de funciones $\{f_k\}_{k \geq 1}$ en $\mathbb{H}_0^p(T)$ donde

$$f_k(v) := \begin{cases} 1, & \text{si } v \text{ es la raiz,} \\ \left(\frac{\gamma(n)}{K(1,n-1)} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } v \in \mathrm{Chi}(w_{n-1}) \text{ y } 1 \leq n \leq k, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $k \geq 1$ fijo, observe que para todo $1 \leq n \leq k$ se tiene

$$\begin{aligned} M_p^p(n, f_k) &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |f_k(v)|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{v \in \mathrm{Chi}(w_{n-1})} |f_k(v)|^p \\ &= \frac{K(1,n-1)}{\gamma(n)} \left| \left(\frac{\gamma(n)}{K(1,n-1)} \right)^{\frac{1}{p}} \right|^p \\ &= 1. \end{aligned}$$

Para $n > k$ se tiene $M_p^p(n, f_k) = 0$ y como $M_p^p(0, f_k) = 1$ entonces $\|f_k\|_p = 1$ para todo $k \geq 1$.
Por otro lado para todo $0 \leq n \leq k-1$ tenemos que

$$\begin{aligned} M_p^p(n, Bf_k) &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |(Bf_k)(v)|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} |(Bf_k)(w_n)|^p \qquad \text{(pues } (Bf_k)(v) \neq 0 \text{ si y solo si } v = w_n) \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} \left| \sum_{v \in \mathrm{Chi}(w_n)} f_k(v) \right|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} \left| \gamma(1, w_n) \left(\frac{\gamma(n+1)}{K(1,n)} \right)^{\frac{1}{p}} \right|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} \left| K(1,n) \left(\frac{\gamma(n+1)}{K(1,n)} \right)^{\frac{1}{p}} \right|^p \\ &= \frac{(K(1,n))^{p-1} \gamma(n+1)}{\gamma(n)}. \end{aligned}$$

Observe que para $n > k-1$ se tiene $M_p^p(n, Bf_k) = 0$, se sigue entonces que

$$\begin{aligned} \|Bf_k\|_p^p &= \sup_{n \in \mathbb{N}_0} M_p^p(n, Bf_k) \\ &= \sup_{0 \leq n \leq k-1} M_p^p(n, Bf_k) \\ &= \sup_{0 \leq n \leq k-1} \frac{(K(1,n))^{p-1} \gamma(n+1)}{\gamma(n)}, \end{aligned}$$

entonces para todo $k \geq 1$ se tiene que

$$\|B\| = \sup\{\|Bf\|_p : f \in \mathbb{H}^p(T),\ \ \|f\|_p = 1\} \geq \|Bf_k\|_p = \sup_{0\leq n\leq k-1}\left(\frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

tomando límites cuando $k \longrightarrow \infty$ tenemos que

$$\|B\| \geq \sup_{n\geq 0}\left(\frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Esta desigualdad junto con la ecuación (4.3) implican

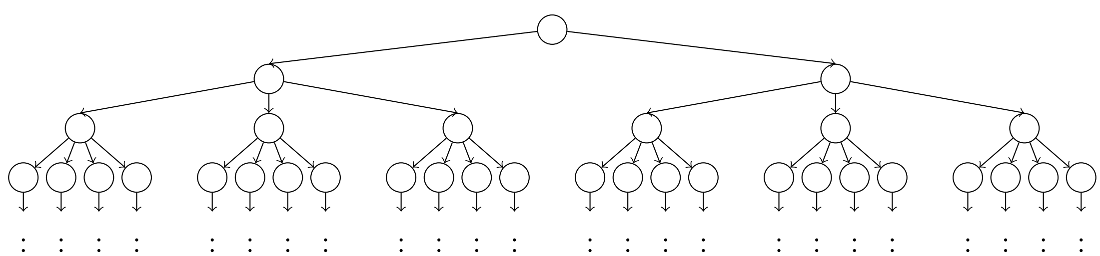
$$\|B\| = \sup_{n\geq 0}\left(\frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

como se quería. □

En la sección 4.3 daremos ejemplos de árboles donde el operador B es acotado. En el siguiente ejemplo que de hecho coincide con el árbol del ejemplo 3.5, se tiene que el operador B no es acotado.

Ejemplo 4.4. Sea T el árbol con raíz tal que cada vértice v (incluyendo a la raíz) tiene exactamente $|v| + 1$ hijos. Entonces, para $p \geq 1$ el operador B no es acotado en los espacios $\mathbb{H}^p(T)$ y $\mathbb{H}^p_0(T)$.

Demostración. Antes de comenzar la prueba, en la siguiente figura mostramos al árbol descrito en este ejemplo.



Para mostrar que el operador B no es acotado en $\mathbb{H}^p(T)$ y $\mathbb{H}^p_0(T)$ utilizaremos los teoremas 4.2 y 4.3. Mostraremos que el conjunto

$$\left\{\frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$$

no es acotado.

Para $n \in \mathbb{N}_0$, recuerde que en un árbol con raíz o para $r \in \mathbb{N}$ denotamos como $\gamma(r, w)$ al número de r-hijos del vértice w. Para $n \in \mathbb{N}_0$ definimos $K(r, n) :=$ $\max\{\gamma(r, w) : |w| = n\}$ y $\gamma(n)$ el número de vértices que están a distancia n de la raíz, observe que $\gamma(n) = \gamma(n, o)$.

Sea $n \in \mathbb{N}_0$, observe que $K(1, n) = n + 2$ y que $\gamma(n) = 1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n + 1)$, por tanto

$$\begin{aligned}
\frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)} &= \frac{(n+2)^{p-1}(1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n+1) \cdot (n+2))}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n+1)} \\
&= (n+2)^{p-1}(n+2) \\
&= (n+2)^p.
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (n+2)^p = \infty,$$

concluimos que el conjunto

$$\left\{ \frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)} : n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

no es acotado. Por los teoremas 3.2 y 3.3 se tiene que el operador S no es acotado. $\square$

En el resto del trabajo, aun cuando no se diga estaremos suponiendo que $p \geq 1$.

Observe que si el operador B es acotado en el espacio de Hardy o en el espacio de Hardy pequeño, se cumplirá que cualquier potencia de este operador también lo será. Nos será útil más adelante calcular el valor de su norma. El siguiente teorema nos dice cuál es el valor de la norma de potencias del operador B, resultado que ocuparemos en la sección donde hablaremos de su espectro.

Teorema 4.5. *Sea B el operador de desplazamiento hacia atrás acotado en $\mathbb{H}^p(T)$ y sea $j \geq 2$ un número natural. Entonces la norma del operador B^j es*

$$\|B^j\| = \sup_{n \geq 0} \left(\frac{(K(j,n))^{p-1}\gamma(n+j)}{\gamma(n)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración. Sea $j \geq 2$ un número natural. Ya mencionamos que como B es acotado en $\mathbb{H}^p(T)$ entonces el operador B^j también es acotado. Calcularemos su norma.

Primero probaremos que el conjunto $\left\{\frac{(K(j,n))^{p-1}\gamma(n+j)}{\gamma(n)} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$ es acotado de la siguiente manera. Considere una sucesión de vértices $\{w_n\}_{n\geq 0}$ tal que $|w_n| = n$ y que $\gamma(j, w_n) = K(j,n)$. Defina a la función f como

$$f(v) := \begin{cases} 1, & \text{si } |v| < j, \\ \left(\frac{\gamma(n)}{K(j,n-j)}\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } v \in \mathrm{Chi}^j(w_{n-j}) \text{ para algún } n \geq j, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \tag{4.4}$$

observe que $M_p^p(n,f) = 1$ para todo $n < j$ y que para todo $n \geq j$ se tiene

$$\begin{aligned} M_p^p(n,f) &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |f(v)|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{v \in \mathrm{Chi}^j(w_{n-j})} |f(v)|^p \\ &= \frac{K(j,n-j)}{\gamma(n)} \left| \left(\frac{\gamma(n)}{K(j,n-j)}\right)^{\frac{1}{p}} \right|^p \\ &= 1, \end{aligned}$$

por tanto $\|f\|_p = 1$ y en particular $f \in \mathbb{H}^p(T)$. Por otro lado tenemos que para todo $n \geq 0$

$$\begin{aligned} M_p^p(n, B^j f) &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |(B^j f)(v)|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} |(B^j f)(w_n)|^p \qquad (\text{pues } (B^j f)(v) \neq 0 \text{ si y solo si } v = w_n) \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} \left| \sum_{v \in \mathrm{Chi}^j(w_n)} f(v) \right|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} \left| \gamma(j, w_n) \left(\frac{\gamma(n+j)}{K(j,n)}\right)^{\frac{1}{p}} \right|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} \left| K(j,n) \left(\frac{\gamma(n+j)}{K(j,n)}\right)^{\frac{1}{p}} \right|^p \\ &= \frac{(K(j,n))^{p-1}\gamma(n+j)}{\gamma(n)}. \end{aligned}$$

Sacando raiz p-ésima en la desigualdad anterior se tiene que

$$M_p(n, B^j f) = \left(\frac{(K(j,n))^{p-1}\gamma(n+j)}{\gamma(n)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observe que como B^j es acotado entonces el conjunto $\left\{ \frac{(K(j,n))^{p-1}\gamma(n+j)}{\gamma(n)} : n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ es acotado. Defina

$$C := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left\{ \frac{(K(j,n))^{p-1}\gamma(n+j)}{\gamma(n)} \right\}.$$

Por otro lado, observe que dada $f \in \mathbb{H}^p$. Para todo $n \geq 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
M_p^p(n, B^j f) &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|w|=n} |(B^j f)(w)|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|w|=n} \left| \sum_{v\in \mathrm{Chi}^j(w)} f(v) \right|^p \\
&\leq \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|w|=n} \left(\sum_{v\in \mathrm{Chi}^j(w)} |f(v)| \right)^p \\
&\leq \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|w|=n} \gamma(j,w)^{p-1} \sum_{v\in \mathrm{Chi}^j(w)} |f(v)|^p \quad \text{(por la desigualdad de Jensen)} \\
&\leq \frac{(K(j,n))^{p-1}}{\gamma(n)} \frac{\gamma(n+j)}{\gamma(n+j)} \sum_{|v|=n+j} |f(v)|^p \\
&= \frac{(K(j,n))^{p-1}\gamma(n+j)}{\gamma(n)} M_p^p(n+j, f).
\end{aligned}$$

Esta desigualdad implica que

$$M_p^p(n, B^j f) \leq \frac{(K(j,n))^{p-1}\gamma(n+j)}{\gamma(n)} M_p^p(n+j, f) \leq C M_p^p(n+j, f).$$

Por tanto para todo $n \geq 0$,

$$M_p^p(n, B^j f) \leq C\|f\|_p^p.$$

Entonces se tiene que $\|Bf\|_p^p \leq C\|f\|_p^p$, por tanto

$$\|B^j f\|_p \leq C^{\frac{1}{p}} \|f\|_p,$$

lo cual muestra que

$$\|B^j\| \leq C^{\frac{1}{p}}. \tag{4.5}$$

Tomemos f como en la expresión (4.4). Como $\|f\|_p = 1$ y además $\|B^j f\|_p = C^{\frac{1}{p}}$, se tiene entonces que

$$\|B^j\| \geq C^{\frac{1}{p}},$$

esto resultado junto con la ecuación (4.5) implican

$$\|B^j\| = C^{\frac{1}{p}} = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{(K(j,n))^{p-1}\gamma(n+j)}{\gamma(n)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

demostrando así el teorema. □

Teorema 4.6. *Sea B el operador de desplazamiento hacia atrás acotado en $\mathbb{H}_0^p(T)$ y sea $j \geq 2$ un número natural. Entonces la norma del operador B^j es*

$$\|B^j\| = \sup_{n\geq 0} \left(\frac{(K(j,n))^{p-1}\gamma(n+j)}{\gamma(n)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración. Sea $j \geq 2$ un número natural, así como en el teorema anterior observe que si B es acotado en $\mathbb{H}_0^p(T)$ entonces también lo será B^j. Calcularemos la norma de este.
Para cada $n \geq 0$ defina la sucesión $a_n := \frac{(K(j,n))^{p-1}\gamma(n+j)}{\gamma(n)}$. Mostraremos que el conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ es acotado. Procederemos por contradicción. Si $\{a_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ no es acotado, entonces sabemos que existe una subsucesión a_{n_k} tal que $a_{n_k} \longrightarrow \infty$. Mostraremos que si esto sucede podemos exhibir a una función $f \in \mathbb{H}_0^p(T)$ pero tal que $B^j f \notin \mathbb{H}_0^p(T)$. Para cada $n \geq 0$ defina

$$c_n := \begin{cases} \frac{1}{a_{n_k}}, & \text{si } n = n_k \text{ para algún } k, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

observe que $c_n \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Considere una sucesión de vértices $\{w_n\}_{n\geq 0}$ tal que $|w_n| = n$ y que $\gamma(j, w_n) = K(j,n)$. Defina a la función f como

$$f(v) := \begin{cases} 1, & \text{si } |v| < j \\ \left(\frac{c_{n-j}\gamma(n)}{K(j,n-j)} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } v \in \operatorname{Chi}^j(w_{n-j}) \text{ para algún } n \geq j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observe que para todo $n \geq j$ se tiene

$$\begin{aligned}
M_p^p(n,f) &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |f(v)|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{v \in \mathrm{Chi}^j(w_{n-j})} |f(v)|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(n)} \gamma(j, w_{n-j}) \left| \left(\frac{c_{n-j}\gamma(n)}{K(j,n-j)} \right)^{\frac{1}{p}} \right|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(n)} K(j,n-j) \left| \left(\frac{c_{n-j}\gamma(n)}{K(j,n-j)} \right)^{\frac{1}{p}} \right|^p \\
&= c_{n-j}
\end{aligned}$$

entonces como $c_n \longrightarrow 0$ se tiene que $f \in \mathbb{H}_0^p(T)$.
Por otro lado tenemos que para todo $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
M_p^p(n,B^j f) &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |(B^j f)(v)|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} \left| \sum_{w \in \mathrm{Chi}^j(v)} f(w) \right|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(n)} \left| \sum_{v \in \mathrm{Chi}^j(w_n)} f(v) \right|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(n)} \left| \gamma(j, w_n) \left(\frac{c_n \gamma(n+j)}{K(j,n)} \right)^{\frac{1}{p}} \right|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(n)} \left| K(j,n) \left(\frac{c_n \gamma(n+j)}{K(j,n)} \right)^{\frac{1}{p}} \right|^p \\
&= \frac{(K(j,n))^{p-1}\gamma(n+j)}{\gamma(n)} c_n \\
&= a_n c_n.
\end{aligned}$$

Observe que

$$a_n c_n := \begin{cases} 1, & \text{si } n = n_k \text{ para algún } k, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

por lo tanto el siguiente límite no es cero (si es que existe)

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} M_p(n, B^j f) = \lim_{n\longrightarrow\infty} a_n c_n$$

y por tanto $B^j f \notin \mathbb{H}_0^p(T)$. Entonces B^j no sería acotado lo cual es una contradicción, por tanto $\{a_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ es acotado. Defina $C := \sup_{n\in\mathbb{N}_0}\{a_n\}$.

Para toda $f \in \mathbb{H}_0^p(T)$ se tiene que en particular $f \in \mathbb{H}^p(T)$, en la prueba del teorema anterior mostramos que para $n \geq 0$

$$M_p^p(n, B^j f) \leq \frac{(K(j,n))^{p-1}\gamma(n+j)}{\gamma(n)} M_p^p(n+j, f),$$

por lo que

$$\|B^j\| \leq C^{\frac{1}{p}}. \tag{4.6}$$

Ahora, considere una sucesión de vértices $\{w_n\}_{n\geq 0}$ tal que $|w_n| = n$ y que $\gamma(j, w_n) = K(j,n)$. Defina a la siguiente sucesión de funciones $\{f_k\}_{k\geq 1}$ donde

$$f_k(v) := \begin{cases} 1, & \text{si } |v| < j, \\ \left(\frac{\gamma(n)}{K(j,n-j)}\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } v \in \mathrm{Chi}^j(w_{n-j}) \text{ y } j \leq n \leq k, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $k \geq 1$ fijo. Observe que para todo $n < j$ tenemos $M_p^p(n, f_k) = 1$, para todo $j \leq n \leq k$ se cumple

$$\begin{aligned} M_p^p(n, f_k) &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |f_k(v)|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{v\in\mathrm{Chi}^j(w_{n-j})} |f_k(v)|^p \\ &= \frac{K(j,n-j)}{\gamma(n)} \left| \left(\frac{\gamma(n)}{K(j,n-j)}\right)^{\frac{1}{p}} \right|^p \\ &= 1, \end{aligned}$$

y para $n > k$ se tiene $M_p^p(n, f_k) = 0$, entonces $\|f_k\|_p = 1$ para todo $k \geq 1$.

Por otro lado dado k fijo, para todo $0 \leq n \leq k-j$ tenemos que

$$\begin{aligned}
M_p^p(n, B^j f_k) &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |(B^j f_k)(v)|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(n)} |(B^j f_k)(w_n)|^p \qquad \text{(pues } (B^j f_k)(v) \neq 0 \text{ si y solo si } v = w_n\text{)} \\
&= \frac{1}{\gamma(n)} \left| \sum_{v \in \mathrm{Chi}^j(w_n)} f_k(v) \right|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(n)} \left| \gamma(j, w_n) \left(\frac{\gamma(n+j)}{K(j,n)} \right)^{\frac{1}{p}} \right|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(n)} \left| K(j,n) \left(\frac{\gamma(n+j)}{K(j,n)} \right)^{\frac{1}{p}} \right|^p \\
&= \frac{(K(j,n))^{p-1} \gamma(n+1)}{\gamma(n)},
\end{aligned}$$

y que para $n > k-j$ se tiene $M_p^p(n, B^j f_k) = 0$. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned}
\|B^j f_k\|_p^p &= \sup_{n \in \mathbb{N}_0} M_p^p(n, B^j f_k) \\
&= \sup_{0 \leq n \leq k-j} M_p^p(n, B^j f_k) \\
&= \sup_{0 \leq n \leq k-j} \frac{(K(j,n))^{p-1} \gamma(n+j)}{\gamma(n)},
\end{aligned}$$

entonces para todo $k \geq 1$ se tiene que

$$\|B^j\| \geq \|B^j f_k\|_p = \sup_{0 \leq n \leq k-j} \left(\frac{(K(j,n))^{p-1} \gamma(n+j)}{\gamma(n)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

tomando límites cuando $k \longrightarrow \infty$ tenemos que

$$\|B\| \geq \sup_{n \geq 0} \left(\frac{(K(j,n))^{p-1} \gamma(n+j)}{\gamma(n)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Esta desigualdad junto con la ecuación (4.6) implican

$$\|B^j\| = \sup_{n \geq 0} \left(\frac{(K(j,n))^{p-1} \gamma(n+j)}{\gamma(n)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

como se quería. $\square$

4.2. Hiperciclicidad

En los capítulos anteriores nos preguntamos si el operador multiplicación y el operador de desplazamiento hacia adelante podrían ser hipercíclicos en $\mathbb{H}_0^p(T)$. En esta sección hacemos la misma pregunta para el operador de desplazamiento hacia atrás B. Recuerde que para los dos primeros se obtuvo que estos no pueden ser hipercíclicos, sin embargo para el operador B encontraremos condiciones necesarias y suficientes para cuando este sí es hipercíclico en el espacio $\mathbb{H}_0^p(T)$, resultado que se plasma en el siguiente teorema.

Teorema 4.7. *Sea T un árbol con raíz y B el operador de desplazamiento hacia atrás. Supongamos que $\{\gamma(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es no decreciente y B es acotado en $\mathbb{H}_0^p(T)$. Entonces B es hipercíclico si y solo si existe una sucesión creciente de enteros positivos $\{n_k\}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{\gamma(n)}{\gamma(n+n_k)} = 0.$$

Demostración. Primero suponga que existe una sucesión creciente de enteros positivos $\{n_k\}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $\lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{\gamma(n)}{\gamma(n+n_k)} = 0$. Mostraremos que el operador B es hipercíclico verificando que se satisfacen todas las condiciones del criterio de hiperciclicidad descritas en el teorema 1.14.

Defina a X como el conjunto $X := \{g \in \mathbb{T}_p : g \text{ es de soporte finito}\}$. Ya mostramos en el lema 2.8 que X es un conjunto denso de $\mathbb{H}_0^p(T)$. Sea $n \in \mathbb{N}$, es fácil ver que para toda $f \in \mathbb{H}_0^p(T)$ y $u \in T$, se tiene

$$(B^n f)(u) = \sum_{v\in \mathrm{Chi}^n(u)} f(v).$$

(1) Como g es de soporte finito, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $g(v) = 0$ para todo vértice v con $|v| \geq N$. Además tenemos que si $v \in \mathrm{Chi}(u)$ entonces $|v| = |u|+1$ y por tanto para $v \in \mathrm{Chi}^n(u)$ se tiene $|v| = |u| + n$. Entonces para todo vértice v, si $n \geq N$ y $v \in \mathrm{Chi}^n(u)$ entonces $g(v) = 0$. Se sigue que $(B^n g)(v) = 0$ para todo vértice v siempre que $n \geq N$. Entonces la función $B^n g$ es idénticamente cero si $n \geq N$ lo cual implica que $B^{n_k} g \longrightarrow 0$ para toda $g \in X$, cuando $k \longrightarrow \infty$.

(2) Dada $g \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, defina la función $T_n g$ con valores en los complejos como

$$(T_n g)(v) := \begin{cases} \frac{1}{\gamma(\mathrm{par}^n(v),n)} g(\mathrm{par}^n(v)), & \text{si } v \in V^n, \\ 0, & \text{si } v \notin V^n, \end{cases}$$

donde V^n denota al conjunto de vértices que tienen n-ancestros.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $m \in \mathbb{N}_0$. Es fácil darse cuenta que si $m < n$ se tiene que $M_p(m, T_n g) = 0$. Por otro lado, si $m \geq n$ entonces se tiene

$$\begin{aligned}
M_p^p(m, T_n g) &= \frac{1}{\gamma(m)} \sum_{|v|=m} |(T_n g)(v)|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(m)} \sum_{|v|=m} \frac{1}{(\gamma(\mathrm{par}^n(v), n))^p} \, |g(\mathrm{par}^n(v))|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(m)} \sum_{|v|=m-n} \frac{1}{(\gamma(v, n))^p} |g(v)|^p \gamma(v, n) \\
&= \frac{1}{\gamma(m)} \sum_{|v|=m-n} \frac{1}{(\gamma(v, n))^{p-1}} |g(v)|^p.
\end{aligned}$$

Observe que entonces

$$\|T_n g\|_p = \left(\sup_{m \in \mathbb{N}_0} M_p(m, T_n g) \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sup_{m \geq n} M_p(m, T_n g) \right)^{\frac{1}{p}},$$

y por tanto

$$\|T_n g\|_p^p = \sup_{m \geq n} \frac{1}{\gamma(m)} \sum_{|v|=m-n} \frac{1}{(\gamma(v, n))^{p-1}} |g(v)|^p.$$

Por otro lado como $\gamma(v, n) \geq 1$ entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma(m)} \sum_{|v|=m-n} \frac{1}{(\gamma(v, n))^{p-1}} |g(v)|^p &\leq \frac{1}{\gamma(m)} \sum_{|v|=m-n} |g(v)|^p \\
&= \frac{\gamma(m-n)}{\gamma(m)} M_p^p(m-n, g).
\end{aligned}$$

Para cada $g \in X$ defina $\omega(g)$ como

$$\omega(g) := \max\{n_0 \in \mathbb{N} : \text{existe } v \in T \text{ con } |v| = n_0 \text{ y } g(v) \neq 0\},$$

este número existe por ser g de soporte finito, más aún se tiene que $M_p(j, g) = 0$ para todo $j > \omega(g)$.

Por tanto

$$
\begin{aligned}
\|T_n g\|_p^p &\leq \sup_{m\geq n} \frac{\gamma(m-n)}{\gamma(m)} M_p^p(m-n,g) \\
&= \sup_{0\leq m-n\leq \omega(g)} \frac{\gamma(m-n)}{\gamma(m)} M_p^p(m-n,g) \\
&= \sup_{0\leq s\leq \omega(g)} \frac{\gamma(s)}{\gamma(s+n)} M_p^p(s,g) \\
&\leq \|g\|_p^p \sup_{0\leq s\leq \omega(g)} \frac{\gamma(s)}{\gamma(s+n)} \\
&= \|g\|_p^p \max_{0\leq s\leq \omega(g)} \frac{\gamma(s)}{\gamma(s+n)}.
\end{aligned}
$$

En particular para la sucesión $\{n_k\}$ tenemos que

$$
\|T_{n_k} g\|_p^p \leq \|g\|_p^p \max_{0\leq s\leq \omega(g)} \frac{\gamma(s)}{\gamma(s+n_k)}.
$$

Sabemos por la hipótesis que para todo s se tiene $\lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{\gamma(s)}{\gamma(s+n_k)} = 0$, por tanto si tomando límites cuando $k \longrightarrow \infty$ en ambos lados de la desigualdad anterior tenemos

$$
\lim_{k\longrightarrow\infty} \|T_{n_k} g\|_p^p \leq \|g\|_p^p \lim_{k\longrightarrow\infty} \max_{0\leq s\leq \omega(g)} \frac{\gamma(s)}{\gamma(s+n_k)} = 0,
$$

de donde concluimos que

$$
\lim_{k\longrightarrow\infty} \|T_{n_k} g\|_p = 0
$$

y por tanto

$$
\lim_{k\longrightarrow\infty} T_{n_k} g = 0
$$

cumpliendose así la tercera condición del criterio de hiperciclicidad descrita en el teorema 1.14.

(3) Por último, mostraremos que $B^n(T_n g) = g$ para toda $g \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Si

$g \in X$ y $u \in T$, entonces

$$\begin{array}{rcl} B^n(T_n g)(u) & = & \displaystyle\sum_{v \in \mathrm{Chi}^n(u)} (T_n g)(v) \\ & = & \displaystyle\sum_{v \in \mathrm{Chi}^n(u)} \frac{1}{\gamma(\mathrm{par}^n(v))} g(\mathrm{par}^n(v)) \\ & = & \displaystyle\sum_{v \in \mathrm{Chi}^n(u)} \frac{1}{\gamma(u,n)} g(u) \\ & = & g(u). \end{array}$$

Por tanto $B^{n_k}(T_{n_k} g) \longrightarrow g$ cuando $k \longrightarrow \infty$, para cada $g \in X$, cumpliendose así la segunda condición del criterio de hiperciclicidad. Entonces por el criterio de hiperciclicidad tenemos que B es hipercíclico.

Ahora suponga que el operador B es hipercíclico en $\mathbb{H}_0^p(T)$. Probaremos unas desigualdades que utilizaremos en la demostración de esta otra implicación del teorema. Primero mostraremos que si $s \in \mathbb{N}$ fijo, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un entero $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\gamma(s)}{\gamma(s)+\gamma(s+N)} < \epsilon$.

Sea $s \in \mathbb{N}$ fijo y $\epsilon > 0$, sin pérdida de generalidad suponga $\epsilon < 1$. Como B es hipercíclico sabemos que existe un vector hipercíclico $f \in \mathbb{H}_0^p(T)$ tal que $\|f\|_p < \epsilon$. Sea $g := \chi_s$ la función indicadora del conjunto de los vértices v que cumplen con $|v| = s$, claramente $g \in \mathbb{H}_0^p(T)$ por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|B^N f - g\|_p < \epsilon$.

Observe que

$$\begin{array}{rcl} \epsilon^p & > & \|B^N f - g\|_p^p \\ & = & \displaystyle\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} \left|(B^N f - g)(v)\right|^p \\ & = & \displaystyle\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} \left| \left(\sum_{w \in \mathrm{Chi}^N(v)} f(w) \right) - g(v) \right|^p \\ & \geq & \displaystyle\frac{1}{\gamma(s)} \sum_{|v|=s} \left| \left(\sum_{w \in \mathrm{Chi}^N(v)} f(w) \right) - g(v) \right|^p \end{array}$$

usando esta desigualdad y por la definición de g se tiene

$$\epsilon > \left(\frac{1}{\gamma(s)}\sum_{|v|=s}\left|\left(\sum_{w\in \mathrm{Chi}^N(v)} f(w)\right) - g(v)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{\gamma(s)}\sum_{|v|=s}\left|\left(\sum_{w\in \mathrm{Chi}^N(v)} f(w)\right) - 1\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.7}$$

Por otro lado, aplicando la desigualdad de Jensen y la desigualdad del triángulo se tiene

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\gamma(s)}\sum_{|v|=s}\left|\left(\sum_{w\in \mathrm{Chi}^N(v)} f(w)\right) - 1\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\geq \frac{1}{\gamma(s)}\sum_{|v|=s}\left|\left(\sum_{w\in \mathrm{Chi}^N(v)} f(w)\right) - 1\right| \\
&\geq \left|\frac{1}{\gamma(s)}\sum_{|v|=s}\left(\left(\sum_{w\in \mathrm{Chi}^N(v)} f(w)\right) - 1\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{\gamma(s)}\sum_{|v|=s}\sum_{w\in \mathrm{Chi}^N(v)} f(w) - 1\right| \\
&= \left|\frac{1}{\gamma(s)}\sum_{|w|=N+s} f(w) - 1\right| \\
&\geq 1 - \left|\frac{1}{\gamma(s)}\sum_{|w|=N+s} f(w)\right|.
\end{aligned}$$

Haciendo uso de esta desigualdad junto con (4.7) tenemos

$$\epsilon > 1 - \left|\frac{1}{\gamma(s)}\sum_{|w|=N+s} f(w)\right| \tag{4.8}$$

luego

$$1 - \epsilon \;<\; \frac{1}{\gamma(s)}\sum_{|w|=N+s} |f(w)|,$$

como $\epsilon < 1$, si multiplicamos por $\gamma(s)$ en ambos lados de la desigualdad, elevando a la p y aplicando la desigualdad de Jensen se tiene

$$\begin{aligned}
(\gamma(s)(1-\epsilon))^p &< \left(\sum_{|w|=N+s} |f(w)|\right)^p \\
&\leq (\gamma(N+s))^{p-1} \sum_{|w|=N+s} |f(w)|^p \\
&\leq (\gamma(N+s))^p M_p^p(N+s,f) \\
&< (\gamma(N+s))^p \epsilon^p,
\end{aligned}$$

por tanto

$$\gamma(s)(1-\epsilon) \;<\; \gamma(N+s)\epsilon,$$

factorizando tenemos

$$\frac{\gamma(s)}{\gamma(s)+\gamma(N+s)} \;<\; \epsilon.$$

Como en la desigualdad anterior no se pierde generalidad al suponer $\epsilon < 1$, hemos demostrado que dado $s \in \mathbb{N}$ fijo entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un entero $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\gamma(s)}{\gamma(s)+\gamma(N+s)} < \epsilon$.

Por otro lado, sea $M \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$. Probaremos que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \{1, \cdots, M\}$

$$\frac{\gamma(n)}{\gamma(n+N)} \;<\; \epsilon.$$

Por lo mostrado anteriormente sabemos que para todo $\epsilon > 0$ y para cada n que cumpla $n \in \{1, \cdots, M\}$ existe $N_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\gamma(n)}{\frac{\epsilon}{2}} < \gamma(n) + \gamma(n+N_n).$$

Sea $N_r = \max\{N_n : 1 \leq n \leq M\}$, observe que como $\{\gamma(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es no decreciente entonces para todo $1 \leq n \leq M$ tenemos que

$$\frac{\gamma(n)}{\frac{\epsilon}{2}} < \gamma(n) + \gamma(n+N_n) \leq \gamma(n+N_n) + \gamma(n+N_n) \leq 2\gamma(n+N_r)$$

por tanto

$$\frac{\gamma(n)}{\gamma(n+N_r)} \;<\; \epsilon.$$

La existencia de este N_r prueba que dado $M \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\gamma(n)}{\gamma(n+N)} \ < \ \epsilon \qquad \text{para todo } 1 \leq n \leq M.$$

Finalmente, sea $k \in \mathbb{N}$, usando la última observación con $\epsilon = \frac{1}{k}$ tenemos que existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\gamma(n)}{\gamma(n+n_k)} \ < \ \frac{1}{k}$$

para todo $1 \leq n \leq k$ y tal que $n_k > n_{k-1}$ pues $\{\gamma(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la estamos suponiendo no decreciente.

Por tanto podemos considerar a $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ tal que $n_1 < n_2 < \cdots$. Probaremos que esta sucesión creciente es la que nos sirve para mostrar la implicación del teorema. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo y $\epsilon > 0$, seleccionamos a K tal que $\frac{1}{K} < \epsilon$, observe que si $k > \text{máx}\{K, n\}$ entonces

$$\frac{\gamma(n)}{\gamma(n+n_k)} < \frac{1}{k} < \frac{1}{K} < \epsilon,$$

como ϵ es arbitrario entonces hemos mostrado que

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{\gamma(n)}{\gamma(n+n_k)} \ = \ 0.$$

La existencia de la sucesión n_k muestra la segunda implicación del teorema y con esto el teorema queda demostrado. $\square$

La siguiente observación nos menciona una equivalencia del resultado obtenido en el teorema anterior.

Observación 4.8. Sea T un árbol con raiz y B el operador de desplazamiento hacia atrás. Supongamos que $\{\gamma(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es no decreciente y B es acotado en $\mathbb{H}_0^p(T)$.

El teorema anterior establece que B es hipercíclico si y solo si existe una sucesión creciente de enteros positivos $\{n_k\}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

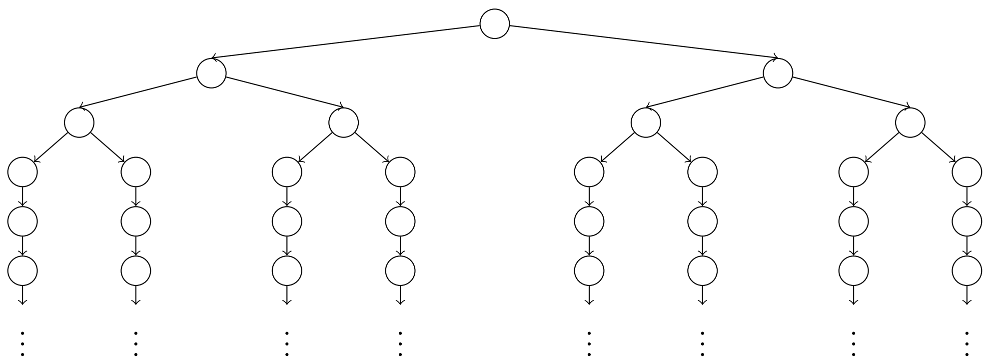
$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{\gamma(n)}{\gamma(n+n_k)} = 0.$$

Observe que esto pasa si y solo si

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \gamma(n+n_k) = \infty,$$

si y solo si $\{\gamma(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es eventualmente constante (es decir, no existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma(n)$ es constante para todo $n \geq N$).

Con el resultado descrito en la observación anterior, mostramos en la siguiente figura un árbol donde el operador B no es hipercíclico pues $\{\gamma(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente constante ya que $\gamma(n) = 8$ para todo $n \geq 3$.



4.3. Espectro

Otro concepto que estudiamos acerca del operador de desplazamiento hacia atrás es el tratar de encontrar su espectro en $\mathbb{H}^p(T)$. Resulta que el espectro de este operador dependerá del árbol donde se esté interactuando.

Lema 4.9. *Sea T un árbol con raíz y $\mathcal{F}$ el conjunto de las funciones definidas en T. Si o es la raíz de T y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces la función $f \in \mathcal{F}$ definida como*

$$f(v) := \begin{cases} \frac{\lambda^{|v|}}{\gamma(1,\mathrm{par}(v))\gamma(1,\mathrm{par}^2(v))\cdots\gamma(1,\mathrm{par}^{|v|-1}(v))\gamma(1,o)}, & si\ v \neq o, \\ 1, & si\ v = o, \end{cases}$$

es un eigenvector del operador $B : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ con λ su respectivo eigenvalor.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{F}$ como en el enunciado. Un cálculo muestra que $Bf = \lambda f$:

En efecto, sea $v \in T$, entonces

$$\begin{aligned}
Bf(v) &= \sum_{w\in \mathrm{Chi}(v)} f(w) \\
&= \sum_{w\in \mathrm{Chi}(v)} \frac{\lambda^{|w|}}{\gamma(1,\mathrm{par}(w))\gamma(1,\mathrm{par}^2(w))\cdots\gamma(1,\mathrm{par}^{|w|-1}(w))\gamma(1,o)} \\
&= \sum_{w\in \mathrm{Chi}(v)} \frac{\lambda^{|w|}}{\gamma(1,v)\gamma(1,\mathrm{par}(v))\cdots\gamma(1,\mathrm{par}^{|v|-1}(v))\gamma(1,o)} \\
&= \sum_{w\in \mathrm{Chi}(v)} \frac{\lambda^{|v|+1}}{\gamma(1,v)\gamma(1,\mathrm{par}(v))\cdots\gamma(1,\mathrm{par}^{|v|-1}(v))\gamma(1,o)} \\
&= \gamma(1,v)\frac{\lambda^{|v|+1}}{\gamma(1,v)\gamma(1,\mathrm{par}(v))\cdots\gamma(1,\mathrm{par}^{|v|-1}(v))\gamma(1,o)} \\
&= \frac{\lambda^{|v|+1}}{\gamma(1,\mathrm{par}(v))\cdots\gamma(1,\mathrm{par}^{|v|-1}(v))\gamma(1,o)} \\
&= \lambda\frac{\lambda^{|v|}}{\gamma(1,\mathrm{par}(v))\cdots\gamma(1,\mathrm{par}^{|v|-1}(v))\gamma(1,o)} \\
&= \lambda f(v).
\end{aligned}$$

Como esta igualdad es cierta para todo $v \in T$ concluimos que la función f es un eigenvector para el operador $B : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$, siendo λ su respectivo eigenvalor. $\square$

Mostraremos ejemplos de árboles donde analizaremos al espectro $\sigma(B)$ del operador de desplazamiento hacia atrás B, en el espacio de Hardy $\mathbb{H}^p(T)$ donde T es un árbol distinto en cada ejemplo.

Teorema 4.10. *Sea $q \in \mathbb{N}$ y T un árbol donde cada vértice tiene q hijos, sea o la raíz de T. Entonces el espectro de B en $\mathbb{H}^p(T)$ es*

$$\sigma(B) = \sigma_p(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq q\}.$$

Demostración. Es importante mencionar que como cada vértice tiene q hijos, en automático B está acotado pues dado que para $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene

$$\frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)} = \frac{q^{p-1}q^{n+1}}{q^{n+1}} = q^p,$$

entonces el conjunto $\left\{\frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$ es acotado.

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \leq q$. Primero probaremos que $\lambda \in \sigma_p(B)$. En efecto, pues sabemos por el lema anterior que la función f definida en T como

$$f(v) := \begin{cases} \frac{\lambda^{|v|}}{\gamma(1,\mathrm{par}(v))\gamma(1,\mathrm{par}^2(v))\cdots\gamma(1,\mathrm{par}^{|v|-1}(v))\gamma(1,o)}, & \text{si } v \neq o, \\ 1, & \text{si } v = o, \end{cases}$$

es un eigenvector para el operador B en $\mathcal{F}$. Si f está en $\mathbb{H}^p(T)$ entonces λ es un eigenvalor de B en $\mathbb{H}^p(T)$.
Observe que en este árbol la función f toma la forma

$$f(v) := \begin{cases} \frac{\lambda^{|v|}}{q^{|v|}}, & \text{si } v \neq o, \\ 1, & \text{si } v = o. \end{cases}$$

Mostraremos entonces que $f \in \mathbb{H}^p(T)$. Observe que para $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} M_p^p(n,f) &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} |f(v)|^p \\ &= \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} \left| \left(\frac{\lambda}{q}\right)^n \right|^p \\ &= \left|\frac{\lambda}{q}\right|^{np}. \end{aligned}$$

Observe que como $|\lambda| \leq q$ entonces $M_p^p(n,f)$ está acotado y por tanto $f \in \mathbb{H}^p(T)$. Entonces concluimos que $\lambda \in \sigma_p(B)$ para todo $|\lambda| \leq q$.
Por otro lado sabemos por el teorema 4.2 que

$$\begin{aligned} \|B\| &= \sup_{n \geq 0} \left(\frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{n \geq 0} \left(\frac{q^{p-1}q^{n+1}}{q^n} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= q. \end{aligned}$$

Sabemos que el radio espectral de B está acotado por su norma (ver [14, Teorema 3.6]), es decir

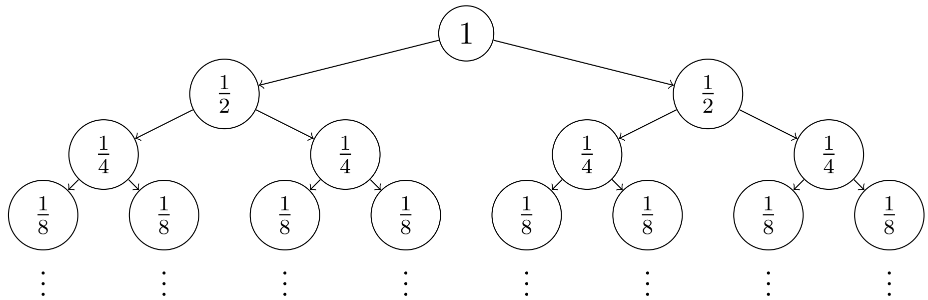
$$r(B) \leq \|B\|.$$

Este hecho y dado que $\lambda \in \sigma_p(B)$ para todo $|\lambda| \leq q$, podemos concluir que el espectro de B es

$$\sigma(B) = \sigma_p(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq q\}.$$

□

La siguiente figura muestra un árbol donde cada vértice tiene dos hijos y definimos a una función f como en el lema 4.9 con $\lambda = 1$.



Teorema 4.11. *Sea $q \in \mathbb{N}_0$ y T un árbol donde cada vértice tiene $q+1$ vecinos, sea o la raíz de T. Entonces el espectro de B en $\mathbb{H}^p(T)$ es*

$$\sigma(B) = \sigma_p(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq q\}.$$

Demostración. Es importante mencionar que como cada vértice tiene $q+1$ hijos, en automático B está acotado pues dado que para $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene

$$\frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)} = \frac{q^{p-1}(q+1)q^n}{q^n} = q^{p-1}(q+1),$$

entonces el conjunto $\left\{\frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$ es acotado.

Sabemos por la proposición 1.5 que el radio espectral del operador B se puede calcular como

$$r(B) = \lim_{j \longrightarrow \infty} \|B^j\|^{\frac{1}{j}}.$$

Por el teorema 4.5 sabemos que

$$\|B^j\| = \sup_{n \geq 0} \left(\frac{(K(j,n))^{p-1}\gamma(n+j)}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por las forma en que se definió el árbol y haciendo algunos cálculos, para $j \geq 2$ se tiene que si $n = 0$

$$\left(\frac{(K(j,n))^{p-1}\gamma(n+j)}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(((q+1)q^{j-1})^{p-1}(q+1)q^{j-1}\right)^{\frac{1}{p}} = (q+1)q^{j-1},$$

y si $n > 0$

$$\left(\frac{(K(j,n))^{p-1}\gamma(n+j)}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{(q^j)^{p-1}(q+1)q^{n+j-1}}{(q+1)q^{n-1}}\right)^{\frac{1}{p}} = q^j.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
r(B) &= \lim_{j\longrightarrow\infty} \|B^j\|^{\frac{1}{j}} \\
&= \lim_{j\longrightarrow\infty} \left(\sup_{n\geq 0}\left(\frac{(K(j,n))^{p-1}\gamma(n+j)}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{j}} \\
&= \lim_{j\longrightarrow\infty} \left((q+1)q^{j-1}\right)^{\frac{1}{j}} \\
&= \lim_{j\longrightarrow\infty} (q+1)^{\frac{1}{j}} q^{1-\frac{1}{j}} \\
&= q.
\end{aligned}$$

Por otro lado, sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \leq q$, por el lema 4.9 sabemos que la función f definida en T como

$$f(v) := \begin{cases} \frac{\lambda^{|v|}}{(q+1)q^{|v|-1}}, & \text{si } v \neq o, \\ 1, & \text{si } v = o \end{cases}$$

es un eigenvector para el operador B en $\mathcal{F}$.
Observe que para $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
M_p^p(n,f) &= \frac{1}{\gamma(n)}\sum_{|v|=n}|f(v)|^p \\
&= \frac{1}{\gamma(n)}\sum_{|v|=n}\left|\left(\frac{\lambda}{q}\right)^n \frac{q}{q+1}\right|^p \\
&= \left|\frac{\lambda}{q}\right|^{np}\left|\frac{q}{q+1}\right|^p.
\end{aligned}$$

Observe que como $|\lambda| \leq q$ entonces $M_p^p(n,f)$ está acotado y por tanto $f \in \mathbb{H}^p(T)$.
Entonces concluimos que $\lambda \in \sigma_p(B)$ para todo $|\lambda| \leq q$.
Esto y como ya sabiamos que $r(B) = q$ se sigue el resultado

$$\sigma(B) = \sigma_p(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq q\}.$$

$\square$

Teorema 4.12. *Sea $\{s_1, s_2, \cdots, s_r\}$ un conjunto de números enteros, con $r \geq 2$ también un número entero. Sea T un árbol cuya raíz es o y tal que si v es un vértice de T con $|v| = l_v r + e_v$ donde $l_v, e_v \in \mathbb{N}$ y $0 < e_v \leq r$ se cumple $\gamma(1, v) = s_{e_v}$. Entonces el espectro de B en $\mathbb{H}^p(T)$ es*

$$\sigma(B) = \sigma_p(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \sqrt[r]{s_1 s_2 \cdots s_r}\}.$$

Demostración. Es importante mencionar que el operador B está acotado pues dado que para $n \in \mathbb{N}_0$, si $n = kr + \phi_n$ con $k \geq 0$ y $0 < \phi_n \leq r$, se tiene

$$\frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)} = \frac{(s_{\phi_n+1})^{p-1}(s_1 s_2 \cdots s_r)^k (s_1 s_2 \cdots s_{\phi_n} s_{\phi_n+1})}{(s_1 s_2 \cdots s_r)^k (s_1 s_2 \cdots s_{\phi_n})} = (s_{\phi_n+1})^p,$$

entonces el conjunto $\left\{\frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$ es acotado ya que el conjunto $\{s_1, s_2, \cdots, s_r\}$ es acotado.

Por el teorema 4.5 sabemos que

$$\|B^j\| = \sup_{n \geq 0} \left(\frac{(K(j,n))^{p-1}\gamma(n+j)}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por otro lado sabemos que el radio espectral del operador B se puede calcular como

$$r(B) = \lim_{j \longrightarrow \infty} \|B^j\|^{\frac{1}{j}}.$$

Como ya sabemos que el límite anterior existe entonces es suficiente calcularlo con una subsucesión pues en tal caso el límite es igual al de la sucesión original. Considermos a $j = mr$ donde $m \in \mathbb{N}$, entonces tenemos

$$r(B) = \lim_{m \longrightarrow \infty} \|B^{mr}\|^{\frac{1}{mr}}.$$

Para $n = kr + \phi$ donde $k, \phi \in \mathbb{N}$ con $k \geq 0$ y $0 < \phi \leq r$ se tiene

$$\frac{\gamma(n+mr)}{\gamma(n)} = \frac{(s_1 s_2 \cdots s_r)^{k+m}(s_1, s_2 \cdots s_\phi)}{(s_1 s_2 \cdots s_r)^k (s_1 s_2 \cdots s_\phi)} = (s_1 s_2 \cdots s_r)^m,$$

observe también que $K(mr, n) = (s_1 s_2 \cdots s_r)^m$.

Por tanto para $m \in \mathbb{N}$ tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\|B^{mr}\| &= \sup_{n\geq 0}\left(\frac{(K(mr,n))^{p-1}\gamma(n+mr)}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \sup_{n\geq 0}\left(((s_1s_2\cdots s_r)^m)^{p-1}(s_1s_2\cdots s_r)^m\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \sup_{n\geq 0}(s_1s_2\cdots s_r)^{\frac{m}{p}}(s_1s_2\cdots s_r)^{m-\frac{m}{p}}\\
&= (s_1s_2\cdots s_r)^m,
\end{aligned}$$

lo cual nos permite concluir que

$$\begin{aligned}
r(B) &= \lim_{m\longrightarrow\infty}\|B^{mr}\|^{\frac{1}{mr}}\\
&= \lim_{m\longrightarrow\infty}(s_1,s_2\cdots s_r)^{\frac{1}{r}}\\
&= (s_1s_2\cdots s_r)^{\frac{1}{r}}\\
&= \sqrt[r]{s_1s_2\cdots s_r}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \leq \sqrt[r]{s_1s_2\cdots s_r}$. Recuerde que todo vértice v se puede escribir como $|v| = l_v r + e_v$ donde $l_v, e_v \in \mathbb{N}$ y $0 < e_v \leq r$. Por el lema 4.9 sabemos que la función f definida en T como

$$f(v) := \begin{cases} \frac{\lambda^{|v|}}{(s_1s_2\cdots s_r)^{l_v}(s_1s_2\cdots s_{e_v})}, & \text{si } v \neq o,\\ 1, & \text{si } v = o \end{cases}$$

es un eigenvector para el operador B en $\mathcal{F}$.
Observe que para $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
M_p^p(n,f) &= \frac{1}{\gamma(n)}\sum_{|v|=n}|f(v)|^p\\
&= \frac{1}{\gamma(n)}\sum_{|v|=n}\left|\frac{\lambda^n}{(s_1s_2\cdots s_r)^{l_v}(s_1s_2\cdots s_{e_v})}\right|\\
&= \frac{1}{\gamma(n)}\sum_{|v|=n}\left|\frac{\lambda^n}{(s_1s_2\cdots s_r)^{\frac{n-e_v}{r}}(s_1s_2\cdots s_{e_v})}\right|\\
&= \frac{1}{\gamma(n)}\sum_{|v|=n}\left|\frac{\lambda^n}{(s_1s_2\cdots s_r)^{\frac{n}{r}}}\right|\left|\frac{(s_1s_2\cdots s_r)^{\frac{e_v}{r}}}{(s_1s_2\cdots s_{e_v})}\right|\\
&= \frac{1}{\gamma(n)}\sum_{|v|=n}\left|\frac{\lambda}{(s_1s_2\cdots s_r)^{\frac{1}{r}}}\right|^n\left|\frac{(s_1s_2\cdots s_r)^{\frac{e_v}{r}}}{(s_1s_2\cdots s_{e_v})}\right|.
\end{aligned}$$

Observe que como $|\lambda| \leq \sqrt[r]{s_1 s_2 \cdots s_r}$, y como $\left|\frac{(s_1 s_2 \cdots s_r)^{\frac{e_v}{r}}}{(s_1 s_2 \cdots s_{e_v})}\right| \leq s_1 s_2 \cdots s_r$ entonces

$$\begin{aligned} M_p^p(n,f) &\leq \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} \left|\frac{(s_1 s_2 \cdots s_r)^{\frac{e_v}{r}}}{(s_1 s_2 \cdots s_{e_v})}\right| \\ &\leq \frac{1}{\gamma(n)} \sum_{|v|=n} s_1 s_2 \cdots s_r \\ &\leq s_1 s_2 \cdots s_r, \end{aligned}$$

por lo que $M_p^p(n,f)$ está acotado y $f \in \mathbb{H}^p(T)$. Entonces concluimos que $\lambda \in \sigma_p(B)$ para todo $|\lambda| \leq \sqrt[r]{s_1 s_2 \cdots s_r}$.
Esto y como ya sabiamos que $r(B) = \sqrt[r]{s_1 s_2 \cdots s_r}$ se sigue el resultado

$$\sigma(B) = \sigma_p(B) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \sqrt[r]{s_1 s_2 \cdots s_r}\right\}.$$

Entonces el teorema queda demostrado. $\square$

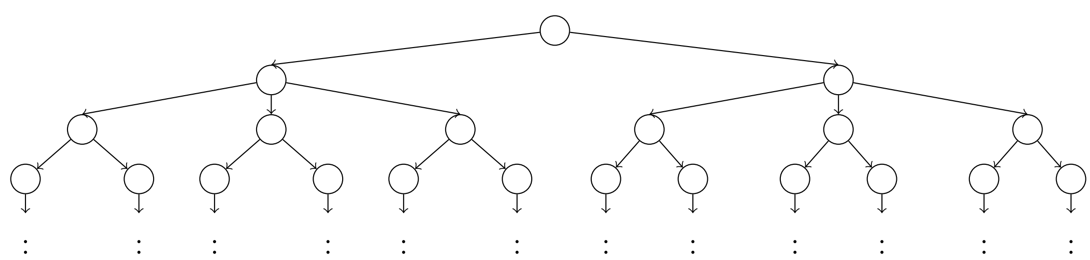
El siguiente ejemplo es un caso particular del teorema anterior, en donde se tiene a un árbol en el que cada nivel se tienen s_1 y s_2 hijos en ese orden. La demostración de este es un simple corolario del teorema anterior.

Ejemplo 4.13. Sean s_1, s_2 números enteros. Sea T un árbol con raíz tal que $\gamma(1) = s_1$, $\gamma(2) = s_2$, $\gamma(3) = s_1$, $\gamma(4) = s_2$ y así sucesivamente. Entonces el espectro de B es

$$\sigma(B) = \sigma_p(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \sqrt{s_1 s_2}\}.$$

En la siguiente figura se muestra a un árbol con $s_1 = 2$ y $s_2 = 3$. Entonces el espectro del operador B es

$$\sigma(B) = \sigma_p(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \sqrt{6}\}.$$



Teorema 4.14. *Sea $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números naturales y sea T un árbol cuya raíz es o y tal que $\gamma(1,v) = s_{|v|+1}$ para todo vértice v de T. Entonces*

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left\{\frac{|\lambda|^n}{s_1 s_2 \cdots s_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada}\right\} \subseteq \sigma_p(B)$$

y además
$$r(B)=\lim_{j\longrightarrow\infty}\left(\sup_{n\geq 0}s_{n+1}s_{n+2}\cdots s_{n+j}\right)^{\frac{1}{j}}$$

Demostración. Es importante mencionar que B está acotado pues dado que para $n\in\mathbb{N}_0$ se tiene
$$\frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)}=\frac{(s_{n+1})^{p-1}(s_1s_2\cdots s_{n+1})}{s_1s_2\cdots s_n}=(s_{n+1})^p,$$
entonces el conjunto $\left\{\frac{(K(1,n))^{p-1}\gamma(n+1)}{\gamma(n)}:n\in\mathbb{N}_0\right\}$ es acotado pues $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada.

Sea $\lambda\in\mathbb{C}$ tal que $\left\{\frac{|\lambda|^n}{s_1s_2\cdots s_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Por el lema 4.9 sabemos que la función f definida en T como
$$f(v):=\begin{cases}\frac{\lambda^{|v|}}{s_1s_2\cdots s_{|v|}}, & \text{si } v\neq o\\ 1, & \text{si } v=o\end{cases}$$
es un eigenvector para el operador B en $\mathcal{F}$.
Observe que para $n\in\mathbb{N}$
$$\begin{aligned}M_p^p(n,f)&=\frac{1}{\gamma(n)}\sum_{|v|=n}|f(v)|^p\\&=\frac{1}{\gamma(n)}\sum_{|v|=n}\left|\frac{\lambda^n}{s_1s_2\cdots s_n}\right|^p\\&=\frac{1}{s_1s_2\cdots s_n}\sum_{|v|=n}\left|\frac{\lambda^n}{s_1s_2\cdots s_n}\right|^p\\&=\frac{|\lambda^n|^p}{(s_1s_2\cdots s_n)^p}\\&=\left(\frac{|\lambda|^n}{s_1s_2\cdots s_n}\right)^p.\end{aligned}$$
Se sigue que $M_p(n,f)$ está acotado para toda n y por tanto $f\in\mathbb{H}^p(T)$. Entonces concluimos que
$$\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\left\{\frac{|\lambda|^n}{s_1s_2\cdots s_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\text{ es acotada}\right\}\subseteq\sigma_p(B).$$

Por otro lado, usando el teorema 4.5 para $j \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|B^j\| &= \sup_{n\geq 0}\left(\frac{(K(j,n))^{p-1}\gamma(n+j)}{\gamma(n)}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{n\geq 0}\left(\frac{(s_{n+1}s_{n+2}\cdots s_{n+j})^{p-1}(s_1 s_2\cdots s_{n+j})}{s_1 s_2\cdots s_n}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{n\geq 0} s_{n+1}s_{n+2}\cdots s_{n+j}.
\end{aligned}$$

Lo anterior nos permite calcular

$$\begin{aligned}
r(B) &= \lim_{j\longrightarrow\infty} \|B^j\|^{\frac{1}{j}} \\
&= \lim_{j\longrightarrow\infty}\left(\sup_{n\geq 0} s_{n+1}s_{n+2}\cdots s_{n+j}\right)^{\frac{1}{j}} \\
&= \lim_{j\longrightarrow\infty}\left(\sup_{n\geq 0} s_{n+1}s_{n+2}\cdots s_{n+j}\right)^{\frac{1}{j}}.
\end{aligned}$$

Esto demuestra el teorema. □

El siguiente ejemplo es un caso particular del teorema 4.14, en el cual calculamos el espectro para el operador B.

Ejemplo 4.15. Considere la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la cual está dada explícitamente como

$$\{2,3,2,3,3,2,3,3,3,2,3,3,3,3,2,\cdots\}$$

y sea T un árbol cuya raíz es o como en el teorema 4.14. Entonces $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 3\} \subseteq \sigma_p(B)$, más aún

$$\sigma(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 3\}.$$

Demostración. Sea $n_k := \frac{k(k+1)}{2} = 1+2+\cdots k$ con $k \in \mathbb{N}$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| < 3$. Considere a la función f definida como en el lema 4.9 la cual es un eigenvector para el operador B en $\mathcal{F}$.
Por el teorema 4.14 sabemos que para $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
M_p^p(n_k, f) &= \left(\frac{|\lambda|^{\frac{k(k+1)}{2}}}{2^k 3^{\frac{k(k-1)}{2}}}\right)^p \\
&= \left(\left|\frac{\lambda}{2}\right|^k \left|\frac{\lambda}{3}\right|^{\frac{k(k-1)}{2}}\right)^p.
\end{aligned}$$

Observe que si $|\lambda| < 3$ se tiene

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{\left|\frac{\lambda}{2}\right|^{k+1}\left|\frac{\lambda}{3}\right|^{\frac{k(k+1)}{2}}}{\left|\frac{\lambda}{2}\right|^{k}\left|\frac{\lambda}{3}\right|^{\frac{k(k-1)}{2}}} = \lim_{k\longrightarrow\infty} \left|\frac{\lambda}{2}\right|\left|\frac{\lambda}{3}\right|^{k} = 0.$$

Entonces por la prueba del cociente para series, se sigue que

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} M_p^p(n_k, f) = 0. \tag{4.9}$$

Observe por otra parte que por la forma de la sucesión original y dado que $|\lambda| < 3$ entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$M_p^p(n_k, f) = \left(\left|\frac{\lambda}{2}\right|^{k}\left|\frac{\lambda}{3}\right|^{\frac{k(k-1)}{2}}\right)^p > \left(\left|\frac{\lambda}{2}\right|^{k}\left|\frac{\lambda}{3}\right|^{\frac{k(k-1)}{2}+1}\right)^p = M_p^p(n_k+1, f).$$

De manera análoga se muestra para todo $k \in \mathbb{N}$ que

$$M_p^p(n_k+1, f) > M_p^p(n_k+2, f) > \cdots > M_p^p(n_{k+1}-1, f).$$

Entonces concluimos que la ecuación (4.9) se cumple para toda subsucesión. Esto implica que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $M_p(n, f) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ y por tanto $f \in \mathbb{H}^p(T)$ pues de hecho $f \in \mathbb{H}_0^p(T)$. Concluimos que

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 3\} \subseteq \sigma_p(B).$$

Por otro lado, observe que por la forma de la sucesión $\{s_n\}$, para $j \in \mathbb{N}$ fijo tenemos que

$$\sup_{n\geq 0} s_{n+1}s_{n+2}\cdots s_{n+j} = 3^j,$$

y por el teorema 4.14 tenemos que

$$\begin{aligned} r(B) &= \lim_{j\longrightarrow\infty} \left(\sup_{n\geq 0} s_{n+1}s_{n+2}\cdots s_{n+j}\right)^{\frac{1}{j}} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Por tanto $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 3\} \subseteq \sigma_p(B) \subseteq \sigma(B) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 3\}$ y entonces se tiene que

$$\sigma(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 3\},$$

como se quería. $\square$

Dejamos para un trabajo futuro la descripción de $\sigma(B)$ para otros tipos de árboles.

APÉNDICE A

Espacios de Hardy

Las siguientes definiciones de los espacios de Hardy son conocidas en análisis funcional, ver por ejemplo [16]. Mencionamos estas definiciones pues hacemos una pequeña analogía con los espacios definidos en el capítulo dos.

Definición A.1. Sea $p \in (0, \infty)$ y $r \in [0, 1)$. Si $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función medible, definimos

$$M_p(r, f) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se define el *espacio de Hardy generalizado* $H_g^p(\mathbb{D})$ como el conjunto de todas las funciones medibles $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $M_p(r, f)$ existe para todo $r \in (0, 1)$ y

$$\sup_{0<r<1} M_p(r, f) < \infty.$$

El *espacio de Hardy clásico* $H^p(\mathbb{D})$ es un subconjunto de $H_g^p(\mathbb{D})$ que consiste únicamente de las funciones analíticas en $\mathbb{D}$ para las que $\sup_{0<r<1} M_p(r, f) < \infty$.
En ambos casos se define

$$\|f\|_p := \sup_{0<r<1} M_p(r, f).$$

El espacio de Hardy clásico es un contexto donde se pueden estudiar de manera concreta problemas abstractos de teoría de operadores, por ejemplo el problema de clasificar subespacios invariates del operador de desplazamiento hacia adelante, en l^2 este es un problema intratable y cuando pasamos a $H^2(\mathbb{D})$ el problema queda resuelto, para más información ver [30].

Existe una teoría bastante desarrollada de estos espacios de Hardy, ver por ejemplo [16]. Se conocen características explícitas sobre la topología de estos. Se sabe por ejemplo que $H^2(\mathbb{D})$ es un espacio de Hilbert y que las funciones $f \in H^p(\mathbb{D})$ tienen límites radiales en la frontera casi en todas partes; resultado que se establece en el siguiente teorema.

Teorema A.2. [30, Corolario 1.1.28] *Sea* $f \in \mathbb{H}^p(\mathbb{D})$, *entonces*

$$\lim_{r \longrightarrow 1^-} f(re^{i\theta})$$

existe para casi todo $\theta \in (0, 2\pi]$.

Además, si definimos

$$\tilde{f}(e^{i\theta}) := \lim_{r \longrightarrow 1^-} f(re^{i\theta}),$$

se puede demostrar que $\tilde{f} \in L^p(S^1)$ [16, Teorema 2.2].

Se conocen muchas otras características de las funciones en $H^p(\mathbb{D})$. Por ejemplo se sabe exactamente cómo son los conjuntos de ceros de funciones en $H^p(\mathbb{D})$ [16, p. 18].

En estos espacios también se han estudiado operadores. En particular, el estudio del operador de desplazamiento (multiplicación por la variable independiente z) ha dado una descripción de las funciones en $H^p(\mathbb{D})$ como producto de funciones internas (las cuales contienen los ceros) y funciones externas, (ver [16, p. 25]).

También hay una teoría muy desarrollada de operadores de multiplicación (y sus proyecciones conocidos como operadores de Toeplitz) y las álgebras de estos [30].

El estudio de operadores de composición en $H^p(\mathbb{D})$ ha llevado al estudio de la dinámica de funciones en el disco, para más detalles ver [38]. Para más información sobre estos espacios puede consultar las referencias [16, 30].

Bibliografía

[1] R. F. Allen, F. Colonna y G. R. Easley, *Multiplication operators on the iterated logarithmic Lipschitz spaces of a tree*, Mediterr. J. Math., **9**(2012), 575-600.

[2] R. F. Allen, F. Colonna y G. R. Easley, *Multiplication operators on the weighted Lipschitz space of a tree*, J. Operator Theory, **69**(2013), 209-231.

[3] R. Allen, F. Colonna y G. R. Easley, *Multiplication operators between Lipschitz-type spaces on a tree*, Int. J. Math. Math. Sci., 2011, Art. ID 472495, 36 pp.

[4] Robert Allen, Flavia Colonna y Glenn Easley, *Composition operators on the Lipschitz space of a tree*, Mediterr. J. Math., **11**(2014) 97-108.

[5] R. Allen, F. Colonna y G. R. Easley, *Multiplication operators on the weighted Lipschitz space og a tree*, J. Operator Theory **69**(2013), 209-231.

[6] B. Beauzamy, *Un operateur, sur l´space de Hilbert, dont tous les polinomes sont hypercycliques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math. **303**(1986), 923-925.

[7] F. D. Biase y M. A. Picardello, *The Green formula and Hp spaces on trees*, Math. Z., **218**(1995), 253-272.

[8] G.D. Birkhoff, *Dèmonstration d'un théoreme elementaire sur les fonctions entieres*, C. R. Acad. Sci. París, **189**(1929) 473-475.

[9] P. Cartier, *Fonctions harmoniques sur un arbre*, Symp. Math. **9**(1972), 203-270.

[10] J. G. Clunie, J. M. Anderson and Ch. Pommerenke, *On Bloch functions and normal functions*, J. Reine Angew. Math., **270**(1974) 12-37.

[11] J. Cohen and F. Colonna, *Embeddings of trees in the hyperbolic disk*, Complex Var. Theory Appl., **24**(1994) 311-335

[12] F. Colonna and G. R. Easley, *Multiplication operators on the Lipschitz space of a tree*, Integr. Equ. Oper. Theory, **68**(2010) 391-411.

[13] F. Colonna y G. R. Easley, *Multiplication operators between the Lipschitz space and the space of a bounded function on a tree*, Mediterr. J. Math., **9**(2012) 423-438.

[14] John B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Second edition, Springer, New York, 1990.

[15] P. L. Duren, B. W. Romberg, y A. L. Shields, *Linear functionals on H^p spaces with* $0 < p < 1$, J. Reine Angew. Math, **238**(1969), 32-60.

[16] P. L. Duren, *Theory of Hp Spaces*, Academic. Press, New York and London, 1970.

[17] O. El-Fallah, K. Kellay, J. Mashreghi y T. Ransford, *A primer on the Dirichlet space*, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[18] G. Godefroy y J. H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, Funct. Anal., **98**(1991), no. 2, 229-269.

[19] Z. J. Jablonski, Il Bong Jung, Jan Stochel, *Weighted shifts on directed trees*, Mem. Amer. Math. Soc., **216**(1017) (2012).

[20] Karl-Goswin y Grosse-Erdmann, *Universal families and hipercyclic operators*, Bulletin(New Series) of the American Mathematical Society, **36**(1999), 345-381.

[21] Karl-G. Grosse-Erdmann and Alfred Peris, *Linear chaos*, Springer, 2011, València.

[22] H. Hedenmalm, B. Korenblum y K. Zhu, *Theory of Bergman spaces*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[23] R. R. Jiménez Munguía, *Vectores hipercíclicos para múltiplos del desplazamiento hacia atras*, tesis de licenciatura, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 2007.

[24] C. Kitai, *Invariant closed sets for linear operators*, Tesis de Doctorado, University of Toronto, Toronto, 1982.

[25] A. Korányi, M. A. Picardello y M. H. Taibleson, *Hardy spaces on non-homogeneous trees*, Symp. Math., **29**(1987), 205-265.

[26] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley, Sons, New York, 1989.

[27] C. S. Kubrusly, *Spectral Theory of Operators on Hilbert Spaces*, Birkhäuser-Springer, New York, 2012.

[28] G. R. MacLane, *Sequences of derivatives and normal families*, J. Analyse Math., **2**(1952/1953) 72-87.

[29] R.A. Martínez-Avendaño, *Hypercyclicity of shifts on weighted L^p spaces of directed trees*, J. Math. Anal. Appl., **446**(2017) 823-842

[30] R.A. Martínez-Avendaño y P. Rosenthal, *An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space*. Springer, New York, 2007.

[31] P. Muthukumar y S. Ponnusamy, *Discrete analogue of generalizad Hardy spaces and multiplication operators on homegenous trees*, Anal. Math. Phys. (2016). doi: 10.1007/s13324-016-0141-9.

[32] M. Pavone, *Chaotic composition operators on trees*, Houston J. Math., **18**(1992) 47-56.

[33] M. Pavlović, *Function classes on the unit disc. An introduction*, De Gruyter Studies in Mathematics, 52. De Gruyter, Berlin, 2014.

[34] R. M. Gethner y J. H. Shapiro, *Universal vectors for operators on space of holomorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **100**(1987), 281-288.

[35] S. Rolewicz, *On orbits of elements*, Studia Math., **32**(1969) 17-22.

[36] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Third edition, McGraw-Hill, Inc., New York, 1987.

[37] W. Rudin, *Functional Analysis*, 2nd edition, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

[38] J. H. Shapiro, *Composition Operator and Classical Function Theory*, Springer, New York, 1993.

[39] K. Zhu, *Operator theory in function spaces*, Marcel Dekker, New York, 1990.