



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA.

MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA



**“LA PROPORCIONALIDAD COMO UN EJE DE ARTICULACIÓN
ENTRE LA PRIMARIA Y LA SECUNDARIA”**

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

ELABORADO POR:

LIC. JESÚS ISRAEL MONROY MUÑOZ

DIRIGIDO POR:

DR. CARLOS RONDERO GUERRERO

DR. JUAN ALBERTO ACOSTA HERNÁNDEZ

Mineral de la Reforma, Hidalgo. Enero de 2015



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DIRECCIÓN

M. en A. JULIO CESAR LEINES MEDECIGO
DIRECTOR DE CONTROL ESCOLAR
P R E S E N T E

Por este conducto le comunico que el jurado asignado al pasante de la *Maestría en Ciencias en Matemáticas* y su Didáctica, **C. Lic. Jesús Israel Monroy Muñoz**, quien presenta el trabajo de titulación: "**La proporcionalidad como un eje de articulación entre la primaria y la secundaria**", después de revisar el trabajo en reunión de Sinodales ha decidido **autorizar la impresión** del mismo, hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación se anotan las firmas de conformidad de los integrantes del Jurado:

PRESIDENTE: Dr. Fernando Barrera Mora
PRIMER VOCAL: Dr. Juan Alberto Acosta Hernández
SECRETARIO: Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez
SUPLENTE: Dr. Roberto Ávila Pozos

Sin otro particular, reitero a usted la seguridad de mi atenta consideración.

ATENTAMENTE
"AMOR, ORDEN Y PROGRESO"
Mineral de la Reforma, Hgo., 15 de Enero de 2015
EL DIRECTOR

DR. ORLANDO ÁVILA POZOS



Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Carretera Pachuca - Tulancingo Km. 4.5, Ciudad Universitaria,
Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México, C.P. 42184
Tel. +52 771 7172000 exts. 2231, Fax 2109
avilap@uaeh.edu.mx



Agradecimientos

Quisiera agradecer a mis directores de tesis, al Dr. Carlos Rondero Guerrero y el Dr. Juan Alberto Acosta Hernández por su tiempo, dedicación e interés por desarrollar este proyecto.

A todos mis profesores de la maestría, Dr. Aarón Reyes Rodríguez, Dr. Fernando Barrera Mora, Dr. Hugo Espinosa Pérez, Dr. Arturo Criollo Pérez, Dr. Rafael Villarroel Flores, Dr. Orlando Ávila Pozos, Dr. Ricardo Cruz y a la Mtra. Jazmín Licona Olmos por ser parte fundamental en mi proceso de formación.

A la Lic. Ivonne Juárez Ramírez y al Dr. Roberto Ávila Pozos por su apoyo para cursar este programa educativo.

Un agradecimiento especial al Dr. Fernando Barrera Mora y al Dr. Aarón Reyes Rodríguez por sus enseñanzas constantes.

Contenido

Agradecimientos.....	II
Resumen	VIII
Introducción.....	X
CAPÍTULO I EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	1
Antecedentes.....	1
Revisión de la literatura.....	4
Planteamiento del problema	7
Objetivo general	9
Objetivos particulares.....	9
Preguntas de investigación	10
Hipótesis	10
Justificación.....	10
CAPÍTULO II MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL	12
La transposición didáctica	12
Articulación de saberes.....	13
El desarrollo histórico de las ideas matemáticas	14
El currículum	16
Formación de profesores	17
CAPÍTULO III METODOLOGÍA.....	21
El enfoque y tipo de investigación.	21
Libros de texto y programas oficiales.....	22
La sesión de trabajo con profesores.....	23
Los instrumentos y técnicas.....	24
El proceso de la investigación.	25
CAPÍTULO IV APROXIMACIÓN AL DESARROLLO HISTÓRICO Y EPISTEMOLÓGICO DE LA PROPORCIONALIDAD.....	28
Origen y definición de proporción.....	28

La proporcionalidad desde la perspectiva de Tales	31
La proporcionalidad desde la perspectiva de Euclides	34
Pendiente de una recta, tangente y función lineal.	42
Contexto trigonométrico.....	45
CAPÍTULO V REVISIÓN DE PROGRAMAS DE ESTUDIO Y LIBROS DE TEXTO DE PRIMARIA Y SECUNDARIA EN MÉXICO	50
La proporcionalidad en el sistema educativo mexicano	50
Revisión de programas de estudio y libros de texto de primaria y secundaria.....	51
La noción de proporcionalidad en los libros de texto oficiales de la SEP.....	58
Análisis de los contenidos de libros de texto y programas de estudio. Aspectos generales...	63
Contexto aritmético y geométrico	64
Con respecto a semejanza de triángulos	64
Sólidos regulares.....	67
División de un segmento de recta en partes proporcionales.....	69
Progresiones geométricas	71
Duplicación de longitud y áreas	74
Razón, proporción y porcentaje.....	75
Pendiente de una recta, tangente y función lineal	75
Contexto trigonométrico.....	77
CAPÍTULO VI SESIÓN DE TRABAJO CON PROFESORES DE NIVEL BÁSICO.....	83
Proceso de la sesión de trabajo con profesores.....	83
Formación de profesores	84
Los programas de estudio y libros de texto de matemáticas.	84
Concepciones de los profesores acerca de la proporción	85
CAPÍTULO VII REFLEXIONES FINALES.....	87
Respecto al desarrollo de la proporcionalidad en la historia	87
Respecto al currículum	88
Respecto a la formación de profesores.....	89
Referencias bibliográficas	90
Apéndice 1	94

Índice de tablas

Tabla 1. Factores internos entre el avión 1 y el avión 2	30
Tabla 2. Factores externos entre el avión 1 y el avión 2	30
Tabla 3. La proporcionalidad en segundo grado de primaria de acuerdo con el programa oficial de la SEP.....	53
Tabla 4. La proporcionalidad en cuarto grado de primaria el programa oficial de la SEP.	54
Tabla 5. La proporcionalidad en quinto grado de primaria el programa oficial de la SEP.	54
Tabla 6. La proporcionalidad en sexto grado de primaria en el programa oficial de la SEP	55
Tabla 7. La proporcionalidad en Primer grado de Secundaria en el programa oficial de la SEP	55
Tabla 8. La proporcionalidad en segundo grado de Secundaria en el programa oficial de la SEP.	56
Tabla 9. La proporcionalidad en tercer grado de Secundaria en el programa oficial de la SEP.	56
Tabla 10. La proporcionalidad en segundo grado de primaria de acuerdo con el libro de texto oficial de la SEP	58
Tabla 11. La proporcionalidad en cuarto grado de primaria de acuerdo con el libro de texto oficial de la SEP.....	58
Tabla 12. La proporcionalidad en quinto grado de primaria de acuerdo con el libro de texto oficial de la SEP.....	59
Tabla 13. La proporcionalidad en sexto grado de primaria de acuerdo con el libro de texto oficial de la SEP.....	59
Tabla 14. La proporcionalidad en primer grado de secundaria en el libro de texto oficial de la SEP	60
Tabla 15. La proporcionalidad en segundo grado de Secundaria en el libro de texto oficial de la SEP	61
Tabla 16. La proporcionalidad en tercer grado de Secundaria en el libro de texto oficial de la SEP.	61
Tabla 17. Proporcionalidad entre el número de sillas y número de clavos	74

Índice de figuras

Figura 1. Aviones a escala.....	29
Figura 2. Triángulos semejantes.....	31
Figura 3. El cálculo de Tales de la altura de la pirámide Keops por medio de triángulos semejantes y proporcionalidad.....	32
Figura 4. Segmentos proporcionales en el teorema de Tales.	33
Figura 5: Otra representación del teorema de Tales.....	34
Figura 6. La media aritmética.....	37
Figura 7. Medias geométricas.....	37
Figura 8. Duplicar el cuadrado.....	38
Figura 9. Un segmento en partes proporcionales.	40
Figura 10. Media proporcional dadas dos rectas.....	40
Figura 11. Segmentos proporcionales a partir de triángulos semejantes.....	41
Figura 12. Representación geométrica en el plano.....	44
Figura 13. Triángulo rectángulo como base de las funciones trigonométricas.....	46
Figura 14. La relación entre la pendiente y la tangente.....	47
Figura 15. La articulación de la proporcionalidad con otras nociones a través de la historia.	48
Figura 16. Articulación de la proporcionalidad con otras nociones matemáticas.	82

Índice de imágenes

Imagen 1. Triángulos congruentes.....	65
Imagen 2. Figura a escala.	65
Imagen 3. Ejercicio sobre congruencia de triángulos.....	67
Imagen 4. Aplicaciones de los criterios de congruencia de triángulos.....	67
Imagen 5. Algunos sólidos regulares.....	68
Imagen 6. Teorema de Tales.....	70
Imagen 7. Triángulos semejantes.....	70
Imagen 8. Ejercicios sobre semejanza de triángulos.....	71
Imagen 9. Sucesiones numéricas.....	72

Imagen 10. Ejercicio sobre proporcionalidad.....	73
Imagen 11. Ejercicio sobre proporcionalidad y graficas	76
Imagen 12. Gráfica de la distancia en relación con el tiempo.	77
Imagen 13. Ejercicio para calcular las razones trigonométricas utilizando el plano coordenado	78

Índice de esquemas

Esquema 1. Integración de los elementos en el estudio de la proporcionalidad	20
Esquema 2. Elementos conceptuales y metodológicos	27
Esquema 3 La relación de la noción de proporción con otros conceptos en el curriculum de primaria.....	79
Esquema 4.La relación de la noción de proporción con otros conceptos en el curriculum de y secundaria	80
Esquema 5. La relación de la noción de proporción con otros conceptos de la matemática.....	81

Resumen

En este trabajo, se consideran algunos elementos relacionados con el análisis histórico y epistemológico, la articulación de saberes matemáticos y la transposición didáctica, lo que da pautas para realizar una revisión, no exhaustiva, de algunos programas y libros de texto de primaria y secundaria, acerca de la forma en que la proporcionalidad está articulada con otros conceptos de la matemática elemental, para con ello identificar aspectos de reflexión conceptual en la formación de profesores.

El análisis histórico y epistemológico, lleva a considerar a la proporcionalidad como un elemento que posibilita la articulación de saberes entre la primaria y la secundaria, debido a que se van identificando y explicitando sus relaciones con diferentes conceptos que aparecen en geometría, aritmética, álgebra y trigonometría.

Se llevó a cabo una revisión temática de los contenidos de los programas y libros de texto de primaria y secundaria, alrededor de la proporcionalidad con la finalidad de analizar las formas de articulación con otros conceptos de la matemática elemental.

Posteriormente se organizó una sesión breve con profesores de matemáticas de ambos niveles, con la finalidad de explorar parte de sus concepciones acerca de la proporcionalidad y mostrarles cómo es que este concepto tiene trascendencia en los aprendizajes de los estudiantes. Se recabaron consideraciones de los participantes acerca de las limitantes conceptuales expresadas en los libros de texto, lo que a su vez incide además en sus carencias formativas profesionales.

También se identificó parte de la gran trascendencia que tiene la proporcionalidad en la construcción del conocimiento matemático y por supuesto en los aprendizajes de los estudiantes desde los niveles elementales.

Abstract

In this work, we consider some elements related to historical and epistemological analysis, as well as articulation of mathematical concepts and the didactical transposition, which gives guidelines for a review, not exhaustive, of some curricula proposals and textbooks for elementary and middle school, with the aim of identifying the way that those elements are interwoven (proportionality) with other concepts of basic mathematics and its conceptual relation within a training program for teachers.

The historical and epistemological analysis leads to be considered as an element that allows to give structure at the knowledge in elementary and middle school. This is due to the identification and explanation of their relationships with different concepts in geometry, arithmetic, algebra and trigonometry.

We performed a thematic and contents review for each program and textbooks for both elementary and middle schools, in order to identify ways to link them with other concepts of basics mathematics.

Subsequently, we gave a brief session with elementary and middle school mathematics teachers, in order to explore their mathematical knowledge and its relationship with the proportionality concept, and show them how this concept has significance importance in the student learning process. We collected some opinions of the participants about the conceptual limitations expressed in the textbooks, which affects even more theirs training.

We also pointed out the role that proportionality plays in the construction of mathematical knowledge, and in general in the process of student learning in all instruction levels.

Introducción

El presente trabajo se compone de siete capítulos. El primer capítulo comprende la descripción del problema de investigación donde se aborda el origen y planteamiento del problema y se revisan otras investigaciones relacionadas al objeto de estudio, para tal propósito, este capítulo se compone de los antecedentes, revisión de la literatura y la problemática que a su vez contiene las preguntas de investigación, los objetivos, la hipótesis y justificación.

El capítulo II se titula marco teórico conceptual, aquí se abordan aquellos elementos por medio de los cuales se analizará la cuestión de que la proporcionalidad puede ser un eje de articulación entre la primaria y la secundaria, dichos referentes son, la transposición didáctica, articulación de saberes, curriculum, formación de profesores y el desarrollo histórico y epistemológico de las ideas matemáticas.

El capítulo III se refiere a la metodología, el cual da cuenta del enfoque y tipo de investigación, los libros de texto y programas de estudio que se revisarán, los sujetos, los instrumentos y técnicas a utilizarse en la recolección de información y finalmente el proceso que ha de seguir la investigación.

La revisión histórica y epistemológica de la proporcionalidad conforma el capítulo IV, donde se recuperan algunos aportes conceptuales relacionados con la proporción desde los pitagóricos, Euclides, pasando por los griegos, hasta el siglo XVII con Descartes. En este apartado se presenta como el desarrollo histórico puede mostrar la articulación de la proporcionalidad con otros conceptos de la matemática. Se establecen dos ejes de análisis, la aritmética y geometría, bajo el cual surge la proporcionalidad, y el álgebra con elementos como la pendiente de la recta y la tangente. Estos contextos fueron a través de los cuales fue desarrollándose la proporcionalidad y son los referentes con los cuales se revisa el curriculum de nivel básico.

Con base en la aproximación histórica y epistemológica se presenta el capítulo V que trata de la revisión, no exhaustiva, de programas de estudio y libros de texto de primaria y secundaria en México correspondientes al periodo 2013 - 2014. Primeramente se describe la estructura y organización de contenidos con respecto a la proporcionalidad en programas y libros de texto,

así como de la articulación con otros conceptos de la matemática, contrastando con los tres ejes de análisis obtenidos en el capítulo IV.

El capítulo VI da cuenta de la reflexión con profesores que se realizó con base en los dos capítulos anteriores. Primeramente se describe el proceso de la reunión, la participación y aportaciones al tema por parte de los profesores, quienes se centraron en temas como libros de texto, programas de estudio y formación de profesores. Se explora además las nociones que tienen los profesores acerca de la proporción.

Y finalmente en el capítulo VII se presentan las reflexiones finales con respecto al desarrollo histórico y epistemológico de la proporcionalidad, los programas de estudio, libros de texto y la formación de profesores, así como la importancia de la articulación en dicha noción en matemáticas y su tránsito por la primaria y secundaria.

CAPÍTULO I EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Antecedentes

La noción de proporcionalidad, en tanto idea fundamental que posibilita la construcción de conocimiento matemático, está relacionada con situaciones cotidianas y con otras áreas del conocimiento incluyendo las ciencias sociales y las artes (Balderas, Block y Guerra, 2011) además de que subyace a múltiples nociones matemáticas como porcentaje, semejanza, entre otras, y es fundamental para el aprendizaje de la función lineal (Block, Mendoza y Ramírez, 2010) y en general del álgebra lineal.

Esta noción se relaciona con otros temas de la asignatura de matemáticas en primaria y secundaria, como conversiones de unidades, figuras a escala, porcentaje, interés simple y compuesto, semejanza, función lineal, razón, fracción, entre otros, además de que provee herramientas útiles para interpretar y comunicar información así como enfrentar diversas situaciones problemáticas (SEP, 2011).

En el modelo educativo mexicano, la noción de proporcionalidad está incluida en el curriculum de educación básica y su estudio comienza en segundo grado de primaria para después continuar en cuarto grado. En los últimos 50 años, los programas de estudio y los libros de texto, referentes básicos para el profesor han cambiado en cuanto a contenidos y didáctica, incluyendo la proporcionalidad, algunas veces incluyéndola y otras suprimiéndola del curriculum como sucedió en la década de los 70's. Debido a esta situación existen algunas problemáticas en su enseñanza y aprendizaje tanto en profesores como en estudiantes de nivel primaria y secundaria (Ramírez y Block, 2009), ya que el libro de texto es básico, y en algunos casos único referente para el profesor de matemáticas de estos niveles educativos (SEP, 2010).

En la década de los 70's, el curriculum de matemáticas en México experimentó transformaciones influenciadas por el movimiento de la matemática moderna, que exigía un conocimiento profundo de la disciplina por parte de los profesores (Ramírez y Block, 2009), dichos cambios curriculares no tuvieron el impacto esperado y en la década de los 80's se intentó regresar al

currículum como estaba antes de 1970, quedando confusión en la terminología (Ramírez y Block, 2009), por ejemplo, la relación entre las fracciones y las razones. Donde actualmente se usa el termino de razón, pero ya no se escribe de la forma $a:b::c:d$. Además esto también puso en evidencia la falta de un programa sólido de formación de profesores, debido a que dichos cambios implicaban un conocimiento profundo en matemáticas que no se tenía en aquella época tomando en cuenta la formación inicial de un profesor de educación básica. También, un profesor con conocimientos matemáticos y didácticos sólidos de su asignatura difícilmente es afectado por nuevos modelos educativos. Por ejemplo, Japón ha tenido varias reformas educativas en los últimos 30 años, sin embargo aquel país tiene implementado un programa de formación de profesores de matemáticas llamado “Estudio de Clases”, que lleva más de 130 años de existencia (Isoda y Olfos, 2009). En general, este programa consiste en que un grupo de profesores de matemáticas observan la clase de otro profesor, al finalizar es retroalimentado por sus pares.

Diversos estudios en México (Balderas, Block y Guerra, 2011; Ramírez y Block, 2009) y otros países (De Bock, Fernández, Llinares y Verschaffel, 2012) muestran algunas problemáticas de enseñanza y aprendizaje por parte de estudiantes y profesores en relación con la proporcionalidad, como el no saber distinguir cuándo se trata de un problema de proporcionalidad y cuándo no lo es, también muestran confusión al aplicar métodos aditivos o multiplicativos en diversas situaciones, cuestiones que pueden deberse a falta de desarrollo del pensamiento proporcional o deficiencias en su enseñanza, mismas que pueden explicarse por falta de formación matemática en los profesores. De manera que un desarrollo deficiente en el pensamiento proporcional obstaculiza la comprensión y el pensamiento en una variedad de disciplinas que van desde el álgebra, la geometría y algunos aspectos de la biología, la física y la química (Godino y Batanero, 2003).

Es importante señalar que estas problemáticas conceptuales llegan a la secundaria junto con el tránsito de la proporcionalidad de la aritmética hacia el álgebra (específicamente en la función lineal), teniendo el profesor una situación compleja que tiene que ver no sólo con cuestiones de conocimiento sobre el tema sino además curriculares (Block, 2006).

Ante algunas de estas dificultades de aprendizaje, algunos estudios (Cañón, 1993; González, 2004; Kline, 2014) han señalado la importancia que posee la historia y la epistemología en la enseñanza de la matemática, por ejemplo, a través de los distintos niveles escolares los estudiantes van enfrentando ciertas dificultades en el aprendizaje de los conceptos en matemáticas, dichas dificultades se asemejan a las etapas que la humanidad enfrentó, a través de los siglos, para superar los obstáculos que impedían comprenderlos, "...cada persona debe pasar aproximadamente por las mismas experiencias por las que pasaron sus antepasados si se quiere alcanzar el nivel de pensamiento que muchas generaciones han alcanzado,... No se puede dudar de que las dificultades que los grandes matemáticos encontraron son también los obstáculos en los que tropiezan los estudiantes..." (Kline, 2014, p.48-49).

Un ejemplo de la afirmación anterior es cuando un estudiante, a través de los grados escolares va estudiando el concepto de número, primeramente los naturales, pasando por los enteros, racionales e irracionales, durante este proceso se va enfrentando obstáculos como es el aplicar ciertas formas de pensar que son válidas para las operaciones con determinados tipos de números hacia otros contextos, por ejemplo, en los números naturales un estudiante puede pensar que el resultado de multiplicar dos números da como resultado un número más grande, pero en los números racionales el razonamiento anterior no puede aplicarse para las fracciones propias. Es importante señalar que para que fueran aceptados los números negativos o los irracionales como parte de los números tuvieron que pasar varios siglos.

Otra rama de la matemática que fue desarrollada más de veinte siglos después de la aritmética y la geometría fue el álgebra, siendo este tránsito delicado para los estudiantes que pasan a nivel secundaria. Por ejemplo, en el curriculum de secundaria, para referirse a la función lineal no se hace un rescate de saberes previos como semejanza o factor constante (Ramírez, Block, 2009), que son necesarios para su comprensión. El curriculum podría mostrar los conocimientos de nivel primaria que sustentan a la función lineal.

Lo anterior pone a discusión si el estudiante puede reproducir en su mente aquellos procesos mentales que llevaron a cabo quienes aportaron al desarrollo de la matemática. Todo esto en un periodo de tiempo acorde con su trayectoria escolar. Estas dificultades de los estudiantes deben ser no sólo conocidas por el profesor sino poseer sólidos conocimientos disciplinares y didácticos para poder enfrentarlos. De esta forma, el curriculum y la formación de profesores son

problemáticas que están presentes en el tema del aprendizaje de la proporcionalidad, y que sería posible analizar desde una perspectiva del desarrollo histórico y epistemológico.

Revisión de la literatura

En este apartado se recopilan trabajos que muestran problemáticas, resultados, métodos y enfoques de investigaciones relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad a nivel internacional y nacional, en niveles de primaria y secundaria.

Block (2006) explora los conocimientos de 65 profesores de primaria del Estado de México acerca de las principales propiedades de una relación proporcional entre cantidades, como son conservación de las razones internas, existencia de un factor de proporcionalidad y propiedad aditiva. Algunos de los resultados que se obtuvieron fueron, en cuanto a identificar si las propiedades que se les presentaban eran suficientes para que una relación fuera de proporcionalidad, sólo el 32% respondió correctamente. En general concluye Block (2006) que, de acuerdo con la información, los maestros de primaria poseen conocimientos precarios para identificar las características de una relación proporcional.

Ramírez y Block (2009) exponen resultados de trabajar en forma individual con 13 alumnos de 4° a 6° de primaria en la resolución de problemas. Estos autores plantean la hipótesis de que, trabajar con razones, previo y paralelamente a las fracciones favorece al desarrollo del pensamiento proporcional así como sentar las bases para una mejor comprensión de las fracciones como expresiones de medidas, de razones y de operadores multiplicativos.

Se encontraron dificultades en el reconocimiento de la proporcionalidad, según Ramírez y Block (2009) los alumnos de 6° han progresado poco en el proceso de utilizar fracciones con el sentido de razones, pero sí logran utilizar razones de enteros y sus propiedades para resolver problemas. Debido a ello se plantea la necesidad de estudiar más los procesos didácticos que favorecen la articulación entre las razones de enteros con las fracciones y decimales (como el tránsito de expresiones “por cada 5, 2...” a expresiones de tipo “ $\frac{2}{5}$ ”, “40%” o “x 0.4”)

En este mismo documento de Ramirez y Block, se retoman algunas situaciones didácticas de Brousseau como “El espesor de las hojas de papel” o “El agrandamiento de un rompecabezas”,

empero, estas son aún demasiado complejas como para llevarse a cabo en el aula según los autores. “De modo que es necesario seguir estudiando alternativas curriculares que permitan una mejor integración del estudio de los números racionales con el de la proporcionalidad en beneficio de un mejor aprendizaje de cada uno de esos conceptos” (Ramírez y Block, 2006).

Otras investigaciones realizadas por De Bock, Fernández, Llinares y Verschaffel (2012) muestran las dificultades de estudiantes de primaria y secundaria para identificar cuándo se trata de un problema de proporcionalidad y cuándo de adición. Por ejemplo se plantean los siguientes problemas:

- a) Pedro y Tomás están subiendo cajas a un camión. Empezaron juntos a trabajar pero Tomás es más rápido. Mientras Pedro ha subido 40 cajas, Tomás ha subido 160 cajas en el mismo tiempo. Si Pedro ha subido 80 cajas, ¿Cuántas cajas habrá subido Tomás?
- b) Ana y Raquel patinan alrededor de una pista. Ambas son igual de rápidas, pero Raquel empieza primero a patinar. Cuando Ana ha patinado 3 vueltas, Raquel ya ha dado 12 vueltas. Si Ana ha dado 6 vueltas, ¿Cuántas vueltas ha dado Raquel?

Mientras en el primer problema se usa razones entre dos números, en el segundo es la adición entre dos números. Este tipo de problemas planteados en este artículo son similares a muchos otros en donde, tanto estudiantes como profesores, no pueden identificar si utilizar una proporción (en la mayoría de los casos una regla de tres) o un método aditivo.

Una investigación que examina los conocimientos de los profesores respecto a la proporcionalidad es de Block (2006). Este trabajo, de carácter exploratorio muestra la enseñanza de la noción de proporcionalidad. Considerando el programa de matemáticas 2006 de primer grado de secundaria, se elaboró un cuestionario y se aplicó a 63 profesores de escuelas públicas y privadas del Estado de Nuevo León. En el cuestionario se solicitaron varios procedimientos de resolución con el fin de explorar la diversidad de técnicas de problemas de proporcionalidad, además de pedirles que justificaran sus afirmaciones. Entre los resultados están que sólo el 30% resolvió correctamente los ocho problemas, 63% cometen entre 1 y 3 errores, 7% cometen más de 3 errores. Se observó una fuerte inclinación por procedimientos como la regla de tres y poca presencia de procedimientos algebraicos.

Nuevamente, como en otras investigaciones (de Bock et al, 2012; Block, Mendoza y Ramírez, 2010) se documentan las dificultades de los estudiantes para distinguir un problema que no es de proporcionalidad de uno que sí lo es. Se les preguntó además acerca de cuáles eran las magnitudes que intervenían en el problema y si dichas magnitudes eran proporcionales, la mayoría de los maestros identificó las magnitudes correctamente de entre 4 y 6 problemas, pero solamente justificaron de 1 a 3 problemas. En general de los 504 argumentos solicitados en el cuestionario (8 por cada uno de los 63 maestros) sólo el 25.4% son argumentos correctos. Esto muestra las grandes dificultades de los maestros para argumentar sus respuestas. Finalmente el autor hace un llamado a la necesidad de estudiar aún más el fenómeno desde otras perspectivas metodológicas.

Unas de las nociones relacionadas con la proporcionalidad son la razón y la fracción, que investigan Ramírez y Block (2009) quienes analizan su papel en las matemáticas de primaria así como su vinculación. Desde un análisis curricular, histórico y de observaciones detalladas de 12 sesiones de entre 90 y 120 minutos, Ramírez y Block (2009) consideran que tal vínculo no está claramente definido en el sistema educativo mexicano. Estos autores realizan una breve aproximación histórica de los conceptos de razón y fracción, y su enseñanza desde el surgimiento de la proporcionalidad hasta llegar al currículum en México en donde desaparece este tema por algún tiempo en la década de los 70's y se incluye nuevamente en la década de los 80's de forma desarticulada. En transcurso del tiempo la razón y la proporción van perdiendo sus diferencias para considerarse una igual a la otra según los autores mencionados.

Entre los resultados de Ramírez y Block (2009) se encuentran que el profesor enfoca poco los procedimientos utilizados por los estudiantes y aquellos propiciados por el tipo de problemas que él plantea como la conservación de las razones internas o de la razón externa natural no fraccionaria en el caso del problema con escalas. Nuevamente como en otras investigaciones (Block, Mendoza y Ramírez, 2010; Ramírez, 2012) se muestra la confusión para identificar problemas de proporcionalidad de los que no lo son.

Es necesario, como advierten los autores, profundizar en los procesos de reconstrucción de los conocimientos sobre proporcionalidad, así como su articulación con las fracciones y la función lineal. De esta manera, concluye Ramírez y Block (2009) que no sólo la enseñanza y articulación del tema de proporcionalidad ha cambiado a través de los años sino el mismo concepto de

proporcionalidad, existiendo actualmente confusión en la terminología utilizada, como lo es la relación entre razón y fracción.

Este cambio al que refieren Ramírez y Block (2009) del concepto de proporcionalidad tiene que ver con el hecho de que cuando se representaba la proporción como un igualdad entre razones en la matemática antigua con los griegos era mediante los números naturales o magnitudes inconmensurables, que hasta varios siglos después se expresaron como números irracionales, “Sin embargo, en la actualidad, cuando ya se dispone de los números reales y del álgebra, es probable que, en la esfera de las matemáticas académicas, las razones ya no cumplan ningún papel” (Ramírez y Block, 2009, p.67). Ante esta afirmación, puede decirse que la razón, como fue entendida en un inicio por los griegos no es un número, ni una magnitud, sino una comparación entre magnitudes. La comparación es importante en la construcción de la noción de razón, de la misma forma en que los alumnos de primer grado de primaria antes de aprender los números hacen comparaciones entre objetos.

La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica es una investigación que también realizan Block, Mendoza y Ramírez (2010) donde se brindan elementos de análisis en el tema de la proporcionalidad directa. Se muestran múltiples ejemplos de cómo los alumnos resuelven problemas. Se identifican, entre otras cosas, algunas dificultades del paso de la proporcionalidad a la función lineal, que requiere un mejor dominio de las nociones de variación y dependencia.

En general las investigaciones tienden hacia el análisis curricular, cuestionarios a profesores y estudiantes sobre el conocimiento de la proporcionalidad, observación de secuencias didácticas en el aula y la resolución de problemas.

Planteamiento del problema

El estudio de la proporcionalidad es importante en el tránsito de la primaria y la secundaria, porque lleva a la proporcionalidad de la aritmética y la geometría hacia el álgebra, relacionándose con otros contenidos dentro del curriculum, por ello, es fundamental que exista una adecuada articulación curricular así como una sólida formación de profesores, ámbito que ha sido descuidado por el sistema educativo mexicano, siendo importante debido a que la concepción que tiene un profesor sobre las matemáticas incide directamente en su posición respecto a su

enseñanza (Rondero et al., 2013). De manera que es adecuado conocer algunas de las concepciones que tienen los profesores acerca de la proporcionalidad, esto en nivel básico.

Las concepciones de los profesores acerca de la proporcionalidad están relacionadas con su proceso de formación y con los contenidos en los libros de texto, siendo estos el recurso didáctico más usado por profesores en todas las materias, y en la mayoría de los casos son utilizados para explicar los conceptos en las distintas asignaturas sin ningún otro referente, entre las cuales se encuentra matemáticas (SEP, 2010).

En este sentido el curriculum es importante, Ramírez y Block (2009) señalan que no sólo la enseñanza del tema de proporcionalidad ha cambiado a través de los años, sino las mismas concepciones por parte de los profesores, dando lugar a confusión, por ejemplo, usar el término “razones” al trabajar con fracciones, o utilizar los términos “medios” y “extremos” cuando se utilizan fracciones. Estos son elementos donde los profesores muestran dificultades (Ramírez y Block, 2009) siendo así un aspecto relevante a analizar.

Otro elemento importante que interviene en lo curricular así como en la formación de profesores es la articulación de saberes. Como señala Rondero “No es posible seguir aceptando un currículo desarticulado en una misma asignatura, entre diferentes asignaturas de un mismo nivel y entre niveles educativos” (2013, p. 13). De manera que el transcurso entre niveles educativos en el tema de proporcionalidad es importante para seguir aprendiendo matemáticas más avanzadas. En este sentido el profesor es fundamental para mostrar la articulación de forma coherente entre los contenidos del curriculum de matemáticas así como entre los distintos niveles educativos.

Sin embargo, aunque existen referentes por parte de la Secretaria de Educación Pública en México sobre las características que debe tener un curriculum articulado, no existe una metodología para su elaboración más allá de la congruencia entre objetivos, contenidos y actividades que propone un diseño curricular por objetivos.

Por otra parte, el desarrollo histórico de las ideas matemáticas tiene una función en la didáctica de la matemática, entendida la historia no como una serie ordenada de fechas, sino como procesos gestados en contextos determinados. En el caso de la matemática es el proceso de gestación de ideas relacionadas en un contexto. El conocimiento de la historia de la matemática es fundamental para los profesores, así como para el curriculum y la articulación de saberes

debido a que funge como “... instrumento de comprensión de sus fundamentos y de las dificultades de sus conceptos para así responder a los retos de aprendizaje. La historia es fuente de inspiración, autoformación y orientación en la actividad docente y al revelar la dimensión cultural de la matemática, el legado histórico permite enriquecer su enseñanza y su integración en el conjunto de los saberes científicos, artísticos y humanísticos que constituyen la cultura” (González, 2004, p.1).

Con lo mencionado anteriormente por González, se considera que la historia de la matemática tiene una función además de didáctica, en la formación de profesores y articuladora del conjunto de saberes matemáticos. De esta manera, la historia puede explicitar la relación de la proporcionalidad con otros saberes de la matemática, y así poder contribuir a la formación de un currículum más articulado.

En resumen, el currículum, la formación de profesores y la articulación de saberes son elementos donde se muestran problemáticas relacionadas con el aprendizaje de la proporcionalidad y que estas pueden ser abordadas desde el punto de vista de la historia y la epistemología.

Con base en lo anterior se plantea lo siguiente:

Objetivo general

Analizar la forma en que la proporcionalidad está articulada con otros conceptos de la matemática elemental a través de los libros de texto de primaria y secundaria desde una perspectiva histórica y epistemológica, para generar elementos de reflexión en la formación de profesores.

Objetivos particulares

Realizar una aproximación al desarrollo histórico y epistemológico de la proporcionalidad.

Analizar la forma en que la proporcionalidad está articulada con otras nociones de la matemática elemental a través de los libros de texto de primaria y secundaria.

Generar elementos de reflexión para la formación de profesores.

Preguntas de investigación

¿Cómo ha sido el desarrollo histórico y epistemológico de la proporcionalidad?

¿En qué forma la proporcionalidad está articulada con otras nociones de la matemática elemental a través de los libros de texto de primaria y secundaria?

¿Cómo por medio de la aproximación histórica y epistemológica de la proporcionalidad pueden generarse elementos de reflexión para la formación de profesores?

Hipótesis

Existe falta de articulación de la noción de proporcionalidad con otros conceptos de la matemática elemental en el curriculum de primaria y secundaria, así como dificultades en los profesores en el entendimiento de la proporcionalidad. La aproximación histórica y epistemológica proveerá elementos para la articulación de dicha noción.

Justificación

La proporcionalidad “constituye un conocimiento matemático que subyace en múltiples nociones matemáticas con numerosas aplicaciones en diversos contextos de la vida cotidiana, de los oficios y de otras disciplinas” (Block, Mendoza y Ramírez, 2010, p.19). En este sentido, esta investigación es relevante porque es un tema de trascendencia en otros contextos y no sólo dentro del área de las ciencias básicas e ingenierías. De manera que se trata de una noción básica que permite ir transcurriendo hacia niveles cada vez más complejos, como el que se da entre la primaria y la secundaria.

Además, esta investigación se considera importante por las reflexiones propiciadas en torno a la formación de profesores, basadas en la revisión histórica y epistemológica de la proporcionalidad. Ello se refiere también a que la revisión llevada a cabo en los libros de texto bajo esta perspectiva permite hacer explícita la relación de la proporcionalidad con otros contenidos de la matemática de educación primaria y secundaria, esto es importante debido a que

son los libros de texto los recursos didácticos más utilizados por profesores de educación básica y en algunos casos no se posee otro referente para impartir clase (SEP, 2010).

Con respecto a la revisión de la literatura, se pretende contribuir en cierta medida, a la vinculación de la proporcionalidad entre nivel primaria y secundaria, problemática señalada por Ramírez y Block (2009), así como aportar elementos que muestren el papel de la razón como previo a la fracción en el desarrollo de la proporcionalidad en la historia. Por medio de este trabajo se intentan aportar elementos útiles que muestren la articulación de la proporcionalidad con otras nociones y conceptos fundamentales en matemáticas.

CAPÍTULO II MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

El desarrollo del marco teórico permite tener un referente por medio del cual se analiza la problemática anteriormente descrita, orientando el proceso de la investigación así como el análisis de la información obtenida, por ello, en este apartado se muestran aquellas teorías y conceptos que dan sustento a la investigación y apoyan al logro de los objetivos como son la transposición didáctica, articulación de saberes y la historia y epistemología, el curriculum, y la formación de profesores.

La transposición didáctica

La transposición didáctica se refiere al conjunto de transformaciones que experimenta un saber con la finalidad de ser enseñado, “lo cual implica que éste [saber] sea reformulado para que pueda ser transferido a un contexto diferente al de su origen” (Cacho, 2005, p.62). Por ejemplo un saber que ha sido designado como un saber a enseñar, sufre desde entonces una serie de transformaciones adaptativas que lo volverán apto de ser enseñado (Chevallard, 1998). Es así como “El trabajo que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica” (Chevallard, 1998, p.16).

Pueden considerarse tres fases de la transposición didáctica, el saber erudito, el saber a enseñar y el saber enseñado. El saber erudito se genera dentro de la comunidad científica, utiliza un lenguaje técnico y complejo que impide ser enseñado directamente, por lo cual deben establecerse ciertos mecanismos para ser insertados en la enseñanza (Cacho, 2005). En esta etapa, son los profesores, investigadores, científicos interesados en la enseñanza, diseñadores curriculares, quienes seleccionan los conocimientos y los estructuran en los programas del sistema educativo.

El saber a enseñar se conforma por los programas y libros de texto, pero también por los actores que los crean y legitiman. El saber enseñado es aquel saber a enseñar que ha sido adaptado por el profesor según sus conocimientos y representaciones (Cacho, 2005).

Así, se establece la existencia de cuatro actores fundamentales en el proceso de transposición; el investigador o científico; quienes producen el conocimiento, los especialistas; que seleccionan y adaptan ese conocimiento técnico y lo plasman en los programas de estudio y libros de texto oficiales, es decir lo hacen accesible; el profesor, quien adapta el saber para ser enseñado pasando por sus representaciones; y finalmente está el alumno, quien le da sentido al saber (Cacho, 2005).

La existencia de las fases de transposición muestra a su vez una distancia entre estas, por ejemplo un contenido como la proporcionalidad puede sufrir un proceso de desgaste a través de las etapas, pudiendo llegar al estudiante como un enunciado desprovisto de contexto y significado. Por ello es importante tener especialistas para cada etapa así como una estrecha colaboración entre ellos. Esta investigación se enfoca en los programas de estudio y libros de texto así como en el profesor, desde un punto de vista del desarrollo histórico de la proporcionalidad.

En relación con la transposición didáctica se encuentran las nociones. Para esta investigación se adopta el término de noción como un saber susceptible de ser enseñado en un ambiente escolar (Chevallard, 1998).

Articulación de saberes

La articulación es un elemento usado en múltiples áreas como, biología, física, anatomía o mecánica. En su definición etimológica el término articulación proviene del latín *articulatio*, y *-ōnis*, perteneciente a las articulaciones (DRAE, 2014).

A nivel internacional la NCTM (National Council of Teachers of Mathematics /Asociación Norteamericana de Profesores de Matemáticas) expone la importancia de la articulación y dice que el currículum es algo más que una colección de actividades, debe ser coherente y bien articulado. “Una buena articulación curricular lleva a los estudiantes a aprender ideas matemáticas cada vez más sofisticadas a medida que avanzan sus estudios” (NCTM, 2000, p. 15).

El plan de estudios 2011 de educación básica en México así como en el Proyecto de Acuerdo por el que se Establece la Articulación de la Educación Básica (SEP, 2011) se habla de articulación curricular como una estrategia de mejora continua de los planes de estudios, subrayando en los procesos de aprendizaje de los estudiantes, esto se logrará en la medida que los profesores trabajen en la comprensión y el sentido formativo de cada uno de los niveles educativos (SEP, 2011).

En el presente trabajo se adopta el término de articulación en cuanto a la relación que existe entre conceptos y nociones matemáticas. Dicha relación se analizará en la medida en que los conceptos y nociones incluidos en el curriculum, muestren distintas formas de representación, como aritmética, geométrica o algebraica.

En el aprendizaje de las matemáticas, la articulación es un elemento de gran importancia no sólo en la formación de profesores, sino además en lo que corresponde al diseño curricular de las asignaturas de matemáticas. Si se muestran articuladamente contenidos matemáticos coherentes, bien sustentados a los estudiantes propicia el que los aprendan significativamente, lo que les posibilita avanzar en su capacidad de aplicar y relacionar las matemáticas en diferentes situaciones y actividades, y así la comprensión matemática puede ser más profunda y duradera (Rondero et al., 2013).

El estudiante aprende a articular ideas matemáticas con ayuda del profesor. En esta parte, la aproximación histórica y epistemológica explicita la articulación de la proporcionalidad con otros conceptos de la matemática básica, al mismo tiempo que muestra las distintas formas de representación en la aritmética, geometría o en álgebra, “La articulación conceptual de los saberes matemáticos permite ver la importancia del todo y de las partes, en el sentido de darle significado a cada una de las partes que integran el todo, pero también significar al todo en cuanto las implicaciones que conlleva en cada una de sus partes.” (Rondero et al., 2013, p. 28).

El desarrollo histórico de las ideas matemáticas

La historia es una área del conocimiento humano, etimológicamente es la narración de hechos pasados, tomando en cuenta que estos hechos se tienen que situar en contextos determinados. Cerda (Citado en Bernal, 1998) se refiere a una investigación histórica como el estudio y revisión

de los fenómenos como producto de un determinado desarrollo, la forma en que han aparecido, evolucionado y llegado a su estado actual.

En lo que respecta a la historia de la matemática, esta permite conocer el surgimiento y evolución de los conceptos, ideas, nociones o símbolos y bajo qué contextos, espacios y tiempos se originaron, además de las dificultades, los métodos y técnicas que se utilizaban para resolver los problemas, es decir, la historia permite aproximarse a la matemática no como procesos ya terminados sino como procesos históricamente gestados (Cañón, 1993). De manera que debido a la complejidad que implica realizar una investigación de tipo histórico, solo se retoman algunos elementos para la revisión de la proporcionalidad en la historia de las ideas matemáticas, centrándose en sus inicios, que son de tipo aritmético y geométrico.

Bajo la premisa de que la historia de la matemática puede guiar en la tarea de revivir aproximadamente las mismas dificultades que enfrenta una persona en un contexto escolar (Kline, 2014), se retoman dos contextos históricos bajo los cuales la proporcionalidad tuvo que superar obstáculos. El primero corresponde a su aparición, bajo un contexto aritmético y geométrico, el segundo algebraico con elementos como la pendiente de la recta y la tangente. Estos conforman los ejes por medio de los cuales se mostrará el desarrollo histórico y epistemológico de esta noción, y que posteriormente son utilizados para la revisión temática de los libros de texto y programas de estudio en primaria y secundaria, bajo la hipótesis de que la historia puede proveer algunos elementos para la articulación de dicha noción en el curriculum.

Es importante mencionar que aunque pueden identificarse otros contextos en los que la proporcionalidad está presente, como el cálculo diferencial, no forma parte de la presente investigación, ya que está delimitada en primaria y secundaria y los programas de estudio oficiales no abarcan estas áreas de la matemática superior.

Con respecto a la epistemología, es una disciplina que pretende el análisis de los fundamentos de la ciencia (Gutiérrez, 2006), estudia críticamente los principios del algún conocimiento científico para determinar su origen, estructura, valor o alcance objetivo. De manera que no sólo se realiza un revisión del desarrollo de la proporcionalidad en la historia de la matemática, en cuanto a la descripción del desarrollo de la proporcionalidad y su contexto, sino además se realiza un análisis

de algunos aportes conceptuales que fueron conformando a la proporcionalidad como un tema fundamental en el aprendizaje de la matemática, específicamente como sustento de la función lineal como se estudia en la secundaria.

El curriculum

El curriculum es otro elemento a tomar en cuenta para la presente investigación, definirlo es algo complejo (Sacristán, 1998) pues es el resultado de un entrecruzamiento de prácticas, culturas, niveles institucionales, contextos, cosmovisiones, teorías curriculares y procesos históricos. Existen distintos acercamientos al curriculum para su análisis, como el curriculum formal, curriculum real y curriculum oculto (Casarini, 2005). Entre los elementos que conforman al curriculum están, los planes de estudio, libros de texto, alumno, profesor y el capital cultural de ambos, factores económicos, políticos y socioculturales, el contexto social, la institución, entre otros (Casarini, 2005).

Para los propósitos de la presente investigación se retoma la definición de curriculum formal u oficial, el cual se refiere a los planes y programas de estudio y libros de texto, el curriculum formal “es la planeación del proceso de enseñanza – aprendizaje con sus correspondientes finalidades y condiciones académico – administrativas. Lo específico del curriculum formal es su legitimidad racional, su congruencia formal va desde la fundamentación hasta las operaciones que lo ponen en práctica, sostenidas por una estructura académica, administrativa, legal y económica” (Casarini, 2005, p.8).

El curriculum formal contiene los objetivos generales y particulares de aprendizaje, la organización y secuenciación de contenidos, actividades de aprendizaje y modalidades de evaluación. Para los propósitos del este trabajo y debido a la complejidad que implica un análisis curricular, se realiza una revisión temática no exhaustiva que refiere a la organización y secuenciación de los contenidos con respecto a la proporcionalidad.

Por otra parte, aunque existan organismos e instituciones como la Secretaría de Educación Pública de México, que se refieran a las características e importancia de un curriculum articulado, no existen modelos de revisión curricular en lo que respecta a la articulación de temas. Por esta razón se adopta, para la revisión de la organización y secuenciación de contenidos, dos ejes de

análisis obtenidos a través de la revisión del desarrollo histórico y epistemológico de la noción de proporcionalidad, estos son, el contexto aritmético y geométrico y el contexto algebraico con elementos como la pendiente de la recta y la tangente. También se toman en cuenta, las formas de representación mostradas en el curriculum con respecto a la proporcionalidad, para analizar la forma de articulación de esta noción.

Formación de profesores

Es necesario considerar también el contexto de la formación de profesores de matemáticas, ámbito descuidado por el sistema educativo mexicano. El profesor constituye un eje fundamental en la transposición didáctica, y debe tener sólidos conocimientos disciplinares y didácticos, apoyado en un curriculum articulado.

En el proceso de formación de profesores en matemáticas participan diversas instituciones entre las que se encuentran las escuelas normales, la Universidad Pedagógica Nacional, Universidades públicas y privadas que ofrecen programas de posgrado y de actualización profesional, los Centros de Maestros y los Centros de Actualización del Magisterio. La formación inicial de profesores en preescolar, primaria y secundaria en México se lleva a cabo en escuelas normales y en la Universidad Pedagógica Nacional (UPN); mientras que no existen programas específicos de formación inicial para profesores de bachillerato ni para quienes laboran en el nivel superior. (Barrera y Reyes, 2014, p. 32).

Los profesores de preescolar y primaria son profesores generales (Normal básica), para secundaria existen programas de formación específica en el área de matemáticas a partir del tercer semestre hasta octavo semestre de la Normal superior. Reciben una formación que incluye algunos cursos orientados al área de matemáticas como son a) aritmética: su aprendizaje y enseñanza. b) álgebra: su aprendizaje y enseñanza. c) geometría: su aprendizaje y enseñanza, d) procesamiento de información estadística. Por su parte, la licenciatura en educación secundaria cuenta con una especialización en matemáticas.

La formación de los profesores de matemáticas de secundaria incluye contenidos de teoría educativa, pedagogía y cursos específicos en el área de matemáticas tales como: introducción a la enseñanza de matemáticas, pensamiento algebraico, los números y sus relaciones, figuras y

cuerpos geométricos, plano cartesiano y funciones, procesos de cambio o variación, medición y cálculo geométrico, escalas y semejanza, la predicción y el azar, presentación y tratamiento de la información, además de algunos cursos orientados a la matemática educativa como procesos cognitivos y cambio conceptual en matemáticas y ciencia, seminario de investigación en educación matemática, tecnología y didáctica de las matemáticas (Licenciatura en Educación Secundaria, Plan 1999, en Barrera y Reyes, 2014, p. 41).

El desarrollo profesional de los profesores de educación básica se lleva cabo a través de los diferentes cursos, talleres, diplomados y programas de maestría y doctorado que integran el Catálogo Nacional de Formación Continua y Superación Profesional para Maestros de Educación Básica en Servicio.

Los elementos que conforman este marco teórico y conceptual son, la transposición didáctica, articulación de saberes, la historia y epistemología, el curriculum (planes de estudio y libros de texto) y formación de profesores. Todos y cada uno de estos apoyan al logro de los objetivos. La historia y epistemología, por una parte apoyan al conocimiento del desarrollo de la noción de proporcionalidad, además de que existe una reconstrucción histórica y epistemológica de un saber (Chevallard, 1998), que es un análisis de la primer fase de la transposición didáctica, del saber erudito al saber a enseñado.

En cuanto al objetivo del análisis de la articulación de la proporcionalidad con otras nociones de la matemática elemental a través de los libros de texto de primaria y secundaria, se retoman como categorías para el análisis los dos contextos establecidos a partir del desarrollo histórico, el aritmético y geométrico y el algebraico con elementos como la pendiente de la recta y la tangente que representan dos fases por las que transita la proporcionalidad.

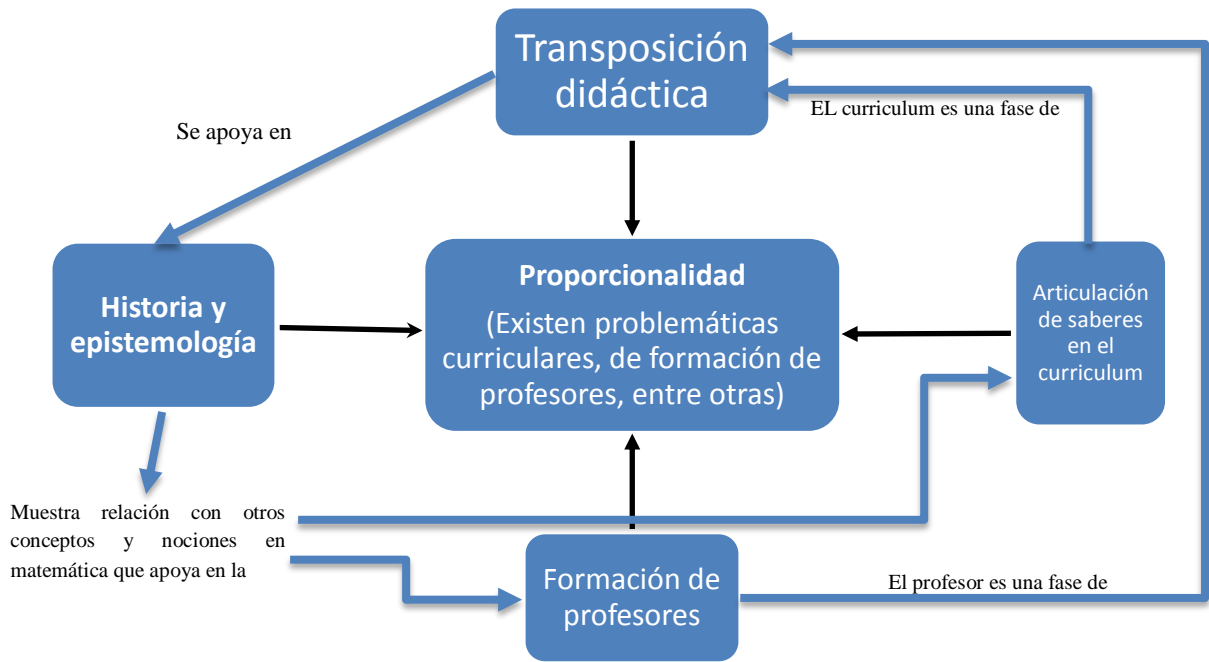
Esta conformación de los ejes se da con base a que el desarrollo histórico y epistemológico puede articular la proporcionalidad con otras nociones matemáticas en el curriculum de educación básica (Cañón, 1993) a su vez que por medio de este elemento se establece cierta semejanza con las dificultades que enfrentan los futuros profesores de matemáticas y que muchas veces no son superados durante su formación. Además se considera el hecho de que no existe un modelo de evaluación curricular centrado en la articulación de saberes.

Por otra parte el currículum formal de educación básica debe lograr una continuidad y coherencia entre niveles educativos (Kirk, 1989), por ello, con la revisión del desarrollo histórico y epistemológico se pretende mostrar la relación de la noción de proporcionalidad con otras nociones de la matemática básica.

Se considera relevante conocer cómo conceptúan los profesores la proporcionalidad, porque es el profesor un eslabón de la transposición didáctica que va del saber a enseñar al saber enseñado, de manera que las deficiencias que presenten junto con un currículum desarticulado tendrán impacto en el aprendizaje de los estudiantes.

Finalmente para el objetivo de generar elementos de reflexión para la formación de profesores se toma en cuenta que “El estudio de la historia de las matemáticas puede ser un elemento importante en la autoformación permanente del profesor así como una de las características principales de inspiración en la orientación de la actividad docente” (González, 2004, p. 24). Es a partir de la revisión histórica y epistemológica de la noción de proporcionalidad que se generan los ejes de análisis para la revisión de los libros de texto y programas de estudio de primaria y secundaria, y de estas etapas se generan los elementos de discusión y reflexión en los profesores de matemáticas.

El esquema 1 muestra la integración de los elementos a considerar para el estudio de la proporcionalidad. Los elementos históricos y epistemológicos apoyan en la primera fase de la transposición didáctica, así como también para la revisión temática de programas y libros de texto de primaria y secundaria con respecto a la forma en que se articula la proporcionalidad con otros conceptos y nociones matemáticas. Estos elementos pueden incidir en la formación de profesores.



Esquema 1. Integración de los elementos en el estudio de la proporcionalidad

CAPÍTULO III METODOLOGÍA

El enfoque y tipo de investigación.

En concordancia con los objetivos y el marco teórico del presente trabajo se eligió un enfoque cualitativo, que se orienta a profundizar en casos específicos y no generalizar, preocupándose no por la medición sino por la cualificación y descripción del objeto de estudio (Bernal, 2010). El tipo de investigación se asumió como histórico – documental, principalmente para las fases de la revisión histórica y epistemológica de la noción de proporcionalidad y el análisis del curriculum de primaria y secundaria, pero también de tipo exploratorio-descriptivo para la sección del trabajo con los profesores en cuanto a conocer sus concepciones de esta misma noción.

En correspondencia con lo anterior, la investigación cualitativa sustentó la interpretación de una problemática de manera detallada, todo aquello que intervino en ésta y que permitió comprenderla. En cuanto al tipo de investigación histórica – documental, puede aplicarse a cualquier área del conocimiento y tiende a estudiar y examinar los sucesos del pasado bajo un determinado desarrollo y contexto, y los analiza en relación con otros sucesos presentes (Bernal, 2010). De manera que la revisión histórica y epistemológica de la proporcionalidad sustentó el análisis de un hecho actual como el curriculum de primaria y secundaria respecto a este mismo eje temático.

Para conocer algunas concepciones de los profesores en cuanto a la proporcionalidad, se asumió un tipo de estudio exploratorio -descriptivo cuyo propósito central consistió en identificar información relevante para su análisis. Los estudios descriptivos buscan definir las propiedades y características importantes de cualquier problemática sometida a análisis (Hernández et al., 2010).

Libros de texto y programas oficiales

Como parte del currículum formal están los libros de texto y programas oficiales, su evaluación, como parte del diseño curricular es un tema complejo y no se retomaron todos los elementos que esto conlleva. Para los objetivos de la presente investigación se seleccionaron algunas partes internas en lo que respecta a la evaluación curricular, estos son, como se mencionó en el marco teórico, la organización y secuenciación de los contenidos con respecto a la noción de proporcionalidad, es decir, la coherencia entre los programas y libros de texto de matemáticas en primaria y secundaria, específicamente en la noción de proporcionalidad así como la articulación con otras nociones de la matemática elemental.

Con base a que una de las fases (del saber erudito al saber a enseñar) de la transposición didáctica implica la reconstrucción histórica y epistemológica de un saber (Chevallard, 1998) y tomando en cuenta que la historia del desarrollo de la matemática permite guiar en la tarea de revivir aproximadamente las mismas dificultades que enfrenta una persona durante su aprendizaje en matemáticas (Kline, 2014), así como que el estudio de la historia de la matemática puede ser un elemento en la autoformación permanente del profesor (González, 2006), se establecieron dos ejes de análisis para la revisión histórica y epistemológica de la proporcionalidad, por una parte el contexto aritmético y geométrico, y por otra el contexto algebraico con elementos como la pendiente de la recta y la tangente.

Los dos ejes de análisis fueron concebidos con base en periodos de la historia, en sus inicios bajo un contexto aritmético y geométrico, la vinculación con el álgebra, la pendiente de la recta y la tangente. Estos periodos incluyen desde el tratamiento aritmético y geométrico por parte de los egipcios y griegos hasta elementos como la pendiente de la recta y la tangente, abarcando también la trigonometría, específicamente el concepto de tangente y su relación con la proporcionalidad. Este periodo es el que se pretende abarcar en la escuela primaria y secundaria a través del currículum.

Cabe destacar que se le dio un énfasis mayor al origen de la proporcionalidad, es decir, al desarrollo aritmético y geométrico ya que ahí se encuentran los fundamentos geométricos de la función lineal, que se aborda en el currículum de secundaria.

Los libros de texto analizados fueron, para primaria, aquellos pertenecientes al ciclo escolar 2013 – 2014 de primer a sexto grado. Para nivel secundaria, la lista de libros de texto autorizados por la Secretaría de Educación Pública para su uso en las escuelas secundarias del Sistema Educativo Nacional ciclo escolar 2013-2014, son 23 para primer grado, 22 para segundo grado y 28 para tercer grado, de los cuales se analizaron, para primer grado “Matemáticas 1 por competencias” de Arriaga y Benítez de editorial Pearson Educación. Para segundo grado se seleccionó el libro “Matemáticas 2” de Almaguer, Rodríguez, Cantú y Rodríguez. Y para tercer grado el libro “El mundo a través de las matemáticas” de Ramírez, Azpeitia, Flores, Martínez, Castillo y Vergara.

La selección de los libros de texto de secundaria fue con base en los que se utilizan en una escuela secundaria de la ciudad de Pachuca, misma donde se hizo una invitación a los profesores a participar en una reunión para reflexionar algunos de los resultados de la investigación así como para conocer sus nociones acerca de la proporcionalidad. En cuanto a la revisión de los programas de estudio de primaria y secundaria se analizaron aquellos pertenecientes al ciclo escolar 2013 – 2014.

La sesión de trabajo con profesores

En lo que respecta a las concepciones de profesores de primaria y secundaria así como de su formación en torno a la noción de proporcionalidad, se conformó una sesión con profesores, primaria y secundaria. Se seleccionaron principalmente profesores de secundaria que en ese momento se encontraran impartiendo las asignaturas de matemáticas. Para ello se utilizó un muestreo intencional simple, que consiste en seleccionar a los elementos bajo criterios del investigador con un previo conocimiento de los elementos poblacionales. (Namakforoosh, 2003).

Posterior al desarrollo histórico y epistemológico de la proporcionalidad y del análisis de los libros de texto, se llevó a cabo una reunión con los diez profesores de una sesión de cuatro horas las cuales fueron videograbadas para su análisis posterior donde se expusieron algunos elementos históricos y epistemológicos de la proporcionalidad.

Es importante mencionar que se estuvo analizando constantemente a los profesores en cuanto a sus concepciones de proporcionalidad por medio de sus intervenciones y finalmente se aplicó una prueba al finalizar las sesiones, esta consistió en preguntas del tema de proporción en un

contexto aritmético y geométrico (Ver Apéndice) así como de la importancia de la enseñanza de la este tema en educación básica.

Los instrumentos y técnicas

En concordancia con el tipo de investigación, se seleccionaron los instrumentos y las técnicas adecuadas para recopilar la información (Bernal, 2010). Para la revisión del desarrollo histórico de la proporcionalidad, se utilizó la técnica documental, utilizando principalmente fuentes secundarias como libros de historia de la matemática, y algunas fuentes primarias como los diálogos de Platón o el libro de los elementos de Euclides.

Para la revisión curricular se utilizaron fuentes primarias, que son los libros de texto y programas de estudio de primaria y secundaria. Como resultado final de esta fase se elaboró un diagrama donde se muestra una comparación entre las nociones matemáticas articuladas con la proporcionalidad de acuerdo con la revisión histórica y entre aquellas nociones que el curriculum de educación básica articula.

De acuerdo con el tipo de investigación (exploratorio – descriptivo) asumido para el conocimiento de algunas concepciones que los profesores de matemáticas de educación básica poseen con respecto a la proporcionalidad, se seleccionó la técnica de observación participante y estructurada con apoyo de una videogradora, ya que se prepararon previamente los aspectos principales a observar y que se dirigieron a los fines de la investigación (Bernal, 2010). Además fue participante en el sentido de que el observador formó parte de la situación, y que de acuerdo con la preparación previa de observación se dirigió la discusión entre los profesores participantes.

Aparte de las videograciones se diseñó y aplicó un cuestionario en el que se incluyeron preguntas sobre la proporcionalidad en contextos aritméticos y geométricos, además de que se recabó información sobre la importancia que tiene para los profesores el tema de proporción en nivel básico. Las opiniones expresadas por escrito y oralmente se clasificaron de acuerdo con los ejes obtenidos de la revisión histórica así como de elementos como el curriculum y formación de profesores.

El proceso de la investigación.

La proporcionalidad es una noción que sustenta a otras en el curriculum desde primaria hasta nivel de licenciatura y más allá, como se estableció en los objetivos, la investigación incluye los niveles primaria y secundaria abarcando un tratamiento aritmético, geométrico y algebraico con algunos elementos básicos de geometría analítica y trigonometría como la pendiente de una recta y la tangente. De acuerdo con investigadores como Block, Mendoza y Ramírez (2010) entre otros, el tránsito más complicado de la proporcionalidad es precisamente en estos niveles en los que el curriculum y los profesores son fundamentales.

En cuanto al curriculum, desde el marco de la transposición didáctica, se consideró un análisis del desarrollo histórico y epistemológico de la proporcionalidad y desde esta perspectiva se analizaron los libros de texto y programas de estudio. Dicho análisis de libros de textos estuvo centrado principalmente en el contexto aritmético y geométrico ya que en esta parte se encuentran los cimientos de posteriores conceptos como la función lineal.

Una vez conformado el proyecto, la primera fase de la investigación consistió en la revisión y análisis del desarrollo histórico y epistemológico de la proporcionalidad, lo que permitió conocer la articulación de esta noción con otros conceptos de la matemática a través del tiempo, así también se establecieron dos ejes de análisis que por medio de las cuales se revisaron los programas de estudio y libros de texto de primaria y secundaria.

Se consideró importante iniciar la parte histórica con la definición de proporcionalidad seguida de un ejemplo que fue utilizado continuamente en ese capítulo para mostrar específicamente el aporte conceptual con cada uno de los dos ejes considerados para este apartado, el de aritmética y geometría, y álgebra con conceptos como pendiente de una recta y la tangente. Al finalizar el capítulo se muestra una figura donde se ilustra la articulación de la proporcionalidad con otras nociones a través de dicho recorrido histórico y epistemológico.

Posteriormente con base en las dos categorías de análisis se llevó a cabo una descripción de los programas de estudio y libros de texto de matemáticas de primaria y secundaria en cuanto al tema de proporcionalidad, se organizaron en tablas y a continuación se llevó a cabo el análisis bajo dichas categorías. Se identificaron los temas correspondientes a la proporcionalidad en los libros

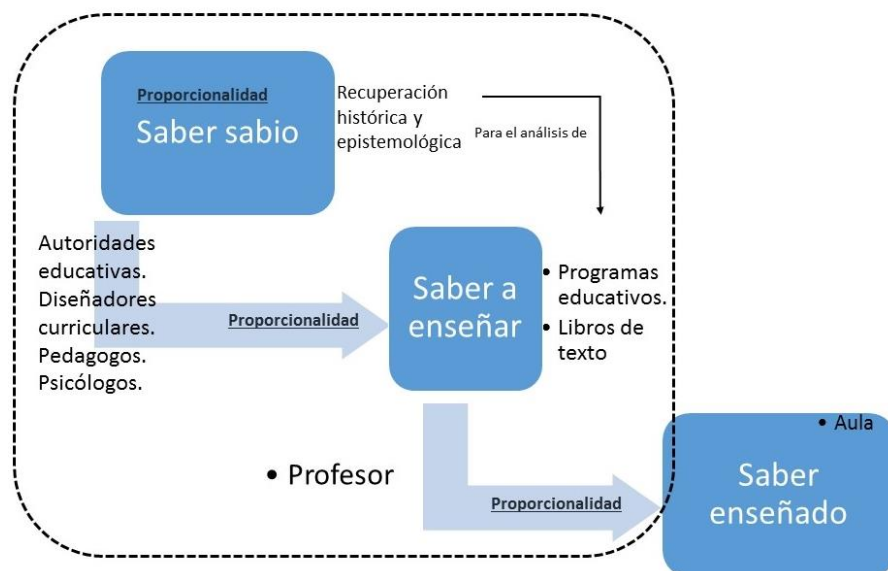
de texto y programas de estudio de primaria y secundaria. Se analizó la relación entre temas que explicitaba el libro de texto, por ejemplo en el tema donde se trataban las razones trigonométricas se buscó si el texto hacía referencia a la relación con la proporcionalidad.

Una vez realizado el desarrollo histórico y epistemológico de la proporcionalidad bajo las categorías de contexto aritmético y geométrico y contexto algebraico con conceptos de pendiente de una recta y tangente, y haber analizado la organización y secuenciación de los contenidos se llevó a cabo una reunión con profesores de primaria y secundaria para mostrar algunos resultados obtenidos hasta ese momento de la investigación, sobre la articulación y los elementos históricos y epistemológicos, así como para discutir y reflexionar temas concernientes a la formación de profesores, el curriculum y aspectos generales sobre la enseñanza de la proporcionalidad. Durante la discusión en las dos sesiones y por medio del cuestionario se obtuvo información sobre las concepciones que tienen los profesores con respecto a la proporcionalidad.

Finalmente el análisis del curriculum estuvo centrado bajo elementos metodológicos de la evaluación curricular de acuerdo con Casarini (2005) así como de las categorías de análisis obtenidas a partir del desarrollo histórico y epistemológico de la proporcionalidad, lo anterior estuvo basado en que no existe una metodología específica para el diseño y evaluación curricular de contenidos articulados. De manera que con la historia y epistemología se contribuyó a la integración del conjunto de saberes relacionado a la proporcionalidad en primaria y se enlazó con la función lineal, no con esto se quiere decir que el tema de articulación de saberes este resuelto pero sí se reconoce que contribuye de cierta forma.

Como un recurso adicional, se utilizó el programa de computadora dinámico “Geogebra” para elaborar algunas de las gráficas y figuras presentadas en la investigación.

El siguiente esquema 1, sintetiza los elementos conceptuales y metodológicos así como la relación entre estos.



Esquema 2. Elementos conceptuales y metodológicos

Se presentan las fases de la transposición didáctica en cuadros azules, de donde a partir del saber sabio, diseñadores curriculares, pedagogos o autoridades educativas seleccionan la noción de proporcionalidad como un saber susceptible de ser enseñado en el aula, este saber pasa a formar parte del curriculum (programas de estudio y libros de texto) y se convierte en la siguiente fase de transposición didáctica que es el saber a enseñar, para después pasar a la última fase de transposición que es el saber enseñado, la proporcionalidad sufre una serie de transformaciones desde que es seleccionado hasta que es enseñado en el aula por el profesor.

A partir de un análisis histórico y epistemológico de la proporcionalidad se intenta reconstruir esta noción y aportar elementos para su articulación con otros saberes de la matemática básica en el curriculum así como para la formación de profesores. El cuadro punteado señala las dos fases de transposición didáctica a las que se enfoca este trabajo de investigación.

CAPÍTULO IV APROXIMACIÓN AL DESARROLLO HISTÓRICO Y EPISTEMOLÓGICO DE LA PROPORCIONALIDAD

Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas.
E.T. Bell (1985).

No olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución.
P.Puig Adam (1951).

Origen y definición de proporción

Desde la perspectiva de la etimología la proporción es la disposición, conformidad o correspondencia debida de las partes de alguna cosa con el todo o entre cosas relacionadas entre sí (Academia Española, 1889). Se deriva del latín *proportio*, relación, analogía, porción. Está compuesta del prefijo *pro*, (hacia adelante, en lugar de.) y *portio*, *portionis* que significa parte de un todo, subdivisión. Otra definición de *proportio*, *porportionis* sería la relación entre cosas que están puestas frente a otras.

En cierta forma el significado etimológico de la proporción se ve reflejado en sus aspectos conceptuales, como cuando se define como una relación matemática de naturaleza multiplicativa entre dos variables (Ramírez, 2012), en una relación de proporcionalidad directa el cociente de las dos variables es constante.

Block, Mendoza y Ramírez (2010) dan dos definiciones de la proporcionalidad, la primera, “Una relación entre dos conjuntos de cantidades es proporcional si los factores internos que se corresponden son iguales” (Block, Mendoza y Ramírez, 2010, p. 27). Se utiliza el término “factores internos”, aunque se suele llamar también “razones internas”, la diferencia es que la **razón** se refiere a la relación que guarda una cantidad con respecto a la otra, por ejemplo la razón entre 1 y 5 es la misma que entre 2 y 10 o entre 3 y 15. Mientras que el **factor** es un número resultante de una relación, por ejemplo el factor que transforma 1 en 5, 2 en 10 y 3 en 15 es la multiplicación por 5.

Para ilustrar la primera definición se presenta la figura 1, que representa a dos aviones. La cuadrícula sobre la que están estas figuras de aviones están formadas por cuadrados de una unidad. Aquí los factores internos del avión 1 corresponden a los factores internos del avión 2 como se muestra en la tabla 1. Por ejemplo, en el avión 1 la distancia DE es la distancia EC multiplicada por 2, HA es DE multiplicada por 3, HA es DE multiplicada por 6. Análogamente esto sucede con los factores internos en el avión 2, la distancia DE es la distancia EC multiplicada por 2, HA es DE multiplicada por 3, HA es DE multiplicada por 6. De esta manera, cuando se comparan los factores internos entre los dos aviones y estos son los mismos se dice que son proporcionales.

Utilizando la misma figura y tabla 1, en términos de razones, se dice que la razón entre 1 y 2 del avión 1, es la misma que entre 2 y 4 del avión 2, o que la razón entre 1 y 6 es la misma que entre 2 y 12.

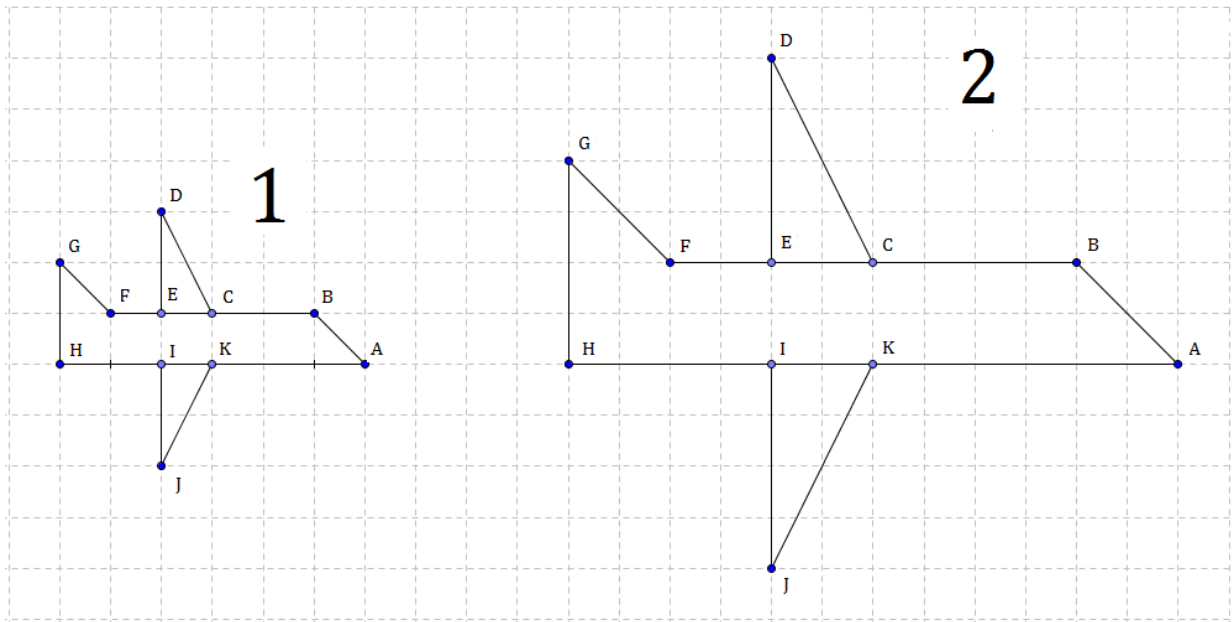


Figura 1. Aviones a escala

DISTANCIA	AVIÓN 1	AVIÓN 2
EC	1	2
DE	2	4
EB	3	6
FB	4	8
HA	6	12

Tabla 1. Factores internos entre el avión 1 y el avión 2

La segunda definición es, “Una relación entre dos conjuntos de cantidades es proporcional si existe un número, siempre el mismo, que multiplicando a cualquiera de las cantidades de un conjunto da como resultado la cantidad correspondiente del otro conjunto. Este número se llama factor constante de proporcionalidad o factor externo constante” (Block, Mendoza y Ramírez, 2010, p. 27). De manera que, cuando se utiliza el término razón por el de factor se puede decir que una relación entre dos conjuntos de cantidades es proporcional si la razón externa es constante. Se hace notar que una relación proporcional es un caso concreto en el que se muestran relaciones de igualdad entre cocientes de números. La proporcionalidad por su parte, abarca todos los casos y formas posibles de mostrar una igualdad entre razones.

Tomando la misma figura 1, entre el avión 1 y el avión 2 existe un mismo número que si se multiplica por cualquiera de las distancias internas de uno, da como resultado las distancias internas del otro, por ejemplo, del avión 1 al avión 2 ese número es 2, o si se va del avión 2 al avión 1 ese número es $\frac{1}{2}$.

DISTANCIA	AVIÓN 1	AVIÓN 2
EC	1	2
DE	2	4
EB	3	6
FB	4	8
HA	6	12

Tabla 2. Factores externos entre el avión 1 y el avión 2

Mientras que en la primera definición se centra en la igualdad de los factores internos de las figuras, en la segunda es un factor o razón externa que genera los factores internos de la otra figura. No se tienen que cumplir las dos definiciones para que dos cantidades o figuras sean consideradas como proporcionales, si se cumple una se cumple la otra y viceversa.

Ahora bien, en las anteriores definiciones aparecen términos como factor, escala, factores internos y externos, fracciones, razones internas y externas, que son elementos que se han construido con el tiempo y favorecen la comprensión del tema, esto ha sido producto de un desarrollo histórico de la proporcionalidad en la que han intervenido otras áreas de la matemática. En sus inicios no se utilizaban la mayoría de los términos aquí utilizados o se estudiaban por separado y sin relación alguna. Por ejemplo, para los griegos sólo los números naturales eran considerados como números y para mostrar la proporcionalidad se utilizaba la igualdad entre dos razones, el uso de fracciones, aunque eran utilizadas no se vincularon con la proporcionalidad.

La proporcionalidad desde la perspectiva de Tales

Una de las primeras fuentes históricas acerca de la proporcionalidad es del filósofo Tales de Mileto. Se le atribuyen teoremas como: a) Todo círculo es dividido en dos partes iguales por un diámetro o b) un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto (Heath, 1921). La siguiente figura 2, se basa en la construcción de un ángulo inscrito en un semicírculo para representar semejanza de triángulos, siendo el segmento ED perpendicular al diámetro AB.

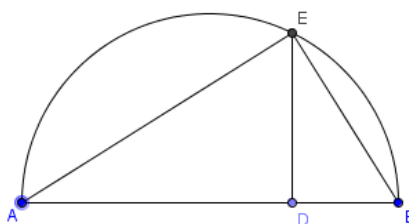


Figura 2. Triángulos semejantes

A partir de los elementos presentados en la figura 2 se pueden establecer las siguientes relaciones de proporcionalidad, $\frac{BD}{ED} = \frac{BE}{EA}$ y también $\frac{EB}{ED} = \frac{AE}{AD}$, siendo entonces el triángulo AED semejante al

triángulo EDB . En tiempos de Tales, la relación proporcional era escrita de la siguiente forma $BD:ED::BE:EA$ y $EB:ED::AE:AD$ y actualmente ya no es representada de esta manera.

Otra fuente señala (Heath, 1921) que Tales calculó la altura de la pirámide de Keops, donde a continuación se presenta en la figura 3 resaltando elementos de proporcionalidad.

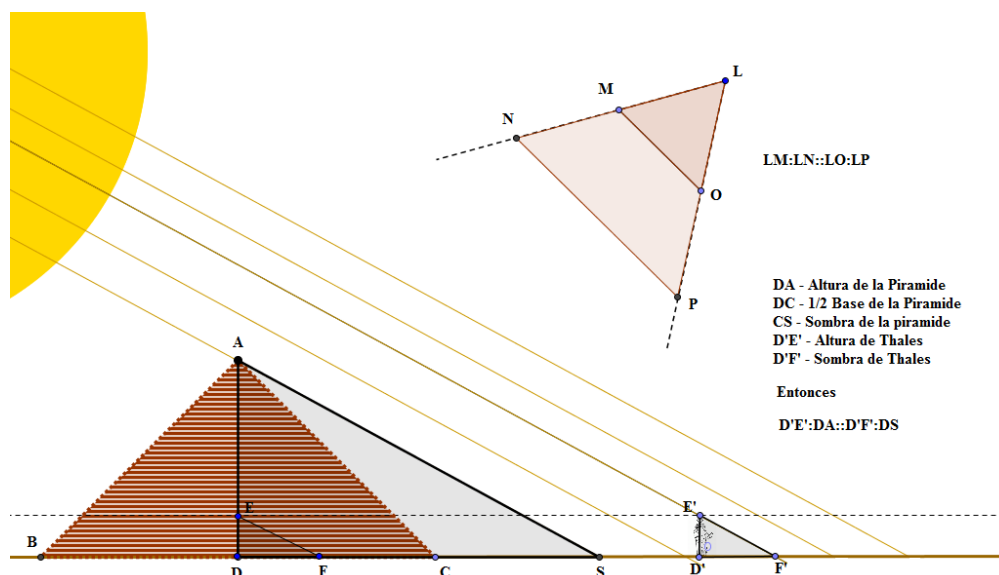


Figura 3. El cálculo de Tales de la altura de la pirámide Keops por medio de triángulos semejantes y proporcionalidad.

A partir de la figura anterior, se puede afirmar con respecto a la proporcionalidad que, el paralelismo de AD , DS y AS con ED , DF y EF respectivamente, permite establecer una relación de semejanza entre los triángulos DAS y DEF , esto se expresa como una igualdad entre, $\frac{AD}{DS} = \frac{ED}{DF}$, entendiendo de esta manera a la proporcionalidad como una igualdad entre razones o como una igualdad entre dos cocientes.

La relación de igualdad entre cocientes fundamental para la proporcionalidad. La igualdad de relación entre los lados del triángulo DAS y DEF estaba basado en los cocientes, y se representaba como $AD:DS::ED:DF$, ya que las fracciones aun no eran utilizadas para representar una relación proporcional, pero actualmente se representa como $\frac{AD}{DS} = \frac{ED}{DF}$

Si el elemento desconocido era AD (la altura de la pirámide) entonces se realiza la operación de una regla de tres $\left(AD = \frac{ED \cdot DS}{DF}\right)$, de manera que con la medida de la altura de la pirámide, se mantiene la proporción entre los lados de los triángulos.

Con la relación de semejanza entre los triángulos DAS y DEF se establece relación de proporcionalidad entre sus lados, como es la razón $AD:ED$ igual a la razón $DS:DF$ ó $AD:ED::DS:DF$

Un elemento importante es el criterio seguido para determinar que los triángulos DAS y EDF son semejantes. La altura de la pirámide AD es perpendicular a la base DS , al igual que la altura de Tales ED es perpendicular con respecto a DF . Entonces se tiene un ángulo recto en ADS y otro en EDF . Los rayos del sol pueden tomarse como paralelos y por tanto, el ángulo DAS es igual al ángulo DEF . Como la suma de los ángulos internos en un triángulo es igual a dos rectos, se puede afirmar con los elementos anteriores que los triángulos DAS y EDF son semejantes.

El paralelismo identificado en la figura 3, es un elemento fundamental en el teorema de Tales. Uno de los enunciados de este teorema es: Si rectas paralelas son cortadas por transversales, entonces los segmentos determinados por ellas son proporcionales, como se muestra en la figura 4. Las rectas paralelas son R , S y T y las dos transversales son A y B y las respectivas intersecciones son los puntos J , L , M , O , N y P .

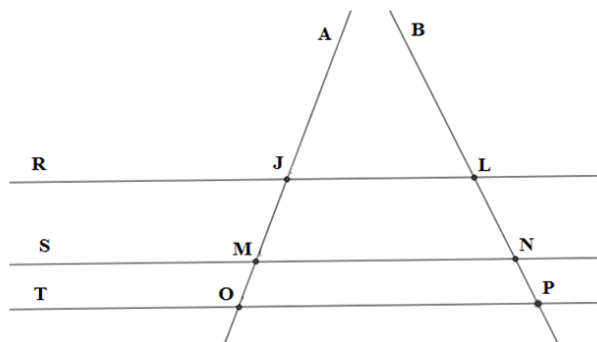


Figura 4. Segmentos proporcionales en el teorema de Tales.

Retomando la definición etimológica de proporción, en la figura 3, los segmentos o partes JO , JM y MO están frente a los segmentos LP , LN y NP , donde se relacionan proporcionalmente las partes con las partes o el todo con las partes, siempre unas puestas frente a otras. De donde se desprende la proporción, $JO:JM::LP:LN$.

La experimentación de Tales con triángulos semejantes llevó a desarrollar ciertas relaciones proporcionales. Extendiendo las líneas transversales A y B de la figura 4 hasta que se intersequen

en el punto E se identifican los triángulos semejantes (figura 5) EJL , EMN Y EOP , entre los que se pueden identificar las siguientes proporciones $EJ:JL::EM:MN$ o $PO:EP::LJ:EL$. Por medio de este caso se puede hacer explícita la relación entre figuras semejantes y la proporcionalidad.

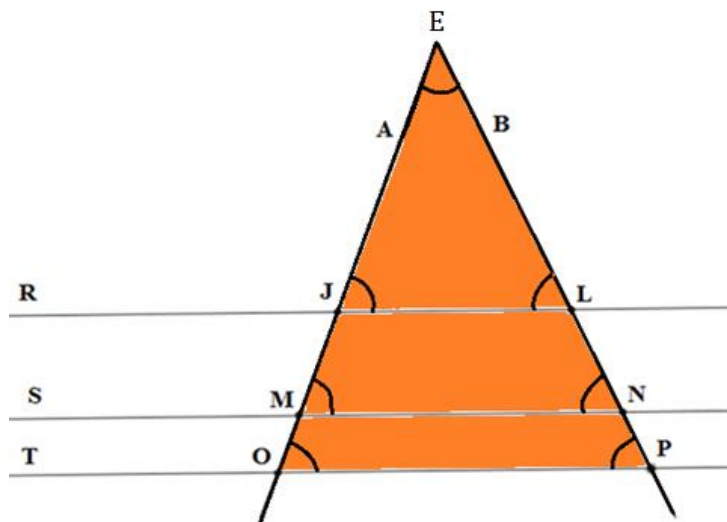


Figura 5: Otra representación del teorema de Tales

Desde la perspectiva del teorema de Tales el cálculo de la altura de la pirámide es un caso particular en donde están presentes elementos como semejanza, ángulos, razón y líneas paralelas. Con respecto a la razón, en su definición actual (Block, Mendoza y Ramírez, 2010), es una relación que guarda una cantidad con respecto a otra. Dicha relación era representada en tiempos de Tales, como $a:b::c:d$. Bajo esta forma de representación se hacía referencia a medios (b y c) y extremos (a y d).

La proporcionalidad desde la perspectiva de Euclides

Posterior a Tales están “Los Elementos” de Euclides (325 a.C. – 265 a.C.), especialmente los libros V, VI y VII. Esta obra es un compendio y sistematización de estudios sobre geometría y aritmética, como triángulos semejantes, poliedros, entre otros (Boyer, 1991; Heath, 1921; Collette, 2003; González, 2006; Kline, 1972; Fowler, 1999).

Dada la trascendencia de la obra de Euclides, es conveniente analizar algunos aspectos relevantes respecto a la proporcionalidad.

En el libro V se presentan las siguientes definiciones referentes a la proporcionalidad (Euclides, 1991)

- *Definición 3: Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.*
- *Definición 4: Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra.*
- *Definición 6: Llámense proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón.*

La definición 3, del libro V, se refiere a la razón como una relación entre dos magnitudes homogéneas, como por ejemplo $a:b$ que se lee “ a es a b ”, Euclides nunca compara magnitudes heterogéneas. En la definición 6 del mismo libro introduce el término de proporción para denominar magnitudes con la misma razón, como $a:b::c:d$, que se lee “ a es a b , como c es a d ”. La razón, como era entendida también por Tales, no es un número, ni una cantidad, sino una comparación entre magnitudes.

Una comparación entre dos magnitudes $a:b$, se puede relacionar con otra comparación entre dos magnitudes $c:d$, de la forma $a:b::c:d$, siendo así la proporcionalidad una relación de igualdad entre dos o más comparaciones o también como una igualdad entre razones. De esta forma la noción de comparación es esencial en la formación de la noción de proporción.

- *Definición 7: Entre los equimúltiplos, cuando el múltiplo de la primera excede al múltiplo de la segunda pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera guarda con la segunda una razón mayor que la tercera con la cuarta.*

Con respecto a la definición 7 se establece que se trata de una característica o criterio de no proporcionalidad cuando la razón entre las dos primeras magnitudes es mayor que las dos últimas, es decir cuando no existe una igualdad entre las razones.

- *Definición 8: Una proporción entre tres términos es la menor posible.*
- *Definición 9: Cuando tres magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la tercera una razón duplicada de la que (guarda) con la segunda.*

- *Definición 10: Cuando cuatro magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que (guarda) con la segunda, y así siempre, sucesivamente, sea cual fuere la proporción.*

La definición 8 fue tratada ampliamente por Platón, cuando afirmaba:

“Pero es imposible combinar bien dos cosas sin una tercera, porque es preciso que entre ellas haya un lazo que las una. No hay mejor lazo que aquel que forma de él mismo y de las cosas que une un solo y mismo todo. Ahora bien; tal es la naturaleza de la proporción que ella realiza perfectamente esto. Porque cuando de tres números, de tres masas ó de tres fuerzas cualesquiera, el medio es al último lo que el primero es al medio” (Platón, 1872, p. 167)

Son tres masas, tres números, fuerzas o magnitudes pero tres cosas homogéneas las que se necesitan mínimamente para establecer una relación proporcional entre estas. Esta afirmación está relacionada con la definición número 3 del libro VI que se refiere a dividir una recta en media y extrema razón, donde intervienen tres elementos, la parte menor de la recta, la parte mayor y la suma de ambas que es el total, que puede expresarse $a : b : b : c$, siendo “a” la parte menor, “b” la parte mayor y “c” el total de la recta.

Las definiciones 9 y 10 son características de las magnitudes cuando son proporcionales. Por ejemplo, si $a : b :: b : c$ entonces, $\frac{c}{a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$. Además, si $a : b :: b : c :: c : d$ entonces, $\frac{d}{a} = \left(\frac{b}{a}\right)^3$. Como se muestra, las magnitudes deben estar en proporción continua, es decir que los medios sean iguales.

El uso de los términos “razón duplicada” y “razón triplicada” viene desde Hipócrates de Quios (470 – 410 a.C.), y se refiere a lo que Platón llamaba *Dunamis* o poder, posteriormente Aristóteles le dio el significado de “potencia” (Yarza, 1983; Abbagnano, 2004). De manera que, en términos actuales, duplicado y triplicado se refiere a la segunda potencia y tercera potencia respectivamente.

Los antecedentes de la formulación de las definiciones 9 y 10 del libro V de Euclides se fundamentan en las investigaciones acerca de la duplicación del cuadrado y encontrar dos medias proporcionales entre dos extremos por parte de Hipócrates. De manera que es importante retomar brevemente parte de su desarrollo.

Hipócrates por su parte investigó sobre los principios generadores al duplicar o cuadruplicar longitudes y cuadrados. Por ejemplo, la media aritmética es la diferencia en común de tres números, $b - a = c - b$, como se muestra en la figura 6.

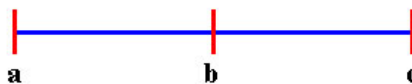


Figura 6. La media aritmética.

En la figura 7, se tienen las áreas de cuadrados (A, B y C) y los lados (a, b y c), de tal forma que se pueden establecer las proporciones siguientes, para las áreas $1:2::2:4$, y para los lados $1:\sqrt{2}::\sqrt{2}:2$. Aquí se muestra cómo para la duplicación del cuadrado se tiene una media geométrica entre dos extremos, esta magnitud, posee la capacidad para duplicar el área, y es inconmensurable con respecto a los lados. Además puede identificarse que se trata de magnitudes en proporción continua, aunque Euclides no lo haga explícito en las definiciones 9 y 10 del libro V.

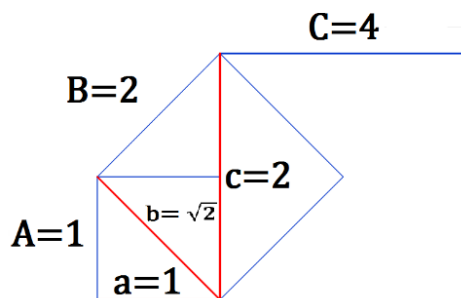


Figura 7. Medias geométricas

Parte del trabajo de Arquitas se expone en el diálogo Timeo de Platón, por ejemplo, la diagonal de un cuadrado (ver figura 8) posee la capacidad o el *poder* de duplicar su área, de tal forma que si se continúa la duplicación del área partiendo de un cuadrado de lado 1, se genera la progresión: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ..., tomando tres áreas consecutivas cualesquiera se muestra que el término medio es al último lo que el primero es al medio, por ejemplo $4:8::8:16$.

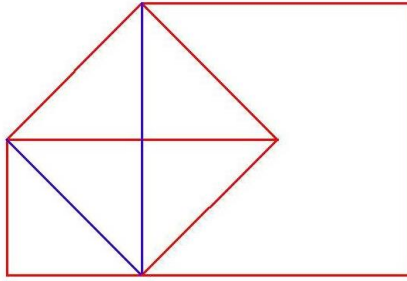


Figura 8. Duplicar el cuadrado

Fuente: DIRECTOR, B., Bringing the Invisible to the Surface, E.U., Fidelio, 2002, 18 pp.

Existe un solo término medio en la proporción 4:8::8:16, que es 8, también conocido como media geométrica entre los extremos 4 y 16.

De manera que una magnitud que tiene el *poder* de duplicar la longitud no posee el *poder* para duplicar el área de un cuadrado, dicho de otra manera un cuadrado no se genera por líneas. Los griegos identificaron ciertos tipos de magnitud, pero no los consideraron como números, sólo los números naturales eran considerados como tales.

De esta manera, una proporción continua de tres magnitudes a, b y c tiene la propiedad señalada por Euclides de que la primera magnitud guarda con la tercera una razón triplicada de la que guarda con la segunda, esto puede verificarse algebraicamente:

(1). se tiene que si $a:b::b:c$ ó $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

(2). por la definición 13 del libro V equivaldría a $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$

(3). elevando ambos lados al cuadrado $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2$

(4). se sabe, a partir de (1) que $b = \sqrt{ac}$ ó $b^2 = ac$ (b es el término medio o la media geométrica entre dos extremos a y c para formar la proporción continua $a:b::b:c$)

Sustituyendo (4) en (3),..... $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{ac}$

por lo tanto, $\frac{c}{a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$, que es la misma conclusión a la que llegó Euclides y antes que él Hipócrates, Arquitas y Platón, solamente que sin las herramientas actuales del álgebra.

Para la definición 10 del libro V, se muestran dos medios entre dos extremos, de la forma $a:b::b:c::c:d$. Euclides afirma que cuando cuatro magnitudes son proporcionales (continuamente) la primer magnitud guarda con la cuarta una razón triplicada de la que guarda con la segunda, utilizando álgebra esta afirmación puede mostrarse de la siguiente forma:

(5) se tiene que si $a:b::b:c::c:d$ ó $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$

(6) por la definición 13 del libro V equivaldría a $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c}$

(7) elevando los primeros dos términos al cubo $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \left(\frac{c}{b}\right)^3$ ó $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{c^3}{b^2b}$

(8) se sabe a partir de la (5) que $c^2 = bd$ y $b^2 = ac$

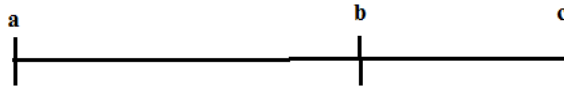
Sustituyendo (8) en (7) $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{c^3}{acb} \rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{c^2}{ab} \rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{bd}{ab} \rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{d}{a}$

Por lo tanto, $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{d}{a}$ es la expresión algebraica de lo que Euclides anuncia en su definición 10 del libro V. Hipócrates, Arquitas y demás miembros de la academia años antes que Euclides ya conocían estos resultados por experimentación.

En cuanto al libro VI, Euclides se refiere a la proporcionalidad por medio de las siguientes definiciones:

- *Definición 1: Figuras rectilíneas semejantes son las que tienen los ángulos iguales uno a uno y proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales.*
- *Definición 3: Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el (segmento) mayor es al menor.*

En cuanto a la definición 3, la proporcionalidad también se estudiaba a esta en su expresión geométrica más simple, la división de un segmento en partes proporcionales, de tal forma que su parte menor sea a la mayor como la mayor lo es al segmento total (Figura 9). Esta división del segmento en partes proporcionales fue utilizada ampliamente por los griegos en la arquitectura, conocida también como sección aurea.



$$ac : ab :: ab : bc$$

Figura 9. Un segmento en partes proporcionales.

Finalmente en el libro VII, en cuanto a definiciones relacionadas a proporcionalidad están:

- *Definición 21: Unos números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo o la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto.*
- *Definición 22: Números planos y sólidos semejantes son los que tienen los lados proporcionales.*

En las dos definiciones anteriores Euclides se refiere a números, ya no a una igualdad entre razones, como se refería en las definiciones previas, sino de números naturales continuamente proporcionales. Sin embargo, desde un punto de vista actual, se podría interpretar como fracciones cuando la definición se refiere a las “mismas partes”, pero es importante mencionar que en tiempos de Euclides los números eran solamente los naturales.

Son numerosas referencias a la proporcionalidad en los libros de Euclides, entre los que se encuentran los libros IV, VI y VII. Además de las definiciones, destaca por ejemplo, la proposición 13 del libro VI donde se construye la siguiente figura 10.

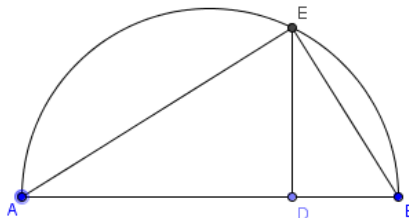


Figura 10. Media proporcional dadas dos rectas

Fuente: EUCLIDES., Los elementos. Libro VI. España, Gredos. 1991. 75 pp.

Sean AD y DB dos rectas dadas, se traza un semicírculo en AB, y en D se traza una perpendicular a AB hasta tocar en el semicírculo en el punto E, a partir de este se traza una línea hacia A y otra hacia B, el ángulo inscrito AEB es recto de acuerdo al teorema del ángulo inscrito, de manera que el triángulo AEB es rectángulo. A partir de esta figura 13 por medio de triángulos semejantes (AED y DEB) se establece la siguiente proporción: $DB:DE::DE:DA$. Por medio de esta construcción se obtiene la línea DE que es proporcional a AD y DB.

También en la proposición 12 del libro VI se refiere a construir una cuarta proporcional a otras tres líneas dadas. En la figura 14 se dan las tres rectas AE, ED y AB, el segmento EB es perpendicular a AC y paralelo a DC, de esta manera se puede establecer la siguiente proporción $AE:ED::AB:BC$, donde BC es por tanto la cuarta línea recta proporcional a otras tres.

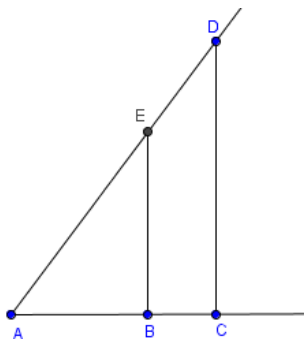


Figura 11. Segmentos proporcionales a partir de triángulos semejantes
Fuente: EUCLIDES., Los elementos. Libro VI. España, Gredos. 1991. 74 pp.

En estos ejemplos de las figuras 10 y 11 la construcción de segmentos proporcionales se basaba en la semejanza de triángulos. Más adelante en la proposición 13 del libro VII escribe Euclides: “si cuatro números son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales” (Euclides, 1991, p. 135), es decir, que si cuatro números A, B, C, D, están en proporción $A:B::C:D$ entonces también $A:C::B:D$. Debido a que la misma parte que es B de A también lo es D de C.

Por ejemplo, se tienen los números 2, 4, 6 y 12 de tal manera que $2:4::6:12$, 2 es la mitad de 4, así como 6 es la mitad de 12, si se alternan se tiene $2:6::4:12$, en esta proporción 2 es un tercio de 6 así como 4 es un tercio de 12. En términos de fracciones esto puede escribirse como Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

En la proposición 19 del libro VII de se refiere a “Si cuatro números son proporcionales, el producto del primero y el cuarto será igual al del segundo y el tercero; y si el producto del primero y el cuarto es igual al producto del segundo y el tercero, los cuatro números serán proporcionales” (1991, p. 141). Tomando la misma proporción anterior 2:4::6:12, el producto de 2 y 12 (los extremos) es 24 igual que el producto de 4 y 6 (los medios).

A manera de resumen, en este contexto aritmético y geométrico los trabajos de los egipcios, pitagóricos y miembros de la academia de Platón fueron la base para la elaboración de los libros V, VI y VII de Euclides que tratan principalmente de la teoría de proporciones. La definición 3 trata de la razón, las definiciones 5 y 7 explican los criterios necesarios para la proporcionalidad. La definición 6 introduce el término proporción y se define como magnitudes que guardan la misma razón, y de la definición 9 a la 18 trata de características y propiedades de la proporcionalidad.

Durante el desarrollo de la proporcionalidad, una limitante fue el concepto de número por parte de los griegos, limitado solamente los naturales (Kline, 1972), aunque se conocían los irracionales los griegos no los concebían como números sino como magnitudes. En este sentido, es importante señalar que bajo este contexto la razón es una relación (a:b), que significaba comparar magnitudes o números, en tal caso la noción de comparación se vuelve importante en la conformación de la noción de proporcionalidad, e históricamente relevante como previa a las fracciones.

Es importante recalcar que detrás de la obra de Euclides existió un trabajo previo de varios siglos y constituye una fase final de un proceso de experimentación, conjeturas, argumentos, este procedimiento que se hace explícito mediante la revisión histórica y epistemológica de la proporcionalidad muestra también, más de cerca los procesos de pensamiento llevados a cabo y que pueden ser de utilidad en la didáctica.

Pendiente de una recta, tangente y función lineal.

Del tratamiento aritmético y geométrico de la proporcionalidad desarrollado por los griegos, a un marco algebraico y posteriormente a la geometría analítica, pasaron aproximadamente 22 siglos.

Dicho proceso tuvo que desarrollar nuevas herramientas, la geometría griega estaba limitada por la no integración de lo irracional como números (Kline, 1972). También las razones eran utilizadas por los griegos exclusivamente en las proporciones y no se utilizaban fracciones más que para el comercio y otros cálculos. Los primeros indicios del álgebra con Herón y Diofanto en Grecia, muestran que esta área era independiente de la geometría. Más adelante, alrededor del año 1300, el álgebra fue relacionándose cada vez más a la geometría, principalmente por el hecho de aceptar como número a los irracionales y por el trabajo de la resolución de ecuaciones que fue justificando la necesidad de una representación geométrica, esta unión entre álgebra y geometría se consolidó más adelante en la geometría analítica (Kline, 1972).

Entre los siglos IX y XII, Bagdad era el centro intelectual más importante de la época, los árabes no sólo tenían una gran admiración por la matemática griega, sino que poseían muchos de sus trabajos (Boyer, 2011). De esta manera se empezó a dar un tratamiento algebraico a la obra aritmética y geométrica de los griegos, entre estos la teoría de proporciones de Euclides por parte de Omar Khayyam (1050 - 1123) y Muhammad ibn Musa al-Jwarizmi (780 – 850) quienes además comenzaron a trabajar con las ecuaciones lineales (Boyer, 2011).

En el siglo XVII, en el marco de las ecuaciones Vieta y Descartes construyeron la ecuación de la recta $y = mx$. Una línea recta puede definirse como un conjunto de puntos, en los que al tomar dos de ellos cualesquiera la diferencia del par de las ordenadas (y_1, y_2) entre la diferencia del par de las abscisas (x_1, x_2) es constante. Mediante esta definición se hace explícita la relación con la proporcionalidad, ya que en la línea recta existe una relación de igualdad entre las razones, esto es $x_2 : x_1 :: y_2 : y_1$ o también $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}$.

Con el uso de las de las fracciones para representar una relación de proporcionalidad el número resultante de dividir x_2 entre x_1 o y_2 entre y_1 es llamado factor constante o factor de proporcionalidad.

Con la herramienta del plano coordenado se grafican los datos de la tabla 1 del ejemplo presentado al inicio del capítulo sobre los aviones a escala. Algunas de las medidas internas del avión 1 son: 1, 2, 3, 4 y 6, mientras que las medidas correspondientes para el avión 2 son 2, 4, 6, 8, 12. Por medio del ejercicio se mostró como el factor externo entre las medidas de los aviones es constante, es decir 2.

Si x representa cada una de las longitudes en el avión 1 en correspondencia con las del avión 2 como y se pueden formar pares ordenados (x,y) , estos son $(1,2)$, $(2,4)$, $(4,8)$ y $(6,12)$ donde cada valor de y se obtiene multiplicando el valor de x por el factor constante de proporcionalidad que es 2. Graficando los pares ordenados se tiene la figura 12.

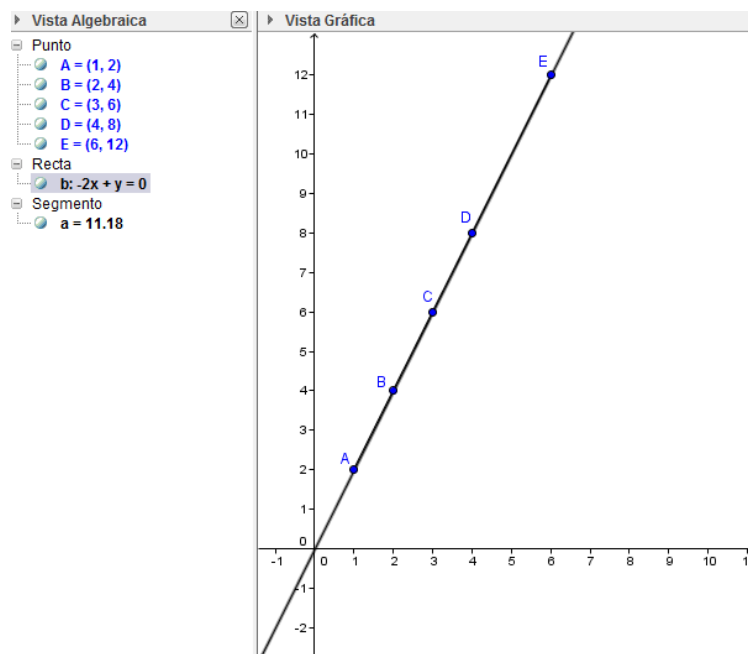


Figura 12. Representación geométrica en el plano

En la ecuación de la recta $y = mx$, m es la razón de cambio entre x y y , $m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$, por ejemplo, tomando dos pares ordenados $(1,2)$ y $(4,8)$ se tiene que $m = \frac{(8-2)}{(4-1)} = 2$, y así para cualquier otro par del ejemplo mencionado, la razón de cambio es 2, de manera que la m , conocida como la pendiente de una recta, es el factor constante de proporcionalidad.

En el caso particular de las figuras de los aviones a escala, el factor constante puede expresarse como factor de escala 1:2, donde el avión 2 es proporcionalmente 2 veces el tamaño que el avión 1.

Respecto a la función lineal, es de importancia hacer notar la relación con la proporcionalidad. Cuando se pretende modelar un fenómeno debe hacerse referencia a que en este se presenta una razón de cambio constante, esto es $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{constante}$.

Geoméricamente la razón de cambio es representada por la inclinación de la recta, la pendiente es la forma de medir esa inclinación. De manera que una función de la forma $y = f(x) = ax + b$, con $x \in R$, es la representación algebraica de una función lineal, donde b es la ordenada al origen y a la pendiente de la recta, la cual es constante, llamada también razón de cambio constante.

Contexto trigonométrico

Hasta el siglo XV la noción de proporción se había articulado con otros saberes como semejanza, progresiones geométricas, duplicación de áreas, sólidos regulares, sección aurea, pero es en la trigonometría y la geometría analítica donde la proporción va a articularse con otras nociones.

Con respecto a la trigonometría, esta fue desarrollada por astrónomos egipcios y fue heredada a los griegos. El siglo XVI fue clave para esta rama de la matemática, ya que hasta ese tiempo los avances fueron aportados por astrónomos, como Hiparco de Nicea en Grecia, entre otros. Nicolás Copérnico (1473 – 1543) fue uno de ellos, en su tratado *De Revolutionibus Orbium Coelestium* de 1543 contiene secciones importantes de trigonometría (Boyer, 2011), también el astrónomo y matemático Johan Müller Regiomontano (1436 – 1476) en su obra *De Triangulis*, publicada 10 años antes que la de Copérnico. Pero fue Georg Joachim Rheticus (1514 – 1574), alumno de Copérnico quien fue más allá, publicando el más completo tratado de trigonometría hasta entonces (Boyer, 2011) el *Opus Palatinum de Triangulis* editado en 1596, después de su muerte.

De acuerdo con Boyer, Rheticus "...descartó la tradicional consideración de las funciones con respecto al arco de un círculo y se centró en cambio en los lados de un triángulo rectángulo. Así, las seis funciones trigonométricas ahora entraron en pleno uso" (2011, p. 264), al respecto Kline comenta: "En vez de llamar a AB el seno del ángulo AD , él [Rhaeticus] llamó a AB el seno del ángulo AOB . Sin embargo, la longitud de AB seguía expresándose en una cantidad de unidades que dependía de la cantidad de unidades elegida como longitud del radio. Como consecuencia del cambio de Rhaeticus, el triángulo OAB se convirtió en la estructura básica mientras que el círculo con radio OA , en algo secundario. Rhaeticus usó las seis funciones" (Kline, 1972, p. 239).

Es así como se identificaría a la tangente como la pendiente de una recta o como la razón entre los catetos de un triángulo. Como se muestra en la figura 13, la razón entre los catetos del triángulo AOB , AB/OB , es la tangente del ángulo que relaciona los lados AB y OB

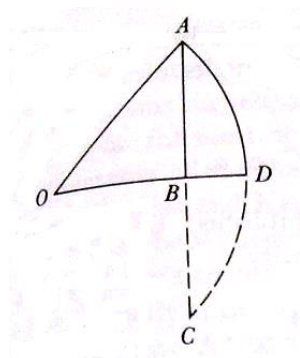


Figura 13. Triángulo rectángulo como base de las funciones trigonométricas

Fuente: KLINE, M., “Mathematical Thought. From ancient to modern times”, E.U., Oxford University Press, 1972, 239 p.p.

Por medio de este cambio de perspectiva conceptual de la tangente por parte de Rhaeticus se hace explícita y se articula la proporción con anteriores y nuevas nociones matemáticas.

Retomando nuevamente el ejemplo de los aviones a escala (Figura 1 y tabla 1) para ilustrar la proporcionalidad en el marco trigonométrico se muestra la figura 14, donde puede observarse que del punto A al punto B, de B a C, de C a D, de D a E, o de A a C, de A a E, de C a E, entre otros, la razón del incremento en y entre el incremento en x es constante, en este caso es 2, también llamado pendiente de una recta. Por medio de la razón trigonométrica de la tangente se sabe que el ángulo de inclinación para esa pendiente es de 63.43° .

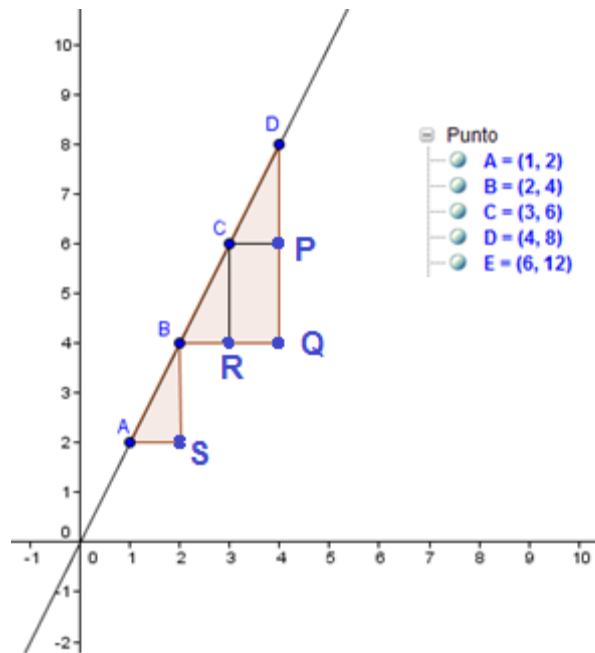


Figura 14. La relación entre la pendiente y la tangente

Es importante recalcar que geoméricamente la razón de cambio está dada como la tangente del ángulo de inclinación (pendiente) o como el cociente entre el cateto opuesto y cateto adyacente en el caso de la figura 14 se tiene $\frac{DP}{PC} = \frac{DQ}{QB} = \frac{CR}{RB} = \frac{BS}{SA} = constante$

Con el uso del álgebra o la pendiente de una recta y la tangente, la proporcionalidad no tiene el mismo nivel de significado cuando fue estudiada por los egipcios, pitagóricos o los círculos de Platón o Euclides, ahora, es una nueva organización superior de los conceptos como semejanza, fracción, razón, tangente o pendiente, que no sólo los define de forma individual, sino también la manera en que estos se articulan.

De modo que es importante que estos conceptos (triángulo, ángulos, semejanza y congruencia de triángulos, función lineal, tangente y pendiente) no se estudien de forma individual y aislada, sino como un todo, en donde la proporcionalidad yace como un eje de articulación entre todos estos.

De esta forma se analizó histórica y epistemológicamente la proporcionalidad, bajo los contextos aritmético y geométrico, posteriormente en un contexto algebraico. Proceso mediante el cual resalta la importancia que tiene el estudio de la noción de razón (comparación), como paso previo

a la introducción de las fracciones y posteriormente a la función lineal, la pendiente de una recta y tangente.

Conocer cómo se ha gestado y desarrollado la noción de proporcionalidad desde Tales tiene implicaciones didácticas importantes, de acuerdo con Cañón (1993), está centrada en una concepción matemática no sólo como resultados logrados, sino como procesos gestados a través de varios siglos. Estudiar la noción de proporción desde una perspectiva histórica y epistemológica implica reelaborarla, reconstruirla y reconocerla como un producto multicultural, y dentro de estos procesos identificar una continuidad en su estudio, conformándose como un eje articulador de otros saberes matemáticos a través del tiempo como los ya mencionados anteriormente.

Y por último está la figura 15, partiendo de abajo, están los inicios de la proporcionalidad en un contexto aritmético y geométrico, relacionado a nociones como semejanza, razones, medios y extremos, progresiones geométricas, entre otras. Estas nociones, siglos más tarde fueron abordadas desde un contexto algebraico y de la geometría analítica para después sumársele otra perspectiva de la proporcionalidad que fue la trigonometría por medio de las razones trigonométricas.

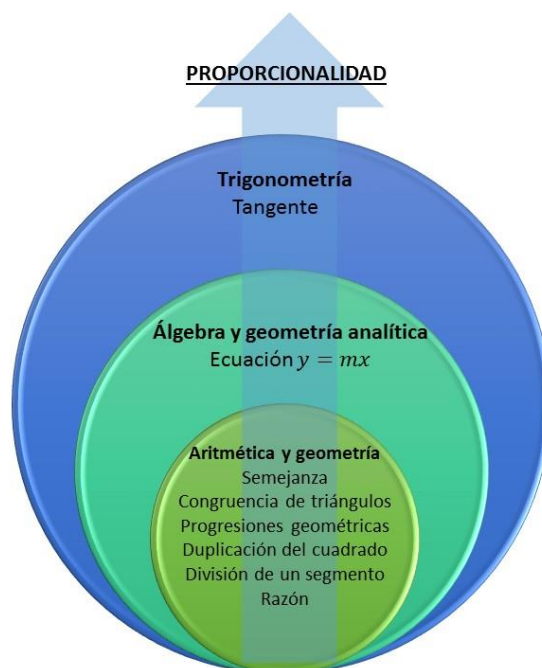


Figura 15. La articulación de la proporcionalidad con otras nociones a través de la historia.

Los personajes y su aportes conceptuales presentados en las figuras 18 y 19 están relacionados, entre otras cosas, por la proporcionalidad, algunos de sus contribuciones han formado parte del curriculum de matemáticas de niveles básico, pero a pesar de estar presentes en los programas de estudio o libros de texto, difícilmente estos se relacionan entre sí. Como se revisará en el capítulo siguiente, el curriculum no hace explícita la articulación de la proporcionalidad con los conceptos revisados en este capítulo como son semejanza de triángulos, razones, duplicación de áreas y medias geométricas. De igual manera, en el capítulo referente a los profesores se expondrá que no son conscientes de esta relación.

CAPÍTULO V REVISIÓN DE PROGRAMAS DE ESTUDIO Y LIBROS DE TEXTO DE PRIMARIA Y SECUNDARIA EN MÉXICO

En el presente capítulo se lleva a cabo un análisis de la forma en que se articula la proporcionalidad con otras nociones en el currículum de primaria y secundaria, tomando como ejes de análisis aquellos elementos obtenidos de la revisión del desarrollo histórica de la proporcionalidad, que son la aritmética y geometría y el álgebra, incluyendo la pendiente de una recta y la tangente.

Como se observa en el esquema 1 de la página 28, este apartado forma parte de la primera fase de transposición didáctica que es del saber erudito al saber a enseñar, en donde intervienen investigadores, expertos y diseñadores curriculares que seleccionan y organizan los temas a estudiarse en educación básica. Previo a este análisis es importante realizar una descripción de los planes de estudio con respecto a la educación básica matemática de acuerdo con la Secretaría de Educación Pública (SEP) que se da a continuación.

La proporcionalidad en el sistema educativo mexicano

El sistema educativo mexicano eliminó del currículum básico el tema de razones y proporciones en la década de los 70's, "en su lugar se empezó a hablar de dependencias funcionales, factor de escala, factor de proporcionalidad y tablas de variación. El manejo de un nuevo lenguaje no impidió continuar hablando de razones, aunque este concepto quedó aislado y con una articulación incierta con otros, por ejemplo, con las fracciones". (Ramírez y Block, 2009, p. 68).

El movimiento de la matemática moderna, que influyó en dicha modificación curricular, fue duramente criticada por diversos actores educativos, pero también se enfrentó con una realidad en el sistema educativo mexicano, la deficiencia en el sistema de formación de profesores en conocimientos disciplinares y didácticos. En la década de los 80's fue incorporado nuevamente el tema de razones y proporciones (Ramírez y Block, 2009) y fue configurándose a través de reformas educativas hasta llegar a su forma actual.

Revisión de programas de estudio y libros de texto de primaria y secundaria

En la educación primaria, el estudio de la matemática considera el conocimiento y uso del lenguaje aritmético, algebraico y geométrico, así como la interpretación de información y de los procesos de medición. Los Propósitos del estudio de las Matemáticas para la Educación Básica de acuerdo con la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2013) son:

- Desarrollen maneras de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, así como elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos.
- Utilicen diferentes técnicas o recursos para hacer más eficientes los procedimientos de resolución.
- Muestren disposición hacia el estudio de la matemática, así como al trabajo autónomo y colaborativo.

Los propósitos del estudio de las Matemáticas para la educación primaria de acuerdo con la SEP. son:

- Conozcan y usen las propiedades del sistema decimal de numeración para interpretar o comunicar cantidades en distintas formas. Expliquen las similitudes y diferencias entre las propiedades del sistema decimal de numeración y las de otros sistemas, tanto posicionales como no posicionales.
- Utilicen el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números naturales, así como la suma y resta con números fraccionarios y decimales, para resolver problemas aditivos y multiplicativos.
- Conozcan y usen las propiedades básicas de ángulos y diferentes tipos de rectas, así como del círculo, triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares e irregulares, prismas, pirámides, cono, cilindro y esfera al realizar algunas construcciones y calcular medidas.
- Expresen e interpreten medidas con distintos tipos de unidad, para calcular perímetros y áreas de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares e irregulares.
- Emprendan procesos de búsqueda, organización, análisis e interpretación de datos, contenidos en imágenes, textos, tablas, gráficas de barras y otros portadores para

comunicar información o responder preguntas planteadas por sí mismos o por otros.
Representen información mediante tablas y gráficas de barras.

- Identifiquen conjuntos de cantidades que varían o no proporcionalmente, calculen valores faltantes, porcentajes, y apliquen el factor constante de proporcionalidad (con números naturales) en casos sencillos. (SEP, 2011, p. 70)

Los propósitos anteriores se organizan en tres ejes que pretenden articular los conocimientos matemáticos entre la primaria y la secundaria (SEP, 2001), estos son:

- Sentido numérico y pensamiento algebraico
- Forma, espacio y medida
- Manejo de la información

La progresión de estos ejes a través de primaria y secundaria debe entenderse como “transitar del lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático para explicar procedimientos y resultados, ampliar y profundizar los conocimientos, de manera que se favorezca la comprensión y el uso eficiente de las herramientas matemáticas y avanzar desde el requerimiento de ayuda al resolver problemas hacia el trabajo autónomo.” (SEP, 2011, p. 71)

Con respecto a la proporcionalidad, los propósitos del estudio de las matemáticas en educación primaria se establece que “Identifiquen conjuntos de cantidades que varían o no proporcionalmente, calculen valores faltantes, porcentajes, y apliquen el factor constante de proporcionalidad (con números naturales) en casos sencillos.” (SEP, 2011, p. 70)

El eje de sentido numérico y pensamiento algebraico alude a los fines más relevantes del estudio de la aritmética y el álgebra que son, la modelización de situaciones mediante el uso del lenguaje aritmético, la exploración de propiedades aritméticas que en la secundaria podrán ser generalizadas con el álgebra y la puesta en juego de diferentes formas de representar y efectuar cálculos.

Por su parte el eje de forma, espacio y medida, integra los tres aspectos esenciales alrededor de los cuales gira el estudio de la geometría y la medición en la educación primaria que son la exploración de las características y propiedades de las figuras y cuerpos geométricos, la generación de condiciones para el tránsito a un trabajo con características deductivas y el conocimiento de los principios básicos de la ubicación espacial y el cálculo geométrico.

Por último, el eje de manejo de la información incluye aspectos relacionados con el análisis de la información que proviene de distintas fuentes y su uso para la toma de decisiones informadas, de manera que se orienta hacia la búsqueda, organización y análisis de información para responder preguntas, el uso eficiente de la herramienta aritmética que se vincula de manera directa con el manejo de la información y la vinculación con el estudio de otras asignaturas. Es en este eje del manejo de la información donde se encuentra la proporcionalidad, debido a “provee de nociones y técnicas que constituyen herramientas útiles para interpretar y comunicar información, como el porcentaje y la razón” (SEP. 2011, p. 82).

Estos tres ejes comprenden ocho grandes áreas en nivel primaria que son: Números y sistemas de numeración, problemas aditivos, problemas multiplicativos, figuras y cuerpos, ubicación espacial, medida, proporcionalidad y funciones, y análisis y representación de datos. Algunos de estos temas requieren continuación en secundaria e incluso bachillerato, como es el caso de la proporcionalidad y funciones, además de que no todos estos se inician en primer grado de primaria sino que requieren cierta introducción.

Estas ocho áreas mencionadas anteriormente se dividen a su vez en contenidos, desglosados en bloques, y estos finalmente en temas, que a continuación se presentan en tablas.

Tabla 3. La proporcionalidad en segundo grado de primaria de acuerdo con el programa oficial de la SEP.

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico	
Bloque	
IV	Resolución de distintos tipos de problemas de multiplicación (relación proporcional entre medidas, arreglos rectangulares). Distinción entre problemas aditivos y multiplicativos.

En la tabla 3 se muestra que el tema de proporción debe comenzar, según el programa oficial, en segundo de primaria, se coloca además en el eje sentido numérico y pensamiento algebraico, para esto se coloca sólo en el bloque IV de V existentes en total.

Tabla 4. La proporcionalidad en cuarto grado de primaria el programa oficial de la SEP.

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico	
Bloque	
I	Exploración de distintos significados de la multiplicación (relación proporcional entre medidas, producto de medidas, combinatoria) y desarrollo de procedimientos para el cálculo mental o escrito.

Después de introducir el concepto de proporción por medio de lo que el curriculum concibe como problemas simples, el programa oficial indica que se retome el tema en cuarto de primaria, como se muestra en la tabla 4, donde el concepto de proporción es presentado por medio de la multiplicación y problemas simples, nuevamente este tema se coloca en el eje sentido numérico y pensamiento algebraico. Un problema simple de proporcionalidad según el libro de texto es por ejemplo, “si en una caja hay 8 pelotas, ¿cuántas pelotas hay en 9 cajas?” (SEP, 2013, p. 117).

Tabla 5. La proporcionalidad en quinto grado de primaria el programa oficial de la SEP.

Eje: Manejo de la Información Tema: Proporcionalidad y Funciones	
Bloque	
I	Análisis de procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad del tipo valor faltante (dobles, triples, valor unitario)
II	Identificación y aplicación del factor constante de proporcionalidad (con números naturales) en casos sencillos.
III	Análisis de procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad del tipo valor faltante (suma término a término, cálculo de un valor intermedio, aplicación del factor constante).
V	Relación del tanto por ciento con la expresión “n de cada 100”. Relación de 50%, 25%, 20%, 10% con las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, respectivamente.

Para quinto grado de primaria el programa oficial contempla cuatro de los cinco bloques para el estudio de un tema relacionado con la proporcionalidad, sin embargo este ya no se coloca en el eje

sentido numérico y pensamiento algebraico, sino en el de manejo de la información como se muestra en la tabla 5.

Tabla 6. La proporcionalidad en sexto grado de primaria en el programa oficial de la SEP

Eje: Manejo de la Información	
Bloque	
I	Cálculo del tanto por ciento de cantidades mediante diversos procedimientos (aplicación de la correspondencia “por cada 100, n”, aplicación de una fracción común o decimal, uso de 10% como base).
II	Resolución, mediante diferentes procedimientos, de problemas que impliquen la noción de porcentaje: aplicación de porcentajes, determinación, en casos sencillos, del porcentaje que representa una cantidad (10%, 20%, 50%, 75%); aplicación de porcentajes mayores que 100%.
III	Comparación de razones en casos simples.
IV	Comparación de razones del tipo “por cada n, m”, mediante diversos procedimientos y, en casos sencillos, expresión del valor de la razón mediante un número de veces, una fracción o un porcentaje
V	Resolución de problemas de comparación de razones, con base en la equivalencia. Además se establece como aprendizaje esperado que el estudiante resuelva problemas que implican comparar dos a más razones

En la tabla 6, el programa oficial contempla cinco temas para estudiar la proporcionalidad en cada uno de los cinco bloques que abarca el programa de matemáticas para cada grado escolar, dominan los ejercicios relacionados a porcentajes y comparación entre razones, este tema se coloca nuevamente en el eje manejo de la información.

Tabla 7. La proporcionalidad en Primer grado de Secundaria en el programa oficial de la SEP

Eje: Manejo de la Información	
Bloque	
I	Resolución de problemas de reparto proporcional
II	Identificación y resolución de situaciones de proporcionalidad directa del tipo “valor faltante” en diversos contextos, con factores constantes fraccionarios
III	Formulación de explicaciones sobre el efecto de la aplicación sucesiva de factores constantes de proporcionalidad en situaciones dadas.
IV	Análisis de la regla de tres, empleando valores enteros o fraccionarios Análisis de los efectos del factor inverso en una relación de proporcionalidad, en particular en una reproducción a escala
V	Resolución de problemas de proporcionalidad múltiple

En primer grado de secundaria aparece el tema de proporcionalidad en el mismo eje en que se ubicaba en nivel primaria, manejo de la información, además se contemplan cinco temas para cada uno de los cinco bloques como se muestra en la tabla 8.

Tabla 8. La proporcionalidad en segundo grado de Secundaria en el programa oficial de la SEP.

Eje: Manejo de la Información	
Bloque	Resolución de problemas diversos relacionados con el porcentaje, como aplicar un porcentaje a una cantidad; determinar qué porcentaje representa una cantidad respecto a otra, y obtener una cantidad conociendo una parte de ella y el porcentaje que representa. Resolución de problemas que impliquen el cálculo de interés compuesto, crecimiento poblacional u otros que requieran procedimientos recursivos.
I	Identificación y resolución de situaciones de proporcionalidad inversa mediante diversos procedimientos.
II	Representación algebraica y análisis de una relación de proporcionalidad $y = kx$, asociando los significados de las variables con las cantidades que intervienen en dicha relación
III	Análisis de las características de una gráfica que represente una relación de proporcionalidad en el plano cartesiano.
IV	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal entre dos conjuntos de cantidades. Representación de la variación mediante una tabla o una expresión algebraica de la forma: $y = ax + b$.
V	Lectura y construcción de gráficas de funciones lineales asociadas a diversos fenómenos. Análisis de los efectos al cambiar los parámetros de la función $y = mx + b$, en la gráfica correspondiente

En la tabla 9 se muestran hasta dos temas relacionados con la proporcionalidad por cada bloque, es en este grado donde aparece la representación algebraica de una relación de proporcionalidad.

Tabla 9. La proporcionalidad en tercer grado de Secundaria en el programa oficial de la SEP.

Eje: Manejo de la Información	
Bloque	
I	Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad

	Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas.
III	<p>Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos.</p> <p>Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera.</p> <p>Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas. (Eje forma, espacio y medida)</p> <p>Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales. (Eje forma, espacio y medida)</p> <p>Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas. (Eje forma, espacio y medida)</p>
IV	<p>Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de una recta que la representa.</p> <p>Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente. (Eje forma, espacio y medida)</p> <p>Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo. (Eje forma, espacio y medida)</p> <p>Explicitación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. (Eje forma, espacio y medida)</p>
V	Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.

En la tabla 10 se muestran cada uno de los temas de proporcionalidad, en este caso sólo se contemplan en cuatro bloques. Se observa que ya se estudia la representación gráfica y algunas aplicaciones. Además se estudia la relación de la pendiente de una recta con el cociente de cateto opuesto sobre el cateto adyacente en un triángulo rectángulo. Es importante resaltar que no todos los temas pertenecen a un mismo eje como se establecía en grados anteriores.

La noción de proporcionalidad en los libros de texto oficiales de la SEP.

Una vez revisado cómo se encuentra organizado el tema de proporcionalidad en el programa oficial de estudio de primaria y secundaria, es importante examinar cómo se encuentra distribuido en los libros de texto, para posteriormente hacer una comparación y análisis. A continuación se presenta sintetizada en tablas.

Tabla 10. La proporcionalidad en segundo grado de primaria de acuerdo con el libro de texto oficial de la SEP

Bloque	
IV	Diferentes formas de multiplicar. (Problemas de proporcionalidad simples) ¿Con suma o multiplicación? Distinción entre problemas aditivos y multiplicativos

En la tabla 10 se muestra la distribución de dos temas relacionadas con la proporcionalidad de acuerdo con el libro de texto, estos se presentan en el bloque IV únicamente. Es en este grado donde el libro muestra por primera vez el tema de proporcionalidad, pero sin especificar el eje al que pertenece el tema.

Tabla 11. La proporcionalidad en cuarto grado de primaria de acuerdo con el libro de texto oficial de la SEP

Eje: sentido numérico y pensamiento algebraico	
Bloque	
I	Lección 5. Multiplica para saber si alcanza. Problemas multiplicativos. Resuelve problemas que involucren distintas aplicaciones de la multiplicación (relación proporcional entre medidas, combinatoria) y desarrollo procedimientos para el cálculo. Lección 9. El valor faltante. Resuelve problemas de valor faltante en los que se da el valor unitario, o se pregunta por él, mediante distintos procedimientos
II	Lección 21. Calculo el valor que falta. Resuelve problemas de valor faltante que requieran calcular un valor intermedio (en particular el valor unitario) y otras combinaciones (dobles, triples, sumar término a término)

	Lección 22. Completa la información. Registra en tablas los datos de problemas de proporcionalidad de valor faltante.
--	---

Después de introducir en segundo grado el tema de proporcionalidad el libro de texto lo retoma hasta cuarto grado en dos de los cinco bloques, como se muestra en la tabla 11. Además el libro especifica que se tratan de lecciones, y estas están numeradas, cosa que no ocurre en todos los grados de primaria. El libro de texto coloca este tema en el eje sentido numérico y pensamiento algebraico.

Tabla 12. La proporcionalidad en quinto grado de primaria de acuerdo con el libro de texto oficial de la SEP.

Eje: sentido numérico y pensamiento algebraico	
Bloque	
II	21. Relación entre dos cantidades. Aplicar un factor constante de proporcionalidad
	22. Compara tus razones. Compara razones
III	33. ¿Qué porcentaje? Establece porcentajes como regla de correspondencia
V	44. Razonamiento de números. Expresa por medio de fracciones la razón que guardan dos cantidades.
	50. Aumenta y disminuye proporcionalmente. Distingue situaciones de variación proporcional de las que no varían proporcionalmente y elabora una definición de la proporcionalidad.

En quinto grado se estudia la proporcionalidad en cinco temas distribuidas en cuatro bloques como se observa en la tabla 12. El eje sigue siendo sentido numérico y pensamiento algebraico.

Tabla 13. La proporcionalidad en sexto grado de primaria de acuerdo con el libro de texto oficial de la SEP

Bloque	
I	La información en los porcentajes
	Interpreto la información contenida en tablas.
II	¿Cuál es la constante de proporcionalidad? Resolución de problemas de proporcionalidad

	Tablas y factores de proporcionalidad. Encuentra factores de proporcionalidad.
III	Cambia la escala. Analizar los cambios en las gráficas de acuerdo con su escala Descuentos y porcentajes. Resolución de problemas de porcentajes Pague sólo la mitad o 50% de su precio. Representación del porcentaje de distintas formas Cambia la escala. Analizar los cambios en las gráficas de acuerdo con su escala
IV	Comparo razones
V	Más proporciones. Resolución de problemas que involucren constantes de proporcionalidad particulares y unidades de medida diferentes ¿Cómo saber si dos cantidades variables son proporcionales? Identifica las situaciones de proporcionalidad

Como se muestra en la tabla 13 el estudio de la proporcionalidad está contemplada en el libro de texto en sus cinco bloques, principalmente se aborda por medio de ejercicios sobre porcentajes.

Tabla 14. La proporcionalidad en primer grado de secundaria en el libro de texto oficial de la SEP

Bloque	
I	(Contenido 8) Resolución de problemas de reparto proporcional
II	(Contenido 7) Identificación y resolución de situaciones de proporcionalidad directa del tipo “valor faltante” en diversos contextos, con factores constantes fraccionarios.
III	(Contenido 6) Formulación de explicaciones sobre el efecto de la aplicación sucesiva de factores constantes de proporcionalidad en situaciones dadas.
IV	(Contenido 4) Análisis de la regla de tres, empleando valores enteros o fraccionarios. (Contenido 5) Análisis de los efectos del factor inverso en una relación de proporcionalidad, en particular en una reproducción a escala.
V	(Contenido 6) Resolución de problemas de proporcionalidad múltiple.

En la tabla 14 se muestra cómo se encuentra distribuido el tema de proporción en los cinco bloques de primer grado de secundaria de acuerdo uno de los libros de texto oficiales, en este caso el libro numera los contenidos.

Tabla 15. La proporcionalidad en segundo grado de Secundaria en el libro de texto oficial de la SEP

Bloque	
I	(Lección 7) Determinación del factor inverso dada una relación de proporcionalidad y el factor de proporcionalidad fraccionario. (Lección 8) Elaboración y utilización de procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad múltiple.
II	(Lección 16) Resolución de problemas de comparación de razones, con base en la noción de equivalencia
III	(Lección 20) Reconocimiento de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, la presencia de cantidades que varían una en función de la otra representación de esta relación mediante una tabla o una expresión algebraica de la forma $y = ax + b$ (Lección 23) Construcción, interpretación y utilización de gráficas de relaciones lineales asociadas a diversos fenómenos (Lección 24) Anticipación del comportamiento de gráficas lineales de la forma $y = mx + b$, cuando se modifica el valor de b mientras el valor de m permanece constante. (Lección 25) Analizar el comportamiento de gráficas lineales de la forma $y = mx + b$, cuando cambia el valor de m , mientras el valor de b permanece constante.
IV	(Lección 30) Interpretación y utilización de dos o más gráficas de línea que representen características distintas de un fenómeno o situación para tener información completa y en su caso tomar decisiones. (Lección 31) Interpretación y elaboración de gráficas formadas por segmentos de recta que modelan situaciones relacionadas con movimiento, llenado de recipientes, etcétera.

En la tabla 15 se muestra la distribución del tema de proporcionalidad en cuatro de los cinco bloques de segundo grado de secundaria, en este grado se presenta la expresión algebraica de una relación de proporcionalidad, además de la interpretación y representación de resultados.

Tabla 16. La proporcionalidad en tercer grado de Secundaria en el libro de texto oficial de la SEP.

Bloque	
III	Lección 28. René Descartes. Representar la regla que modela una variación mediante una tabla o una expresión algebraica. En situación y fenómenos de la física, economía y otras disciplinas.

	Lección 32. La división exacta. Teorema de Tales.
IV	<p>Lección 34. Las sombras. Determinar resultados de una homotecia cuando la razón es igual, menor o mayor que uno o que menos uno.</p> <p>Lección 35. Figuras homotéticas. Determinar las propiedades que permanecen invariantes al duplicar una homotecia a una figura.</p> <p>Lección 36. Más sobre homotecia. Comprobar que una composición de homotecias con el mismo centro es igual al producto de sus razones.</p> <p>Lección 39. Las noticias. Interpretación y elaboración de gráficas</p>
V	<p>Lección 41. El genio de los griegos. Teorema de Pitágoras</p> <p>Lección 42. Hiparco y la trigonometría. Razones trigonométricas</p> <p>Lección 43 El alpinismo. Medidas de lados y ángulos de triángulos a partir de razones trigonométricas</p> <p>Lección 44. Las rampas. Problemas usando razones trigonométricas</p> <p>Lección 45. El ahorro. Interpretar y comparar las representaciones graficas de crecimiento aritmético o lineal.</p>

La tabla 16 muestra la distribución del tema de proporcionalidad en tres de los cinco bloques, destaca el estudio de la trigonometría así como el teorema de Tales, relacionados con el tema de proporcionalidad, además de algunas notas históricas de la proporcionalidad.

Es importante resaltar que el programa oficial de la SEP (2011) ubica el tema de proporcionalidad tanto en la primaria como en la secundaria, en el eje manejo de la información, abordados principalmente por medio de ejercicios y problemáticas en un contexto aritmético, además algunos otros de tipo geométrico desde donde se presenta el tema de proporcionalidad, pero que son identificados en un eje distinto, el de forma, espacio y medida.

Análisis de los contenidos de libros de texto y programas de estudio. Aspectos generales.

Como se mencionó anteriormente, en una primera aproximación, se identifica que en algunos grados no existe correspondencia temática entre el libro de texto y el programa oficial.

Por otra parte, de los 50 problemas de proporcionalidad en los libros de texto de primaria aproximadamente 90% se abordan y representan en forma aritmética (principalmente en un contexto de dinero u objetos) y 10% de forma geométrica. En nivel secundaria entre primer y segundo grado, los libros de texto abordan el tema de proporcionalidad de forma aritmética en un 45%, geoméricamente un 5% y algebraicamente 55%. No obstante, en tercer grado es distinto, el 14% del tema de proporcionalidad se aborda en un marco algebraico y un 86% del contenido se hace geoméricamente, utilizando elementos básicos de geometría analítica como la pendiente de una recta.

En los temas referentes a geometría en el curriculum de nivel primaria y secundaria no se hace explícita la relación con la proporcionalidad, de manera que algunos profesores de educación básica sin una sólida formación en matemáticas y didáctica pueden pasar inadvertidos de esta relación, además de que el contenido geométrico relacionado con la proporcionalidad es colocado por el programa oficial en otro eje (forma, espacio y medida), de forma separada a la aritmética, sin embargo, de acuerdo al análisis histórico y epistemológico, la aritmética y la geometría vinculados con respecto a la proporcionalidad.

Si históricamente la proporcionalidad surge y se desarrolla en un contexto aritmético y geométrico, además si se acepta que un individuo debe reproducir similarmente el desarrollo de ciertas ideas matemáticas a través de la historia, entonces la proporcionalidad debiera de ser abordada inicialmente por medio de la aritmética y la geometría en forma más o menos equilibrada.

Un tránsito importante y complejo para los estudiantes, que puede compararse con el desarrollo histórico de la proporcionalidad (Block, Mendoza y Ramírez, 2010) es el que se da entre un marco aritmético y un marco algebraico de la proporción. El programa de secundaria contempla el tema de proporcionalidad en todos los bloques. Se incluye, por primera vez, en el bloque III la

representación algebraica de una relación de proporcionalidad mediante $y = kx$, siendo k la constante, para después presentarla en forma de gráfica en el plano cartesiano y analizar sus características.

Para abordar más a detalle el tránsito de la proporcionalidad entre un marco aritmético (primaria) y uno algebraico (secundaria) se analizan los contenidos en el curriculum con relación a los ejes de análisis obtenidos de la fase de revisión histórica y epistemológica así como a las formas de representación utilizadas en los planes y programas de estudio con respecto a la proporcionalidad.

Contexto aritmético y geométrico

El primer eje de análisis corresponde al contexto aritmético y geométrico, se encuentra a su vez dividido por temas relacionados con la proporción resultado de la aproximación histórica y epistemológica de la proporcionalidad, como son, semejanza de triángulos, sólidos regulares, segmentos proporcionales, medias geométricas y duplicación de cuadrados. Este eje corresponde al análisis de la obra de Tales y Euclides.

Con respecto a semejanza de triángulos

La semejanza y congruencia de triángulos tienen una relación directa con la proporcionalidad. En primer grado de primaria se comienza a analizar el triángulo y otras figuras básicas como el cuadrado, el círculo y el rectángulo. A pesar de que el tema de proporcionalidad comienza a estudiarse en segundo de primaria por medio de problemas aritméticos simples, el tema de semejanza no está en los libros de texto de nivel primaria. En quinto grado está dedicada una página sólo para el concepto de congruencia de triángulos, y en sexto grado a un problema relacionado con escalas como se muestra en las imágenes 1 y 2. Esta situación tiene un impacto directo, porque basado en las aportaciones de Tales, la semejanza de triángulos es un elemento fundamental en la construcción de la proporcionalidad.

2. Traza y recorta los triángulos con las características siguientes:

Un triángulo equilátero de 2 cm de lado.

Un triángulo escaleno cuya base mida 2 cm.

Colócalos uno por uno encima de los modelos siguientes:



- ❖ Los triángulos 1 y 2 ¿tienen la misma forma y tamaño?

- ❖ ¿Cuál de los dos triángulos que trazaste en tu cuaderno tiene la misma forma y tamaño que los mostrados en la ilustración anterior?

- ❖ ¿Se modifica la forma o el tamaño del triángulo al estar en otra posición? _____

Los triángulos congruentes son los que tienen la misma forma y tamaño, sin importar su posición.

Consulta en...



En la siguiente página selecciona el enlace titulado "Tortuga y la geometría".
http://nlvm.usu.edu/es/nav/topic_t_3.html
 En el programa deberás incluir las instrucciones para que se trace la figura mostrada.

Imagen 1. Triángulos congruentes.

Fuente: SEP. "Libro de texto de matemáticas" 5° primaria. 2014. 24 p.p.

2. En equipos, realicen la actividad.

La siguiente figura se llamará A.

Completen la tabla considerando:

- ❖ Que la figura B es una copia a escala cuyos lados miden dos veces los de la figura A.
- ❖ Que la figura C es una copia a escala cuyos lados miden tres veces los de la figura B.

Auxíliate trazando en tu cuaderno las figuras B y C.

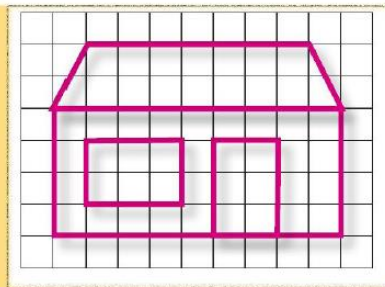


	Figura A	Figura B	Figura C
Altura de la pared	4		
Altura de la puerta	3		
Ancho de la puerta	2		
Ancho de la ventana	3		

Imagen 2. Figura a escala.

Fuente: SEP. "Libro de texto de matemáticas" 6° primaria. 2013. 70 p.p.

En primer grado de secundaria, cuando el estudiante estudia por primera vez la noción de semejanza por medio de figuras a escala y figuras homotéticas (en algunos libros se estudia hasta

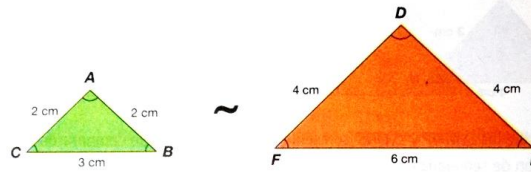
tercer grado aunque en el programa oficial indique primer grado), ya ha pasado por una gran cantidad de problemas de tipo aritmético desde la primaria con respecto a la proporcionalidad, cuando históricamente, proporcionalidad y semejanza no están separadas, geometría y aritmética unidas produjeron grandes aplicaciones y descubrimientos. Incluso diversas soluciones a problemas simples con los griegos, se realizaban sólo con semejanza de triángulos. En educación básica se aborda la proporcionalidad primeramente en un contexto aritmético (segundo de primaria), y es hasta tercer grado de secundaria cuando se estudia la semejanza de triángulos, donde se hace una escasa o ninguna referencia o articulación con la proporcionalidad.

Los criterios de semejanza de triángulos son estudiados en tercer grado de secundaria. En los propósitos del estudio de las Matemáticas para la educación secundaria se expone que los estudiantes “Utilicen el teorema de Pitágoras, los criterios de congruencia y semejanza de triángulos, las razones trigonométricas y el teorema de Tales, al resolver problemas.” Específicamente, en los Estándares Curriculares de secundaria para este tema se espera que los estudiantes resuelvan problemas que impliquen aplicar las propiedades de la congruencia de triángulos, en cambio, el programa lo coloca en el eje “Forma, espacio y medida” mientras que la proporcionalidad se coloca en el eje “Manejo de la información”. De manera que la articulación entre semejanza y proporcionalidad no está del todo explícita en el programa.

En tal caso, a pesar del contenido en el programa de tercer grado, en el libro de texto se contempla un amplio apartado para el tema de semejanza de polígonos donde se relaciona con la noción de proporcionalidad y los criterios de semejanza de triángulos (imagen 3). También se incluye el caso de la medición de la altura de la pirámide Keops por parte de Tales como se muestra en la imagen 4.

Equipo 1:

- Construyan dos triángulos.
- En el triángulo ABC dos lados miden 2 cm y el tercero 3 cm.
- En el triángulo DEF los lados miden 4 cm y 6 cm, respectivamente.



El equipo afirmó que los $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son semejantes porque cuando compararon la medida de sus lados la razón de semejanza era la misma.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{BC}{EF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CA}{FD} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

¿Crees que el equipo 1 tiene un buen argumento para afirmar que los triángulos son semejantes? _____

Imagen 3. Ejercicio sobre congruencia de triángulos

Fuente: Ramírez et al., “El mundo a través de las matemáticas” 3° secundaria. 2010. 99 p.p.

¿Sabías que por medio de la semejanza de triángulos, el matemático griego Tale de Mileto calculó la altura de la pirámide de Keops, basándose en la sombra que produce? Esto lo hizo clavando una estaca vertical en el extremo de la sombra de la pirámide y con la sombra de la estaca calculó dicha altura.

Lee el siguiente problema y, aplicando la semejanza de triángulos, trata de resolverlo.

Un árbol proyecta una sombra de 5 m; en ese mismo instante una persona de 1.80 m de altura proyecta una sombra de 1.25 m. ¿Cuál es la altura del árbol?

¿Qué datos se te proporcionan? _____

¿Los lados son proporcionales? _____

Imagen 4. Aplicaciones de los criterios de congruencia de triángulos

Fuente: Ramírez et al., “El mundo a través de las matemáticas” 3° secundaria. 2010. 110 p.p.

Sólidos regulares

El análisis histórico da cuenta de la inseparable relación entre la proporcionalidad y el estudio de los sólidos regulares o platónicos. En general, en nivel primaria, el programa contempla el estudio de sólidos y algunos prismas en diversos bloques. Específicamente, en cuarto grado de primaria se estudian algunos prismas, en quinto grado el libro de texto contiene un tema referente a prismas, pirámides y 5 poliedros (cubo, tetraedro, octaedro, icosaedro y dodecaedro) analizando algunas de sus propiedades pero sin nombrarlos regulares o platónicos, además de que no se

articula este tema con la proporcionalidad. En otra parte del libro de quinto existe una nota donde se hace referencia a algunos sólidos platónicos, como se muestra en la imagen 5.



Imagen 5. Algunos sólidos regulares

Fuente: SEP. "Libro de texto de matemáticas" 5° primaria. 2014. 144 p.p.

En secundaria el tema de los sólidos regulares no está contenido en los planes de estudio, solamente el estudio de algunas características de polígonos regulares y cuerpos sólidos como prismas y cilindros.

Los sólidos regulares fueron estudiados ampliamente por los pitagóricos, miembros de la academia de Platón, Euclides y posteriormente Luca Pacioli y Leonardo Da Vinci en el siglo XV. En estos estudios se muestra la inseparable relación de los sólidos regulares con la proporcionalidad, específicamente con la división de un segmento en partes proporcionales.

El desfase en esta etapa de transposición se muestra en una ausencia de la relación mencionada entre la proporcionalidad y los sólidos regulares, y con ello falta de articulación.

División de un segmento de recta en partes proporcionales.

La división de un segmento de recta en partes proporcionales se estudió con los griegos hasta el renacimiento dorado del siglo XV y representó un elemento fundamental en el desarrollo del arte. El arte clásico renacentista fue un rescate de esta idea desarrollada por los griegos, posteriormente movimientos artísticos como el surrealismo, cubismo y arte moderno rompieron con esta medida “rígida” e “impuesta” y la sustituyeron por una medida “caprichosa”. Esto quizá muestre el rompimiento de algunos tipos de expresiones artísticas como la pintura, escultura o arquitectura con algunas nociones matemáticas como la proporcionalidad.

Se hace mención de la relación de la proporcionalidad y el arte porque conocer contextos en donde se desenvuelve el estudiante es parte de los propósitos expresados por la SEP (2011) en donde el estudiante pueda desarrollarse en una sociedad que le demanda nuevos desempeños para relacionarse en un marco de pluralidad y democracia, y en un mundo global e interdependiente, donde se integren diversos enfoques disciplinares relacionados con aspectos biológicos, históricos, sociales, políticos, económicos, culturales, geográficos y científicos. En cambio, en el libro de texto existen escasas referencias de la proporcionalidad en relación con el arte en otros contextos geográficos, culturales o históricos.

Un elemento básico como la división de un segmento en partes proporcionales que articula elementos históricos, culturales, entre otros, no es tratado en el programa de primaria ni de secundaria, como pudiera ser el caso de la división de una línea recta en tres partes proporcionales que es el número de partes mínimo en que se puede establecer una relación de proporcionalidad. El único caso que se estudia es el teorema de Tales en tercer grado de secundaria como se observa en la imagen 6.

Se introduce el tema describiendo brevemente notas históricas de Tales. Posteriormente se pregunta a los estudiantes cómo dividir un segmento en cinco partes, después se enseña el procedimiento y se enuncia el teorema como se muestra en la imagen 6.

Comenta con tus compañeros la siguiente información.

Si varias rectas paralelas son cortadas por dos o más transversales, la razón de dos segmentos cualesquiera de una de ellas es igual a la razón de los correspondientes de la otra.

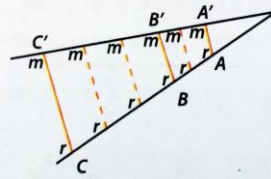


Imagen 6. Teorema de Tales

Fuente: Ramírez et al. “El mundo a través de las matemáticas” 3° secundaria. 2010. 136 p.p.

Además, el libro de texto relaciona el teorema de Tales con semejanza de triángulos desarrollando diversos casos como se muestran en las imágenes 7 y 8.

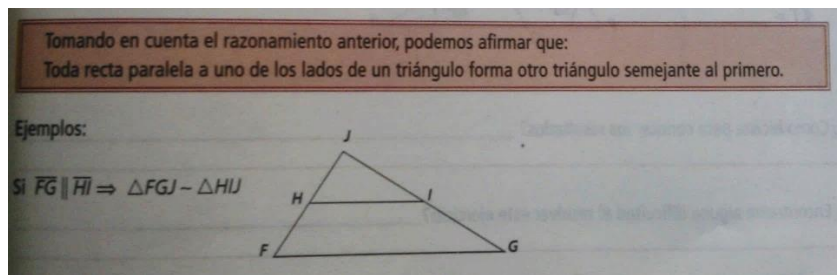
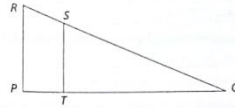


Imagen 7. Triángulos semejantes

Fuente: Ramírez et al. “El mundo a través de las matemáticas” 3° secundaria. 2010. 137 p.p.

Si $\overline{PR} \parallel \overline{ST} \Rightarrow \triangle PQR = \triangle QST$



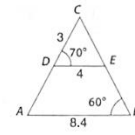
De acuerdo con las figuras y los datos, calcula los valores que se te indican:

a) $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

$\sphericalangle C =$ _____

$\sphericalangle A =$ _____

$\overline{AC} =$ _____

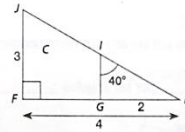


b) $\overline{GI} \parallel \overline{FJ}$ y $\overline{FJ} \perp \overline{FH}$

$\sphericalangle J =$ _____

$\sphericalangle H =$ _____

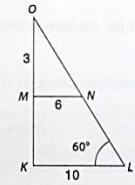
$\overline{GI} =$ _____



c) $\overline{KL} \parallel \overline{MN}$ y $\overline{KL} \perp \overline{KO}$

$\sphericalangle O =$ _____

$\overline{KO} =$ _____



d) $\overline{PT} \parallel \overline{QS}$ y $\overline{PT} \perp \overline{TR}$

$\sphericalangle Q =$ _____

$\sphericalangle T =$ _____

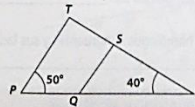


Imagen 8. Ejercicios sobre semejanza de triángulos

Fuente: Ramírez et al. "El mundo a través de las matemáticas" 3° secundaria. 2010. 138 p.p.

Aunque exista dicha relación entre el teorema de Tales con la proporcionalidad en el libro de texto (imágenes 6, 7 y 8) no se recupera la definición misma de proporción, haciendo referencia a la relación entre partes puestas frente a otras, no obstante, el profesor tiene en estos ejemplos y ejercicios la posibilidad de explicitar las relaciones con la definición de proporción u otros conceptos de la matemática.

Progresiones geométricas

Según el programa oficial, la construcción de sucesiones o progresiones aritméticas o geométricas deben estudiarse en cuarto grado de primaria, pero, este tema no coincide con el libro de texto que lo ubica en quinto grado de primaria y se aborda por medio de múltiplos y

reconocimiento de patrones, además no se hace mención a la relación de este tema con la proporcionalidad.

Las sucesiones geométricas están contempladas en primer grado se secundaria mediante la formulación en lenguaje común de expresiones generales que definen las reglas de sucesiones con progresión aritmética o geométrica, de números y de figuras, pero en ninguno de estos casos se hace explícita la articulación con la proporcionalidad a pesar de que el libro de texto contiene una nota referente a la sucesión de Fibonacci.

En los bloques que se estudia el tema de series y progresiones aritméticas y geométricas en la primaria y secundaria donde no se articula con la noción de proporcionalidad. Por ejemplo, en el libro de quinto grado en el tema de sucesiones numéricas se pide a los estudiantes que contesten algunas preguntas mostradas en la imagen 9.

1. En equipo, analicen las siguientes sucesiones y dibujen las figuras que faltan. Después, contesten las preguntas.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 Figura 6

❖ ¿Cuántos puntos debe haber en la figura 7? _____

❖ ¿Cuántos puntos debe haber en la figura 21? _____

❖ ¿Cuántos puntos debe haber en la figura 100? _____

❖ ¿Cómo determinaron la respuesta de la pregunta anterior? _____

❖ Una figura tiene 35 puntos, ¿pertenece a esta sucesión? _____

¿Por qué? _____

Imagen 9. Sucesiones numéricas

Fuente: SEP. “Libro de texto de matemáticas” 5° primaria. 2014. 50 p.p.

El estudiante identificará la sucesión aritmética 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16,..., donde se podría explorar que 4 es la media aritmética entre 6 y 2, 8 es la media aritmética entre 10 y 6, etcétera. El tema de la media aritmética, estudiado en quinto grado no hace referencia a las series aritméticas ni a la proporcionalidad.

Otro ejemplo donde se podría articular estas nociones es en libro de sexto grado de primaria en el tema “Tablas y factores de proporcionalidad” se presenta un ejercicio en el que los alumnos tienen que llenar una tabla con datos, como se muestra en la imagen 10.

2. En equipos, anoten los datos que faltan en la tabla siguiente; en ella se especifica el número de clavos que se requieren para fabricar 3 sillas de madera iguales.

❖ ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? _____

Número de sillas	Número de clavos
3	24
6	
7	
9	
16	
19	
25	
30	
60	
100	

Imagen 10. Ejercicio sobre proporcionalidad

Fuente: SEP. “Libro de texto de matemáticas” 6° primaria. 2014. 74 p.p.

Si se presentara la siguiente tabla a los alumnos, podría analizarse lo siguiente, 2 es la media aritmética entre 3 y 1, 5 es la media aritmética entre 4 y 6, etcétera, la diferencia entre el número de sillas y la diferencia entre el número de clavos es constante, y se podría expresar las siguientes proporciones, $1:2::8:16$ o $6:7::48:56$ como se muestra en la tabla 21.

NÚMERO DE SILLAS	NÚMERO DE CLAVOS
1	8
2	16
3	24
4	32
5	40
6	48
7	56
8	64

9	72
10	80
11	88
12	96

Tabla 17. Proporcionalidad entre el número de sillas y número de clavos

También se podría comparar con un ejemplo de una progresión geométrica partiendo de problemas como la duplicación del cuadrado, obteniendo la serie: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,..., y analizar, por ejemplo, que 4 es la media geométrica entre 2 y 8 o 32 es la media geométrica entre 16 y 64. Y se podría establecer la proporción $2:4::4:8$ o $16:32::32:64$.

Duplicación de longitud y áreas

Como se revisó en la sección del desarrollo histórico de la proporcionalidad, la duplicación de longitud y áreas fue ampliamente estudiada por los pitagóricos y la academia de Platón. La duplicación de longitud está relacionada con una progresión aritmética, la duplicación de un cuadrado con una progresión geométrica donde en el cuadrado existe una media geométrica entre dos extremos.

El estudio de áreas está contemplado en diversos bloques de nivel primaria y secundaria pero sin hacer referencia a la relación que existe entre la proporcionalidad con los casos de duplicación de cuadrados

Entre las características más importantes de la revisión de los libros de texto está la gran cantidad de ejercicios contenidos, por ejemplo, de la página 112 a la 119 del libro de matemáticas de 6 grado de primaria se presentan 27 problemas, en donde si se toma el tiempo de acuerdo con la planeación anual para esta asignatura sucede que no se les da la dedicación adecuada a cada uno de estos ejercicios.

Desde la perspectiva de la transposición didáctica, en la fase del saber a enseñar, que es el curriculum, existe una perdida conceptual y contextual de la relación de la proporcionalidad con

la duplicación del cuadrado, así como con los sólidos regulares, la semejanza de triángulos y las progresiones geométricas.

Razón, proporción y porcentaje

Existen algunas nociones que los libros de texto sí articulan explícitamente con la proporcionalidad, por ejemplo en el tema “Análisis de los datos” en primer grado de secundaria se pide organizar información sobre resultados de exámenes en una tabla, en ella se pide colocar la frecuencia absoluta, la razón, proporción y el porcentaje.

En lo que respecta a la representación de la razón, los libros de texto la muestran como una fracción, ya no se utiliza la representación de la forma $a:b::c:d$. El curriculum ya no muestra el significado de razón como era entendido por los griegos, por una parte es correcto debido a que el concepto de número ya no es el mismo que hace 2000 años, sin embargo la noción de razón como era concebida por Tales e Euclides y previo a él, conlleva la noción de comparación, previa al conocimiento de los números, y que es fundamental en el entendimiento de la proporcionalidad y en la de fracción, como hacen énfasis los estudios de Ramirez y Block (2009).

Por ello es importante que en el curriculum de los primeros dos grados de primaria se incluyera el tema de razones como previas a las fracciones.

El acercarse a la reconstrucción del primer nivel de transposición didáctica, el saber sabio, por medio de una revisión histórica y epistemológica de la proporcionalidad, permitió obtener los elementos anteriores (sólidos regulares, progresiones geométricas, duplicación del cuadrado, semejanza de triángulos) y mostrar que el curriculum de primaria y secundaria no toma en cuenta esta reconstrucción histórica y epistemológica. Ante lo cual es notorio la falta de articulación con dichos elementos.

Pendiente de una recta, tangente y función lineal

El segundo eje de análisis corresponde a un contexto algebraico, donde la proporcionalidad es revisada desde esta perspectiva, aquí al contexto aritmético y geométrico se le suma el tratamiento algebraico. Este constituye el tránsito más importante y delicado de la

proporcionalidad, entre un marco aritmético y un marco algebraico, entre la primaria y la secundaria (Block, 2012).

A nivel elemental, en primaria se comienza a estudiar la pendiente de una recta. En la página 113 del libro de matemáticas de sexto grado se presentan las siguientes gráficas (Imagen 11), en donde se pretende que el estudiante responda a una pregunta entre kilómetros recorridos por litro de gasolina. En este ejercicio es posible integrar y articular la proporcionalidad con conceptos como ángulos, constante de proporcionalidad, escala, porcentajes, fracciones, semejanza de triángulos, progresiones geométricas, o con otros problemas de proporcionalidad vistos en años anteriores, pero no sucede así, se trata de un ejercicio más que hay que contestar correcta y rápidamente y pasar al siguiente.

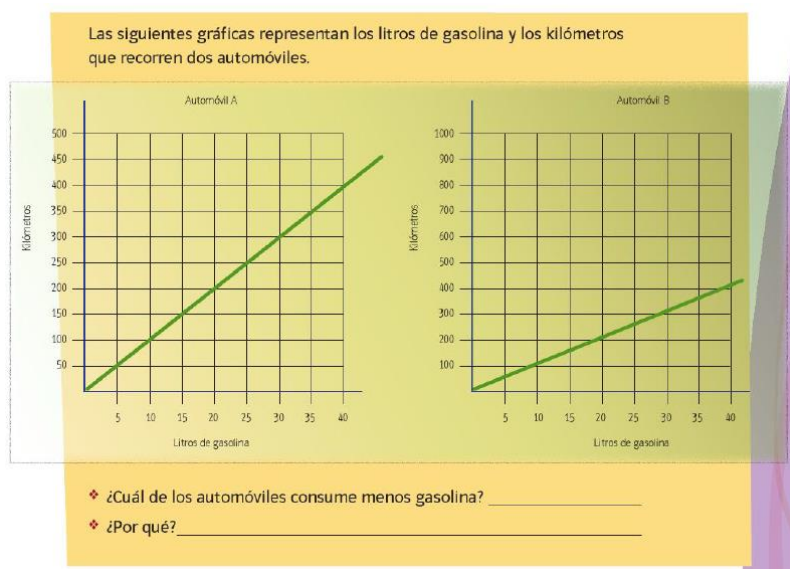


Imagen 11. Ejercicio sobre proporcionalidad y graficas

Fuente: SEP. “Libro de texto de matemáticas” 6° primaria. 2014. 113 p.p.

Regularmente estos ejercicios, el profesor deja que se contesten en dos sesiones de 20 minutos. Así se le está enseñando al estudiante a que un problema se resuelve en 5 minutos o menos y si no puede resolverlo en ese tiempo entonces el estudiante lo abandona.

Los libros de texto de primer y segundo grado de secundaria abordan el tema de la función lineal, primeramente por medio de situaciones problemáticas en contextos como economía o biología para después pasar a las tablas y gráficas de los datos en el plano cartesiano. También se incluye el tema de familias de rectas. En tercer grado se habla del cambio entre las distancias de dos puntos en una gráfica como se muestra en la imagen 12. En este tema se habla de razón de cambio

constante y su relación con la inclinación de la recta o pendiente. Sin embargo en el libro de texto no se da una definición de recta en la que se articule con la proporcionalidad como podría ser: una línea recta es un conjunto de puntos, en los que al tomar dos de ellos cualesquiera la diferencia del par de las ordenadas (y_1, y_2) entre la diferencia del par de las abscisas (x_1, x_2) es constante, además el libro no incluye una contextualización previa en el tema de proporción, ni se recuperan temas de grados anteriores.

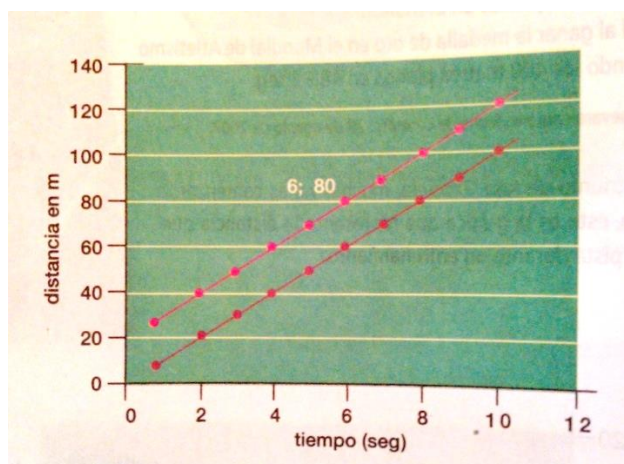


Imagen 12. Gráfica de la distancia en relación con el tiempo.

Fuente: Ramírez et al. "El mundo a través de las matemáticas" 3° secundaria. 2010. 68 pp.

Sería importante tomar en cuenta, en el tema de funciones lineales y otros, que previamente a su estudio, el libro contenga un enlace con otras nociones y temas revisados en grados anteriores, para que estos conocimientos puedan ser abordados como introducción a los nuevos temas.

En general, el abordaje de la proporcionalidad en un contexto algebraico, de la pendiente de la recta y la tangente el curriculum se da con poca o ninguna articulación previa con temas o nociones anteriores, como semejanza de triángulos, progresiones geométricas, duplicación de áreas, y además del más importante, la definición misma de línea recta.

Contexto trigonométrico

Finalmente otro contexto por el que transcurrió históricamente la proporcionalidad fue la trigonometría, que junto al contexto algebraico y conceptos como la pendiente de la recta y la

tangente constituye un paso previo al estudio de la razón de cambio instantáneo que forma parte del programa de estudio de bachillerato. En el curriculum de educación básica el estudio de la trigonometría comienza en tercer grado de secundaria por medio de las razones trigonométricas.

Se pretende, según el libro que se reconozcan las razones trigonométricas en familias de triángulos rectángulos semejantes como cocientes entre las medidas de los lados. La imagen 13 representa un ejercicio del libro de matemáticas donde se pide calcular algunas razones trigonométricas, más adelante se plantean algunas de las utilidades como calcular ángulos o lados de un triángulo, que puede servir para el cálculo de distancias o alturas. Las relaciones entre los lados se expresan como una fracción, aunque se habla de razón ya no se escribe de la forma $a:b::c:d$.

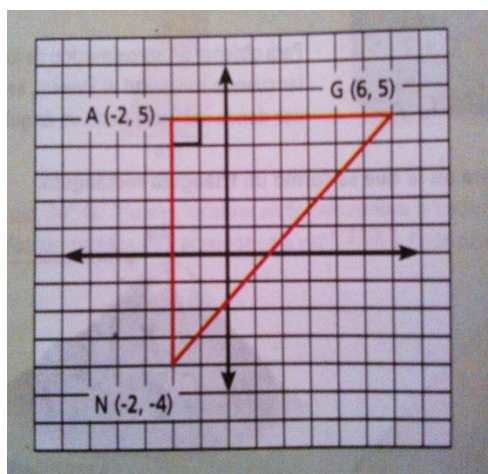


Imagen 13. Ejercicio para calcular las razones trigonométricas utilizando el plano coordenado
Fuente: Ramírez et al. “El mundo a través de las matemáticas” 3° secundaria. 2010. 183 pp.

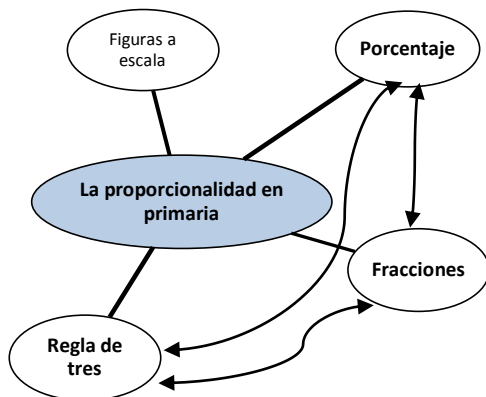
Aunque el libro relaciona a la proporcionalidad con la tangente como una razón entre los catetos del triángulo rectángulo, no lo hace con relación a la pendiente, aunque por medio del ejercicio de la imagen 13 es posible enlazar diversos conceptos relacionados a la proporcionalidad, como semejanza de triángulos, línea recta, figuras a escala entre otros.

En cuanto a la presentación de la razón entre los catetos se hace por medio de fracciones, ya no es utilizada la forma $a : b : : c : d$, aunque podría utilizarse para mostrar otra forma de expresar las razones y para relacionar, por ejemplo, cuando se enseña la regla de tres, donde suele existir confusión entre los términos medios y extremos. El uso de las razones de la forma $a : b : : c : d$ está ligada al uso que le dieron los griegos, donde sólo los números naturales eran admitidos como

tales, a través de siglos se fue incorporando las fracciones, hasta que la expresión de la razón como apareció en un inicio ya no fue utilizada.

Similarmente a lo que sucede cuando se trata las razones trigonométricas, el curriculum no recupera temas previos relacionados a la proporcionalidad. Es de resaltar que este fenómeno es algo constante en el curriculum, cuando comienza un nuevo tema como la función lineal, pendiente o razón entre los catetos de un triángulo rectángulo, se hace nula articulación con la proporcionalidad, cuando históricamente el desarrollo de la proporcionalidad estuvo articulado con áreas como la aritmética, geometría, álgebra, trigonometría y geometría analítica entre otras.

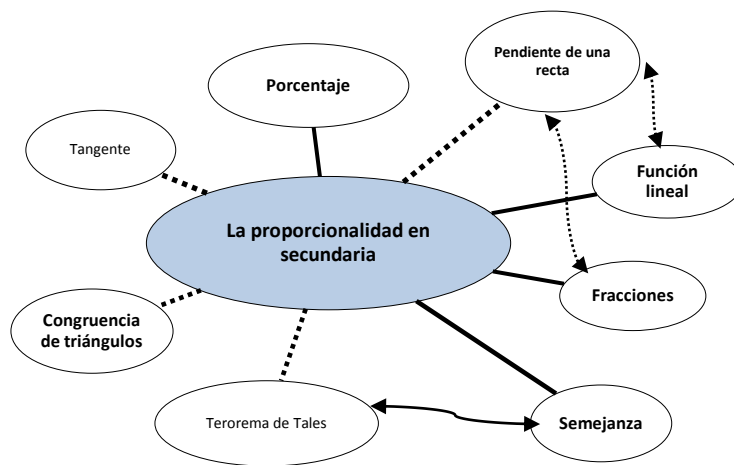
En los siguientes esquemas 3 y 4 se muestran las relaciones de la proporcionalidad con conceptos y temas en el curriculum de primaria y secundaria. La línea continua en color negro se refiere a que existe relación entre el tema o concepto desarrollado en el curriculum. La línea punteada señala que en el curriculum se menciona brevemente la relación, con escasos tipos de representaciones (aritmética, geométrica, algebraica), pero se desconoce, por otra parte, si el profesor desarrolla actividades para reforzar dicha vinculación. Las flechas bidireccionales indican que el curriculum hace mención a la relación entre los conceptos señalados.



Esquema 3 La relación de la noción de proporción con otros conceptos en el curriculum de primaria

En nivel primaria se aborda la proporcionalidad principalmente en un contexto aritmético, las representaciones geométricas de la proporcionalidad son escasas. Si se compara con el

tratamiento inicial de la proporcionalidad con Tales o Euclides el curriculum podría abordar esta noción también desde la geometría.



Esquema 4. La relación de la noción de proporción con otros conceptos en el curriculum de y secundaria

En nivel secundaria el curriculum aborda a la proporcionalidad con escasos referentes geométricos y aritméticos previos. Además se mencionan los elementos mostrados en el esquema 4 pero con escasas referencias entre estos con la proporcionalidad.

En el esquema 5 se presenta las relaciones de algunos conceptos vinculados a la proporcionalidad de acuerdo a la revisión histórica y epistemológica.



Esquema 5. La relación de la noción de proporción con otros conceptos de la matemática.

Se incluyen en el esquema 5, algunos conceptos vinculados a la proporcionalidad, algunos de estos fueron abordados en la revisión histórica y epistemológica. Como se observa, no todos están incluidos en el curriculum de primaria y secundaria. Se muestran también los conceptos unidos entre sí, para indicar la relación entre todos ellos en el entendimiento de la noción de proporción.

Finalmente, como producto de reflexión de este capítulo se muestra la figura 16 donde se identifica la relación entre los temas propuestos por los programas y libros de texto de primaria y secundaria con respecto a la proporcionalidad, mostrando algunas ramas de la matemática que intervienen a través de los niveles escolares.

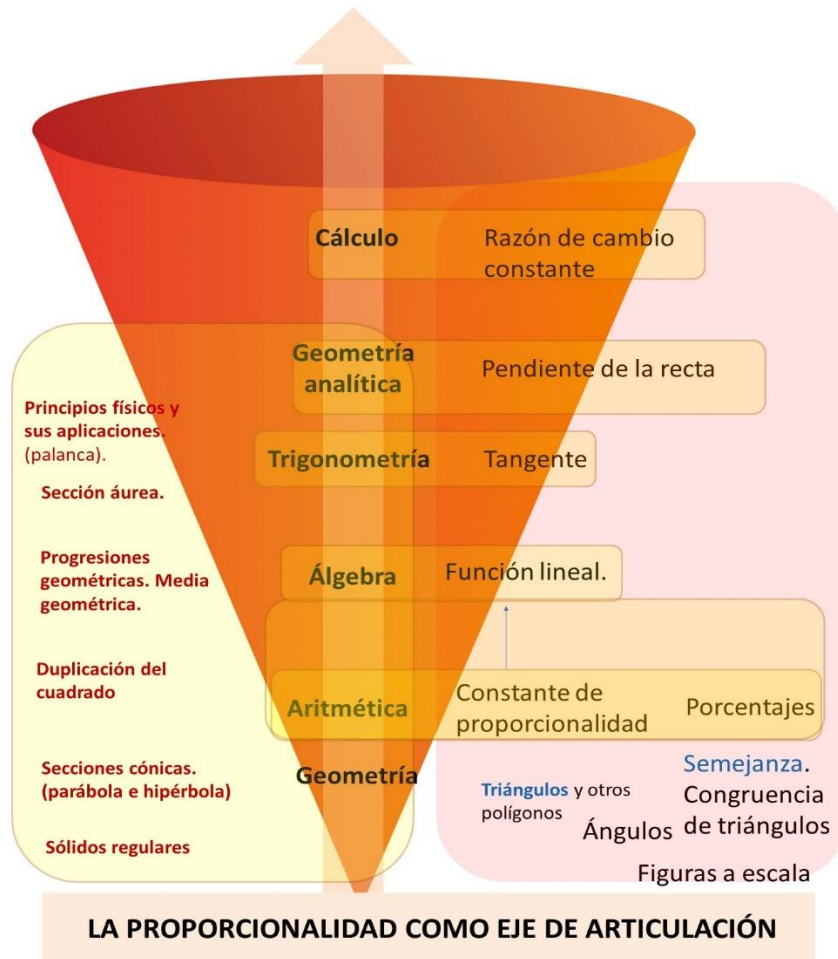


Figura 16. Articulación de la proporcionalidad con otras nociones matemáticas.

En la figura 16 se muestra de fondo un cono, y en el eje algunas asignaturas que se suelen cursar durante la primaria, secundaria y bachillerato, se parte de geometría y aritmética y cada una se agrega en el siguiente nivel aumentando hasta llegar al cálculo en bachillerato. Se colocó al cono para indicar que se transcurren los grados cada vez con mayor profundidad y articulación con otras nociones matemáticas, desde nivel un nivel elemental a otro superior.

Del lado derecho del eje se muestran los temas y conceptos que son abordados de acuerdo con los programas de estudio y el libro de texto de matemáticas, representando que no todos estos están articulados entre sí. De lado izquierdo, se muestran las nociones matemáticas articuladas naturalmente desde las obras de Tales y Euclides. El eje principal es la proporcionalidad y fue la base para aportes fundamentales en las áreas colocadas al centro del cono, desde la aritmética y la geometría, pasando por el álgebra, la trigonometría y la geometría analítica.

CAPÍTULO VI SESIÓN DE TRABAJO CON PROFESORES DE NIVEL BÁSICO

Proceso de la sesión de trabajo con profesores

De acuerdo con uno de los objetivos de esta investigación se llevó a cabo una sesión con profesores para presentar algunos de los resultados de la investigación en cuanto a la revisión histórica y epistemológica así como el análisis de los libros de texto y programas. Por medio de esta actividad también se obtuvo información en cuanto a las nociones que tienen los profesores sobre proporcionalidad. La sesión se llevó a cabo en 2 partes de 2 horas cada una, se contó con la asistencia de 10 profesores, 5 de primaria y 5 de secundaria, quienes mostraron un interés permanente y disposición por continuar con espacios de reflexión en cuanto a la formación de profesores y otros temas relacionados.

Primeramente se introdujo en el tema abordando la formación de profesores, se comenzó con la etimología de “proporcionalidad” para pasar al teorema de Tales. Posteriormente se relacionó con semejanza de triángulos y se hizo referencia a las razones trigonométricas, retomando constantemente elementos históricos que daban cuenta de los orígenes de las investigaciones en las distintas nociones relacionadas con la proporcionalidad. Se continuó con algunas proposiciones referentes a la proporcionalidad desde la perspectiva de Euclides, abordándose en forma aritmética y geométrica en cada una de ellas.

Finalmente se retomaron algunos ejemplos donde se aplicó la proporcionalidad, como en el principio de la palanca de Arquímedes, el cálculo de la circunferencia de la tierra por parte de Eratóstenes y un ejemplo en química. Se finalizó con un esquema en el que se observaba la relación de la proporcionalidad con otras nociones de la matemática en nivel primaria, secundaria y bachillerato. Durante la discusión se hacían referencias históricas de la proporcionalidad retomando citas textuales de autores como Platón y Euclides, entre otros.

Formación de profesores

Durante las dos sesiones se mantuvo un diálogo y participación constante por parte de los profesores. Uno de los temas iniciales fue sobre la formación de profesores. Una profesora de primaria señaló que la terminología utilizada en la sesión de trabajo es abordada en 5° y 6° muy escasamente y sin antecedentes históricos previos, en muchas ocasiones es mal utilizada y hasta desconocida por parte del profesor, señalando específicamente su escuela donde existe poco interés por parte de los profesores en cuanto a su formación continua.

Una de las profesoras sugirió por escrito la colaboración entre investigadores y profesores para el diseño de cursos, programas de estudio y diversas propuestas, esto mediante ejes formativos, tomando en cuenta el contexto, los cambios mundiales, las leyes y la economía nacional, todo esto en correspondencia con los demás niveles educativos. Lo anterior está en concordancia con los resultados de la aproximación histórica y epistemológica que se llevó a cabo en esta investigación, debido a que a través de esta aproximación, la noción de proporcionalidad conforma un eje articulador de los niveles educativos de primaria y secundaria.

Los profesores coincidieron que la proporcionalidad en educación básica es importante porque está relacionada con temas de bachillerato o nivel superior, además los programas de estudio señalan que debe haber articulación en la enseñanza de conceptos matemáticos, pero no se explicita el cómo llevar a cabo dicha articulación. La aproximación histórica y epistemológica permite responder, en parte, la crítica al curriculum por parte de algunos profesores en cuanto a cómo relacionar nociones matemáticas. Esto puede llevarse a cabo si se coloca a la proporcionalidad como un eje en la formación de profesores.

Los programas de estudio y libros de texto de matemáticas.

Una profesora con 25 años de experiencia en nivel primaria mencionó que existe una gran cantidad de errores en los libros de texto, muchos de ellos en matemáticas. Los profesores afirmaron que los conocimientos que algunos tienen en cada nivel es que desconocen el qué y cómo se abordan los contenidos matemáticos en niveles siguientes y antecedentes, es decir que algunos profesores de primaria conocen los contenidos y forma de trabajo de ese nivel, pero no

conocen los contenidos y la didáctica en secundaria y bachillerato. A su vez, algunos profesores de secundaria no conocen los contenidos ni cómo se abordan en primaria y bachillerato.

Se planteó también la problemática del aprendizaje memorístico o mecanizado, en donde el contenido es importante por la autoridad del profesor más que por la lógica interna de un conocimiento.

Concepciones de los profesores acerca de la proporción

Los profesores de primaria tuvieron dificultades y errores en la mayoría de las actividades de evaluación. Los de nivel secundaria, aunque estuvieron acertados en sus respuestas, indicaron tener desconocimiento de los contenidos y la didáctica de este y otros temas de matemáticas en nivel primaria y bachillerato. Además también señalaron desconocer cómo se articulaba la proporcionalidad con otros conceptos en trigonometría y geometría, así como de su evolución histórica. Opinando también que fueron educados bajo procesos que privilegian la memorización y que con las actuales reformas se les dificultaba poner en práctica los métodos de enseñanza actuales.

Una profesora expresó su asombro al ver cómo el profesor durante la sesión hablaba de proporción en triángulos semejantes y luego se saltaba a trigonometría con las razones, y después a la pendiente de una línea recta, no podía creer que un concepto podía ser trasladado de la primaria a la secundaria y a la preparatoria y regresar nuevamente a la primaria, entre niveles educativos y grados.

Por otra parte, desde una concepción distinta de la matemática, la revisión histórica permite conocer y hacer explícitas las formas de articulación de los elementos y el proceso de construcción y descubrimiento de los saberes matemáticos.

Finalmente, en este capítulo algunos conocimientos y experiencias de los profesores muestran que, el currículum tiene impacto en sus conocimientos respecto a la proporcionalidad, dado que la mayoría de los profesores utilizan el libro de texto como único referente para impartir clase (SEP, 2010). Este hecho, en parte, no les permite tener elementos para seguir aprendiendo otros conceptos y a mayor profundidad como puede ser el caso de una profesora de primaria

participante en la reunión, que conociendo la regla de tres, sólo la aplicaba en contextos aritméticos básicos.

De lo anterior se enfatiza en la importancia y responsabilidad de formar profesores en sólidos conocimientos disciplinares y didácticos (Barrera y Reyes, 2014)

CAPÍTULO VII REFLEXIONES FINALES

De acuerdo con el objetivo general, se analizó la forma de articulación de la proporcionalidad con otros conceptos de la matemática a través de los libros de texto de primaria y secundaria desde una perspectiva histórica y epistemológica, para a su vez generar elementos de reflexión en la formación de profesores.

Con respecto a la hipótesis planteada, por una parte se verificó que el desarrollo histórico y epistemológico de la proporcionalidad permitió dar elementos para hacer explícitas las formas de articulación entre éste y otros conceptos de la matemática, como es el caso de la semejanza de triángulos, duplicación de áreas, progresiones geométricas y la pendiente de una recta, entre otros. En cuanto a la articulación, se muestra que los programas oficiales y libros de texto de primaria y secundaria carecen en la mayoría de ellos de una clara intención de explicitar las formas en que la proporcionalidad se articula con otros conceptos de la matemática elemental. Esto pudo verificarse por medio de las escasas formas de representación de la proporcionalidad.

Respecto al desarrollo de la proporcionalidad en la historia

- Una aportación significativa del desarrollo histórico de las ideas matemáticas, a los programas de estudio y libros de texto, es el hecho de que los cambios curriculares deben tomar en cuenta la evolución epistemológica de las ideas matemáticas, en tal caso, es significativo que el tránsito entre un tratamiento aritmético y geométrico de la proporcionalidad, por parte de los egipcios, a uno algebraico llevó una temporalidad aproximada de 22 siglos.
- El desarrollo de la proporcionalidad a través de la historia no sólo constituye un elemento importante en la formación didáctica de profesores sino también para los actores participantes en el tránsito del saber erudito al saber a enseñar, es decir, en la selección de contenidos para incorporarlos al curriculum. El tema de proporcionalidad en el curriculum no es una suma de partes, sino es un proceso de desarrollo continuo a través de la historia que se va articulando con ramas de la matemática cada vez más complejas.

- Por otra parte puede ser identificado, mediante el análisis de algunos contenidos de Los Elementos, que con respecto a la proporcionalidad existió un largo trabajo previo de los egipcios, pitagóricos e integrantes de la academia de Platón respecto a la formación de las definiciones por parte de Euclides, mostrando en cierta manera, partes del proceso y trabajo para llegar a construir el conocimiento sobre la proporcionalidad.
- Las ideas matemáticas en la historia proporcionan un conocimiento de las dificultades que se fueron enfrentando en su desarrollo, y cómo la superación de dichos obstáculos ha contribuido al desarrollo del conocimiento matemático, interviniendo para ello personajes en distintos tiempos y culturas.

Respecto al curriculum

- El plan de estudios que rige actualmente en educación básica data del 2011, sin embargo los libros de texto de primaria y secundaria sufren modificaciones parciales o totales cada ciclo escolar. Esto da cuenta de la afirmación hecha por Block (2006) de que la enseñanza de la proporcionalidad ha tenido cambios sustanciales en el curriculum, lo que afecta el conocimiento que se tiene del tema por parte de los profesores.
- El curriculum de primaria y secundaria no hace explícita la articulación de la proporcionalidad con semejanza de triángulos, duplicación de áreas y progresiones geométricas, entre otros temas. Así como escasas formas de representación de la proporcionalidad. Cuando los profesores no logran identificar tales relaciones, presentan a los estudiantes un saber enseñado descontextualizado y con poco significado para los mismos.
- Resulta indispensable, como señala Rondero (2013), tener un curriculum articulado y bien sustentado, con la finalidad de darles a los estudiantes un mejor sustento conceptual. En tal caso las ideas y conceptos relacionados con la proporcionalidad requieren su adecuada ubicación en los programas y libros de nivel básico.
- Se puede mencionar que en el curriculum de primaria y secundaria, no se identifica a la proporcionalidad como un eje de articulación, en el entendido de no mostrar explícitamente sus relaciones con otros conceptos ni sus distintas formas de representación (geométrica, aritmética, algebraica). En secundaria este problema se ve

agravado por el hecho de que existen 73 distintos libros de matemáticas, para los tres grados, autorizados por la SEP, aunque haya un solo programa oficial por cada asignatura.

Respecto a la formación de profesores

- En relación con la hipótesis se pudo mostrar, mediante la aproximación histórica-epistemológica, que en los programas de primaria y secundaria no hay una adecuada articulación de la proporcionalidad con otros conceptos de la matemática elemental, debido en gran parte, a que no se logra identificar su trascendencia en la construcción del conocimiento matemático. Adicionalmente se comprobó que existen diversas dificultades conceptuales en los profesores en cuanto a un entendimiento amplio de la proporcionalidad, lo que incide directamente en los aprendizajes de sus estudiantes.
- Es necesario incorporar elementos históricos y epistemológicos, como parte de la formación didáctica de los profesores, como el hecho relevante de que la proporcionalidad es un eje de articulación conceptual de los saberes matemáticos, lo cual es conveniente que el profesor incorpore a su práctica educativa.
- Contar con un currículum articulado puede ayudar a que los profesores presenten a sus estudiantes los saberes relacionados entre sí, lo que puede mejorar su comprensión matemática en cuanto a ser más profunda y duradera, todo lo cual sería la base para articular adecuadamente otros conceptos de mayor complejidad en grados y niveles subsecuentes.
- Un profesor formado sólidamente en conocimiento disciplinares, epistemológicos y didácticos (Barrera y Reyes, 2014) puede superar estas dificultades y adaptarlas en el sentido correcto. Por el contrario un currículum puede estar bien diseñado y articulado, pero si los profesores no se involucran en el proceso, cualquier cambio será en vano, el profesor es un actor clave en la transposición didáctica.
- Resulta conveniente realizar más investigaciones con fuerte contenido teórico y empírico, que muestren cómo es que la identificación y explicitación de otros ejes de articulación conceptual, además de la proporcionalidad pueden incorporarse a la formación de profesores.

Referencias bibliográficas

- Abbagnano, N. (2004). *Diccionario de filosofía*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Academia Española. (1889). *Diccionario General Etimológico de la Lengua Española*. Tomo cuarto. Madrid: Faquinetto ed.
- Acosta, A. (2011). *La noción de linealidad. Una aproximación epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural*. Tesis Doctoral. IPN: CICATA
- Almaguer, G., Rodríguez, R. y Cantú, L. (2013). *Matemáticas 2*. México: Limusa.
- Arriaga, A. Benítez, M. (2013) *Matemáticas 1 por competencias*. México: Pearson.
- Balderas, R., Block, D. Guerra, M. (2011). *La enseñanza de la noción de proporcionalidad en la escuela secundaria: conocimientos de maestros*. XI Congreso Nacional de Investigación Educativa. México, D.F. Memoria Electrónica. [En Línea]. Consultado el 2 de Octubre de 2013 <http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v11/ponencias.htm>)
- Barrera, F. y Reyes A. (2013). *Elementos didácticos y resolución de problemas: formación docente en matemáticas*. Pachuca de Soto: UAEH.
- Bernal, C. (2010). *Metodología de la investigación*. Tercera edición. Colombia: Pearson.
- Block, D. (2006). *Conocimientos de maestros de primaria sobre la proporcionalidad*. 19a. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, (pp. 675-680). Montevideo: RELME.
- Block, D., Mendoza, T. y Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica, México*. México: SM de Ediciones.
- Boyer, C. (1991). *A history of mathematics*. Second edition. E.U: John Wiley
- Boyer, C. (2011). *A history of mathematics*. Third edition. E.U: John Wiley
- Cacho, M. (2005). *La transposición didáctica*. En RED. Núm. 2 (pp. 62 -69). México: Red de posgrados en educación ac.
- Cañón, M. (1993). *La matemática. Creación y descubrimiento*. Madrid: Universidad Pontificia Comillas.
- Casarini, M. (2005). *Teoría y diseño curricular*. México: Trillas

- Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- Collette, J~P. (2000). *Historia de las matemáticas*. 4ª edición. México: Siglo XXI.
- Cramer, K. and Post, T. (1993). *Connecting Research To Teaching Proportional Reasoning*. *Mathematics Teacher*, 86(5), (pp. 404-407)
- De Bock, D., Fernández, C., Llinares, S., Verschaffel, L. (2012). *The development of students' use of additive and proportional methods along primary and secondary school*. *European Journal of Psychology of Education*. September, Volume 27, Issue 3, (pp. 421-438)
- Díaz, A. (2005). *Evaluación curricular y evaluación de programas con fines de acreditación. Cercanías y desencuentros*. Sonora, México: Congreso Nacional de Investigación Educativa.
- Director, B. (2002). *Bringing the Invisible to the Surface*. *EIR*. Vol. 29, Num. 17, (14-19). E.U.
- Director, B. (2002). *Fundamental Theorem: Gauss's Declaration of Independence*. *EIR* Volume 29, Number 14, April 12 (14-17). E.U.
- Euclides. (1991). *Los elementos*. Libros V, VI y VII. España: Gredos.
- Fowler, D. (1999). *The mathematics of Plato's academy*. Second edition. United States: Oxford University Press.
- Godino, J. y Batanero, C. (2003). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. 34 páginas.[En línea]. Recuperado en, <http://www.ugr.es/local/jgodino>.
- González, P. (2004). *La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza*. En *SUMA*, Vol. 45. (pp. 17- 28). España: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM).
- González, P. (2003). *Platón y la academia de Atenas*. España: Nivola.
- Gutiérrez, S. (2006). *Introducción a la filosofía*. México: Esfinge.
- Heath, T. (1921). *A history of greek mathematics*. New York: Oxford University Press.

- Hernández, S., Fernández, C., Baptista, L. (2010). *Metodología de la Investigación*. México: Mc Graw Hill.
- Isoda, M., y Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases*. Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Jámblico. (2003). *Vida Pitagórica*. España: Gredos.
- Kirk, G. (1989). *El curriculum básico*. Barcelona: Paidós.
- Kline, M. (1972). Mathematical contributions in the renaissance in *Mathematical Thought. From ancient to modern times* Vol. 1. (pp. 231-249). E.U: Oxford University Press.
- Kline, M. (2014). *El fracaso de matemática moderna. Por qué Juanito no sabe sumar*. Madrid: Siglo XXI.
- Namakforoosh, M. (2003). *Metodología de la investigación*. México: Limusa.
- National Council of Teachers of Mathematics [NTCM]. (2000). *Principles and Standars for School Mathematics*. Reston, VA: The Council.
- Pacioli, L. (2008). *La divina proporción*. Madrid: Akal.
- Pérez, I. (2007). *Articulación de saberes matemáticos y modelos conceptuales*. Tesis de Maestría. UAEH.
- Platón. (2008). *Timeo*. Volúmen VI. Madrid: Gredos.
- Platón, (1872). *Timeo*. Tomo 6, Madrid: edición de Patricio de Azcárate,
- Platón. (2005). *Epinomis*. México: Sepan Cuantos.
- Ramírez, M. (2012). *Entendimiento de la proporcionalidad en estudiantes de licenciatura*. Tesis de Maestría. UAEH.
- Ramírez, M. y Block, D. (2009). *La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares* Educación Matemática, vol. 21, núm. 1, pp. 63-90.
- Ramirez, M., Azpeitia, M., Flores, I., Castillo, C, y Vergara, D. (2013). *El mundo a través de las matemáticas 3*. México: Fernández educación.
- Real Academia Española. (2014). Diccionario. En línea. <http://www.rae.es/>

- Rondero, C., Criollo, A., Tarasenko, A., Perez, M., Acosta, J., Karelin, O. (2013). *La formación de profesores en competencias matemáticas*. México: Díaz de Santos.
- Sacristán, G. (1998). *El curriculum. Una reflexión sobre la práctica*. España: Morata.
- SEP. (2011). *Guía articuladora de materiales educativos de apoyo a la docencia. Primaria*. México: Secretaria de Educación Pública.
- SEP. (2010). *Uso pedagógico de los materiales educativos escritos para educación primaria por parte de sus destinatarios en el aula*. México: Secretaria de Educación Pública.
- SEP. (2011). *Planes y programas de estudio. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. Guía para el maestro*.
- Yarza, F. (1983). *Diccionario Griego- Español*. España: Editorial Ramón Sopena.

Apéndice 1

Evaluación aplicada a los profesores de primaria y secundaria después de la sesión de trabajo

Título de la sesión: **“La proporcionalidad como un eje de articulación entre la primaria y secundaria”**

Nombre: _____

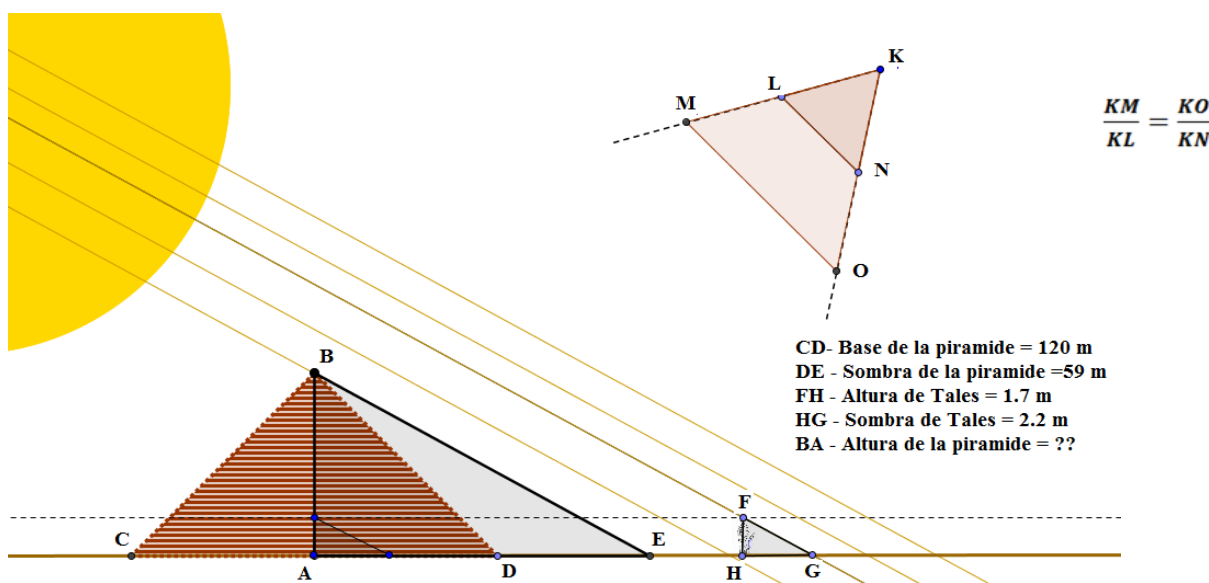
Formación profesional: _____

Años de experiencia docente: _____

Asignaturas impartidas	Nivel

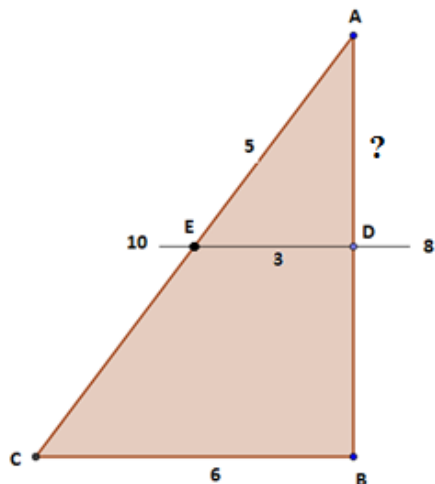
ACTIVIDAD 1

Tales de Mileto calculó la altura de la pirámide de Keops, con la información mostrada en la figura siguiente encuentre usted la altura AB. Argumente su respuesta.



Actividad 2

Encuentre el valor del lado desconocido (AD) del triángulo usando la semejanza. Argumente su respuesta

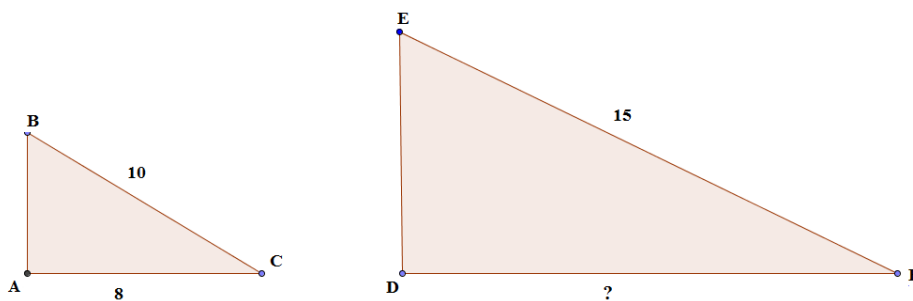


Actividad 3

Tomando como eje argumentativo a la proporcionalidad explique la regla de 3 simple.

Actividad 4

Se tiene el triángulo original ABC, donde el segmento BC (hipotenusa) tiene un valor de 10 y el lado AC de 8, si en un segundo triángulo DEF el segmento EF vale 15, ¿cuánto debe valer el segmento DF para que se mantenga la proporción $\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$? Use algunas de las propiedades referidas a Euclides.



Actividad 5

¿Cuál considera que es la importancia de la proporcionalidad en la educación matemática básica?