



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
DEL ESTADO DE HIDALGO



INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN TECNOLOGÍAS DE INFORMACIÓN Y SISTEMAS

---

MAESTRÍA EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

SINTONIZACIÓN DE UN CONTROLADOR DIFUSO PROPORCIONAL  
RETARDADO PARA ESTABILIZAR UNA CLASE DE SISTEMAS NO  
LINEALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN  
CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

**PRESENTA:**

**JOSÉ ALBERTO ORTEGA MELO**

ASESOR:

DR. RAÚL VILLAFUERTE SEGURA

PACHUCA HGO., MÉXICO 12 DE ENERO DE 2014



José Alberto Ortega Melo

**SINTONIZACIÓN DE UN  
CONTROLADOR DIFUSO  
PROPORCIONAL  
RETARDADO PARA  
ESTABILIZAR UNA  
CLASE DE SISTEMAS NO  
LINEALES**

Gracias a

**CONACYT** por la beca de Maestría  
otorgada durante el periodo  
Agosto 2011 - Junio 2013.

**CITIS-UAEH**, por la formación  
académica brindada durante el  
posgrado y el apoyo para la  
realización de la presente memoria.

# Agradecimientos

Esta sección está dedicada a expresar mi agradecimiento a todas las personas que me brindaron su apoyo para seguir adelante y así completar una meta mas en mi vida. En primer lugar quiero agradecerle a mis padres por darme la vida, su amor incondicional, la motivación que constantemente recibo de ellos para seguir alcanzando mis metas, por la educación y cuidados que me han brindado. Son demasiados los hechos, que no encuentro palabras suficientes para expresarles mi total gratitud. Quiero hacer énfasis a mi madre Sulpicia Melo Medina que siempre ha estado en los momentos difíciles, que con sudor y lagrimas algunas ocasiones nos saco adelante siempre, le agradezco todos sus sacrificios que hizo por amor a sus hijos, por sus enseñanzas y por demostrarme que todo se puede, cuando se quiere y se tiene la convicción de hacer las cosas pese a las limitantes que puedan llegar a existir. A mi padre Catalino Ortega Acosta, aunque a lo largo de la vida hemos tenido demasiadas diferencias le agradezco por el apoyo en tiempos clave así como el amor que me da, espero poder corresponderle y demostrarle el amor y aprecio que le tengo. A Irma Liliana Pérez Benítez y Edgar Ortega Melo mi hermano con quien crecí, que de igual manera siempre me ha demostrado su apoyo, amistad y cariño en diferentes situaciones de la vida, que me ha tenido la paciencia suficiente y me ha dado un ejemplo de como hacer las cosas de forma correcta.

A mi asesor, el Dr. Raúl Villafuerte Segura, por las ilimitadas enseñanzas, por su paciencia y tolerancia hacia mi persona, por el valioso tiempo que me ha brindado, por su total apoyo en cuestiones académicas y administrativas dentro de la universidad, sus consejos y también por su amistad, cosas que me han sido de ayuda para realizar el presente trabajo y para mejorar como persona.

A mis amigos Justo Fabian Montiel Hernández, Leonardo Alonso Martínez Rivera, Juan Daniel Ramírez Zamora, Mario Oscar Ordaz Oliver, Mario Alejandro Vega Navarrete, José Manuel Fernández Ramírez, Máximo Ramírez Melo, Alan Daniel Villafañet, Tania Daniel Villafañet, Karen Montiel Paredes, Anabel Nicolás Gómez, Anabel Gómez Hernández, Germán Nicolás Gómez, José David Peña Pérez, Josué Rebolledo García por su amistad, su apoyo y confianza para el desarrollo de este proyecto, así como sus consejos personales.

Finalmente, agradezco a todos los que de manera directa e indirecta hicieron una contribución a este trabajo, en particular a la Dra. Sabine Mondié Cuzange, Dr. Omar Arturo Domínguez Ramírez, Dr. Omar Jacobo Santos Sánchez y al Dr. Luis Enrique Ramos Velasco por sus comentarios para la preparación y mejora del presente trabajo. El tesista y el director de la misma, agradecen el apoyo otorgado por CONACYT a través de la estancia posdoctoral CVU No 21700.

# Resumen

En la presente memoria se propone un método para sintonizar una ley de control difusa proporcional retardada (PR) para estabilizar una clase de sistemas no lineales. La estabilización del sistema no lineal se garantiza mediante la  $\sigma$ -estabilidad de su modelo difuso del tipo Takagi-Sugeno (T-S) en lazo cerrado con una ley de control difusa PR. La sintonización de la ley de control difusa PR se realiza en el marco frecuencial empleando el método D-particiones. Para verificar la  $\sigma$ -estabilidad del modelo difuso se construye un método numérico para estimar la ubicación de las raíces de los cuasipolinomios característicos de cada uno de los sistemas lineales que conforman al modelo difuso. Sin pérdida de generalidad, los resultados teóricos obtenidos son ilustrados en simulación y de manera experimental en un sistema carro-péndulo. El desempeño del control propuesto aquí se compara con una clásica compensación paralela distribuida.

# Abstract

In this dissertation a method to tune a fuzzy proportional retarded (PR) control law for stabilizing a class of nonlinear systems is proposed. The stabilization of the nonlinear system is guaranteed through the  $\sigma$ -stability of its Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy model with feedback fuzzy PR controller. The tuning of the fuzzy PR control law, has been addressed in the frequency framework using D-partition method. The stability of each fuzzy model system is guaranteed using a numerical method to determine the location of the roots in the complex plane of each characteristic quasipolynomials to find the root loci of each linear system of the fuzzy system. Without loss of generality, the theoretical results obtained are exemplified experimentally and with a simulation of the car-pendulum system. The performance of the control proposed here is compared with a classical parallel distributed compensation (PDC).

# Índice general

Agradecimientos . . . . .	V
Resumen . . . . .	VII
Abstract . . . . .	IX
Índice general . . . . .	XI
Índice de figuras . . . . .	XV
Índice de tablas . . . . .	XIX
<b>Acrónimos y abreviaturas</b>	<b>XXI</b>
<b>Notación</b>	<b>XXIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Motivación . . . . .	4
1.3. Justificación . . . . .	7
1.4. Planteamiento del problema . . . . .	7
1.5. Propuesta de solución . . . . .	8
1.6. Objetivos . . . . .	8
1.6.1. Objetivo general . . . . .	8
1.6.2. Objetivos específicos . . . . .	9
1.7. Hipótesis . . . . .	9
1.8. Metodología . . . . .	9
1.9. Contribución de la tesis . . . . .	10
1.10. Organización de la tesis . . . . .	10
<b>2. Antecedentes principales</b>	<b>13</b>
2.1. Lógica difusa, modelos Mandani y T-S . . . . .	13
2.1.1. Lógica difusa . . . . .	14
2.1.1.1. Conjuntos difusos . . . . .	15
2.1.1.2. Funciones de membresía . . . . .	15
2.1.1.3. Beneficios de los controladores difusos . . . . .	16

2.1.1.4.	Sistemas de inferencia difusa (FIS) . . . . .	17
2.1.2.	Inferencia difusa tipo Mandani . . . . .	18
2.1.3.	Inferencia difusa tipo T-S . . . . .	19
2.1.3.1.	Sector no lineal . . . . .	21
2.1.3.2.	Aproximación local . . . . .	21
2.1.4.	Ventajas de los métodos Mandani y T-S . . . . .	21
2.2.	Sistemas con retardo . . . . .	23
2.2.1.	Sistemas con retardos del tipo retardado . . . . .	23
2.2.2.	Espectro . . . . .	24
2.2.3.	D-particiones . . . . .	25
2.2.4.	Sintonización de un controlador PR . . . . .	26
2.2.4.1.	Regiones de estabilidad . . . . .	28
2.3.	Sistemas difusos T-S con retardos y condiciones de estabilidad . . . . .	29
2.3.1.	Modelo T-S con retardos . . . . .	29
2.4.	Comentarios . . . . .	30
<b>3.</b>	<b>Método numérico para la aproximación de las raíces de un cuasipolinomio</b>	<b>31</b>
3.1.	Desarrollo del método numérico . . . . .	32
3.1.1.	División del contorno y evaluación del cuasipolinomio . . . . .	32
3.1.2.	Obtención de la variación del argumento . . . . .	34
3.2.	Aproximación de las raíces de un cuasipolinomio . . . . .	37
3.2.1.	Ejemplo 1 . . . . .	37
3.2.2.	Ejemplo 2 . . . . .	39
3.3.	Comentarios . . . . .	40
<b>4.</b>	<b>Sintonización de una ley de control difusa proporcional retardada</b>	<b>41</b>
4.1.	Diseño y metodología de sintonización de un controlador difuso PR . . . . .	41
4.1.1.	Diseño de un controlador difuso PR . . . . .	41
4.1.2.	Metodología de sintonización del controlador difuso PR . . . . .	43
4.2.	Implementación de la PDCR . . . . .	46
4.2.1.	Modelo matemático . . . . .	46
4.2.2.	Fusificación del carro-péndulo . . . . .	47
4.2.3.	Base de conocimiento y toma de decisiones . . . . .	47
4.2.4.	Defusificación del sistema carro-péndulo . . . . .	48
4.2.5.	Sintonización del controlador difuso PR . . . . .	48
4.2.5.1.	Controlador difuso proporcional derivativo . . . . .	51
4.3.	Resultados de simulación . . . . .	52
4.4.	Resultados experimentales . . . . .	54
4.4.1.	Experimento 1: Estabilización del prototipo péndulo invertido . . . . .	55

---

4.4.2. Experimento 2: Estabilización del prototipo péndulo invertido ante una perturbación externa . . . . .	58
4.4.2.1. Caso 1 . . . . .	58
4.4.2.2. Caso 2 . . . . .	61
4.4.3. Experimento 3 (Seguimiento de trayectoria) . . . . .	65
4.5. Comentarios . . . . .	68
<b>5. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>69</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	69
5.2. Trabajo futuro . . . . .	70
<b>Glosario</b>	<b>71</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>
<b>A. Códigos de programa empleados</b>	<b>77</b>
A.1. Código del método numérico para la obtención de las raíces de un cuasipolinomio . . . . .	77
A.2. Regiones de estabilidad . . . . .	83
A.3. Código en conjunto para sintonización de la ley de control . . . . .	88
<b>B. Diagramas a bloques de las pruebas experimentales</b>	<b>93</b>
B.1. Diagrama a bloques con el enfoque PDCR . . . . .	93
B.2. Diagrama a bloques con el enfoque PDC . . . . .	97
B.3. Diagrama a bloques de la simulación . . . . .	99
<b>C. Equipo utilizado</b>	<b>101</b>
C.1. Equipo de cómputo . . . . .	101
C.2. Tarjeta de adquisición de datos . . . . .	102
C.3. Prototipo carro-péndulo . . . . .	103
C.4. Etapa de potencia . . . . .	104
Publicaciones . . . . .	107

# Índice de figuras

1.1. Sistema masa-resorte. . . . .	5
2.1. Funciones de membresía comunes. . . . .	16
2.2. Sistema de inferencia difusa. . . . .	17
2.3. Sistema de inferencia difusa de los sistemas T-S. . . . .	18
2.4. Sectores no lineales. . . . .	22
2.5. Regiones de estabilidad. . . . .	29
3.1. Contorno cerrado D. . . . .	33
3.2. División del contorno cerrado D. . . . .	33
3.3. Contorno de Mikhailov. . . . .	34
3.4. Ángulo entre el punto inicial y el final. . . . .	34
3.5. Variación del argumento parte 1. . . . .	35
3.6. Variación del argumento parte 2. . . . .	36
3.7. Subdivisiones donde existe raíz. . . . .	36
3.8. Raíces obtenidas con método numérico. . . . .	37
3.9. Ubicación de las raíces usando MAPLE. . . . .	38
3.10. Raíces de la función usada en el segundo ejemplo . . . . .	39
4.1. Regiones $\sigma$ -estable para el subsistema difuso $i$ . . . . .	43
4.2. Ubicación de las tres raíces reales dominantes para el subsistema $i$ . . . . .	44
4.3. Metodología de sintonización del controlador difuso PR. . . . .	45
4.4. Carro-péndulo . . . . .	46
4.5. Funciones de membresía. . . . .	47
4.6. Regiones $\sigma$ -estable para el subsistema difuso 4.6. . . . .	49
4.7. Regiones $\sigma$ -estable para el subsistema difuso 4.7. . . . .	49
4.8. Intersección de las regiones estabilidad. . . . .	50
4.9. . . . .	51
4.10. Respuesta del sistema difuso (4.10). . . . .	52
4.11. Respuesta del SNL (4.5) en lazo cerrado con las leyes de control difusa PR (4.9) y difusa PD (4.11). . . . .	52

4.12. Señales de control difusa PR (4.9) y difusa PD (4.11) aplicadas al sistema no lineal (4.5). . . . .	53
4.13. Error del SNL (4.5). . . . .	54
4.14. Prototipo carro-péndulo. . . . .	54
4.15. Respuesta del prototipo carro-péndulo . . . . .	55
4.16. Error . . . . .	56
4.17. Señales de control difusas PR (4.9) y PD (4.11) . . . . .	56
4.18. Señales de control difusas PR (4.9) y PD (4.11) amplificadas . . . . .	57
4.19. Corriente suministrada al motor . . . . .	58
4.20. Perturbación 1. . . . .	59
4.21. Respuesta del sistema carro-péndulo con perturbación en el péndulo . . . . .	59
4.22. Error del sistema carro-péndulo con perturbación en el péndulo . . . . .	60
4.23. Señales de control aplicadas sistema carro-péndulo con perturbación en el péndulo. . . . .	60
4.24. Señales de control amplificadas. . . . .	61
4.25. Corriente suministrada al motor ante una perturbación. . . . .	61
4.26. Perturbación 2. . . . .	62
4.27. Respuesta del sistema carro-péndulo con perturbación en el péndulo . . . . .	62
4.28. Error del sistema. . . . .	63
4.29. Señales de control aplicadas sistema carro-péndulo con perturbación en el péndulo. . . . .	63
4.30. Señales de control posterior a la etapa de potencia, aplicadas al péndulo invertido. . . . .	64
4.31. Corriente suministrada al motor de CD. . . . .	64
4.32. Seguimiento de trayectoria del péndulo. . . . .	65
4.33. Señal de control aplicada al carro-péndulo para el seguimiento de trayectoria. . . . .	66
4.34. Señal de control amplificada, que se aplica al carro-péndulo para el seguimiento de trayectoria. . . . .	66
4.35. Error en el seguimiento de trayectoria. . . . .	67
4.36. Posición angular. . . . .	67
4.37. Señal de control difusa PR. . . . .	68
B.1. Diagrama a bloques de la experimentación empleando el control difuso PR. . . . .	93
B.2. Señal de referencia. . . . .	94
B.3. B.3a Funciones de membresía. B.3b Ley de control difusa PR. . . . .	95
B.4. Entradas y salidas analógicas para el control de la planta. . . . .	96
B.5. Diagrama a bloques de la experimentación empleando el control difuso PD. . . . .	98

---

B.6. B.6a Entradas y salidas analógicas. B.6b Ley de control difusa PD. . . . .	98
B.7. Diagrama a bloques de la simulación. . . . .	99
C.1. HP Pavilion a6200la Desktop PC. . . . .	101
C.2. Tarjeta de adquisición de datos <i>PCI</i> – 6071. . . . .	102
C.3. Prototipo carro-péndulo de QUANSER. . . . .	103
C.4. . . . .	105
C.5. Prototipo de la etapa de potencia. . . . .	106

# Índice de tablas

3.1. Ubicación de las raíces. . . . .	38
3.2. Desempeño de los métodos numéricos. . . . .	40
4.1. Error cuadrático medio. . . . .	65
B.1. Descripción del diagrama a bloques en Simulink enfoque PDCR. . . . .	97
B.2. Descripción del diagrama a bloques en Simulink enfoque PDC. . . . .	99
C.1. Descripción de las especificaciones de HP Pavilion a6200la Desktop PC	102
C.2. Parámetros y variables del sistema péndulo invertido. . . . .	104

# Acrónimos y abreviaturas

<b>Siglas</b>	<b>Descripción</b>
CD	Corriente directa.
FIS	Sistemas de inferencia difusa.
ITAE	Integral de tiempo multiplicado por el error absoluto.
LMI	Desigualdad lineal matricial.
MATLAB	Laboratorio de matrices.
PD	Control proporcional derivativo.
PDC	Compensación paralela distribuida.
PDCR	Compensación paralela distribuida retardada.
PID	Control proporcional integral y derivativo.
SISO	Sistema de una entrada y una salida.
SNL	Sistema no lineal.
volts	Unidad de medida de potencial expresada en volts

# Notación

Símbolo	Descripción
$A \triangleq B$	$A$ es por definición igual a $B$ .
$a \in A$	$a$ es un elemento de $A$ .
$A^{-1}$	Inversa de la matriz $A$ .
$A^{n \times m}$	$A$ es una matriz real de dimensión $n \times m$ .
$A \subset B$	$A$ es un subconjunto propio de $B$ .
$A \subseteq B$	$A$ es un subconjunto de $B$ .
$A^T$	$A$ transpuesta.
$\mathbb{C}$	Espacio de todos los números complejos.
$\mathbf{F}$	Campo.
$\mathbf{J}$	Conjunto de todos los números enteros positivos.
$\bar{x}$	Complejo conjugado de $x$ .
$\neq$	Desigualdad.
$A \sim B$	$A$ es equivalente a $B$ .
$\mathbb{K}$	Es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ .
$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$	Espacio con producto interno.
$(X, d)$	Espacio métrico.
$e^x$	Exponencial de $x$ .
$f : A \rightarrow B$	$f$ mapea el dominio $A$ en $B$ .
$I$	Matriz identidad.
$\mathbf{i}$	$\sqrt{-1}$ .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Producto interno.
$\cap$	Intersección.
$\mathbb{N}$	Campo de todos los números naturales.
$b \notin A$	$b$ no es un elemento de $A$ .
$\forall$	Para todo.
$A \perp B$	$A$ es perpendicular a $B$ .
$\mathbb{Q}$	Campo de todos los números racionales.
$\mathbb{R}$	Espacio de todos los números reales.
$\mathbb{R}^n$	Espacio vectorial de los reales de dimensión $n$ .

Símbolo	Descripción
$\sum$	Sumatoria.
$\oplus$	Sumatoria directa de subespacios.
$x \rightarrow x_n$	$x$ tiende a $x_n$ .
$\cup$	Unión.
$\emptyset$	Conjunto vacío.
$\hat{x}$	$x$ estimada.

# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se presentan los antecedentes del objeto de estudio, para precisar el estado del arte. También, se define el problema a resolver, indicando la justificación y planteando los objetivos, así como los límites de la investigación.

### 1.1. Antecedentes

El diseño de controladores eficientes para manipular sistemas complejos siempre ha sido un reto de investigación, sobre todo, porque el hombre crea sistemas más sofisticados con el fin de cubrir sus necesidades. Una clase de estos sistemas son los sistemas subactuados, los que se caracterizan por poseer menos actuadores que grados de libertad, además de ser no lineales. Tales sistemas, tienen cierta relación con procesos reales como el lanzamiento de una nave espacial o el control de una grúa sobre un barco entre otras tantas aplicaciones. Uno de los ejemplos académicos más conocidos es el carro-péndulo, en [44] se puede apreciar como su modelo matemático es ampliamente empleado como ejemplo ilustrativo. También en [4] se hace uso del péndulo invertido, donde se emplea una cámara como sensor y se aplica un control sub-óptimo. Es claro que la dinámica de estos sistemas, y el diseño de sus controladores no es una tarea trivial ya que es un sistema no lineal.

Dado que en el mundo real la mayoría de los sistemas son inherentemente no lineales, resulta razonable diseñar controladores no lineales [37] para tales sistemas. Sin embargo, el desarrollo de este tipo de controles requiere un esfuerzo mayor y más complejo. Existen algunos controladores lineales que pueden sólo manipular a los sistemas no lineales cerca del punto al que es linealizada la dinámica para diseñar la ley de control, sin embargo, el PID regula el 95 % de los lazos de control industriales ya sea como un bloque funcional en un controlador lógico programable (PLC) y un sistema de control distribuido (DCSs) o en toda clase de equipos de control [46].

Los modelos difusos Takagi-Sugeno (T-S) son una alternativa a este problema, ya

que su metodología permite manipular sistemas no lineales lejos del punto donde se linealiza la dinámica del sistema, usando técnicas de control lineal.

El modelo Sugeno fue propuesto por Takagi, Sugeno y Kang, en un esfuerzo para formalizar un enfoque sistemático, para generar reglas difusas a partir de un conjunto de datos de entrada y salida. Los modelos Sugeno también se les conoce como modelos T-S [33]. Por otra parte se tiene que las dinámicas locales de un sistema no lineal (SNL) pueden ser representadas con subsistemas lineales empleando los modelos T-S, lo que conduce a la posibilidad de usar algunos métodos de control lineal, tal como el controlador proporcional derivativo (PD).

Hay una gran cantidad de temas disponibles en los cuales se da un panorama sobre la sintonización de controladores PID como en [51], donde se proporcionan fórmulas conocidas como reglas de Ziegler-Nichols, las cuales permiten sintonizar al PID, ya sea de manera experimental ó calcular el valor de retardo y un rango de unidad de reacción del proceso a ser controlado. Algunos refinamientos heurísticos de las fórmulas de Ziegler-Nichols se dan en [16], que mejoran el desempeño de la autosintonización.

Una variante al control PID es controlador PD el cual para su sintonización involucra localizar la frecuencia de corte del sistema, esto cuando es sintonizado en el dominio de la frecuencia. El control PD tiene muchos usos, tales como el seguimiento de trayectoria [23] y el control de posicionamiento de un servo de CD mediante un PD auto sintonizado [36] entre otros. Como variante a la ley de control clásica PD, está el PD difuso, que se usa para controlar servo sistemas electro-hidráulicos sujetos a fricción no lineal [17], así como en la estabilización de la plataforma de un barco [21].

Aunque el control PD convencional es relativamente simple cuando se considera un sistema electromecánico, éste necesita la medición de la posición y de la velocidad del sistema de salida, para un sistema de una entrada una salida ( SISO ). En algunos sistemas la velocidad se obtiene mediante instrumentos de medición, los cuales dependiendo de la calidad de los mismos podrían ser ruidosos e incrementar en una pequeña porción el costo de fabricación del sistema. Una alternativa para adquirir conocimiento acerca de la medición de velocidad del sistema, es mediante algún algoritmo de aproximación como un observador, el cual podría dificultar en parte el procedimiento necesario de diseño para controlar el sistema. Sin embargo, existen metodologías alternas como las propuestas en [5] donde se propone una solución para el problema de regulación de robots rígidos, basados en la disponibilidad de las mediciones de posición únicamente. Un trabajo previo a la regulación de robots ya mencionado, se muestra en [31], donde se extienden resultados sobre estabilidad robusta global de controladores adaptables con ley de adaptación integral, a el caso donde el algoritmo de adaptación incluye un parámetro de mecanismo fijo. En [28] se estabiliza al sistema robótico en regulación bajo condiciones de poca o nula rigidez articular sin el empleo

de la derivada. Otra alternativa existente es precisamente el uso del filtro pasa altas, el cual se puede ver en [20] o el uso de una variante del PD convencional, como lo es el PD digital.

Los resultados mencionados anteriormente, son algunas de las alternativas que se pueden emplear cuando sólo se cuenta con la medición de la posición ó la velocidad no puede ser obtenida tan fácilmente. Un enfoque diferente es reemplazar el controlador proporcional derivativo por un controlador proporcional retardado. El tema del control PR, no es un tópico nuevo ya que éste se ha estudiado desde hace muchos años, en [41] se muestra como el controlador P, acompañado de un retardo apropiado puede desempeñar la acción derivativa promedio y de esta forma reemplazar al controlador PD convencional, en [42] se dice que el controlador PR puede ser mejor en el sentido del índice integral de tiempo multiplicado por el error absoluto (ITAE). Por lo que de acuerdo al índice ITAE que se maneja en dicho artículo, el desempeño puede no ser tan bueno en aquel sistema que emplea una acción PD convencional en comparación al PR. De igual manera en [43] se dice que el control PR en lazo cerrado con un sistema de segundo y tercer orden produce un mejor desempeño en el sentido del índice ITAE, ésto comparando el desempeño del control PR contra un control PD convencional ó contra la acción de control Posicast, nombrada de esta manera por Smith. Así, el uso del PR permite evitar estimaciones, tacómetros, filtro pasa altas o el uso de alguna técnica diferente a las ya mencionadas como algún tipo de observador, que introduzca ruido, incertidumbres, mayor complejidad de diseño entre otros factores en ciertos sistemas.

A pesar de que la implementación de algunos otros controladores convencionales, no requieren registros extra, se tiene que implementar el PR de manera continua sólo necesita un par de registros de memoria, es relativamente sencillo de programar, muestra una respuesta rápida ante cambios en la entrada, en ciertos sistemas oscilatorios, puede cancelar el efecto oscilatorio de los polos complejos. Por otra parte se tiene como inconveniente, que es insensitivo a ruidos de alta frecuencia y que cuando éste se aplica a un sistema libre de retardo, conduce a un sistema en lazo cerrado retardado.

Algunas veces se ha considerado que un retardo únicamente introduce inestabilidad o un mal desempeño en un sistema, pero en [2] y [12] se muestra que la presencia de un retardo artificialmente inducido puede contribuir a la estabilización de un sistema oscilatorio. La inclusión del PR transforma el estudio del polinomio característico de un sistema, en el estudio de un cuasipolinomio. La sintonización propuesta en [45] garantiza la estabilidad del sistema en lazo cerrado con la ley de control PR, mediante la asignación de polos del cuasipolinomio. La ubicación de las raíces dominantes en el plano complejo determinan la  $\sigma$ -estabilidad del sistema en lazo cerrado.

El PR aplicado a los sistemas T-S, origina como tal un sistema difuso con retardo. Existen algunos resultados acerca de sistemas difusos con retardos, por ejemplo en

[50] se da un enfoque para resolver el problema de estabilidad y estabilización para sistemas difusos dependientes del retardo de tiempo continuo, proponiendo el llamado enfoque de particionado del retardo, con el cual se obtienen condiciones menos conservativas a las ya existentes, por otro lado en [8] se muestran ciertas condiciones de estabilidad usando el enfoque de Lyapunov-Krasovskii. Otros resultados relevantes sobre sistemas difusos pero con retardos en la entrada se encuentran en [11] y [49], en el primero se emplea un controlador descentralizado robusto basado en el modelo difuso y en el otro los resultados se formulan en forma de desigualdades lineales matriciales (LMI's), las cuales suelen ser conservativas, todo lo anterior como ya se mencionó para verificar la estabilidad de los sistemas difusos, sin embargo aún no se han encontrado resultados relacionados al controlador difuso PR, la metodología propuesta aquí para sintonizarlo a partir de un modelo T-S y la forma de aplicarlo a una clase de SNL.

En la presente propuesta se extienden los resultados propuestos en [45] a sistemas T-S para estabilizar una clase de sistemas no lineales. La estabilización del sistema no lineal se garantiza mediante la  $\sigma$ -estabilización de su sistema T-S. La  $\sigma$ -estabilización del sistema T-S se realiza empleando controladores difusos PR y se verifica mediante un análisis numérico del lugar de las raíces de los cuasipolinomios de cada subsistema difuso en lazo cerrado con el controlador difuso PR, que conforman el modelo T-S. La sintonización del PR se realiza en el marco frecuencial, empleando el método D-particiones. El desempeño de este control se compara con un control PD clásico. El PD se sintoniza mediante el enfoque de compensación paralela distribuida.

## 1.2. Motivación

La obtención del modelo matemático de un SNL, la mayoría de las veces no es trivial. Sin embargo, los sistemas T-S permiten representar la dinámica de un SNL mediante subsistemas de carácter lineal. Esta característica de los T-S permite aplicar técnicas de control lineal para su manipulación, que en segundo plano brindan la posibilidad de controlar el SNL. El controlador difuso PD, mejor conocido como compensación paralela distribuida [44], es uno de los controladores lineales más conocidos dentro de la lógica difusa. Sin embargo requieren este tipo de controles de la implementación de tacogeneradores, filtros o estimadores para su obtener la medición de la velocidad en un sistema electromecánico. Obtener la medición de la velocidad con algunas de las técnicas mencionadas, puede incrementar el costo o dificultad de diseño del controlador, dependiendo del criterio que se emplee para obtener la velocidad.

El empleo de un controlador difuso PR en ciertos sistemas de segundo orden, puede evitar el uso de técnicas para estimar la parte derivativa y facilitar el diseño del controlador. Puesto que para su implementación sólo se necesita la salida de la planta,

su sintonización requiere de tres ecuaciones algebraicas simples y para su aplicación experimental sólo se necesita de un registro de almacenamiento de datos. Por otra parte se tiene que el uso del control PR aún no se ha implementado en sistemas difusos T-S. A continuación se presenta un pequeño ejemplo como motivación para el uso de retardos para estabilizar sistemas. Se considera el sistema masa resorte de la Figura 1.1 donde la ecuación que describe la dinámica está dada por

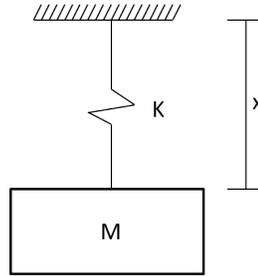


Figura 1.1: Sistema masa-resorte.

$$Mg - Kx(t) = M\ddot{x}(t), \quad (1.1)$$

así, de la ecuación (1.1) se puede obtener un modelo mas sencillo para analizar la ubicación de los polos y de esta manera verificar su estabilidad en el dominio frecuencial, además de que el sistema equivalente cuenta con la misma dinámica. Por lo que de (1.1) se obtiene el punto de equilibrio, el cual está denotado por

$$x^* = \frac{Mg}{K}, \quad (1.2)$$

posteriormente, se propone el cambio de variable siguiente

$$y(t) = x(t) - \underbrace{\frac{Mg}{K}}_{x^*},$$

además de considerar que

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t),$$

$$\ddot{y}(t) = \ddot{x}(t).$$

Al substituir la ec. (1.2) en (1.1) y reescribiendo

$$\begin{aligned} M\ddot{y}(t) &= Mg - K \left( y(t) + \frac{Mg}{K} \right), \\ \implies M\ddot{y}(t) + Ky(t) &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

se obtiene el sistema representado con (1.3), del cual se obtiene la ec. característica siguiente

$$Ms^2 + K = 0,$$

al analizar la ubicación de las raíces de la ecuación característica del sistema (1.3), se obtiene

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-K}{M}} = \pm \sqrt{\frac{K}{M}}i, \quad i^2 = -1,$$

lo que muestra que el sistema autónomo representado mediante (1.3) es estable marginalmente. Se supone ahora que el sistema anterior es un sistema no autónomo. Surge la pregunta siguiente ¿Cómo se estabiliza el sistema?. Para tratar de responder dicha pregunta, se propone la señal de control siguiente. Sea

$$u(t) = K_p y(t), \quad (1.4)$$

una ley de control proporcional (P). El sistema (1.3) en lazo cerrado con la ley de control (1.4) es

$$\begin{aligned} M\ddot{y}(t) + Ky(t) &= K_p y(t), \\ M\ddot{y}(t) + (K - K_p)y(t) &= 0, \end{aligned}$$

donde se puede determinar que las raíces de la ecuación característica del sistema anterior, se localizan en

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{K - K_p}{M}}i.$$

Se puede observar que el sistema sigue siendo marginalmente estable debido a que las raíces del polinomio característico se encuentran sobre el eje imaginario. Por otra parte si se implementa en vez de un control P, un controlador Proporcional Derivativo (PD) con la estructura

$$u(t) = K_p y(t) - K_d \dot{y}(t), \quad (1.5)$$

y se pone al sistema (1.3) en lazo cerrado con (1.5), se obtiene

$$M\ddot{y}(t) + Ky(t) - K_p y(t) + K_d \dot{y}(t) = 0,$$

de donde, se determina mediante la ecuación general, que las raíces de (1.3) en lazo cerrado con (1.5), se localizan en

$$s_{1,2} = \frac{-K_d}{2M} \pm \sqrt{\frac{K_d^2 - 4M(K - K_p)}{4M^2}}.$$

Si la parte que está dentro del discriminante cumple con la desigualdad

$$K_d^2 - 4M(K - K_p) < 0,$$

las raíces tienen una parte imaginaria, de lo contrario las raíces sólo tendrán con parte real, además de que se observa que la ubicación de los polos se encuentra en el semiplano izquierdo del plano complejo, así que el sistema es estable. Como se mostró, hay algunos sistemas que se pueden estabilizar mediante el empleo de un controlador PD, así que si un controlador P acompañado de un retardo adecuado, puede desempeñar la acción derivativa, ¿por qué emplear un controlador PD en vez de un PR?

### 1.3. Justificación

El empleo de técnicas de control lineal en sistemas de naturaleza no lineal puede producir un desempeño pobre al ser diseñadas en base al punto donde es linealizada la dinámica. Mediante el uso de modelos difusos del tipo T-S se puede implementar técnicas de control lineal clásicas como lo es el controlador difuso PD [44]. Al implementar este tipo de controladores de forma continua, se requiere de la medición de la razón de cambio de algunas variables de estado, por lo que es necesario implementar una manera de obtener tal medición, una forma de hacerlo en algunos sistemas es mediante el uso de tacogeneradores, observadores, filtros, entre otras opciones. Esto a su vez puede incrementar el costo, tanto computacional como económicos, ya que se requiere de mayor volumen físico, uso de técnicas de estimación, resolución de ecuaciones diferenciales, etc. Como alternativa a esta problemática se tiene, que se puede usar una aproximación numérica o el empleo de un controlador difuso PR aplicado a un SNL, ya que con él, se pueden eliminar ciertas dificultades que se podrían presentar al implementar una ley de control en tiempo continuo, como lo es la necesidad de tener disponible la medición de la velocidad en un sistema electromecánico con algunas técnicas de control convencional.

Otras ventajas son que el control difuso PR puede ser aplicado a cualquier SNL, del cual se pueda obtener un modelo difuso T-S, que a su vez esté conformado por subsistemas difusos de segundo orden, además de que el análisis de estabilidad en el marco frecuencial es menos conservativo, que algunos resultados existentes en donde emplean LMI's.

### 1.4. Planteamiento del problema

En esta memoria se pretende responder y aportar información acerca de cómo implementar una ley de control difusa PR en una clase de SNL, la ley de control difusa PR se diseña a partir del modelo T-S que se obtiene del SNL. Surgiendo entonces la interrogante de

¿Cómo sintonizar la ley de control difusa PR, de tal manera que  $\sigma$ -estabilice al modelo difuso T-S?

## 1.5. Propuesta de solución

Para dar respuesta al problema planteado anteriormente, se proponen las siguientes actividades como solución

- Diseñar ley de control difusa PR considerando el modelo T-S.
- Sintonizar ley de control difusa PR, esto haciendo empleo de la técnica de D-particiones.
- Análisis de estabilidad de cada subsistema difuso, mediante un método numérico, el cual se basa en el principio del argumento.
- Implementar ley de control difusa PR en SNL, tal implementación con el uso de una PC de escritorio, empleando el software de MATLAB, bajo el entorno de simulink y con ayuda del módulo de Real-Time, que trae dentro de sus librerías el software.
- Comparativa de desempeño con el enfoque de compensación paralela distribuida (PDC) , mediante simulación y de manera experimental con el prototipo péndulo invertido IP01.

## 1.6. Objetivos

Tanto el objetivo general como los objetivos específicos que se siguen para el desarrollo del presente trabajo, en donde se manejan modelos dinámicos de sistemas difusos con retardo se describen a continuación.

### 1.6.1. Objetivo general

El objetivo general de este trabajo es proponer una metodología con base en un método numérico para sintonizar un ley de control difusa PR que establezca una clase de sistemas no lineales, empleando modelos difusos T-S, la técnica de D-particiones para generar las regiones de estabilidad y el principio del argumento para la aproximación de las raíces.

### 1.6.2. Objetivos específicos

A continuación se realiza un listado de actividades que nos permiten cumplir con el objetivo general

- Construir algoritmos para la sintonización de la ley de control difusa PR mediante el uso MATLAB [45]:
  - Algoritmo para obtención de las regiones de estabilidad.
  - Método numérico para la obtención de las raíces de un cuasipolinomio.
  - Simulación de sistema no lineal(SNL).
  - Simulación de sistema difuso continuo(SCD).
- Sintonizar y simular la ley de control difuso PR para estabilizar una clase de sistemas no lineales, así como su correspondiente modelo difuso T-S, empleando los algoritmos construidos anteriormente.
- Implementar la ley de control difuso PR en un sistema no lineal subactuado, como lo es el péndulo invertido *IP01* para observar su desempeño en base a la dinámica del error, empleando la metodología y algoritmos propuestos .
- Comparar el control difuso PR con algunas técnicas de control existentes en la literatura, tales como el controlador difuso PD o compensación paralela distribuida (PDC), sintonizado empleando LMI's.

## 1.7. Hipótesis

Se asume que la ley de control difusa PR sintonizada por medio de métodos frecuenciales, a partir de un modelo difuso T-S, puede generar un mejor desempeño en base a la dinámica del error, cuando ésta se aplica a un sistema no lineal en comparación con una ley de control difusa convencional, sintonizada a partir de LMI's (Enfoque PDC).

## 1.8. Metodología

La metodología empleada para el desarrollo del presente tema de investigación, consiste en la implementación de un control difuso PR sobre una clase de SNL. La ley de control se sintoniza mediante un algoritmo basado en D-particiones el cual se describe en [45]. Debido a que la sintonización de la ley de control difusa PR hace uso del modelo difuso, genera múltiples cuasipolinomios en lazo cerrado, con los cuales

es necesario realizar un análisis de estabilidad de cada subsistema en lazo cerrado en el dominio de la frecuencia, por lo que se programa un método numérico basado en el principio del argumento [26]. Este análisis frecuencial permite visualizar las raíces dominantes del cuasipolinomio de cada subsistema difuso en lazo cerrado y así verificar la estabilidad del SNL y del sistema T-S. La ley de control difusa sintonizada a partir del modelo difuso se implementa en una simulación con el SNL. La simulación se realiza empleando el entorno de simulink dentro del software Matlab [38], con el fin de realizar una comparación entre el control difuso PR y el enfoque PDC [44]. Finalmente los resultados teóricos se implementan en la plataforma académica experimental péndulo invertido IP01 para verificar el desempeño del mismo [1].

## 1.9. Contribución de la tesis

La aportación de la presente memoria, se indica mediante los puntos siguientes

- El desarrollo de un método numérico para la aproximación de las raíces de un cuasipolinomio o función trascendental en una región dada.
- Diseño del controlador difuso PR mediante el enfoque PDCR, como una extensión al enfoque PDC.
- Una metodología para sintonizar un control difuso PR en un marco frecuencial, mediante el empleo del método de D-particiones.
- $\sigma$ -estabilidad del modelo difuso T-S en lazo cerrado con el control difuso PR, que se obtiene a partir de cierto SNL.
- Controlar cualquier SNL, que pueda ser representado mediante subsistemas difusos de segundo orden sin retardo.
- Comparación de desempeño de acuerdo a la dinámica del error entre los controladores difusos PD y PR, en simulación y de forma experimental.
- Reemplazo del control difuso PD convencional, por el controlador difuso PR.

## 1.10. Organización de la tesis

Este escrito se organiza de la forma siguiente: la descripción del sistema y los resultados preliminares se presentan en el Capítulo 2. En el Capítulo 3, se desarrolla un método numérico para determinar la ubicación de las raíces de un cuasipolinomio en el marco frecuencial. En el Capítulo 4, el diseño y la sintonización del controlador

difuso PR se proponen y los resultados de simulación que destacan el desempeño del criterio propuesto se muestran. Finalmente en el Capítulo 5, donde se dan algunos comentarios y se plantean una serie de trabajos a futuro para el desarrollo y mejora del presente trabajo.

# Capítulo 2

## Antecedentes principales

En el presente capítulo se hace una recapitulación de algunos resultados teóricos acerca de lógica difusa, sistemas con retardo y sistemas T-S con retardos, ya que son la base del trabajo de investigación presente.

### 2.1. Lógica difusa, modelos Mandani y T-S

La teoría desarrollada para el control de procesos, desde el punto de vista clásico y moderno, tiene su base esencial en el conocimiento de la dinámica del proceso que se desea controlar. Esta dinámica normalmente se expresa haciendo uso de ecuaciones diferenciales ordinarias o mediante su función de transferencia.

El control inteligente es una generalización del concepto de control y se puede ver como un campo dentro de la disciplina del control. El control inteligente es la disciplina donde los métodos de control se desarrollan para emular algunas características importantes del ser humano. Estas características incluyen adaptación, aprendizaje, planeación bajo incertidumbre y trabajo con gran cantidad de datos.

Las metodologías de control inteligente están siendo aplicadas a la robótica, las comunicaciones, la manufactura, el control de tráfico, por mencionar algunas áreas. El término de control inteligente se utiliza para describir a las técnicas originadas del campo de la inteligencia artificial (AI), algunas de estas técnicas son:

- Control difuso
- Redes neuronales
- Algoritmos genéticos
- Sistemas de planeación
- Sistemas expertos

- Sistemas híbridos (combinación de más de una de las técnicas anteriores)

Siendo de nuestro interés, de las técnicas mencionadas anteriormente, la lógica difusa. Con la lógica difusa podemos obtener sistemas de control difuso, éste es un ejemplo de la representación del conocimiento humano basado en reglas y de su correspondiente proceso deductivo. La lógica difusa nos brinda la posibilidad de aplicar técnicas de control lineal a un SNL, ya que las bases de reglas que se forman con ella, nos permite representar las dinámicas locales mediante sistemas lineales y de esta manera poder implementar, como ya se mencionó, técnicas de control lineal, más específicamente para el caso de desarrollo de este trabajo el controlador PR.

### 2.1.1. Lógica difusa

La lógica difusa fue investigada, por primera vez, a mediados de los años sesenta en la Universidad de Berkeley, California, por el ingeniero Lotfy A. Zadeh [33]. Zadeh publicó su famoso ensayo “Fuzzy Sets” en “Informations and Control” en 1965 y más tarde “Fuzzy algorithm” en la misma revista en 1968.

La lógica difusa permite representar el conocimiento común, que es mayoritariamente del tipo lingüístico cualitativo y no necesariamente cuantitativo, en un lenguaje matemático a través de la teoría de conjuntos difusos y funciones características asociadas a ellos. Así pues, las características más atractivas de la lógica difusa son su flexibilidad, su tolerancia con la imprecisión, su capacidad para modelar problemas no lineales, y su base en el lenguaje natural.

Aunque la lógica difusa es conocida con este nombre desde que Zadeh la bautizó así en 1965, la idea que se esconde tras ella y sus orígenes se remontan hasta 2.500 años atrás. Los filósofos griegos, Aristóteles entre ellos, consideraban que existían ciertos grados de veracidad y falsedad; y Platón ya trabajó con grados de pertenencia.

Además de las contribuciones del propio Zadeh, otros autores como Bellman, Lakoff, Goguen, Kohout, Smith, Sugeno, Chang, Dunn, Bezdek, Negoita, Mizumoto, Tanaka, Kandel, Zimmermann, entre otros, hicieron aportaciones al desarrollo de las bases de esta teoría. Durante esta primera década, gran parte de estructuras lógicas y matemáticas son generalizadas en términos de lógica difusa: relaciones lógicas, funciones, grupos, operaciones, operadores, algoritmos, entre otros.

Un hecho importante en el desarrollo de la lógica difusa fue establecido por Assilian y Mamdani en 1974 en el Reino Unido al desarrollar el primer controlador difuso diseñado para una máquina de vapor, pero la primera implantación real de un controlador de este tipo fue realizada en 1980 por F.L. Smidth Co, en una planta cementera en Dinamarca. En 1983 Fuji aplica la lógica difusa para el control de inyección química en plantas depuradoras de agua por primera vez en Japón y en 1987 Hitachi pone en marcha un controlador difuso para el control del tren-metro de Sendai, y la empresa Omron desarrolla los primeros controladores difusos comerciales.

En realidad, la intención original del profesor Zadeh era crear un formalismo para manipular el éxito de la lógica difusa que llegase a el campo del control automático de procesos, que se debió básicamente al éxito que la lógica difusa causó en Japón, iniciado en 1987 y que alcanzó su máximo apogeo a principios de los noventa. Desde entonces, han sido ininidad los productos lanzados al mercado que usan tecnología difusa, muchos de ellos utilizando la etiqueta fuzzy como símbolo de calidad y prestaciones avanzadas. El control difuso ha sido aplicado con éxito en muy diversas ramas tecnológicas, por ejemplo la metalurgia, robots para la fabricación, controles de maniobras de aviones, sensores de imagen y sonido, sistemas de frenado ABS (Mazda y Nissan), cambio automático de Renault entre otras.

Estas son algunas de las muchísimas aplicaciones de la lógica difusa, que ya están funcionando en el campo de los llamados sistemas expertos. Todos estos sistemas utilizan información, esencialmente imprecisa con el fin de lograr sus cometidos.

#### 2.1.1.1. Conjuntos difusos

Un conjunto difuso  $A$  definido en  $U$  se define como un conjunto de pares ordenados elemento-grado de membresía tal que el elemento  $x$  pertenece al universo  $U$  y el grado de membresía pertenece al intervalo cerrado  $[0, 1]$ , donde  $\mu_A(x)$  es llamado el grado de membresía del elemento  $x$  y está dado por la función de membresía  $\mu_A$ .

$$A \equiv \{ \langle x, \mu_A(x) \rangle \mid x \in U, \mu_A(x) \in [0, 1] \}. \quad (2.1)$$

La función de membresía relaciona a cada  $x$  un grado de membresía  $\mu_A(x)$ . Un par ordenado  $\langle x, y \rangle$  es una lista de objetos en el cual el orden es importante. Un conjunto difuso es caracterizado por su función de membresía.

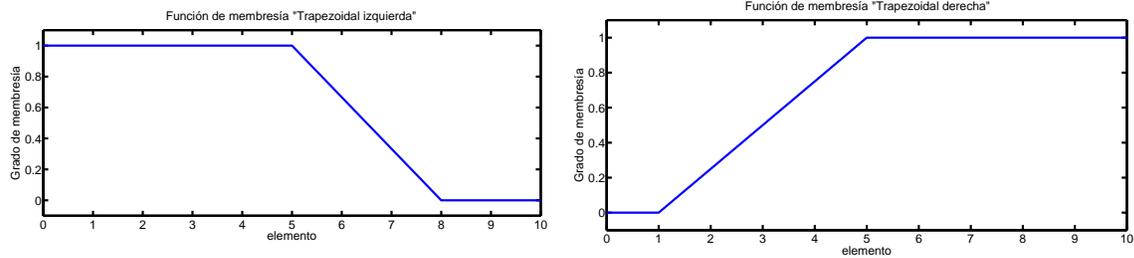
*NOTA:* Los miembros de un conjunto difuso son tomados de un *universo de discurso o conjunto universal*  $U$  (universo para simplificar). El universo consiste de todos los objetos que pueden ser tomados en consideración. El universo depende del contexto.

#### 2.1.1.2. Funciones de membresía

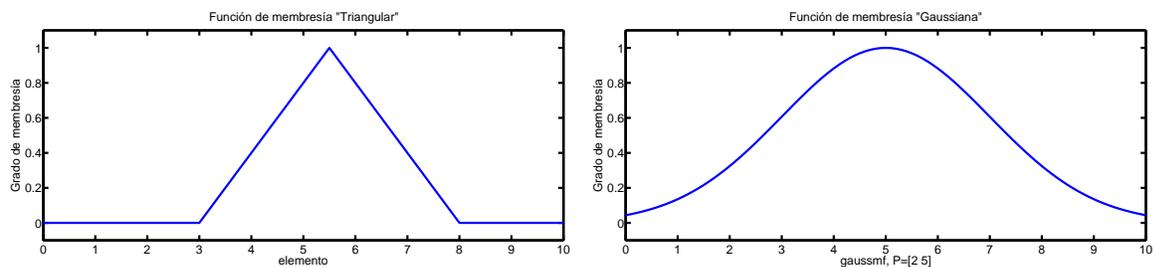
Existen muchas formas para las funciones de membresía, entre las más usuales se encuentran las funciones de membresía siguientes

- Triangulares
- Trapezoidales
- Gaussianas

las cuales se pueden ver ilustradas en la Figura 2.1.



(a) Función de membresía trapezoidal izquierda. (b) Función de membresía trapezoidal derecha.



(c) Función de membresía triangular.

(d) Función de membresía gaussiana.

Figura 2.1: Funciones de membresía comunes.

### 2.1.1.3. Beneficios de los controladores difusos

Entre las limitaciones de los controladores convencionales se destacan los siguientes:

**No linealidades de la planta** Los modelos lineales del proceso bajo control son muy restrictivos, ya que solo describen el comportamiento del sistema en una región cercana al punto de linealización. Además de esto, los modelos no lineales involucran problemas de estabilidad complejos, lo cual también puede ser resuelto mediante el uso de un PID.

**Incertidumbre en la planta** Una planta no tiene un modelo exacto debido a las incertidumbres en los parámetros del modelo.

**Comportamiento temporal** Los parámetros de la planta varían con el tiempo, además de que los retardos del sistema son difíciles de modelar.

Algunos de los beneficios de los controladores difusos son los siguientes

- Los controladores difusos son más robustos que los controladores PID tradicionales, ya que pueden cubrir un rango de condiciones de operación más amplio que el PID convencional, y pueden operar con ruidos y perturbaciones de diferente naturaleza, al igual que lo hace un PID adaptable.

- Los controladores difusos son personalizables, puesto que es fácil entender y modificar sus reglas.
- Es relativamente fácil aprender cómo los controladores difusos operan al igual que una técnica de control clásica como lo es el PID convencional, cómo diseñarlos y aplicarlos a una aplicación en concreto.

#### 2.1.1.4. Sistemas de inferencia difusa (FIS)

También conocidos como sistemas basados en reglas difusas [33], modelos difusos, sistemas expertos difusos y memoria asociativa difusa. Los FIS formulan reglas adecuadas y la decisión la determinan en base a cada regla.

Tales sistemas consisten de una interfaz de fusificación, base de reglas, base de datos, unidad de toma de decisiones y finalmente de una interfaz de defusificación. Estos sistemas se describen en la Figura 2.2, las cuales consta de 5 bloques. Siendo la función de cada bloque de la siguiente forma

1. *Base de reglas.* Contiene un número de reglas difusas **IF-THEN**.
2. *Base de datos.* Define la función de membresía de los conjuntos difusos que se usan en las reglas difusas.
3. *Unidad de toma de decisiones.* Desempeña las operaciones de inferencia sobre las reglas.
4. *Interfaz de fusificación* Transforma las entradas en grados que coinciden con valores lingüísticos.
5. *Interfaz de defusificación.* Transforma el resultado difuso de la inferencia a una salida nítida.

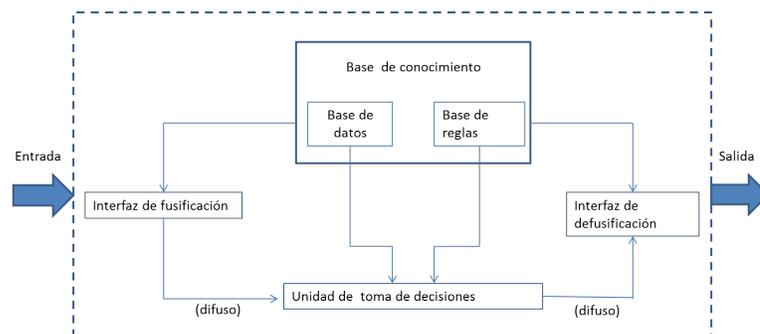


Figura 2.2: Sistema de inferencia difusa.

Establecida como se realiza la inferencia difusa, se tiene que los dos tipos de inferencia difusa más importantes dentro de la lógica difusa son por un lado la inferencia difusa tipo Mandani, que es el método de inferencia más comúnmente visto en la literatura que trata temas acerca de lógica difusa, el cual fue introducido por Mandani y Assilian (1975) y por otra parte se encuentra la inferencia tipo T-S, la cual fue introducida por Sugeno (1985), que es la que empleará en este trabajo, la Figura 2.3 muestra el sistema de inferencia para los sistemas T-S. La principal diferencia entre estos dos tipos de métodos, yace en el consecuente de las reglas difusas. Los sistemas difusos tipo Mandani usan un conjunto difuso como consecuente mientras que los sistemas T-S emplean funciones lineales dependientes de las variables de entrada como regla consecuente. En lo sucesivo se definen ambos tipos de inferencias difusas.

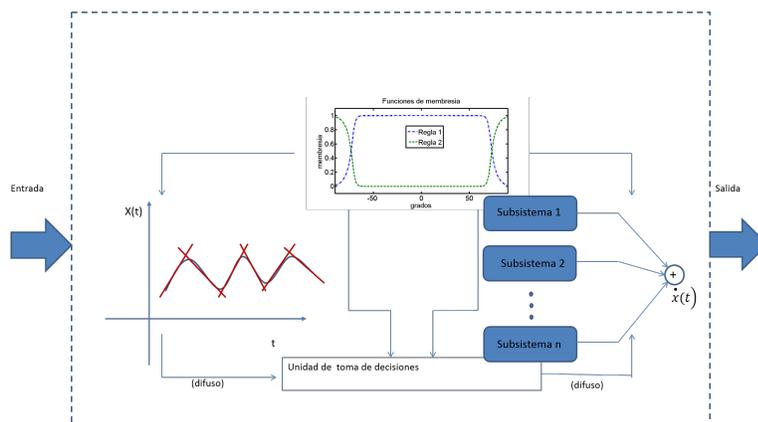


Figura 2.3: Sistema de inferencia difusa de los sistemas T-S.

### 2.1.2. Inferencia difusa tipo Mandani

Este método de inferencia lo propuso Mandani en un intento para controlar una combinación de una máquina de vapor y un calentador, sintetizando un conjunto de reglas lingüísticas que son obtenidas a partir de la experiencia del operador humano. El esfuerzo de Mandani se basó en el artículo de Zadeh, sobre algoritmos para sistemas complejos y procesos de decisión. La inferencia tipo Mandani espera como función de membresía de salida sea un conjunto difuso. Después del proceso de agregación, existe un conjunto difuso para cada variable de salida que necesita defusificación. Para calcular la salida de este tipo de inferencia difusa cuando una entrada se da, se siguen los pasos siguientes:

- Se determina el conjunto de reglas difusas.
- Se fusifica la entrada, empleando las funciones de membresía.

- Se combinan las entradas fusificadas de acuerdo a las reglas difusas para establecer una regla.
- Se encuentra el consecuente de la regla difusa mediante la combinación de la regla y la función de membresía de salida.
- Se combinan los consecuentes para obtener una distribución de salida.
- Se defusifica la distribución de salida.

### 2.1.3. Inferencia difusa tipo T-S

Consideramos el sistema con dinámica de una entrada una salida (SISO) de  $n$ -ésimo orden con  $n \geq 2$  de la forma siguiente

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \\ y(t) = g(x(t), u(t)), \end{cases} \quad (2.2)$$

donde,  $x(t) = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}$  es la entrada de control,  $y(t) \in \mathbb{R}$  es la salida del sistema,  $f(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas.

Posteriormente, se continúa con la fusificación y los métodos de razonamiento difuso sugeridos por Takagi y Sugeno para obtener un modelo difuso del sistema (2.2). El modelo difuso T-S se describe a través de reglas difusas del tipo Si-Entonces, las cuales representan las relaciones locales lineales entrada-salida de un sistema no lineal. La característica principal de los modelos difusos T-S es expresar las dinámicas locales de cada implicación difusa (regla) por un modelo lineal. De esta manera el modelo difuso completo se alcanza mediante una mezcla de los modelos de sistemas lineales [44]. La  $i$ -ésima regla del modelo difuso es de la forma siguiente

**Regla modelo  $i$ :**

$$\begin{array}{l} \text{SI } z_1(t) \text{ está en } M_{i1} \text{ y } \dots, \text{ y } z_p(t) \text{ está en } M_{ip}, \\ \text{ENTONCES } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t). \end{cases} \end{array}$$

Aquí,  $M_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  es el conjunto difuso y  $r$  es el número de reglas;  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entrada,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  es el vector de salida,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ;  $z_1(t), \dots, z_p(t) \in \mathbb{R}$  son variables premisas conocidas, que pueden estar en función de las variables de estado, perturbaciones externas, y/o del tiempo.  $\mathbf{z}(t)$  se usa para describir al vector que

contiene todos los elementos individuales  $z_1(t), \dots, z_p(t)$ . Dado un par  $(x(t), u(t))$ . Así, el sistema difuso correspondiente al sistema no lineal (2.2) se infiere como sigue

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t), \end{cases} \quad (2.3)$$

donde  $z(t) = [z_1(t) \cdots z_p(t)]^T$ ,  $w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t))$  y  $h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$ , para toda  $t$ . El término  $M_{ij}(z_j(t))$  es el grado de membresía  $z_j(t)$  en  $M_{ij}$ . Ya que  $\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0$ ,  $w_i(z(t)) \geq 0$  tenemos  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$ ,  $h_i(z(t)) \geq 0$ . Bajo el enfoque de diseño de control para los sistemas difusos T-S uno de los procesos más conocidos es la compensación paralela distribuida (PDC). En el diseño con la PDC, cada regla de control se diseña a partir de la regla modelo de un sistema difuso T-S. El controlador difuso diseñado comparte los mismos conjuntos difusos con el modelo difuso en la parte de las premisas [44]. Así, el controlador difuso mediante PDC es

**Regla Control i:**

**SI**  $z_1(t)$  está en  $M_{i1}$  y ... y  $z_p(t)$  está en  $M_{ip}$ ,  
**ENTONCES**  $u(t) = -F_i x(t)$ ,

con  $F_i^T = [f_{i1}, \dots, f_{in}]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ . Las reglas difusas anteriores infieren un controlador lineal de la forma

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t). \quad (2.4)$$

El enfoque PDC da un procedimiento simple y natural para determinar las ganancias de retroalimentación local  $F_i$ . Estas ganancias y la estabilidad se determinan con el resultado siguiente.

**Teorema 1** [44] *El equilibrio de un sistema de control difuso continuo descrito por (2.3) es globalmente estable asintóticamente si existe una matriz definida positiva común  $P$  tal que*

$$\begin{aligned} G_{ii}^T P + P G_{ii} &< 0, \\ \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) &\leq 0, \\ i < j \text{ s.t. } h_i \cap h_j &\neq \phi, \end{aligned}$$

donde  $G_{ij} = A_i - B_i F_j$ .

Cabe mencionar que dentro de los sistemas T-S, existen dos enfoques para la construcción del modelo difuso:

- Identificación del modelo difuso, utilizando datos de entrada y salida.
- Derivación del modelo difuso a partir de las ecuaciones de un SNL dado.

Para el desarrollo de este tema, se emplea el enfoque de derivación del modelo difuso a partir de las ecuaciones de un SNL dado. La derivación del modelo a partir del modelo del SNL se puede realizar mediante dos ideas o metodologías. La primera idea es mediante el *Sector No Lineal* y la segunda es con una *Aproximación Local* o inclusive puede utilizarse una combinación de ambas, en lo posterior se describen ambas técnicas, siendo la *Aproximación local* la de mayor importancia para nosotros ya que es la empleada en secciones posteriores.

#### 2.1.3.1. Sector no lineal

El sector no lineal se basa en la siguiente idea. Se considera un SNL  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ , donde  $f(0) = 0$ . El objetivo es encontrar un sector global tal que  $\dot{x}(t) = f(x(t)) \in [a_1 \ a_2]x(t)$ . La Figura 2.4a muestra el enfoque del sector no lineal. Este enfoque garantiza una construcción exacta del modelo difuso. Sin embargo, algunas veces es difícil encontrar un sector global para un SNL. Para tal caso se considera un sector no lineal local. La Figura 2.4b muestra el sector no lineal local, donde las dos líneas llegan a ser los sectores locales bajo  $-d < x(t) < d$ . El modelo difuso representa exactamente el SNL en la región local, que es,  $-d < x(t) < d$ .

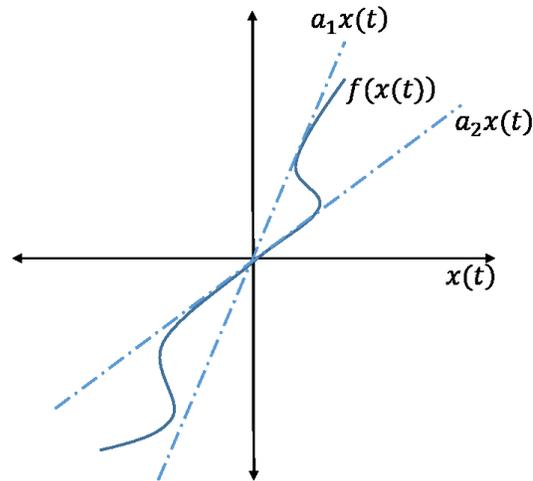
#### 2.1.3.2. Aproximación local

Otro enfoque para obtener modelos difusos T-S, es la llamada aproximación local. La esencia de este enfoque es aproximar términos no lineales escogiendo a juicio del experto términos lineales. Este procedimiento conlleva a la reducción en el número de reglas modelo. El número de reglas modelo está directamente relacionado con la complejidad de análisis.

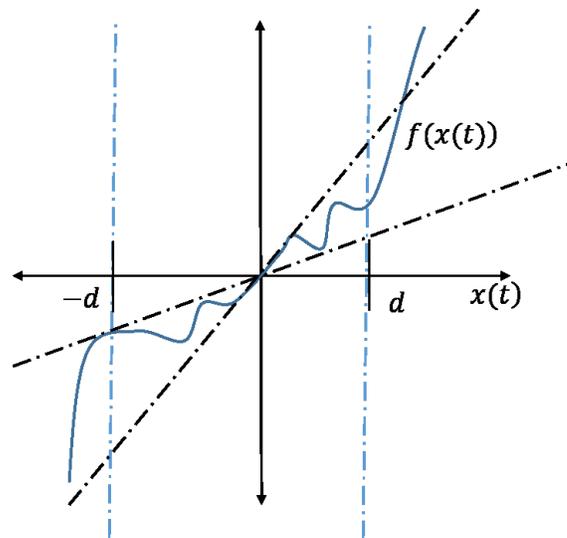
#### 2.1.4. Ventajas de los métodos Mandani y T-S

##### Ventajas del método Mandani.

- Es intuitivo.
- Tiene una amplia aceptación.
- Es muy adecuado para la intervención humana.



(a) Sector no lineal global.



(b) Sector no lineal local.

Figura 2.4: Sectores no lineales.

### Ventajas del método T-S.

- Es computacionalmente eficiente.
- Trabajan bien con técnicas lineales.
- Trabajan bien con técnicas de optimización y adaptación.
- Garantiza la continuidad de la superficie de salida.

- Es adecuado para análisis matemático.

La inferencia difusa es la más importante herramienta basada en la teoría de conjuntos difusos.

## 2.2. Sistemas con retardo

Muchos sistemas dinámicos no pueden ser satisfactoriamente modelados mediante ecuaciones diferenciales ordinarias, debido a que la evolución de las variables de estado  $x(t)$  no dependen únicamente del valor actual de  $x(t_0)$ , si no que además dependen de sus valores pasados, es decir  $x(\xi)$ ,  $t_0 - r \leq \xi \leq t_0$ . Estos sistemas son nombrados sistemas con retardos, los cuales pueden surgir en la práctica por una gran variedad de razones, como lo es que la mayoría de las reacciones de los sistemas reales sujetos a acciones externas, no suceden de forma instantánea, principalmente debido al fenómeno de transporte y propagación. Un ejemplo para ilustrar lo que es un sistema con retardo se puede ver de una manera más clara en una máquina de combustión interna en donde el par de torsión generado por el motor es retrasado por los retardos del ciclo OTTO (mezcla de aire, ignición, presurización del cilindro).

### 2.2.1. Sistemas con retardos del tipo retardado

Considere el sistema lineal invariante en el tiempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - \tau); \\ x(\theta) = \psi(\theta); \quad \theta \in [-h, 0], \end{cases} \quad (2.5)$$

donde  $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices constantes,  $\tau \in \mathbb{R}^+$  es un retardo y  $\psi \in \mathfrak{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$  es la condición inicial del sistema (2.5), donde  $\mathfrak{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$  es el espacio de Banach de las funciones reales y continuas definidas en el intervalo  $[-\tau, 0]$  con norma

$$\|\psi\|_\tau := \max_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\psi(\theta)\|.$$

Aquí  $\|\cdot\|$  denota la norma en el espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Para cada condición inicial  $\psi \in \mathfrak{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$  y  $t \geq 0$  existe una única solución o trayectoria  $x(t; \psi)$  del sistema (2.5), que satisface la condición inicial

$$x(\theta; \psi) = \psi(\theta); \quad \theta \in [-\tau, 0].$$

Como extensión natural de la condición inicial, para cada  $t \geq 0$  el segmento

$$x_t(\psi) := x(t + \theta; \psi); \quad \theta \in [-\tau, 0],$$

es llamado estado del sistema (2.5).

En la mayoría de los casos, al denotar la trayectoria o el estado de un sistema se omite la escritura de la condición inicial  $\psi$ . Solo se hace mención cuando el caso lo amerita. Por ejemplo, cuando es necesario diferenciar las soluciones de un sistema con respecto a su condición inicial.

En [15] se demuestra que para cada condición inicial  $\psi$  la existencia y unicidad de las soluciones del sistema (2.5) están garantizadas.

**Definición 1** *Sea  $\sigma$  una constante positiva dada. Se dice que el sistema (2.5) es  $\sigma$ -estable si todos las raíces de su cuasipolinomio característico tiene parte real menor o igual a  $-\sigma$  es decir:*

$$\alpha_0 \leq -\sigma, \quad \sigma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\},$$

donde  $\alpha_0 = \max_{j=1, \dots, \infty} \{ \operatorname{Re}\{s_j\} : p(s_j) = 0; s_j \in \mathbb{C} \}$ ,  $p(s_j) = \det(sI_n - A_0 - A_1 e^{-s\tau})$  es el cuasipolinomio característico de (2.5),  $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz identidad.

### 2.2.2. Espectro

La substitución de una muestra de solución de la forma  $e^{\lambda t}v$ , con  $v \in \mathbb{C}^{n \times 1} \setminus \{0\}$ , nos conduce a la ecuación característica de (2.5),

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \tag{2.6}$$

donde

$$\Delta(\lambda) := \lambda I - A_0 - \sum_{i=1}^m A_i e^{-\lambda \tau_i}, \tag{2.7}$$

es la matriz característica. El lado derecho de la ec.(2.7) se le llama función característica. Las raíces de (2.6) son llamadas raíces características de (2.5). El espectro del operador lineal  $A, T(t)$ , de tal manera que  $A$  es un generador infinitesimal de  $T(t)$ , y las raíces características se encuentran relacionadas de la siguiente manera. Las raíces características son los valores propios del operador  $A$ , el cual sólo caracteriza un punto del espectro, que es  $\sigma(A) = P\sigma(A)$ . Además, la multiplicidad algebraica de un número complejo  $\lambda$  como un valor propio de  $A$  es igual a su multiplicidad como un cero de la matriz característica  $\Delta(\lambda)$ , mientras su multiplicidad geométrica es igual a la dimensión del espacio nulo de  $\Delta(\lambda)$ . Un valor propio de  $A$  se le llama simple si su multiplicidad algebraica es igual a uno, y múltiple de otra forma. En el caso de ser múltiple, se hace una distinción entre el valor propio semisimple y no simple, dependiendo de la relación entre la algebraica y geométrica multiplicidad: un valor propio semisimple corresponde a el caso donde ambas multiplicidades son iguales. Para  $\lambda \in \sigma(A)$ , las correspondientes eigenfunciones toman la forma

$$v e^{\lambda \theta} \in [-\tau_m, 0], \tag{2.8}$$

donde  $v \in C^n \setminus \{0\}$  satisface

$$\Delta(\lambda)v = 0, \quad (2.9)$$

A veces al vector  $v$  se le llama vector derecho asociado a la raíz característica  $\lambda$ . Por similitud se puede construir el vector izquierdo  $w$ , el cual satisface  $w \neq 0, w^* \Delta(\lambda) = 0$ , y está relacionado con la eigenfunción de la adjunta de  $A$ . Así la función característica de la forma (2.7) se le conoce como cuasipolinomio, el cual satisface el teorema siguiente

**Teorema 2** [32] *La ecuación*

$$L(g) = a_0 g'(t) + b_0 g(t) + b_1 g(t - w) = 0,$$

se satisface por

$$\sum p_r(t) e^{s_r t},$$

donde,  $s_r$  es cualquier secuencia de raíces características de  $L$ ,  $p_r(t)$  es un polinomio de grado menor que la multiplicidad de  $s_r$ , y la sumatoria es ambas, ya sea finita o infinita con condiciones adecuadas que aseguren convergencia.

Una vez obtenido el espectro del sistema retardado, se puede emplear el siguiente teorema, para determinar el número de raíces que posee dentro de una región deseada.

**Teorema 3** [26] *Cuando la variable  $\lambda$  varía una vez en sentido opuesto a las manecillas del reloj, alrededor de una curva cerrada  $C$ ,  $\arg f(\lambda)$  cambia exactamente  $2\pi N$ , donde  $N$  es el número de raíces de la ecuación  $f(\lambda) = 0$  que se encuentran dentro de la región cerrada  $C$ .*

Para el desarrollo del presente trabajo se emplea la ley de control difusa PR, por lo que se resume previamente el método de particiones, que se emplea para sintonizar la ley de control PR.

### 2.2.3. D-particiones

Este método fue propuesto por Neimark para cuasipolinomios a finales de 1940. Consiste en calcular una descomposición particular del espacio de parámetros en regiones en las que el número de raíces características inestables es invariante con respecto a todos los puntos del espacio de partición dentro de una región. Para cada punto de la frontera, la ecuación característica correspondiente tiene al menos una raíz sobre el eje imaginario. Con el propósito de describir el algoritmo, algunas suposiciones suplementarias son necesarias. Más precisamente, se asume que los retardos  $\tau_i, i = 1, \dots, m$ , son fijos. Así el algoritmo D-particiones se resume de la forma siguiente:

- Primero, se resuelve la ec. (2.6) para  $\lambda$  como una función de  $j\omega$  (incluyendo el origen del plano complejo), con el fin de encontrar (cruce de estabilidad) superficies en el parámetro de espacio  $\mathbb{R}^n$ , tal que para cada  $\lambda$  de la superficie, existe al menos una raíz característica sobre el eje imaginario.
- Segundo, estas superficies dividen el espacio de parámetros en varias regiones y en algunas es posible concluir que la estabilidad se encuentra garantizada empleando argumentos adicionales apropiados. Como argumento adicional, podemos encontrar, por ejemplo, un punto particular (en alguno de los ejes del espacio de parámetros) para los cuales el análisis de estabilidad llega a ser más fácil de desempeñar. Cada región derivada de esta manera se caracteriza por el mismo número de raíces características estrictamente inestables para todos los puntos del dominio correspondiente. A tal número se le llama grado de inestabilidad del dominio o de la región.

Para sistemas de mayor orden incluyendo un gran número de parámetros, el método pierde eficiencia. Tal método se resume para dar una idea intuitiva acerca de la manera en que se generan las regiones de estabilidad y dar lugar a la sintonización del controlador PR, el cual se presenta en la sección siguiente.

#### 2.2.4. Sintonización de un controlador PR

Algunos resultados previos dados en [45] son necesarios para el desarrollo de este trabajo. El siguiente lema presenta la asignación analítica de 3 raíces dominantes en  $-\sigma^*$  cuando  $k_p$  es dada. También se proporcionan fórmulas para la ganancia  $k_r^*$  correspondiente y el valor del retardo  $\tau^*$  que hacen  $\sigma$ -estable al sistema general de segundo orden siguiente

$$\ddot{\theta}(t) + 2\delta\nu\dot{\theta}(t) + \nu^2\theta(t) = bu(t), \quad (2.10)$$

donde,  $\nu > 0$  es la frecuencia amortiguada,  $\delta > 0$  es el factor de amortiguamiento y  $b > 0$  es la ganancia de entrada. Se considera que el controlador PR es

$$u(t) = -k_p\theta(t) + k_r\theta(t - \tau). \quad (2.11)$$

**Lema 1** [45] *Sea la ganancia proporcional del controlador  $k_p > \frac{-\nu^2(1-\delta^2)}{b}$  dada. Entonces el sistema en lazo cerrado (2.10,2.11) tiene 3 raíces dominantes en  $-\sigma^*$ , cuando*

$$\sigma^* = \delta\nu + \sqrt{\nu^2(1 - \delta^2) + bk_p}.$$

Por otra parte, los valores de la ganancia retardada  $k_r^*$  y el retardo  $\tau^*$  que estabiliza al sistema (2.10, 2.11) con un decaimiento exponencial  $\sigma^*$  son

$$\begin{aligned}\tau^* &= \frac{1}{\sqrt{\nu^2(1 - \delta^2) + bk_p}}, \\ k_r^* &= \frac{2(\sigma^* - \delta\nu)}{b\tau^*e^{\sigma^*\tau^*}}.\end{aligned}$$

El siguiente corolario es una extensión al lema citado anteriormente, para el caso particular de sistemas de la forma

$$\ddot{\theta}(t) - \nu^2\theta(t) = -bu(t), \quad (2.12)$$

que poseé la representación de espacio de estado siguiente

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \nu^2 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix} u(t), \\ y(t) = x_1, \end{cases} \quad (2.13)$$

donde,  $x(t) = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$  es el vector de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}$  es la entrada de control,  $y(t) \in \mathbb{R}$  es la salida del sistema,  $\nu > 0$  es el factor de amortiguamiento y  $b > 0$  es la ganancia de entrada. Además la ley de control PR es de la forma (2.11) donde  $k_p, k_r \in \mathbb{R}$  y  $\tau > 0$  son la ganancia proporcional, la ganancia retardada y el retardo respectivamente. Una manera de sintonizar el PR como se ha visto en [45] es mediante las gráficas de estabilidad para sistemas de segundo orden con retardo. Esas gráficas se obtienen con la ayuda de algunas ecuaciones paramétricas para  $k_r, \tau$  y para diferentes valores de  $\sigma$ . Aquí el resultado siguiente permite sintonizar los parámetros de la ley de control (2.11) que  $\sigma$ -estabiliza al sistema (2.12).

**Corolario 1** Sea  $k_p < -\frac{\nu^2}{b}$  la ganancia proporcional del controlador dada. El sistema en lazo cerrado (2.12, 2.11) tiene tres raíces reales dominantes sobre la abscisa  $-\sigma^*$ , donde el máximo alcanzable es

$$\sigma^* = \sqrt{-\nu^2 - bk_p}, \quad (2.14)$$

Por otra parte, los valores de la ganancia retardada  $k_r^*$  y el retardo  $\tau^*$  que  $\sigma$ -estabilizan el sistema (2.12, 2.11) con un decaimiento exponencial máximo alcanzable  $\sigma^*$  son

$$\tau^* = \frac{1}{\sqrt{-\nu^2 - bk_p}}, \quad (2.15)$$

$$k_r^* = \frac{-2\sigma^*}{\tau^*be^{\sigma^*\tau^*}}. \quad (2.16)$$

Una alternativa para sintonizar la asignación de las tres raíces reales dominantes es fijar, a priori, cierta  $\sigma$ -estabilidad. Así, a partir de una  $\sigma$  establecida, se obtienen las ganancias  $k_p, k_r$  y  $\tau$ .

**Corolario 2** *Sea  $\sigma > 0$ . Entonces, las ganancias de la ley de control (2.11) que  $\sigma$ -estabiliza el sistema (2.12) con las raíces reales triples dominantes en  $\sigma$  están dadas por*

$$\bar{k}_p = \frac{-\sigma^2 - \nu^2}{b}, \quad \bar{k}_r = \frac{-2\sigma^2}{b\sigma}, \quad \bar{\tau} = \frac{1}{\sigma}.$$

Una alternativa a la sintonización analítica, es mediante gráficas descritas a continuación.

#### 2.2.4.1. Regiones de estabilidad

El uso de regiones de estabilidad es un método gráfico desarrollado en [45], para la sintonización del controlador proporcional retardado dada una ganancia  $k_p$  fija. Así, se considera un sistema de segundo orden de la forma (2.10), donde  $\theta$  la posición del sistema,  $\nu > 0$  es la frecuencia amortiguada y  $b > 0$  es la ganancia de entrada. El sistema (2.10) aunque simple, puede considerarse como una elección para ciertos procesos físicos. La sustitución de la ley de control proporcional retardada (2.11) en el sistema (2.10) conduce al cuasipolinomio característico en lazo cerrado

$$p(s, k_p, k_r, h) = s^2 + 2\delta\nu s + \nu^2 + bk_p - bk_r e^{-s\tau}. \quad (2.17)$$

A partir del cuasipolinomio (2.17), se esbozan las regiones de estabilidad. Análogamente a los sistemas libres de retardos, se sabe que cuando un sistema con retardos no posee zeros, la forma de la respuesta del sistema en lazo cerrado depende de la naturaleza de los polos, es decir si son reales o complejos conjugados, como también de su ubicación. En efecto tal respuesta está cercanamente relacionada con una estabilización con un decaimiento exponencial prescrito, llamado  $\sigma$ -estabilidad. La manera de esbozar las regiones de estabilidad se da en [45]. Así, las gráficas de estabilidad para cualesquiera parámetros  $\nu, b, \sigma$  y la ganancia  $k_p$  dados tal que satisfacen las condiciones de la proposición poseen una forma similar a la de la Figura 2.5 para un cierto sistema.

Aunque, el empleo de una ley de control PR es interesante, ésta sólo puede aplicarse a sistemas lineales. Sin embargo, las técnicas propuestas por Takagi-Sugeno ofrecen la posibilidad de implementar estas leyes de control PR a sistemas no lineales. Por lo que, la propuesta para este trabajo es sintonizar un controlador difuso PR usando modelos difusos T-S para estabilizar un sistema no lineal.

Cabe mencionar, que típicamente las leyes de control propuestas para estabilizar sistemas difusos T-S emplean técnicas elaboradas en el marco temporal, usando LMI's, sin embargo éstas suelen ser conservativas, por lo que se da una breve introducción a

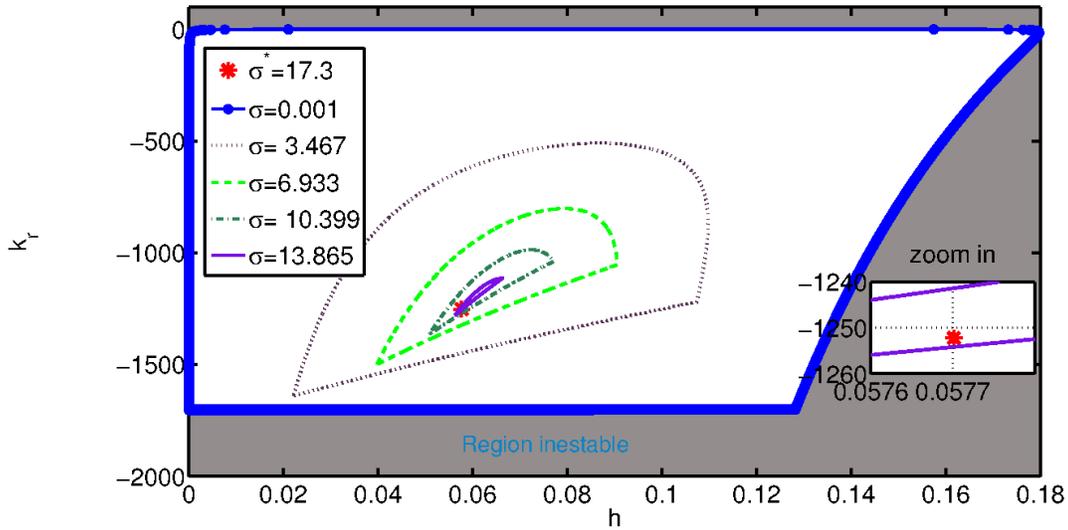


Figura 2.5: Regiones de estabilidad.

los sistemas T-S con retardos en la sección siguiente empleando LMI's para el análisis de estabilidad.

## 2.3. Sistemas difusos T-S con retardos y condiciones de estabilidad

Existen ciertos resultados acerca de los sistemas T-S con retardos dentro de la literatura, como en [44], donde se investiga la estabilidad de estos sistemas pero independientes del retardo. Sin embargo en [22] se da un procedimiento para realizar el análisis de estabilidad dependiente del retardo de los sistemas T-S, también existen otros resultados como los que se proponen en [7] donde se usan funcionales de Lyapunov–Razumikhin. En lo sucesivo, se presentan algunos resultados sobre análisis de estabilidad independiente del retardo mediante el empleo de LMI's para una cierta clase de SNL, que se dan en [44].

### 2.3.1. Modelo T-S con retardos

Para representar el modelo T-S con retardos, se introducen los retardos de tiempo en cada regla correspondiente al sistema (2.3). Suponiendo que existen retardos tanto en el control como en el estado. Entonces la  $i$ -ésima regla del modelo T-S queda de la

forma:

$$\begin{aligned} &\text{SI } z_1(t) \text{ está en } M_{i_1} \text{ y } , \dots , \text{ y } z_p(t) \text{ está en } M_{i_p}, \\ &\text{ENTONCES} \\ &\dot{x}(t) = A_{i_0}x(t) + A_{i_d}x(t - \tau_1) + B_{i_0}u(t) + B_{i_d}u(t - \tau_2), \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde,  $i = 1, 2, \dots, r$ ,  $0 \leq \tau_1 < \infty$  y  $0 \leq \tau_2 < \infty$ , siendo  $\tau_1$  y  $\tau_2$  el tamaño de los retardos. La condición inicial es  $x(t) = 0$ , donde  $t < 0$ . A este tipo de modelo se le llama modelo T-S con retardos (T-SMTD). Por lo que el conjunto de reglas de cada subsistema da origen al T-SMTD siguiente

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_{i_0}x(t) + A_{i_d}x(t - \tau_1) + B_{i_0}u(t) + B_{i_d}u(t - \tau_2)\}, \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t), \end{cases}$$

donde, el sistema en lazo abierto es de la forma

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_{i_0}x(t) + A_{i_d}x(t - \tau_1)\}. \quad (2.19)$$

## 2.4. Comentarios

Los resultados teóricos que se consideran base para el desarrollo de este trabajo se presentan en este capítulo, siendo por un lado los sistemas difusos T-S, los sistemas retardados y por otra parte el controlador PR, esto a grandes rasgos, así como la manera de sintonizar el controlador. Hasta el momento no se han encontrado trabajos sobre sistemas T-S, en lazo cerrado con una ley de control difusa PR, pero si existen ciertos resultados relevantes en la literatura de lógica difusa, acerca de cómo verificar la estabilidad de un modelo T-S con retardos, en un marco temporal, que es lo que se muestra también dentro de los antecedentes principales.

## Capítulo 3

# Método numérico para la aproximación de las raíces de un cuasipolinomio

Es bien sabido que en los sistemas libres de retardo se puede verificar la ubicación de las raíces correspondientes a su polinomio característico de manera relativamente sencilla en un marco frecuencial, permitiéndonos de esta manera determinar si dicho sistema es estable, críticamente estable o inestable. Dichas condiciones de estabilidad están presentes en la literatura acerca de la teoría control, tal es el caso de [10] o [19] entre otros, que nos muestran tales teoremas de estabilidad. Conocidas las condiciones necesarias para determinar la estabilidad mediante el polinomio característico, se puede emplear de manera sencilla algún comando en MATLAB, de los existentes o programar fácilmente alguno de los métodos numéricos ya sea abiertos o de intervalos, tal como el de Newton-Raphson, la secante ó el método de la bisección los cuales se encuentran rápidamente ya sea en [9], [34] y [25].

Así, en el caso de sistemas con retardos, el problema de encontrar el lugar geométrico de las raíces, se vuelve una tarea no trivial, debido a que el cuasipolinomio característico del sistema con retardo en cuestión, posee una infinidad de raíces a diferencia de un simple polinomio. Pese a la dificultad de encontrar éstas, en [14] se emplean diagramas de potencial para determinar la ubicación de las raíces de sistema de tipo neutrales, los que poseen un cuasipolinomio característico con una infinidad de raíces como los sistemas de tipo retardado.

Otros trabajos como [30], introducen una técnica constructiva para verificar si todas las raíces de un cuasipolinomio pertenecen a una región de estabilidad dada. Por otra parte en [24], encuentran la aproximación de las raíces haciendo ciertas integrales para diferentes regiones, mejorando la aproximación de las raíces mediante el uso del método de Newton, también en [48] proponen un método numérico para

la obtención de las tres raíces dominantes de un cuasipolinomio utilizando la función Lambert W, por otra parte en [35] se localizan las raíces empleando el principio del argumento y los diagramas de Mikhailov, resumiéndose el procedimiento ahí mostrado como se describe a continuación

- Una vez verificado que el diagrama de Mikhailov circunde por lo menos una vez el origen, se busca en éste, que par  $\{Re_0\{p(z)\}, Im_0\{p(z)\}\}$  tiene magnitud mínima, con  $z = e^{\frac{1}{q}}e^{i\theta}$ , y  $\theta \in [0, 2\pi]$ , este es una primera aproximación al valor de las raíces verdaderas.
- Se sitúa el origen de un nuevo sistema de coordenadas en el par  $\{Re_0\{p(z)\}, Im_0\{p(z)\}\}$  y se obtiene un nuevo diagrama evaluando  $p(z_1)$ .
- Se continúa el proceso hasta el paso  $n$ ,  $z_n = r_n e^{i\theta} + Re_{n-1}\{p(z)\} + Im_{n-1}\{p(z)\}$ , donde se obtiene una precisión  $r_n$ .

En este trabajo se hace uso del principio del argumento descrito en [26] y el procedimiento descrito en [35], para realizar un método numérico que permita obtener la aproximación de las raíces de un cuasipolinomio. Los resultados arrojados por la propuesta se comparan con el software Maple, para comprobar la veracidad de los resultados obtenidos.

### 3.1. Desarrollo del método numérico

Aquí se hace uso del principio del argumento que se presenta en el Capítulo 2, para desarrollar un algoritmo que permita aproximar las raíces de un cuasipolinomio del tipo (2.6), así como de funciones trascendentales también, en una región del plano complejo deseada. En un sentido general el método numérico lo que hace es dividir una región deseada, para verificar la variación del argumento en cada subregión y con ayuda del principio dado en [26] y así descartar las subdivisiones en las cuales no existe raíz. Finalmente se vuelven a dividir las regiones donde si existan éstas, de una forma iterativa hasta alcanzar la precisión requerida.

#### 3.1.1. División del contorno y evaluación del cuasipolinomio

En primer lugar, se define la curva o contorno cerrado  $D \in \mathbb{C}$  (Figura 3.1), donde se quiere analizar la existencia de raíces de un cuasipolinomio de la forma (2.6),

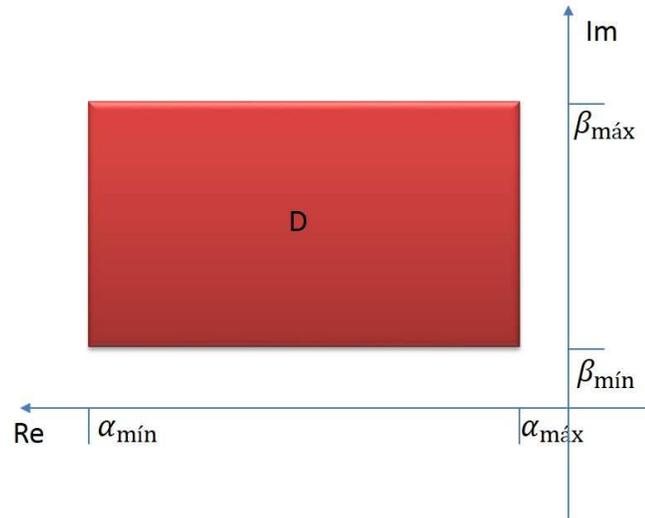


Figura 3.1: Contorno cerrado D.

donde  $\alpha_{\text{mín}}, \alpha_{\text{máx}}, \beta_{\text{mín}}$  y  $\beta_{\text{máx}} \in \mathbb{R}$ . Una vez definido el contorno, éste se divide en 4 partes iguales, denotando a cada subcontorno como  $D^*$ , donde  $D^* \in \mathbb{C}$ , para posteriormente hacer la evaluación de (2.6) sobre cada  $D^*$ . Tal evaluación se realiza en el sentido anti horario como lo indican las flechas de la Figura 3.2.

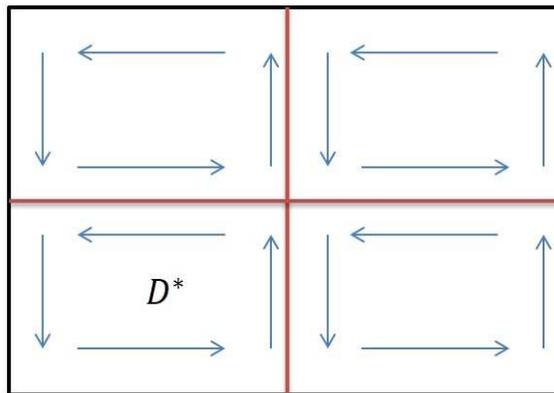


Figura 3.2: División del contorno cerrado D.

Se considera una función  $f$  de variable compleja al cuasipolinomio (2.6). Para cada número complejo  $z$ , sea  $w = f(z)$ , siendo  $z$  un punto del contorno de cada subdivisión  $D^*$  y  $w$  un punto del contorno creado, denominado contorno de Mikhailov Figura 3.3. Entonces  $f$  mapea  $D^*$  en  $E$  y es uno a uno. Es decir al evaluar cada punto perteneciente al contorno de cada subdivisión  $D^*$  en el cuasipolinomio, éste genera un único punto del contorno de Mikhailov  $E$ .

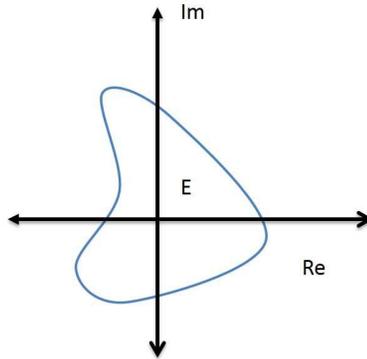


Figura 3.3: Contorno de Mikhailov.

A continuación se emplea la idea del Teorema 3, que se muestra en el Capítulo 2, el cual nos dice que el número de veces que circunda el contorno de Mikhailov el origen es igual al número de raíces que posee el cuasipolinomio en el contorno cerrado  $D$ . Por lo tanto para poder determinar el número de veces que el origen  $o$  es circundado, se observa la variación del argumento como sigue

### 3.1.2. Obtención de la variación del argumento

A diferencia de los resultados que se presentan en [24], en este trabajo, se obtiene el argumento entre dos vectores, además de que con este algoritmo se puede especificar una cierta precisión requerida, ya que en [24], lo que se hace es calcular la integral para cada subregión. Así que, de acuerdo a la Figura 3.4  $P_i$  denota al punto inicial,  $P_f$  denota el punto final,  $o$  el origen y  $\alpha$  el ángulo que hay que ir calculando entre los vectores  $\vec{P_i}$  conformado por el segmento de recta  $\overline{oP_i}$  y  $\vec{P_f}$  formado por  $\overline{oP_f}$ , por lo que se toma en cuenta tanto la componente real como imaginaria de cada uno de estos vectores.

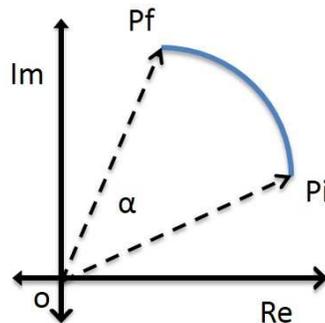


Figura 3.4: Ángulo entre el punto inicial y el final.

Por lo tanto para medir la variación hay que ir sumando y restando cada uno de los ángulos  $P_i o P_f$ , que tienen como vértice común a  $o$ . Para cada uno de estos casos se elige a  $P_i$  como el lado inicial y  $P_f$  el lado terminal del ángulo. Por convención, si la rotación se realiza en el sentido contrario de las manecillas del reloj, el ángulo es positivo en caso opuesto se considera negativo. Así, se tienen en cuenta un total de 20 casos para determinar tal variación cuando ésta es negativa, los cuales se pueden ver en las Figura 3.5 y Figura 3.6. Tal ángulo se obtiene con ayuda de la definición de producto punto por lo que el ángulo  $\alpha = \frac{P_i \cdot P_f}{\|P_i\| \|P_f\|}$ .

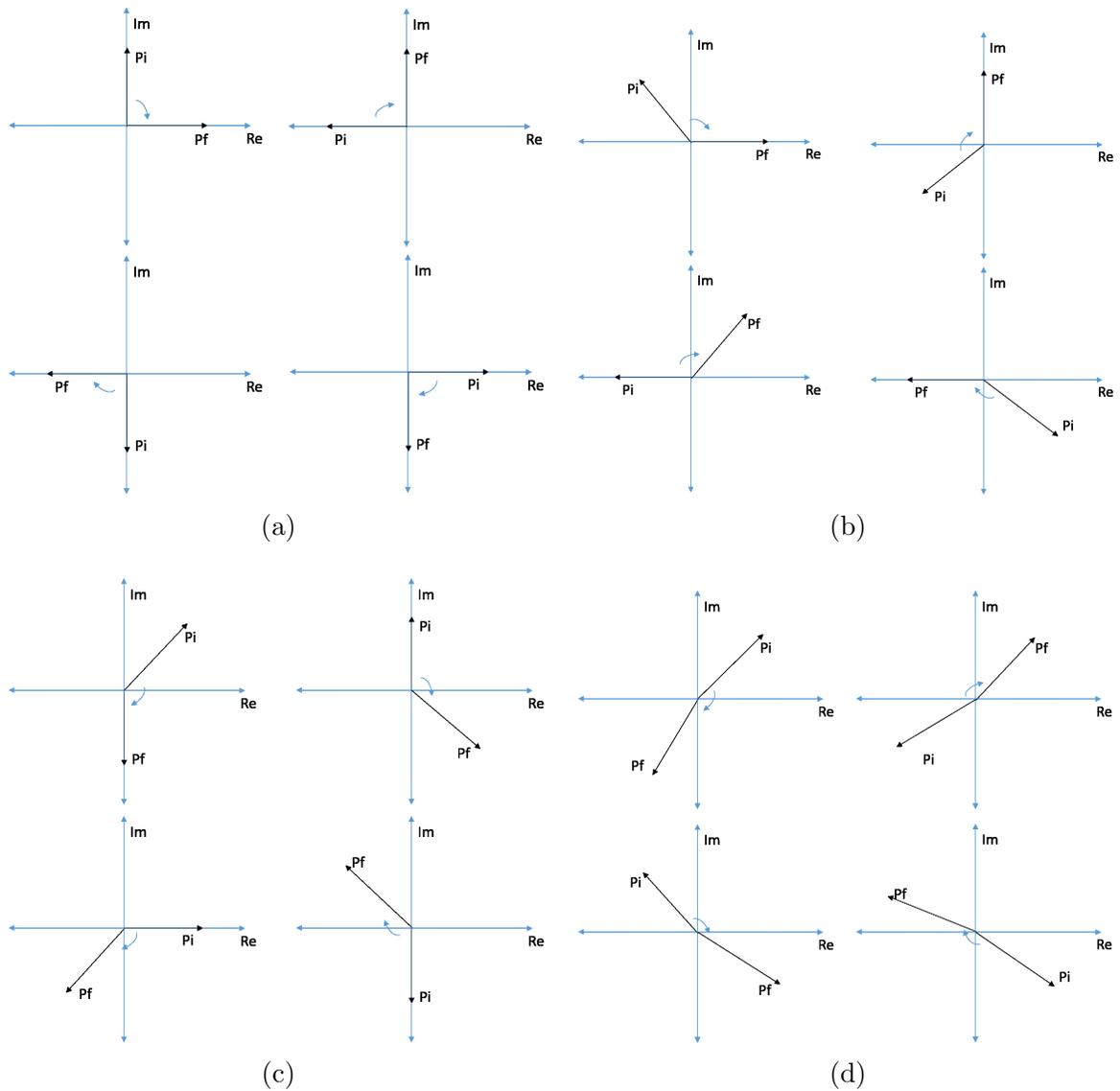


Figura 3.5: Variación del argumento parte 1.

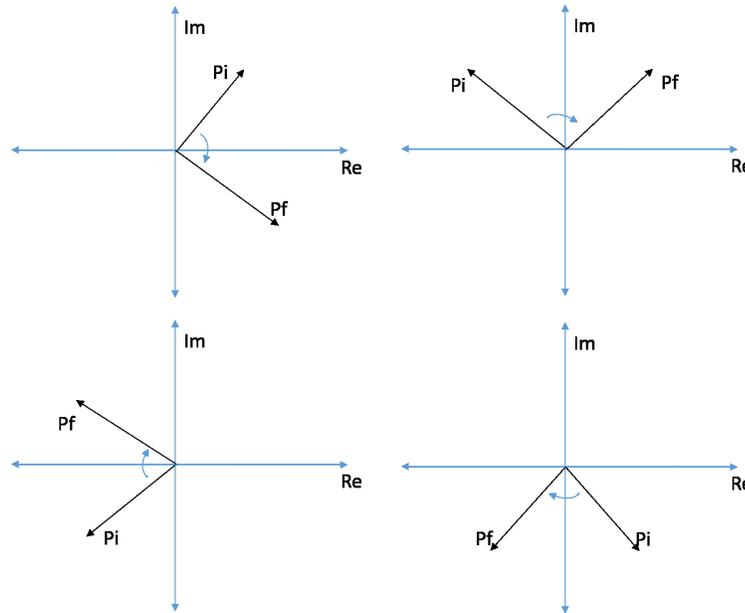


Figura 3.6: Variación del argumento parte 2.

De esta manera se determinan las subregiones donde si existe raíz, descartando las que no poseen alguna y se almacenan donde existe alguna o mas, posteriormente se vuelve a dividir las regiones almacenadas y se realiza todo el procedimiento nuevamente, hasta adquirir una cierta precisión deseada como se muestra en la Figura 3.7.

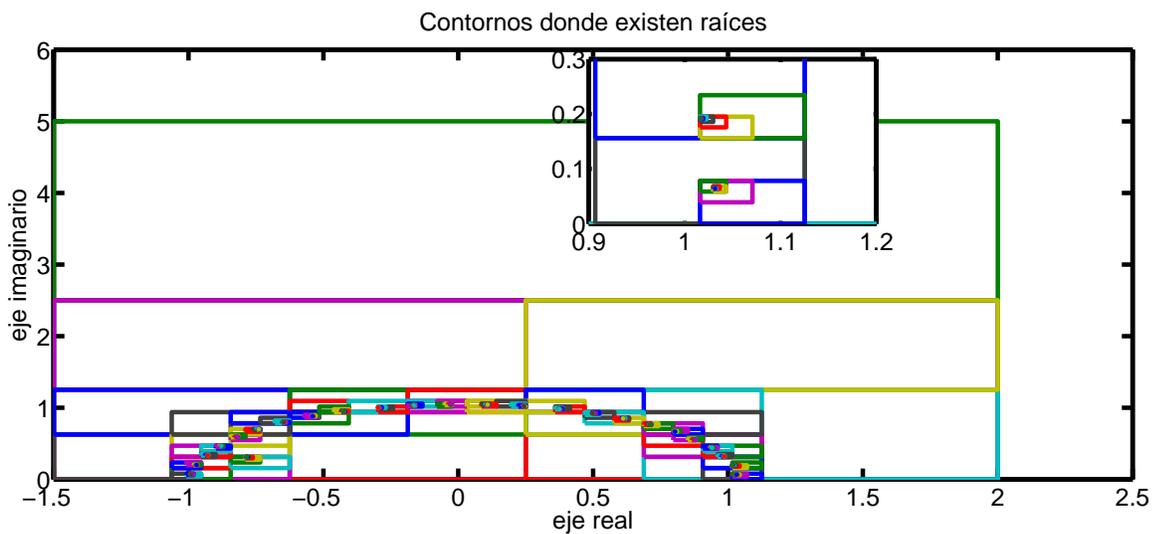


Figura 3.7: Subdivisiones donde existe raíz.

## 3.2. Aproximación de las raíces de un cuasipolinomio

En esta sección, el método numérico desarrollado en las secciones anteriores, se aplica a un par de cuasipolinomios y se compara con los resultados arrojados por MAPLE, para analizar la veracidad del resultados obtenidos mediante el método propuesto.

### 3.2.1. Ejemplo 1

Se considera un sistema retardado cuyo cuasipolinomio tiene la forma siguiente

$$s^2 + 300.3529412 - 220.9873444e^{-0.057701095075350s}, \quad (3.1)$$

la Figura 3.8 muestra la ubicación de las raíces correspondientes a (3.1), empleando nuestra propuesta en una región deseada que va de  $-140$  a  $0$  en el eje Real y de  $-800$  a  $800$  en el eje imaginario.

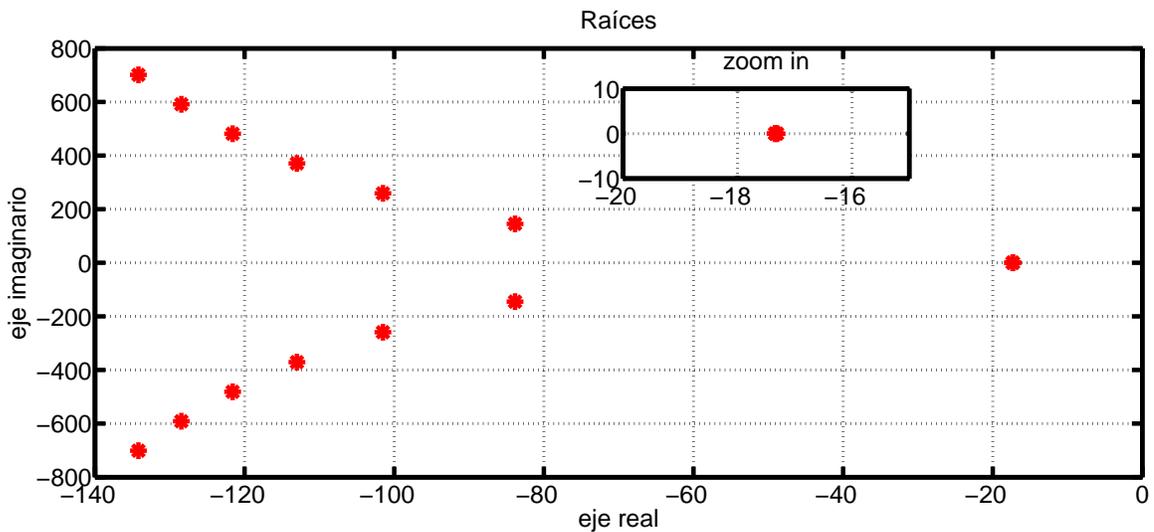


Figura 3.8: Raíces obtenidas con método numérico.

Por otra parte la Figura 3.9 muestra las raíces de (3.1) en la misma región deseada pero empleando MAPLE, con lo cual se puede observar que el resultado que se obtuvo con nuestra propuesta es muy semejante.

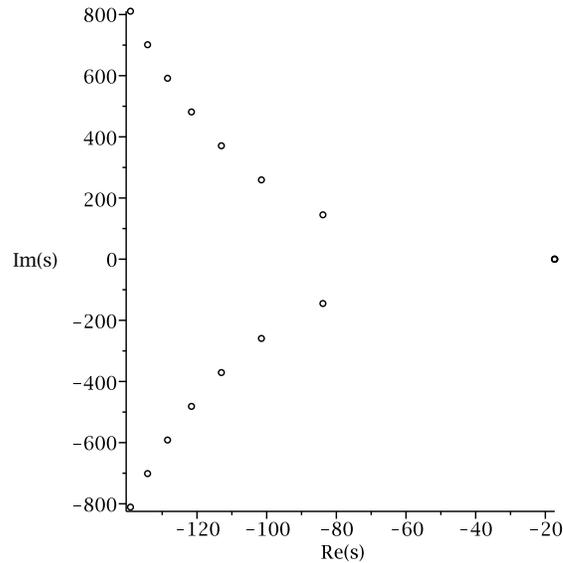


Figura 3.9: Ubicación de las raíces usando MAPLE.

Dado que a simple vista no se puede apreciar la exactitud de la localización de las raíces empleando nuestro método en comparación al resultado obtenido con Maple, se presenta la Tabla 3.1, en donde se puede ver a mayor detalle los valores obtenidos de las 5 primeras raíces, considerando el valor de su magnitud, desde la más cercana al origen hacia la más alejada. Como se puede apreciar en la tabla anterior, los resultados

Método numérico propuesto	MAPLE
$1.0 \times 10^2 * -0.1731$	-17.30
$1.0 \times 10^2 * (-0.1734 + 0.0002i)$	-17.34 + 0.0196i
$1.0 \times 10^2 * (-0.8386 + 1.4500i)$	83.85 - 145.00i
$1.0 \times 10^2 * (-1.2160 + 4.8143i)$	-121.59 + 481.42i
$1.0 \times 10^2 * (-1.3419 + 7.0124i)$	-134.19 + 701.24i

Tabla 3.1: Ubicación de las raíces.

con el método propuesto, son muy semejantes, aunque por otra parte conseguimos ciertas ventajas para el desarrollo de este tema, las cuales se listan a continuación

- Es mas fácil manejar los datos dentro de Matlab.
- Sirve de base para una toolbox de sistemas T-S con retardos, facilitando el análisis cuando hay múltiples subsistemas difusos.
- Se garantiza la aproximación de las raíces por medio del teorema de Mikhailov.

- Los métodos que vienen incorporados en Matlab no son adecuados para analizar cuasipolinomios.

### 3.2.2. Ejemplo 2

Para este segundo ejemplo, consideraremos la función trascendental siguiente

$$f(s) = s^{50} + s^{12} - 5\sin(20s)\cos(12s) - 1, \quad (3.2)$$

la cual se analiza en una región rectangular que va de  $-20$  a  $20$  en el eje Real y de  $-5$  a  $5$  en el eje imaginario, donde se obtiene una precisión preescrita de  $0.001$ , en la aproximación de la raíz.

La Figura 3.10 muestra los resultados obtenidos al analizar las raíces correspondientes

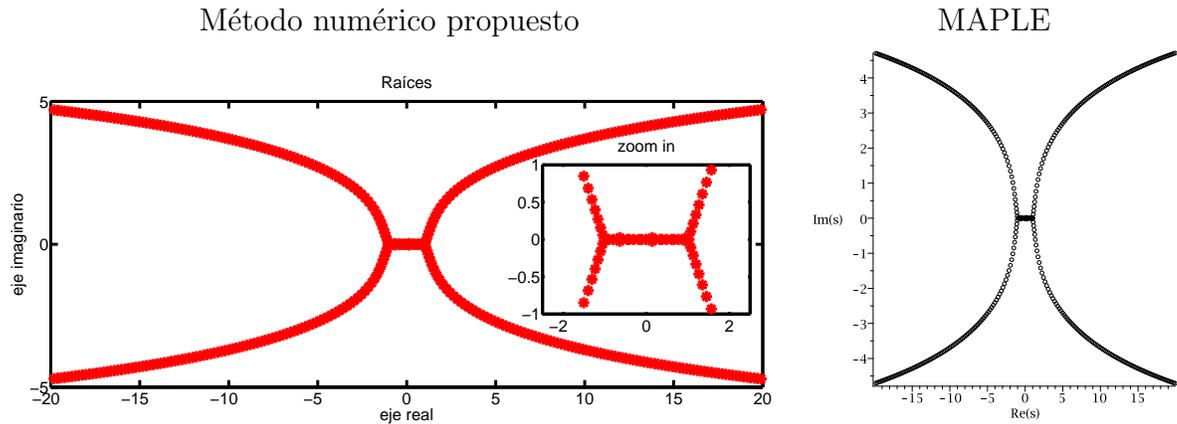


Figura 3.10: Raíces de la función usada en el segundo ejemplo

a la función empleada en este ejemplo.

Como se puede ver en los ejemplos anteriores, nuestra propuesta tiene un buen desempeño para la ubicación de las raíces de un cuasipolinomio. Se tiene además que al hacer la revisión bibliográfica, se encontró que en [47] ya se había propuesto un método alternativo al desarrollado aquí, el cual se puede utilizar dentro de MatLab, la Tabla 3.2 muestra los resultados de la comparación entre ambos algoritmos, donde se analiza la función descrita dentro de la Tabla 3.2. El algoritmo propuesto en [47] emplea un mapeo de la función analizada en el plano complejo, este algoritmo es conocido como Quasipolynomial Mapping Root (QPMR), cabe destacar que el QPMR emplea la función contour de MatLab para mapear las curvas de nivel zero de las partes real e imaginaria de un cuasipolinomio, y de esta forma encontrar las raíces del cuasipolinomio. Así encuentran una primera aproximación de las raíces y posteriormente se logra una mejor precisión de las raíces empleando el método de Newton-Raphson.

Causipolinomio Analizado		
$QP = s^5 0 + s^1 2 - 5 * \sin(20 * s) * \cos(12 * s) - 1$	Principio Argumento	QPMR
Tiempo	137.402957 segundos	22.315844 segundos
Cantidad de Raíces Encontradas	414	414
Precisión requerida	0.1	0.1

Tabla 3.2: Desempeño de los métodos numéricos.

### 3.3. Comentarios

El método numérico desarrollado aquí, permite la ubicación de las raíces de un cuasipolinomio característico correspondiente a un sistema retardado o alguna función trascendental en el entorno de MATLAB, permitiéndolo evitar el uso de software suplementario, que podría causar costos considerables o adicionales, teniendo también como ventaja que se pueden usar los datos obtenidos dentro de MATLAB, de manera sencilla con otra aplicación como lo es MAPLE, además de que con el método propuesto, se puede especificar una cierta precisión de las raíces dentro de MatLab. Aunque el QPMR también hace mucho de lo dicho anteriormente, se tiene que al alcanzar cada raíz una mayor precisión, no se asegura que el QPMR esté tendiendo a la raíz correcta o este tendiendo a la misma raíz en el caso de haber demasiadas raíces equidistantes de la primera aproximación que se obtiene mediante contour debido a que utiliza el método de Newton-Raphson para dar una mayor precisión, mientras que la ventaja que se tiene con el algoritmo desarrollado en este trabajo, es que a partir de los contornos de Mikhailov se asegura realmente el valor de la aproximación de tal raíz.

# Capítulo 4

## Sintonización de una ley de control difusa proporcional retardada

En este capítulo se da una metodología para el diseño y la sintonización de una ley de control proporcional difusa PR para una clase de SNL. Dado que la implementación de la ley de control difusa PR puede aplicarse a un tipo de SNL en general, en el presente capítulo la metodología propuesta se ilustra mediante una simulación y experimentalmente en un sistema péndulo invertido. Además, se realiza una comparación con una clásica ley de control difusa basada en el enfoque PDC.

### 4.1. Diseño y metodología de sintonización de un controlador difuso PR

En esta sección se presentan algunos resultados para el diseño y la sintonización de una ley de control difusa PR que estabilice una clase de SNL.

#### 4.1.1. Diseño de un controlador difuso PR

Considere un sistema difuso del tipo (2.3), es decir

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i x(t). \end{cases}$$

Ahora, para la construcción del controlador considere el razonamiento siguiente,

**Regla Control j:**

**SI**  $z_1(t)$  está en  $M_{j1}$  y ... y  $z_p(t)$  está en  $M_{jp}$ ,  
**ENTONCES**  $u(t) = -K_{p_j}x(t) + K_{r_j}x(t - \tau_j)$ .

Así, la ley de control difusa PR está determinada por

$$u(t) = \sum_{j=1}^r h_j(z(t)) \{-K_{p_j}x(t) + K_{r_j}x(t - \tau_j)\}, \quad (4.1)$$

donde  $K_{p_j}^T = [k_{p_j}, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^n$  son las ganancias proporcionales,  $K_{r_j}^T = [k_{r_j}, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^n$  son las ganancias retardadas y  $\tau_j \in \mathbb{R}^+$  son los retardos,  $j = 1, \dots, r$ , donde  $r$ , es igual al número de reglas. Esta ley de control sólo requiere la salida del sistema y la salida retardada.

*Observación.* El diseño de la ley de control difusa PR (4.1) propuesta aquí, puede ser vista como una extensión de la PDC (2.4). Por lo que, (4.1) puede ser nombrada como una compensación paralela distribuida retardada (Parallel Distributed Compensation Retarded, PDCR).

Note que el sistema (2.3) en lazo cerrado con la ley de control (4.1) está descrito por

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \{(A_i - B_iK_{p_j})x(t) + B_iK_{r_j}x(t - \tau_j)\}. \quad (4.2)$$

Ahora, si  $\tau_j = \tau$ ,  $j = 1, \dots, r$ , el sistema anterior se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) \{G_{ii}x(t) + R_{ii}x(t - \tau)\} \\ & + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{i < j} h_i(z(t))h_j(z(t)) \left\{ \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) x(t) \right. \\ & \left. + \left( \frac{R_{ij} + R_{ji}}{2} \right) x(t - \tau) \right\}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde  $G_{ij} = A_i - B_iK_{p_j}$ ,  $R_{ij} = B_iK_{r_j}$ ,  $i, j = 1, \dots, r$ .

Así, el uso de instrumentos de medición o algoritmos de aproximación para calcular la acción derivativa se evita. Sin embargo, ahora la pregunta es ¿cuáles son los parámetros  $K_{p_i}$ ,  $K_{r_i}$  y  $\tau_i$  para los que el sistema en lazo cerrado (2.3, 4.1) es  $\sigma$ -estable? A continuación, los resultados presentados en [45] se extienden a los sistemas difusos T-S para responder tal pregunta.

### 4.1.2. Metodología de sintonización del controlador difuso PR

En lo sucesivo se proporciona la metodología de sintonización del controlador difuso PR. A partir de la defusificación del sistema descrita por (4.2), se obtienen  $r$  cuasipolinomios característicos, que están descritos como

$$QP_{ii} = \det(sI - G_{ii} - R_{ii}e^{-s\tau_i}), \quad (4.4)$$

donde,  $i = 1, \dots, r$ . Una vez obtenidos los  $r$  cuasipolinomios, se propone un valor para  $k_{pi}$  donde  $k_{p1} = k_{p2} = \dots = k_{pi}$  de tal manera que  $k_{pi} > -\nu^2(1 - \delta^2)/b > 0$  de acuerdo a [45].

Para cada cuasipolinomio que se obtiene de (4.4), se esboza su correspondiente región de estabilidad semejante a la Figura 4.1.

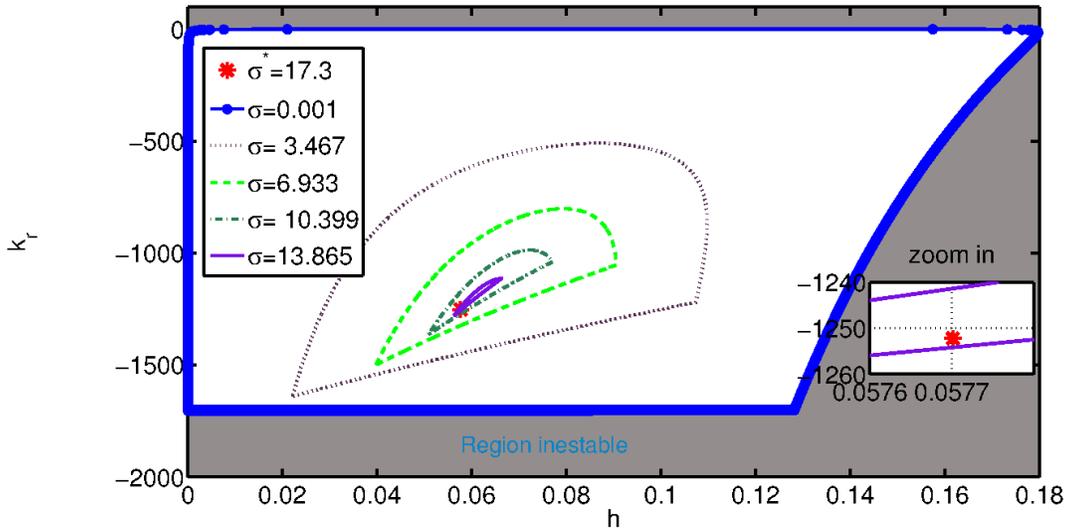


Figura 4.1: Regiones  $\sigma$ -estable para el subsistema difuso  $i$ .

Posteriormente se sigue el razonamiento del enfoque PDC para la sintonización del control difuso PR; así que para la PDCR se seleccionan los valores de  $k_{ri}$  y  $\tau_i$  que se encuentre dentro de la región de estabilidad que muestra la figura anterior, tal que cada  $G_{ij}$  sea una matriz Hurwitz.

Análogamente se puede hacer tal comprobación mediante el lugar geométrico de las raíces de todos los  $QP_{ij}$ 's cuasipolinomios en el dominio de la frecuencia con el uso del método numérico desarrollado dentro de este tema, similar a lo que muestra la Figura 4.2, en caso de que el cuasipolinomio correspondiente sea estable con el valor de las ganancias seleccionadas.

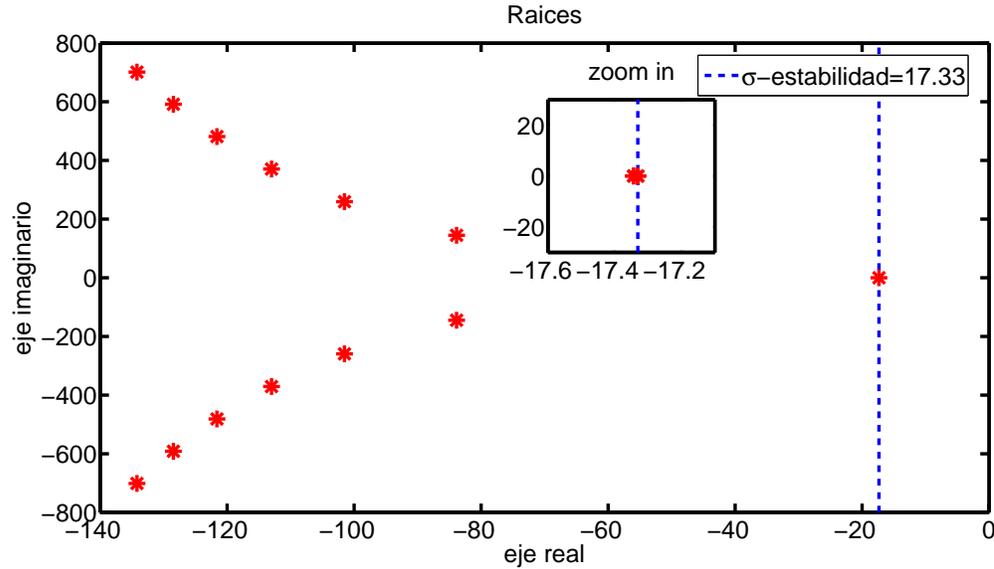


Figura 4.2: Ubicación de las tres raíces reales dominantes para el subsistema  $i$

El diagrama de flujo de la Figura 4.3 muestra el procedimiento de sintonización de la ley de control difusa PR, tal que  $\sigma$ -estabilice a cada subsistema difuso. Para ilustrar el proceso de sintonización de la ley de control difusa PR, sin pérdida de generalidad, se implementa el proceso sobre un SNL, más específicamente sobre un sistema subactuado.

Se sabe que un sistema subactuado es aquel que posee menos actuadores que grados de libertad. En [39] se puede observar que un sistema puede ser subactuado en diferentes maneras, la primera es debido a un diseño en el modelo de manera intencional como el robot brachiation de Fokuda, el acrobot o el pendubot entre otros, también dichos sistemas aparecen en los robots móviles, cuando un brazo robótico se monta sobre una plataforma móvil y la tercera manera que se considera es que un sistema subactuado es debido al modelo matemático usado para el diseño de la ley de control, ya que se puede notar que el problema de control de ciertos sistemas totalmente actuados son similares a los robots subactuados.

Para esta parte del trabajo se aplica el enfoque PDCR a un sistema subactuado del tipo (2.2) como lo es el sistema carro-péndulo el cual consiste en una barra posicionada sobre un carrito móvil con dos grados de libertad y solo una entrada para control. Estos sistemas se han utilizado como prototipos de pruebas para la aplicación de conceptos de control lineal y no lineal como estabilización de sistemas inestables, además de que tiene cierta relación con procesos reales como el sistema de control de vuelo para aeronaves, el lanzamiento de una nave espacial, el control de estabilidad de una grúa sobre un barco, edificios, aplicaciones didácticas, el posicionamiento de un satélite con respecto a la tierra, debido a que las antenas no deben dejar que el

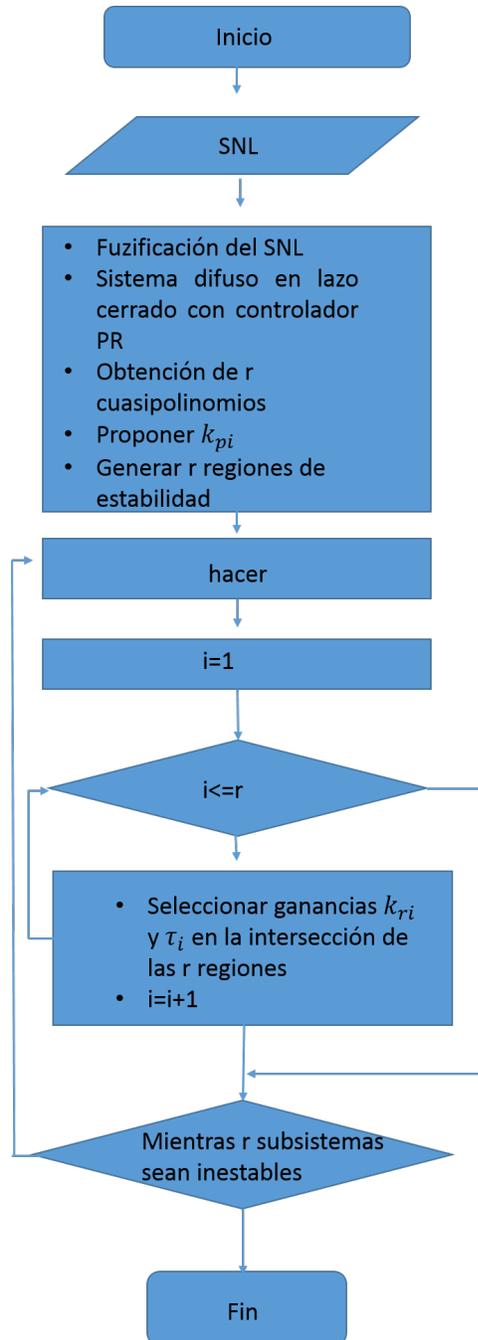


Figura 4.3: Metodología de sintonización del controlador difuso PR.

satélite se retire demasiado, ya que si no se pierde la comunicación, el balance activo en extremidades para la locomoción, los robots de piernas o extremidades, lo más importante ha sido el balanceo de estos, pues es la parte esencial para que no caiga el cuerpo del robot o un péndulo balístico, entre otras aplicaciones.

## 4.2. Implementación de la PDCR

Al realizar la implementación en simulación y de forma experimental, se utilizan los parámetros correspondientes al carro-péndulo, suministrado por QUANSER y el modelo matemático que se describe en [44], el cual es un modelo reducido de segundo orden, que no incluye términos relacionados a la fricción seca existente, por lo que buscar controlar el péndulo invertido, es un reto para el controlador difuso PD y para el controlador difuso PR. En esta sección se muestra además la fusificación del SNL, la base de reglas y la defusificación del sistema T-S.

### 4.2.1. Modelo matemático

Considere el modelo matemático del carro-péndulo, ver la Figura 4.4. De acuerdo a [44], éste es descrito por el SNL reducido siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{g \operatorname{sen}(x_1(t)) - a m l x_2^2(t) \operatorname{sen}(2x_1(t))/2 - a \operatorname{cos}(x_1(t)) u}{4l/3 - a m l \operatorname{cos}^2(x_1(t))}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde  $x_1(t)$  es la posición angular del péndulo respecto al eje vertical,  $x_2(t)$  la velocidad angular,  $m$  la masa del péndulo,  $M$  es la masa del carro,  $g$  la constante de gravedad,  $2l$  la longitud del péndulo,  $u$  la fuerza aplicada al carro y  $a = 1/(m+M) = 1.333$ . Aquí, se considera que  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ,  $m = 0.23 \text{ kg}$ ,  $M = 0.52 \text{ kg}$ ,  $l = 0.32 \text{ m}$ .



Figura 4.4: Carro-péndulo

Observe que el sistema (4.5) se puede aproximar por un modelo difuso de dos reglas que es construido mediante aproximación local.

### 4.2.2. Fusificación del carro-péndulo

Para realizar la fusificación del carro-péndulo, se emplean las siguientes dos reglas, las cuales se obtienen empleando la aproximación local del sistema (4.5), tal técnica nos permite reducir el número de reglas en comparación con la técnica del sector no lineal. Se comienza con dos reglas únicamente, en caso de que el desempeño no sea bueno, se pretende incrementar el número de éstas. Ya que se pretende controlar al péndulo invertido en su punto de equilibrio inestable y el prototipo solo puede variar su posición angular en  $\pm\pi/4$  respecto a la vertical, se consideran las 2 reglas siguientes

**Regla 1:** Si  $x_1(t)$  está cerca de 0, entonces

$$\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t), \tag{4.6}$$

**Regla 2:** Si  $x_1(t)$  está cerca de  $\pm\pi/4$ , entonces

$$\dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t). \tag{4.7}$$

Continuando con la inferencia T-S se describen a continuación la base de reglas utilizadas.

### 4.2.3. Base de conocimiento y toma de decisiones

Las funciones de membresía usadas para hacer la inferencia difusa son funciones triangulares como las representadas en la Figura 4.5.

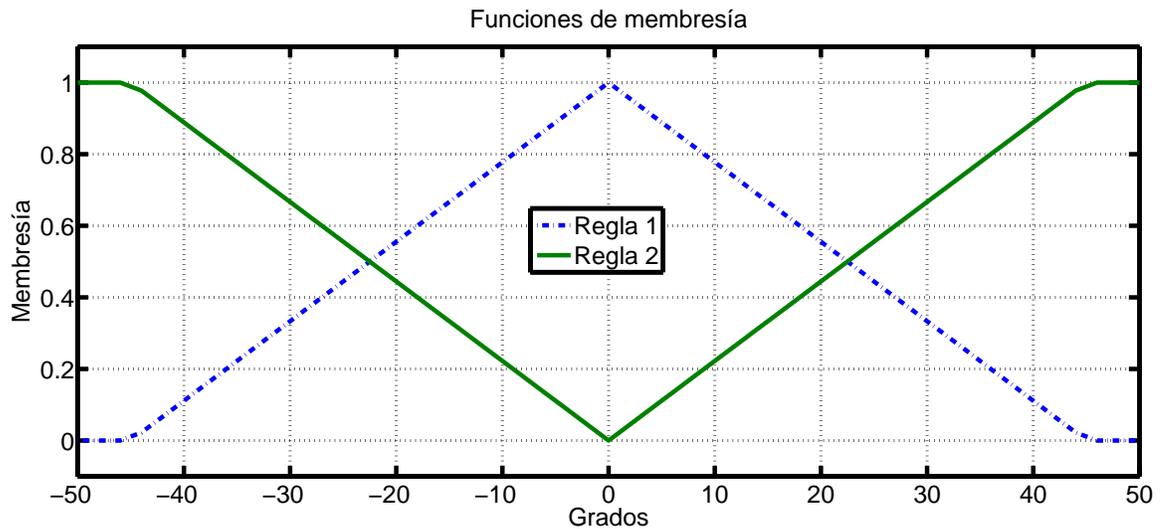


Figura 4.5: Funciones de membresía.

#### 4.2.4. Defusificación del sistema carro-péndulo

Claramente, el modelo difuso o la defusificación del sistema se representa de la manera siguiente

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \quad (4.8)$$

donde  $\beta = \cos(88^\circ)$ ,  $\gamma = \cos(45^\circ)$ ,  $\alpha = \sin(45^\circ)$ ,  $h_i \in [0, 1]$  es la función de disparo,  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^2$ ,  $B \in \mathbb{R}^2$  y  $u(t)^T \in \mathbb{R}^2$ . Aquí  $A_1, A_2, B_1$  y  $B_2$  se definen como

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3-aml} & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3-aml} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{(4g(4l/3-aml\gamma^2)(\alpha+\gamma)-\alpha)/\pi}{4l/3-aml\gamma^2} & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a((4l/3-aml\gamma^2)(\gamma-\alpha)+\gamma)}{4l/3-aml\gamma^2} \end{bmatrix}.$$

Ahora, los resultados que se presentan en la Sección 4.1 se usan para sintonizar la ley de control de la forma (4.1) y estabilizar el sistema (4.8).

#### 4.2.5. Sintonización del controlador difuso PR

Se considera el controlador difuso PR siguiente

$$u(t) = \sum_{j=1}^2 h_j(x) \{-K_{p_j} x(t) + K_{r_j} x(t - \tau_j)\}, \quad (4.9)$$

donde  $K_{p_j}^T = [k_{p_j}, 0]^T$ ,  $K_{r_j} = [k_{r_j}, 0]^T \in \mathbb{R}^2$  y  $\tau_j \in \mathbb{R}^+$ . Usando (4.3) el sistema en lazo cerrado (4.8, 4.9) es

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \sum_{i=1}^2 h_i^2(x_1) \{G_{ii} x(t) + R_{ii} x(t - \tau)\} \\ & + 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{i < j} h_i(x_1) h_j(x_1) \left\{ \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) x(t) \right. \\ & \left. + \left( \frac{R_{ij} + R_{ji}}{2} \right) x(t - \tau) \right\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Los subsistemas difusos (4.6) y (4.7) se representan en espacio de estado ya que es necesario para poder obtener el cuasipolinomio característico, por lo que la ley de control PR puede ser diseñada usando la estrategia presentada anteriormente en conjunto con los resultados complementarios mostrados en la en la sección 2.2.4 ó mediante el uso de las regiones  $\sigma$ -estables para cada subsistema difuso, ver [45]. Así,

para el primer subsistema se tiene que sus regiones  $\sigma$ -estables se representan en Figura 4.6 y para el segundo subsistema se muestran en la Figura 4.7.

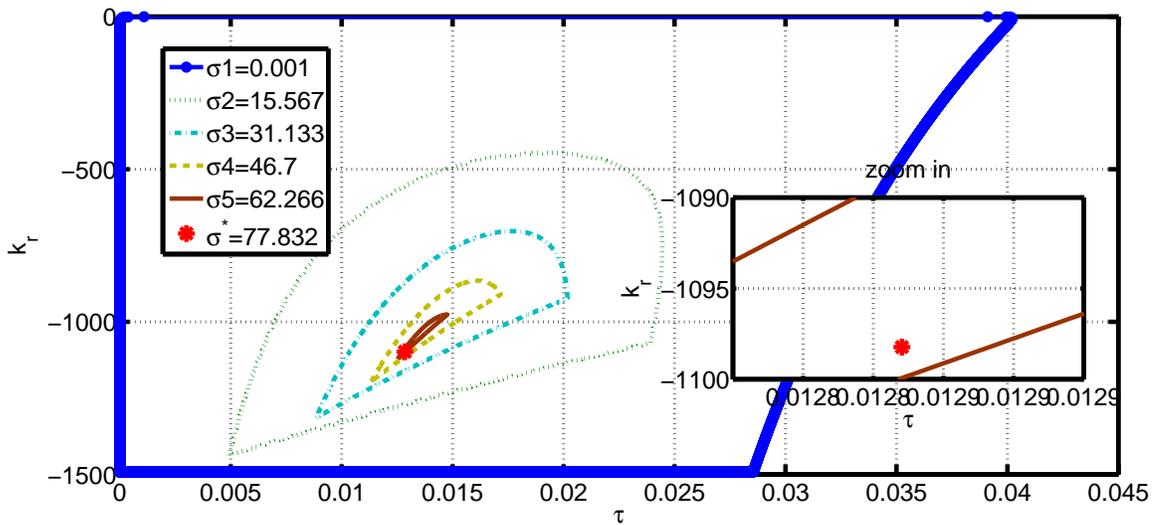


Figura 4.6: Regiones  $\sigma$ -estable para el subsistema difuso 4.6.

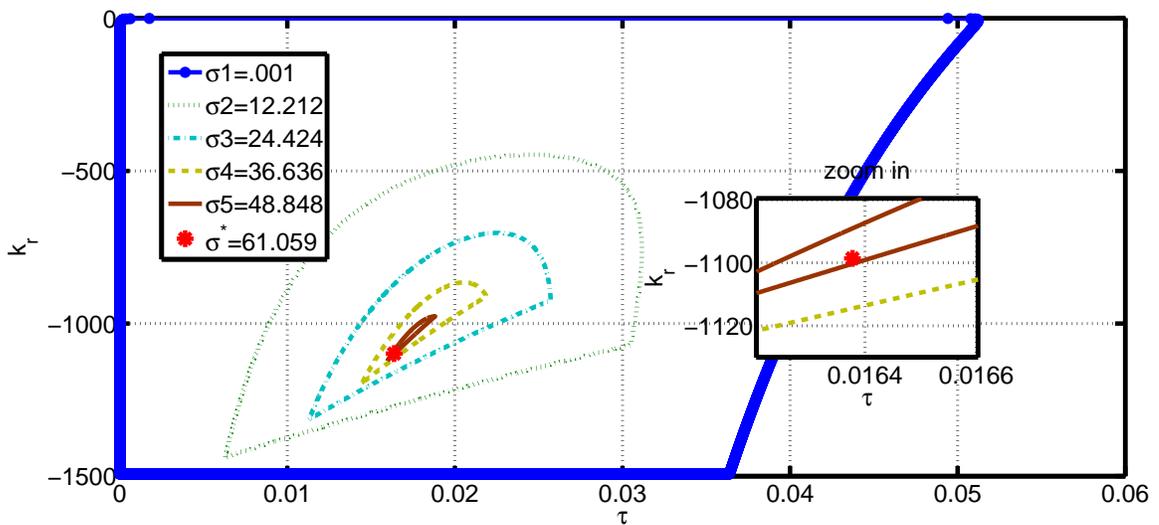


Figura 4.7: Regiones  $\sigma$ -estable para el subsistema difuso 4.7.

Siguiendo con la metodología de sintonización de la ley de control difusa PR, se eligen las ganancias, de tal forma que se encuentren dentro de la intersección de las 2 regiones de estabilidad mostradas en la Figura 4.8, para asegurar que cada subsistema en lazo cerrado sea Hurwitz.

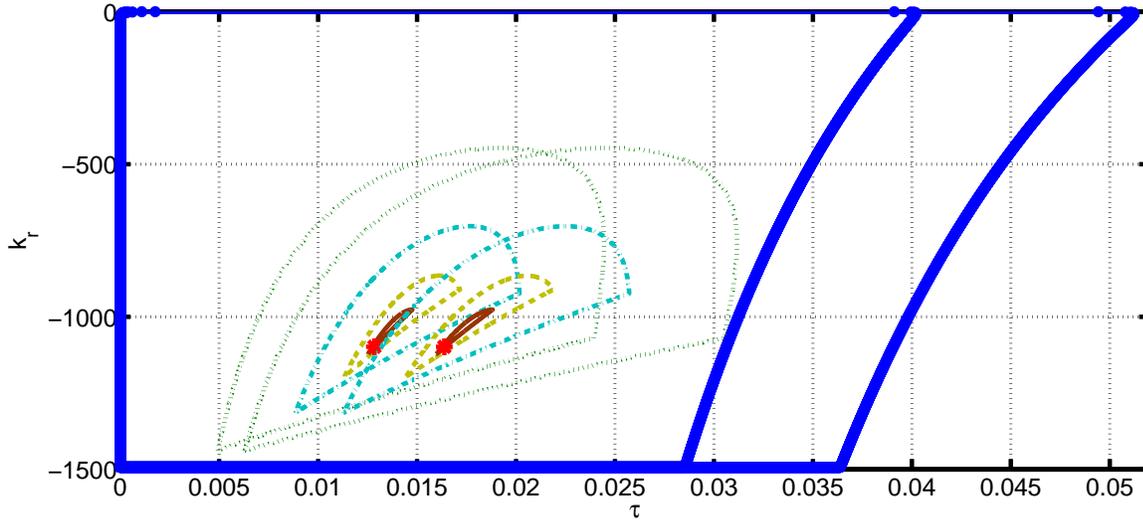


Figura 4.8: Intersección de las regiones estabilidad.

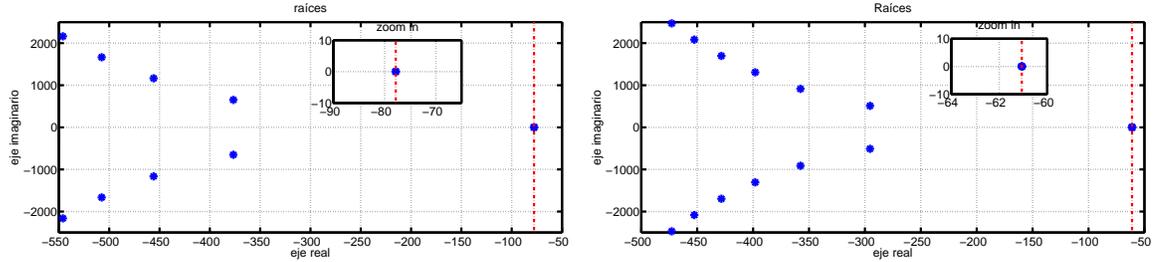
Después, usando el Lema 2 la  $\sigma$ -estabilización de los subsistemas difusos (4.6) y (4.7) se garantiza.

Por un lado se tiene que las ganancias para sintonizar el controlador difuso PR, que garantizan la máxima cota de decaimiento del primer subsistema difuso (4.6), cuando la ganancia proporcional  $k_{p1} = -1500$ , son el retardo  $\tau_1 = 0.012$  y la ganancia retardada  $k_{r1} = -1098.230$  con una  $\sigma$ -estabilidad  $\sigma_1 = 77.832$ , estas ganancias se calculan fácilmente a partir de las ecuaciones (2.14), (2.15) y (2.16).

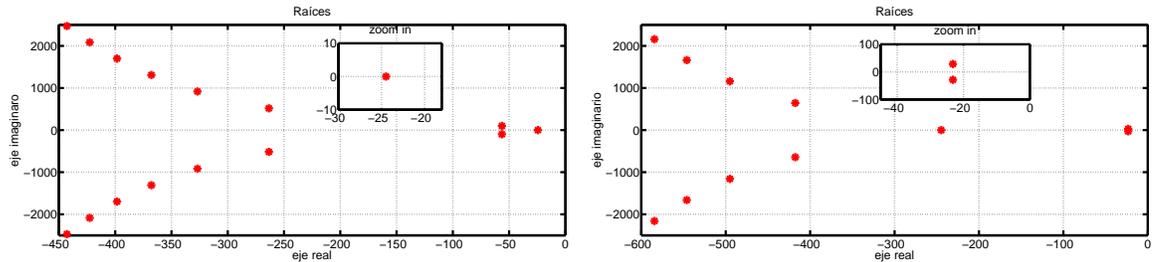
Para el segundo subsistema difuso representado en (4.7), los valores que garantizan la máxima cota de decaimiento son  $\tau_2 = 0.016$ ,  $k_{p2} = -1500$  y  $k_{r2} = -1098.614$  con una  $\sigma_2 = 61.059$ .

Se tiene, que realizar un análisis de estabilidad de ambos subsistemas en un marco frecuencial no es una tarea sencilla ya que el sistema difuso en lazo cerrado tiene una infinidad de raíces, por esa razón para este trabajo se hace uso del método numérico desarrollado en el mismo, para analizar la estabilidad de cada subsistema difuso en el dominio de la frecuencia, de esta manera, la Figura 4.9a muestra las tres raíces reales dominantes del primer subsistema y la Figura 4.9b muestra la ubicación de las tres raíces reales dominantes del segundo subsistema. La Figura 4.9c muestra el lugar de las raíces de estos cuasipolinomios cuando  $j > i$ .

*Observación.* Los cuasipolinomios  $G_{ii}x(t) + R_{ii}x(t - \tau)$  para  $i = 1, 2$  y cuando  $i < j, i, j = 1, 2$  son Hurwitz. Por lo que, se garantiza que cada uno de los subsistemas de (4.10) y sus posibles combinaciones del sistema son estables, lo cual se pudo corroborar con el lugar de las raíces mostrados en la Figura 4.9 cuando  $i < j$  y  $j < i$ . La ubicación de las raíces que se muestra en las figuras siguientes, permiten determinar la estabilidad del sistema difuso T-S que representa la dinámica del péndulo invertido.



(a) Ubicación de las raíces para el subsistema difuso (4.6) cuando  $i = j$  (b) Ubicación de las dominantes para el subsistema difuso (4.7) cuando  $i = j$



(c) Lugar de las raíces cuando  $i < j$ . (d) Lugar de las raíces cuando  $j < i$ .

Figura 4.9

#### 4.2.5.1. Controlador difuso proporcional derivativo

Para hacer una evaluación del desempeño de nuestra propuesta, se sintonizan las ganancias difusas del controlador proporcional derivativo de acuerdo al enfoque que se presenta en [44], la sintonización de esta ley de control se basa en el enfoque PDC donde la ley de control tiene la forma siguiente

$$u(t) = - \sum_{j=1}^2 h_j(z(t)) F_j x(t), \quad (4.11)$$

para este caso. Los valores de las ganancias que hacen que los subsistemas difusos (4.6) y (4.7) tengan sus raíces en  $\sigma_1 = 77.832$  y  $\sigma_2 = 61.059$  respectivamente son

$$F_1 = [38.3556, -1500],$$

$$F_2 = [48.9090, -1500].$$

Lo cual de acuerdo a [44] se puede verificar con los valores propios en lazo cerrado indicados anteriormente para  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , que las matrices  $A_1 - B_1 F_1 = G_{11}$  y  $A_2 - B_2 F_2 = G_{22}$ , son Hurwitz.

### 4.3. Resultados de simulación

En esta sección se presenta una comparación entre el desempeño del enfoque PDCR y del clásico enfoque PDC, mediante simulación. La Figura 4.10 muestra la respuesta del sistema difuso (4.10), con una condición inicial de 40 grados.

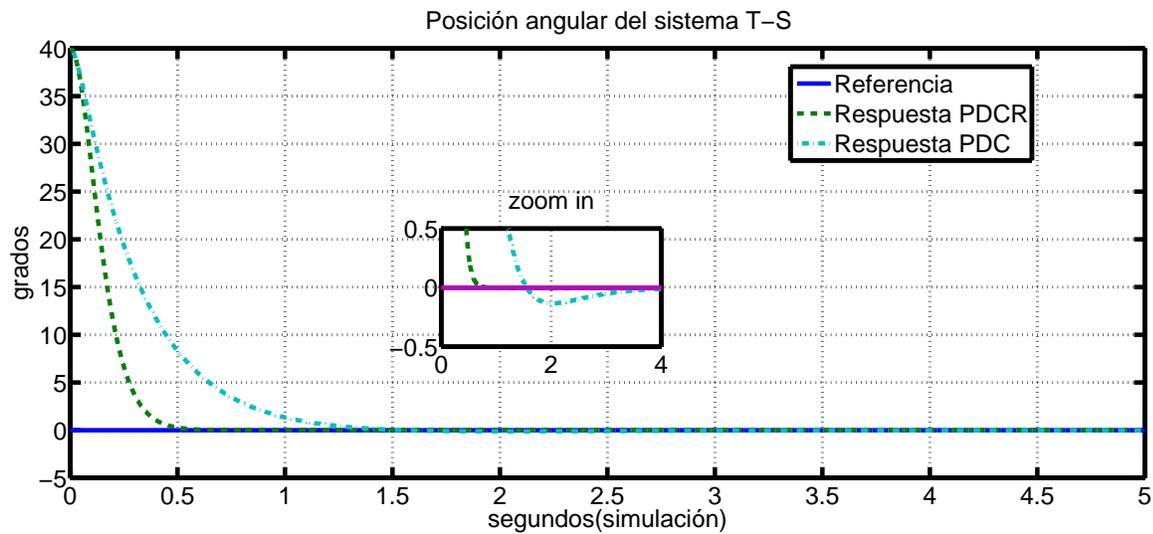


Figura 4.10: Respuesta del sistema difuso (4.10).

La Figura 4.11 presenta la respuesta del sistema no lineal con ambas leyes de control.

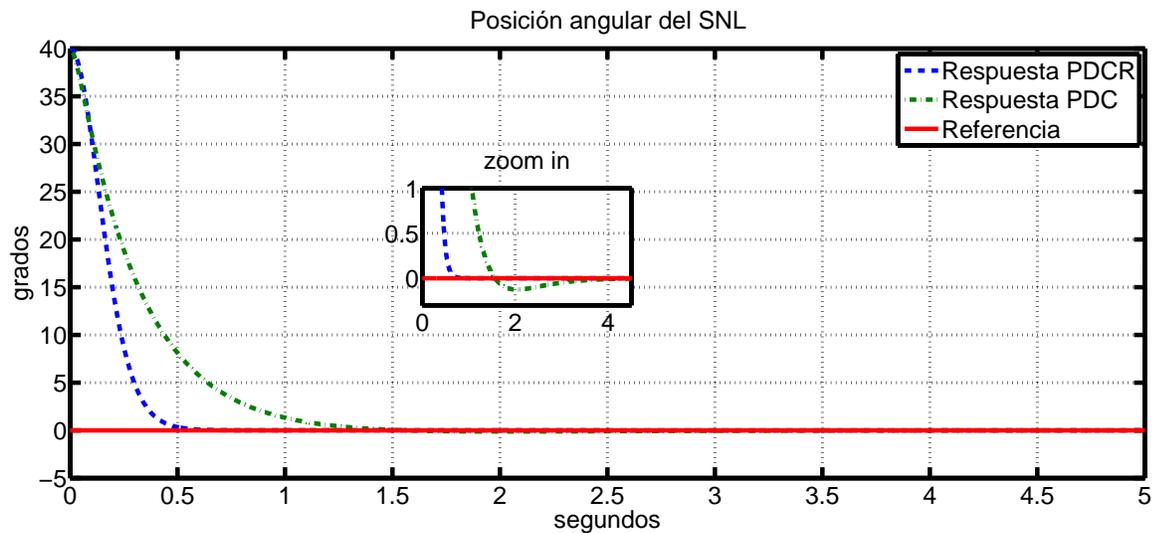


Figura 4.11: Respuesta del SNL (4.5) en lazo cerrado con las leyes de control difusa PR (4.9) y difusa PD (4.11).

Se puede observar además que el SNL en lazo cerrado con la ley de control difusa PD (4.5, 4.11), converge más lentamente, que la respuesta del sistema no lineal en lazo cerrado con la ley de control difusa PR (4.5, 4.9).

Las señales de control difusa PR (4.9) y difusa PD (4.11), que se aplican al sistema no lineal (4.5) se presentan en la Figura 4.12.

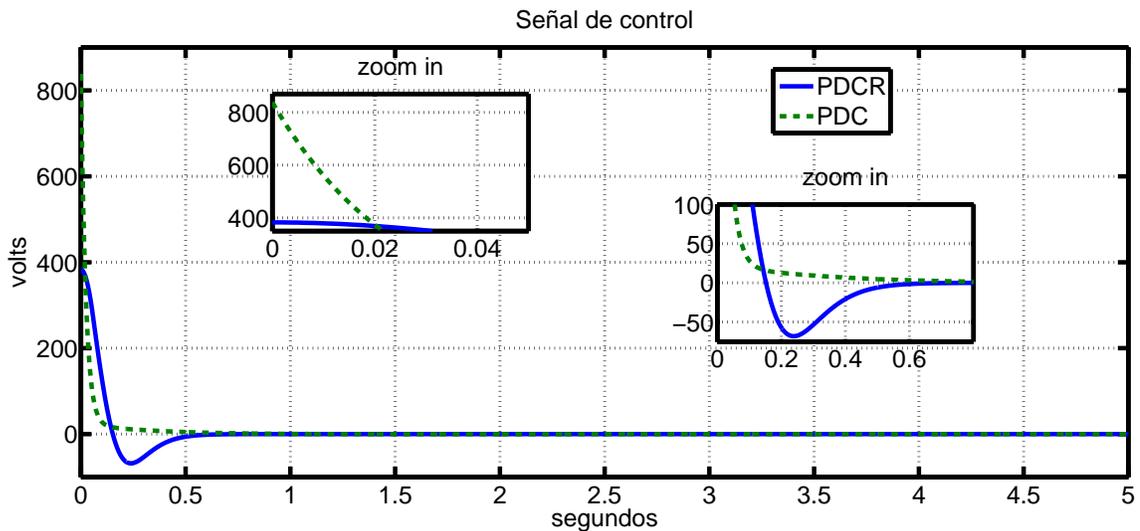


Figura 4.12: Señales de control difusa PR (4.9) y difusa PD (4.11) aplicadas al sistema no lineal (4.5).

Aquí, el controlador (4.11) presenta un sobreimpulso de energía al inicio, que es más grande que la cantidad de energía demandada por el control difuso PR, posteriormente la señal de control difusa PR presenta un sobreimpulso que la señal de control difusa PD no presenta.

Estos sobreimpulsos significan una mayor demanda de energía y mayor saturación de los actuadores, tales excesos de energía son dañinos para los sistemas reales entre más grandes sean, disminuyendo su vida útil.

Por último para esta sección de simulación se muestra el error obtenido del SNL con ambas leyes de control en la Figura 4.13 y así continuar con la experimentación sobre el sistema real en la sección siguiente.

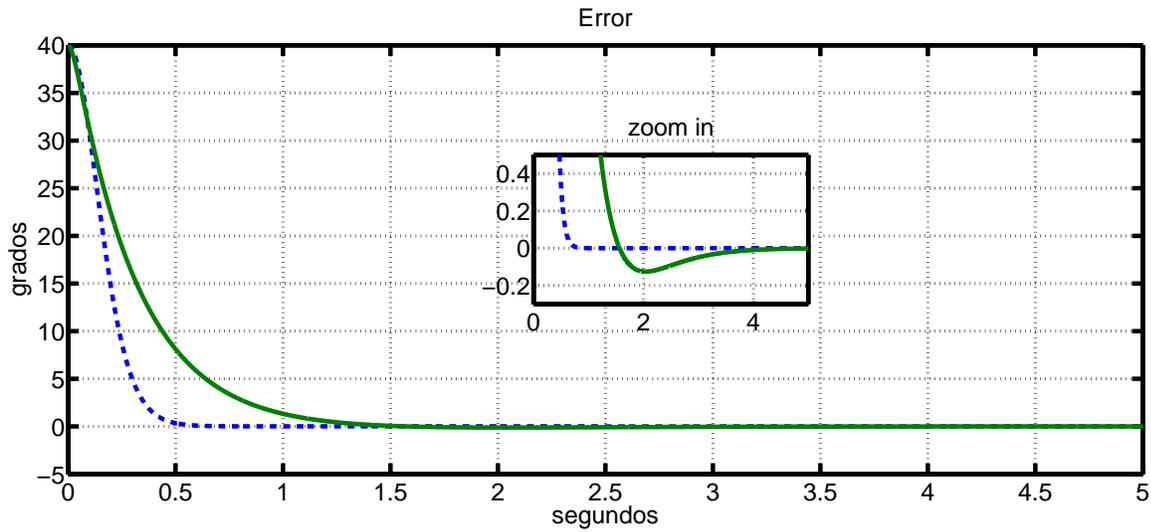


Figura 4.13: Error del SNL (4.5).

#### 4.4. Resultados experimentales

Después de los resultados de simulación de la Sección 4.3, los cuales fueron implementados dentro del entorno de simulink, aquí se muestran los resultados de implementar el enfoque PDCR y PDC, al prototipo real didáctico péndulo invertido *IP01* suministrado por QUANSER (ver Figura 4.14).

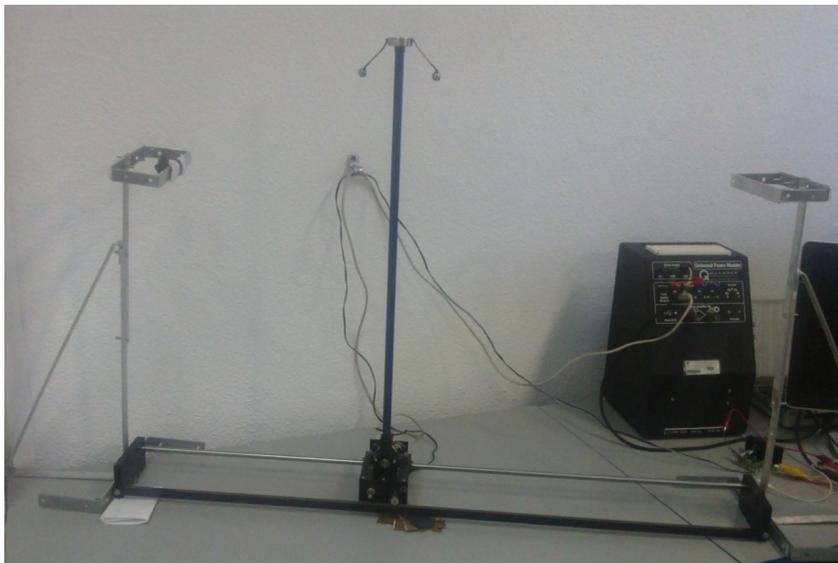


Figura 4.14: Prototipo carro-péndulo.

Para esta implementación se usa el módulo de *Real-Time Windows Target* que se encuentra dentro del software de Matlab®.

Los resultados prácticos se muestran en diferentes secciones, para hacer una mejor distinción entre ellos. Los experimentos presentados son:

- Experimento 1: Estabilización del prototipo péndulo invertido
- Experimento 2: Estabilización del prototipo péndulo invertido ante una perturbación externa
  - Caso 1
  - Caso 2
- Experimento 3: Seguimiento de trayectoria

#### 4.4.1. Experimento 1: Estabilización del prototipo péndulo invertido

La Figura 4.15 muestra la respuesta del carro-péndulo al implementar el enfoque PDCR y PDC, con una condición inicial aproximada de  $45^\circ$  de acuerdo a la Figura 4.15, mostrando que la respuesta del sistema es mejor con la ley de control difusa PR en comparación con la ley de control difusa PD, ya que este tiende más rápido a la referencia, teniendo un pequeño margen de error en estado estacionario debido al ruido eléctrico presente en la medición.

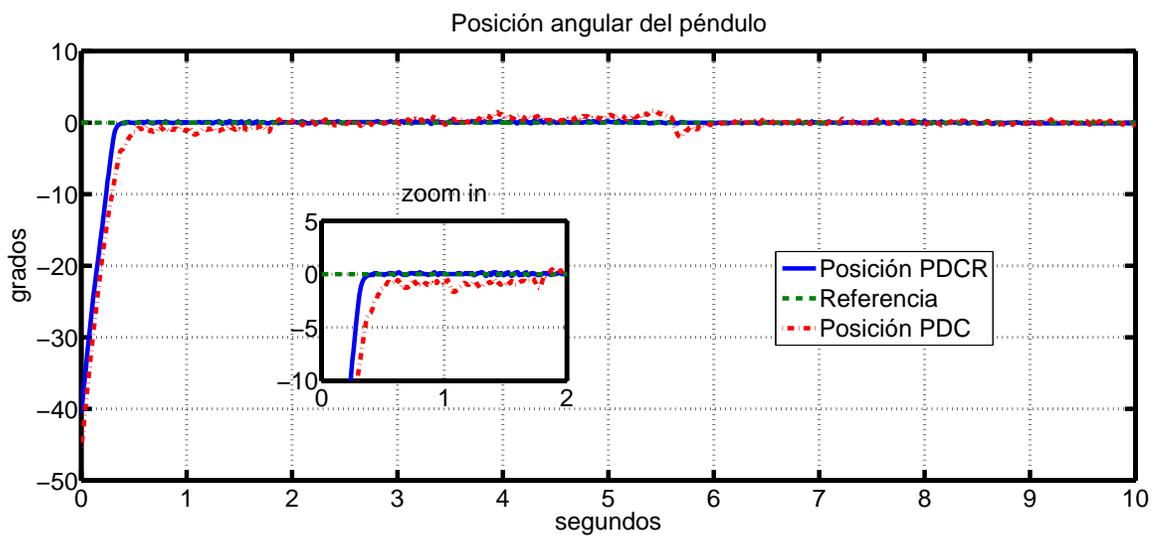


Figura 4.15: Respuesta del prototipo carro-péndulo

El error en cuanto al posicionamiento del péndulo para el sistema carro-péndulo en este primer experimento de estabilización se puede observar en la Figura 4.16.

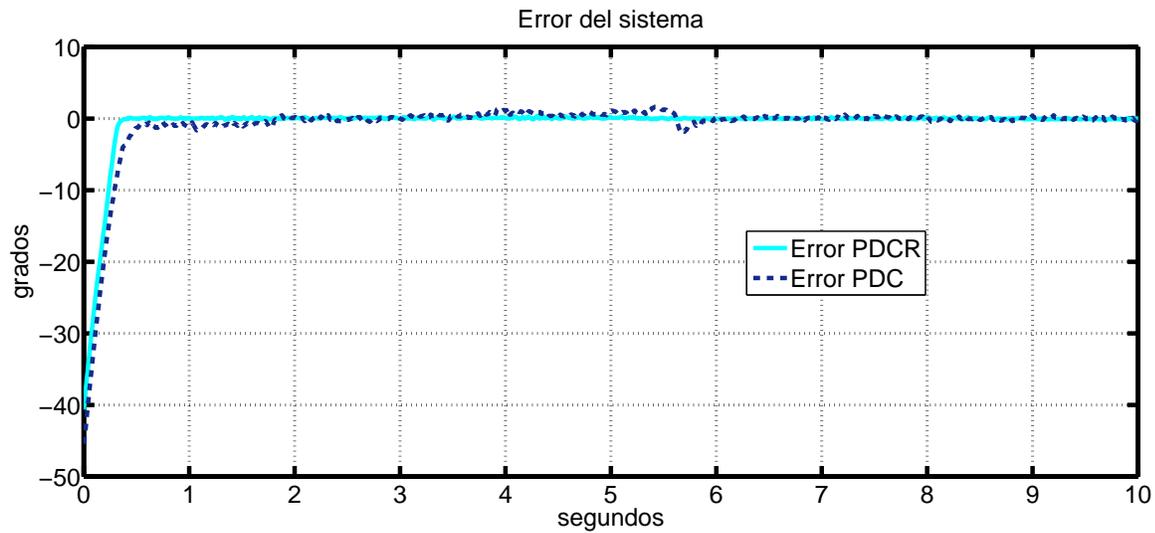


Figura 4.16: Error

Las señales de control difusa PR (4.9) y PD (4.11) se ilustran en la Figura 4.17, las cuales corresponden al voltaje que la tarjeta de adquisición *PCI – 6071* envía a través de su canal de salida analógico *ANO0*

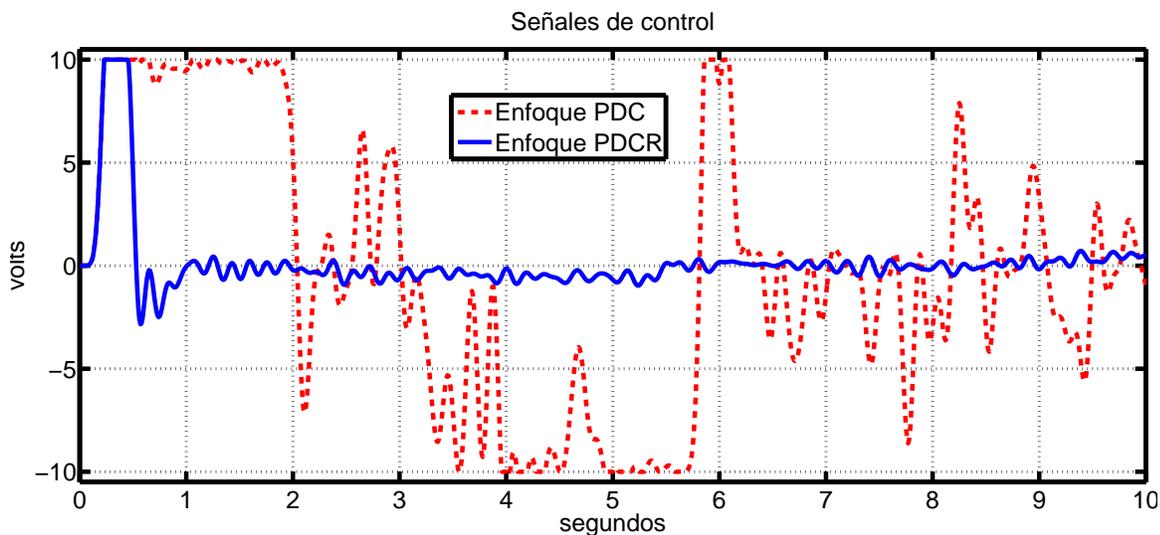


Figura 4.17: Señales de control difusas PR (4.9) y PD (4.11)

Se observa como la ley de control difusa PR demanda una menor cantidad de energía que la ley de control difusa PD, los cambios en la demanda de energía de la señal difusa PR son menos drásticos que la señal difusa PD, lo que implica una mayor duración en el actuador del sistema.

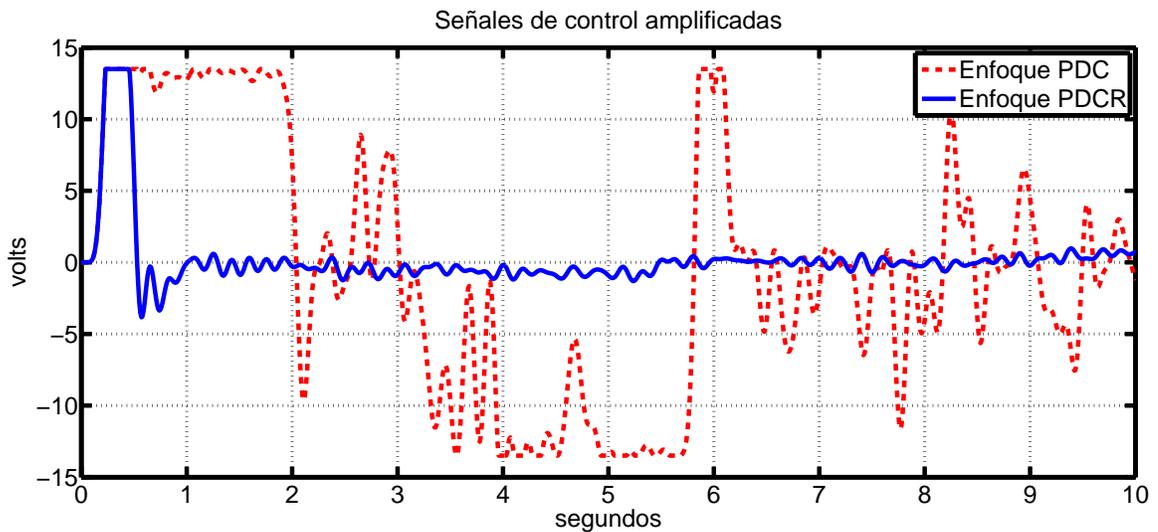


Figura 4.18: Señales de control difusas PR (4.9) y PD (4.11) amplificadas

La Figura 4.18 muestra la señal de control amplificada mediante la interfaz de potencia (ver apéndices), con una ganancia de 1.35, que se aplica a las terminales del motor. Para poder establecer tal ganancia se hace uso de un amplificador operacional, que se emplea en la configuración de no inversor.

Debido a que el motor original del péndulo invertido se reemplazó, se realizó una interfaz de potencia, para que el desempeño del nuevo motor fuera lo mas semejante al anterior.

El motor Faulhaber 2338009 proporciona menos revoluciones por minuto, que el motor original y demanda mayor cantidad de corriente.

Para medir la cantidad de corriente que consume el motor con la ley de control difusa PR, se hace uso de una resistencia Shunt de 0.3 ohms, con el fin de determinar el consumo de corriente la cual se pude observar en la Figura 4.19.

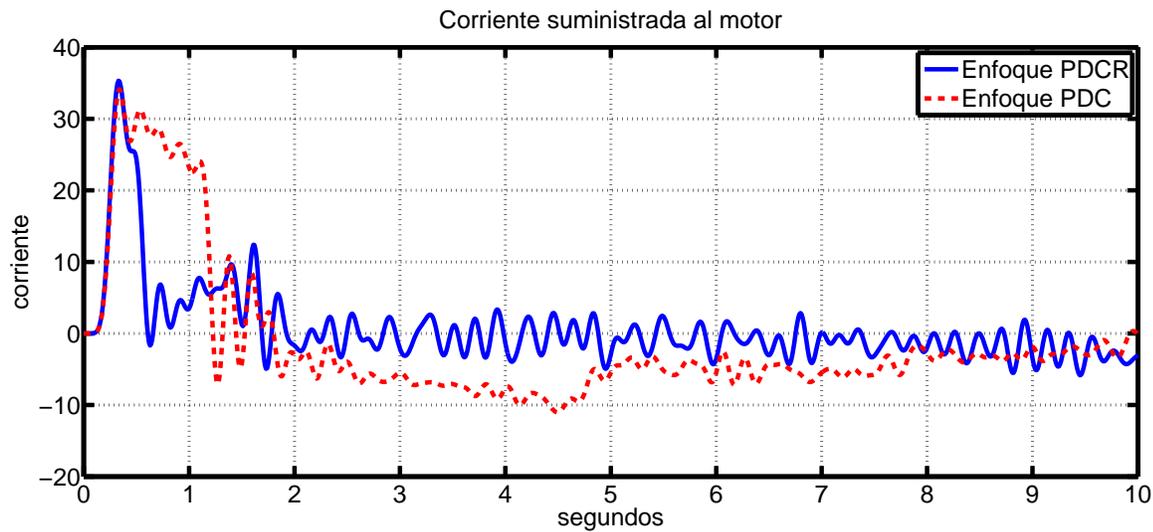


Figura 4.19: Corriente suministrada al motor

#### 4.4.2. Experimento 2: Estabilización del prototipo péndulo invertido ante una perturbación externa

En los experimentos siguientes se busca observar la robustez del sistema con ambas leyes de control, la ley de control difusa PR (4.9) y la ley de control difusa PD (4.11), ante 2 perturbaciones diferentes, con las cuales se pretenden modificar los parámetros del péndulo invertido.

##### 4.4.2.1. Caso 1

Para este caso se considera una perturbación como lo muestra la Figura 4.20, que es un bloque pequeño que se sujeta en el péndulo, con esta perturbación se modifica el centro de masa del péndulo invertido, el momento de inercia del péndulo y el peso sobre el carro. Hay que recordar que para la sintonización de la ley de control difusa PR y PD se empleó el modelo matemático de [44] y los parámetros suministrados por QUANSER en [1] sin considerar la masa de perturbación adicional, así que las ganancias empleadas para las leyes de control son las mismas que las del experimento anterior en donde no hubo perturbación alguna.



Figura 4.20: Perturbación 1.

La Figura 4.21 muestra la posición angular del péndulo en lazo cerrado con la ley de control difuso PR y PD, el péndulo se inicializa con una condición inicial de  $45^\circ$  respecto a la vertical, la respuesta del sistema en lazo cerrado con el enfoque PDCR sigue siendo bueno a pesar que la masa del péndulo fué modificada, a diferencia del control difuso PD, con el cual es mayor el error en estado estacionario.

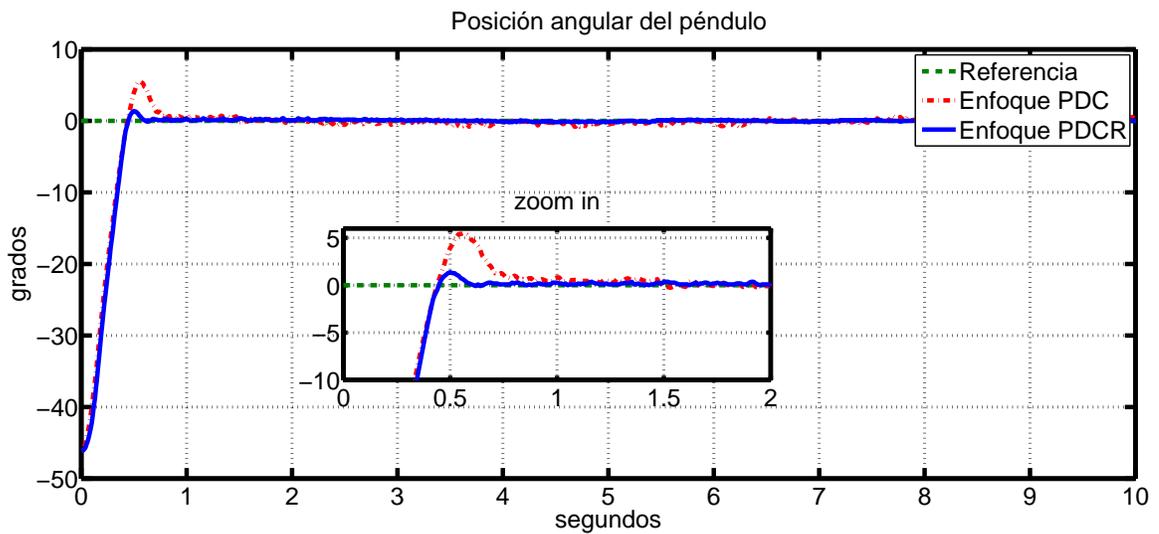


Figura 4.21: Respuesta del sistema carro-péndulo con perturbación en el péndulo

La Figura 4.22 muestra el error del péndulo invertido, cuando hay una perturbación que modifica los parámetros del prototipo de QUANSER.

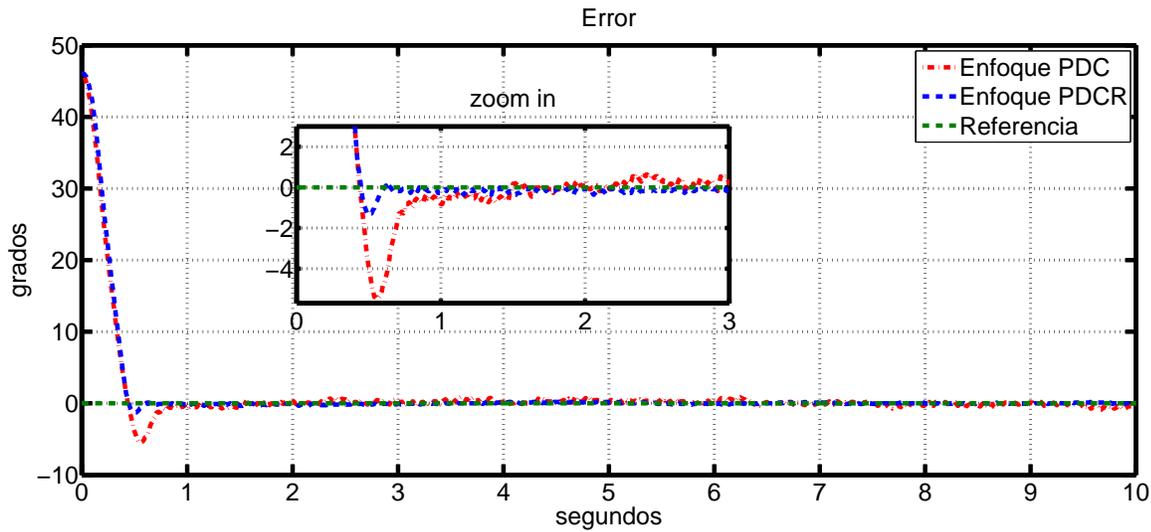


Figura 4.22: Error del sistema carro-péndulo con perturbación en el péndulo

Para este experimento la Figura 4.23 muestra que es mayor la cantidad de voltaje que se tiene que suministrar al motor para estabilizar el sistema con el uso de la ley de control difusa PD, a diferencia de la ley de control difusa PR que suministra una cantidad de voltaje muy semejante al experimento en donde el sistema se encuentra sin perturbación.

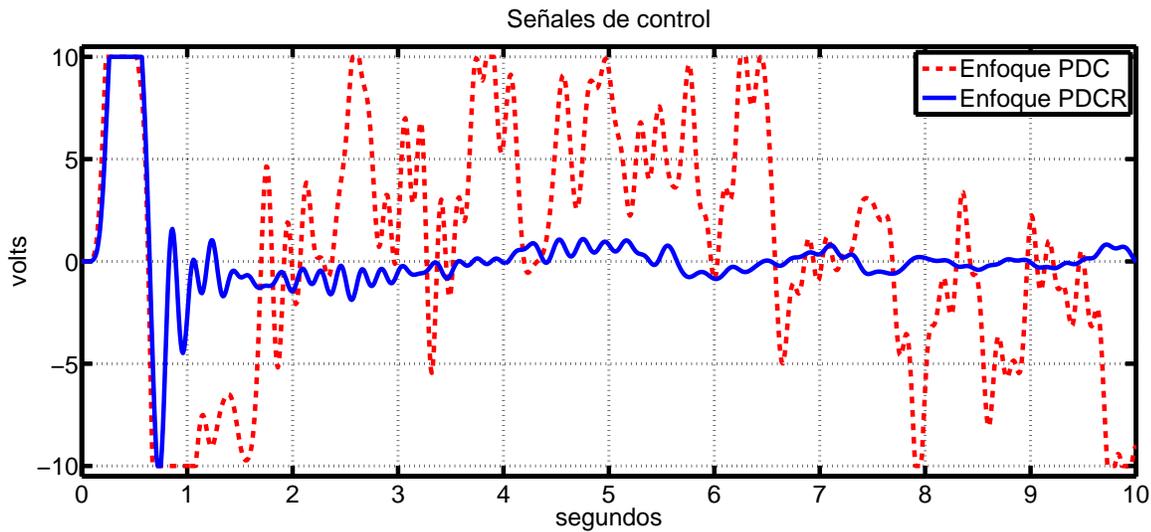


Figura 4.23: Señales de control aplicadas sistema carro-péndulo con perturbación en el péndulo.

La Figura 4.24 muestra las señales control, después de ser amplificadas mediante la etapa de potencia, las cuales se aplican a las terminales de motor de CD.

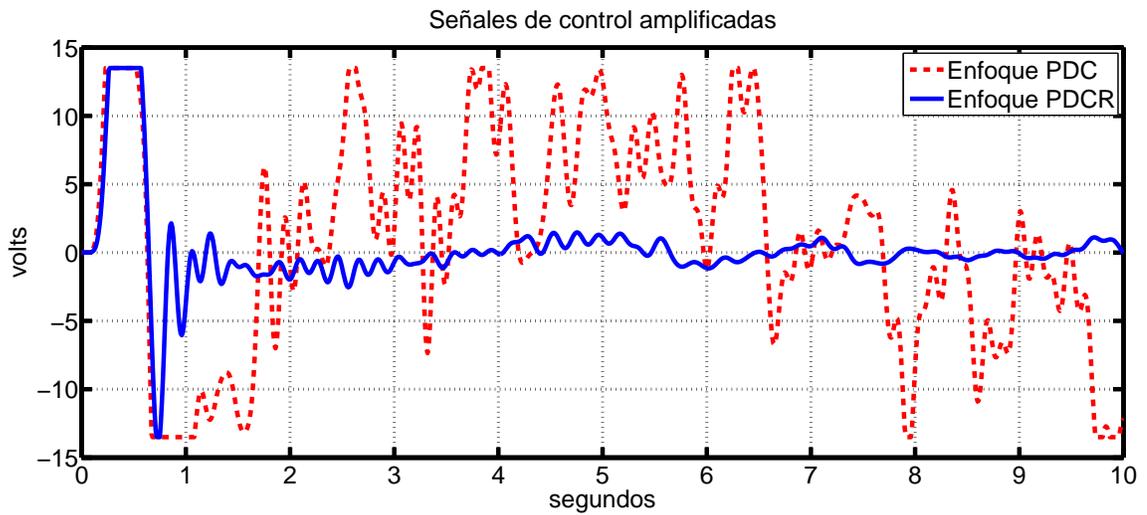


Figura 4.24: Señales de control amplificadas.

La imagen de la Figura 4.25 muestra la cantidad de corriente suministrada al motor.

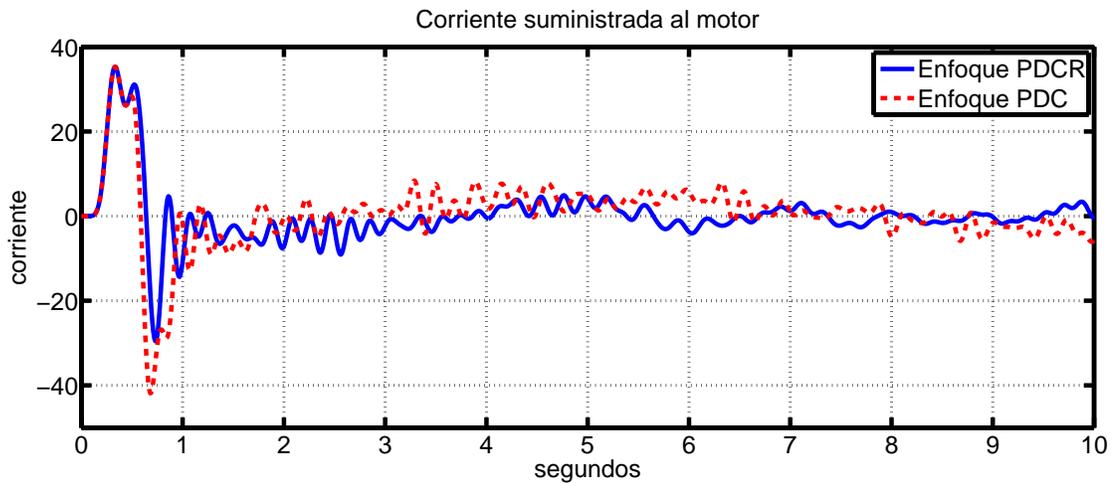


Figura 4.25: Corriente suministrada al motor ante una perturbación.

#### 4.4.2.2. Caso 2

Este segundo caso viene aunado con la perturbación que se muestra en la Figura 4.26, esta perturbación se sujeta en la parte superior del péndulo y ya que posee un balero se le puede aplicar una fuerza de tal forma que ésta esté girando y el momento de

inercia cambie continuamente su sentido, las ganancias de la ley control difusa PR y PD siguen siendo las mismas que los experimentos anteriores.

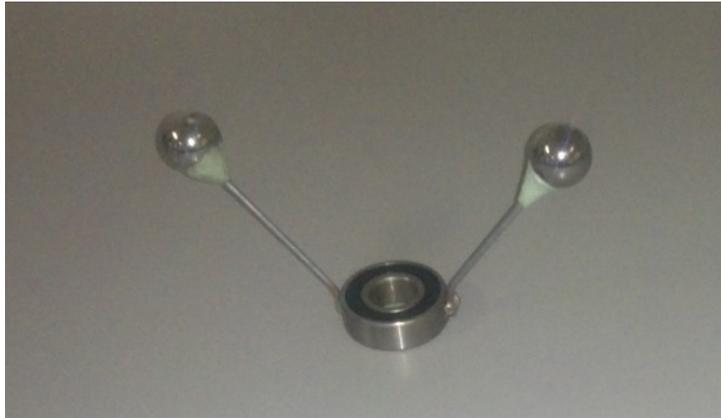


Figura 4.26: Perturbación 2.

La Figura 4.27 muestra la respuesta de la variable controlada del sistema en lazo cerrado con las leyes de control difuso PR y PD. El péndulo se inicializa con una condición inicial de  $45^\circ$  respecto a la vertical.

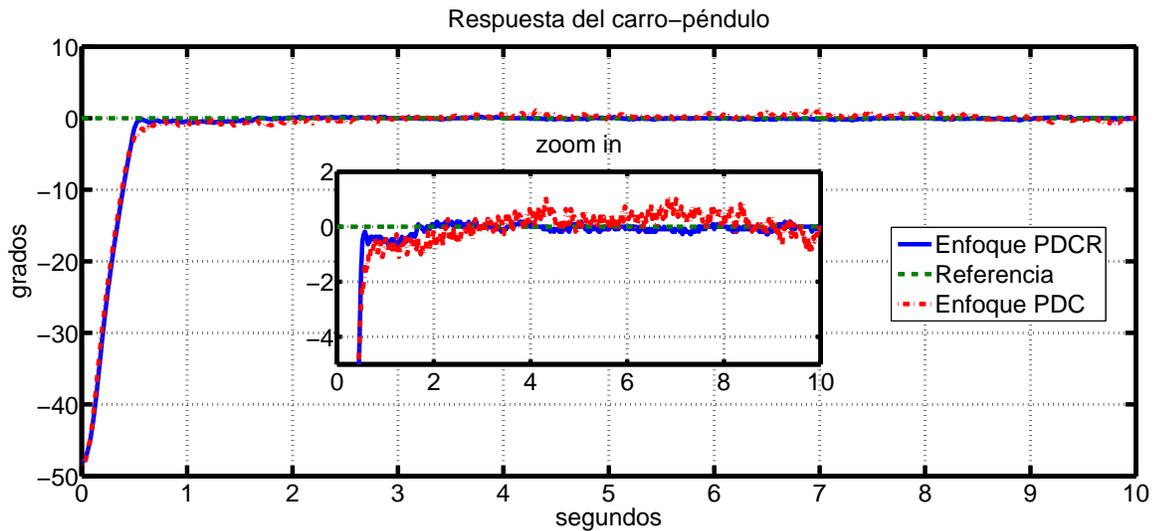


Figura 4.27: Respuesta del sistema carro-péndulo con perturbación en el péndulo

La imagen mostrada en la Figura 4.28 muestra el error con respecto a la referencia que en este caso es el punto de equilibrio inestable.

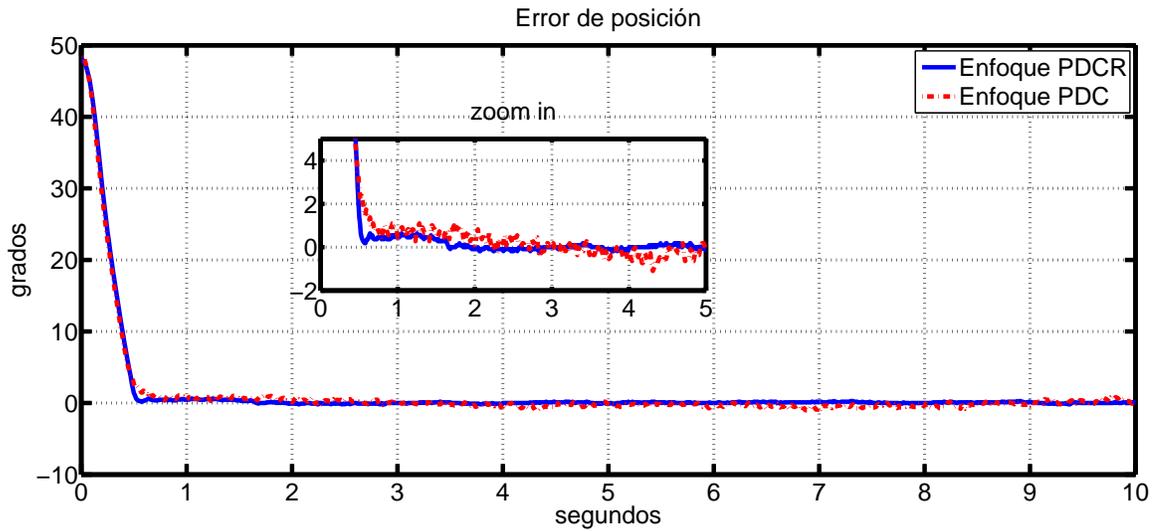


Figura 4.28: Error del sistema.

La Figura 4.29 muestra la cantidad de voltaje que la señal de control suministra al motor para estabilizar el sistema, las cuales fueron sintonizadas con el enfoque PDC y PDCR.

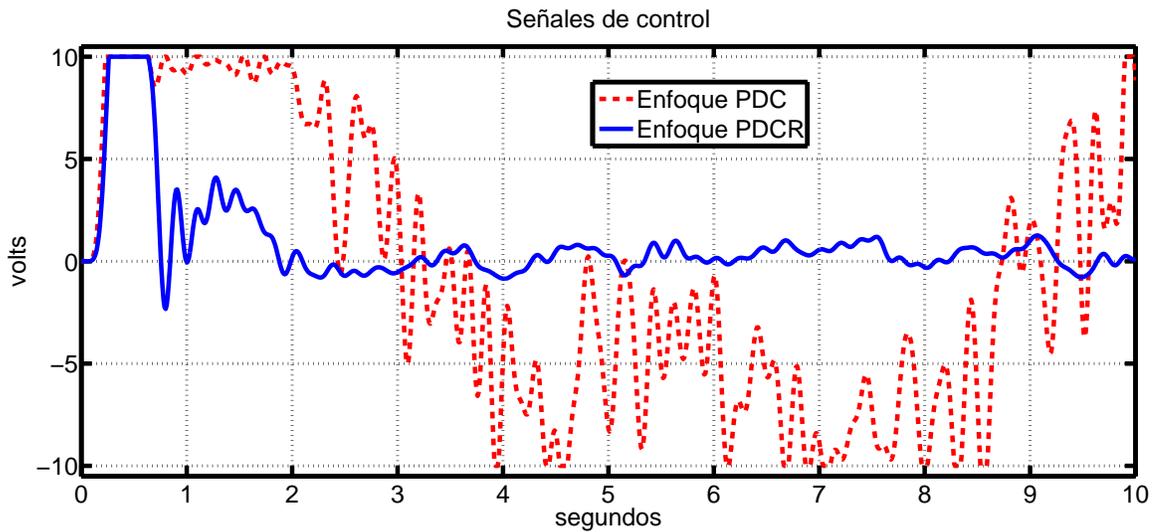


Figura 4.29: Señales de control aplicadas sistema carro-péndulo con perturbación en el péndulo.

La Figura 4.30 muestra la señales de control, posterior a la etapa de potencia.

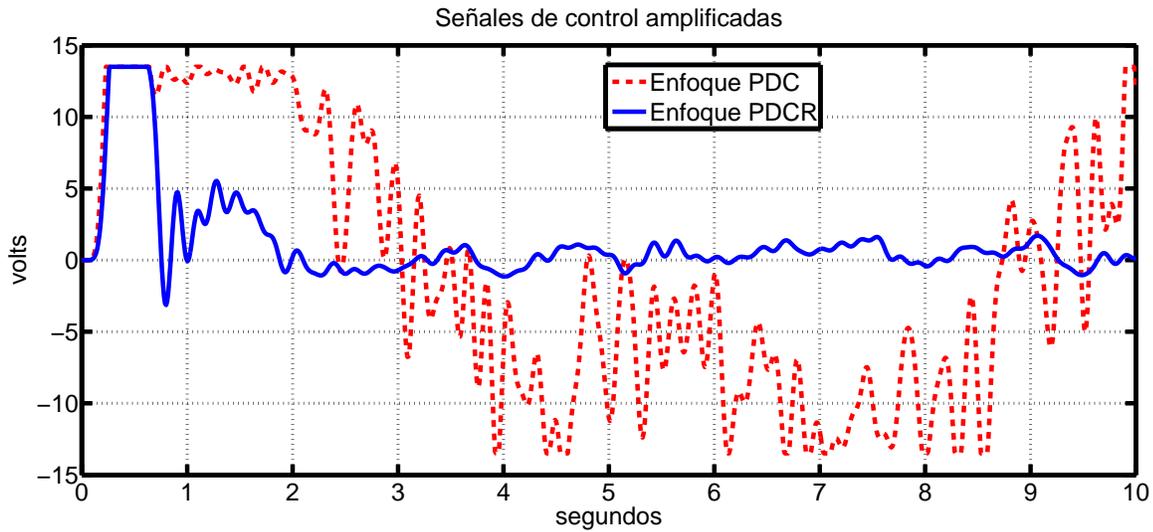


Figura 4.30: Señales de control posterior a la etapa de potencia, aplicadas al péndulo invertido.

La Figura 4.31 muestra la cantidad de corriente suministrada al motor.

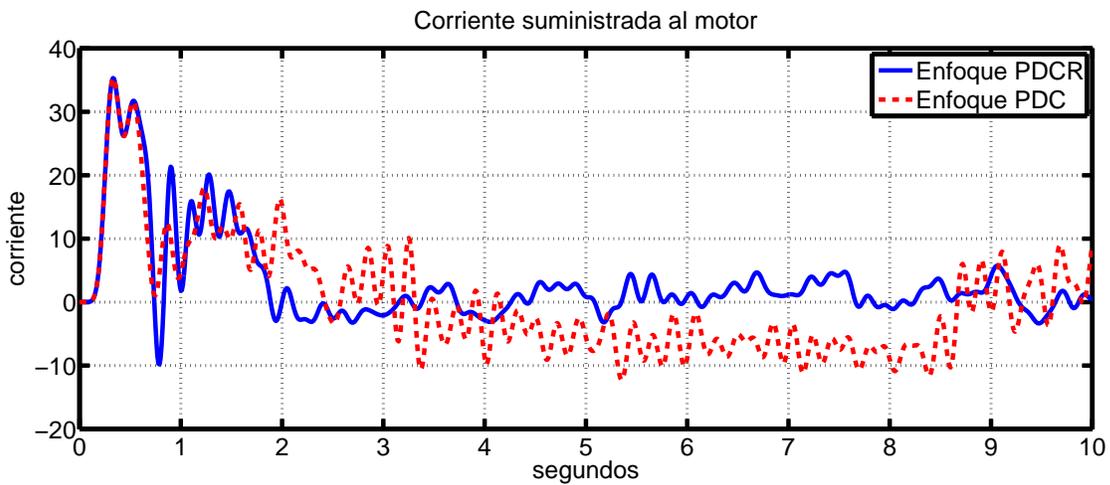


Figura 4.31: Corriente suministrada al motor de CD.

En lo sucesivo se presenta la Tabla 4.1, la cual muestra el valor correspondiente al error cuadrático medio de los 2 experimentos anteriores.

	Experimento 1	Experimento 2 (Caso 1)
Enfoque PDCR	0.1300	0.1543
Enfoque PDC	0.1563	0.2311

Tabla 4.1: Error cuadrático medio.

### 4.4.3. Experimento 3 (Seguimiento de trayectoria)

En esta sección se realiza un experimento donde la consigna aplicada es como lo muestra la Figura 4.32, con el fin de ver el desempeño de la ley de control difusa PR. Cabe mencionar, que el seguimiento de trayectoria no se aplica al carro, ya que la metodología PDCR se aplica a sistemas de segundo orden, aunque ya se están analizando las opciones para poder implementar al carro el seguimiento de la trayectoria, en la siguiente figura solo se muestra la respuesta obtenida con el enfoque PDCR, ya que el enfoque PDC, no muestra buenos resultados para esta ejemplificación. El sistema se inicializa con una condición inicial de  $33^\circ$  aproximadamente de acuerdo a la Figura 4.32, para este experimento el péndulo se inicializa arbitrariamente ya que no se presenta una comparación con el enfoque PDC.

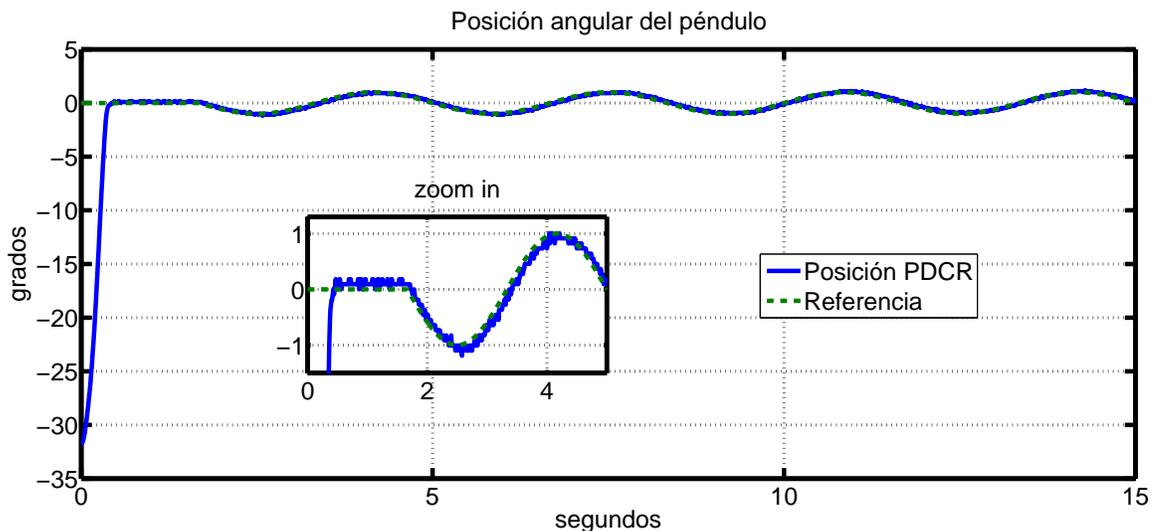


Figura 4.32: Seguimiento de trayectoria del péndulo.

La Figura 4.33 muestra la ley de control suministrada al sistema para poder realizar el seguimiento de trayectoria anterior.

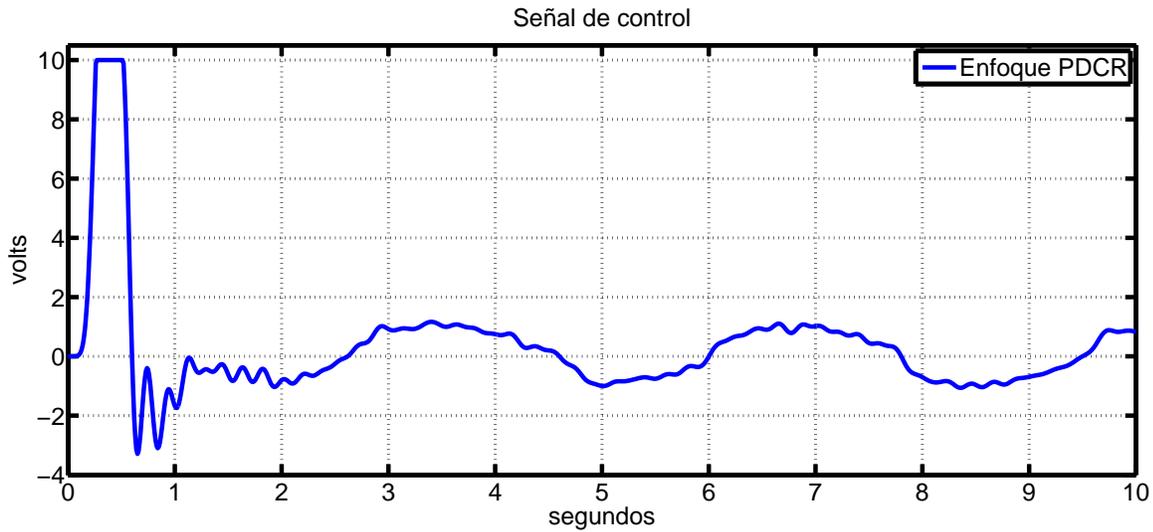


Figura 4.33: Señal de control aplicada al carro-péndulo para el seguimiento de trayectoria.

La Figura 4.34 muestra la señal de control, que se aplica al motor del péndulo invertido en sus terminales, después de pasar por la etapa de potencia.

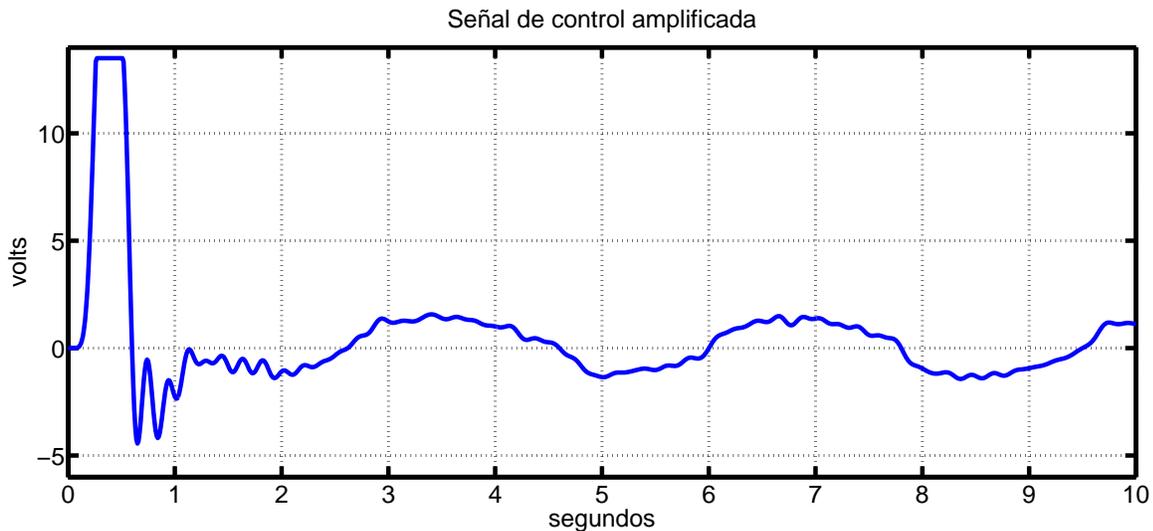


Figura 4.34: Señal de control amplificada, que se aplica al carro-péndulo para el seguimiento de trayectoria.

Finalmente la Figura 4.35 muestra el error de seguimiento de la consigna aplicada al SNL carro-péndulo con un error cuadrático medio de  $ECM = 0.0882$ .

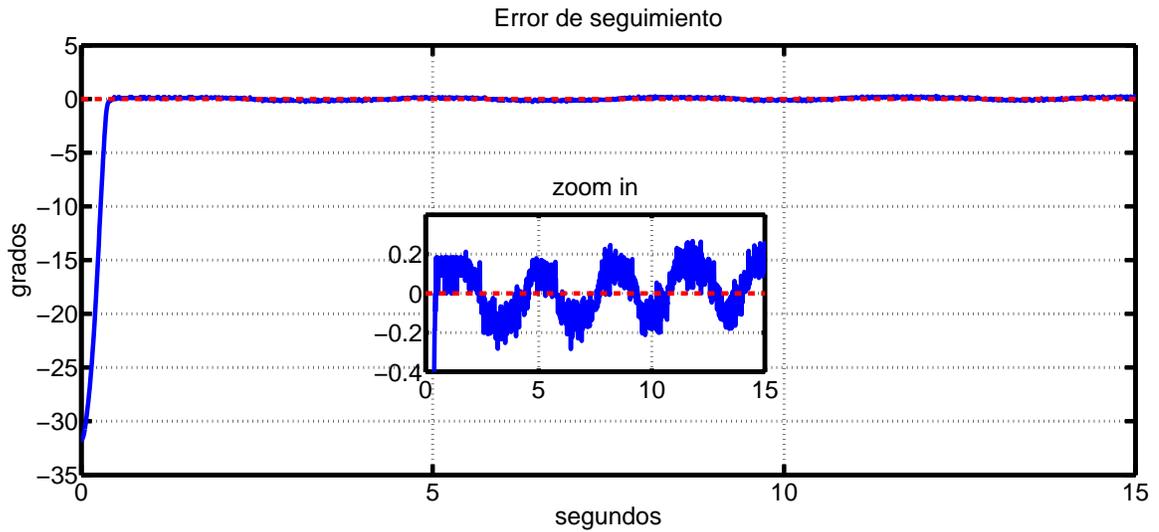


Figura 4.35: Error en el seguimiento de trayectoria.

Finalmente se realizan otros experimentos con una condición inicial diferente a los anteriores casos, para los siguientes resultados, la condición inicial es de aproximadamente  $32^\circ$ , con  $k_{p1} = -1250$ ,  $k_{r1} = -914.29$ ,  $\tau_1 = 0.014$ ,  $k_{p2} = -1250$ ,  $k_{r2} = -914.67$  y  $\tau_2 = 0.0179$ .

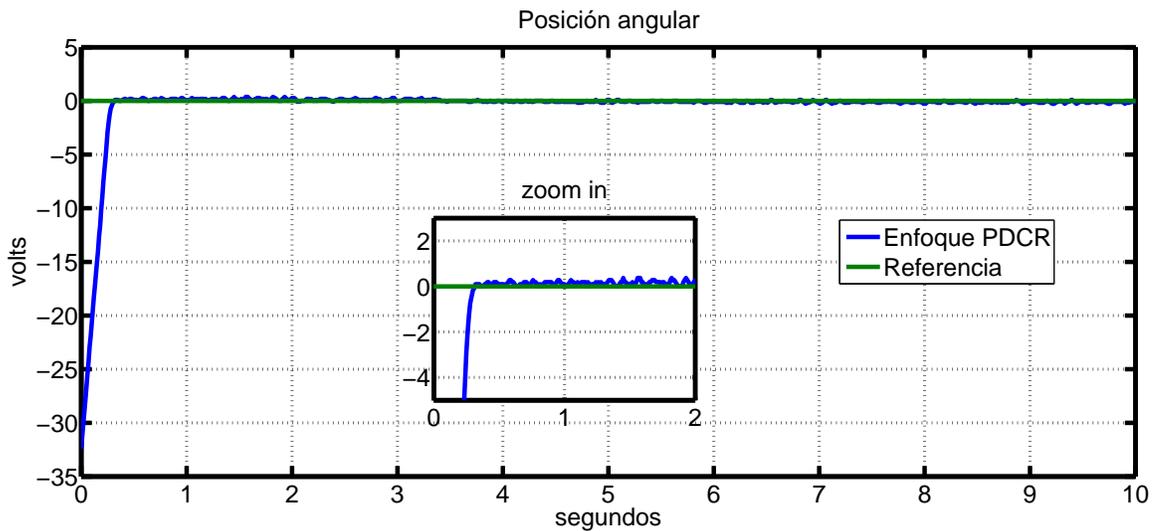


Figura 4.36: Posición angular.

La Figura 4.36 muestra la posición angular del péndulo. La Figura 4.37, muestra la señal de control suministrada por la tarjeta de adquisición de datos respectivamente.

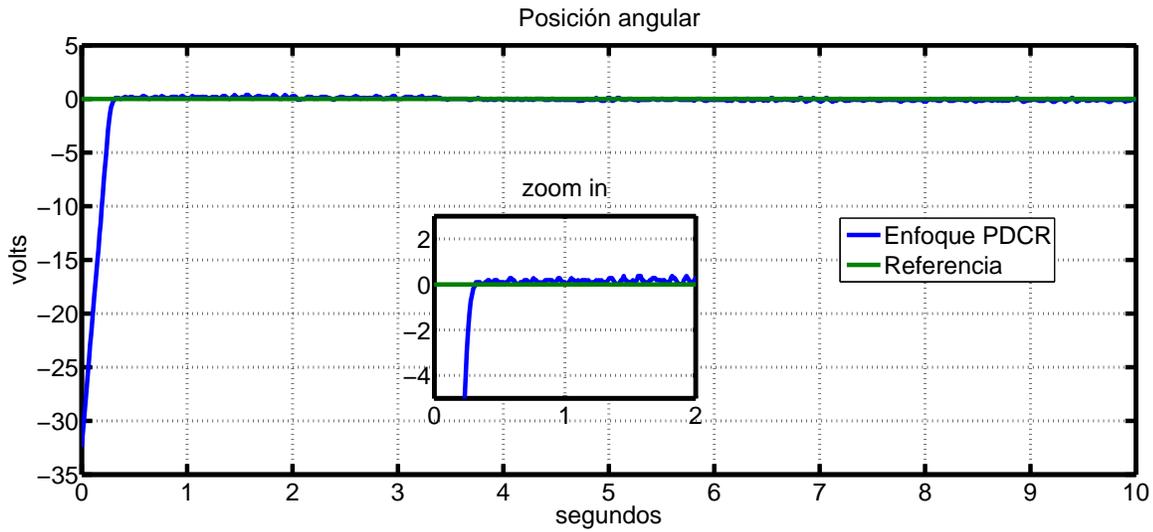


Figura 4.37: Señal de control difusa PR.

## 4.5. Comentarios

Se observa que el desempeño de acuerdo a la dinámica del error de la ley de control difusa PR en la experimentación es muy semejante a los resultados obtenidos en simulación, dando pie a considerar a la metodología aquí propuesta como una buena alternativa para el control de una cierta clase de SNL. Por otra parte, una limitante presente siempre es que se debe contar con el modelo matemático del sistema para poder realizar la sintonización de la ley de control.

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajo futuro

En este capítulo final, se presentan las conclusiones de la implementación de una ley de control del tipo (4.1) en un sistema no lineal de la forma (4.5), la cual se sintoniza a partir de su modelo difuso (4.8). Además se expone un listado de propuestas a futuro para la mejora y ampliación de este trabajo.

### 5.1. Conclusiones

El diseño y sintonización de una ley de control difusa proporcional retardada para  $\sigma$ -estabilizar un sistema difuso T-S se propone en este trabajo. Se ha mostrado que la  $\sigma$ -estabilidad se puede ser verificar en el dominio de la frecuencia mediante el empleo de diferentes programas o métodos numéricos. Para ilustrar los resultados teóricos obtenidos, se presenta la simulación del sistema no lineal péndulo invertido, además se realiza la implementación experimental correspondiente.

La estabilidad del sistema no lineal se mejora usando la PDCR en comparación al clásico PDC, ya que con la ley de control difusa PR tiende mas rápido a la referencia, también con ayuda del error cuadrático medio se puede ver que el desempeño es mejor en comparación al desempeño producido por el control difuso PD convencional. Además, la ley de control difusa PR tiene una menor demanda de energía lo que se traduce en un menor desgaste de los actuadores. También, esta ley de control puede ayudar a reducir costos, volumen, o ruido causado por los sensores de medición usados para aproximar la razón de cambio de algunas variables de estado, como la medición de la velocidad en ciertos casos. Como limitante se tiene que esta metodología solo se puede aplicar a sistemas de segundo orden y también que se debe contar con un modeló matemático muy exacto del sistema a controlar, para poder realizar una buena sintonización de la ley de control difusa PR y esta a su vez presente un buen desempeño. Así se considera que el enfoque PDCR puede ser una buena alternativa para controlar ciertos procesos.

## 5.2. Trabajo futuro

Dentro de los trabajos a futuro para mejorar y abarcar otros aspectos se propone

- Analizar la estabilidad en un enfoque temporal empleando funcionales de Lyapunov-Krasovskii
- Realizar el seguimiento de trayectoria, aplicado al carro y no sólo al péndulo
- Implementar un método difuso recursivo para obtener el modelo en línea
- Extender resultados a SNL con retardos
- Garantizar estabilidad con ley de control difusa PR discreta

# Glosario

**Control difuso**[3]. Un control difuso, es un controlador que contiene un mapeo que ha sido definido usando reglas *if – then*.

**Estado**[10]. El estado  $x(t_0)$  de un sistema en el tiempo  $t_0$ , es la información en  $t_0$ , que junto con la entrada  $u(t)$ , para  $t \geq t_0$ , determina de manera única la salida  $y(t)$ , para todo  $t \geq t_0$ .

**Grado de libertad**[27]. El número de movimientos que el subsistema del robot (mano) puede elegir. Es definido por el número de ejes de rotación y traslación a través del cual el movimiento puede ser obtenido.

**Hardware**[13]. Se le llama hardware al conjunto de los dispositivos de que consta una computadora.

**Modelo matemático**[29]. Es la descripción matemática de la predicción del funcionamiento de un sistema, antes de que éste pueda diseñarse en detalle o construirse físicamente.

**Par**[27]. Es la fuerza que tiende a producir rotación, el momento de giro del esfuerzo tangencial. Fuerza giratoria desarrollada por el motor.

**Robot**[40]. Un robot es un manipulador multifuncional reprogramable, diseñado para mover material, partes, herramientas, o dispositivos especializados mediante movimientos variables programados para el desempeño de una variedad de tareas.

**Sensor**[18]. Es un dispositivo que envía una señal la cual está relacionada con la medición de una cantidad física, tal como la temperatura, velocidad, presión, desplazamiento, aceleración, par, flujo, luz o sonido.

**Sistema en tiempo continuo**[10]. Un sistema es llamado sistema en tiempo continuo, si éste acepta señales en tiempo continuo como entradas y genera señales en tiempo continuo como salida.

**Sistema físico**[10]. Un sistema físico es un dispositivo o una colección de dispositivos existentes en el mundo real.

**Sistema lineal**[10]. Se dice que un sistema es lineal si cumple con los principios de homogeneidad y superposición.

**Sistema subactuado**[6]. En robótica significa tener menos actuadores que grados de libertad.

**Software**[13]. Se dice que los programas que corren sobre una computadora se les conoce como software.

# Bibliografía

- [1] Q. I. Educate (2002). *Linear Motion Servo Plants: IPO1, User Manual*.
- [2] C. Abdallah, P. Dorato, J. Benites-Read, and R. Byrne. Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems. In *American Control Conference, 1993*, pages 3106–3107, 1993.
- [3] R. Babuska. *Fuzzy and neural control*. Delft University of Technology, Netherlands, 2009.
- [4] A. Benitez-Morales, O. Santos, and L.E. Ramos-Velasco. Suboptimal robust linear visual servoing for an underactuated system with delays. In *Electronics, Communications and Computer (CONIELECOMP), 2010 20th International Conference on*, pages 79–84, 2010.
- [5] H. Berghuis and H. Nijmeijer. Global regulation of robots using only position measurements. *Systems and control letters*, 21(4):289–293, 1993.
- [6] L. Birglen, T. Laliberté, and C. M. Gosselin. *Underactuated Robotic Hands*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.
- [7] Y.-Y. Cao and P. M. Frank. Stability analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via linear takagi–sugeno fuzzy models. *Fuzzy sets and systems*, 124(2):213–229, 2001.
- [8] Y.-Y. Cao and P.M. Frank. Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 8.
- [9] S. C. Chapra and R. P. Canale. *Métodos numéricos para ingenieros*. McGrawHill, México, 2007.
- [10] C.-T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, New York, 1999.

- 
- [11] Chiang-Cheng Chiang. Decentralized robust fuzzy-model-based control of uncertain large-scale systems with input delay. In *Fuzzy Systems, 2006 IEEE International Conference on*, pages 498–505, 2006.
- [12] Kenneth L Cooke and Zvi Grossman. Discrete delay, distributed delay and stability switches. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 86(2):592–627, 1982.
- [13] P. Deitel and H. Deitel. *C++ How to program*. Prentice Hall, Boston, 2012.
- [14] K. Gu, J. Chen, and V. Kharitonov. *Stability of Time-Delay Systems*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [15] J. Hale and S. Verduyn. *Introduction to functional differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [16] C-C Hang, K.J. Astrom, and W. K. Ho. Refinements of the ziegler-nichols tuning formula. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings D*, 138(2):111–118, 1991.
- [17] Y.J. Huang, T.C. Kuo, and H.K. Lee. Fuzzy-pd controller design with stability equations for electro-hydraulic servo systems. In *Control, Automation and Systems, 2007. ICCAS '07. International Conference on*, pages 2407–2410, 2007.
- [18] D. Ibrahim. *Microcontroller Based Applied Digital Control*. John Wiley and Sons, Ltd, England, 2006.
- [19] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliff, 1980.
- [20] R. Kelly, R. Ortega, A. Ailon, and A. Loria. Global regulation of flexible joint robots using approximate differentiation. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 39(6):1222–1224, 1994.
- [21] S. Leghmizi and Sheng Liu. Takagi-sugeno fuzzy pd controller for a 3-dof stabilized platform. In *Intelligent Control and Automation (WCICA), 2012 10th World Congress on*, pages 108–112, 2012.
- [22] C. Lin, Q.-G. Wang, T. H. Lee, and Y. He. *LMI Approach to Analysis and Control of Takagi-Sugeno Fuzzy Systems with Time Delay*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.
- [23] Chyi-Yeu Lin, Le Duc Hanh, and Yi-Pin Chiu. Catching algorithm for 2d robot manipulator using pd controller. In *ICCAS-SICE, 2009*, pages 46–50, 2009.

- 
- [24] O. Schutze M. Dellnitz and Q. Zheng. Locating all the zeros of an analytic function in one complex variable. *Computational and Applied Mathematics*, 138(2).
- [25] J.H. Mathews and K.D. Fink. *Métodos numéricos con MatLab*. Prentice-Hall, Madrid, 2000.
- [26] L. Mejlbro. *Complex functions examples C-9: The argument principle and many-valued functions*. Leif Mejlbro and Ventus Publishing ApS, Denmark, 2008.
- [27] Shimon N. *Handbook of Industrial Robotics*. John Wiley and Sons, Japón, 1999.
- [28] S. Nicosia and P. Tomei. A tracking controller for flexible joint robots using only link position feedback. In *Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on*, volume 2, pages 1817–1822 vol.2, 1994.
- [29] K. Ogata. *Dinámica de sistemas*. Prentice Hall, México, 1987.
- [30] A.W. Olbrot, Michael P. Polis, and C. U T Igwe. Robust stability of distributed parameter systems. In *Decision and Control, 1990., Proceedings of the 29th IEEE Conference on*, pages 2943–2948 vol.6, 1990.
- [31] R. Ortega, R. Kelly, and R. Lozano-Leal. On global stability of adaptive systems using an estimator with parameter freezing. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 34(3):343–346, 1989.
- [32] R. Bellman and K. L. Cooke. *Differential-Difference Equations*. Academic Press, New York, 1963.
- [33] S. Sumathi S. N. Sivanandam and S.N. Deepa. *Introduction to Fuzzy Logic using MATLAB*. Springer, Heidelberg, 2007.
- [34] A. A. Samarski. *Introducción a los métodos numéricos*. Mir Moscú, URSS, 1986.
- [35] O Santos. *Robustez e implantación de leyes de control con retardos distribuidos*. Tesis de maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México, 1999.
- [36] D. Simhachalam, C. Dey, and R.K. Mudi. An auto-tuning pd controller for dc servo position control system. In *Power, Control and Embedded Systems (ICPCES), 2012 2nd International Conference on*, pages 1–6, 2012.
- [37] J. J. E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1991.
- [38] D. M. Smith. *Engineering Computation with MATLAB*. Prentice Hall.

- [39] Mark W Spong. Underactuated mechanical systems. In *Control Problems in Robotics and Automation*, pages 135–150. Springer, 1998.
- [40] M.W. Spong and S. Hutchinson. *Robot Modeling and Control*. Wiley.
- [41] I.H. Suh and Z. Bien. Proportional minus delay controller. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 24(2):370–372, 1979.
- [42] I.H. Suh and Z. Bien. Use of time-delay actions in the controller design. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 25(3):600–603, 1980.
- [43] George M. Swisher and Shing Tenqchen. Design of proportional-minus-delay action feedback controllers for second- and third-order systems. In *American Control Conference, 1988*, pages 254–260, 1988.
- [44] K. Tanaka and H. O. Wang. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis*. JOHN WILEY & SONS, INC., New York, 2001.
- [45] R. Villafuerte, S. Mondie, and R. Garrido. Tuning of proportional retarded controllers: Theory and experiments. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 21(3):983–990, 2013.
- [46] A. Visioli. *Practical PID Control*. Springer, London, 2006.
- [47] T. Vyhlídal and P. Zítek. Mapping based algorithm for large-scale computation of quasi-polynomial zeros. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 54(1):171–177, 2009.
- [48] Z. H. Wang and H. Y. Hu. Calculation of the rightmost characteristic root of retarded time-delay systems via lambert w function. *Sound and Vibration*, 86(4).
- [49] Yan Zhao and Huijun Gao. Fuzzy-model-based control of an overhead crane with input delay and actuator saturation. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 20(1):181–186, 2012.
- [50] Yan Zhao, Huijun Gao, J. Lam, and Baozhu Du. Stability and stabilization of delayed t–s fuzzy systems: A delay partitioning approach. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 17(4):750–762, 2009.
- [51] J. G. Ziegler and N. B. Nichols. Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the A. S. M. E.*, 1942.

# Apéndice A

## Códigos de programa empleados

En este apéndice, se muestran los diversos códigos empleados para la correcta sintonización del controlador difuso PR.

### A.1. Código del método numérico para la obtención de las raíces de un cuasipolinomio

Esta sección muestra el código correspondiente al método numérico realizado para la obtención de las raíces de un cuasipolinomio. Esta primera parte de código que se muestra a continuación se realiza la llamada a la función para la aproximación de las raíces, además de que se declara el cuasipolinomio.

```
% El presente programa se emplea para la obtención de las raíces de un
% cuasipolinomio, dicho programa está basado en el principio del argumen-
to,
% el cual hace la evaluación del cuasipolinomio en un cierto contorno
% creando así los contornos de Mikhailov, con los cuales se mide cuántas
% veces dicha región encierra el cero, para determinar el número de
% raíces la región del plano complejo analizado. La forma de usarlo
% es la siguiente:
%
%   D-Región analizada denotada como [alfaMin,alfaMax,betaMin,betaMax]
%   alfaMin-Límite inferior del contorno en el eje real.
%   alfaMax-Límite superior del contorno en el eje real.
%   betaMin-Límite inferior del contorno en el eje imaginario.
%   betaMax-Límite superior del contorno en el eje imaginario.
%   QP-Cuasipolinomio expresado en términos de la variable simbólica s
%   h-Valor del retardo en el cuasipolinomio.
```

```

%      tol-Precisi\on de la raiz deseada.
%
% Ejemplo
% syms s
% alfaMin=-20;
% alfaMax=20;
% betaMin=-5;
% betaMax=5;
% tol=.01;
% h=1;
% QP= 45*s^5+5*s^3+2*s+3-exp(-h*s);
% Raiz=RaicesArgumento(alfaMin,alfaMax,betaMin,betaMax,QP,tol);
tic
clear all
clc
syms s
alfaMin=-200;
alfaMax=0;
betaMin=-800;
betaMax=800;
tol=.001;
%h=1;
%QP=s^2+3-exp(-h*s);
%QP= 45*s^5+5*s^3+2*s+3-exp(-h*s);
%QP=s^50+5*cos(s)*sin(s)+3;
%QP=s^50+s^12-5*sin(20*s)*cos(12*s)-1;
QP=s^2+300.3529412-220.9873444*exp(-0.057701095075350*s);
%QP=s^3+3.1*s+(1.8*s^3+2.3)*exp(-0.31*s)+1.9*s^2*exp(-1.43*s)+0.7*exp(-
2.5*s)
[Raiz,Con]=RaicesArgumento(alfaMin,alfaMax,betaMin,betaMax,QP,tol);
toc

```

El código correspondiente a la llamada de la función *RaicesArgumento* es el siguiente

```

function [Rt,MCo]=RaicesArgumento(alfaMin,alfaMax,betaMin,betaMax,QP,tol)

Xmin = alfaMin;
Xmax = alfaMax;
Ymin = betaMin;
Ymax = betaMax;

```

```

Z(:,1)=[Xmin;Xmax;Ymin;Ymax];
%numero de puntos en x
Npx =110;
%numero de puntos en y
Npy =110;

% inicializacion de matriz A

MCo=[];

t1 = Z(2,1)-Z(1,1);

while t1 >= tol

    Tf = size(Z);

    ZZ = [];
    MM = [];
    MQ = [];
    for k=1:Tf(2)

        % nuevos contornos
        [Co,PCo] = periphery(Z(:,k),Npx,Npy);
        % evaluacion del contorno en el cuasipolinomio
        Mk = subs(QP,Co);
        % calculo del argumentos
        In = ArgumentApproach(Mk);
        % puntos extremos del contorno que tienen por lo menos
        %una ra\`iz
        PP = PCo(:,In(:,1));
        ZZ = [ZZ,PP];
        % Matriz con los contornos que tienen por lo menos una
        %ra\`iz
        C = Co(:,In(:,1));
        %guardar evaluaci\`on de cuasipolinomio
        MQ = [MQ,Mk(:,In(:,1))];
        % guarda el total de contornos que tienen por lo menos
        %una ra\`iz

```

```

    MCo = [MCo,C];
    % guarda solo los contornos de cada corrida
    MM = [MM,C];

end

Z = ZZ;
% redefine tolerancia
t1 = Z(2,1)-Z(1,1);

end

% distancia del cero a cada punto del contorno
    Dis = sqrt( (real(MQ).^2) + (imag(MQ).^2) );
% distancia minima del contorno a cero
    [RR, InR]= min(Dis);
% punto del contorno mas cercana a la raiz
    for l=1:length(InR)
        Rt(l) = MM(InR(l),l);
    end

display('Numero de raices en cada contorno')
length(Rt)
display('Raices del cuasi-polinomio')
flipud(transpose(Rt))
plot(Rt,'*r')

la cual, a su vez consta de dos funciones, la primera de ella que se nombra como
periphery, que se encarga de dividir la región dada, en 4 nuevas regiones, cuyo código
es

function [Co,PCo] = periphery(Z,Npx,Npy)

    % punto medio en x
    pmx = (Z(2)+Z(1))/2;
    % punto medio en y
    pmy = (Z(4)+Z(3))/2;

    X = [linspace(Z(1),pmx,Npx),linspace(pmx,Z(2),Npx)];

```

```

Y = [linspace(Z(3),pmy,Npy),linspace(pmy,Z(4),Npy)];

% se crean los 4 nuevos contornos
P1 = [X(1:Npx)+Y(1)*i,X(Npx)+Y(2:Npy)*i,fliplr(X(1:Npx-1))+
Y(Npy)*i,X(1)+fliplr(Y(1:Npy-1))*i];
P2 = [X(1:Npx)+Y(Npy+1)*i,X(Npx)+Y(Npy+2:2*Npy)*i,
fliplr(X(1:Npx-1))+Y(2*Npy)*i,X(1)+fliplr(Y(Npy+1:(2*Npy)-1))*i];
P3 = [X(Npx+1:2*Npx)+Y(1)*i,X(2*Npx)+Y(2:Npy)*i,fliplr(X(Npx+1:
(2*Npx)-1))+Y(Npy)*i,X(Npx)+fliplr(Y(1:Npy-1))*i];
P4 = [X(Npx+1:2*Npx)+Y(Npy+1)*i,X(2*Npx)+Y(Npy+2:2*Npy)*i,
fliplr(X(Npx+1:(2*Npx)-1))+Y(2*Npy)*i,X(Npx)+fliplr(Y(Npy+1:(2*Npy)-
1))*i];

% puntos principales de cada contorno
PCo = [ Z(1),pmx,Z(3),pmy;Z(1),pmx,pmy,Z(4);pmx,Z(2),
Z(3),pmy; pmx,Z(2),pmy,Z(4)]';

% total de contornos
Co = [transpose(P1),transpose(P2),transpose(P3),transpose(P4)];

```

por otra parte con la función *ArgumentApproach* se verifica la variación del argumento en cada uno de los contornos de Mikhailov, guardando las regiones donde existe raíz alguna; su código fuente es

```

function IN= ArgumentApproach(Mk)

% indice de conteo
InS = 1;
Mk= double(Mk);
% parte real del contorno
RMk = real(Mk);
% parte imaginaria del contorno
IMk = imag(Mk);
% dimencion de la matriz
Tk = size(RMk);

for dx=1:Tk(2)

    for aa=1:Tk(1)-1

```

```

% punto inicial
x = [RMk(aa,dx);IMk(aa,dx)];
% punto final
y = [RMk(aa+1,dx);IMk(aa+1,dx)];
% angulo
T(aa,dx) = real( acos((x'*y)/(norm(x)*norm(y))) );
% cuadrante
C = Cuadrante(x,y);
mi = x(2)/x(1);
mf = y(2)/y(1);
% Casos cuando el Angulo es negativo
if ( (C(1)==C(2))&&(mi>=mf) ) || ( (C(1)+C(2)==4) ||
(C(1)+C(2)==6) ) && (mi<=mf) && (T(aa,dx)>(pi/2)) ) ||
( (C(1)==C(2)+1) || (C(1)==1 && C(2)==4) ) )
    T(aa,dx)=-T(aa,dx);
end

end

% suma de angulos
SumT(dx) = abs(sum(T(:,dx))/(2*pi));

if 0.95<SumT(dx)

% contorno donde hay raices
IN(InS,:) = [dx,SumT(dx)];

InS = InS+1;
end

end

```

finalmente la función anterior cuenta con otra subfunción para determinar el cuadrante a partir del cual se comienza a medir el ángulo y de esta forma determinar el signo del mismo, todo esto de la manera siguiente

```

function [C] = Cuadrante(X,Y)
Xi=X(1);

```

```

Yi=X(2);
Xf=Y(1);
Yf=Y(2);
if (Xi>=0)&&(Yi>=0)
    C1 = 1;
end
if (Xi<0)&&(Yi>=0)
    C1 = 2;
end
if (Xi<0)&&(Yi<0)
    C1 = 3;
end
if (Xi>=0)&&(Yi<0)
    C1 = 4;
end
if (Xf>=0)&&(Yf>=0)
    C2 = 1;
end
if (Xf<0)&&(Yf>=0)
    C2 = 2;
end
if (Xf<0)&&(Yf<0)
    C2 = 3;
end
if (Xf>=0)&&(Yf<0)
    C2 = 4;
end
C=[C1;C2];

```

## A.2. Regiones de estabilidad

Cada región de estabilidad es generada con el código siguiente

```

clc;
clear all;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Subsistemas difusos
%%%Planta real parametros
% % % M    -->   Masa del Carro en Kilogramos
Ma = 0.52;
% % % m    -->   Masa del Pendulo en Kilogramos

```



```

% Ganancias que garantizan la m\'axima cota de decaimiento para una sig-
ma dada
%  $KP = ((s-d*w)^2+(w^2)+((w*d)^2))/(b)$ 
%  $H = -(2*(d*w-s))/(-(w^2)+(s^2)-2*d*w*s+b*KP)$ 
% %ganancia retardada optima
%  $KR = -(2*(d*w-s))/(b*H*\exp(s*H))$ 

w = w2;

b = b2;

s = 3;

% Condici\'on que debe satisfacer kp
%  $kp = -(s-d*w)^2-w^2-d^2*w^2)/b$ 

% %ganancia proporcional
kp= -1500;

%numero de particiones sobre h debe ser par y mayor a 10 (2n>10)
n_h=5000;

%limite de la cota exponencial "sigma"
s_op = sqrt(-w^2-b*kp)
%retardo optimo
h_op= -(2*(-s_op))/(-(w^2)+(s_op^2)-b*kp)
%ganancia retardada \'optima
kr_op= -(2*(-s_op))/(-b*h_op*\exp(s_op*h_op))

%pause
n=n_h+(n_h/2)+1;

X(1,:)=h_op*ones(1,n);
Y(1,:)=kr_op*ones(1,n);
Z(1,:)=kp*ones(1,n);

M(1,:)= [kp,h_op,kr_op,s_op];

```

```

%grafica del punto \optimo
figure(4)
xlabel('h')
ylabel('k_r')
zlabel('k_p')
grid on
hold on

plot3(h_op,kr_op,kp,'r*')

%sigma-estabilidad del sistema
kk=1;
for s=1e-3:s_op/5:s_op

kk=kk+1;
tt=0;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%punto maximo derecho (w2=s0)
max_d= sqrt( 2*(-(s^2) - (w^2) - (b*kp) ) );
%valor donde se indetermina la acot(w_2)
pru= sqrt(s^2 - (w^2) - b*kp);

if pru>max_d,

    fin=max_d;

else
    fin=pru-0.00001;
end

%definiendo el paso 1
paso=(max_d-0.00001)/n_h;

for x=0.00001:paso:fin,

    tt=tt+1;

```

```

aa = ( (s^2) - (x^2) - (w^2) - b*kp )/(2*x*s);
h_min = (1/x)*acot( aa );
kr_min = -( 2*x*s ) / ( b*exp(s*h_min)*sin(h_min*x) );

X(kk,tt)=h_min;
Y(kk,tt)=kr_min;
Z(kk,tt)=kp;

end

for x=x+paso:paso:max_d,

    tt=tt+1;
    aa1 = ((s^2) -(x^2) -(w^2) - b*kp )/(2*x*s);
    h1_min = (1/x)*acot( aa1 ) + (pi/x) ;
    kr1_min = -(2*x*s)/(b*exp(s*h1_min)*sin(h1_min*x));

    X(kk,tt) = h1_min;
    Y(kk,tt) = kr1_min;
    Z(kk,tt) = kp;

end
%definiendo paso 2
h_iz = X(kk,1);
h_der = X(kk,tt);
paso2= (h_der-h_iz)/(n_h/2);

for x=h_der:-paso2:h_iz,

    hh = x;
    K1 =( s^2-(w^2)-b*kp )/( -b*exp(hh*s) );

    X(kk,tt)=hh;
    Y(kk,tt)=K1;
    Z(kk,tt)=kp;
    tt=tt+1;
end

```

```

hold on
plot3(X(kk,:),Y(kk,:),Z(kk,:),'b')
plot3(h_op,kr_op,kp,'r*')

end

j=1;
for s=0:0.01:2*s_op

    h(j)= (2*s)/(-(w^2)+(s^2)-(b*kp) );
    K1(j)= -( s^2-(w^2)-(b*kp) )/( b*exp(h(j)*s) );
    z3(j)=kp;
    j=j+1;
end

hold on
plot3(h,K1,z3,'g')%,h,K

```

### A.3. Código en conjunto para sintonización de la ley de control

Aquí se unen todos los programas realizados para sintonizar la ley de control de manera algebraica o mediante sus regiones de estabilidad y a la vez verificar la estabilidad del sistema en el dominio de la frecuencia.

```

clear all
clc

%%%%%%%%%%%%%%Subsistemas difusos
%%%Planta real parametros
% % % M    -->   Masa del Carro en Kilogramos
M = 0.52;
% % % m    -->   Masa del Pendulo en Kilogramos
m = 0.23;
% % % l    -->   Longitud al centro de gravedad del pendulo en metros

```

```

l = 0.32;
% % % g    -->    Constante de gravedad
g=9.8;
beta=cos(88*(pi/180));
gamma=cos(45*(pi/180));
alfa=sin(45*(pi/180));
a=1/(m+M);
%%%%%%%%%%%%Seleccion de subsistema
caso=2;
%%%%%%%%%%%%
switch caso
    case 1
        %%%%%%%%%%%%%Modelo alrededor de 0
        A=[0 1;g/(4*l/3-a*m*1) 0];
        B=[0;-(a/(4*l/3-a*m*1))];
    case 2
        %%%%%%%%%%%%%Modelo alrededor de pi/4
        A=[0 1;(((4*g*(4*l/3-a*m*1*gamma^2)*(alfa+gamma)-alfa)/pi)/
        (4*l/3-a*m*1*gamma^2)) 0];
        B=[0;(-a*((4*l/3-a*m*1*gamma^2)*(gamma-alfa)+gamma))/
        (4*l/3-a*m*1*gamma^2)];

    otherwise
        disp('Opcion incorrecta')

end
%%%%%%%%%%%%Modelo alrededor de pi/4
% A=[0 1;(((4*g*(4*l/3-a*m*1*gamma^2)*(alfa+gamma)-alfa)/pi)/
(4*l/3-a*m*1*gamma^2)) 0];
% B=[0;(-a*((4*l/3-a*m*1*gamma^2)*(gamma-alfa)+gamma))/
(4*l/3-a*m*1*gamma^2)];

v=sqrt(A(2,1));
% v^2=A(2,1);
delta=A(2,2)/2*v;

b=abs(B(2));
kp=-1500;
%kp=-v^2/b
%pause

```

```

wa=0;
epsi=.0000000005;
inিসigma=delta*v+epsi;%.2;
s_o=sqrt(-v^2-b*kp);
ps=(s_o-inিসigma)/5;
c1=1;
for sigma=inিসigma:ps:s_o

wb=sqrt(sigma^2-v^2-b*kp);
wc=sqrt(2*(-v^2+sigma^2-b*kp));
if wc>wb
    we=wb;
else
    we=wc-.000001;
end
n=1;
li=(2*sigma)/(sigma^2-v^2-b*kp);
ls=(1/wc)*acot((-wc^2+sigma^2-v^2-b*kp)/(2*(sigma)*wc))+pi/wc;
pw=(ls-li)/5000;
h_up=li:pw:ls;
Kr1=(-sigma^2+v^2+b*kp)./(b*exp(h_up.*sigma));
pw2=(wc-epsi)/5000;
c=1;
for w=epsi:pw2:wc
    if w<=we
        h(c,:)=(1/w)*acot((-w^2+sigma^2-v^2-b*kp)/(2*(sigma)*w));
        Kr2(c,.)=(-2*w*sigma)/(b*exp(sigma*h(c,))*sin(h(c,)*w));
        c=c+1;
    else
        h(c,.)=(1/w)*acot((-w^2+sigma^2-v^2-b*kp)/(2*(sigma)*w))+(pi/w);
        Kr2(c,.)=(-2*w*sigma)/(b*exp(sigma*h(c,))*sin(h(c,)*w));
        c=c+1;
    end
end

H(:,c1)=[transpose(h_up);flipud(h)];
Kr(:,c1)=[transpose(Kr1);flipud(Kr2)];
c1=c1+1;
end
plot(H,Kr)

```



# Apéndice B

## Diagramas a bloques de las pruebas experimentales

Se presentan los diagramas de bloques que se emplean para las pruebas experimentales, así como para la simulación. En la implementación se hace uso del módulo Real-Time Windows Target.

### B.1. Diagrama a bloques con el enfoque PDCR

El esquema general del diagrama a bloques con una ley de control difusa PR empleado, se muestra en la Figura B.1.

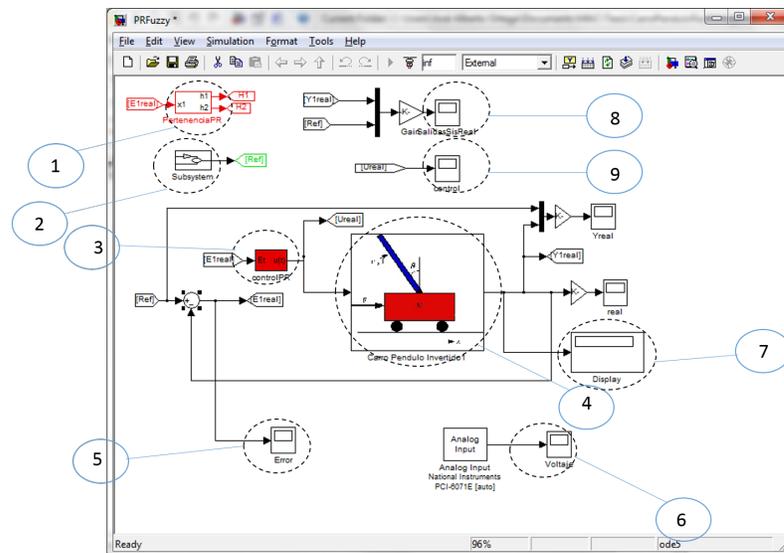


Figura B.1: Diagrama a bloques de la experimentación empleando el control difuso PR.

El cual a grandes rasgos se encuentra conformado por un bloque para generar la señal de referencia marcado con el número 2, el que a su vez posee un switch selector de la señal de referencia como el de la Figura B.2

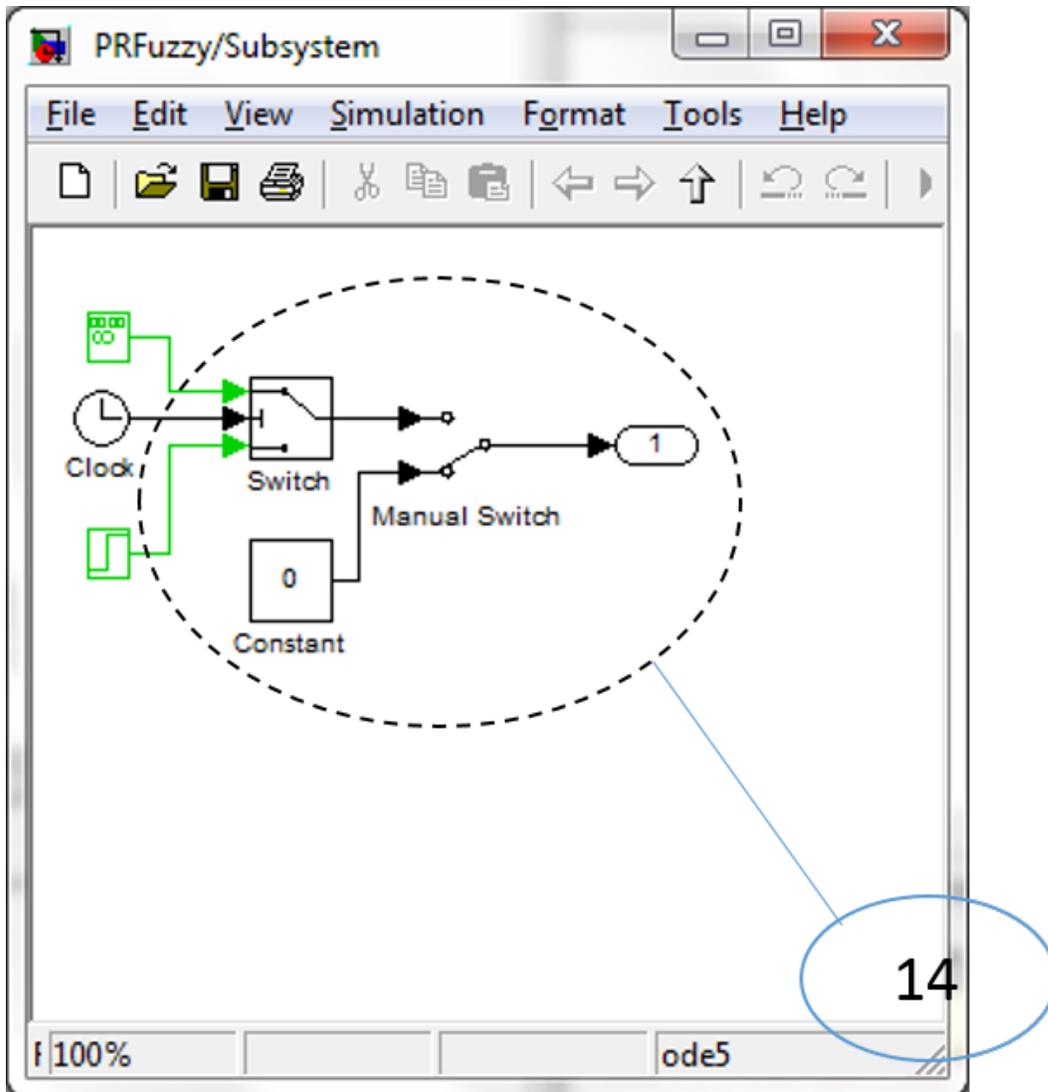
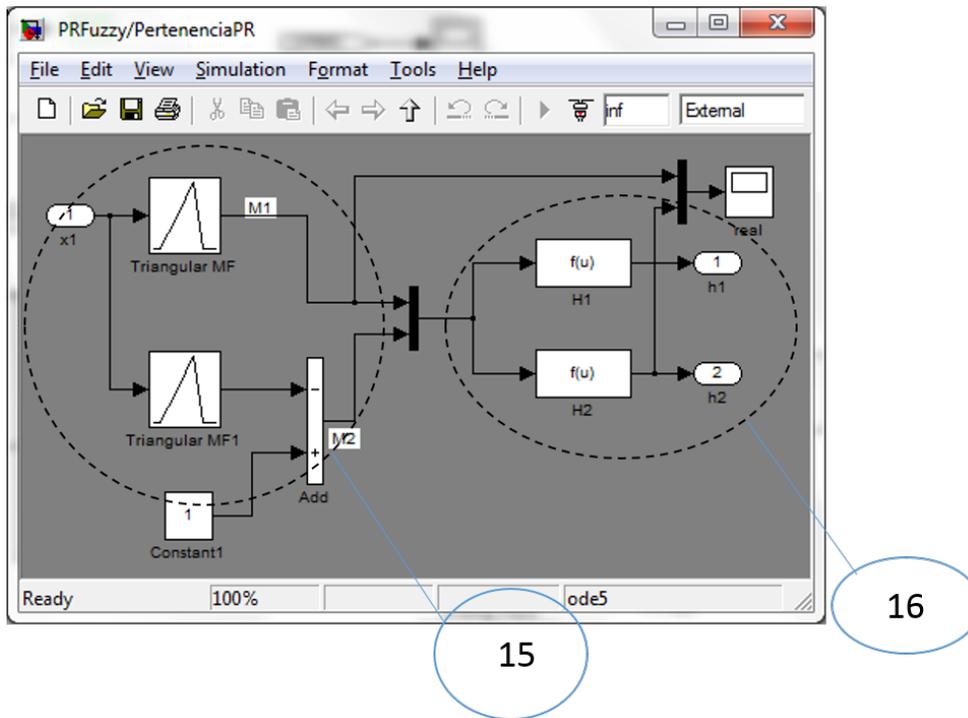
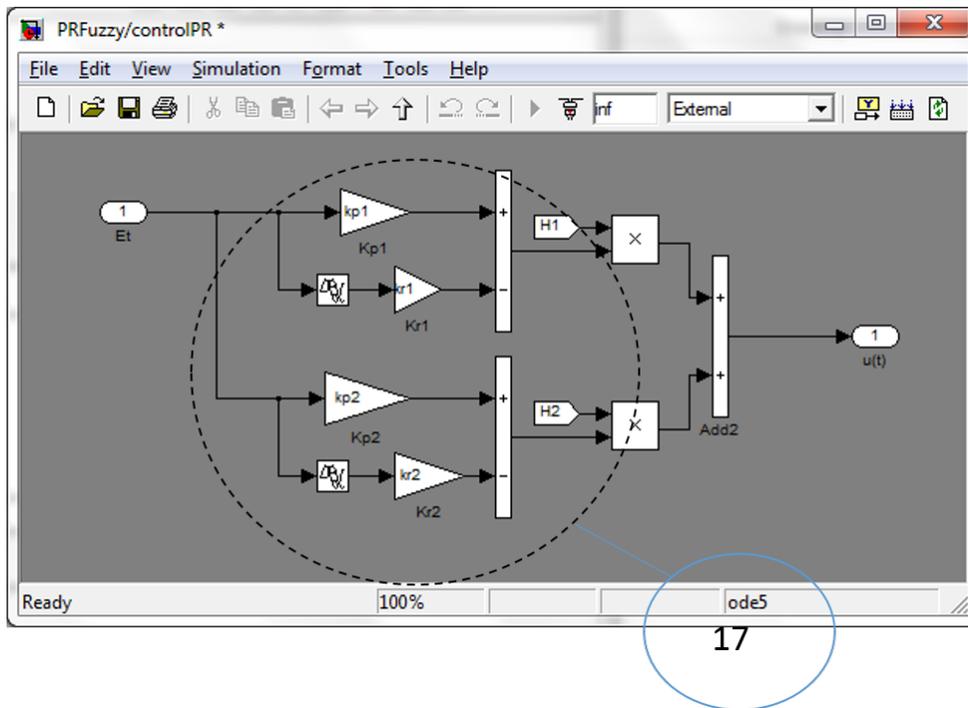


Figura B.2: Señal de referencia.

además un bloque para las funciones de membresía empleadas, ver Figura B.3a y el bloque donde se programa la ley de control difusa PR, mostrada en la Figura B.3b.



(a)



(b)

Figura B.3: B.3a Funciones de membresía. B.3b Ley de control difusa PR.

Finalmente también se programa el bloque de la Figura B.4, donde se indican tanto la entrada analógica a través de la cual se mide la posición angular de la barra, como la salida analógica, ocupada para enviar la señal de control al sistema.

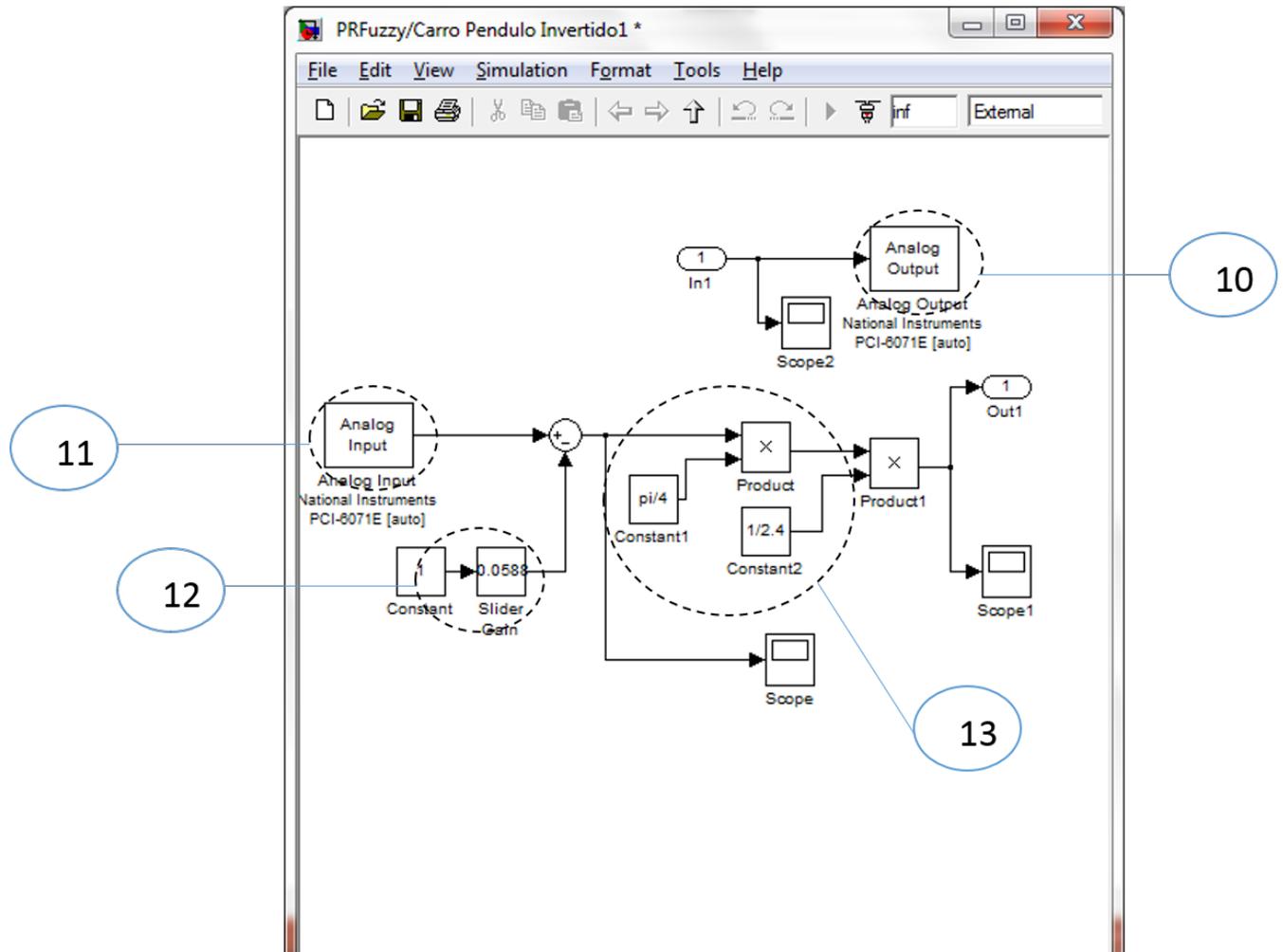


Figura B.4: Entradas y salidas analógicas para el control de la planta.

La Tabla B.1 da una descripción más detallada acerca de la numeración descrita en las imágenes anteriores.

Numeración	Descripción
1	Base de reglas e inferencia difusa.
2	Señal de referencia.
3	Señal de control.
4	Bloque de declaración de las entradas y salidas analógicas.
5	Ploteo de la señal de error.
6	Ploteo del voltaje en la resistencia shunt.
7	Medición de la posición angular.
8	Ploteo de la señal de referencia y posición angular del péndulo.
9	Ploteo de la señal de control.
10	Declaración del canal analógico de salida.
11	Declaración del canal analógico de entrada.
12	Ganancia para compensar el ruido presente en la entrada analógica.
13	Convertor de voltaje a radianes.
14	Switch selector de la señal de referencia.
15	Funciones de membresía.
16	Pesos de las funciones de membresía.
17	Ley de control difusa PR.

Tabla B.1: Descripción del diagrama a bloques en Simulink enfoque PDCR.

## B.2. Diagrama a bloques con el enfoque PDC

En el caso del enfoque PDC, el diagrama de bloques es muy semejante al de la Sección B.1 como se muestra en la Figura B.5, exepcto que la estructura de la ley de control es como lo ilustra la Figura B.6b y que además se le añadió el filtro que se encuentra encerrado en la Figura B.6a, con el fin de estimar la velocidad, ya que para este enfoque es necesario contar con la medición de tal magnitud y no se cuenta con alguna forma distinta de realizar la medición, porque el prototipo no trae tacometro, o encoder para hacer la medición de manera directa sobre el sistema.

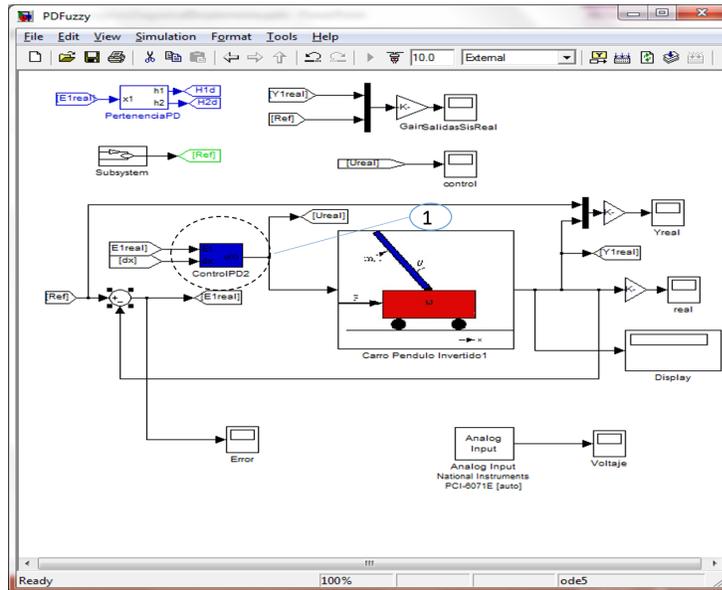


Figura B.5: Diagrama a bloques de la experimentación empleando el control difuso PD.

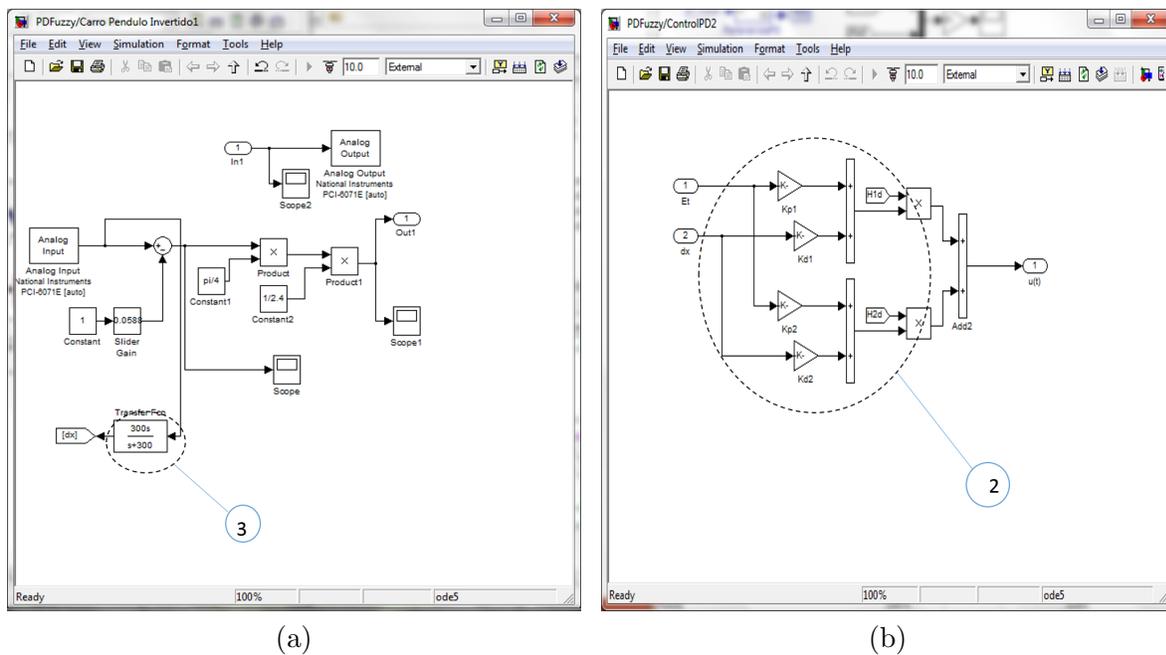


Figura B.6: B.6a Entradas y salidas analógicas. B.6b Ley de control difusa PD.

En lo sucesivo los 2 elementos que son diferentes al diagrama mostrado en la Figura

B.1 se listan en la Tabla B.2, ya que todos los demás elementos son exactamente los mismos a los empleados en la experimentación con el control difuso PR.

Numeración	Descripción
1	bloque que contiene la señal de control difusa PD.
2	Estructura de la ley de control difusa PD.
3	Filtro para estimar la medición de la velocidad angular.

Tabla B.2: Descripción del diagrama a bloques en Simulink enfoque PDC.

### B.3. Diagrama a bloques de la simulación

La simulación del SNL, fue implementada bajo el entorno de Simulink únicamente, cuyo diagrama de bloques correspondiente, se ilustra en la Figura B.7, la cual muestra el SNL y el difuso con las diferentes leyes de control difusas.

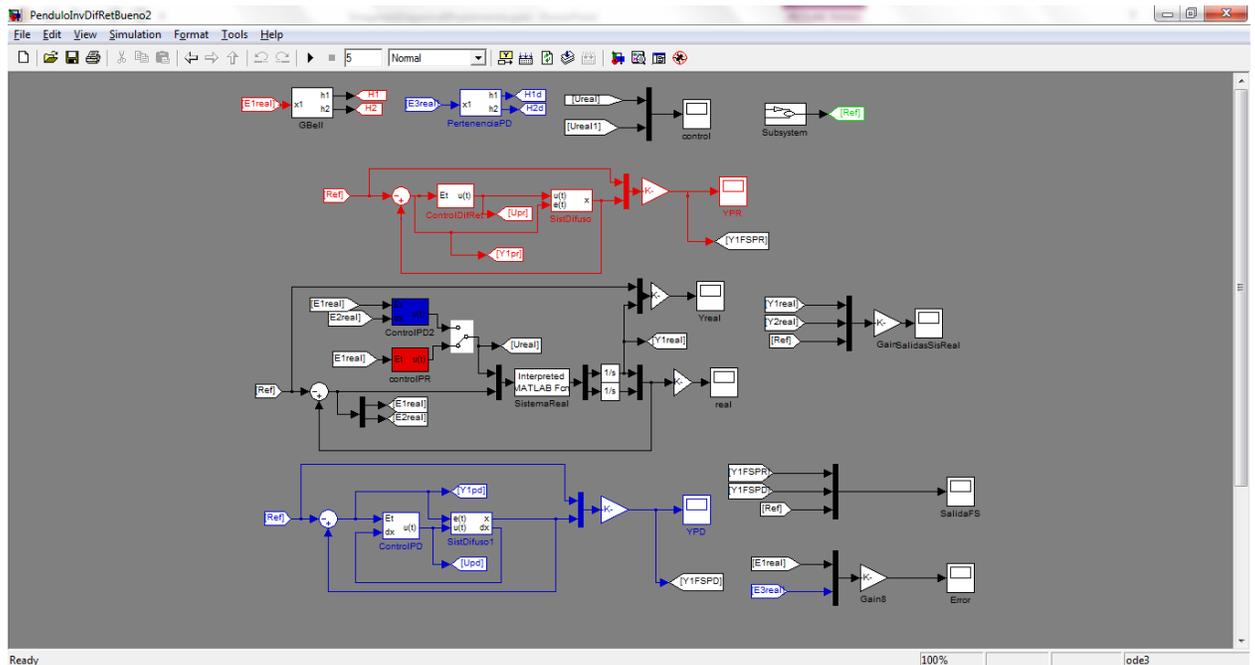


Figura B.7: Diagrama a bloques de la simulación.

# Apéndice C

## Equipo utilizado

En este apéndice se listan los elementos utilizados, para realizar las pruebas experimentales. Lo cual se encuentra conformado a grandes rasgos por el equipo de computo, la tarjeta de adquisición y el prototipo académico de QUANSER.

### C.1. Equipo de cómputo

La Figura C.1 muestra el equipo de computo, que se empleó para implementar las leyes de control desarrolladas en este tema.



Figura C.1: HP Pavilion a6200la Desktop PC.

Las principales especificaciones de producto de la *HP Pavilion a6200la Desktop PC* se describen en la Tabla C.1

Característica	Descripción
Product number	GN654AA
Introduction date	31-Aug-2007
Base processor	Pentium E2140 (C) 1.6 GHz
Chipset	Intel 945GC
Motherboard	HP/Compaq motherboard name: Livermore8-GL6
Memory	1 GB
Hard drive	320 GB SATA 3G (3.0 Gb/sec)
Modem	56K bps data/fax modem
Video Graphics	Integrated graphics
Sound/Audio	High Definition 6-channel audio
Operating System	Windows XP Profesional

Tabla C.1: Descripción de las especificaciones de HP Pavilion a6200la Desktop PC

## C.2. Tarjeta de adquisición de datos

La tarjeta de adquisición *PCI* – 6071 (ver Figura C.2), es la tarjeta de National Instruments empleada para realizar las mediciones y enviar la señal de control al prototipo.



Figura C.2: Tarjeta de adquisición de datos *PCI* – 6071.

Algunas de las características más importantes de esta tarjeta ideal para aplicaciones de almacenamiento de alta velocidad, que se puede emplear para aplicaciones de control con una señal de voltaje alto o para obtener las mediciones de un sensor,

se listan a continuación.

- 16 o 64 entradas análogas a  $1.25\text{ MS/s}$ , con una resolución de 12 o 16-bit.
- 2 salidas análogas a  $1\text{ MS/s}$ , 12 o 16-bit de resolución.
- 8 líneas de E/S (TTL/CMOS); dos contadores/temporizadores de 24-bit.
- Disparo análogo y digital.
- El rango de la señal de entrada está entre 14 o 15.
- Trabaja con sistemas operativos como: Windows 2000/NT/XP, Real-time performance with LabVIEW, otras como Linux y Mac OS X.
- Tiene compatibilidad con Visual Basic, C/C++, and C.
- El software recomendado para su uso es LabVIEW, LabWindows/CVI, Measurement Studio y VI Logger.

### C.3. Prototipo carro-péndulo

La Figura C.3 muestra el prototipo académico suministrado por QUANSER conocido comunmente como carro-péndulo, el cual se ocupó para el desarrollo de este tema.

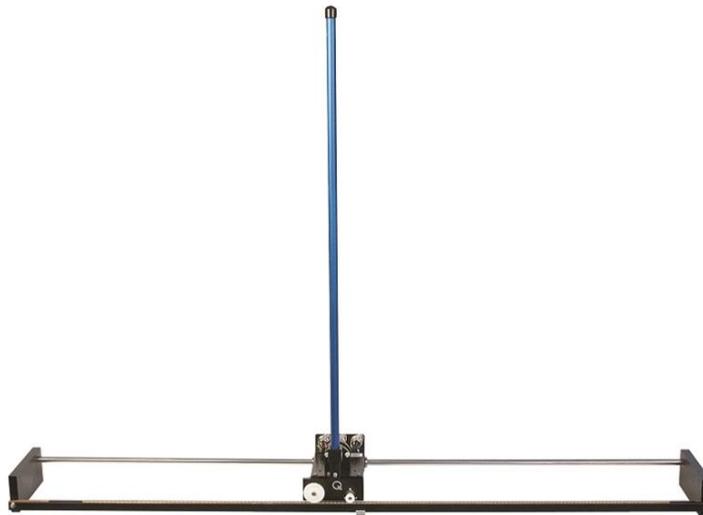


Figura C.3: Prototipo carro-péndulo de QUANSER.

Además la Tabla C.2 muestra los parámetros correspondientes al sistema carro-péndulo.

Variable	Nombre	Valor	Unidades
$u$	Entrada	variable	volts
$p$	Posición del carro	variable	$m$
$\theta$	Ángulo entre la vertical y la posición del péndulo	variable	$rad$
$l$	Longitud al centro de masa del péndulo	0.32	$m$
$m$	Masa del péndulo	0.23	$kg$
$M$	Masa del carro	0.52	$kg$
$g$	Constante de gravedad	9.81	$m/seg^2$
$J$	Inercia de la barra	0.007	$Kg \cdot m^2$
$f_0$	Fricción en el eje de rotación de la barra	0.01	$N \cdot seg/rad$
$F_0$	Fricción viscosa en el carro	0.1	$N \cdot seg/m$

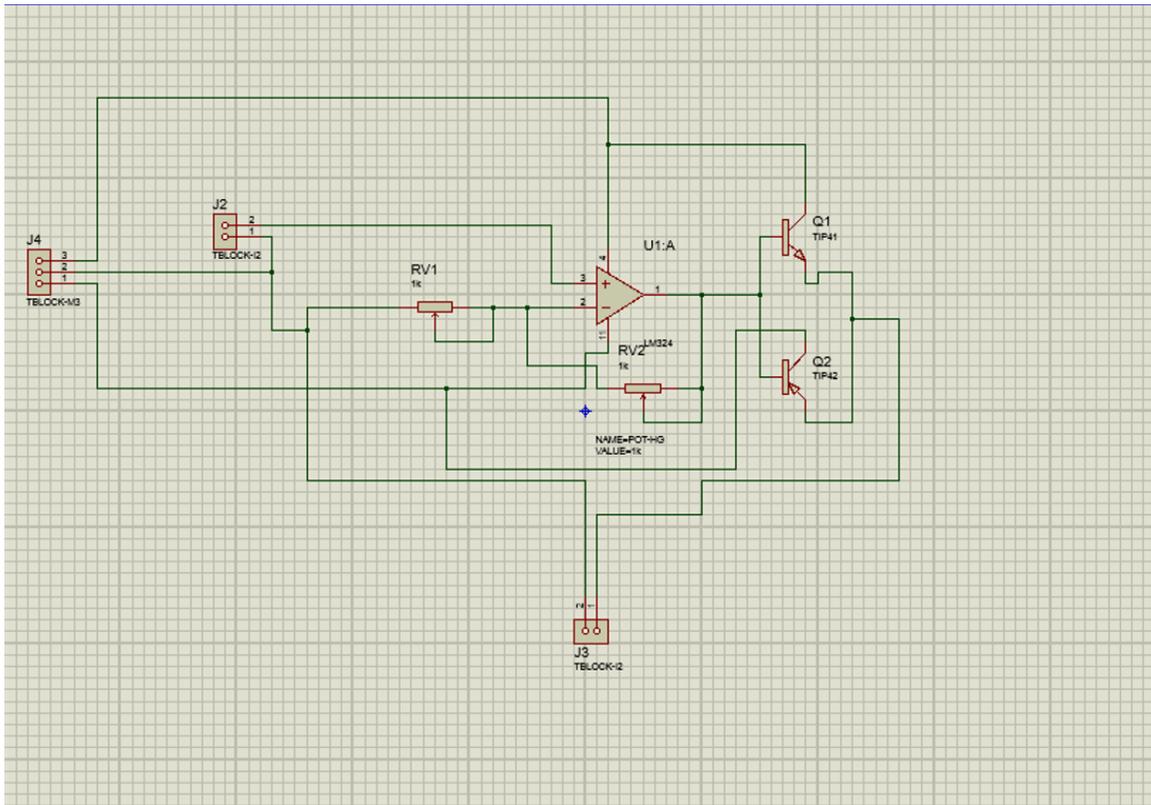
Tabla C.2: Parámetros y variables del sistema péndulo invertido.

## C.4. Etapa de potencia

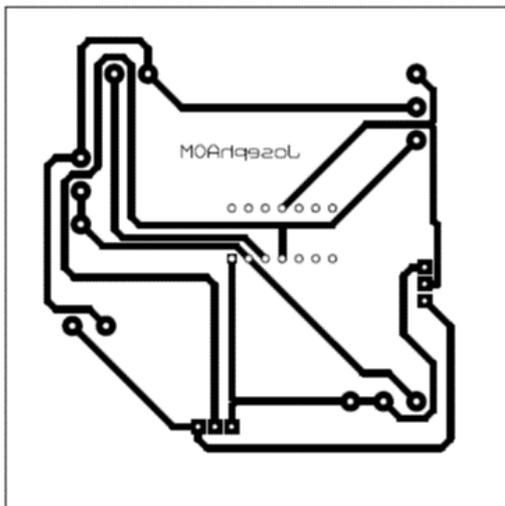
Para construir la etapa de potencia se emplearon los materiales siguientes

- Tip41C.
- Tip42C.
- LM324.
- 2 potenciómetros de  $5K\Omega$ .
- 3 borneras.
- Placa de cobre.

El diseño de la PCB y diagrama de conexión, de la etapa de potencia se muestran en las Figuras C.4a y C.4b.



(a) Diagrama de conexión



(b) PCB

Figura C.4

El prototipo de la etapa de potencia, se ilustra en la Figura C.5

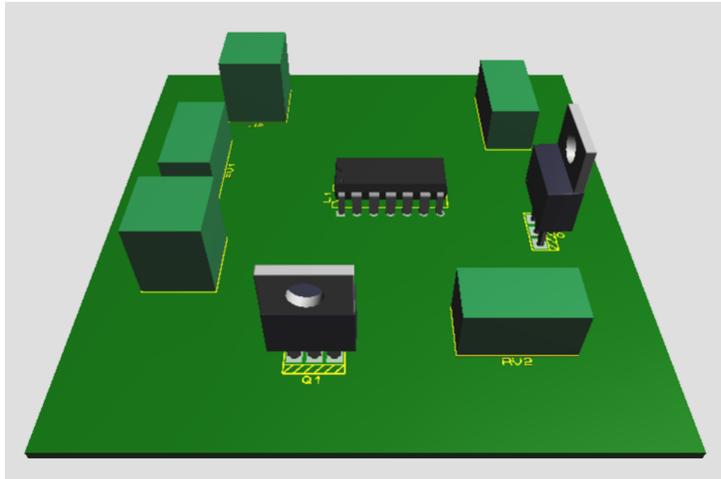


Figura C.5: Prototipo de la etapa de potencia.

# Publicaciones

El desarrollo del presente trabajo dio lugar a la publicación siguiente

**Sintonización de una ley de control difuso proporcional retardado para estabilizar una clase de sistemas no lineales.** J. A. Ortega Melo, R. Villafuerte. Sometido y aceptado en el boletín científico de ciencias básicas e ingenierías *PADI*, sometido el 29 de agosto de 2013 en Pachuca Hidalgo, México.

# Sintonización de una ley de control difuso proporcional retardado para estabilizar una clase de sistemas no lineales

J. A. Ortega Melo, R. Villafuerte\*

*Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo*

*Centro de Investigación en Tecnologías de Información y Sistemas*

*Pachuca, Hidalgo C.P. 42000, Email: jose\_beto77@hotmail.com, villafuerte@uaeh.edu.mx*

---

## Resumen

En la presente memoria se propone un método para sintonizar una ley de control difusa proporcional retardada (PR) para estabilizar una clase de sistemas no lineales. La estabilidad del sistema no lineal se garantiza mediante la  $\sigma$ -estabilidad de su modelo difusos del tipo Takagi-Sugeno (T-S) en lazo cerrado con una ley de control difusa PR. La sintonización de la ley de control difusa PR se realiza en el marco frecuencial empleando el método D-particiones. Sin pérdida de generalidad, los resultados teóricos obtenidos son ilustrados en un sistema carro-péndulo. El desempeño del control propuesto aquí es comparado con una clásica compensación paralela distribuida.

---

\*Autor para Correspondencia : R. Villafuerte, email: villafuerte@uaeh.edu.mx

## Abstract

In this paper, a method to tune a fuzzy proportional retarded (PR) control law for stabilizing a class of nonlinear systems is proposed. The stability of the nonlinear system is guaranteed through the  $\sigma$ -stability of its Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy model with feedback fuzzy PR controller. The tuning of the fuzzy PR control law, has been addressed in the frequency framework using D-partition method. Without loss of generality, the theoretical obtained results are exemplified on a car-pendulum system. The performance of the control proposed here is compared with a classical parallel distributed compensation (PDC).

*Palabras clave:* Sistemas no lineales, sistemas difusos, sistemas con retardos, control difuso PR.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

En el mundo real los sistemas suelen ser inherentemente no lineales, desafortunadamente la mayoría de los controladores lineales pueden sólo manipular a esta clase de sistemas cerca de su punto de operación, por lo que resulta razonable diseñar controladores no lineales (Slotine and Li, 1991) para aumentar su rango de operación. Sin embargo, el diseño de este tipo de controles es más complejo y requiere de un esfuerzo mayor. Los mode-

los difusos del tipo T-S son una alternativa a este problema, debido a que éstos permiten controlar sistemas no lineales lejos de su punto de operación empleando técnicas de control lineal.

Los modelos T-S (S. N. Sivanandam and Deepa, 2007), también conocidos como modelos Sugeno, fueron propuesto por Takagi, Sugeno y Kang, en un esfuerzo para formalizar un enfoque sistemático para generar reglas difusas a partir de un conjunto de datos de entrada y salida. Este modelado consiste en representar las dinámicas locales de un sistema no lineal mediante subsistemas lineales, lo que conduce a la posibilidad de usar algunos métodos de control lineal, tal como el controlador proporcional derivativo (PD).

En la literatura, existe un gran cantidad de temas disponibles sobre la sintonización de controladores PD, entre los más conocidos se encuentran las fórmulas propuestas por Ziegler-Nichols (Ziegler and Nichols, 1942), en las cuales se propone un algoritmo de naturaleza experimental. Algunos refinamientos heurísticos de estas fórmulas se dan en (Hang et al., 1991), para mejorar el desempeño de la autosintonización.

El control PD tiene muchos usos tales como el seguimiento de trayectoria (Lin et al., 2009), el controlar la posición de un servo de CD mediante un PD autosintonizado (Simhachalam et al., 2012). Como variante al clásico PD,

está el PD difuso, el cual se usa para controlar un servo sistemas electro-hidráulicos sujetos a fricción no lineal (Huang et al., 2007), la estabilización de la plataforma de un barco (Leghmizi and Liu, 2012), entre otras.

Aunque el control PD es relativamente simple, éste necesita la medición de la posición y de la velocidad del sistema de salida, para un sistema de una entrada una salida (SISO). La acción derivativa usualmente se obtiene mediante instrumentos de medición que suelen ser ruidosos o mediante algún algoritmo de aproximación como un observador, el cual hace que se incremente tanto el costo como la dificultad de diseño para controlar el sistema. Alternativamente, en (Berghuis and Nijmeijer, 1993) se presenta una solución para el problema de regulación de robots rígidos basados en la disponibilidad de las mediciones únicamente de las juntas. En (Kelly et al., 1994) se propone el empleo de un filtro pasa altas. En (Nicosia and Tomei, 1994) se desarrolla un controlador basado en la realimentación de las dinámicas de salida semiglobal, el cual garantiza un seguimiento asintótico de cualquier trayectoria acotada, todo esto con el fin de evitar el uso de tacómetros, filtros pasa altas o algoritmos para aproximar la derivada.

Los resultados mencionados anteriormente son algunas alternativas que se pueden emplear cuando sólo se cuenta con la medición de la posición o

cuando la velocidad no puede ser obtenida tan fácilmente. Un enfoque diferente es emplear un controlador proporcional retardado. Una ley de control PR, no es un tópico nuevo ya que éste se ha estudiado desde hace muchos años en (Suh and Bien, 1980), (Suh and Bien, 1979), (Swisher and Tenqchen, 1988), y recientemente en (Villafuerte et al., 2013). En estas últimas citas se muestra cómo la acción del PR puede mejorar el desempeño de la planta en comparación con el efecto producido por la acción PD. El uso del PR evita estimaciones, tacómetros, filtro pasa altas o el uso de alguna técnica diferente a las ya mencionadas que introduzca ruido, incertidumbres, entre otras cosas, además de que para la implementación de un controlador PR sólo se necesitan algunos cuantos registros de memoria y es relativamente sencillo de programar.

Típicamente, se considera que un retardo únicamente induce inestabilidad o un mal desempeño en un sistema, pero en (Cooke and Grossman, 1982) y (Abdallah et al., 1993) se proponen algunos criterios bajo los cuales un retardo puede ayudar al sistema en este sentido. La inclusión de un control PR transforma el estudio del polinomio característico de un sistema a el estudio de un cuasipolinomio. En (Wang and Hu, 2008) y (M. Dellnitz and Zheng, 2002) se muestran algunos métodos numéricos para la obtención de

las raíces de un cuasipolinomio. La sintonización propuesta en (Villafuerte et al., 2013) garantiza la estabilidad del sistema en lazo cerrado con la ley de control PR mediante la asignación de polos del cuasipolinomio. La locación de las raíces dominantes en el plano complejo determinan la  $\sigma$ -estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Una limitante de las leyes de control PR es que sólo se pueden aplicar a sistemas lineales y/o a sistemas con una parte nominal lineal, sin embargo el empleo de las técnicas de los modelos difusos del tipo T-S coadyuvan a que esté tipo de controladores se puedan aplicar a una clase de sistemas no lineales.

Una ley de control PR aplicada a un sistemas difuso T-S origina un sistema difuso con retardo. Existen algunos resultados acerca de sistemas difusos con retardos, por ejemplo en (Zhao et al., 2009) se da un enfoque para resolver el problema de estabilidad y estabilización para sistemas difusos dependientes del retardo, por otro lado en (Cao and Frank, 2000) se muestran ciertas condiciones de estabilidad usando el enfoque de Lyapunov-Krasovskii. Otros resultados relevantes sobre sistemas difusos con retardos en la entrada, se dan en (Chiang, 2006) y (Zhao and Gao, 2012), en el primero se emplea un controlador descentralizado robusto basado en el modelo difuso y en el

otro los resultados se formulan en forma de desigualdades lineales matriciales (LMI's), las cuales suelen ser conservativas.

En la presente memoria se aplican los resultados propuestos en (Vilafuerte et al., 2013) para sintonizar una ley de control difusa PR para  $\sigma$ -estabilizar un sistemas difusos del tipo T-S. La  $\sigma$ -estabilidad del sistema T-S garantiza la estabilidad de su precedente sistema no lineal. La sintonización del controlador difuso PR se realiza dentro de marco frecuencial empleando el método D-particiones. El desempeño de este control se compara con un control difuso PD, mejor conocido como compensación paralela distribuida.

Este escrito se organiza de la siguiente forma. La descripción del sistema y los resultados preliminares se presentan en la Sección 2. En la Sección 3 se postulan algunos resultados para el diseño y la sintonización del controlador difuso PR. Continuando así, en la Sección 4, con la ilustración de los resultados propuestos en la sección anterior. Finalmente, en la Sección 5, se dan algunos comentarios.

## 2. RESULTADOS PRELIMINARES

En esta sección se presentan algunos resultados teóricos referentes a sistemas difusos T-S y a sistemas con retardos.

### 2.1. *Sistemas difusos Takagi-Sugeno (T-S).*

Consideramos el sistema con dinámica de una entrada una salida (SISO) de  $n$ -ésimo orden con  $n \geq 2$  de la forma siguiente

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \\ y(t) = g(x(t), u(t)), \end{cases} \quad (1)$$

donde,  $x(t) = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}$  es la entrada de control,  $y(t) \in \mathbb{R}$  es la salida del sistema,  $f(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas.

Posteriormente, se continúa con la fusificación y los métodos de razonamiento difuso sugeridos por Takagi y Sugeno para obtener un modelo difuso del sistema (1). El modelo difuso T-S se describe a través de reglas difusas del tipo Si-Entonces, las cuales representan las relaciones locales lineales entrada-salida de un sistema no lineal. La característica principal de los modelos difusos T-S es expresar las dinámicas locales de cada implicación difusa (regla) por un modelo lineal. De esta manera el modelo difuso completo se alcanza

mediante una mezcla de los modelos de sistemas lineales (Tanaka and Wang, 2001). La  $i$ -ésima regla del modelo difuso es de la forma siguiente

**Regla modelo i:**

**SI**  $z_1(t)$  está en  $M_{i1}$  y  $\dots$ , y  $z_p(t)$  está en  $M_{ip}$ ,

$$\mathbf{ENTONCES} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t). \end{cases}$$

Aquí,  $M_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  es el conjunto difuso y  $r$  es el número de reglas;  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entrada,  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  es el vector de salida,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ;  $z_1(t), \dots, z_p(t) \in \mathbb{R}$  son variables premisas conocidas, que pueden estar en funciones de las variables de estado, perturbaciones externas, y/o del tiempo.  $\mathbf{z}(t)$  se usa para describir al vector que contiene todos los elementos individuales  $z_1(t), \dots, z_p(t)$ . Dado un par  $(x(t), u(t))$ . Así, el sistema difuso correspondiente al sistema no lineal (1) se infiere como sigue

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t), \end{cases} \quad (2)$$

donde  $z(t) = [z_1(t) \cdots z_p(t)]^T$ ,  $w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t))$  y  $h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$ , para toda  $t$ . El término  $M_{ij}(z_j(t))$  es el grado de membresía  $z_j(t)$  en  $M_{ij}$ . Ya

que  $\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0$ ,  $w_i(z(t)) \geq 0$  tenemos  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$ ,  $h_i(z(t)) \geq 0$ .

Bajo el enfoque de diseño de control para los sistemas difusos T-S uno de los procesos más conocidos es la compensación paralela distribuida (PDC).

En el diseño con la PDC, cada regla de control se diseña a partir de la regla modelo de un sistema difuso T-S. El controlador difuso diseñado comparte los mismos conjuntos difusos con el modelo difuso en la parte de las premisas (Tanaka and Wang, 2001). Así, el controlador difuso mediante PDC es

**Regla Control i:**

**SI**  $z_1(t)$  está en  $M_{i1}$  y ... y  $z_p(t)$  está en  $M_{ip}$ ,

**ENTONCES**  $u(t) = -F_i x(t)$

con  $F_i^T = [f_{i1}, \dots, f_{in}]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ . Las reglas difusas anteriores infieren un controlador lineal de la forma

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t). \quad (3)$$

El enfoque PDC da un procedimiento simple y natural para determinar las ganancias de retroalimentación local  $F_i$ . Estas ganancias y la estabilidad se determinan con el resultado siguiente.

**Teorema 2.1.** *(Tanaka and Wang, 2001) El equilibrio de un sistema de control difuso continuo descrito por (2) es globalmente estable asintóticamente*

si existe una matriz definida positiva común  $P$  tal que

$$\begin{aligned} G_{ii}^T P + P G_{ii} &< 0, \\ \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) &\leq 0, \\ i < j \text{ s.t. } h_i \cap h_j &\neq \emptyset, \end{aligned}$$

donde  $G_{ij} = A_i - B_i F_j$ .

## 2.2. Sistemas con retardos

Considere el sistema lineal invariante en el tiempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau); \\ x(\theta) = \psi(\theta); \quad \theta \in [-h, 0], \end{cases} \quad (4)$$

donde  $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices constantes,  $\tau \in \mathbb{R}^+$  es un retardo y  $\psi \in \mathfrak{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$  es la condición inicial del sistema (4), donde  $\mathfrak{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$  es el espacio de Banach de las funciones reales y continuas definidas en el intervalo  $[-\tau, 0]$  con norma

$$\|\psi\|_\tau := \max_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\psi(\theta)\|.$$

Aquí  $\|\cdot\|$  denota la norma en el espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Para cada condición inicial  $\psi \in \mathfrak{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$  y  $t \geq 0$  existe una única solución o trayectoria

$x(t; \psi)$  del sistema (4), que satisface la condición inicial

$$x(\theta; \psi) = \psi(\theta); \quad \theta \in [-\tau, 0].$$

Como extensión natural de la condición inicial, para cada  $t \geq 0$  el segmento

$$x_t(\psi) := x(t + \theta; \psi); \quad \theta \in [-\tau, 0],$$

es llamado estado del sistema (4).

En la mayoría de los casos, al denotar la trayectoria o el estado de un sistema se omite la escritura de la condición inicial  $\psi$ . Sólo se hace mención cuando las razones lo ameriten. Por ejemplo, cuando es necesario diferenciar las soluciones de un sistema con respecto a su condición inicial.

En (Hale and Verduyn, 1993) se demuestra que para cada condición inicial  $\psi$  la existencia y unicidad de las soluciones del sistema (4) están garantizadas.

**Definición 2.1.** Sea  $\sigma$  una constante positiva dada. Se dice que el sistema (4) es  $\sigma$ -estable si todos las raíces de su cuasipolinomio característico tiene parte real menor o igual a  $-\sigma$ . es decir,

$$\alpha_0 \leq -\sigma, \quad \sigma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\},$$

donde  $\alpha_0 = \max_{j=1, \dots, \infty} \{ \operatorname{Re}\{s_j\} : p(s_j) = 0; s_j \in \mathbb{C} \}$ ,  $p(s_j) = \det(sI_n -$

$A_0 - A_1 e^{-s\tau}$ ) es el cuasipolinomio característico de (4),  $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz identidad.

### 2.3. Sintonización de un controlador PR

Algunos resultados previos dados en (Villafuerte et al., 2013) son necesarios para el desarrollo de este trabajo. Considere un sistema de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \nu^2 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = x_1, \end{cases} \quad (5)$$

donde,  $x(t) = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$  es el vector de estado,  $u(t) \in \mathbb{R}$  es la entrada de control,  $y(t) \in \mathbb{R}$  es la salida del sistema,  $\nu > 0$  es el factor de amortiguamiento y  $b > 0$  es la ganancia de entrada. Además la ley de control PR esta dada por

$$u(t) = -k_p x_1(t) + k_r x_1(t - \tau), \quad (6)$$

donde  $k_p, k_r \in \mathbb{R}$  y  $\tau > 0$  son la ganancia proporcional; la ganancia retardada y el retardo respectivamente. Una manera de sintonizar el PR como se ha visto en (Villafuerte et al., 2013) es mediante las gráficas de estabilidad para sistemas de segundo orden con retardo. Esas gráficas se obtienen con la ayuda

de algunas ecuaciones paramétricas para  $k_r$ ,  $\tau$  y para diferentes valores de  $\sigma$ . Aquí el siguiente resultado se propone para sintonizar los parámetro de control (6) tal que  $\sigma$ -estabiliza al sistema (5).

**Lema 2.2.** *(Villafructe et al., 2013) Sea  $k_p < -\frac{\nu^2}{b}$  la ganancia proporcional del controlador dada. El sistema en lazo cerrado (5, 6) tiene tres raíces reales dominantes sobre la abscisa  $-\sigma^*$ , donde el máximo alcanzable es*

$$\sigma^* = \sqrt{-\nu^2 - bK_p}, \quad (7)$$

Por otra parte, los valores de la ganancia retardada  $k_r^*$  y el retardo  $\tau^*$  que  $\sigma$ -estabiliza el sistema (5, 6) con un decaimiento exponencial máximo alcanzable  $\sigma^*$  son

$$\tau^* = \frac{1}{\sqrt{-\nu^2 - bK_p}}, \quad (8)$$

$$k_r^* = \frac{-2\sigma^*}{\tau^* b e^{\sigma^* \tau^*}}. \quad (9)$$

Una manera alternativa para sintonizar la asignación de las tres raíces reales dominantes es cuando cierta  $\sigma$ -estabilidad se requiere. Así, a partir de una  $\sigma$  establecida, las ganancias  $k_p$ ,  $k_r$  y  $\tau$  se obtienen.

**Lema 2.3.** *(Villafructe et al., 2013) Sea  $\sigma > 0$ . Entonces, las ganancias de la ley de control (6) que  $\sigma$ -estabiliza el sistema (5) con las raíces reales triples*

*dominantes en  $\sigma$  están dadas por*

$$\bar{k}_p = \frac{-\sigma^2 - \nu^2}{b}, \quad \bar{k}_r = \frac{-2\sigma^2}{be}, \quad \bar{\tau} = \frac{1}{\sigma}.$$

Aunque, el empleo de una ley de control PR es interesante, ésta sólo puede aplicarse a sistemas lineales. Sin embargo, las técnicas propuestas por Takagi-Sugeno ofrecen la posibilidad de implementar estas leyes de control PR a sistemas no lineales. Por lo que, la propuesta para este trabajo es sintonizar un controlador difuso PR usando modelos difusos T-S para estabilizar un sistema no lineal.

Cabe mencionar, que típicamente las leyes de control propuestas para estabilizar sistemas difusos T-S emplean técnicas elaboradas en el marco temporal, usando LMI's, sin embargo éstas suelen ser conservativas.

Para ilustrar el proceso de sintonización de la ley de control difusa PR, sin pérdida de generalidad se implementa el proceso sobre un sistema no lineal del tipo (1) como lo es el sistema carro-péndulo.

### **3. DISEÑO Y SINTONIZACIÓN DE UN CONTROLADOR DIFUSO PR**

En esta sección se presentan algunos resultados que sugieren el diseño y la sintonización de una ley de control difusa proporcional retardada para

estabilizar un sistema no lineal.

### 3.1. Diseño de un controlador difuso PR

Considere un sistemas del tipo (2), es decir

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i x(t). \end{cases}$$

Ahora, para la construcción del controlador considere el razonamiento siguiente,

**Regla Control j:**

**SI**  $z_1(t)$  está en  $M_{j1}$  y  $\dots$  y  $z_p(t)$  está en  $M_{jp}$ ,

**ENTONCES**  $u(t) = -K_{p_j}x(t) + K_{r_j}x(t - \tau_j)$ .

Así, la ley de control difusa PR está determinada por

$$u(t) = \sum_{j=1}^r h_j(z(t))\{-K_{p_j}x(t) + K_{r_j}x(t - \tau_j)\}, \quad (10)$$

donde  $K_{p_j}^T = [k_{p_j}, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^n$  son las ganancias proporcionales,  $K_{r_j}^T = [k_{r_j}, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^n$  son las ganancias retardadas y  $\tau_j \in \mathbb{R}^+$  son los retardos,  $j = 1, \dots, r$ . Esta ley de control sólo requiere la salida del sistema y la salida retardada.

*Observación.* El diseño de la ley de control difusa PR propuesta aquí (10), puede ser vista como una extensión de la PDC (3). Por lo que, (10) puede ser

nombrada como una compensación paralela distribuida retardada (Parallel Distributed Compensation Retarded, PDCR).

Note que el sistema (2) en lazo cerrado con la ley de control (10) está descrito por

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \{(A_i - B_iK_{pj})x(t) + B_iK_{rj}x(t - \tau_j)\}.$$

Ahora, si  $\tau_j = \tau$ ,  $j = 1, \dots, r$ , el sistema anterior se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t))\{G_{ii}x(t) + R_{ii}x(t - \tau)\} \\ & + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{i < j} h_i(z(t))h_j(z(t)) \left\{ \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) x(t) \right. \\ & \left. + \left( \frac{R_{ij} + R_{ji}}{2} \right) x(t - \tau) \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

donde  $G_{ij} = A_i - B_iK_{pj}$ ,  $R_{ij} = B_iK_{rj}$ ,  $i, j = 1, \dots, r$ .

Así, el uso de instrumentos de medición o algoritmos de aproximación para calcular la acción derivativa se evita. Sin embargo, ahora la pregunta es ¿cuáles son los parámetros  $K_{pi}$ ,  $K_{ri}$  y  $\tau_i$  bajo los cuales el sistema en lazo cerrado (2, 10) sea  $\sigma$ -estable? A continuación, los resultados presentados en (Villafuerte et al., 2013) se extienden a los sistemas difusos T-S para responder tal pregunta.

### 3.2. Sintonización del controlador difuso PR

En seguida la sintonización del controlador difuso PR para estabilizar una clase de sistemas no lineales, tal como el sistema carro-péndulo es presentada. Además, se ilustra el proceso de sintonización de una ley de control difusa PDC.

Considere el modelo matemático del carro-péndulo, ver la Fig.1. De acuerdo a (Tanaka and Wang, 2001), éste es descrito por el sistema no lineal siguiente

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{g\text{sen}(x_1(t)) - amlx_2^2(t)\text{sen}(2x_1(t))/2 - a\text{cos}(x_1(t))u}{4l/3 - aml\text{cos}^2(x_1(t))},\end{aligned}\quad (12)$$

donde  $x_1(t)$  es la posición angular del péndulo respecto al eje vertical,  $x_2(t)$  la velocidad angular,  $m$  la masa del péndulo,  $M$  es la masa del carro,  $g$  la constante de gravedad,  $2l$  la longitud del péndulo,  $u$  la fuerza aplicada al carro y  $a = 1/(m + M)$ . Aquí,  $g = 9.81m/s^2$ ,  $m = 2kg$ ,  $M = 8kg$ ,  $l = 0.5m$  se escogen.

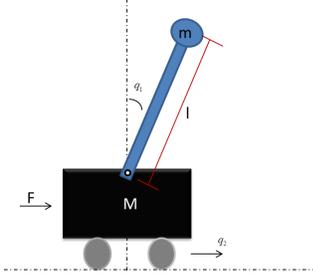


Figura 1: Carro-péndulo

Observe que el sistema (12) se puede aproximar por un modelo difuso de dos reglas que es construido mediante aproximación local. Estas dos reglas se emplean para hacer la fusificación del carro-péndulo.

**Regla 1:** Si  $x_1(t)$  está cerca de 0, entonces

$$\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t), \quad (13)$$

**Regla 2:** Si  $x_1(t)$  está cerca de  $\pm\pi/2$ , entonces

$$\dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t). \quad (14)$$

Las funciones de membresía usadas para hacer la inferencia difusa son funciones de bell generalizadas como las representadas en la Fig.2. Claramente, el modelo difuso o la defusificación del sistema está dada por

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x_1) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}, \quad (15)$$

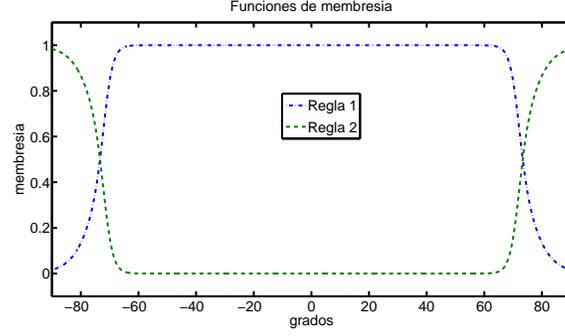


Figura 2: Funciones de membresía.

donde  $\beta = \cos(88)$ ,  $h_i \in [0, 1]$  es la función de disparo,  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^2$ ,  $B \in \mathbb{R}^2$  y  $u(t)^T \in \mathbb{R}^2$ . Aquí

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3-aml} & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3-aml} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3-aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3-aml\beta^2} \end{bmatrix}.$$

Ahora, los resultados presentados en la Sección 2.3 se usan para sintonizar la ley de control de la forma (10) para estabilizar el sistema (15).

Se considera el controlador difuso PR siguiente

$$u(t) = \sum_{j=1}^2 h_j(x) \{-K_{p_j} x(t) + K_{r_j} x(t - \tau_j)\}, \quad (16)$$

donde  $K_{p_j}^T = [k_{p_j}, 0]^T$ ,  $K_{r_j} = [k_{r_j}, 0]^T \in \mathbb{R}^2$  y  $\tau_j \in \mathbb{R}^+$ . Usando (11) el sistema

en lazo cerrado (15, 16) es

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) = & \sum_{i=1}^2 h_i^2(x_1) \{G_{ii}x(t) + R_{ii}x(t - \tau)\} \\
& + 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{i < j} h_i(x_1) h_j(x_1) \left\{ \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) x(t) \right. \\
& \left. + \left( \frac{R_{ij} + R_{ji}}{2} \right) x(t - \tau) \right\}. \tag{17}
\end{aligned}$$

Los subsistemas difusos (13) y (14) se representan en espacio de estado ya que es necesario para poder obtener el cuasipolinomio característico, por lo que la ley de control PR puede ser diseñada usando la estrategia presentada anteriormente en conjunto con los resultados complementarios mostrados en la subsección 2.3 ó mediante el uso de las regiones  $\sigma$ -estables para cada subsistema difuso, ver (Villafuerte et al., 2013). Así, para el primer subsistema se tiene que sus regiones  $\sigma$ -estables son representadas en Fig.3 y para el segundo subsistema se muestran en la Fig.4.

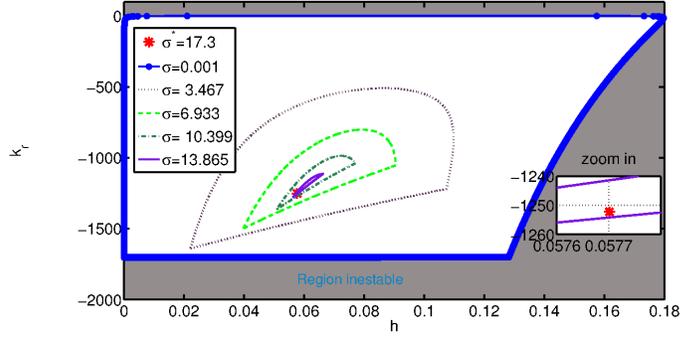


Figura 3: Regiones  $\sigma$ -estable para el subsistema difuso 1.

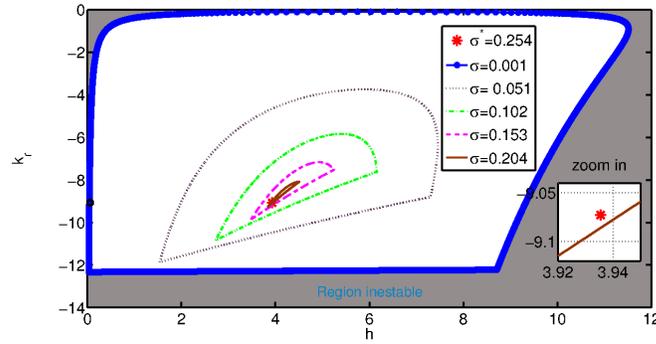


Figura 4: Regiones  $\sigma$ -estable para el subsistema difuso 2.

Después, usando el Lema 2.3 la  $\sigma$ -estabilización de los subsistemas difusos (13) y (14) se garantiza.

Por un lado se tiene que las mejores ganancias para sintonizar el control PR para el primer subsistema difuso (13) son el retardo  $\tau_1 = 0.057$ , la ganancia proporcional  $K_{p1} = -1800$  y la ganancia retardada  $K_{r1} = -1252$  con una

$\sigma$ -estabilidad  $\sigma_1 = 17.330$ , estas ganancias se calculan fácilmente a partir de las ecuaciones (7), (8) y (9). Por otra parte para el segundo subsistema difuso representado en (14), se usan sus regiones  $\sigma$ -estables para sintonizar la ley de control del segundo subsistema, donde las ganancias que se usan son  $\tau_2 = 0.057$ ,  $K_{p2} = -1800$  y  $K_{r2} = -9.072$  con un  $\sigma_2 = 0.001$ . Se tiene que realizar un análisis de estabilidad de ambos subsistemas en un marco frecuencial no es una tarea sencilla ya que el sistema difuso en lazo cerrado y el sistema no lineal en lazo cerrado tienen una infinidad de raíces, por esa razón en este trabajo hemos hecho uso de ciertos conocimientos teóricos como el principio del argumento, el teorema de Mikhailov y algunas ideas mostradas en (Nicosia and Tomei, 1994) sobre cómo emplear estos conceptos, tomando esto en cuenta desarrollamos un método numérico para verificar la estabilidad de cada subsistema difuso en el dominio de la frecuencia, por lo tanto de esta manera usando el método numérico basado en el principio del argumento, la Fig.5 muestra las tres raíces reales dominantes del primer subsistema y la Fig.6 muestra la ubicación de las tres raíces reales dominantes del segundo subsistema. La Fig.7 muestra el lugar de las raíces de estos cuasipolinomios cuando  $j > i$ .

*Observación.* Los cuasipolinomios  $G_{ii}x(t) + R_{ii}x(t - \tau)$  para  $i = 1, 2$  y

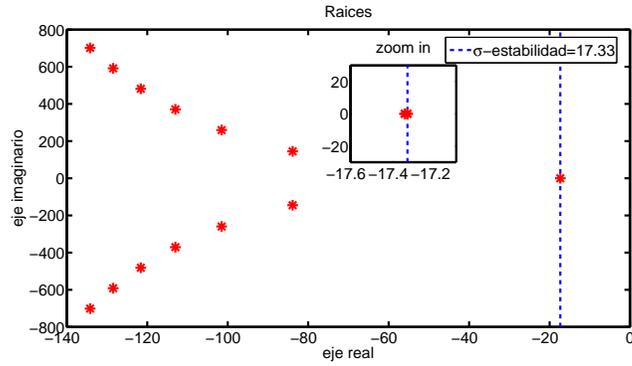


Figura 5: Ubicación de las tres raíces reales dominantes para el subsistema 1

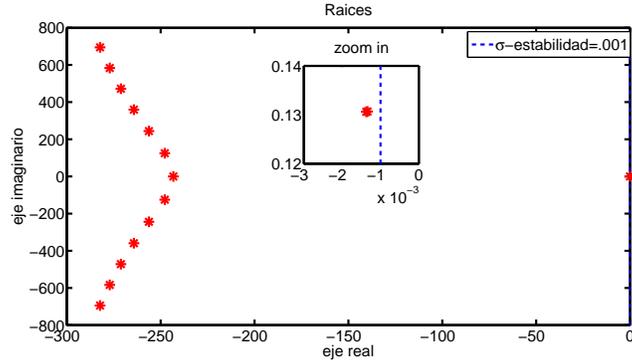


Figura 6: Ubicación de las tres raíces reales dominantes para el subsistema 2

$\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}x(t) + \frac{R_{ij}+R_{ji}}{2}x(t - \tau), i < j, i, j = 1, 2$  son Hurwitz. Por lo que, se garantiza que cada uno de los subsistemas de 17 y sus posibles combinaciones del sistema son estables.

### 3.2.1. Controlador difuso proporcional derivativo.

Para hacer una comparativa de la respuesta del sistema, usamos las ganancias difusas del controlador proporcional derivativo que fueron obtenidas en la

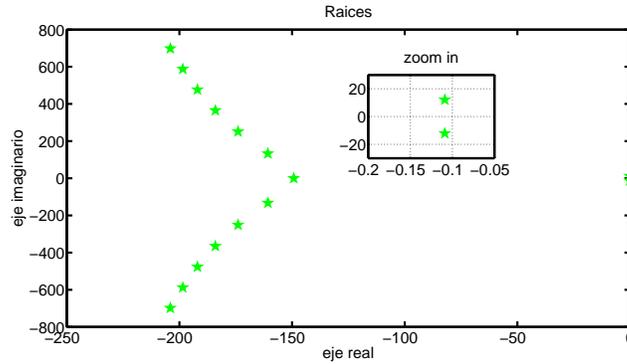


Figura 7: Lugar de las raíces.

referencia (Tanaka and Wang, 2001), la sintonización de esta ley de control se basa en el enfoque PDC donde la ley de control tiene la forma siguiente

$$u(t) = - \sum_{j=1}^2 h_j(z(t)) F_j x(t), \quad (18)$$

para este caso. Los valores de las ganancias son

$$F_1 = [-120.6667, -22.6667],$$

$$F_2 = [-2551.6, -764].$$

#### 4. RESULTADOS DE SIMULACIÓN

En esta sección se presenta el desempeño del controlador difuso PR, así como una comparación con el clásico PDC. La simulación se realizó usando el software matemático Matlab®.

En las Figs. 8 y 9 se muestran las respuestas del sistema difuso (17) y del sistema no lineal (12, 16), respectivamente. Ambos sistemas con condición inicial de 80 grados. También, en la Fig.9 se presenta la respuesta del sistema no lineal (12, 18), la cual se observa más lenta que la respuesta del sistema no lineal (12, 16).

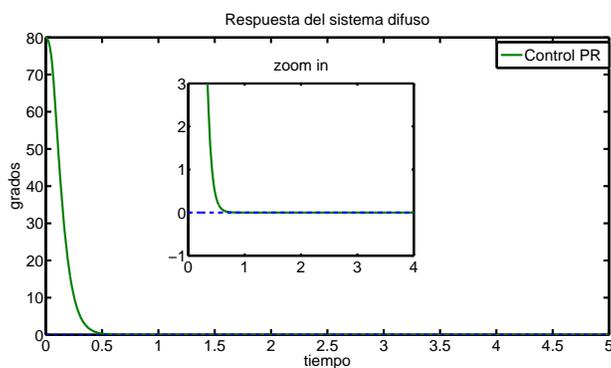


Figura 8: Respuesta del sistema difuso (17).

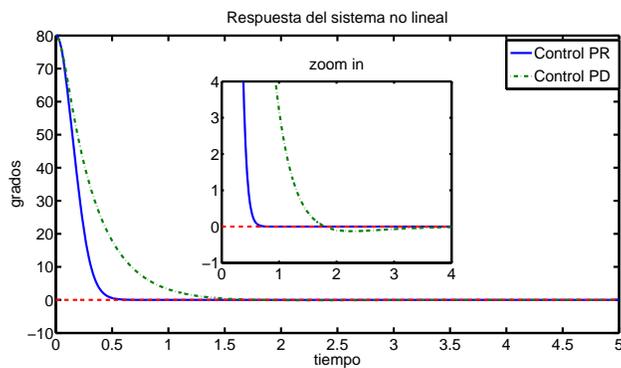


Figura 9: Respuesta del sistema no lineal (12) en lazo cerrado con las leyes de control (16) y (18).

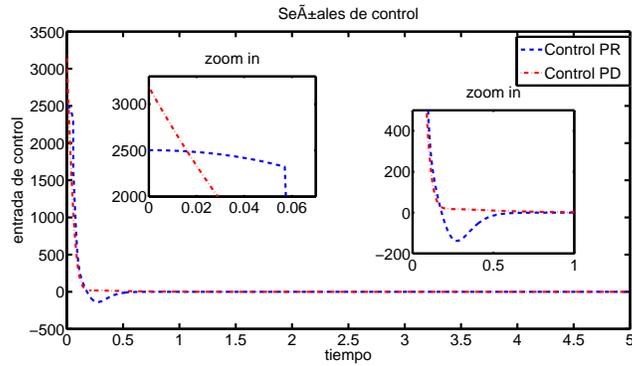


Figura 10: Señales de control (16) y (18) aplicadas al sistema no lineal (12).

Las señales de control de entrada (16) y (18) aplicadas al sistema no lineal (12) se presentan en la Fig.10. Aquí, se puede observar que el controlador (18) tiene mayor sobre impulso, esto significa mayor demanda de energía y mayor saturación de actuadores los cuales son dañinos para los sistemas reales.

Como una aportación extra del presente trabajo de investigación, en la Fig. 11 se presenta un vídeo de la implementación del control difuso PR sobre un sistema real carro-péndulo de laboratorio. El sistema real es un prototipo de Quanser Innovate Educate, Inverted Pendulum (IP01).

Figura 11: Video de la aplicación experimental del control difuso PR sobre un carro-péndulo

## 5. CONCLUSIONES

El diseño y sintonización de una ley de control difusa proporcional retardada para  $\sigma$ -estabilizar un sistema difuso T-S es propuesto aquí. Para ilustrar los resultados teóricos obtenidos, una simulación sobre el sistema no lineal carro-péndulo se presenta.

La estabilidad del sistema no lineal se mejora usando la PDCR en comparación al clásico PDC. Además, la ley de control difusa PR tiene una menor demanda de energía lo que se traduce en un menor desgaste de los actuadores. También, esta ley de control puede ayudar a reducir costos, volumen, o ruido causado por los sensores de medición usados para aproximar la derivada con respecto del tiempo. Así la PDCR puede ser una buena alternativa para

controlar ciertos procesos.

## Referencias

Abdallah, C., Dorato, P., Benites-Read, J., and Byrne, R. (1993). Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems. In *American Control Conference, 1993*, pages 3106–3107.

Berghuis, H. and Nijmeijer, H. (1993). Global regulation of robots using only position measurements. *Systems & control letters*, 21(4):289–293.

Cao, Y.-Y. and Frank, P. (2000). Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 8(2):200–211.

Chiang, C.-C. (2006). Decentralized robust fuzzy-model-based control of uncertain large-scale systems with input delay. In *Fuzzy Systems, 2006 IEEE International Conference on*, pages 498–505.

Cooke, K. L. and Grossman, Z. (1982). Discrete delay, distributed delay and stability switches. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 86(2):592–627.

- Hale, J. and Verduyn, S. (1993). *Introduction to functional differential equations*. Springer-Verlag, New York.
- Hang, C.-C., Astrom, K., and Ho, W. K. (1991). Refinements of the ziegler-nichols tuning formula. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings D*, 138(2):111–118.
- Huang, Y., Kuo, T., and Lee, H. (2007). Fuzzy-pd controller design with stability equations for electro-hydraulic servo systems. In *Control, Automation and Systems, 2007. ICCAS '07. International Conference on*, pages 2407–2410.
- Kelly, R., Ortega, R., Ailon, A., and Loria, A. (1994). Global regulation of flexible joint robots using approximate differentiation. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 39(6):1222–1224.
- Leghmizi, S. and Liu, S. (2012). Takagi-sugeno fuzzy pd controller for a 3-dof stabilized platform. In *Intelligent Control and Automation (WCICA), 2012 10th World Congress on*, pages 108–112.
- Lin, C.-Y., Hanh, L. D., and Chiu, Y.-P. (2009). Catching algorithm for 2d robot manipulator using pd controller. In *ICCAS-SICE, 2009*, pages 46–50.

- M. Dellnitz, O. S. and Zheng, Q. (2002). Locating all the zeros of an analytic function in one complex variable. *Computational and Applied Mathematics*, 138:325–333.
- Nicosia, S. and Tomei, P. (1994). A tracking controller for flexible joint robots using only link position feedback. In *Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on*, volume 2, pages 1817–1822 vol.2.
- S. N. Sivanandam, S. S. and Deepa, S. (2007). *Introduction to Fuzzy Logic using MATLAB*. Springer, Heidelberg.
- Simhachalam, D., Dey, C., and Mudi, R. (2012). An auto-tuning pd controller for dc servo position control system. In *Power, Control and Embedded Systems (ICPCES), 2012 2nd International Conference on*, pages 1–6.
- Slotine, J. J. E. and Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- Suh, I. and Bien, Z. (1979). Proportional minus delay controller. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 24(2):370–372.

- Suh, I.-H. and Bien, Z. (1980). Use of time-delay actions in the controller design. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 25(3):600–603.
- Swisher, G. M. and Tenqchen, S. (1988). Design of proportional-minus-delay action feedback controllers for second- and third-order systems. In *American Control Conference, 1988*, pages 254–260.
- Tanaka, K. and Wang, H. O. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis*. JOHN WILEY & SONS, INC., New York.
- Villafuerte, R., Mondie, S., and Garrido, R. (2013). Tuning of proportional retarded controllers: Theory and experiments. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 21(3):983–990.
- Wang, Z. H. and Hu, H. Y. (2008). Calculation of the rightmost characteristic root of retarded time-delay systems via lambert w function. *Sound and Vibration*, 86:757–767.
- Zhao, Y. and Gao, H. (2012). Fuzzy-model-based control of an overhead crane with input delay and actuator saturation. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 20(1):181–186.
- Zhao, Y., Gao, H., Lam, J., and Du, B. (2009). Stability and stabilization of

delayed t–s fuzzy systems: A delay partitioning approach. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 17(4):750–762.

Ziegler, J. G. and Nichols, N. B. (1942). Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of the A. S. M. E.*