



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
DEL ESTADO DE HIDALGO



INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y SISTEMAS

---

---

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA  
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL  
CONTROL ÓPTIMO LINEAL PARA UNA DESHIDRATADORA Y MONITORIZACIÓN  
EN LÍNEA DEL COLOR DEL PRODUCTO

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS  
EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

**PRESENTA:**  
**ING. ERICK SALVADOR GARRIDO ARANDA**

ASESORES:  
DR. OMAR JACOBO SANTOS SÁNCHEZ  
DR. HUGO ROMERO TREJO

PACHUCA HGO., MÉXICO ABRIL DE 2014





Ing. Erick Salvador Garrido Aranda

**Control óptimo lineal para una  
deshidratadora y monitorización en  
línea del color del producto**

*Dedicado  
a mis padres, hermano y a Dios,  
a mi familia por su cariño y apoyo a lo largo  
de toda mi vida, por sus consejos, por los momentos inolvidables,  
por estar conmigo en cada momento importante de mi vida y guiarme en el camino de la vida,  
a Dios por darme la oportunidad de la vida y por darme la mejor familia*



## Agradecimientos

En esta sección de mi tesis quiero agradecer primero que nada a mis padres y hermano, que han sido mis guías en cada momento de mi vida, porque sin ellos este trabajo no sería posible, los amo.

A mi madre Elsa Aranda Díaz, por guiarme a cada minuto de mi vida, por ser mi amiga incondicional, por educarme y hacer de mí una persona de bien.

A mi padre Salvador Garrido Rodríguez, eres un ejemplo en mi vida, me has enseñado que la vida no es fácil pero que a pesar de cualquier obstáculo, hay que mantener la cabeza en alto.

A César Garrido Aranda, por apoyarme y ser mi mejor amigo, gracias por estar presente en todos los proyectos de mi vida.

Como un agradecimiento muy especial para mi novia Beatriz Estefania Gallegos Vargas, por estar todo este tiempo conmigo, por darme su comprensión y paciencia, gracias por apoyarme en aquellos momentos en los que ya no quería seguir adelante, gracias por estar siempre conmigo, te amo.

Agradezco a mis asesores de tesis Dr. Omar Jacobo Santos Sánchez y Dr. Hugo Romero Trejo, por su paciencia, por compartir su conocimiento, por que a pesar de las dificultades presentadas nunca dejaron de apoyarme, gracias por darme ese crecimiento profesional y también como persona, muchas gracias por todos esos días dedicados a este trabajo para que sea posible.

Agradezco especialmente a mis compañeros de maestría por todos esos momentos compartidos, por que me brindaron su amistad a lo largo de estos dos años y por su incondicional apoyo, Perrita (Angel David) por su destacada colaboración y apoyo en esta tesis de maestría, Títire (Oscar Gonzalez) por todos sus consejos, Krystian (Amaya o Toad) por sus comentarios a este trabajo, Chunga (Alberto Zarazua) por sus comentarios en la parte de visión artificial, Tlacuache (Luis Alberto), Browser (Víctor Pedraza), los misares y los piras.

No puedo dejar de mencionar a mis profesores de la maestría, a quienes agradezco infinitamente la formación académica que me brindaron, Dr. Luis Enrique Ramos Velasco, Dr. Raúl Villafuerte Segura, Dr. Omar Arturo Domínguez Ramírez y M. en C. Iliana Castillo Pérez.

Gracias a mis sinodales por las grandes aportaciones a este trabajo. Dr. Abel García Barrientos, Dr. Orlando Ávila Pozos y Dr. Raúl Villafuerte Segura.

Gracias a CONACYT por la beca de maestría otorgada.

Gracias a la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo por la formación académica.

## Abstract

This thesis presents the implementation of optimal control with delay compensation in the input for dried tomato process and on-line monitoring of product color. To implement the control law, a prototype was built which consist of a fan which drives a constant flow of outside air through a heating element, this allows warm air sent by the fan, directing it to a dehydrated camera, where the product (tomato) is dehydrated. Due to the distance between the heat source and the product to be dehydrated, a delay occurs in the input of the plant, which is offset by a law of predictive control. Once offset the delay, the approach used to obtain gains Optimal control law is the dynamic programming, through a Linear Quadratic Regulator (LQR). The integral term from the control, is approximated by a method of squares and robust stability analysis of the plant in a closed loop with approximate controller. Note that there are previous studies that have been implemented optimal control to temperature control in dehydration, however, the principal difference is the used actuator. In these works, mainly controls the flow of hot air entering to the dehydration camera handling the speed actuator, which consists of a fan, considering a fixed heat source while in the present work philosophy is different, because to a heat source is used as an actuator which varies the temperature of air which has a constant flow.

Is required implement a colorimeter to analyze on-line the color loss in product, due to the need to monitor the behavior of the color of dried tomatoes to ensure a better quality product. To this goal, a digital camera that records color data of the product throughout the dehydration process was used. To implement the colorimeter, a conversion of the color space Red Green Blue (RGB) space CIELAB (Commission Internationale d'Eclairage  $L^* a^* b^*$ , where  $L^*$  is the luminosity of color,  $a^*$  is the position between red was performed green and  $b^*$  is the position between yellow and blue), this is achieved by a linear transformation based on the illuminated D65.

The experimental results were satisfactory, both in terms of energy consumption and quality of the dried product and its color monitor, which shows the feasibility of our proposal.

## Resumen

En este trabajo de tesis se presenta la síntesis e implementación de un control óptimo con compensación de retardo en la entrada para el proceso de deshidratado de jitomate y la monitorización en línea del color del producto. Para implementar la ley de control, se construyó un prototipo el cual consta de un ventilador que hace pasar un flujo constante de aire del exterior a través de una resistencia calefactora, ésta permite calentar el aire enviado por el ventilador, dirigiéndolo hacia una cámara de deshidratado, en donde se encuentra el producto a deshidratar (jitomate). Debido a la distancia que existe entre la fuente de calor y el producto a deshidratar, se produce un retardo en la entrada de la planta, el cual se compensa por medio de una ley de control predictiva. Una vez compensado el retardo, el enfoque utilizado para la obtención de las ganancias de la ley de control óptima es el de programación dinámica, por medio de un Regulador Cuadrático Lineal (LQR de sus siglas en inglés). El término integral presente en el control, se aproxima mediante un método de cuadraturas y se realiza un análisis de estabilidad robusta de la planta en lazo cerrado con el controlador aproximado. Note que, existen trabajos previos que han implementado control óptimo para controlar temperatura en deshidratadoras, sin embargo, la diferencia radica principalmente en el actuador utilizado. En dichos trabajos, se controla principalmente el flujo de aire caliente que ingresa a la cámara de deshidratado manipulando la velocidad del actuador, el cual consiste en un ventilador, considerando una fuente de calor fija, mientras que en el presente trabajo la filosofía es distinta, debido a que se utiliza una fuente de calor como actuador que varía la temperatura del aire que presenta un flujo constante.

Se requiere implementar un colorímetro para poder analizar la pérdida de color del producto en línea, debido a la necesidad de monitorizar el comportamiento del color del jitomate deshidratado para asegurar una mejor calidad del producto. Para ello, se utilizó una cámara Web que permite registrar los datos del color del producto durante todo el proceso de deshidratado. Para implementar el colorímetro, se realizó una conversión del espacio de color Red Green Blue (RGB) al espacio CIE Lab (Commission Internationale d'Eclairage  $L^*a^*b^*$ , donde  $L^*$  es la luminosidad del color,  $a^*$  es la posición entre rojo y verde y  $b^*$  es la posición entre amarillo y azul), esto se logra mediante una transformación lineal basada en el sistema de iluminación D65.

Los resultados experimentales obtenidos fueron satisfactorios, tanto en el aspecto de consumo de energía como en la calidad del producto deshidratado y su monitorización de color, lo cual muestra la factibilidad de la propuesta.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>12</b>
1.1. Revisión bibliográfica de resultados previos	13
1.2. Justificación	16
1.3. Objetivos	17
1.3.1. Objetivo General	17
1.3.2. Objetivos particulares	18
1.4. Planteamiento del problema	18
1.5. Limitaciones	19
1.6. Métodos empleados	20
1.6.1. Sintonización Ziegler - Nichols	20
1.6.2. Método de D-Particiones	21
1.6.3. Control óptimo para sistemas con retardos en la entrada	22
1.6.4. Enfoque de Lyapunov-Krasovskii	22
1.6.5. Transformación de espacios de color	23
1.7. Herramientas	23
1.7.1. Software LabVIEW con módulo de adquisición de datos (DAQ)	23
1.7.2. Controlador Industrial PID Honeywell DC1040 y termopares	24
1.7.3. Software OpenCV	25
<b>2. Descripción de la plataforma experimental</b>	<b>26</b>
2.1. Tipos de deshidratadoras	26
2.2. Descripción del prototipo construido	27
2.3. Modelo matemático del prototipo	32
2.4. Identificación de la planta (Modelo aproximado)	35
2.5. Conclusiones	37
<b>3. Controlador óptimo y desempeño de la plataforma experimental</b>	<b>38</b>
3.1. Programación dinámica	38
3.2. Control predictivo para sistemas con retardo en la entrada	42
3.3. Implementación numérica de la ley de control óptima	43
3.4. Análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado	46
3.5. Análisis de estabilidad ante dinámicas no modeladas	50
3.6. Método D-particiones	57
3.7. Implementación del Colorímetro	60
3.7.1. Modelo de Color RGB	60
3.7.2. Modelo de Color CIELab	60
3.7.3. Diseño del colorímetro en línea	61
3.8. Visión artificial mediante OpenCV	62
3.9. Conclusiones	63

<b>4. Resultados y conclusiones</b>	<b>64</b>
4.1. Introducción . . . . .	64
4.2. Resultados experimentales obtenidos por un PID sintonizado mediante la tablas de Ziegler-Nichols . . . . .	64
4.3. PID sintonizado mediante el método D-particiones . . . . .	66
4.4. Resultados experimentales del controlador óptimo . . . . .	68
4.5. Resultados experimentales del colorímetro implementado . . . . .	71
4.6. Resultados experimentales de pérdida de bioactivos en el jitomate deshidratado . . . . .	74
4.7. Análisis estadístico. . . . .	80
4.8. Conclusiones . . . . .	81
4.9. Conclusiones generales y perspectivas . . . . .	81
<b>A. Reglas técnicas y teoremas útiles</b>	<b>82</b>
A.1. Regla de Leibnitz . . . . .	82
A.2. Complemento de Schur . . . . .	82
A.3. Estabilidad para sistemas con retardos . . . . .	82
<b>B. Programas para implementación y demostraciones</b>	<b>85</b>
B.1. Programa en LabVIEW del controlador óptimo con compensación de retardo en la entrada . . . . .	85
B.2. Programa Matlab para solución de ecuación de Riccati . . . . .	86
B.3. Programa en Matlab para encontrar la solución de LMI . . . . .	86
B.4. Principio de superposición . . . . .	88
<b>C. Desarrollo de programas para colorímetro</b>	<b>89</b>
C.1. Desarrollo del colorímetro . . . . .	89

## Índice de figuras

1.	Respuesta escalón . . . . .	21
2.	Tarjeta de adquisición de datos de National Instruments. . . . .	24
3.	Características termopar tipo J. . . . .	25
4.	Diagrama del prototipo. . . . .	29
5.	Prototipo experimental. . . . .	29
6.	Diagrama de conexiones de sensores. . . . .	30
7.	Interface de potencia. . . . .	30
8.	Sistema de visión artificial. . . . .	31
9.	Prototipo con cámara web instalada. . . . .	31
10.	Esquema del sistema térmico. . . . .	33
11.	Diagrama de instrumentación de la deshidratadora construida. . . . .	36
12.	Respuesta al escalón de la planta. . . . .	37
13.	Temperatura controlada con un PID sintonizado por el método Ziegler-Nichols. . . . .	65
14.	Señal de control del PID sintonizado mediante las tablas Ziegler-Nichols. . . . .	66
15.	Temperatura con un controlador PID sintonizado mediante D-particiones. . . . .	67
16.	Señal de control con un PID sintonizado mediante D-particiones. . . . .	68
17.	Temperatura del aire de secado de la deshidratadora controlada óptimamente. . . . .	69
18.	Señal de control óptima. . . . .	69
19.	Temperaturas obtenidas con cada controlador. . . . .	70
20.	Comparación señales de control. . . . .	70
21.	Consumo de potencia de cada controlador. . . . .	71
22.	Color antes de deshidratar jitomate. . . . .	72
23.	Color después de deshidratar jitomate. . . . .	72
24.	Parámetros de color L*. . . . .	73
25.	Parámetros de color a*. . . . .	73
26.	Parámetros de color b*. . . . .	74
27.	Temperatura en cámara de deshidratado 50°C. . . . .	75
28.	Temperatura en el jitomate durante el proceso de deshidratado. . . . .	75
29.	Señal de control aplicada por el controlador óptimo. . . . .	76
30.	Temperatura en la cámara de deshidratado a 60°C. . . . .	76
31.	Temperatura del jitomate deshidratado a 60°C. . . . .	77
32.	Señal de control aplicada. . . . .	77
33.	Temperatura de la cámara de deshidratado a 70°C. . . . .	78
34.	Temperatura del jitomate deshidratado a 70°C. . . . .	78
35.	Señal de control aplicada. . . . .	79
36.	Programa para implementación de ley de control óptima. . . . .	85

## Índice de tablas

1.	Sintonización Ziegler-Nichols en lazo abierto . . . . .	20
2.	Ganancias obtenidas mediante el método de Ziegler-Niichols . . . . .	64
3.	Ganancias introducidas al controlador. . . . .	65
4.	Ganancias con método D-particiones . . . . .	66
5.	Ganancias introducidas al controlador . . . . .	67
6.	Mediciones de color obtenidas colorímetro comercial vs colorímetro visión artificial	71
7.	Contenido de licopeno, fenoles totales y vitamina C . . . . .	79

# Capítulo 1

## 1. Introducción

La deshidratación es una técnica muy antigua utilizada para la conserva de alimentos y extender la vida de anaquel de frutas y hortalizas durante un lapso de tiempo prolongado. En nuestro país una de las frutas más importantes es *Solanum lycopersicum* [1], comúnmente llamado jitomate, el cual se posiciona como uno de los productos de mayor consumo a nivel mundial y una de las variedades más consumidas es el jitomate saladette [2]. Este es muy utilizado como materia prima para la elaboración de purés, salsas, jugos y rodajas de jitomate deshidratado. Respecto a esto último, es importante mencionar que están establecidas plantas deshidratadoras en Chihuahua (Productos Rivera de Escuinapa, S.A. de C.V. y Mexicana de Nutrimentos, S.A. de C.V.), Jalisco (Tomate Deshidratado Paola's) y Querétaro (Farm Direct Foods Latin América, S.A.) por mencionar algunos. Concretamente, México se posiciona en el lugar 10 a nivel mundial como exportador de jitomate fresco y en los últimos años ha exportado cantidades importantes de jitomate deshidratado [3]. A pesar de ello, en México, la línea de investigación de la optimización del proceso de deshidratado de este producto es aún incipiente. En cuanto a su control, consumo de energía del proceso, monitorización y retención de nutrientes, es un campo poco explorado. Por otro lado, entre las técnicas más utilizadas para este proceso, se encuentra la deshidratación atmosférica, que consiste en pasar aire caliente por el alimento a secar [3], dicha técnica tiene la característica de consumir altos niveles de energía [4]. Ésta es una razón por la cual, la deshidratación es uno de los procesos de mayor consumo energético en la industria, en efecto, se calcula que ésta representa del 10 al 25 % de la energía total consumida tan solo en los países más desarrollados [4]. Estudios reportados en la literatura especializada, han dado evidencias de que la optimización en el control de temperatura en este tipo de procesos, puede significar tener ahorros hasta de un 34 % en los costos de producción [5], debido al menor consumo de energía. En contraste, en la mayoría de los lazos de control de deshidratación, el controlador más empleado es el control de tipo Proporcional, Integral y Derivativo (PID): 90 % de los lazos industriales son operados con este tipo de control [4] y [6] y en menor medida se emplean otro tipo de controles no convencionales (control óptimo, control no lineal, difuso, etc.); además se estima que el 75 % de los controladores operan con los valores predeterminados de fábrica [6], sin ningún tipo de optimización.

Aunado a lo anterior, a nivel industrial generalmente se utilizan temperaturas altas que oscilan entre 80°C y 90°C para el deshidratado de frutos, las cuales no sólo consumen altos niveles de energía, sino que producen pérdidas de calidad en el producto (en el caso del tomate se afecta el color, forma, sabor, concentraciones de licopeno y de vitamina C), [7] y [8]. Otro fenómeno poco estudiado es el retardo que se produce debido a la distancia entre la fuente de calor y el producto, como es bien sabido, los retardos pueden empobrecer el desempeño del lazo o incluso causar inestabilidad [9]. En este último punto, el diseño y experimentación de controladores óptimos ante la presencia de retardos en el control o en el estado, en procesos de deshidratación, ha sido poco explorado. En el mejor conocimiento del autor de la presente tesis, solo algunos pocos trabajos se han reportado en este campo, por ejemplo ver [10] y [11].

Por lo expuesto anteriormente, el aumento en la eficiencia de la energía y la conservación



de la calidad del producto (mayor retención posible de nutrientes y propiedades) constituye un reto en el deshidratado de alimentos y en particular en el jitomate. Sin embargo, este no es un problema obvio, debido a que si el tiempo de deshidratado es menor (para un consumo menor de energía), la calidad del producto decrece y viceversa [4]. El estudio de este conflicto entre estos dos objetivos (eficiencia energética y conservación de nutrientes) es aún incipiente no sólo en México sino a nivel mundial, ver por ejemplo [4], [10] y [12] y más aún cuando se consideran los retardos en el transporte de energía calorífica en el lazo.

En cuanto a la monitorización del color del producto en línea, en el mejor conocimiento del autor de ésta tesis, no existen colorímetros comerciales de bajo costo que monitoreen en línea el color, al menos no a la venta en México. El color es un indicativo de la calidad general del jitomate (tiene relación directa con los niveles de licopeno presentes en el producto) y cuando se deshidrata, dicho color se altera y representa una pérdida económica al comercializarlo. Por otro lado, cuando se efectúa el experimento de deshidratación, la pérdida de color podría significar un criterio más para detener el experimento y no dañar el aspecto de las rebanadas de jitomate al quemarlo.

Es por todo esto, que en este trabajo de tesis se implementa un control óptimo para ahorrar energía en el proceso de deshidratado de jitomates y se implementa un colorímetro mediante una cámara Web que realice mediciones del color del producto en línea, lo cual brinda un criterio adicional para detener el proceso de deshidratado.

### 1.1. Revisión bibliográfica de resultados previos

La aplicación de técnicas de teoría del control óptimo y optimización de variables en deshidratado y sus efectos sobre la calidad, ha sido poco explorada [4]. Uno de los primeros trabajos que involucran técnicas de optimización en procesos de deshidratado, es el presentado en [10], donde se empleó un modelo no lineal en ecuaciones diferenciales ordinarias de pérdida de vitamina C para frutos, mediante técnicas de programación dinámica, se encontró el perfil óptimo de temperatura y la duración óptima del deshidratado. Se restringió el nivel de humedad en el modelo no lineal de degradación de vitamina C y se presentaron resultados de simulación del modelo optimizado. Sin embargo, al ser resultados de simulación, éstos presentan limitaciones debido a que se sabe que dichos modelos son sólo aproximaciones de la cinética real de pérdida de vitamina C en el producto.

En [13] se presenta una validación del modelo de pérdida de ácido ascórbico en un proceso de deshidratación de papas, en dicho artículo, se presentan algunos de los primeros resultados experimentales de los efectos de deshidratar hortalizas con la técnica de deshidratación atmosférica.

En [14] se deshidrató maíz en un dispositivo de deshidratación atmosférica con túnel de viento y monitorización de peso en línea del producto (para monitorizar indirectamente la pérdida de humedad en el maíz). Se utilizaron técnicas de programación dinámica con restricciones no lineales en la humedad del producto, temperatura del aire de deshidratado y consumo de combustible en el calefactor (éste se penalizó mediante un índice de desempeño que toma en cuenta la temperatura y el tiempo de deshidratado). Estrictamente hablando, en ese trabajo se consideró el problema de optimización de horizonte finito que minimiza la temperatura del viento de deshidratación sujeta a cotas en la temperatura de deshidratado y en la humedad del producto a deshidratar. El cálculo del perfil de deshidratación óptimo se realiza fuera de línea y el modelo de temperatura de la deshidratadora se implementa mediante redes neuronales,

el seguimiento de dicho perfil se realizó mediante un control Proporcional Integral y Derivativo (PID) Microtune 2073. Se presentaron resultados experimentales de la calidad de deshidratación en el producto (cantidad de humedad que retuvo el producto) y del seguimiento de los perfiles óptimos, con experimentos de perturbaciones (cambios de consignas y apertura de puertas de la deshidratadora). Cabe mencionar, que en dicho trabajo, no se considera la compensación del retardo para la sintonización del PID y al tomar en cuenta un índice de desempeño que minimiza una medida de la temperatura de deshidratado, ésta acepta variaciones importantes y tal como se ha visto en estudios más recientes [15], [16] y [8], esto podría afectar a productos como el jitomate.

En [17] se presentaron resultados de simulación de una optimización de la temperatura de deshidratado y el calor del interior del grano de arroz. La cantidad de calor del interior de los granos de arroz es una medida de la calidad del arroz deshidratado e incrementa el precio comercial del mismo. Dicha cantidad, se calcula mediante la resolución de modelos expresados en ecuaciones diferenciales los cuales dependen de la temperatura del aire caliente del proceso. Las trayectorias óptimas de temperatura del viento de deshidratado se calculan numéricamente resolviendo un problema de optimización de horizonte finito cuyo índice de desempeño minimiza la temperatura del viento de deshidratado, sujeto al modelo no lineal de la cantidad de calor del grano de arroz. Debido a la dificultad de la monitorización directa de la temperatura del interior del grano y a que los resultados que se presentan son de simulación, éstos no son directamente aplicables al caso del jitomate y presentan dificultades para aplicarlos a una deshidratadora real.

En [18] se presentaron resultados experimentales en una deshidratadora atmosférica de corte industrial con capacidad de 14.6 kW en la fuente de calor. Se manipularon en forma heurística los perfiles de temperatura del aire de secado y se midió indirectamente el color mediante un espectrofotómetro Minolta una vez concluido el experimento. Los mejores perfiles de temperatura de secado fueron obtenidos previamente e implementados mediante tres controladores PID's: uno para regular un intercambiador de calor y dos para regular la velocidad del viento (cada uno regula la velocidad del viento de deshidratado) que enfría el proceso y permite regular la temperatura del viento de deshidratación. Los productos a deshidratar son plátano y guayaba. Según los resultados experimentales presentados, existe una retención de color de un 27.6 a 35.4 % para el plátano y la guayaba respectivamente con respecto al nivel de color inicial. También se reportan reducciones en los ciclos de secado del orden de 75 a 25 % para el plátano y la guayaba respectivamente. Sin embargo, no se realiza un análisis de ningún otro bioactivo, por lo que no es posible realizar conclusiones más concretas acerca de ese trabajo. Sumado a lo anterior, al calcular los perfiles de deshidratado en forma heurística, el método presenta dificultades para una implementación relativamente rápida.

En [12] se presentó una optimización de componentes bioactivos presentes en el producto a deshidratar y al mismo tiempo de la eficiencia energética en el proceso. Por medio del modelo no lineal de degradación de vitamina C, de glucosas, el enfoque de cálculo variacional y aproximaciones numéricas al problema de optimización planteado, se sintetizaron las trayectorias óptimas de temperatura de secado y las velocidades del viento a emplear. Se restringieron éstas dos últimas variables, consideradas en el proceso como entradas, a límites ya preestablecidos previamente en la literatura especializada. Se presentaron resultados en simulación y se concluyó que para el caso del brócoli, variaciones controladas en la velocidad del viento y perfiles de temperatura, pueden ser beneficiosas para una mejora en la eficiencia energética del 63 % y una retención de vitamina C de hasta un 55 %. Estos resultados no son directamente aplicables al jitomate debido a que la estructura del jitomate es mucho más débil que la del brócoli y la

degradación de la vitamina C ocurre más rápidamente [3]. En [12], no se considera el retardo en la entrada producida por la distancia de la fuente de calor y al no presentar resultados experimentales, no se consideran las no linealidades resultado de las turbulencias producidas por el viento de deshidratación que varía su velocidad debido al proceso de optimización, esto limita dicho trabajo.

En [11] se reporta la implementación en línea de un control óptimo para un deshidratador el cual compensa el retardo en la entrada debido a la distancia entre la fuente de calor y el producto. La compensación se basa en “predecir” el estado instantáneo del sistema tanto como lo indique el retardo en la entrada por medio de la solución en la forma de Cauchy, éste algoritmo predictivo fue propuesto por primera vez en [19] y recientemente extendido para sistemas no lineales con retardos en la entrada en [20]; una vez compensado el retardo, las ganancias del control pueden elegirse óptimamente o robustamente. Sin embargo, no se habían reportado pruebas experimentales de dicho compensador, hasta 2012 en [11] y en [21]. En ese trabajo se aplicó la ley de control óptima con compensador de retardo en la entrada a una deshidratadora considerando como actuador a los ventiladores de la misma. La implementación en línea de dicha ley de control no es directa, debido al retardo distribuido presente en la ley de control. En efecto, en la primera década del siglo XXI la implementación de retardos distribuidos en controladores, fue tema de investigación muy activo por parte de la comunidad mundial de retardos [22]. En [23] se reportaron problemas con compensadores con retardos distribuidos para sistemas lineales inestables con retardo en la entrada en lazo cerrado, la integral presente en el retardo distribuido, se aproximó mediante un método numérico de cuadraturas, sin embargo se reportó que aunque se aumentara el número de subintervalos en la integral, el sistema en lazo cerrado permanecía inestable. En [24] se explican las causas de dicho fenómeno: el controlador aproximado mediante cuadraturas contiene infinito número de raíces inestables de “gran magnitud” y en lazo cerrado dichas raíces prevalecen, provocando la inestabilidad del esquema en lazo cerrado. En [25] se demuestra que dicho fenómeno (raíces inestables de gran magnitud) no se presenta para sistemas estables, sin embargo, debido a que las raíces de menor magnitud no presentan regularidad para ningún tipo de cuasipolinomio, todavía podría presentarse inestabilidad del esquema en lazo cerrado para un cierto número de subintervalos en la aproximación de la integral, es por ello que en la presente tesis se dan condiciones suficientes en el dominio temporal para concluir estabilidad del sistema en lazo cerrado con el controlador aproximado.

Durante varios años se han empleado diferentes técnicas de conserva de alimentos y una de ellas es el congelado de estos, como puede observarse en [26], en el cual se trata el caso específico de la papaya, en dicho trabajo se analiza el color de la papaya antes y después de ser congelada, esto lo hacen utilizando un colorímetro Hunter Lab D25 A-9, similar al utilizado en este trabajo de tesis.

En [27] se trata el deshidratado de uva sin semilla y se utiliza un sistema de visión artificial para monitorizar el color del producto y realizar un deshidratado basado en la imagen, esto a través de una red neuronal artificial por medio de una cámara CCD (Canon IXUS 960IS, 12 megapíxeles con zoom óptico de 3.7x), con esto se realiza la monitorización en línea del color del producto con muestreos de color de una hora durante el primer periodo de deshidratado de cuatro horas y posteriormente, se realiza otro muestreo cada dos horas durante las últimas doce horas del proceso el cual tiene una duración de 16 horas. La obtención de parámetros de las imágenes obtenidas, se realizó en el software Matlab, obteniendo todos los datos en el espacio CIELab. Como resultado de analizar las muestras de uva deshidratada, se presenta una no uniformidad en la piel de la uva y la apariencia de la textura, es de tomarse en cuenta

que además de la uva que sufrió cambios de color, la red neuronal empleada para el realizar le deshidratado por imagen, tuvo una precisión del 99.6 %.

En [28] se presenta el deshidratado de camarón, en dicho trabajo se lleva a cabo una correlación de contenido de humedad de acuerdo a las características de color, esto mediante regresión lineal múltiple y redes neuronales artificiales y se compara el rendimiento de ambos métodos, el análisis de color se realiza con una cámara CCD Canon 3-CCD Canon camera Power shot A520, localizada a 30 cm de distancia de la muestra, dicha cámara es conectada a una computadora Pentium IV con el software Cannon Remote capture version 5.0. Las imágenes fueron tomadas bajo dos lámparas fluorescentes con cubierta plástica de luz y se tomaron 10 muestras después de cada tratamiento de deshidratado. El análisis estadístico utilizando regresión lineal múltiple, presenta que para una mayor temperatura de secado, se genera un camarón seco con alta  $a^*$  y  $b^*$  y una menor  $L^*$  y es un resultado satisfactorio, pero se muestra que de acuerdo a diferencia estadística significativa, el rendimiento se mejora utilizando una red neuronal con un 0.05 % de nivel de significación.

En este trabajo se implementa en línea un control óptimo lineal con compensación de retardos en la entrada, se dan condiciones suficientes para la estabilidad del esquema en lazo cerrado y para la estabilidad robusta del esquema cuando se consideran perturbaciones no lineales no estructuradas y se compara el esquema con un controlador industrial PID Honeywell DC1040 sintonizado por las bien conocidas reglas de Ziegler-Nichols [29] y el método de D-particiones [30]. En el mejor conocimiento del autor de ésta tesis y de acuerdo con los resultados reportados hasta ahora, el control óptimo aplicado a deshidratadoras atmosféricas con compensación de retardo en la entrada es aún incipiente. Como fue expuesto en [31], la estrategia de control óptimo podría resultar ser la mejor opción para el control de temperatura del aire caliente de deshidratado, sin embargo, hasta ahora su uso industrial no es extendido [4]. Adicionalmente, el análisis de nutrientes estuvo a cargo de los investigadores Dra. Norma Francenia Santos Sánchez y Dr. Raúl Salas Coronado, de la Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, con las técnicas publicadas en [1], trabajo publicado por éstos investigadores. El análisis de nutrientes se efectuó en el Laboratorio de Agroindustrias por los mencionados investigadores, después de que en dicho laboratorio, bajo la supervisión de los mencionados doctores y del Dr. Omar Jacobo Santos Sánchez, se llevaron a cabo los experimentos de deshidratado.

La monitorización del color en el producto se realizó posteriormente, debido a que en ese momento aún no se había implementado el dispositivo. Así que la medición de color se realizó mediante un colorímetro comercial marca Hunter Lab, el cual se encuentra en el área Académica de Química de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, bajo la supervisión de la M. en C. Irais Sánchez Ortega y posteriormente de la Dra. Elizabeth Contreras López. Para validar la medición del color con el dispositivo implementado en este trabajo, se llevaron a cabo experimentos de deshidratación con las mismas condiciones que los anteriores y se monitorearon los valores de color rojo del producto a deshidratar.

## 1.2. Justificación

Como ya ha sido mencionado, la optimización en los procesos de deshidratación y la monitorización de la calidad del producto final (en nuestro caso licopeno, vitamina C de rebanadas de tomate y fenoles), son aspectos fundamentales a tratar en ésta área. El análisis de la pérdida de nutrientes indicadores de la calidad del producto, provocada por el uso de distintos controladores, no es común en los trabajos previos. Además, en los trabajos hasta ahora reportados no

se encuentra de forma explícita el control óptimo, y en cambio si se encuentran las trayectorias óptimas de temperatura, lo cual implica que no necesariamente se minimize la energía aplicada al actuador.

La implementación de controladores óptimos con compensación de retardos (los cuales involucran retardos distribuidos en el control) continúa siendo un tema de investigación activa. En ésta área, existen dos grandes vertientes para lograr esto: aproximar la integral mediante un método de cuadraturas en tiempo continuo y garantizar estabilidad en lazo cerrado [23], [24] y [22] y la que se basa en la discretización del controlador para evitar el análisis de estabilidad en continuo, y en su lugar realizarlo en discreto donde es más sencillo [32]. En este trabajo se optó por abordar el primer enfoque, debido a que en ninguna de las dos vertientes se han presentado resultados experimentales sobre deshidratadoras cuando se considera la fuente de calor como actuador. A futuro se abordará implementar en línea el segundo enfoque. Como se ha visto en la sección anterior, el uso del PID es muy amplio en la industria y en particular en el deshidratado, esto hace que la comparación con este tipo de controlador sea obligada. En el presente trabajo, dos tipos de sintonización del PID se adoptaron: Ziegler-Nichols y D-particiones. El empleo del método Ziegler-Nichols es aún hoy utilizado en la industria, sin embargo, como es bien sabido, las ganancias propuestas en dicho trabajo no son óptimas y presentan limitaciones para sistemas con una constante de tiempo mucho mayor que el retardo [33]. Dicho fenómeno es conocido en teoría de control como procesos con una constante de tiempo grande (time large lag process) [33]. Esto debido a que cuando un retardo es relativamente más bajo que la constante de tiempo de la planta, en las tablas de Ziegler Nichols el cálculo de la ganancia proporcional podría resultar relativamente alta, abriendo la posibilidad de causar oscilaciones en la planta (este fenómeno se presentó en nuestro caso). Observe que un proceso de temperatura, como el tratado en ésta tesis, es de naturaleza no lineal y el modelo lineal con retardos obtenido mediante la respuesta al escalón, es sólo una aproximación en cierta zona de operación de la planta. En ese sentido, la obtención de resultados experimentales comparativos de un controlador que depende de los parámetros de la planta (control óptimo) y un control como el PID que sólo depende de la salida, resulta interesante. Note que el método de D-particiones es usado en la industria. En efecto, el software de uso industrial Expert Tune, hace uso de este método. En su módulo de "optimización de controladores", da las ganancias del controlador PID el cual brinda máxima, media y mínima robustez [34]. La robustez se mide respecto a la variación de dos parámetros de la planta: la ganancia del sistema y el retardo [34]. Los modelos utilizados por este software son cinco: primer orden con retardo, segundo orden con retardo con raíces reales y complejas, una ganancia simple, un retardo simple y un integrador puro con retardo. Note que este método evita las limitaciones del método propuesto por Ziegler-Nichols, debido a que garantiza la estabilidad robusta en lazo cerrado de la planta. Como se ha reportado en [34], [35] y [36] dicho software ha resultado muy eficiente para optimizar lazos de control industriales, sin embargo, presenta la desventaja de ser un software de alto costo para su uso académico.

### 1.3. Objetivos

#### 1.3.1. Objetivo General

Implementar un control óptimo lineal mediante programación dinámica y compensación de retardo en la entrada, para una deshidratadora atmosférica de tal manera que se logre la optimización del consumo energético, preservación de nutrientes y color del jitmate, utilizando un

dispositivo para la monitorización del color del producto en línea.

### 1.3.2. Objetivos particulares

- Construir un prototipo funcional de deshidratadora del tipo atmosférica, que permita implementar un controlado óptimo para el secado de jitomate.
- Obtener un modelo lineal aproximado de la planta con respecto a la temperatura del viento de secado, aplicando una señal escalón a la planta para obtener los parámetros que permiten el diseño del controlador.
- Verificar que la aproximación numérica de la integral presente en el controlador óptimo, garantiza la estabilidad en lazo cerrado con el modelo aproximado de la planta.
- Implementar mediante OpenCV un dispositivo de bajo costo que permita la monitorización del color del producto en línea.

Realizar un análisis comparativo de consumo energético respecto a un controlador PID industrial Honeywell DC1040 que posee compensación adaptativa de retardo en la entrada (predictor de Smith).

Realizar experimentos con ambos esquemas de control (óptimo y PID) que permitan efectuar un análisis de retención de nutrientes por parte del grupo de trabajo de la Universidad de la Mixteca, y de ésta forma poder concluir que estrategia de control es capaz de retener más nutrientes.

## 1.4. Planteamiento del problema

Debe construirse un prototipo de deshidratadora atmosférica con una fuente de calor consistente en una rejilla eléctrica y una fuente de aire provista por un ventilador y su instrumentación. Dicho prototipo contendrá las siguientes etapas:

- Etapa de medición: sensores de temperatura para el producto, para el interior de la deshidratadora y para el exterior.

- Etapa de adaptación de señal:

Un circuito Modulador por Ancho de Pulso (PWM-Pulse Width Modulator) implementado en un microcontrolador el cual reciba las señales de control del PID (Honeywell DC1040) o del control óptimo (proveniente de la tarjeta de adquisición de datos conectada a una computadora personal), un circuito convertidor de corriente (4-20 mA) a voltaje (0-5 V) para el circuito de salida del PID industrial, un circuito de potencia que conecte un nivel proporcional de corriente directa a la rejilla y el cual reciba la señal PWM del microcontrolador, una fuente de voltaje capaz de entregar hasta 180 V de corriente directa y con una potencia de hasta 150 W.

- Etapa de control:

Un controlador PID de corte industrial, el cual se eligió como un controlador de temperatura de rendimiento medio (precisión de compensación de punta fría  $\pm 1.0^{\circ}\text{C}$  máxima y  $\pm 5\%$  de desviación máxima en la salida lineal de 4 a 20 mA) marca Honeywell DC1040,

a dicho controlador se conectó un termopar tipo J con grado extendido (0 a 200°C), una tarjeta de adquisición de datos USB National Instruments 6008.

- Etapa de procesamiento, despliegue y almacenamiento de los datos:

Una computadora personal con las siguientes características: Marca Acer, procesador Intel 3.2 Ghz, memoria RAM de 488Mb, sistema operativo Windows XP, software LabView National Instruments versión estudiantil 7.1 y Matlab version R14 de Mathworks.

- Etapa de medición de color:

Un colorímetro marca Hunter Lab con despliegue de datos en modo  $L^*a^*b^*$  y XYZ, para implementar el colorímetro en línea se requiere una cámara web de bajo costo y el software libre OpenCV, dicho prototipo de colorímetro debe tener salida en formato  $L^*a^*b^*$ .

Una vez construido e instrumentado el prototipo de deshidratadora, debe obtenerse un modelo lineal alrededor de una zona de operación. El modelado de dicho sistema se realiza bajo las siguientes suposiciones: la velocidad de aire caliente se mantiene constante, no hay cambios bruscos de temperatura en el interior de la deshidratadora, la temperatura exterior no sufre cambios bruscos durante el experimento al igual que la humedad relativa del ambiente, el proceso sólo tiene una salida del viento, la relación del voltaje aplicado al actuador (rejilla eléctrica) y la temperatura en una vecindad de ésta, puede modelarse en forma lineal mediante una ganancia, aunque el proceso no es adiabático conserva suficiente calor como para que no se vea afectado por la temperatura externa. Dicho modelo matemático lineal, deberá validarse experimentalmente mediante la respuesta al escalón.

El prototipo de deshidratación se regula mediante un control óptimo con compensación de retardo en la entrada, numéricamente aproximado e implementado en línea en una computadora personal de bajo rendimiento y el software LabVIEW de National Instruments. El PID industrial se sintonizó mediante la técnica Ziegler Nichols y D-particiones. Entre estos dos controladores se desean comparar los rendimientos en cuanto al consumo de energía (medida en Watts/hora) y la pérdida de nutrientes y color y en base a estos dos criterios concluir que controlador posee un mejor desempeño.

Debido a que el término integral en el control óptimo se aproxima mediante métodos numéricos, antes de su implementación es necesario contar con un criterio de estabilidad, el cual, dado un número de subintervalos en la integral, permita concluir la estabilidad en lazo cerrado de planta. Adicionalmente debido a que la planta es no lineal (ver Apéndice B), es deseable dar condiciones de estabilidad robusta ante dinámicas no modeladas. En ambos casos, se emplea el método de Lyapunov Krasovskii: condiciones suficientes del tipo de Riccati y desigualdades matriciales lineales (Linear Matrix Inequality, LMI de sus siglas en inglés) respectivamente.

## 1.5. Limitaciones

Este trabajo presenta algunas limitaciones que son importantes de mencionar:

Se construyó un prototipo capaz de deshidratar jitomate en rebanadas, sin embargo, éste es de dimensiones pequeñas, y sólo es posible realizar el deshidratado para cantidades pequeñas de jitomate. Para la implementación del controlador óptimo con compensación de retardo y el PID Industrial, se considera que el prototipo está dentro de una habitación en la cual no se producen cambios bruscos de la temperatura ambiente y flujo de aire en la misma, el controlador óptimo

no es robusto debido a que le afectan cambios en carga de temperatura, sin embargo, esto es común cuando se considera este tipo de esquema. El control óptimo implementado no se probó en una planta que presente condiciones diferentes a una deshidratadora atmosférica. Por otro lado, la calidad en la monitorización del producto, depende mucho del nivel de iluminación que se presenta en la cámara de deshidratado y la resolución de la cámara utilizada.

## 1.6. Métodos empleados

Para el desarrollo de este trabajo se emplean las siguientes metodologías y herramientas tecnológicas.

### 1.6.1. Sintonización Ziegler - Nichols

La primera metodología utilizada es la sintonización por medio del primer método de Ziegler-Nichols [29], en el cual se aplica una señal escalón a la planta a controlar, esto con la finalidad de obtener los parámetros del modelo aproximado de ésta, y para realizar la sintonización se aplican las tablas obtenidas por Ziegler-Nichols, que a continuación se presentan.

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$\frac{\tau}{h}$	$\infty$	0
Pi	$0.9\frac{\tau}{h}$	$\frac{h}{0.3}$	0
PID	$1.2\frac{\tau}{h}$	$2h$	$0.5h$

Tabla 1: Sintonización Ziegler-Nichols en lazo abierto

Ésta tabla puede usarse, sólo si la planta no contiene integradores ni polos complejos conjugados (y si tiene polos complejos conjugados, el sobreimpulso debe ser de no más de 25%), los parámetros que se obtienen son  $\tau$ ,  $h$  y  $k$ , donde:

$\tau$  es la constante de tiempo de la planta.

$h$  es el retardo que presenta la planta.

$k$  es la ganancia de establecimiento de la planta.

La constante de tiempo  $\tau$  se determina mediante la estimación del 63% de la ganancia  $k$  de establecimiento de la planta y el tiempo de retardo  $h$  se puede medir mediante un osciloscopio o con una tarjeta de adquisición de datos, estos parámetros se muestran en la Figura 1.



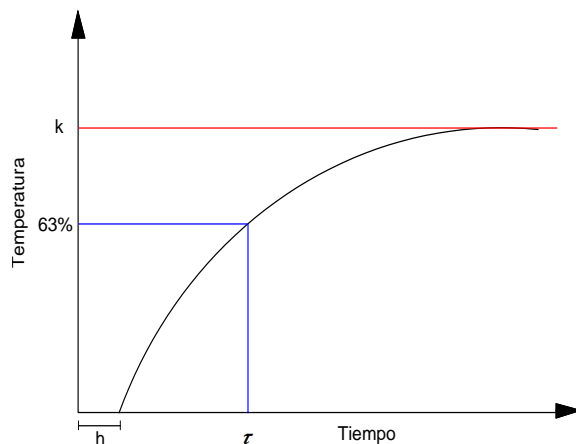


Figura 1: Respuesta escalón

La ganancia  $k$ , debe normalizarse en caso de no aplicar una señal escalón unitaria en la entrada de la planta, esto se trata más detalladamente en el Capítulo 3, en el cual se describe la plataforma experimental.

Con los parámetros de la planta, es posible obtener una aproximación de ésta a un sistema de primer orden con retardo como sigue:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{ke^{-sh}}{\tau s + 1}.$$

Con este modelo aproximado, se cuenta con los parámetros requeridos en la Tabla 1, para obtener las ganancias del controlador deseado.

### 1.6.2. Método de D-Particiones

El método de D-particiones [2] y [37], se emplea para analizar la estabilidad de cuasipolinomios, es decir expresiones polinomiales que incluyen términos  $e^{-sh}$ . Este cuasipolinomio es usado para sintonizar robustamente las ganancias del controlador PID y de ésta manera se logra mejorar el rendimiento del controlador para poder realizar el control de temperatura.

Basado en el principio de la continuidad de las raíces [38], se subdivide el espacio de parámetros del cuasipolinomio en zonas de estabilidad e inestabilidad, cuyas fronteras están dadas por los casos  $s = 0$  y  $s = j\omega$ , donde  $s$  representa a la variable compleja. Dichos casos representan las dos posibilidades de cruces de las raíces del cuasipolinomio a zonas de inestabilidad o estabilidad. Dichos cruces ocurren cuando se consideran variaciones en los coeficientes del cuasipolinomio y resolviendo las ecuaciones algebraicas resultantes para los coeficientes considerados previamente, se construyen las zonas de estabilidad e inestabilidad. Una vez construidas las diferentes zonas

en el espacio de parámetros, se considera que dichas zonas deben ser conexas, esto implica que si un punto de una zona se conoce que produce un cuasipolinomio estable, entonces toda la zona se dice estable.

### 1.6.3. Control óptimo para sistemas con retardos en la entrada

En el presente trabajo se utiliza la propuesta de control óptimo para sistemas lineales con retardos en la entrada dada inicialmente tratada en [19]. Ésta consiste en compensar el retardo considerando una predicción de la misma magnitud que el retardo en el estado y así poder anular el retardo en la entrada. Para la predicción del estado se emplea la solución en la forma de Cauchy. Una vez compensado el retardo en la planta, el controlador óptimo puede calcularse en forma estándar, resolviendo un problema de regulador cuadrático óptimo de horizonte finito o infinito. La técnica empleada en este trabajo para realizar esto es la programación dinámica, mediante la resolución de la ecuación de Riccati. El hecho de usar la fórmula de Cauchy en la predicción del estado, provoca que el control involucre una integral y por ende en lazo cerrado el sistema contenga un retardo distribuido. En el presente trabajo se aproxima dicha integral por medio de métodos numéricos, por lo que en lazo cerrado el sistema con el controlador aproximado tiene retardos puntuales, ya que el control óptimo es una realimentación de estado.

Es importante hacer notar que el control óptimo trabaja sobre un modelo aproximado de la planta y que al obtener una minimización de energía se sacrifica robustez. Es por ello, que la validación experimental de este controlador es un objetivo fundamental en este trabajo.

### 1.6.4. Enfoque de Lyapunov-Krasovskii

La estabilidad es un objetivo primordial en sistemas de control, sin la garantía de la estabilidad, el resto de las demás especificaciones como lo son la rapidez de convergencia, pocas oscilaciones y robustez, no tendrían sentido.

La planta con la que se trabajó en ésta tesis presenta un retardo en la entrada, esto debido a la distancia que existe entre la fuente de calor y el producto. Cuando se realiza el lazo cerrado de la planta con el control óptimo aproximado, el sistema resultante en el dominio temporal es uno con múltiples retardos puntuales. El número de términos retardados depende del número de subintervalos considerados en la aproximación de la integral. El análisis de estabilidad de sistemas con retardos se complica cuando se presenta un retardo en el modelo del sistema, ya que la ecuación característica no satisface el Teorema Fundamental del Álgebra.

Por otro lado, las técnicas de análisis de estabilidad en el dominio temporal para sistemas libres de retardo, no son directamente aplicables para sistemas con retardos. Para ilustrar este hecho, a continuación se presenta un ejemplo sencillo. Considere el siguiente sistema lineal con retardo:

$$\dot{x}(t) = a_0x(t) + a_1x(t-h), \quad (1)$$

donde  $a_0$  y  $a_1$  son constantes,  $x(t) \in \mathbb{R}$ ,  $x(\theta) = \varphi(\theta)$ ,  $\theta \in [-h, 0]$ , y  $\varphi(\theta)$  es una función continua a tramos en el intervalo  $[-h, 0]$ . Se desean obtener condiciones suficientes para la estabilidad del sistema, observe que el sistema (1) es lineal, así que si se desea analizar su estabilidad mediante el segundo método de Lyapunov [39], es posible elegir una función de Lyapunov cuadrática definida positiva:

$$V(x(t)) = x(t)^2,$$

de acuerdo al segundo método de Lyapunov, se calcula la derivada de la función  $V(x(t))$  a lo largo de las trayectorias del sistema dado por la ecuación (1) como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{dv(t)}{dt} &= 2x(t)\dot{x}(t) = 2x(t) [a_0x(t) + a_1x(t-h)] \\ &= 2a_0x^2 + 2a_1x(t)x(t-h).\end{aligned}$$

Puede observarse que cuando  $a_1 = 0$ , el sistema no presenta retardo y si  $a_0 < 0$  la primera derivada es definida negativa, por lo que se garantiza la estabilidad del sistema, el cual es el resultado clásico de estabilidad para sistemas lineales libres de retardos. Por otro lado cuando  $a_1 \neq 0$  no es posible determinar el signo del término cruzado  $x(t)x(t-h)$ , esto impide concluir el signo de la derivada de  $V(x(t))$ , por lo que puede observarse claramente que el enfoque de Lyapunov para sistemas libres de retardos, no puede extenderse directamente a sistemas con retardos, esto debido principalmente a que dicho enfoque sólo captura el valor del estado instantáneo  $x(t)$  y no toma en cuenta el valor del estado hasta  $t-h$ . Por ésta causa, para tratar el análisis de estabilidad de sistemas con retardos, se considera en ésta tesis el enfoque de Lyapunov-Krasovskii. En este enfoque se toma en cuenta que el estado de un sistema con retardo es el valor del estado  $x(t)$  definido en el intervalo de  $[t-h, t]$  y no sólo el estado instantáneo  $x(t)$ , esto se logra mediante el uso de funcionales de Lyapunov-Krasovskii que capturen el estado del sistema.

El enfoque de Lyapunov-Krasovskii considera el retardo de la planta y en ésta tesis, permite establecer condiciones suficientes que garanticen la estabilidad en lazo cerrado de ésta con el control óptimo aproximado.

### 1.6.5. Transformación de espacios de color

Las mediciones de color al producto se obtienen mediante una cámara Web, la cual entrega valores de color en el espacio de color RGB, como cualquier dispositivo digital. Estos valores deben convertirse al espacio de color CIE Lab, con el cual puede realizarse el análisis de pérdida de color del producto y posteriormente tener un criterio de paro en el deshidratado del jitomate, de acuerdo con las mediciones de color hechas en línea.

La transformación del espacio de color RGB a CIE Lab, se logra mediante la conversión del espacio RGB al espacio XYZ y después se convierte del espacio XYZ al espacio CIE Lab, esto mediante el estándar de iluminación D65.

## 1.7. Herramientas

El problema planteado es resuelto mediante varias herramientas tecnológicas las cuales se describen a continuación.

### 1.7.1. Software LabVIEW con módulo de adquisición de datos (DAQ)

La implementación del control óptimo se realiza utilizando el software LabVIEW en su Version 7.1 de National Instruments, el cual es utilizado para procesos de instrumentación industrial y aplicaciones de control [40]. Dicho software facilita la implementación de leyes de control complejas, ya que cuenta con un ambiente gráfico el cual hace más fácil la programación y tiene opciones para programar fácilmente módulos de adquisición de datos (Data Acquisition, DAQ

de sus siglas en inglés) que permiten conectar indirectamente sensores y actuadores, ya que dichos sistemas cuentan con canales de entrada-salida analógicos y digitales. En este trabajo de tesis, se utilizó una tarjeta de adquisición de datos de bajo costo NI USB 6008, ver Figura 2. También se utilizaron los canales analógicos de entrada de la DAQ para obtener lecturas de temperatura (variable del proceso) y los canales analógicos de salida para enviar la señal del control óptimo en forma de voltaje al adaptador de señal del actuador, el cual se encarga de incrementar o disminuir la temperatura de la cámara de deshidratado. El acoplamiento de la señal de control emitida por el módulo DAQ con la resistencia calefactora, se realiza mediante una señal modulada por ancho de pulso, (Pulse Width Modulator, PWM de sus siglas en inglés) la cual se implementa con un micro controlador (PIC, Peripheral Interface Controller de sus siglas en inglés) el cual recibe en una entrada analógica, la señal de control que es enviada por el módulo DAQ. La salida del microcontrolador se conecta a un transistor MOSFET (Metal-Oxide-Semiconductor Field-Effect Transistor de sus siglas en inglés), con el fin de alimentar la resistencia y de ésta forma variar el voltaje aplicado a ésta.



Figura 2: Tarjeta de adquisición de datos de National Instruments.

### 1.7.2. Controlador Industrial PID Honeywell DC1040 y termopares

El controlador PID utilizado en ésta tesis es el Honeywell DC1040, el cual es un controlador indicador industrial que incluye una entrada programable para termopar con compensación de punta fría; en nuestro caso se programó el termopar tipo J de grado extendido. El controlador PID cuenta con una salida lineal de corriente de acuerdo al estándar industrial 4-20 mA. Este controlador posee varias funciones, como la de autosintonización que permite obtener las ganancias automáticamente y también cuenta con la compensación adaptable de tiempo muerto, entre otras. La programación de este controlador es sencilla, al igual que su instalación, por lo que su uso industrial es muy amplio.

Por otro lado, el termopar es un dispositivo de bajo costo que se utiliza como sensor de temperatura y puede medir un amplio rango de temperatura con relativa alta precisión. La selección del tipo de termopar en cuanto a su temperatura y precisión, está dada mediante estándares internacionales como se muestra en la tabla de la Figura 3.

La conexión correcta del termopar al controlador es sumamente importante para obtener lecturas adecuadas, y dicha tabla da el código de colores de los termopares para su correcta conexión.













ANSI Code	Alloy Combination		Color Coding  		Maximum Useful Temperature Range ++	Maximum Thermocouple Grade Temperature Range	EMF (mV) Over Max. Temperature Range	Standard Limits of Error** (above 0°C)	Special Limits of Error** (above 0°C)	International IEC 584-3	Comments Environment – Bare Wire	ANSI Code
	+ Lead	- Lead	Thermocouple Grade	Extension Grade								
<b>J</b>	IRON Fe (magnetic)	CONSTANTAN COPPER-NICKEL Cu-Ni			Thermocouple Grade: 32 to 1382°F 0 to 750°C Extension Grade: 32 to 392°F 0 to 200°C	-346 to 2193°F -210 to 1200°C	-8.095 to 69.553	greater of 2.2°C or 0.75%	greater of 1.1°C or 0.4%		Reducing, Vacuum, Inert. Limited Use in Oxidizing at High Temperatures. Not Recommended for Low Temperatures.	<b>J</b>
<b>K</b>	CHROMEGA® NICKEL-CHROMIUM Ni-Cr	ALOMEGA® NICKEL-ALUMINUM Ni-Al (magnetic)			Thermocouple Grade: -328 to 2282°F -200 to 1250°C Extension Grade: 32 to 392°F 0 to 200°C	-454 to 2501°F -270 to 1372°C	-6.458 to 54.886	greater of 2.2°C or 0.75%	greater of 1.1°C or 0.4%		Clean Oxidizing and Inert. Limited Use in Vacuum or Reducing. Wide Temperature Range, Most Popular Calibration	<b>K</b>
<b>V*</b>	COPPER Cu	CONSTANTAN COPPER-NICKEL Cu-Ni	NONE ESTABLISHED	NONE ESTABLISHED	Extension Grade: 32°F to 176°F 0 to 80°C						Alternative to KX Type Extension Wire for Low Temperatures. Not Recommended for General Use.	<b>V*</b>
<b>T</b>	COPPER Cu	CONSTANTAN COPPER-NICKEL Cu-Ni			Thermocouple Grade: -328 to 662°F -250 to 350°C Extension Grade: -76 to 212°F -60 to 100°C	-454 to 752°F -270 to 400°C	-6.258 to 20.872	greater of 1.0°C or 0.75%	greater of 0.5°C or 0.4%		Mild Oxidizing, Reducing Vacuum or Inert. Good Where Moisture Is Present. Low Temperature and Cryogenic Applications	<b>T</b>

Figura 3: Características termopar tipo J.

En los controladores PID Honeywell de la serie DC1000, se programan las ganancias proporcional, integral y derivativa de acuerdo con la siguiente Tabla:

$$BP = \frac{100\%}{kp},$$

$$Ti = \frac{kp}{ki},$$

$$Td = \frac{kd}{kp},$$

donde:

$BP$  es la banda proporcional, dada en porcentaje,

$Ti$  es el tiempo integral dado en segundos y

$Td$  es el tiempo derivativo dado en segundos.

### 1.7.3. Software OpenCV

El software OpenCV es una biblioteca libre de visión artificial originalmente desarrollada por Intel basado en C, que se ha utilizado en muchas aplicaciones, tales como sistemas de seguridad con detección de movimiento y aplicaciones de control de procesos donde se requiere reconocimiento de objetos, entre otras. En ésta tesis, el software OpenCV se utiliza con la finalidad de detectar el color del producto (jitomate en nuestro caso), sometido al proceso de deshidratado, en el cual el color cambia conforme el jitomate pierde humedad. Debido a que se pretende tener la menor pérdida de color del jitomate, siendo éste un factor fundamental de paro para el proceso de deshidratado.

## Capítulo 2

### 2. Descripción de la plataforma experimental

En este capítulo se describen algunos tipos de deshidratadoras existentes y la plataforma experimental construida en la cual se realizaron los experimentos reportados.

#### 2.1. Tipos de deshidratadoras

Existen diferentes tipos de deshidratadoras tales como:

- Deshidratadora de charolas del tipo atmosférico.
- Deshidratadora de lecho fluidizado.
- Deshidratadora de horno.
- Deshidratadora de túnel del tipo atmosférico.
- Deshidratadora con cinta transportadora.

De éstas, la utilizada en este trabajo es la deshidratadora de charolas del tipo atmosférico. A continuación se describe brevemente el proceso de deshidratado y las partes principales de una deshidratadora de charolas atmosférica.

El deshidratado de alimentos tiene como objetivo principal la conserva de estos mediante el secado, para que de ésta manera se reduzca el contenido de humedad con el fin de evitar el crecimiento de microbios y la refrigeración de los alimentos, la cual es más costosa.

##### **Secado:**

El secado es una operación en la que se elimina por evaporación casi la totalidad del agua presente en los alimentos, mediante la aplicación de calor bajo condiciones de operación controladas

Aunque existen diferentes tipos de secadores o deshidratadoras, la configuración básica de una deshidratadora atmosférica es la siguiente: una cámara de deshidratado, en la cual es colocado el producto que será sometido al secado, un sistema que introduce aire caliente a la cámara de deshidratado utilizando conductos que puedan dirigir el aire al producto, una fuente de calor para calentar el aire de deshidratado y un conducto de salida para el aire caliente. El agua del producto es removida y enviada hacia afuera en una sola operación. El aire es calentado cuando pasa por resistencias eléctricas o intercambiador de calor. Las charolas se utilizan para colocar el producto a deshidratar y pueden ser giratorias, lo cual ayuda a disminuir el tiempo de deshidratado. El proceso no se considera adiabático debido que debe contar con una salida de aire. A continuación se describen las partes que conforman a una deshidratadora.

- **Generador de aire:**  
Los secadores de aire deben contar con un sistema que permita la entrada de aire a una o diferentes velocidades de flujo, para esto último se utilizan ventiladores, en los cuales puede variarse la velocidad del viento.
- **Calefactor:** Principalmente existen dos tipos de calefactores: directos e indirectos. En los calefactores directos el aire de secado del producto, es calentado en combinación con gases de combustión de escape. En calefactores indirectos el aire es calentado a través de resistencias eléctricas.
- **Alimentadores:**  
Estos se encargan de depositar el alimento a deshidratar sobre la base en la cual estarán expuestos al flujo de aire y pueden ser transportadores de tornillos, mesas rotantes ó bandejas vibrantes [41].

El costo de los calentadores directos es más bajo que los indirectos, pero algunos productos se llegan a dañar o contaminar debido a los gases.

## 2.2. Descripción del prototipo construido

El prototipo fue construido para poder realizar el deshidratado de jitomate y monitorizar el color del producto en línea, consta de las siguientes partes y componentes:

- Un generador de aire provisto por un ventilador a velocidad ajustable, cuya alimentación es de 3 a 12 Vcd.
- Una resistencia eléctrica de alambre nicromel como calefactor. Ésta presenta como característica una resistencia de  $20\Omega$ . La resistencia es alimentada por 180 Vcd como voltaje máximo para alcanzar la máxima temperatura de operación ( $95^{\circ}\text{C}$ ).
- Un alimentador de producto, la cual es una charola para depositar el producto.

En la sección de control e instrumentación se utilizaron los siguientes componentes:

- Un controlador de corte industrial PID Honeywell DC1040, con salida estándar 4 a 20 mA. Se utilizó un divisor de voltaje para convertir ésta corriente a voltaje.
- Un termopar tipo J de grado extendido (0 a  $200^{\circ}\text{C}$ ) que permite sensor temperatura para ser procesada en el controlador PID.
- Software de Instrumentación virtual LabVIEW utilizado para programar el controlador óptimo.
- Sensor de temperatura LM35, este detecta la temperatura de la cámara de deshidratado (variable del proceso, PV de sus siglas en inglés) y ésta se envía mediante un módulo de adquisición de datos hacia una computadora personal, la cual procesa la variable del proceso para el cálculo de la señal de control óptima. Así mismo se monitorizó la temperatura ambiente en el exterior de la deshidratadora y en el producto.

- Tarjeta de adquisición de datos USB 6008 de National Instruments, es empleada para el procesamiento de la entrada y salida de datos (variable del proceso, señal del control, medición de humedad y temperatura del producto) en la implementación del controlador óptimo.
- Un sensor de humedad HMZ-433A1, este proporciona la medida de humedad del producto (se introduce al jitomate), el cual requiere una alimentación de 5 Vcd y proporciona una señal de salida analógica con un rango de 0 a 3.3 Vcd, permitiendo medir un rango de humedad del 30 a 100 %.
- Microcontrolador PIC 16F876, es el componente que se encarga de recibir una señal analógica del controlador PID o el controlador óptimo, el microcontrolador proporciona una salida PWM para variar el voltaje aplicado al actuador (resistencias eléctricas) y de ésta forma variar la variable del proceso.
- Un MOSFET IRF640 (interface de potencia) que permite adaptar la señal PWM a la resistencia.
- Una Webcam USB de 5 MP (Mega Pixeles).
- Software de Visión artificial OpenCV

Los elementos descritos anteriormente conforman al prototipo construido. A continuación se describe el funcionamiento general del prototipo. Para nuestro caso, la planta utilizada debe mantener una velocidad de viento constante, es por esto que este actuador se considera fijo. El aire se hace pasar por la resistencia calefactora y es calentado por convección hasta llegar a una temperatura estacionaria, la cual es fijada por el usuario (Set Point o consigna), después de que el aire pasa por la resistencia, se dirige hacia el producto a deshidratar, es entonces cuando la humedad del jitomate es expulsada. El experimento durará hasta que el producto pierda el mayor contenido posible de agua. Esto se logra monitorizando la humedad en el producto por algún tiempo preestablecido, por pérdida de color o el conjunto de estos criterios. Observe que la temperatura del aire de secado se regula con la energía eléctrica aplicada a la resistencia eléctrica, en ésta se aplica el control óptimo o PID.

El prototipo fue construido en madera y se divide en dos cámaras: una de calentamiento y una de deshidratado. En la primera se encuentra la resistencia eléctrica, la entrada de aire del ventilador y una salida hacia la cámara de deshidratado. Esto permite orientar el aire caliente al producto y permite que el flujo de aire caliente sea laminar. En la cámara de deshidratado se encuentra el producto a procesar y cuenta con una entrada y una salida de aire. En la Figura 4 se muestra un diagrama esquemático del prototipo.



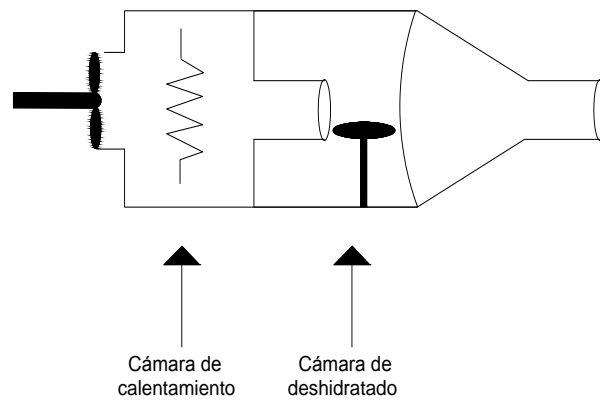


Figura 4: Diagrama del prototipo.

En la Figura 5 se muestra una fotografía del prototipo desarrollado.

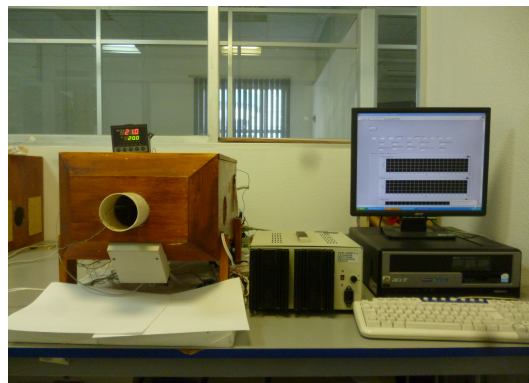


Figura 5: Prototipo experimental.

Como ya se mencionó el objetivo principal, es la optimización de la energía aplicada a la resistencia con mínima pérdida de nutrientes en el producto.

En la Figura 6 se muestra el diagrama de conexión para los sensores utilizados en ésta plataforma, que son conectados directamente a la DAQ. También se muestra en que pin del microcontrolador debe ser conectada la entrada analógica que genera la señal PWM y en que pin de salida se genera ésta señal.

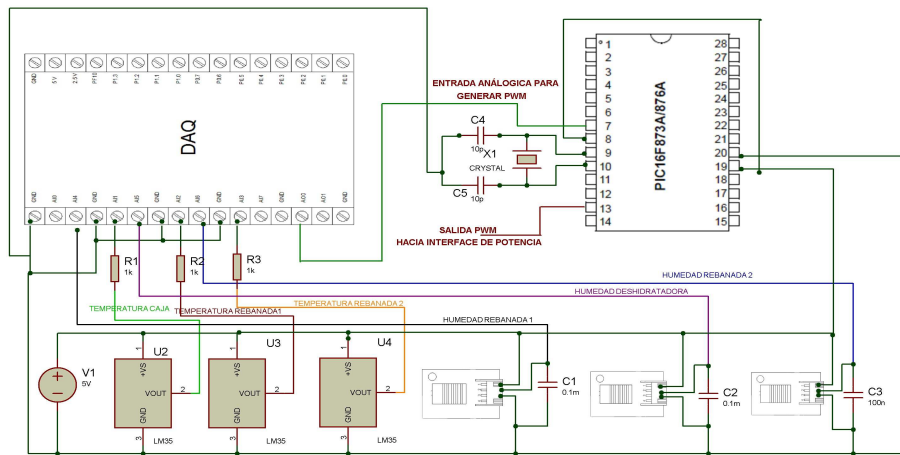


Figura 6: Diagrama de conexiones de sensores.

En la Figura 8 se muestra el diagrama que permite conectar la señal de control con la interface de potencia. También se puede apreciar la entrada analógica que permite conectar el controlador PID industrial, o el controlador óptimo por medio de la DAQ.

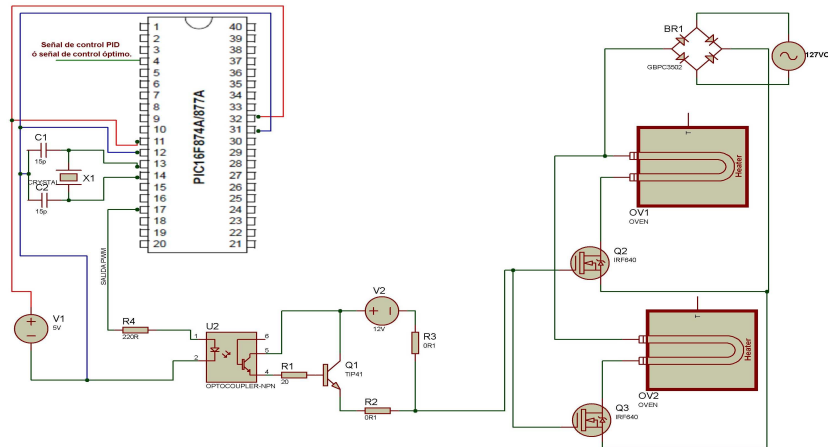


Figura 7: Interface de potencia.

Para poder monitorizar el color del jitomate, se utiliza el software libre de visión artificial OpenCV y una Webcam. La monitorización del color se realiza tomando imágenes en tiempo real de las muestras de jitomate y por medio el software OpenCV se analiza un pixel específico de cada muestra de jitomate. A continuación se muestra un diagrama esquemático del funcionamiento del sistema de visión artificial.

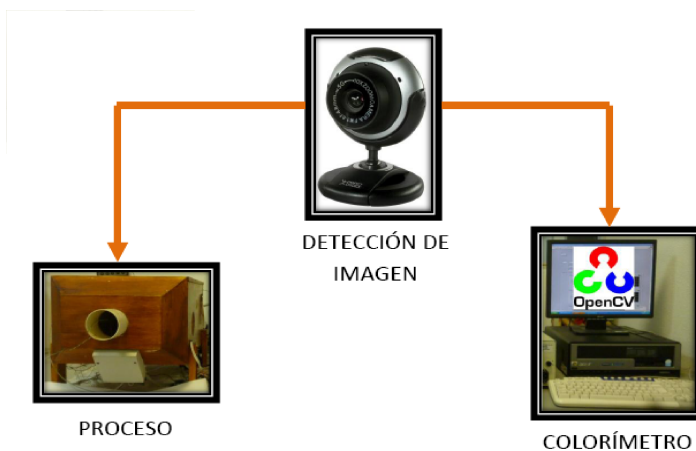


Figura 8: Sistema de visión artificial.

La cámara web es colocada en la parte superior de la deshidratadora y es protegida por un vidrio para evitar calentamiento de la cámara web y fugas de aire caliente, como se puede apreciar en la fotografía mostrada en la Figura 9. Se captura video en tiempo real y ésta información es enviada a la PC para ser procesada y de este modo se puede analizar el cambio de color que presenta el jitomate durante el proceso de deshidratado, ver Figura 9.



Figura 9: Prototipo con cámara web instalada.

Existe un punto importante a tratar que es el modelo matemático del prototipo construido, éste se presenta en la siguiente sección.

### 2.3. Modelo matemático del prototipo

En ésta sección se presenta el modelo matemático del prototipo construido. Dicho modelo se obtiene haciendo algunas suposiciones acerca del proceso, las cuales se describen a continuación.

El prototipo construido se caracteriza por ser un sistema térmico, en este se involucra la transferencia de calor por convección, como ya se ha mencionado. Este tipo de sistemas, es común analizarlos en términos de los parámetros de resistencia y capacitancia térmica del proceso. Es bien sabido que si se desarrolla un modelo matemático considerando parámetros distribuidos se tiene una representación más precisa, sin embargo los modelos obtenidos bajo ésta consideración, resultan en ecuaciones diferenciales parciales, haciendo difícil su aplicación a la teoría del control.

Debido a esto, para simplificar el análisis, aquí se supone que el prototipo construido se representa mediante un modelo de parámetros concentrados, es decir, que los elementos que presentan una resistencia al flujo de calor, tienen una capacitancia térmica insignificante y viceversa, esto es válido en una zona de operación específica. En el prototipo construido, dichos elementos son las paredes del mismo, las cuales fueron recubiertas mediante un aislante térmico y eléctrico, por lo que las paredes no “guardan” demasiado calor.

En un proceso térmico, el calor fluye de un punto a otro de tres diferentes formas: por conducción, por convección y por radiación. Aquí sólo consideraremos la convección (la transferencia de calor por radiación sólo se aprecia si la temperatura del emisor es muy alta en comparación con la del receptor, la mayor parte de los procesos térmicos en los sistemas de control de procesos no involucran transferencia de calor por radiación), esto debido a que el flujo de aire pasa a través del calefactor y transfiere calor al flujo de aire. Esto coincide con la definición de convección.

Para la transferencia de calor por convección se tiene:

$$q = K_{cc}\Delta\theta,$$

donde

$q$  = flujo de calor, en  $\frac{Kcal}{seg}$ ,

$\Delta\theta$  = diferencia de temperatura en  $^{\circ}C$ ,

$K_{cc}$  = coeficiente de conductividad térmica en,  $\frac{Kcal}{seg^{\circ}C}$ .

En la convección, el coeficiente  $K_{cc}$  se obtiene mediante la siguiente relación:

$$K_{cc} = HA,$$

donde

$A$  = área normal para flujo de calor,  $m^2$ ,

$H$  = coeficiente de convección,  $\frac{Kcal}{m^2 seg^{\circ}C}$ .

La resistencia térmica  $R$  para la transferencia de calor entre dos sustancias se define del siguiente modo,

$$R = \frac{\text{cambio en la diferencia de temperatura en el proceso } ^{\circ}C}{\text{cambio en el flujo de calor } \frac{Kcal}{seg}}.$$

La resistencia térmica para una transferencia de calor por conducción o por convección define se como sigue:

$$R = \frac{d\Delta\theta}{dq} = \frac{1}{K_{cc}}.$$

Debido a que los coeficientes de conductividad y convección térmica son casi contantes en un sistema cerrado, la resistencia térmica para la conducción o la convección es contante. Aunque nuestro proceso no es adiabático debido a que cuenta con una salida de aire, se supone que el aire que sale es mayor al que entra, haciendo que ésta suposición sea válida.

La capacitancia térmica  $C$  se define por,

$$C = \frac{\text{cambio en el calor almacenado, Kcal}}{\text{cambio en la temperatura, } ^\circ\text{C}}$$

o bien

$$C = mc,$$

donde

$m$  = masa de la sustancia considerada,  $Kg$ ,

$c$  = calor específico de la sustancia,  $\frac{Kcal}{kg} ^\circ C$ .

Ahora, considere el sistema que aparece en la Figura 10, el cual como ya se explicó anteriormente, puede considerarse como cerrado, es decir, las pérdidas de calor hacia el exterior pueden despreciarse. Debido al aislante térmico utilizado, también es posible considerar la suposición de que no hay almacenamiento de calor en el aislamiento, por lo que la deshidratadora tiene una temperatura estable. De este modo se puede utilizar una sola temperatura para describir la temperatura del fluido en la deshidratadora y la del flujo del aire que sale. Dicha suposición es válida, debido a que sólo nos interesa la temperatura del flujo de aire que impacta directamente con el producto.

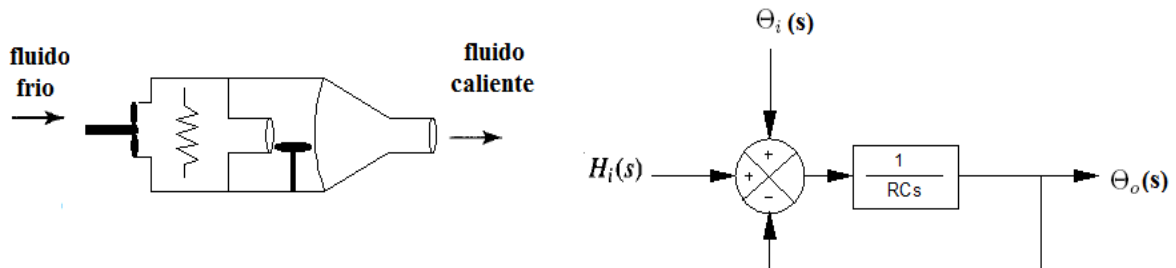


Figura 10: Esquema del sistema térmico.

Ahora, se define a las siguientes variables:

$\theta_i$  = temperatura en estado estable del fluido que entra, °C,

$\theta_o$  = temperatura en estado estable del fluido que sale, °C,

$G$  = velocidad del fluido en estado estable,

$M$  = masa del fluido en el tanque, Kg

$c$  = calor específico del flujo de aire,  $\frac{Kcal}{Kg} \circ C$ ,

$R$  = resistencia térmica del proceso,  $\circ C \frac{seg}{\circ C}$ ,

$H^-$  = entrada del flujo de calor en estado estable,  $\frac{Kcal}{seg}$ .

Suponga que la temperatura del flujo del aire que entra a la cámara de calentamiento, se mantiene constante (ésta suposición es válida debido a que se supone que la temperatura del exterior no cambia bruscamente durante el experimento) y que el flujo de calor de entrada al sistema (el calor que proporciona el calefactor) cambia repentinamente de  $H^-$  a  $H^- + h_i$  en donde  $h_i$  representa un cambio pequeño en el flujo de calor de entrada. Entonces, el flujo de calor de salida cambiará en forma gradual, de  $H^-$  a  $H^- + h_o$ . La temperatura del flujo de aire que sale también cambiará de  $\theta_o^-$  a  $\theta_o^- + \theta$ . Para este caso,  $h_o$ ,  $C$  y  $R$  se obtienen respectivamente como:

$$h_o = (G)(c)\theta,$$

$$C = (M)(c),$$

$$R = \frac{\theta}{h_o} = \frac{1}{(G)(c)}.$$

Por consiguiente, de la definición de capacitancia térmica y la ley de conservación de la energía [42], puede establecerse la ecuación diferencial que representa la dinámica del sistema de la siguiente forma:

$$C \frac{d\theta}{dt} = h_i - h_o. \quad (2)$$

En la ecuación (2) puede observarse que el cambio de calor almacenado en el proceso, se representa como la variación entre el flujo de calor en la entrada y el flujo de calor en la salida. El cambio en la temperatura es la variación o el gradiente que existe en la temperatura. Si se sustituye el valor de  $h_o$  definido anteriormente, ésta ecuación puede escribirse como:

$$RC \frac{d\theta}{dt} + \theta = Rh_i.$$

Observe que la constante de tiempo del sistema es igual a  $RC$  en segundos y de este hecho se obtiene la función de transferencia del sistema de la temperatura  $\theta$  en relación al flujo de calor  $h_i$ , del diagrama de bloques de la Figura 10 se tiene que,

$$\frac{\theta(s)}{H_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}.$$

Sin embargo, la temperatura  $\theta(s)$  es medida mediante un sensor LM35. En este transductor, la temperatura es directamente proporcional a la temperatura medida ( $1^\circ\text{C}$  equivale a 10 mV), por lo que puede considerarse lo siguiente:

$$Y(s) = K_{sensor}\theta(s),$$

donde  $Y(s)$  es la salida del sensor en volts y  $K_{sensor}=0.01 \text{ V}/^\circ\text{C}$ . Para el termopar, aunque la relación de voltaje-temperatura es no lineal, el PID realiza la compensación de punta fría, haciendo que ésta consideración sea también válida. Además, suponemos que el flujo de calor es directamente proporcional al voltaje aplicado a la rejilla eléctrica, consecuentemente se tiene que:

$$U(s) = K_{rejilla}H_i(s),$$

donde  $K_{rejilla}$  es una constante de proporcionalidad dada en  $(V\text{seg})/Kcal$  y  $U(s)$  que representa la señal de control aplicada a la rejilla. Debido a que la fuente de calor está alejada del producto una distancia  $L$  (aproximadamente 30 cm en el prototipo construido), existe un retardo  $h$  en el transporte. Observe que se tiene una dependencia del retardo  $h$  con respecto a la distancia  $L$ , sin embargo debido a que ésta distancia es fija, puede considerarse a dicho retardo constante. Este retardo puede modelarse como una desviación en el argumento de la señal de control y en el dominio de la frecuencia se tiene que:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{ke^{-sh}}{\tau s + 1},$$

donde  $\tau = RC$  es la constante de tiempo de la planta,  $k = RK_{rejilla}/K_{sensor}$  es la ganancia del sistema y  $h$  es el retardo de la planta.

De ésta forma, se observa que debido a las suposiciones y restricciones hechas, el modelo matemático del prototipo puede reducirse a un sistema lineal de primer orden con retardo en la entrada en una zona de operación específica. La dificultad de calcular los parámetros del modelo, hace recurrir a la bien conocida técnica de respuesta al escalón unitario para la identificación de dichos parámetros. Esto se trata en la siguiente sección.

## 2.4. Identificación de la planta (Modelo aproximado)

En ésta sección se valida experimentalmente el modelo matemático obtenido en la sección anterior. Debido a que la zona de operación de la deshidratadora es fija (no hay seguimiento de perfil de temperatura en ningún experimento), la técnica de respuesta al escalón es adecuada.

La identificación de parámetros se realiza aplicando una señal escalón al actuador, teniendo en cuenta que las zonas de operación de la deshidratadora serán  $50^\circ\text{C}$ ,  $60^\circ\text{C}$  y  $70^\circ\text{C}$ . A continuación se describe dicho proceso.

1. El ventilador se mantiene a velocidad constante aplicando 7.2 Volts, de manera que se obtenga una velocidad de viento de  $2\text{m/s}$ . Dicha velocidad es recomendada en la literatura especializada para el deshidratado del jitomate [1].
2. La señal escalón se aplica al actuador (resistencias calefactoras) con un voltaje constante del 70 % del voltaje nominal 180 Vcd, el cual se consideró como el máximo voltaje de

operación. Cabe mencionar que dicho voltaje produce aproximadamente una temperatura de establecimiento de  $95^{\circ}\text{C}$ , temperatura mayor que la máxima de  $70^{\circ}\text{C}$ . Se supone que dicho modelo es válido para zonas de operación de  $50^{\circ}\text{C}$ ,  $60^{\circ}\text{C}$  y  $70^{\circ}\text{C}$ , que son más bajas.

3. El valor de temperatura que se considera para determinar la ganancia  $k$  de establecimiento, es aquel en el que ya no presente variaciones, considerando el criterio de la literatura del  $\pm 2\%$ .
4. Se obtiene la constante de tiempo  $\tau$  con el tiempo correspondiente al 63% del valor de ganancia  $k$  obtenida. Esto de acuerdo a la respuesta temporal de un sistema de primer orden.
5. El valor del retardo  $h$  es obtenido de manera experimental, con los datos de temperatura almacenados.

En la Figura 11 se presenta el diagrama de instrumentación del prototipo, el cual permite visualizar el funcionamiento general del proceso.

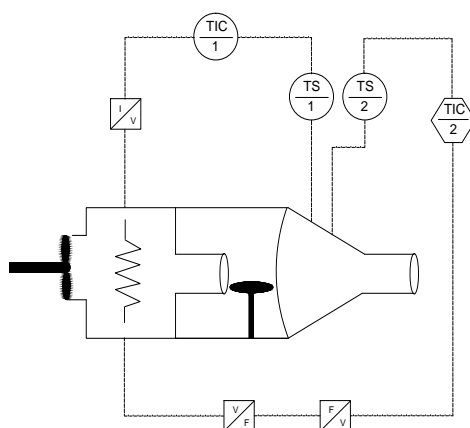


Figura 11: Diagrama de instrumentación de la deshidratadora construida.

En la Figura 11, los bloques de Instrumentación se rigen de acuerdo a la normativa ISA [43]:

$I/V$  = Convertidor de Corriente a Voltaje.

$V/F$  = Convertidor de Frecuencia a Voltaje.

$TS$  = Sensor de temperatura.

$TIC$  = Control indicador de temperatura.



En la Figura 12 se muestra el resultado experimental de aplicar la señal escalón a la planta.

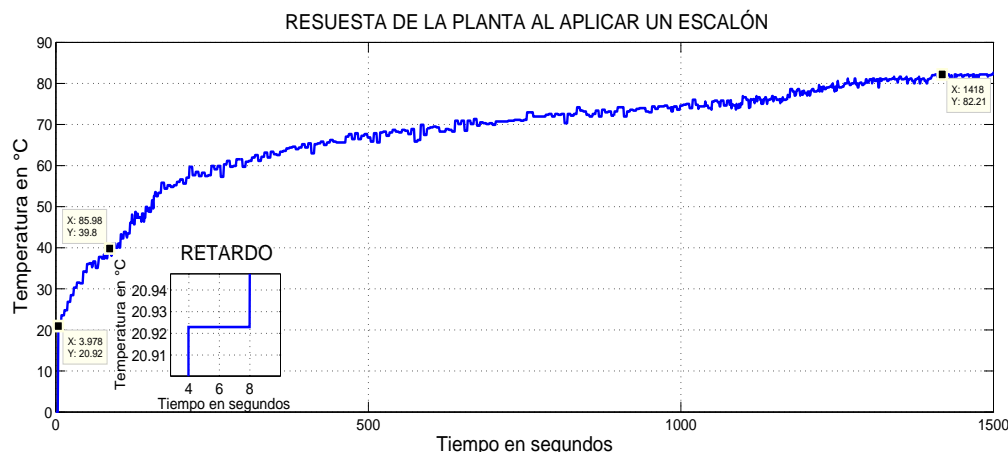


Figura 12: Respuesta al escalón de la planta.

La Figura 12, permite observar el modelo aproximado utilizado para la síntesis y sintonización de los controladores empleados. Debido a que en el escalón se considera el 100 %, no es necesario normalizar la ganancia  $k$ . Sin embargo, debido a que el proceso no tiene condiciones iniciales cero, se recorre el cero a la temperatura ambiente. De ésta forma se tiene que la ganancia referenciada a voltaje se calcula como:  $0.82 - 0.20 = 0.62$ . Este valor es el que se considera como la ganancia  $k$  de la planta.

Note que a pesar de que la planta a controlar es no lineal (ver Apéndice B), alrededor de un punto de operación específico la respuesta experimental de la planta es semejante a la de un sistema de primer orden lineal con un retardo en la entrada. Por lo tanto el modelo aproximado en dominio frecuencial es:

$$\frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{0.62e^{-4s}}{86s + 1}.$$

Este modelo de primer orden es el utilizado para diseñar el controlador óptimo.

## 2.5. Conclusiones

El prototipo fue construido de manera adecuada para implementar una ley de control y realizar el proceso de deshidratado. El prototipo cuenta con los dispositivos necesarios para poder adaptar la plataforma a las necesidades de trabajos futuros, como lo son: la interface de potencia, la instrumentación instalada para registrar los parámetros del producto y la cámara utilizada para monitorizar el color del jitomate.

Se logra obtener un modelo que describe el comportamiento de la planta, el cual fue utilizado para la implementación de la ley de control.

## Capítulo 3

### 3. Controlador óptimo y desempeño de la plataforma experimental

En este capítulo se describen las técnicas de control empleadas, la obtención de condiciones suficientes para la estabilidad y estabilidad robusta de la planta en lazo cerrado con el control óptimo aproximado con compensación de retardos. Finalmente, se describe la implementación de un dispositivo de monitorización de color en línea del producto, el cual se compara con mediciones iniciales y finales con un colorímetro comercial.

#### 3.1. Programación dinámica

En ésta sección se describe brevemente la técnica de programación dinámica aplicada a la síntesis de controladores óptimos cuando se consideran sistemas de control libres de retardos. Un sistema de control no lineal puede representarse mediante una ecuación diferencial matricial como sigue:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), x(t_0) = x_0, \quad (3)$$

donde  $x(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbf{R}^m$  y  $f(.,.) \in \mathbf{R}^n$  satisface la condición de Lipschitz además el control  $u(.)$  pertenece a un conjunto  $\mathbb{U}$ , subconjunto de  $\mathbf{R}^m$ . Una vez elegido el control  $u \in \mathbb{U}$ , el sistema (3) determina una trayectoria o estado  $x(.)$  con condición inicial  $x_0$  en el instante  $t_0$ .

**El problema del control óptimo de horizonte infinito.** Suponga que se desea hallar un control  $u \in \mathbb{U}$ , tal que en lazo cerrado con el sistema (3), genere una trayectoria que converga al origen en tiempo mínimo o que dicho control consuma mínima de energía y converga lo más rápido posible. A éste último planteamiento, se le conoce como el Problema del control óptimo, para hallar la solución de este, se requiere definir un índice de desempeño, que penalize el estado del sistema y el control, a este se le llama funcional de costo que puede definirse como:

$$\mathbf{J}^{u(.)}(t_0, x_0) = \int_{t_0}^{\infty} \mathbf{L}(x(t), u(t)) dt, \quad (4)$$

donde  $\mathbf{L}$  es una función escalar definida positiva. La función  $\mathbf{L}$  representa una penalización del estado  $x(.)$  y de la energía utilizada  $u(.)$ . Si sólo se desea minimizar el uso de energía, se puede tomar  $\mathbf{L}(x, u) = u^T u$ .

Si un control  $u^*$  es tal que minimiza la funcional de costo  $\mathbf{J}^{u(.)}(t_0, x_0)$ , se tiene que:

$$\mathbf{J}^{u^*}(\cdot)(t_0, x_0) \leq \mathbf{J}^{u(.)}(t_0, x_0), \forall u(.) \in \mathbb{U},$$

entonces a  $u^*$  se le denomina control óptimo. En 1957, Richard Bellman presentó el método de programación dinámica para resolver problemas de optimización con restricciones que involucran

ecuaciones diferenciales. Una aplicación particular de ésta metodología, es el problema del control óptimo, en este problema las restricciones se interpretan como la ecuación de estado. Este método consiste en reemplazar el problema de optimización dado por (3) y(4), el cual contiene una minimización en el espacio  $\mathbb{U}$ , por una ecuación diferencial matricial en derivadas parciales, llamada ecuación de programación dinámica o ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, definida como sigue:

$$0 = \min_{u \in \mathbb{U}} \{L(x, u) + \nabla_x V(x) \cdot f(x, u)\}, t \in [t_0, \infty], x \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

donde  $\frac{dV(x)}{dt} = \nabla_x V(x) \cdot f(x, u)$ . La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman se satisface por una función denominada función de Bellman  $V(x)$ , la cual se define como:

$$V(x_0) = \min_{u \in \mathbb{U}} \mathbf{J}^{u(\cdot)}(t_0, x_0). \quad (6)$$

Para que la función de Bellman (6) satisfaga la ecuación (5) es necesario que la función  $V(\cdot)$  sea continuamente diferenciable a lo largo de las trayectorias de (3). A continuación se explica brevemente el uso de éstas ecuaciones para resolver el bien conocido problema del control óptimo de horizonte infinito para el caso de los sistemas lineales libres de retardos (Problema del Regulador Cuadrático Óptimo, LQR, Linear Quadratic Regulator de sus siglas en inglés). Note que el modelo de temperatura de la planta corresponde a un sistema lineal con un retardo en la entrada. La compensación de dicho retardo se aborda un poco más adelante. Considere el sistema lineal en representación espacio estado:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (7)$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  y defina el índice de desempeño cuadrático siguiente:

$$\mathbf{J} = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt, \quad (8)$$

donde  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  son matrices constantes semidefinida positiva y definida positiva respectivamente. Se define el siguiente conjunto de controles admisibles:

$\mathbb{U} = \{u/u \text{ mboxes una función continua a tramos y el sistema (7) es estable en lazo cerrado con } u\}$ .

Sea  $u \in \mathbb{U}$ , tal que es función lineal del estado  $x(t)$ , es decir,  $u(t) = u(x(t))$ . Suponiendo que existen controles admisibles para el sistema (7) y que el índice de desempeño (8) alcanza un mínimo para:

$$u(x(t)) = u^*(x(t)), \quad (9)$$

se busca una función  $V(x(t))$  definida positiva tal que su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema (7) es:

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = -L^*(x(t), u^*(t)), \quad (10)$$

donde:

$$L^*(x(t), u^*(t)) = x^T(t)Qx(t) + u^{*T}(x(t))Ru^*(x(t)).$$

Integrando de 0 a  $\infty$  ambos lados de la expresión (10) se tiene,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) - V(x_0) = - \int_0^\infty L^*(x(t), u^*(t)) dt.$$

Dado que el sistema es estable ( $u^*$  es un control admisible), se obtiene la siguiente expresión,

$$V(x_0) = \int_0^\infty L^*(x(t), u^*(t)) dt,$$

donde  $x(t, x_0)$  denota la solución del sistema (7) en lazo cerrado con (9). Puesto que  $L^*(x(t), u^*(t))$  es definida positiva, claramente  $V(x(t))$  es una función de Lyapunov para el sistema (7). De la expresión (10) se observa que:

$$\frac{dV(x(t))}{dt} + L^*(x(t), u^*(t)) = 0, \quad (11)$$

la cual se puede reescribir como:

$$\min_{u \in \mathbb{U}} \left( \frac{dV(x(t))}{dt} \Big|_{(7)} + x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) \right) = 0. \quad (12)$$

De ésta forma, a la ecuación (12) se le conoce como la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para sistemas lineales y a la función que satisface dicha ecuación se le conoce como función de Bellman para el sistema (7). Cuando se conoce la función de Bellman  $V(x(t))$ , la solución de la ecuación (12) con respecto de  $u$ , proporciona el control óptimo  $u^*(t)$ . La solución de ésta ecuación es brevemente recordada en lo que sigue.

La función  $V(x(t))$  puede considerarse como una función de Lyapunov para el sistema (7) en lazo cerrado con  $u^*(t)$ . Dado que el sistema es lineal y  $u^*(t) = u^*(x(t))$ , una función de Lyapunov para el sistema lineal (7) en lazo cerrado puede proponerse como,

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t), \quad (13)$$

donde  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es definida positiva. Ahora se calcula la derivada de  $V(x(t))$  a lo largo de las trayectorias del sistema (7),

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \Big|_{(7)} = 2x^T(t)P(Ax(t) + Bu(t)), \quad (14)$$

ahora, sustituya la derivada (14) en (12), para obtener la siguiente expresión,

$$\min_{u \in \mathbb{U}} (2x^T P Ax(t) + 2x^T(t)PBu(t) + (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))) = 0. \quad (15)$$

De ésta última expresión, se desea hallar explícitamente la ley de control óptima  $u^*$ . Observe que la ecuación (15) es una función cuadrática y fuertemente convexa [44] respecto a  $u$ , por lo que la existencia de un mínimo para la ecuación (15) está garantizado y es global. De acuerdo

### 3 CONTROLADOR ÓPTIMO Y DESEMPEÑO DE LA PLATAFORMA EXPERIMENTAL41

con los resultados clásicos de optimización del enfoque de cálculo de variaciones, la primera variación de la función a optimizar con respecto a  $u$  debe ser cero,

$$\frac{\partial}{\partial u}(2x^T(t)PAx(t) + 2x^T(t)PBu(t) + x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) = 0,$$

por lo que:

$$2B^T Px(t) + 2Ru(t) = 0, \quad (16)$$

consecuentemente la ley de control óptima para el sistema (7) es,

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T Px(t). \quad (17)$$

Ésta expresión se dice óptima debido a que,

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}(2x^T(t)PAx(t) + 2x^T(t)PBu(t) + x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) = 2R,$$

la cual es estrictamente definida positiva y de acuerdo a la condición suficiente para la optimalidad,  $u^*(t)$  dado por la ecuación (17) es óptimo.

Por último sólo es necesario expresar la matriz desconocida  $P$  de la función de Bellman  $V(x(t))$ , en términos de matrices conocidas. Esto se logra mediante el cálculo de la derivada temporal de la ecuación (13) y se evalúa a lo largo de las trayectorias del sistema (7) en lazo cerrado con la ley de control óptima (17), para obtener la siguiente expresión,

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = x(t)^T(A^T P + PA)x(t) + u^{*T}(t)B^T Px(t) + x(t)^T PB u^*(t), \quad (18)$$

sustituyendo la expresión dada en (18) y la ley de control óptima dada por (17) en la ecuación (11), se tiene que para todo estado  $x(t)$ ,

$$x(t)^T(A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P)x(t) = 0,$$

y se concluye que,

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0. \quad (19)$$

A la ecuación dada por (19) se le llama ecuación algebraica de Riccati en estado estable o ecuación algebraica de Riccati para el caso continuo (CARE, Continuous Algebraic Riccati Equation de sus siglas en inglés). Dadas las matrices  $Q$  semidefinida positiva y  $R$  estrictamente definida positiva, dicha ecuación puede resolverse numéricamente con respecto a  $P$ , la cual define el control óptimo  $u^*$ .

### 3.2. Control predictivo para sistemas con retardo en la entrada

En ésta sección se describe la idea básica del diseño del control predictivo para sistemas de control con retardo en la entrada [19] y [45]. Una vez compensado el retardo en la entrada de la planta, es posible sintetizar el control óptimo considerando al sistema libre de retardos, como en la sección anterior. Considere el sistema lineal con retardo en la entrada de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t-h) \\ u(\theta) &= \mathbf{u}(\theta), \forall \theta \in [-h, 0],\end{aligned}\quad (20)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , el par  $(A, B)$  es controlable, la función inicial  $\mathbf{u}(\theta)$  es una función continua a tramos en  $[-h, 0]$  y la señal de salida  $u(t)$  está retardada  $h$  unidades de tiempo.

Dado un vector de ganancias  $\mathbf{K}$  para estabilizar el sistema, tal que la matriz  $A + B\mathbf{K}$  es Hurwitz, se desea obtener un control  $u$  tal que,

$$u(t-h) = \mathbf{K}x(t).$$

Observe que este control puede escribirse alternativamente como,

$$u(t) = \mathbf{K}x(t+h).$$

Puede apreciarse que aparentemente dicho control no es realizable, debido a que requiere valores futuros del estado, sin embargo, si se trata el estado actual  $x(t)$  como condición inicial, de acuerdo a la solución en la forma de Cauchy de sistemas lineales, se tiene que,

$$x(t+h) = e^{Ah}x(t) + \int_{t-h}^t e^{A(t-\theta)}Bu(\theta)d\theta, \forall t \geq 0.$$

Esto produce una ley de control con retroalimentación de estado,

$$u(t) = \mathbf{K} \left[ e^{Ah}x(t) + \int_{t-h}^t e^{A(t-\theta)}Bu(\theta)d\theta \right], \forall t \geq 0, \quad (21)$$

la cual presenta un retardo distribuido e implica valores de control en tiempos anteriores. A pesar de esto último, el sistema en lazo cerrado que se presenta puede considerarse libre de retardos,

$$\dot{x}(t) = (A + B\mathbf{K})x(t), t > h,$$

sin embargo, esto se cumple, sólo después de que el control se activa en  $t = h$ . Durante el intervalo  $t \in [0, h]$ , el estado del sistema se rige por,

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau-h)d\tau, \forall t \in [0, h].$$

Si las condiciones iniciales del control son cero, entonces la dinámica de la planta se rige con las condiciones iniciales de la misma. Observe que la ganancia  $\mathbf{K}$  del control puede determinarse óptimamente de acuerdo con lo expuesto en la sección anterior, es decir,  $\mathbf{K} = -R^{-1}B^TP$ , el cual se diseña suponiendo al sistema libre de retardos. El problema de la implementación del término con retardo distribuido en la ley de control se aborda en la siguiente sección.

### 3.3. Implementación numérica de la ley de control óptima

El objetivo del control óptimo es determinar las señales de control que causarán que se satisfagan las limitaciones del proceso físico y al mismo tiempo minimizar o maximizar algún índice de desempeño. De acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 2 en la sección de Modelo matemático del prototipo, se dedujo el siguiente modelo en el dominio frecuencial para la planta en cuestión,

$$\frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{Ke^{-sh}}{\tau s + 1},$$

donde  $Y(s)$  y  $U(s)$  son la variable del proceso (temperatura del viento de secado) y el voltaje aplicado a la rejilla respectivamente. Mediante el uso de la transformada inversa de Laplace de ésta función de transferencia, se obtiene la representación en espacio de estado:

$$\dot{y}(t) = -ay(t) + bu(t - h). \quad (22)$$

Se desea minimizar la energía aplicada a la rejilla y a la vez lograr que la variable del proceso (para este caso el estado del sistema) converga lo más rápido posible, por ello se considera el siguiente índice de desempeño cuadrático,

$$J = \int_0^h y^2 Q dt + \int_h^\infty (y^2(t)Q + u^2(t - h)R) dt,$$

donde  $Q \geq 0$  y  $R > 0$ . Este índice de desempeño penaliza el estado y el control. Debido a que se usará una compensación de retardo en la entrada, la acción de control empieza en el instante  $t = h$ , debido a que las condiciones iniciales del control se ajustan a cero y debido a que por el principio de optimalidad la última parte de una trayectoria óptima también es una trayectoria óptima se tiene que,

$$\mathbf{J} = \int_h^\infty (y^2 Q + v^2(t)R) dt, \quad (23)$$

donde  $v(t) = u(t - h)$ . Este índice de desempeño minimiza a  $u(t - h) = v(t)$ . La ley de control  $v(t)$  puede obtenerse por los métodos utilizados en control óptimo libre de retardo, tal como se mencionó en secciones anteriores, por lo que,

$$v(t) = -Fy(t), \quad (24)$$

donde  $F = -R^{-1}bP$  y  $P$  satisface la ecuación escalar del tipo Riccati [46]. Como es bien sabido, toda realimentación admisible de estado hace que el estado converga a cero, cuando se busca que el estado converga a punto distinto al estado cero, la ley de control hace uso del error y en algunos casos debe agregarse un Offset como sigue,

$$v(t) = -Fe(t) + adj,$$

donde  $e(t) = SP - y(t)$  y  $SP$  (Set Point de sus siglas en inglés) es la referencia. La planta (??) debe transformarse también en función del error  $e(t)$  y también es posible calcular fácilmente el

valor de  $adj(\text{offset})$ , estos pasos se omiten debido a que son bien conocidos y directos [47]. Como se explicó en la sección anterior,  $y(t)$  con condición inicial  $y(t-h)$  puede obtenerse como,

$$y(t) = e^{-ah}y(t-h) + \int_{t-h}^t e^{-a(t-\theta)}bu(\theta-h)d\theta,$$

y si se substituye ésta expresión en la ley de control (24) con  $t_0 = 0$  se obtiene que:

$$v(t) = u(t-h) = -Fe^{ah}y(t-h) - F \int_{t-h}^t e^{-a(t-\theta)}bu(\theta-h)d\theta. \quad (25)$$

Cabe señalar que ésta ley es diferente (pero equivalente) a la definida en (21), en esa ecuación se presenta una expresión para  $u(t)$  y la dada en (25) es una expresión para  $u(t-h)$ , como se verá a continuación esto se realiza por conveniencia. En efecto, la ley de control dada por la ecuación (25) se observa que se tiene una dependencia de  $u(s-h)$ , cuando se realizaron los experimentos se observó que dicha dependencia confería poca robustez a todo el esquema. Es por ello que se decidió que la ley de control dependiera únicamente del estado  $y(t)$  y valores anteriores de éste. Esto también facilita el análisis de estabilidad en el dominio temporal. El término  $bu(\theta-h)$  se obtiene al despejarlo de la ecuación (??) como sigue,

$$bu(\theta-h) = \dot{y}(\theta) + ay(\theta),$$

y se substituye este valor en la ley de control (25):

$$u(t-h) = -Fe^{ah}y(t-h) - F \int_{t-h}^t e^{-a(\theta-t)}[\dot{y}(\theta) + ay(\theta)]d\theta,$$

ahora se hace uso de las propiedades básicas de la integración:

$$u(t-h) = -Fe^{ah}y(t-h) - F \int_{t-h}^t e^{-a(\theta-t)}\dot{y}(\theta)d\theta - aF \int_{t-h}^t e^{-a(\theta-t)}y(\theta)d\theta.$$

Si se integra por partes el tercer término [48], después de cálculos, simplificaciones directas y un cambio de variables se obtiene [49] que,

$$u(t-h) = -Fy(t) - 2aF \int_{-h}^0 e^{a\theta}y(t+\theta)d\theta.$$

Como ya se mencionó, ésta retroalimentación de estado hace que la planta converga a cero, por lo que se adiciona un Offset para ayudar a mantener la planta en la referencia [47],

$$u(t-h) = -Fy(t) - 2aF \int_{-h}^0 e^{a\theta}y(t+\theta)d\theta + adj. \quad (26)$$

Para este caso, el offset  $adj$  puede calcularse como sigue: considere que la planta alcanzó el estado estable por lo que,

$$y(t) = SP,$$



entonces el sistema en lazo cerrado con el control (26) en estado estable es,

$$0 = SP(-a - bF - 2abF \left( \frac{1 - e^{ha}}{-a} \right)) + b(adj), \quad (27)$$

observe que el término integral en la ley de control puede resolverse toda vez que:  $y(t) = SP$ . Ahora se despeja el término  $adj$  de (27) para obtener,

$$adj = \frac{SP}{b} \left( a + bF + 2abF \left( \frac{e^{ha} - 1}{a} \right) \right).$$

Finalmente, es posible expresar al controlador en términos del error  $e(t)$  en la ecuación dada por (26).

La implementación del controlador óptimo requiere la realización del término integral involucrado en la ley de control. Como se expuso en el Capítulo 1, existen varias técnicas para hacer esto, se elige la técnica de realizar el retardo distribuido mediante una aproximación numérica por algún método de cuadratura. El método elegido para esto es la regla del trapecio compuesto, debido a su facilidad de implementación y que con relativos pocos pasos se alcanza una alta precisión [50], el cual es brevemente recordado a continuación. Considere el problema de realizar numéricamente una integral definida en un intervalo  $[a, b]$  de alguna curva, mediante una sumatoria de trapecios cuyos extremos coinciden en puntos de la curva  $f$  que define el integrando, para ello, se subdivide el intervalo  $[a, b]$  en puntos igualmente espaciados los cuales generan subintervalos. En cada subintervalo, la función  $f$  se aproxima mediante una aproximación lineal (polinomio de primer grado), para luego calcular la aproximación de la integral definida, como la suma de las áreas de los trapecios formados en los subintervalos. La aproximación de la integral se obtiene mediante:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} [f(a) + 2f(a + \Delta) + 2f(a + 2\Delta) + \dots + f(b)],$$

donde  $\Delta = \frac{b-a}{n}$  y  $n$  es el número de subintervalos en el que se divide el intervalo. A ésta regla se le llama Regla trapezoidal simple [50]. Si se presenta el caso en el que el intervalo  $[a, b]$  no sea lo suficientemente pequeño, la aproximación de la integral no suele ser muy precisa. Para ello, se recurre a la fórmula del trapecio compuesto. En ésta, se divide el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos igualmente espaciados de tamaño  $\Delta = (\frac{b-a}{n})$ . Se aplica la regla simple a cada subintervalo para obtener la siguiente expresión,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta \left[ \frac{f(a) + f(b)}{2} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i\Delta) \right] \quad (28)$$

La ecuación (28), se emplea para realizar la aproximación del retardo distribuido sobre el estado  $y(\cdot)$  que se presenta en la ley de control dada en (26). Por lo que se obtiene el siguiente controlador aproximado:

$$u(t - h) \approx -Fy(t) - 2aF \left[ \frac{h}{n} \left( \frac{y(t)}{2} + 2 \left[ \sum_{i=1}^{n-1} e^{a \frac{ih}{n}} y \left( t - i \frac{h}{n} \right) \right] + e^{ah} y(t - h) \right) \right] \quad (29)$$

Observe que la ley de control sin aproximar estabiliza al sistema (??), [42], sin embargo con la ley de control aproximada dada por (29) aún no se había reportado la prueba de estabilidad, esto se trata en la siguiente sección.

### 3.4. Análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado

En ésta sección se trata el problema de la estabilidad de la planta en lazo cerrado con el control aproximado que fue sintetizado en la sección anterior. Esto es necesario debido a que la elección de un cierto número de subintervalos debe satisfacer un criterio de estabilidad.

En ésta parte se realiza el análisis del sistema en lazo cerrado, sin considerar ninguna perturbación externa, tales como turbulencias, fugas excesivas de calor, absorción excesiva de calor en las paredes de la deshidratadora, cambios bruscos de la temperatura externa, dinámicas no modeladas e incertidumbres que podrían afectar el comportamiento de la planta de manera considerable. Para realizar el análisis, considere sin pérdida de generalidad que el sistema se busca llevar al equilibrio cero (el término *adj* es cero), ahora considere el sistema de la forma:

$$\dot{y}(t) = -ay(t) + bu(t - h), \quad (30)$$

si se sustituye la ley de control aproximada en el sistema (30) se tiene que:

$$\dot{y}(t) = -ay(t) + b \left[ -Fy(t) - 2aF \left[ \frac{h}{n} \left( \frac{y(t)}{2} + 2 \left[ \sum_{i=1}^{n-1} e^{a \frac{ih}{n}} y \left( t - i \frac{h}{n} \right) \right] + e^{ah} y(t - h) \right) \right] \right]. \quad (31)$$

La ecuación (31) puede reescribirse de manera más sencilla, en efecto, toda la expresión se agrupa en una sumatoria que contiene a los términos  $y(t - i \frac{h}{n})$  como sigue:

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i y(t - i \frac{h}{n}), \quad (32)$$

donde,

$$\tilde{A}_0 = -a - bF - \frac{2aFbh}{n}, \quad \tilde{A}_i = \frac{-2aFbh}{n} e^{\frac{aih}{n}}, \quad \tilde{A}_n = \left( \frac{-2aFbhe^{ah}}{n} \right). \quad (33)$$

Observe que la ecuación (32) puede reescribirse de la forma,

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i y(t) - \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i \int_{t - \frac{ih}{n}}^t \dot{y}(s) ds, \quad (34)$$

la cual es una transformación bien conocida [51] que conduce a sustituir el valor de  $\dot{y}(s)$  como sigue,

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i y(t) - \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i \int_{t - \frac{ih}{n}}^t \sum_{j=0}^n \tilde{A}_j y \left( s - j \frac{h}{n} \right) ds,$$

es posible intercambiar la integral con la sumatoria interna para obtener:

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i y(t) - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \tilde{A}_i \tilde{A}_j \int_{t - \frac{ih}{n}}^t y \left( s - j \frac{h}{n} \right) ds.$$

Considere el siguiente cambio de variable:

$$\tau = s - \frac{jh}{n},$$

ahora se calculan los nuevos límites de integración: si  $s = t$ , entonces  $\tau = t - \frac{jh}{n}$ , si  $s = t - \frac{ih}{n}$  entonces  $\tau = t - \frac{ih}{n} - \frac{jh}{n}$ . De esto sigue que[52],

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i y(t) - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \tilde{A}_i \tilde{A}_j \int_{t - \frac{ih}{n} - \frac{jh}{n}}^{t - \frac{jh}{n}} y(\tau) d\tau. \quad (35)$$

Para probar estabilidad del lazo, es necesario recordar el Teorema de Lyapunov-Krasovskii, acerca de la estabilidad para sistemas con retardos. Considere el sistema con retardos,

$$\dot{y}(t) = F(t, y_t), \quad (36)$$

donde  $y(\theta) = \varphi(\theta)$ , para toda  $\theta \in [-h, 0]$  y  $\varphi(\theta) \in \mathcal{C}_{[-h, 0]}$  (funciones continuas en el intervalo  $[-h, 0]$ );  $y_t \in \mathbb{R}^m$  denota el pedazo de trayectoria  $y(\theta)$ , con  $\theta \in [t-h, t]$ ,  $h > 0$ ; la funcional  $F(t, y_t) \in \mathbb{R}^m$  está definida para  $t \geq 0$  y  $\|y_t\|_h = \sup_{\theta \in [t-h, t]} \|y(\theta)\| \leq H$ ,  $H > 0$ ; adicionalmente dicha funcional satisface las siguientes propiedades:

- es continua respecto a su argumentos,
- es Lipschitziana con respecto a la variable  $y_t$ ,
- es acotada, es decir:

$$\|y_t\|_h \leq H; \|F(t, y_t)\| < M, \forall t \geq 0.$$

Bajo estas condiciones considere el siguiente teorema:

**Teorema 1** [53] *La solución trivial del sistema (36) es asintóticamente uniformemente estable si existe una funcional  $V(t, y_t)$  definida positiva, unas funcionales  $v_1(y(t))$  y  $v_2(y_t)$  definidas positivas y una funcional  $\omega(y(t))$  definida positiva tales que:*

1.  $v_1(\varphi(0)) \leq V(t, \varphi) \leq v_2(\varphi), \forall t \geq 0, \|\varphi\|_h \leq H$
2. *La derivada de la funcional  $V(t, y_t)$  a lo largo de la trayectoria del sistema (36) es tal que*

$$\left. \frac{dV(t, y_t)}{dt} \right|_{(36)} \leq -\omega(y(t)).$$

Las condiciones suficientes dadas por este resultado fundamental en la teoría de estabilidad para sistemas con retardos, son usadas para concluir la estabilidad de la solución trivial del sistema (30) en lazo cerrado con el control aproximado (35). Como puede verse, en primer lugar, debe proponerse una funcional de Lyapunov-Krasovskii  $V(y(t))$  candidata que satisfaga la primera condición del teorema anterior. Considere la funcional de Lyapunov-Krasovskii siguiente [52]:

$$V(y(t)) = V_1(y(t)) + V_2(y(t)),$$

con  $V_1$  y  $V_2$  definidas como:

$$V_1 = y(t)^2 P$$

y

$$V_2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \int_{\frac{jh}{n}}^{\frac{jh}{n} + \frac{ih}{n}} \left[ \int_{t-s}^t y(\tau)^2 R d\tau \right] ds,$$

donde  $P, R > 0$  y se considera que  $y(t) \in \mathbb{R}$ , sin embargo para nuestro caso  $P = 1$ . No es difícil probar que  $V(y(t))$  posee cotas inferior y superior tales que satisfacen la condición 1 del Teorema anterior [52]. Ahora, se encuentran las condiciones bajo las cuales la derivada de la funcional  $V(y(t))$  a lo largo de las trayectorias del sistema (35) decrecen monotónicamente. Se calcula  $\dot{V}_1(y(t))$  como sigue,

$$\dot{V}_1(y(t)) = 2y(t)P\dot{y}(t),$$

y se sustituye el lado derecho de la ecuación dada por (35) en ésta última expresión, por lo que,

$$\dot{V}_1(y(t)) = 2y(t)P \left[ \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i y(t) - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \tilde{A}_i \tilde{A}_j \int_{t-\frac{ih}{n}-\frac{jh}{n}}^{t-\frac{jh}{n}} y(\tau) : d\tau \right],$$

después de algunas operaciones directas se obtiene que,

$$\dot{V}_1(y(t)) = 2y^2(t)P \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i - 2y(t)P \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \tilde{A}_i \tilde{A}_j \int_{t-\frac{ih}{n}-\frac{jh}{n}}^{t-\frac{jh}{n}} y(\tau)^T d\tau.$$

Ahora se obtiene  $\dot{V}_2(y(t))$  de la siguiente manera,

$$\dot{V}_2(y(t)) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \int_{\frac{jh}{n}}^{\frac{jh}{n} + \frac{ih}{n}} \left[ \int_{t-s}^t y^2(\tau) R d\tau \right] ds \right).$$

Al aplicar la regla de derivación de Leibnitz (ver el apéndice A) se obtiene,

$$\dot{V}_2(y(t)) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left[ \int_{jh}^{\frac{jh}{n} + \frac{ih}{n}} (y^2(t)R - y^2(t-s)R) ds \right].$$

Se resuelve el término integral como sigue,

$$\dot{V}_2(y(t)) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left( y^2(t)R \frac{ih}{n} - \int_{jh}^{\frac{jh}{n} + \frac{ih}{n}} y^2(t-s)R ds \right).$$

Considere el siguiente cambio de variable,

$$\tau = t - s,$$

y calcule los nuevos límites de integración: Si  $s = \frac{jh}{n} \implies \tau = t - \frac{jh}{n}$ , y si  $s = \frac{jh}{n} + \frac{ih}{n} \implies \tau = t - \frac{jh}{n} - \frac{ih}{n}$ . De ésta manera se obtiene que  $\dot{V}_2(\cdot)$  es,

$$\dot{V}_2(y(t)) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left[ y^2(t) R \frac{ih}{n} - \int_{t - \frac{jh}{n} - \frac{ih}{n}}^{t - \frac{jh}{n}} y^2(\tau) R y d\tau \right].$$

Consecuentemente  $\dot{V}(y(t)) = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$  es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(y(t)) = & \sum_{i=0}^n \left( y^2(t) P \tilde{A}_i + \tilde{A}_i^T P + n R \frac{ih}{n} \right) \\ & - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \int_{t - \frac{jh}{n} - \frac{ih}{n}}^{t - \frac{jh}{n}} \left( y^2(t) P \tilde{A}_i \tilde{A}_j y(\tau) + y^2(\tau) \tilde{A}_j \tilde{A}_i P + y^2(\tau) R y(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

A ésta última expresión se le adiciona y sustrae el siguiente término:

$$y^2(t) P \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{ih}{n} \tilde{A}_i \tilde{A}_j R^{-1} \tilde{A}_j^T \tilde{A}_i^T P.$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\cdot) = & \sum_{i=0}^n \left( y^2(t) \left( P \tilde{A}_i + \tilde{A}_i P + R i h + \sum_{j=0}^n P^2 \frac{ih}{n} \tilde{A}_i^2 \tilde{A}_j^2 R^{-1} \right) \right) \\ & - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left[ \int_{t - \frac{jh}{n} - \frac{ih}{n}}^{t - \frac{jh}{n}} \left( 2y(t) P \tilde{A}_i \tilde{A}_j y(\tau) \right. \right. \\ & \left. \left. + y(\tau)^2 R \right) d\tau + y(t)^2 P^2 \frac{ih}{n} \tilde{A}_i^2 \tilde{A}_j^2 R^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Después de algunos cálculos directos finalmente se obtiene que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\cdot) = & y^2(t) \left( \sum_{i=0}^n \left( P \tilde{A}_i + \tilde{A}_i P + R i h + \sum_{j=0}^n P^2 \frac{ih}{n} \tilde{A}_i^2 \tilde{A}_j^2 R^{-1} \right) \right) \\ & - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left[ \int_{t - \frac{jh}{n} - \frac{ih}{n}}^{t - \frac{jh}{n}} \left( R y(\tau) + \tilde{A}_j \tilde{A}_i P y(t) \right) R^{-1} \left( R y(\tau) + \tilde{A}_j \tilde{A}_i P y(t) \right) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Debido a que el segundo término de ésta última expresión es definido negativo, la condición suficiente para que se satisfaga que  $\dot{V}(\cdot) < 0$ , es que,

$$\sum_{i=0}^n \left( P \tilde{A}_i + \tilde{A}_i P + R i h + \sum_{j=0}^n P^2 \frac{ih}{n} \tilde{A}_i^2 \tilde{A}_j^2 R^{-1} \right) = -Q, \quad (38)$$

para alguna matriz conocida  $Q > 0$ , por lo que la solución trivial del sistema en lazo cerrado es estable siempre que dadas  $Q > 0$ ,  $R > 0$ , los parámetros de la planta y del control y un cierto número de particiones  $n$ , exista una matriz  $P > 0$  que satisfaga la ecuación del tipo de Riccati (38). Para realizar esa operación se hizo uso de Matlab, en donde se introdujeron los parámetros de la planta y las ganancias del controlador, para de ésta manera obtener el Hamiltoniano, que permitirá encontrar el valor de la matriz  $P$ .

La función `ric_schr` de Matlab, resuelve una ecuación de Riccati mediante la descomposición de Schur. Para este caso, el valor de la bandera `flag` es 0 si se encuentra una matriz definida positiva (en este caso un escalar positivo), si existe una matriz  $P$  con eigenvalores en el eje  $j\omega$  la bandera `flag` es 1, si existe una matriz  $P$  con eigenvalores positivos y negativos, el valor de la bandera `flag` es 2. Utilizando el comando `ric_schr` se obtuvo  $P = 19.1524$ , por lo que se concluye que el sistema es estable. Dado que el lazo de control existen dinámicas no modeladas, en el siguiente capítulo se analizará la estabilidad robusta ante perturbaciones no estructuradas.

### 3.5. Análisis de estabilidad ante dinámicas no modeladas

En ésta sección, se analiza la estabilidad robusta ante perturbaciones que no están consideradas en el modelo, tales como turbulencias dentro de la deshidratadora que produzcan flujo de aire no laminar, fugas de aire caliente que no sea por el venteo de salida del dispositivo o alguna perturbación externa al sistema que afecte el modelo lineal. Considere el sistema nominal:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - h), \quad (39)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $u(\cdot) \in \mathbb{R}^p$ ,  $u(\theta) = \mathbf{u}(\theta)$ ,  $\forall \theta \in [-h, 0]$ . Además, considere una perturbación no lineal no estructurada aditiva en el modelo nominal (39), entonces se tiene que:

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t - h) + F(y(t)), \quad (40)$$

donde la incertidumbre no lineal aditiva  $F(\cdot)$  satisface que  $\|F(y(t))\| \leq \alpha \|y(t)\|$ , con  $\alpha > 0$  un escalar conocido. Observe que si la ecuación (38) se satisface, la solución trivial del sistema nominal (39) es estable en lazo cerrado con la ley de control  $u(t - h)$  aproximada; se desean hallar las condiciones bajo las cuales la solución trivial del sistema (40) es asintóticamente estable. Para ello, considere el sistema escalar en lazo cerrado dado por (34) y las perturbaciones no lineales aditivas:

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i y(t) - \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}(s) ds + F(y(t)), \quad (41)$$

donde las constantes  $\tilde{A}_i$ , fueron definidas en la sección anterior en la ecuación (33). Para analizar la estabilidad robusta, se propone la bien conocida funcional de Lyapunov Krasovski [54]:

$$V(y_t) = V_1(y(t)) + V_2(y_t) + V_3(y(t)),$$

donde,

$$V_1(y(t)) = y(t)^2 P, \quad P > 0 \quad (42)$$

$$V_2(y_t) = \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i^2 Q_1 \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}(\theta)^2 \left( \theta - t + \frac{ih}{n} \right) d\theta, \quad W_i > 0, \quad (43)$$

$$V_3(y_t) = \sum_{i=0}^n R_1 \int_{t-\frac{ih}{n}}^t y(\theta)^2 d\theta, \quad R_1 > 0. \quad (44)$$

Ahora se calcula la derivada de la primera funcional  $\dot{V}_1(y(t))$  a lo largo de las trayectorias del sistema (35),

$$\dot{V}_1(y(t)) = 2y(t)P\dot{y}(t),$$

se sustituye el lado derecho de la ecuación (35) (ésta representa el sistema en lazo cerrado ya transformado) en  $\dot{V}_1(y(t))$  para obtener:

$$\dot{V}_1(y(t)) = 2y(t)P \left[ \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i y(t) - \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}(\theta) d\theta + F(y(t)) \right].$$

Al realizar operaciones directas se tiene que,

$$\dot{V}_1(y(t)) = 2 \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i y(t)^2 - 2 \sum_{i=1}^n y(t)P\tilde{A}_i \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}(\theta) d\theta + 2y(t)PF(y(t)). \quad (45)$$

El segundo término que involucra productos cruzados entre  $y(t)$  y  $\int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}(\theta) d\theta$  puede manejarse mediante desigualdades como se explica a continuación. Considere la desigualdad presentada en [51]:

$$-2y^2(t)P \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}(\theta) d\theta \leq \sum_{i=0}^n \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \begin{bmatrix} \dot{y}^2(\theta) \tilde{A}_i^2 & y^2(t)P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & & & \\ MQ & (MQ+I)Q^{-1}(QM+I) & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_i y(\theta) \\ P y(t) \end{bmatrix} d\theta,$$

donde  $Q_1 > 0$  y  $M \in \mathbb{R}$ . Ésta última desigualdad se utiliza para mayorizar y reescribir el segundo término:

$$-2y(t)^2 P \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}(\theta) d\theta \leq \sum_{i=1}^n \int_{t-\frac{ih}{n}}^t [y(\theta)^2 \tilde{A}_i Q_1 \tilde{A}_i d\theta \quad (46)$$

$$+ y(t)PM\tilde{A}_i Q_1 \dot{y}(\theta) + \dot{y}(\theta)\tilde{A}_i Q_1 MP y(t) \quad (47)$$

$$+ y(t)^2 P(M^2 Q_1 + I)Q_1^{-1}(Q_1 M + 1)P] d\theta.$$

La ecuación se puede reducir como sigue:

$$\begin{aligned}
 -2y(t)^2 P \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}(\theta) d\theta \leq & \sum_{i=1}^n \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \left[ \dot{y}(\theta)^2 \tilde{A}_i Q_1 \tilde{A}_i d\theta \right. \\
 & \left. + 2y(t) P M Q_1 \tilde{A}_i \dot{y}(\theta) + y^2(t) P (M^2 Q_1 + I) Q_1^{-1} (Q_1 M + 1) P \right] d\theta.
 \end{aligned} \tag{48}$$

Ahora observe que:

$$\int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}(\theta) d\theta = y(t) - y\left(t - \frac{ih}{n}\right), \tag{49}$$

de acuerdo con (49) se tiene que:

$$-2y^2(t) P \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}(\theta) d\theta \leq \sum_{i=1}^n \left[ \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}(\theta) \tilde{A}_i^2 Q_1 \dot{y}(\theta) d\theta \right. \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + 2y(t)^2 P M Q_1 \tilde{A}_i - 2y(t) P M Q_1 \tilde{A}_i y\left(t - \frac{ih}{n}\right) \right. \\
 & \left. + y(t)^2 P (M Q_1 + I) Q_1^{-1} (Q M + 1) P \left(\frac{ih}{n}\right) \right].
 \end{aligned} \tag{51}$$

Rescribiendo  $\dot{V}_1$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 \leq & y^2(t) \sum_{i=1}^n \left( \tilde{A}_i P M Q_1 + P M Q_1 \tilde{A}_i \right) + \sum_{i=1}^n \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}^2(\theta) \tilde{A}_i^2 Q_1 d\theta \\
 & - 2y(t) P M Q_1 \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i y\left(t - \frac{ih}{n}\right) + y(t)^2 P (M Q_1 + 1) Q_1^{-1} (Q_1 M + 1) P \sum_{i=1}^n \left(\frac{ih}{n}\right) + 2y(t) P F(y(t)).
 \end{aligned} \tag{52}$$

Defina  $\bar{X} = Q_1 M P$  y  $\mathbf{Y} = \tilde{h}^{-1} Q_1$ ,  $\tilde{h} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{ih}{n}\right)$ , entonces se obtiene  $\dot{V}_1$  :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 \leq & \left[ 2\bar{X} \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i + (\bar{X} + P) \mathbf{Y}^{-1} (\bar{X} + P) \right] y^2(t) \\
 & - 2y(t) \bar{X} \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i y\left(t - \frac{ih}{n}\right) + 2y(t) P F(y(t)) + \sum_{i=1}^n \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}^2(\theta) \tilde{A}_i^2 Q_1 d\theta.
 \end{aligned} \tag{53}$$

Ahora se procede a obtener  $\dot{V}_2$ . Para ello se aplica la regla de Leibnitz, por lo que:

$$\dot{V}_2 = \dot{y}^2(t) Q_1 \left( \sum_{i=1}^n \left(\frac{ih}{n}\right) \tilde{A}_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}^2(\theta) \tilde{A}_i^2 Q_1 d\theta, \tag{54}$$

sustituyendo el valor de  $\dot{y}(t)$  en la ecuación (54):

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2 = & \left[ \tilde{A}_0 y(t) + \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j y\left(t - \frac{jh}{n}\right) + F(y(t)) \right] \left( \sum_{i=1}^n \left(\frac{ih}{n}\right) \tilde{A}_i \right)^2 \\
 & Q_1 \left[ \tilde{A}_0 y(t) + \sum_{k=1}^n \tilde{A}_k y\left(t - \frac{kh}{n}\right) + F(y(t)) \right] - \sum_{i=1}^n \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}^2(\theta) \tilde{A}_i^2 Q_1 d\theta
 \end{aligned}$$



Al realizar la multiplicación término a término y considerando la definición de  $\mathbf{Y}$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 = & y^2(t)\tilde{A}_0^2 \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{ih}{n} \right) \tilde{A}_i \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} + y(t)\tilde{A}_0 \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{ih}{n} \right) \tilde{A}_i \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} \sum_{k=1}^n \tilde{A}_k y \left( t - \frac{kh}{n} \right) \\
& + y(t)\tilde{A}_0 \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{ih}{n} \right) \tilde{A}_i \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} F(y(t)) + \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j y \left( t - \frac{jh}{n} \right) \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{ih}{n} \right) \tilde{A}_i \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} \tilde{A}_0 y(t) \\
& \quad + \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j y \left( t - \frac{jh}{n} \right) \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i^2 \left( \frac{ih}{n} \right) \mathbf{Y}\tilde{h} \sum_{k=1}^n \tilde{A}_k y \left( t - \frac{kh}{n} \right) \\
& + \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j y \left( t - \frac{jh}{n} \right) \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{ih}{n} \right) \tilde{A}_i \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} F(y(t)) \\
& \quad + F(y(t)) \left( \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i \left( \frac{ih}{n} \right) \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} \tilde{A}_0 y(t) \\
& \quad + F(y(t)) \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{ih}{n} \right) \tilde{A}_i \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} \sum_{k=1}^n \tilde{A}_k y \left( t - \frac{kh}{n} \right) \\
& \quad + F(y(t))^2 \left( \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i \left( \frac{ih}{n} \right) \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} - \sum_{i=1}^n \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}^2(\theta) \tilde{A}_i^2 Q_1 d\theta
\end{aligned}$$

Para la funcional(44), de igual manera se obtiene la derivada como sigue:

$$\dot{V}_3 = - \left[ \sum_{i=1}^n y \left( t - \frac{ih}{n} \right) \right] R_1 \left[ \sum_{j=1}^n y \left( t - \frac{jh}{n} \right) \right] + y^2(t)R_1,$$

por lo tanto teniendo las derivadas de (42), (43), (44), se procede a sumarlas.

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3.$$

El resultado de sumar las tres funcionales es:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} \leq & \left[ 2\bar{X} \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i + (\bar{X} + P)\mathbf{Y}^{-1}(\bar{X} + P) \right] y^2(t) - 2y(t)\bar{X} \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i y \left( t - \frac{ih}{n} \right) \\
 & + 2y(t)PF(y(t)) + \sum_{i=1}^n \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}^2(\theta) \tilde{A}_i^2 Q_1 d\theta \\
 & y^2(t) \tilde{A}_0^2 \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{ih}{n} \right) \tilde{A}_i \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} + y(t) \tilde{A}_0 \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{ih}{n} \right) \tilde{A}_i \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} \sum_{k=1}^n \tilde{A}_k y \left( t - \frac{kh}{n} \right) \\
 & + y(t) \tilde{A}_0 \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i^2 \left( \frac{ih}{n} \right) \mathbf{Y}\tilde{h} F(y(t)) + \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j y \left( t - \frac{jh}{n} \right) \sum_{i=0}^n \tilde{A}_i^2 \left( \frac{ih}{n} \right) \mathbf{Y}\tilde{h} \tilde{A}_0 y(t) \\
 & + \left[ \sum_{j=1}^n y \left( t - \frac{jh}{n} \right) \tilde{A}_j \right] \left( \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{ih}{n} \right) \tilde{A}_i \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} \right) \left[ \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j y \left( t - \frac{jh}{n} \right) \right] \\
 & + \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j y \left( t - \frac{jh}{n} \right) \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{ih}{n} \right) \tilde{A}_i \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} F(y(t)) \\
 & + F(y(t)) \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i^2 \left( \frac{ih}{n} \right) \mathbf{Y}\tilde{h} \tilde{A}_0 y(t) + F(y(t)) \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i^2 \left( \frac{ih}{n} \right) \mathbf{Y}\tilde{h} \sum_{k=1}^n \tilde{A}_k y \left( t - \frac{kh}{n} \right) \\
 & + F(y(t))^2 \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{ih}{n} \right) \tilde{A}_i \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} - \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}^2(\theta) \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i^2 Q_1 d\theta \\
 & - \left[ \sum_{j=1}^n y \left( t - \frac{jh}{n} \right) \right] R_1 \left[ \sum_{j=1}^n y \left( t - \frac{jh}{n} \right) \right] + y^2(t) R_1.
 \end{aligned}$$

Al agrupar términos semejantes en ésta última expresión se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} \leq & y(t)^2 \left[ 2\bar{X} \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j + (\bar{X} + P)\mathbf{Y}^{-1}(\bar{X} + P) + \tilde{A}_0^2 \left( \sum_{j=1}^n \left( \frac{jh}{n} \right) \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} + R_1 \right] \\
 & + 2y(t) \sum_{i=1}^n \left[ -2\bar{X} \tilde{A}_i + \tilde{A}_0 \left( \sum_{j=1}^n \left( \frac{jh}{n} \right) \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} \tilde{A}_i \right] y \left( t - \frac{ih}{n} \right) + 2y(t) \left[ P + \left( \sum_{j=1}^n \left( \frac{jh}{n} \right) \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} \tilde{A}_0 \right] F(y(t)) \\
 & + \left[ \sum_{i=1}^n y \left( t - \frac{ih}{n} \right) \right] \left[ \tilde{A}_i^2 \left( \sum_{j=1}^n \left( \frac{jh}{n} \right) \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} - R_1 \right] \left[ \sum_{i=1}^n y \left( t - \frac{ih}{n} \right) \right] \\
 & + 2F(y(t)) \mathbf{Y}\tilde{h} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \left( \frac{jh}{n} \right) \tilde{A}_j \right)^2 \tilde{A}_i y \left( t - \frac{ih}{n} \right) + F(y(t))^2 \left[ \left( \sum_{j=1}^n \left( \frac{jh}{n} \right) \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} \right] - \int_{t-\frac{ih}{n}}^t \dot{y}^2(\theta) \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i^2 Q_1 d\theta.
 \end{aligned} \tag{55}$$

Es posible encontrar condiciones suficientes de estabilidad robusta mediante el enfoque de las desigualdades matriciales (Linear Matrices Inequalities), las funcionales de Lyapunov Krasovskii y el procedimiento  $S$  [55]. Observe que para concluir estabilidad robusta, es suficiente probar que  $\dot{V}$  es negativa. Esto se trata a continuación. El procedimiento  $S$  se utiliza para verificar la no negatividad de una función cuadrática bajo restricciones. Si existen al menos dos desigualdades cuadráticas en el conjunto de restricciones es posible hacer uso de este procedimiento. Como se expuso anteriormente la función desconocida  $F(y(t))$  satisface,

$$|F(y(t))| \leq \alpha |y(t)|, \text{ con } \alpha > 0, \text{ constante conocida.}$$

Por lo tanto ésta última desigualdad puede expresarse como sigue:

$$F(y(t))^2 \leq \alpha^2 y(t)^2 \Rightarrow 0 \leq \alpha^2 y(t)^2 - F(y(t))^2.$$

Se desea saber si existe un número  $\epsilon_1 > 0$ , tal que cuando se suma el término  $\epsilon_1 [\alpha^2 y(t)^2 - f(y(t))^T f(y(t))]$  a la derivada a  $\dot{V}(y(t))$ , toda la expresión resulta definida negativa. Por lo que:

$$\dot{V}(y(t)) + \epsilon_1 [\alpha^2 y(t)^2 - F(y(t))^2] < 0; \epsilon_1 > 0.$$

Ahora se puede expresar utilizando la forma matricial:

$$\begin{aligned} \dot{V}y(t) + \epsilon_1 [\alpha^2 y(t)^2 - F(y(t))^2] \leq & \quad (56) \\ - \left[ y(t) \quad \sum_{i=1}^n y \left( t - \frac{ih}{n} \right) \tilde{A}_i \quad F(y(t)) \right] & \underbrace{\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix}}_Z \begin{bmatrix} y(t) \\ \sum_{i=1}^n y \left( t - \frac{ih}{n} \right) \tilde{A}_i \\ F(y(t)) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Ahora se puede sustituir cada función de acuerdo a  $\dot{V}$  y obtener.

$$\begin{aligned} Z_{11} &= -2\bar{X} \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j - (\bar{X} + P)\mathbf{Y}^{-1}(\bar{X} + P) - \tilde{A}_0^2 \left( \sum_{j=1}^n \binom{jh}{n} \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} - R_1 - \epsilon_1 \alpha^2, \\ Z_{12} &= \bar{X} - \tilde{A}_0 \left( \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j \binom{jh}{n} \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h}, \quad Z_{13} = -P - \left( \sum_{j=1}^n \binom{jh}{n} \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h}\tilde{A}_0, \\ Z_{21} &= \bar{X} - \tilde{A}_0 \left( \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j \binom{jh}{n} \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h}, \quad Z_{22} = - \left( \sum_{j=1}^n \binom{jh}{n} \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} + R_1, \\ Z_{23} &= -\mathbf{Y}\tilde{h} \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=0}^n \tilde{A}_j \binom{jh}{n} \right]^2, \quad Z_{31} = -P - \left( \sum_{j=1}^n \binom{jh}{n} \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h}\tilde{A}_0, \\ Z_{32} &= -\mathbf{Y}\tilde{h} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \binom{jh}{n} \tilde{A}_j \right)^2, \quad Z_{33} = - \left( \sum_{j=1}^n \binom{jh}{n} \tilde{A}_j \right)^2 \mathbf{Y}\tilde{h} + \epsilon_1. \end{aligned}$$

Observe que es posible concluir la negatividad de la derivada temporal de  $V(y(t))$  si la matriz  $Z$  es definida negativa, es decir si existen escalares positivos  $P$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\epsilon_1$ ,  $\bar{X}$ ,  $R_1$  y  $M$  tales que los valores propios de  $Z$  sean positivos. El método de desigualdades matriciales lineales (LMI) proporciona una alternativa numérica para hallar las matrices (en este caso escalares) incógnitas en una LMI tales que se satisfaga la desigualdad requerida. Sin embargo se nota que la desigualdad  $Z > 0$ , no es lineal con respecto a sus incógnitas y no es posible aplicar las técnicas de resolución numérica. Una alternativa es reescribir la matriz  $Z$  en una forma equivalente, tal que se tenga una desigualdad matricial lineal. Dicha equivalencia la proporciona el complemento de Schur, brevemente recordado aquí. Sea la matriz  $K$  dada de la siguiente forma:

$$K = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix},$$

donde:

$$A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times m}, C \in R^{m \times m},$$

$K > 0$  si y sólo si:

1.  $A > 0$  y  $C - B^{-1}A^{-1}B > 0$
2.  $C > 0$  y  $A - BC^{-1}B^T > 0$ .

De éstas dos sentencias, se utiliza  $C > 0$  y  $A - BC^{-1}B^T > 0$ . Defina a la matriz  $A$  como:

$$A = \begin{bmatrix} -\left(2\bar{X} \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j + R_1 + \epsilon_1 \alpha^2\right) & \bar{X} & -P \\ \bar{X} & R_1 & 0 \\ -P & 0 & \epsilon_1 \end{bmatrix},$$

$$-BC^{-1}B^T = - \begin{bmatrix} (\bar{x} + P)^2 \mathbf{Y}^{-1} + \tilde{A}_0^2 \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n}\right) \tilde{A}_j\right)^2 \mathbf{Y} \tilde{h} & \tilde{A}_0 \left(\sum_{j=1}^n \tilde{A}_j \left(\frac{jh}{n}\right)\right)^2 \mathbf{Y} \tilde{h} & \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n}\right) \tilde{A}_j\right)^2 \mathbf{Y} \tilde{h} \tilde{A}_0 \\ \tilde{A}_0 \left(\sum_{j=1}^n \tilde{A}_j \left(\frac{jh}{n}\right)\right)^2 \mathbf{Y} \tilde{h} & \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n}\right) \tilde{A}_j\right)^2 \mathbf{Y} \tilde{h} & \mathbf{Y} \tilde{h} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n}\right) \tilde{A}_j\right)^2 \\ \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n}\right) \tilde{A}_j\right)^2 \mathbf{Y} \tilde{h} \tilde{A}_0 & \mathbf{Y} \tilde{h} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n}\right) \tilde{A}_j\right)^2 & \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n}\right) \tilde{A}_j\right)^2 \mathbf{Y} \tilde{h} \end{bmatrix}.$$

Defina a  $C$  y  $B$  como sigue:

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & 0 \\ 0 & \mathbf{Y} \end{bmatrix}, C^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{Y}^{-1} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \tilde{A}_0 \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n}\right) \tilde{A}_j\right) \sqrt{\tilde{h}} \mathbf{Y} & (\bar{X} + P) \\ \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n}\right) \tilde{A}_j\right) \sqrt{\tilde{h}} \mathbf{Y} & 0 \\ \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n}\right) \tilde{A}_j\right) \sqrt{\tilde{h}} \mathbf{Y} & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que  $Z = A - BC^{-1}B^T$ , y es posible formar la matriz  $K$  del complemento de Schur:

$$K = \begin{bmatrix} -\left(2\bar{X} \sum_{j=1}^n \tilde{A}_j + R_1 + \epsilon_1 \alpha^2\right) & \bar{X} & -P & \tilde{A}_0 \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n}\right) \tilde{A}_j\right) \sqrt{\tilde{h}} \mathbf{Y} (\bar{X} + P) \\ \sum_{j=0}^n \tilde{A}_j \bar{X} & R_1 & 0 & \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n}\right) \tilde{A}_j\right) \sqrt{\tilde{h}} \mathbf{Y} & 0 \\ -P & 0 & \epsilon_1 & \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n}\right) \tilde{A}_j\right) \sqrt{\tilde{h}} \mathbf{Y} & 0 \\ \tilde{A}_0 \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n}\right) \tilde{A}_j\right) \sqrt{\tilde{h}} \mathbf{Y} & \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n}\right) \tilde{A}_j\right) \sqrt{\tilde{h}} \mathbf{Y} & \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{jh}{n}\right) \tilde{A}_j\right) \sqrt{\tilde{h}} \mathbf{Y} & \mathbf{Y} & 0 \\ (\bar{X} + P) & 0 & 0 & 0 & \mathbf{Y} \end{bmatrix} > 0. \quad (57)$$

Las incógnitas de la matriz  $K$  son  $R_1$ ,  $P$ ,  $\mathbf{Y}$  y  $\bar{X}$ , las cuales no presentan multiplicaciones entre sí y consecuentemente  $K > 0$  es una LMI. Por lo tanto, si (57) se satisface, el sistema descrito por (41) es asintóticamente robustamente estable ante perturbaciones no lineales no estructuradas. En efecto si existen escalares  $R_1$ ,  $P$ ,  $\mathbf{Y}$  y  $\bar{X}$  positivos, tales que  $K$  es definida positiva. Es posible hacer uso del toolbox de Matlab, LMIEedit para programar la condición  $K > 0$ , sujeto a encontrar escalares  $R_1$ ,  $P$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\bar{X} > 0$ . Dichos valores obtenidos numéricamente mediante el software Matlab son:

$$P = 2.5431, \bar{X} = 259.4996, \mathbf{Y} = 4, R_1 = 3, \alpha = 0.002, \varepsilon_1 = 222$$

Como todos los valores son positivos, es posible concluir que la planta en lazo cerrado con la ley de control aproximada bajo perturbaciones no lineales no estructuradas es asintóticamente robustamente estable.

### 3.6. Método D-particiones

En el presente trabajo, el método D-particiones es utilizado para la sintonización robusta del controlador industrial PID Honeywell DC-1040, ya que el método de sintonización Ziegler-Nichols no establece ninguna condición que garantice estabilidad y además para la planta considerada no se obtuvo un buen desempeño. Esto debido a que es bien sabido que para procesos con una constante de tiempo mucho mayor que el retardo del proceso, de acuerdo con las tablas de Ziegler y Nichols, la ganancia proporcional resulta relativamente alta, lo que puede provocar oscilaciones en la variable del proceso (PV de sus siglas en inglés) [33], este fenómeno ocurrió en nuestro caso. Por ello, se optó aplicar el método de D-particiones, con el cual es posible realizar una sintonización robusta, que proporcione los intervalos de estabilidad de la ecuación característica en lazo cerrado, en la cual, cada una de las ganancias  $kp$ ,  $ki = kp/T_i$  y  $kd = kpT_d$  del controlador se varían ( $T_i$  y  $T_d$  son los tiempos de integración y derivación respectivamente). Es necesario aclarar que el controlador DC1040 cuenta con un módulo de control adaptable, sin embargo, el desempeño de este no fue del todo satisfactorio respecto al consumo de energía y por ello se omitió al hacer el análisis de nutrientes.

Para el caso de la deshidratadora, el retardo presente en el control es producto del tiempo que transcurre al transferirse la energía de la fuente de calor al producto a deshidratar. Observe que si el producto se encuentra demasiado cerca de la fuente de calor, podría dañarse debido a gradientes de temperatura los cuales no son considerados en el modelo lineal. Debido a esto, la fuente de calor debe permanecer a cierta distancia del producto.

A continuación se resume el método para el cálculo de los intervalos de estabilidad robusta de las ganancias  $kp$ ,  $ki$  y  $kd$  de un controlador PID.

1. Obtener y cerciorarse de que el cuasipolinomio característico del sistema en lazo abierto sea estable (esto facilita el análisis y en nuestro caso se cumple).
2. Haga cero las ganancias  $ki$  y  $kd$  (debido a que la planta es lineal es posible aplicar el principio de superposición) y obtener el cuasipolinomio característico en lazo cerrado del sistema, únicamente considerando la parte proporcional del controlador. De este modo se encuentra el intervalo estable para la ganancia  $kp$  en las dos fronteras:  $s = 0$  y  $s = j\omega$ .
3. Seleccionar un valor de  $kp$  que se encuentre entre las dos fronteras cuando  $s = 0$  y  $s = j\omega$ , en la zona donde  $kp=0$  (lazo abierto), esto significa que toda esa zona es estable debido

a que las zonas estabilidad son conexas. Típicamente puede elegirse un valor medio del intervalo de estabilidad, para proporcionar mayor robustez.

4. Encontrar el cuasipolinomio característico en lazo cerrado para el sistema, considerando la ganancia proporcional e integral, pero sustituyendo el valor de  $kp$  obtenido y nuevamente hallar las fronteras pero ahora considerando a  $ki$  como parámetro, de la misma forma que en el paso anterior.
5. Seleccionar un valor de  $ki$  dentro de la frontera obtenida.
6. Nuevamente es necesario hallar el cuasipolinomio característico en lazo cerrado del sistema considerando las ganancias  $kp$ ,  $ki$  y  $kd$  y sustituyendo los valores de las ganancias  $kp$  y  $ki$  obtenidas anteriormente y encontrar las fronteras de estabilidad robusta para  $kd$  como se ha realizado anteriormente.
7. seleccionar un valor de  $kd$  que se encuentre en la zona de estabilidad robusta.

A pesar de que éste método fue objeto de estudio en la tesis [2], a continuación se expone brevemente debido a que en el presente trabajo se usó, con fines de comparación, un PID industrial sintonizado robustamente.

La función de transferencia del modelo de la planta bajo estudio es:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{ke^{-sh}}{\tau s + 1},$$

es claro que el polinomio característico en lazo abierto

$$\tau s + 1,$$

es estable debido a que se localiza en  $s = -\frac{1}{\tau}$ . Ahora se obtiene la función de transferencia en lazo cerrado del controlador con la planta como sigue:

$$G(s) = \frac{kp \left( \frac{ke^{-sh}}{\tau s + 1} \right)}{1 + kp \left( \frac{ke^{-sh}}{\tau s + 1} \right)} = \frac{\frac{kpke^{-sh}}{\tau s + 1}}{\frac{\tau s + 1 + kpke^{-sh}}{\tau s + 1}}.$$

Después de cálculos directos se tiene que:

$$G(s) = \frac{kpke^{-sh}}{\tau s + 1 + kpke^{-sh}}.$$

El cuasipolinomio característico es:

$$\tau s + 1 + kpke^{-sh} = 0,$$

el cual es tipo retardado debido a que grado del coeficiente principal  $s+1$  es estrictamente mayor que el término  $kpke^{-sh}$ . Ahora se puede obtener la primera frontera de  $kp$  cuando  $s = 0$  en la ecuación característica:

$$1 + kpke^{-sh} = 0, \tag{58}$$

despejando  $kp$  de (58) se tiene que:

$$\underline{kp} = \frac{-1}{k}.$$

Para obtener las segunda frontera del intervalo de estabilidad para  $\overline{kp}$  se evalúa  $s = j\omega$  en el cuasipolinomio característico:

$$\tau(j\omega) + 1 + kpk e^{-j\omega h} = 0,$$

de acuerdo con la identidad de Euler se tiene que:

$$\tau j\omega + 1 + kpk \cos(\omega h) - jkpk \sin(\omega h) = 0.$$

Al separar la parte real de la imaginaria se obtiene:

$$1 + kpk \cos(\omega h) = 0 \quad (59)$$

$$\tau\omega + kpk \sin(\omega h) = 0 \quad (60)$$

Observe que se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas, por lo que al despejar  $kp$  de (60):

$$kp = \frac{\tau\omega}{k \sin(\omega h)}.$$

Sustituyendo  $kp$  en (59):

$$1 + \frac{\tau\omega}{k \sin(\omega h)} [k \cos(\omega h)] = 0,$$

$$1 + \tau\omega \cot(\omega h) = 0.$$

Para hallar los valores de  $\omega$  que satisfacen ésta ecuación es posible usar el método gráfico y buscar el primer cruce por cero, el cual produce la segunda frontera de estabilidad para el parámetro  $kp$ . Por lo tanto las fronteras de estabilidad son:

$$\underline{kp} = \frac{-1}{k},$$

$$\overline{kp} = \frac{\tau\omega^*}{k \sin(\omega^* h)},$$

donde  $\omega^*$  es el valor que produce el primer cruce por cero en la ecuación (3.6). Del mismo modo se obtienen las fronteras para  $ki$  y  $kd$ , que son las que se ingresan al controlador industrial.

Las fronteras de estabilidad para  $kp$  son:  $\underline{kp} = 1.5730$ ,  $\overline{kp} = 153470$ .

Para el caso de  $ki$  se obtuvieron las fronteras de estabilidad:  $\underline{ki} = 1.6285$ ,  $\overline{ki} = 2219.4$ .

Las fronteras de estabilidad para  $kd$  son:  $\underline{kd} = 0.5$ ,  $\overline{kd} = 116.5417$ .

### 3.7. Implementación del Colorímetro

En ésta sección se expone la técnica la cual hizo posible la implementación de un colorímetro en línea, que permite monitorizar por medio de una cámara digital de bajo costo el color del jitomate a deshidratar. Esto comprende la captura de imágenes y el registro de los datos de color, que son almacenados en términos del modelo de color RGB (de sus siglas en inglés Red Green Blue), el cual es el modelo de color dado por la cámara. Debido a que los colorímetros comerciales proporcionan los niveles de color en el estándar CIELab, se tiene la necesidad de convertir los datos de color obtenidos en RGB a datos expresados en parámetros  $L^*$ ,  $a^*$  y  $b^*$  del modelo de color CIELab.

Existen diferentes modelos para representar los colores en forma numérica, por tal motivo se describen brevemente los dos modelos de color utilizados en este trabajo.

#### 3.7.1. Modelo de Color RGB

La representación del color varía según el dispositivo empleado. Los sistemas de administración de color dependen de varios factores, tales como modelos o espacios de color fiables que permitan una correspondencia de color precisa y predecible entre diferentes dispositivos. El modelo de color llamado RGB es el que se utiliza en todos los sistemas que forman imágenes a través de rayos luminosos, ya sea emitiéndolos o recibiendo. Los periféricos RGB normalmente son pantallas, cámaras de imágenes y video y escáner's.

RGB es un modelo basado en la combinación de los tres colores primarios, Rojo, Verde y Azul, siendo transmitido cada uno independiente y aislado del resto.

Para indicar en qué proporción es mezclado cada color, se asigna un valor a cada uno de los colores primarios, de tal manera que el valor "0" significa que no interviene en la mezcla y a medida que ese valor aumenta, se entiende que aporta más intensidad a la mezcla. Aunque el intervalo de valores podría ser cualquiera, es frecuente que cada color primario se codifique con un byte (8 bits). Así, de manera usual, la intensidad de cada una de las componentes se mide según una escala que va del 0 al 255 y cada color es definido por un conjunto de valores (correspondientes a valores "R", "G" y "B") y separados por comas.

De este modo, el rojo se obtiene con (255,0,0), el verde con (0,255,0) y el azul con (0,0,255), obteniendo, en cada caso un color resultante monocromático. La ausencia de color, es decir el color negro, se obtiene cuando las tres componentes son cero: (0,0,0). La combinación de tres colores, dos a su máximo valor de 255 y el tercero con valor 0, da lugar a tres colores intermedios, lo cual produce los colores amarillo (255,255,0), cian (0,255,255) y magenta (255,0,255). El color blanco se forma con los tres colores primarios a su máximo valor, es decir: (255,255,255).

#### 3.7.2. Modelo de Color CIELab

Para mejorar la representación del color, la CIE desarrolló en 1976 el modelo de color CIELab. Es el modelo de color más completo, se usa habitualmente para describir todos los colores que puede ver el ojo humano. Fue desarrollado específicamente con este propósito por la Commission Internationale d'Eclairage (Comisión Internacional de la Iluminación), razón por la cual se abrevia CIE. Los asteriscos (\*) que siguen a cada letra forman parte del nombre, ya que representan  $L^*$ ,  $a^*$  y  $b^*$ , de  $L$ ,  $a$  y  $b$ .

Los tres parámetros en el modelo representan la luminosidad de color ( $L^*$ ,  $L^*=0$  negro y  $L^*=100$  indica blanca), su posición entre rojo y verde ( $a^*$ , valores negativos indican verde



mientras valores positivos indican rojo) y su posición entre azul y amarillo ( $b^*$ , valores negativos indican azul y valores positivos indican amarillo).

La ventaja de este espacio de color, es que es más objetivo, ya que no depende del dispositivo. Una misma combinación de  $a$ ,  $b$  y  $L$  es útil para describir siempre el mismo color de forma exacta.

Existen algunas fórmulas para la conversión entre valores RGB y  $L^*a^*b^*$ , ya que el modelo de color RGB depende del dispositivo. Los valores RGB deben ser transformados a un espacio de color absoluto específico, tal como sRGB o RGB de Adobe. Estos espacios serán dependientes del dispositivo, a diferencia de los datos resultantes de la transformación, permitiendo que estos datos sean transformados al espacio de color CIE 1931 y luego en  $L^*a^*b^*$ .

### 3.7.3. Diseño del colorímetro en línea

Debido a que los colorímetros comerciales no son del todo ajustables a nuestro proceso, se diseñó e implementó un colorímetro de bajo costo con software libre. A continuación se describe dicha implementación.

El diseño del colorímetro para monitorización de color en línea, tiene como principal elemento una cámara digital, la cual se encarga de capturar la imagen del producto cada determinado intervalo de tiempo y se encuentra instalada en la parte superior del prototipo, a 15 cm del producto (rebanada de jitomate). Dicha imagen se procesa mediante el software libre OpenCV y la transformación de parámetros del espacio de color RGB a el espacio CIEL $^*a^*b^*$ , con la finalidad de obtener el color de la muestra de jitomate y de ésta manera realizar el análisis de pérdida de color.

Utilizando programación en C, se desarrolló un programa que permite capturar la imagen del jitomate durante un tiempo indefinido y mediante una función "SetMouseCallback" se permite acceder a las coordenadas de la imagen, con objeto de indicar en que parte de la imagen se desea analizar el color del pixel, en nuestro caso se requiere analizar el color de las rebanadas de jitomate, por tal motivo se analiza una porción de cada rebanada de jitomate para nuestro caso tres rebanadas.

El programa implementado permite seleccionar un punto de cada rebanada de jitomate, al seleccionar el punto de la rebanada que se desea analizar, se traza un cuadro con un area de 25 pixeles los cuales son analizados entregando un valor de color en el modelo RGB y se obtiene el promedio de color de éstos 25 pixeles.

Los datos obtenidos por la cámara están expresados en el modelo de color RGB y se requiere obtener los parámetros en términos del modelo de color CIELab, pero para poder llegar a ésta instancia, es necesario como primer paso realizar una transformación del espacio de color RGB al el espacio XYZ de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4124 & 0.3576 & 0.1805 \\ 0.2126 & 0.7152 & 0.0722 \\ 0.0193 & 0.1192 & 0.9505 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{R}{255} \\ \frac{G}{255} \\ \frac{B}{255} \end{bmatrix}.$$

Existen algunas adecuaciones para el uso de ésta transformación que a continuación se describen: Sea  $V$  algún vector de color de nivel de color rojo, verde y azul, es decir:  $V \in (R, G, B)$ , entonces:

$$V = \begin{cases} \frac{V}{12.92} & V \leq 0.04045, \\ \left( \frac{V+0.055}{1.055} \right)^{2.4} & V > 0.04045. \end{cases}$$

La parte no lineal de la transformación fue diseñada para aproximarse a un gamma de 2.4, pero sin tener una pendiente  $V = 0$  esto puede ser causa de problemas numéricos.

Por último se requiere estandarizar y escalar los valores en espacio XYZ, debido a que los valores del espacio de color RGB están escalados en un rango de 0 a 1, realizando esto como sigue:

$$Xf = X * 100, Yf = Y * 100, Zf = Z * 100.$$

Al realizar la transformación se tendrá valores en el espacio de color RGB equivalentes al espacio de color XYZ, pero se requiere encontrar el nivel de blanco de blanco de acuerdo estándar de iluminación D65, obteniéndolo como sigue.

$$\frac{Xf}{95.047}, \frac{Yf}{100}, \frac{Zf}{108}$$

Conversión a espacio de color CIELab:

$$\begin{aligned} L &= 116f_Y - 16 \\ a &= 500(f_x - f_y) \\ b &= 200(f_y - f_z), \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} f_x &= \begin{cases} \sqrt[3]{X_r} & X_r > 0.008856 \\ 7.87 * X_r + \frac{16}{116} & X_r \leq 0.008856 \end{cases} \\ f_y &= \begin{cases} \sqrt[3]{Y_r} & Y_r > 0.008856 \\ 7.87 * Y_r + \frac{16}{116} & Y_r \leq 0.008856 \end{cases} \\ f_z &= \begin{cases} \sqrt[3]{Z_r} & Z_r > 0.008856 \\ 7.87 * Z_r + \frac{16}{116} & Z_r \leq 0.008856 \end{cases} \end{aligned}$$

Para validar que la conversión funciona adecuadamente, se utiliza un colorímetro de la marca HunterLab, con el cual se tomaron mediciones de diferentes gamas de colores de ciertas muestras, de las cuales se captura una fotografía con utilizando una cámara de 5 mega pixeles y otra de 12 mega pixeles, manteniendo el mismo nivel de iluminación. Una vez tomadas las fotografías, mediante OpenCV se realizó un escaneo de la imagen capturada, obteniendo todos sus datos en RGB y generando un archivo de texto, del cual se obtuvieron algunos valores. Con ayuda de Matlab, se leyeron todos los datos de color de la imagen en el espacio de color RGB y se convirtieron al estándar Lab, este mismo procedimiento también se realiza directamente con OpenCV para que el análisis de la imagen se realice directamente y no se cambie de plataforma, obteniendo de ésta manera los valores de Lab correspondientes al colorímetro comercial.

En el apéndice C se encuentra la descripción de los programas realizados.

### 3.8. Visión artificial mediante OpenCV

El software OpenCV es una biblioteca libre de visión artificial y procesamiento de imágenes, fue desarrollado por Intel en 1999 en el lenguaje C y C++. Ésta librería puede utilizarse para realizar aplicaciones de detección de rostros y reconocimiento, seguimiento de objetos, sistemas

de seguridad, identificación de color, etc. Ésta librería funciona en ambiente Linux, Windows, Mac OS X y dispositivos Android. OpenCV es gratuito para uso comercial o de investigación. Este software tiene un entorno de desarrollo altamente eficiente y fácil de utilizar, su programación se realiza en C y C++. Debido a que OpenCV es una plataforma que realiza procesamiento de imágenes, se utiliza para implementar el colorímetro de este trabajo, dentro del cual se diseña el colorímetro a partir de una imagen del jitomate capturada por la cámara y ésta es analizada durante el periodo en el que el jitomate se encuentra deshidratado, en la siguiente sección se comentan los resultados experimentales al hacer uso del colorímetro implementado.

### 3.9. Conclusiones

En el presente trabajo de tesis se realizó un deshidratadora de jitomates, en la cual implementó como técnica de control de temperatura un controlador óptimo con compensación de retardo en la entrada, considerando la rejilla eléctrica como actuador. Este controlador se implementó por medio de una aproximación numérica de la integral que involucra. Haciendo uso del enfoque de Lyapunov-Krasovskii, se dieron condiciones suficientes para concluir para que dado un número de particiones de la integral, el sistema es asintóticamente estable. Mediante el enfoque de desigualdades matriciales, adicionalmente se analiza la estabilidad robusta del sistema en lazo cerrado con el control aproximado ante incertidumbres no lineales no estructuradas en el modelo, esto debido a que el sistema es no lineal. El objetivo principal de todo esto, es poder mantener la temperatura de la cámara de deshidratado, reduciendo el consumo de energía y evitando saturar de manera brusca el actuador. Los resultados experimentales se presentan en el siguiente capítulo. Cabe mencionar que el PID fue sintonizado en forma robusta, para mantener buen desempeño de éste, debido a que la sintonización Ziegler-Nichols no dió resultados satisfactorios. Un punto importante acerca del desempeño del control de temperatura, es tener mínimas variaciones en la variable del proceso para poder minimizar la pérdida de los nutrientes en el producto. Ésta forma de medir desempeño de una técnica de control (mínimas variaciones en la variable del proceso, mínimo consumo de energía y cuidar aspectos de calidad en el producto final), proporciona los aspectos fundamentales en la teoría e ingeniería de control. Un parámetro importante en cuanto a la calidad del producto en el proceso considerado en la presente tesis, es el nivel de color rojo, debido a que es un indicativo de los niveles de licopeno en el producto, es por ello que se implementó un colorímetro en línea. De acuerdo con los resultados obtenidos, la precisión en los datos que se pueden obtener mediante la cámara, dependen en gran medida de la resolución de ésta, la cual se utiliza para capturar la imagen y de la iluminación que se tiene en la cámara de deshidratado, ya que una buena captura de la imagen depende de ésta.

## Capítulo 4

### 4. Resultados y conclusiones

#### 4.1. Introducción

En este capítulo se muestran los resultados experimentales obtenidos para el control de temperatura de la planta descrita en el Capítulo 2. Se presentan las respuestas de la planta cuando es controlada por medio de un PID industrial Honeywell DC1040 y un controlador óptimo con compensación de retardo en la entrada. Este último fue programado mediante el software de instrumentación virtual LabVIEW.

El controlador PID fue sintonizado de dos formas diferentes: mediante el método Ziegler-Nichols [29] y mediante el método D-particiones [30]. Así mismo se presentan los resultados obtenidos por el control óptimo y un comparativo de consumo de energía de los controladores considerados y los resultados de los estudios de retención de nutrientes en el producto.

También se presentan los resultados de la monitorización en línea del color del producto con el prototipo construido y una comparación con los resultados obtenidos usando un colorímetro comercial HunterLab.

#### 4.2. Resultados experimentales obtenidos por un PID sintonizado mediante la tablas de Ziegler-Nichols

Las tablas propuestas en 1942 por Ziegler y Nichols; continúan siendo usadas en la industria. Aunque se ha demostrado que los valores obtenidos no son óptimos como se presenta en el artículo original, debido a su facilidad de aplicación, son todavía vigentes. Es por ello que son usadas como primer método de sintonización en el presente trabajo. Éstas son dadas por la Tabla 2, cuando se sustituyen los parámetros de la planta obtenidos mediante la respuesta al escalón se obtiene:

Ganancia 1	Valor
$kp$	25.8
$ki$	3.225
$kd$	51.6

Tabla 2: Ganancias obtenidas mediante el método de Ziegler-Nichols

Estos valores se programan en el controlador Honeywell DC1040. Para ello es necesario aclarar que en el controlador se programa la banda proporcional  $BP$  (porcentaje de variación de la variable controlada necesaria para provocar un cambio del cien por ciento de actuación del elemento final de control), el tiempo de integración  $Ti$  y el tiempo de derivación  $Td$ , estos valores se calculan de la siguiente manera:

$$BP = \frac{100}{kp}, \quad Ti = \frac{kp}{ki}, \quad Td = \frac{Kd}{kp}$$

Los valores numéricos obtenidos de  $BP$ ,  $Ti$ ,  $Td$  se muestran en la Tabla 3.

Ganancia	valor
$Bp$	3.9
$Ti$	8
$Td$	2

Tabla 3: Ganancias introducidas al controlador.

El control de temperatura sintonizado con las ganancias dadas en la Tabla 3, se realizó con referencias a 50, 60 y 70°C. En la Figura 13 se muestra el comportamiento del controlador con una referencia de 60°C.

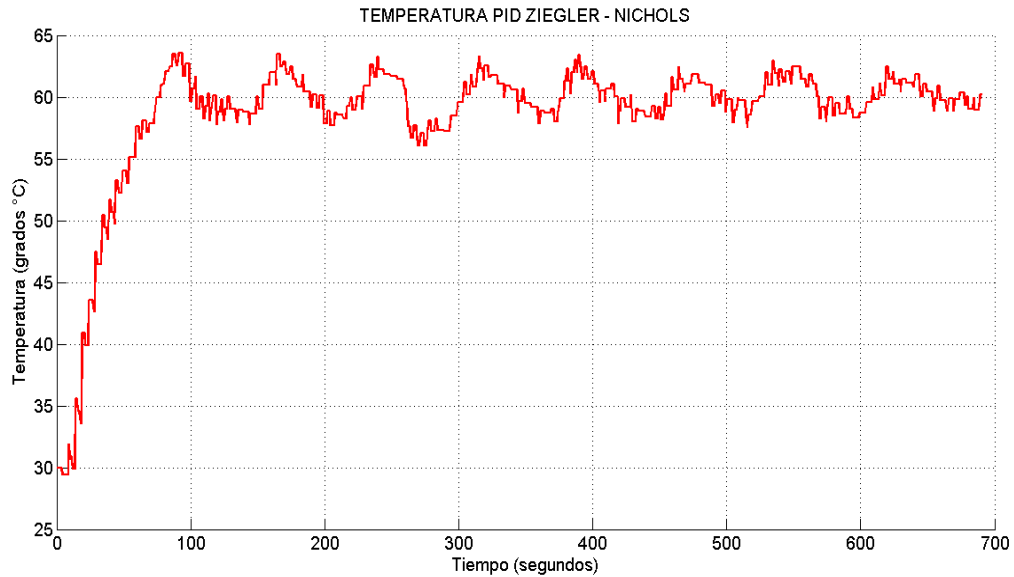


Figura 13: Temperatura controlada con un PID sintonizado por el método Ziegler-Nichols.

En la Figura 13 puede observarse que la variable del proceso permanece cerca del valor de referencia, pero presenta oscilaciones que podrían afectar al proceso de deshidratado, debido a que no se mantiene una temperatura constante. Esto puede provocar una reducción de la vida útil de la rejilla y un mayor consumo de energía. En la Figura 14 se presenta la señal de control sintonizado mediante las tablas Ziegler-Nichols aplicada al actuador para realizar el control de temperatura.

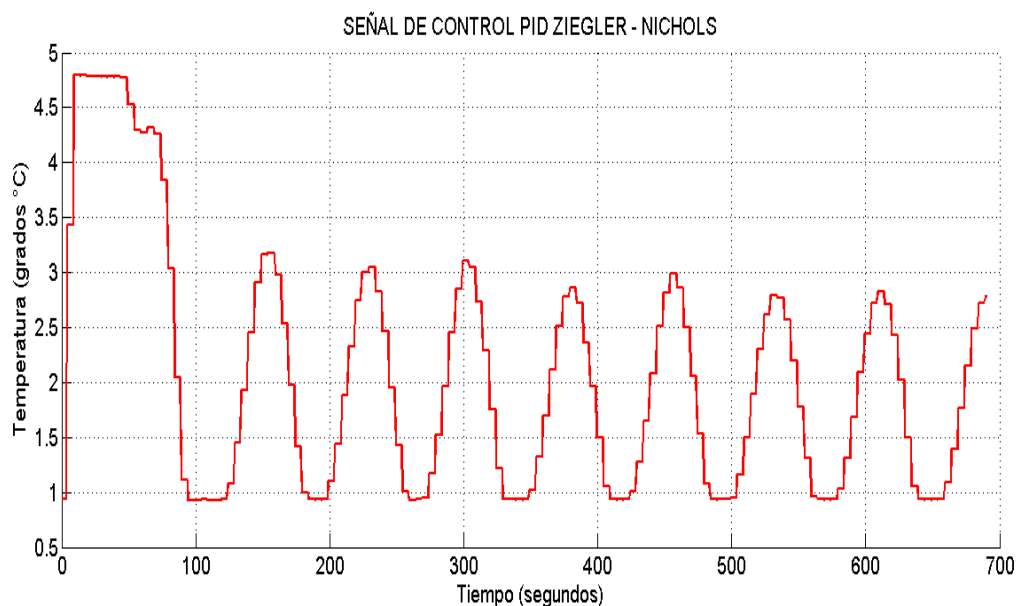


Figura 14: Señal de control del PID sintonizado mediante las tablas Ziegler-Nichols.

La señal de control presenta oscilaciones y un alto voltaje aplicado al actuador, lo que origina tener un consumo de energía de 220 W/h. De acuerdo con estos resultados fue necesario realizar una resintonización en el control PID, esto hace necesario calcular las regiones de estabilidad de cada parámetro del control. Esto se lleva a cabo en la siguiente sección, en la cual, mediante el método D-particiones se hallan los intervalos de estabilidad de los tres parámetros del PID.

### 4.3. PID sintonizado mediante el método D-particiones

El método D-particiones permite calcular los intervalos de estabilidad de cada parámetro del control PID, de ésta forma es posible conocer cuanto pueden variar dichos parámetros antes de que el proceso resulte inestable. El criterio de elección puede ser eligiendo las ganancias que proporcionen la mayor robustez posible, típicamente se eligen las ganancias en una zona intermedia del intervalo de estabilidad. A continuación se muestran los valores elegidos.

Ganancia 1	valor
$k_p$	50
$k_i$	3
$k_d$	50

Tabla 4: Ganancias con método D-particiones

Nuevamente se introducen las ganancias al controlador, mediante los parámetros  $Bp$ ,  $Ti$  y  $Td$ , obteniendo los valores mostrados en la Tabla 5

Ganancia 1	valor
$Bp$	2
$Ti$	17
$Td$	1

Tabla 5: Ganancias introducidas al controlador

Las ganancias del control mostradas en la Tabla 5, producen la respuesta de la planta mostrada en la Figura 15.

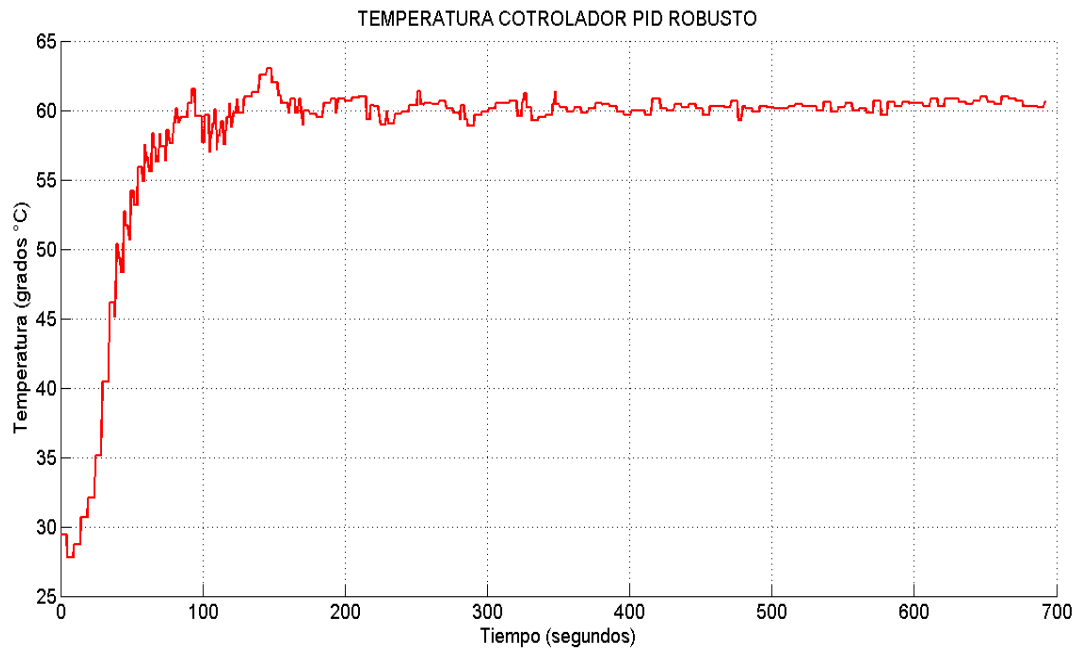


Figura 15: Temperatura con un controlador PID sintonizado mediante D-particiones.

En la Figura 16, se presenta la señal de control aplicada al actuador.

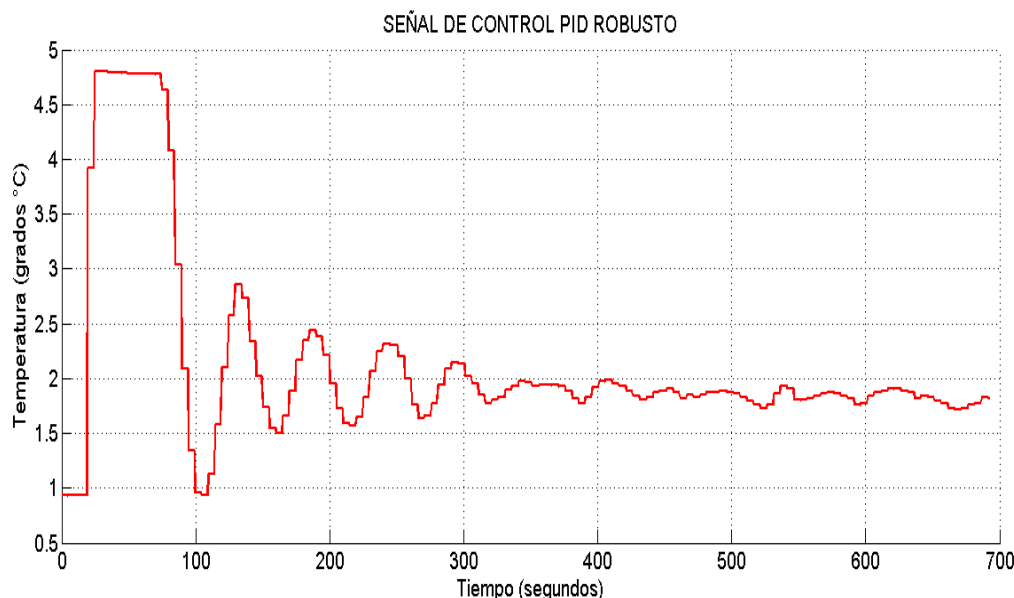


Figura 16: Señal de control con un PID sintonizado mediante D-particiones.

Como puede apreciarse en las Figuras 16 y 15, las oscilaciones disminuyeron y la señal de control se estableció en un valor que casi es constante de igual manera que la temperatura, esto permite reducir el consumo de energía a 170 W/h y ampliar el tiempo de vida útil del actuador. Sin embargo, debido a que no existe ningún proceso de optimización durante la sintonización del PID, en la siguiente sección se presenta el comportamiento del controlador óptimo con compensación de retardo en la entrada.

#### 4.4. Resultados experimentales del controlador óptimo

Como se presentó en el Capítulo 3, se implementó un controlador óptimo con la finalidad de reducir consumo de energía. Debido al retardo en el transporte, se compensó éste mediante el control predictivo presentado en el capítulo anterior. Para implementar el controlador, se usaron aproximaciones numéricas de la integral fijando a  $n$  el número de particiones en la integral, para valores mayores de este número, se observó que el comportamiento ya no variaba significativamente. Los valores seleccionados en el índice de desempeño cuadrático (23) para  $Q$  y  $R$  son  $Q = 1100$  y  $R = 3$ . La implementación se llevó a cabo en LabVIEW, bajo la suposición de que el proceso tiene un retardo de 4 segundos y una constante de tiempo muy considerable, el control puede implementarse como si fuera un control continuo con un tiempo de muestreo relativamente alto,  $T_s = 1 \text{ seg}$ . En la Figura 17 se muestra el comportamiento obtenido con el controlador óptimo.



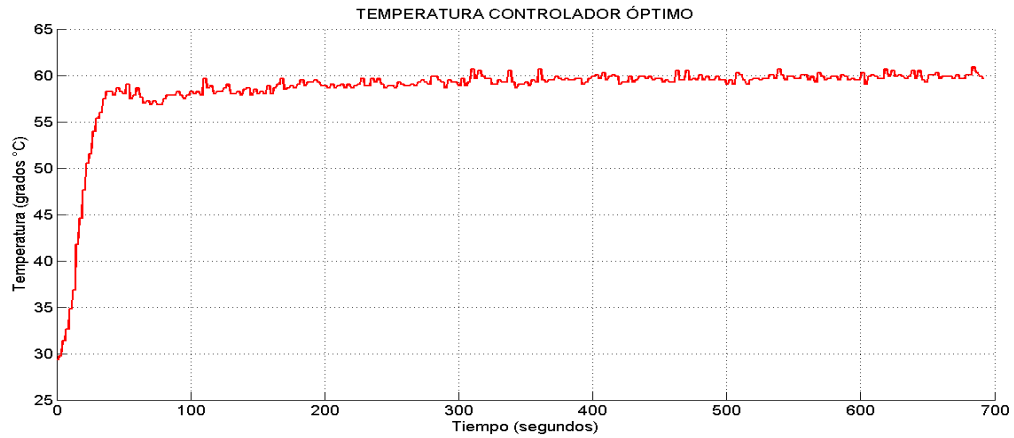


Figura 17: Temperatura del aire de secado de la deshidratadora controlada óptimamente.

Resulta evidente que existe un mayor tiempo de establecimiento de la variable del proceso (temperatura del aire de secado) en comparación con la respuesta producida con el PID, sin embargo, esto provoca no tener sobre impulso, lo cual es ideal para el proceso de deshidratación de jitomate, debido a que variaciones en la temperatura del aire de secado pueden provocar pérdidas de nutrientes en el producto. El mayor tiempo de establecimiento tiene el beneficio de consumir una menor energía que el PID. Esto puede observarse en la Figura 18, la cual muestra la señal de control óptima.

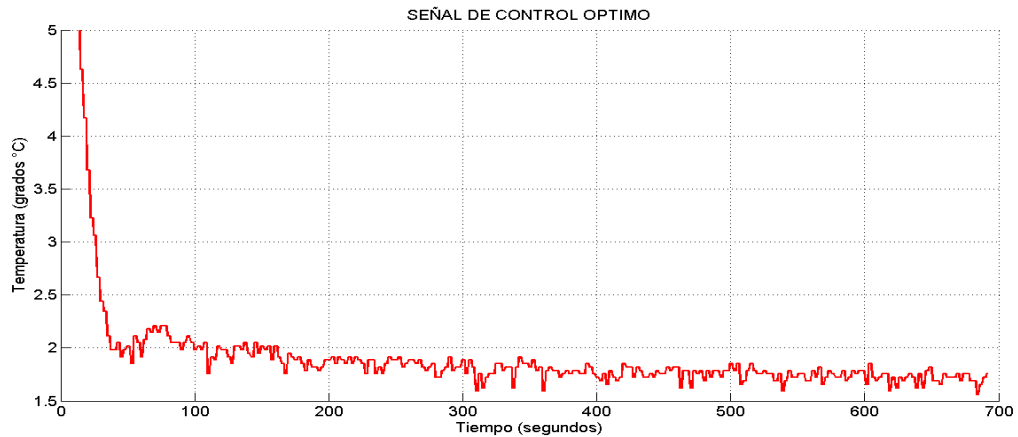


Figura 18: Señal de control óptima.

La Figura 18 muestra como al inicio del experimento el actuador se satura, sin embargo, en comparación con el PID, el control óptimo alcanza su estado estable más rápido, lo que permite garantizar un mayor tiempo de vida al actuador y un mejor comportamiento a la variable del proceso con menor consumo de energía.

A manera de resumen, en la Figura 19, se muestra el comportamiento de la variable del proceso al aplicar cada uno de los controladores.

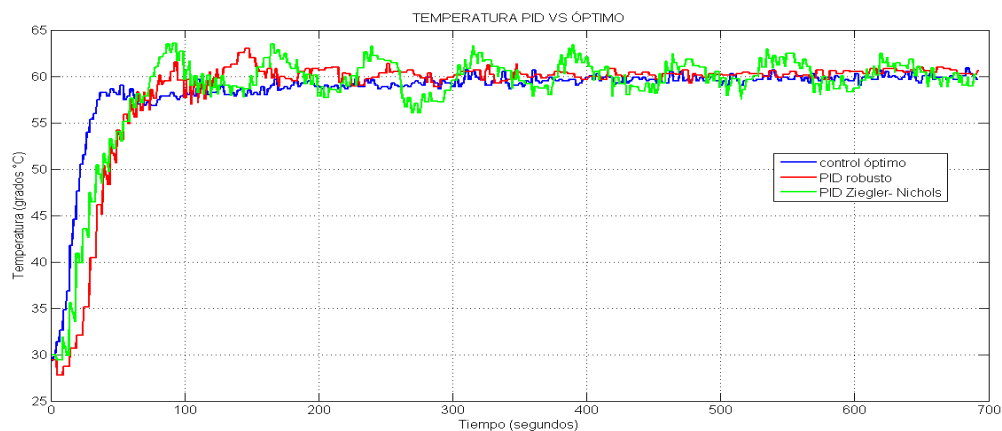


Figura 19: Temperaturas obtenidas con cada controlador.

Como es evidente, el mejor desempeño (en cuanto a sobreimpulso máximo) es presentado por el controlador óptimo, seguido del controlador sintonizado mediante D-particiones.

En la Figura 20 se muestra la señal de control aplicada con cada uno de los controladores.

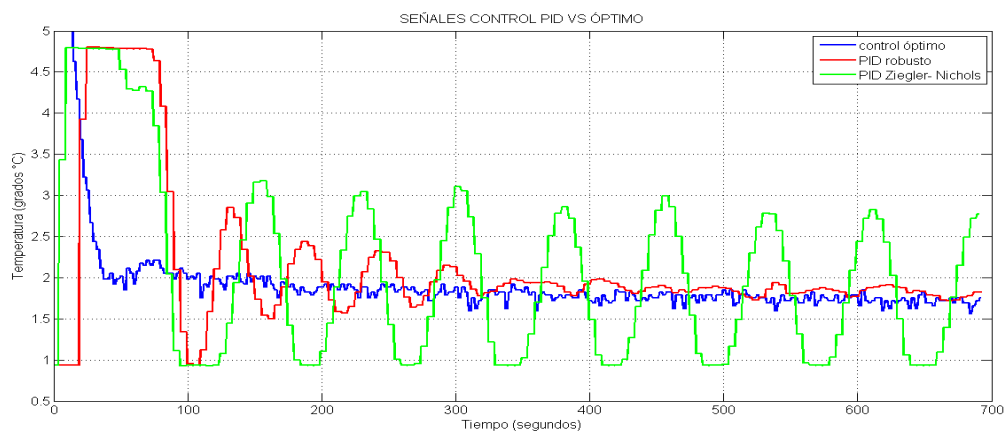


Figura 20: Comparación señales de control.

De igual manera que con la temperatura, el mejor desempeño es presentado por el controlador óptimo, porque permite alcanzar la referencia con un voltaje aplicado mucho menor que el voltaje que aplica el controlador PID sintonizado mediante Ziegler-Nichols y D-particiones. Con el objeto de visualizar el consumo de energía que tiene cada controlador se presenta la Figura 21

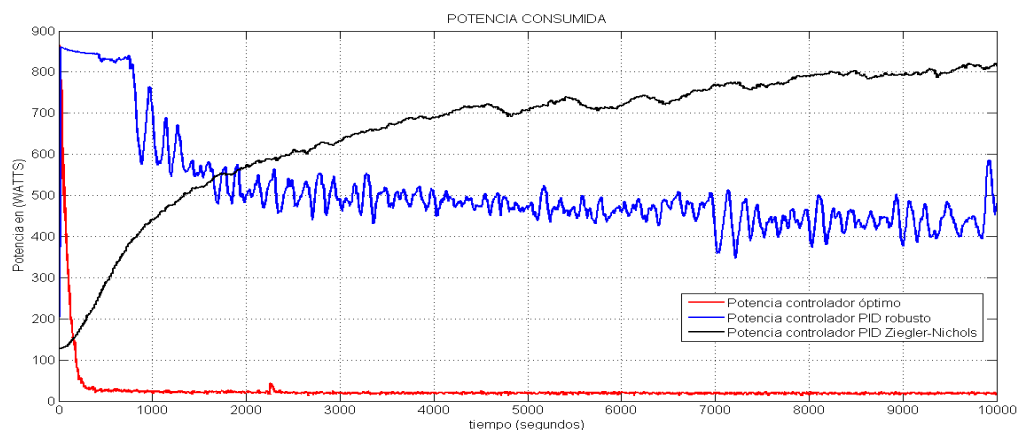


Figura 21: Consumo de potencia de cada controlador.

El consumo de potencia presentado en ésta Figura 21, hace notar que se tiene un ahorro de energía del 96 %, con respecto a la sintonización con el método Ziegler-Nichols y de 94 % con respecto al PID sintonizado mediante D-particiones.

Como otro punto importante para el deshidratado de alimentos, se realizó la monitorización en línea del color mediante el dispositivo descrito en el capítulo anterior.

#### 4.5. Resultados experimentales del colorímetro implementado

En ésta sección se exponen los resultados obtenidos de la medición de color en línea del jitomate deshidratado. Se realizaron mediciones de color rojo de las rebanadas a deshidratar con el colorímetro comercial HunterLab antes y después del experimento. Antes de esto, con fines de verificación, se realizaron algunas mediciones de color hechas con impresiones en hojas con cuadros rojo, amarillo y naranja, a continuación los resultados se muestran en la siguiente tabla de comparación.

Color	Colorímetro comercial	Colorímetro desarrollado	% de desviación máxima
Rojo	L=48.05,a=42.73,b=14.61	L=48.9,a=43.1,b=14.1	1.768 %
Amarillo	L=85.63,a=6.24,b=38.39	L=84.52,a=6.51,b=37.85	1.043 %
Naranja	L=63.05,a=51.05,b=54.97	L=62.83,a=50.86,b=53.85	0.996 %

Tabla 6: Mediciones de color obtenidas colorímetro comercial vs colorímetro visión artificial

Con estos parámetros se tiene certeza del correcto funcionamiento del colorímetro, por lo que se realiza un experimento de deshidratado en el cual se monitoriza el color del producto

en línea y se verifica el cambio de color que presenta el jitomate al ser sometido al proceso. Las rebanadas de jitomate fueron ingresadas a la deshidratadora con un color  $L=52, a=30, b=24$ , éstas mediciones fueron hechas por el colorímetro implementado, con el colorímetro HunterLab se obtuvieron:  $L=53.52, a=29.21, b=25.93$ . Una fotografía de una sección del jitomate se muestra en la Figura 22.

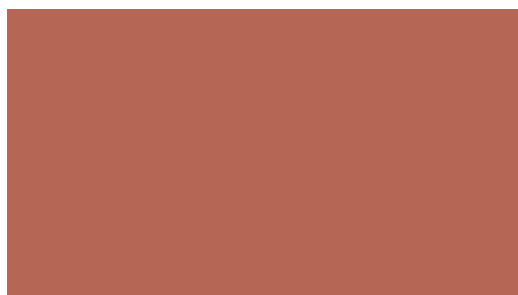


Figura 22: Color antes de deshidratar jitomate.

Después del proceso de deshidratado a una temperatura de  $60^{\circ}\text{C}$  a  $2.1\text{ m/s}$ , la lectura de color obtenida fue,  $L=36, a=38, b=26$ , con el colorímetro HunterLab fue de  $L=37.10, a=39.91, b=27.51$ . Esto significa un nivel un oscurecimiento del  $30.7\%$ . En algunos trabajos previos, ver por ejemplo [56], se reportan oscurecimientos del orden de  $26.7\%$  a  $42^{\circ}\text{C}$  con una velocidad de viento de  $1.5\text{ m/s}$ . El color del jitomate después de deshidratado se muestra en la Figura 23.

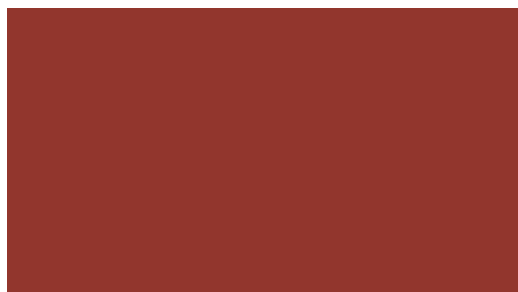
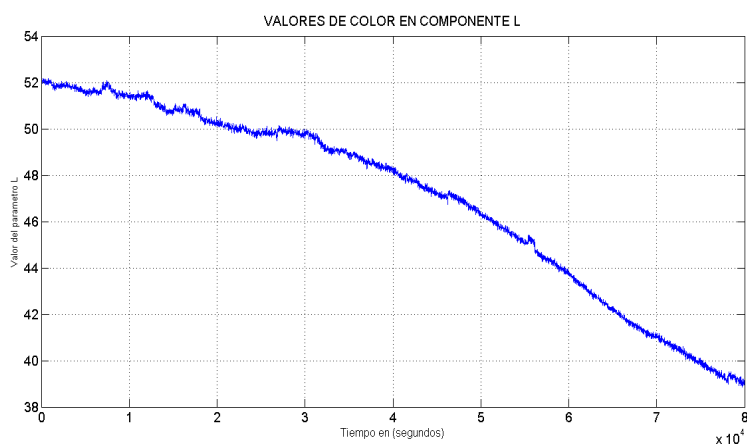
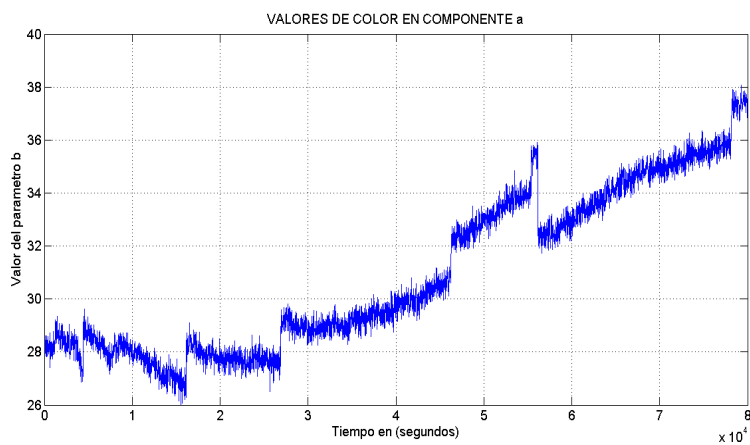


Figura 23: Color después de deshidratar jitomate.

Como puede verse en éstas figuras, el jitomate sufrió un cambio evidente en su color debido al proceso de deshidratación. Por medio del colorímetro implementado, se registraron datos que permiten visualizar el cambio que se obtuvo en cada componente de color, en la Figura 24 se muestra el parámetro  $L$  desde el inicio del experimento hasta el final de este.

Figura 24: Parámetros de color  $L^*$ .

En la Figura 25 se registran los valores del parámetros  $a$ , desde que inicia al experimento hasta que se termina.

Figura 25: Parámetros de color  $a^*$ .

En la Figura 26 se muestra el cambio de color registrado en el componente b, durante el proceso de deshidratado del jitomate.

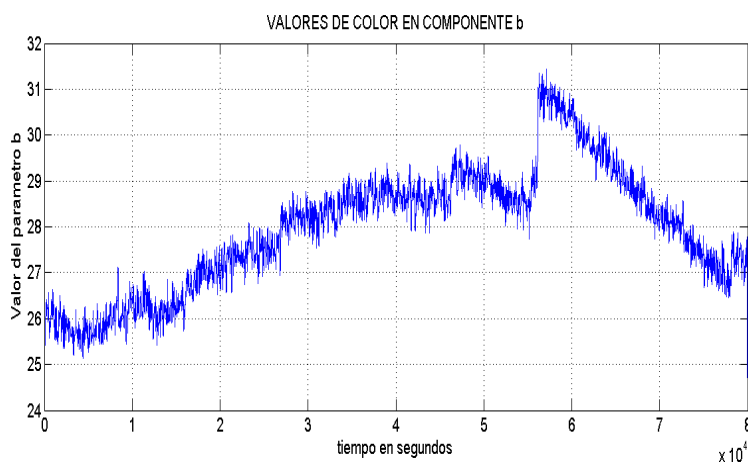


Figura 26: Parámetros de color  $b^*$ .

Claramente éstas alteraciones de color son producidas por el calor aplicado. Como trabajo a futuro, es posible determinar umbrales de color de acuerdo con los niveles de licopeno y de ésta forma contar un criterio para detener el deshidratado, sin la necesidad de medir humedad por ejemplo, lo cual es más complicado en el caso del jitomate. Los niveles de pérdida de bioactivos en las muestras son un elemento de la calidad del producto y consecuentemente del desempeño de los controladores usados para la deshidratación. Para medir estos, los doctores Norma F. Santos Sánchez y Raúl Salas Coronado de la Universidad Tecnológica de la Mixteca, llevaron a cabo pruebas de laboratorio para determinar que controlador es capaz de retener más nutrientes. Éstos son licopeno, vitamina C y fenoles, lo es expuesto en la siguiente sección.

#### 4.6. Resultados experimentales de pérdida de bioactivos en el jitomate deshidratado

En [1] y [3], se realizó el deshidratado de jitomate a diferentes temperaturas, sin embargo, hasta ahora no se ha analizado el desempeño del control en cuanto a retención de nutrientes. De tal manera que en ésta tesis se realiza el deshidratado de jitomate por medio de un controlador óptimo y control PID. Los rendimientos de ambos esquemas son comparados en base al ahorro de energía y la capacidad para retener nutrientes en el producto.

En ésta sección se presentan los resultados obtenidos al realizar el deshidratado de jitomate, el proceso de realizó a temperaturas de 50, 60 y 70°C, con el mismo controlador.

El jitomate se cortó en rebanadas de 5mm y fue sumergido en metabisulfito de sodio por 10 minutos, este tratamiento es necesario para el análisis de retención de nutrientes posterior. Se introdujeron tres rebanadas a la cámara de deshidratado y se colocaron los sensores de temperatura en cada rebanada. El deshidratado comienza desde temperatura ambiente hasta alcanzar la temperatura de referencia que son 50°C, 60°C y 70°C, el tiempo de deshidratado es

de 2 horas como tiempo máximo, el cual es el tiempo de deshidratado aproximado máximo de deshidratado de una rebanada de jitomate de ese grosor y diámetro [3].

En la Figura 27 se observa la temperatura en la cámara de deshidratado utilizando el controlador óptimo para una temperatura de  $50^{\circ}\text{C}$ .

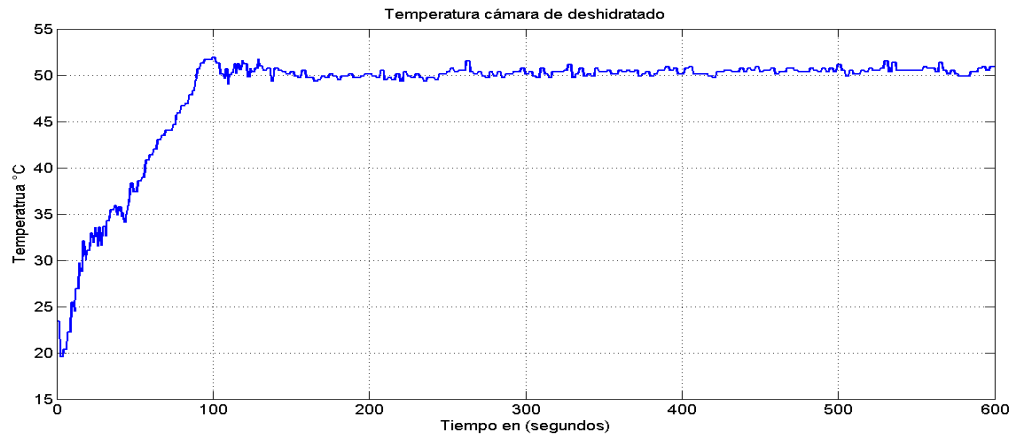


Figura 27: Temperatura en cámara de deshidratado  $50^{\circ}\text{C}$ .

Con la temperatura controlada como se muestra en la Figura 27, la temperatura del corazón en el jitomate, no alcanza la temperatura a la que se encuentra la cámara de deshidratado y esto se puede apreciar en la Figura 28.

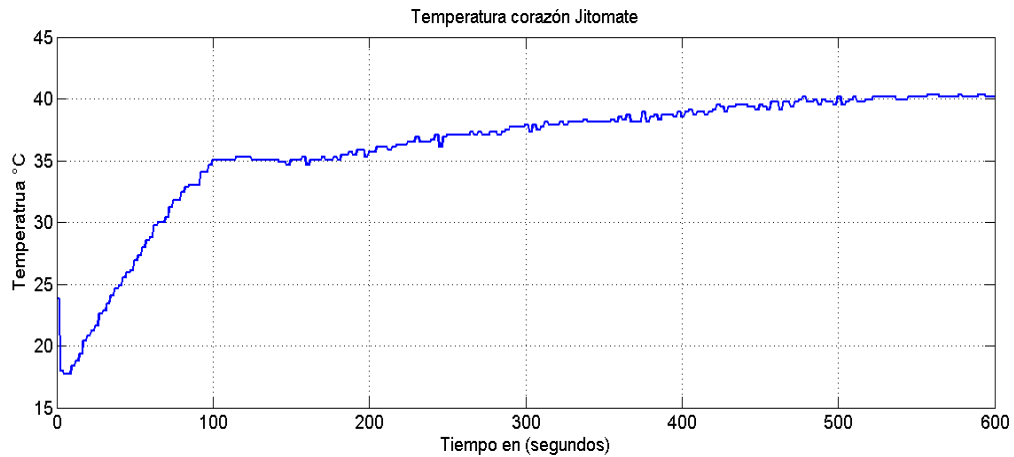


Figura 28: Temperatura en el jitomate durante el proceso de deshidratado.

En la Figura 29 se muestra la señal de control cuando la referencia se ajustó a  $50^{\circ}\text{C}$  y se aplica el control óptimo en la rejilla eléctrica.

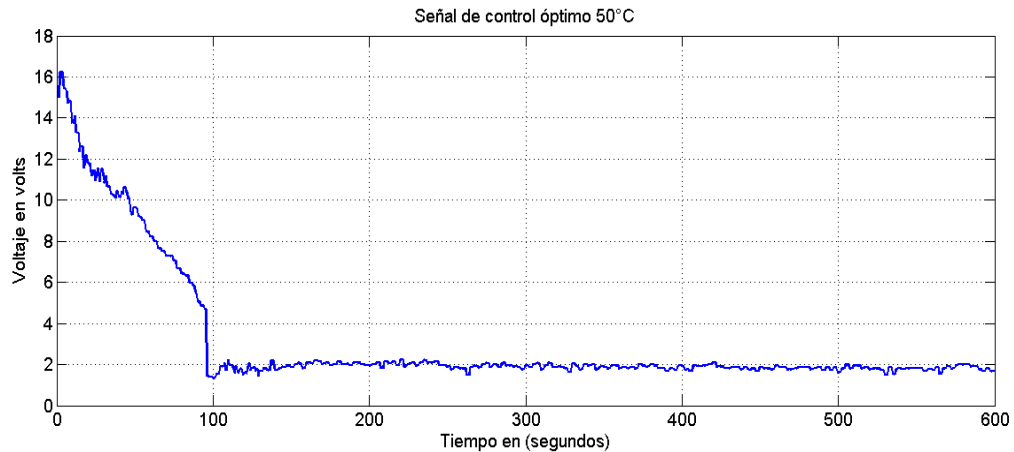


Figura 29: Señal de control aplicada por el controlador óptimo.

Se requiere realizar un deshidratado a  $60^{\circ}\text{C}$ . La cámara de deshidratado es llevada a dicho valor de referencia como se muestra en la Figura 30.

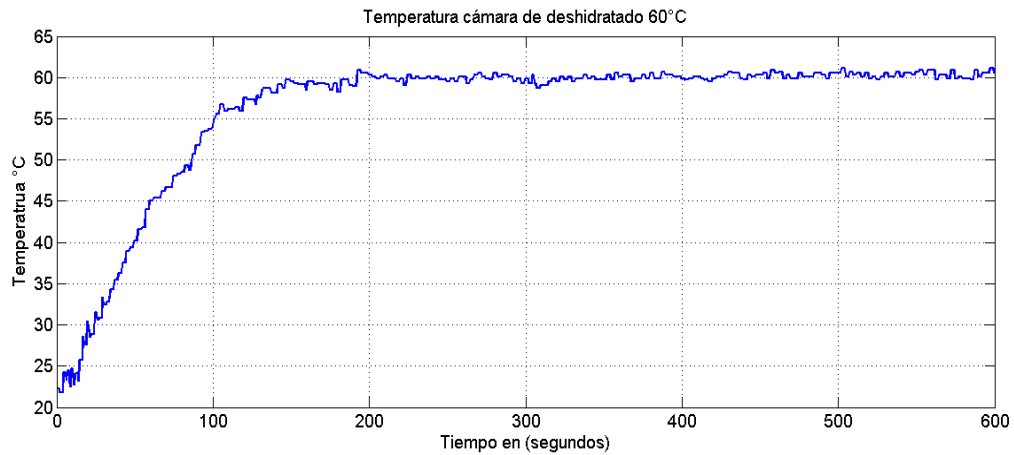


Figura 30: Temperatura en la cámara de deshidratado a  $60^{\circ}\text{C}$ .

En la Figura 30 se muestra la temperatura del aire a  $60^{\circ}\text{C}$  cuando se utiliza el control óptimo. El comportamiento de temperatura en el jitomate son similares al deshidratado de  $50^{\circ}\text{C}$ , como puede apreciarse en la Figura 31.



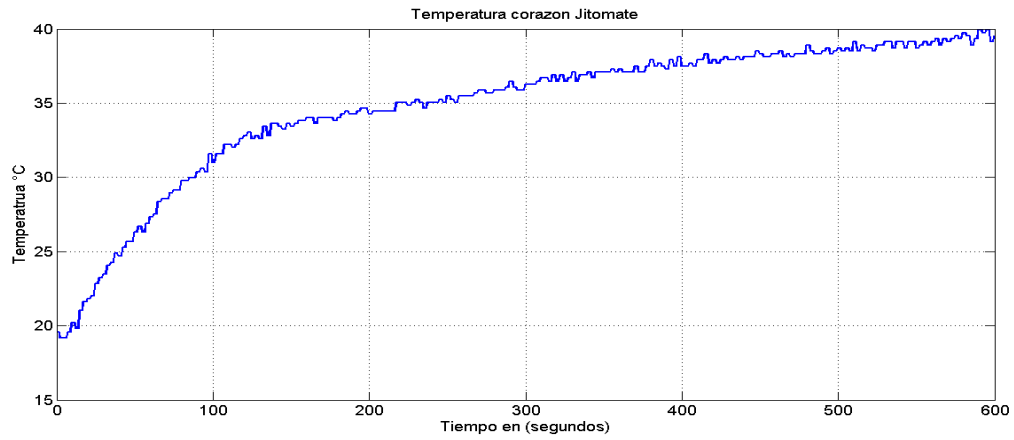


Figura 31: Temperatura del jitomate deshidratado a 60°C.

La señal de control aplicada para el deshidratado a 60°C es muy similar a la de 50°C, con la diferencia que deshidratando a 60°C no se presenta sobre impulso.

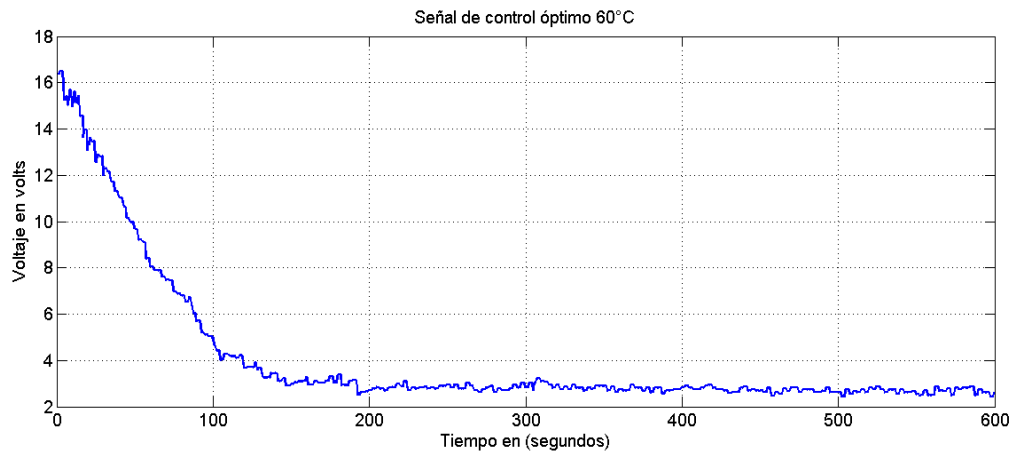


Figura 32: Señal de control aplicada.

Debido a que las respuestas de la temperatura a 50°C y 60°C son similares, es necesario realizar el análisis de retención de nutrientes para saber el desempeño del controlador en cuanto a la calidad del producto.

Aunque el tiempo de establecimiento es mayor cuando se ajusta una temperatura de 70°C respecto a 60°C, el tiempo de deshidratado es menor. La Figura 33, muestra la respuesta de la planta cuando se aplica el control óptimo.

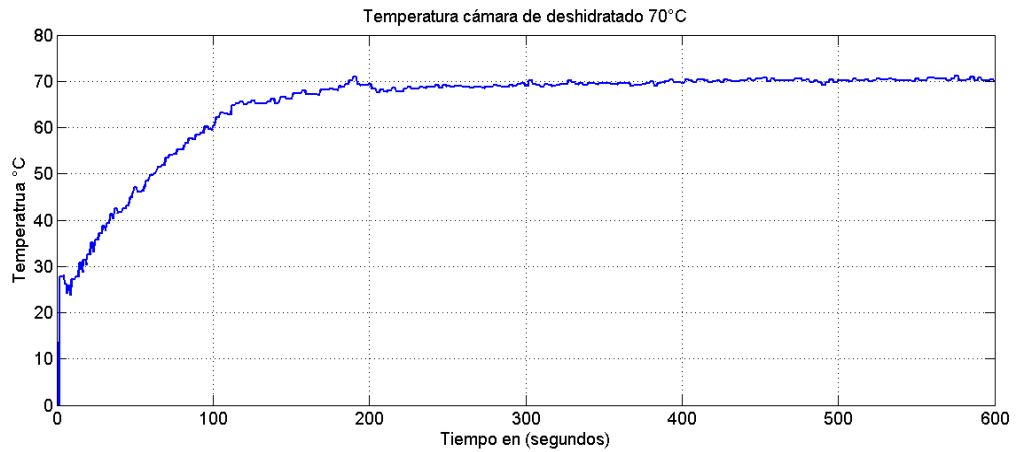


Figura 33: Temperatura de la cámara de deshidratado a 70°C.

La Figura 34 muestra la temperatura del producto durante el experimento.

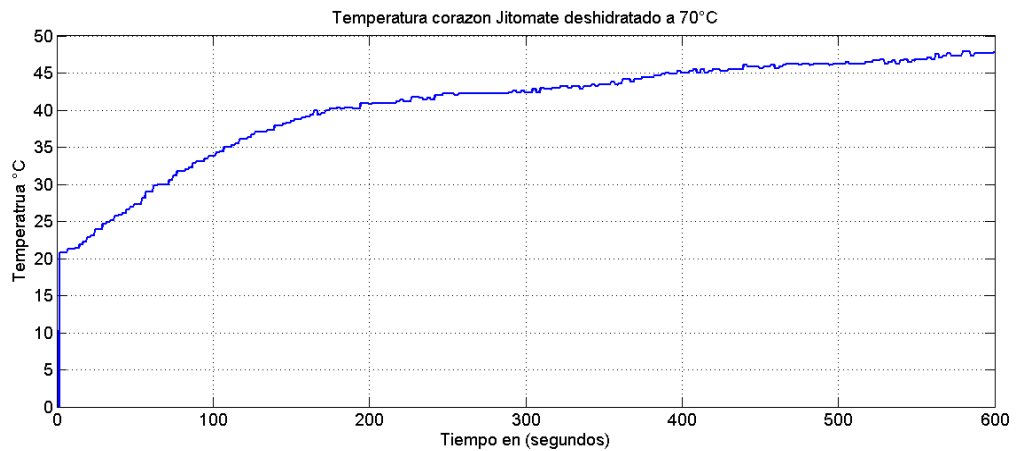


Figura 34: Temperatura del jitomate deshidratado a 70°C.

La Figura 35 muestra la señal de control aplicada, debido a que la referencia es mayor, la señal de control crece en magnitud en comparación con las anteriores.

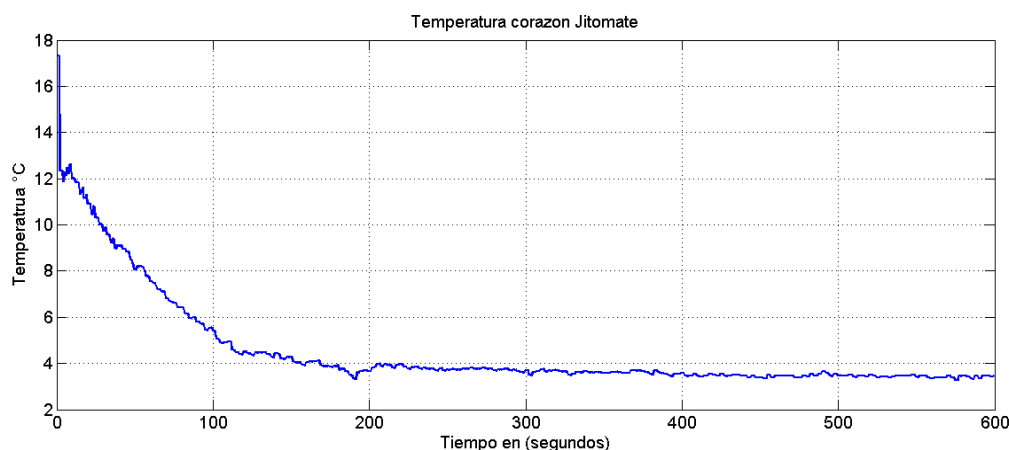


Figura 35: Señal de control aplicada.

Las respuestas del PID a las mismas temperaturas han sido reportadas en [2] y por ello no son mostradas aquí. Sin embargo, es posible decir que el ahorro de energía (en Watts) va desde un 80 % a un 94 % cuando se utiliza un control óptimo en vez de un PID, en los distintos puntos de ajuste (50, 60 y 70°C).

A continuación se presentan los resultados de retención de nutrientes encontrados por el grupo de investigación de la Universidad de la Mixteca. Los nutrientes evaluados fueron licopeno, fenoles y vitamina C, estos se muestran en la Tabla 7, en donde la concentración de los componentes químicos ésta expresada en función de la masa de las rebanadas. Los datos son expresados como el promedio de tres mediciones  $\pm$  desviación estándar. No hay diferencia significativa ( $p < 0.05$ ) por el método de rangos múltiples de Duncan.

Muestra	<i>Licopeno</i> (mg/100gdemuestra)	<i>Fenoles</i> (mgEAG/100gdemuestra)	<i>VitaminaC</i> (mg/100gdemuestra)
PID50°C	72.48 $\pm$ 1.56	29.90 $\pm$ 1.16	174.94 $\pm$ 4.17
PID60°C	97.23 $\pm$ 0.78	34.80 $\pm$ 0.49	198.73 $\pm$ 9.58
PID70°C	108.80 $\pm$ 3.62	55.88 $\pm$ 1.13	294.67 $\pm$ 3.20
Óptimo50°C	93.1 $\pm$ 1.34	147.27 $\pm$ 1.77	359.84 $\pm$ 18.78
Óptimo60°C	92.43 $\pm$ 2.93	81.06 $\pm$ 3.30	214.65 $\pm$ 5.11
Óptimo70°C	134.05 $\pm$ 4.03	135.03 $\pm$ 5.28	192.45 $\pm$ 2.91

Tabla 7: Contenido de licopeno, fenoles totales y vitamina C

De la Tabla 7, es posible concluir lo siguiente:

**Para un punto de ajuste de 50°C:**

- Retención de vitamina C: El control óptimo retuvo 105.6934 % más concentración que el PID.
- Retención de fenoles: El control óptimo retuvo 392.5418 % más concentración que el PID.
- Retención de licopeno: El control óptimo 28.4492 % más concentración que el PID.

**Para un punto de ajuste de 60°C:**

- Retención de vitamina C: El control óptimo retuvo 8.0109 % más concentración que el PID.
- Retención de fenoles: El control óptimo retuvo 132.9310 % más concentración que el PID.
- Retención de licopeno: El PID retuvo 5.1931 % más concentración que el control óptimo.

**Para un punto de ajuste de 70°C:**

- Retención de vitamina C: El PID retuvo 53.1151 % más concentración que el control óptimo.
- Retención de fenoles: El control óptimo retuvo 141.6428 % más concentración que el PID.
- Retención de licopeno: El control óptimo retuvo 23.2077 % más concentración que el PID.

Puede observarse que en general, el desempeño del control óptimo a 50°C es el que obtuvo el mejor rendimiento en retención de los 3 nutrientes y consumo de energía con un ahorro del 80 % de energía.

**4.7. Análisis estadístico.**

El análisis estadístico consistió en la obtención de valores promedio, desviación estándar; así como un análisis de varianza (ANOVA) para realizar un comparativo de medias utilizando la prueba de Duncan. Ésta prueba permitió determinar posibles diferencias en el contenido de licopeno, fenoles totales y vitamina C entre todas las muestras deshidratadas, a un nivel de significancia de  $p < 0.05$ . El resultado de este análisis indica que se retiene un buen contenido de constituyentes químicos. Este comportamiento fue independiente de la temperatura en el caso de los compuestos fenólicos. Sin embargo, para licopeno y vitamina los mejores resultados se obtuvieron a 70 °C y 50 °C, respectivamente. También, se observó que el contenido de los componentes químicos evaluados en los deshidratados con el controlador óptimo presentaron una diferencia estadísticamente significativa a las tres temperaturas empleadas.

A continuación se muestra lo obtenido con la prueba de Duncan para vitamina C.

Muestra	$\frac{VitaminaC}{\mu}$	diferencia de medidas dif. medidas	dif. medidas	dif. medidas	dif. medidas
Óptimo 50°C	359.84	7.67 (8-1)	66.12 (9-2)	39.71 (8-4)	167.39 (7-9)
Óptimo 60°C	214.65	14.53 (1-9)	72.99 (4-3)	17.51 (9-4)	-22.20 (9-8)
Óptimo 70°C	192.45		96.79 (5-3)	96.79 (5-3)	

#### 4.8. Conclusiones

Un punto importante es la robustez, que tiene el controlador PID es que con únicamente sintonizarlo adecuadamente se obtienen muy buenos resultados en el control de temperatura ya que este trabaja directamente sobre el error, pero el sobre impulso no se elimina por completo.

Por otro lado el controlador óptimo elimina el sobre impulso, ahorra energía, no satura por mucho tiempo el actuador ni presenta cambios bruscos en el mismo, pero como este depende directamente del modelo el controlador no es muy robusto para este caso, ya que si los parámetros del modelo se alteran de manera significativa, la ley de control no funciona adecuadamente.

Tomado en cuenta los resultados obtenidos con estos controladores, para este sistema de deshidratado en específico, el controlador óptimo presenta un mejor comportamiento con respecto al controlador PID en cuanto a consumo de energía y retención de nutrientes.

#### 4.9. Conclusiones generales y perspectivas

- Se construyó un prototipo funcional de deshidratación el cual tiene un comportamiento localmente lineal y que puede modelarse mediante un primer orden con un retardo. Dicho modelo fue válido a las tres temperaturas consideradas: 50, 60 y 70°C.
- En cuanto al ahorro de energía y retención de nutrientes, el control óptimo resultó tener mejor desempeño que el PID industrial.
- La monitorización en línea del color resultó satisfactoria de acuerdo con los resultados obtenidos, ya que son muy cercanos a un dispositivo comercial, pero a un costo mucho menor.
- Como trabajo a futuro se contempla obtener un modelo no lineal de temperatura, mejorar el diseño y construcción del prototipo agregando celdas solares para maximizar el ahorro de energía, implementar en el dominio discreto la ley de control lineal óptima y finalmente realizar una optimización diseño del colorímetro en línea, integrándolo en un dispositivo electrónico programable sin hacer uso de una computadora.

# Apéndices

## Apéndice A

### A. Reglas técnicas y teoremas útiles

Es muy importante describir algunas herramientas utilizadas en capítulos anteriores, estos son:

#### A.1. Regla de Leibnitz

Cuando se desea derivar una integral cuyos límites de integración son funciones que dependen de la variable de derivación, es posible hacer uso de la siguiente regla:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int_{\beta(x)}^{\alpha(x)} f(x, t) dt \right\} = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x} (f(x, t)) dt + f(x, \beta(x)) \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} - f(x, \alpha(x)) \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x}.$$

#### A.2. Complemento de Schur

El complemento de Schur es utilizado para expresar una desigualdad matricial en términos de una ecuación del tipo de Riccati y viceversa, este establece lo siguiente:

Sea  $K \in R^{n \times n}$  una matriz simétrica, es decir  $K = K^T$ . Considere la partición de la matriz  $K$  de la forma:

$$K = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix},$$

en donde de la condición  $K = K^T$  se obtiene que  $A = A^T$  y  $C = C^T$ . Entonces se satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned} K > 0 &\iff \\ A > 0 \quad C - B^T A^{-1} B > 0 \\ C > 0 \quad A - B C^{-1} B^T > 0 \end{aligned}$$

#### A.3. Estabilidad para sistemas con retardos

**Enfoque de Razumikhin:** Este enfoque únicamente utiliza funciones de Lyapunov, pero toma en cuenta algunas condiciones adicionales que logran que este método tome en cuenta la dependencia que existe entre  $x(t)$  y  $x(t - h)$  ya que

estos dos pertenecen a la misma trayectoria.

Para poder realizar un análisis de estabilidad bajo el enfoque de Lyapunov Krasovskii en sistemas con retardos, es necesario tener en cuenta algunas definiciones y teoremas. A continuación son recordados brevemente.

*Definición 1. Estado.* Sea el sistema de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= F(t, x_t), \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0]\end{aligned}\tag{61}$$

donde  $x(t)$ ,  $F(t, x_t) \in R^n$  y  $\varphi(\theta)$  es una función continua a tramos. El estado del sistema (61) se define como:

$$x_t = x(t + \theta), \quad \theta \in [-h, 0].$$

*Definición 2. Funcional.* Un funcional del estado  $x_t$  denotada como  $v(x_t)$  se define como:

$$v : C_n \rightarrow R$$

donde  $C_n \subseteq R^n$  es el espacio de funciones continuas.

*Definición 3.* Sea  $x(t) \in R^n$ , la norma  $h$  de  $x(t)$  se define como

$$\|x(t)\|_h = \sup_{\theta \in [t-h, t]} \|x(\theta)\|_h.$$

*Definición 4 Funcional definida positiva.* La funcional  $v(x_t)$  se dice definida positiva si existe  $H > 0$  tal que  $v(x_t)$  está definida para toda  $\|x_t\|_h < H$  y:

- Es continua y acotada,
- $v(0_h) = 0$  y  $v(x_t) > 0$  si  $x_t \neq 0_h$ .

*Definición 5.* La funcional  $v(t, x_t)$  se dice definida positiva si:

- Existe  $H > 0$  tal que  $v(t, x_t)$  es definida para toda  $\|x_t\|_h < H$  y para toda  $t \geq 0$ ,
- Es continua para todo  $t \geq 0$  fijo con respecto a  $x_t$  en el punto  $x_t = 0$ ,
- $v(t, 0_h) = 0$ ,
- Existe una funcional  $v_0(x(t))$  (llamada funcional soporte) definida positiva tal que:  
 $v_0(x(t)) \leq v(t, x_t), \forall t \geq 0$

A partir de las definiciones anteriores es posible establecer el concepto de estabilidad para sistemas con retardos. Considere el sistema de la forma:

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t), \quad x(\theta) = \varphi(\theta) \quad (62)$$

donde la funcional  $F(t, x_t), x(t) \in R^n$  esta definida para  $t \geq 0$  y para  $\|x_t\|_h \leq H$  y satisface las siguientes propiedades:

- es continua,
- Es Lipschitz respecto a la variable  $x_t$ , es decir, existe  $L > 0 / \|F(t, x_t)\|_h \leq L \|x_t\|_h$ ,
- es acotada:

$$\forall t \geq 0; \|x_t\|_h \leq H; \|F(t, x_t)\| < M, \quad M > 0.$$

Sin pérdida de generalidad, se supone que  $F(., .)$  posee la solución trivial, es decir:

$$\dot{x} \equiv 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0; F(t, 0) \equiv 0, \forall t \geq 0$$

Si este no es el caso, mediante un cambio de variable es posible hacer que la funcional posea la solución trivial y la estabilidad de esta solución trivial implica la de la solución original.

**Definición 6. Estabilidad de solución trivial.** La solución trivial del sistema (62) se dice estable si para toda  $\varepsilon > 0$  y  $t_0 \geq 0$  existe  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$  tal que  $\|\varphi\| < \delta$  implica que  $\|x(t, \varphi, t_0)\| < \varepsilon$  para todo  $t \geq t_0$ .

Ahora considere los siguientes teoremas fundamentales.

**Teorema 1 Estabilidad en el sentido de Lyapunov-Krasovkii.** La solución trivial del sistema (62) es estable si y sólo si existe una funcional  $v(t, x_t)$  definida positiva y una función  $v_1(x(t))$  definida positiva tal que:

- $v_1(x(t)) \leq v(t, x_t), \forall t \geq 0$  y  $\|x_t\| \leq H$ ,
- $v(t, x_t)$  decrece a lo largo de la trayectoria del sistema.

**Teorema 2 Estabilidad asintótica en el sentido de Lyapunov-Krasovskii.** La solución trivial del sistema (62) es asintóticamente estable si y sólo si existe una funcional  $v(t, x_t)$  definida positiva y una función  $v_1(x(t))$  definida positiva tal que:

- $v_1(x(t)) \leq v(t, x_t), \forall t \geq 0$  y  $\|x_t\| \leq H$ ,
- $v(t, x_t)$  decrece monotónicamente a lo largo de las trayectorias del sistema cuando  $t \rightarrow \infty$ .



Apéndice B

B. Programas para implementación y demostraciones

B.1. Programa en LabVIEW del controlador óptimo con compensación de retardo en la entrada

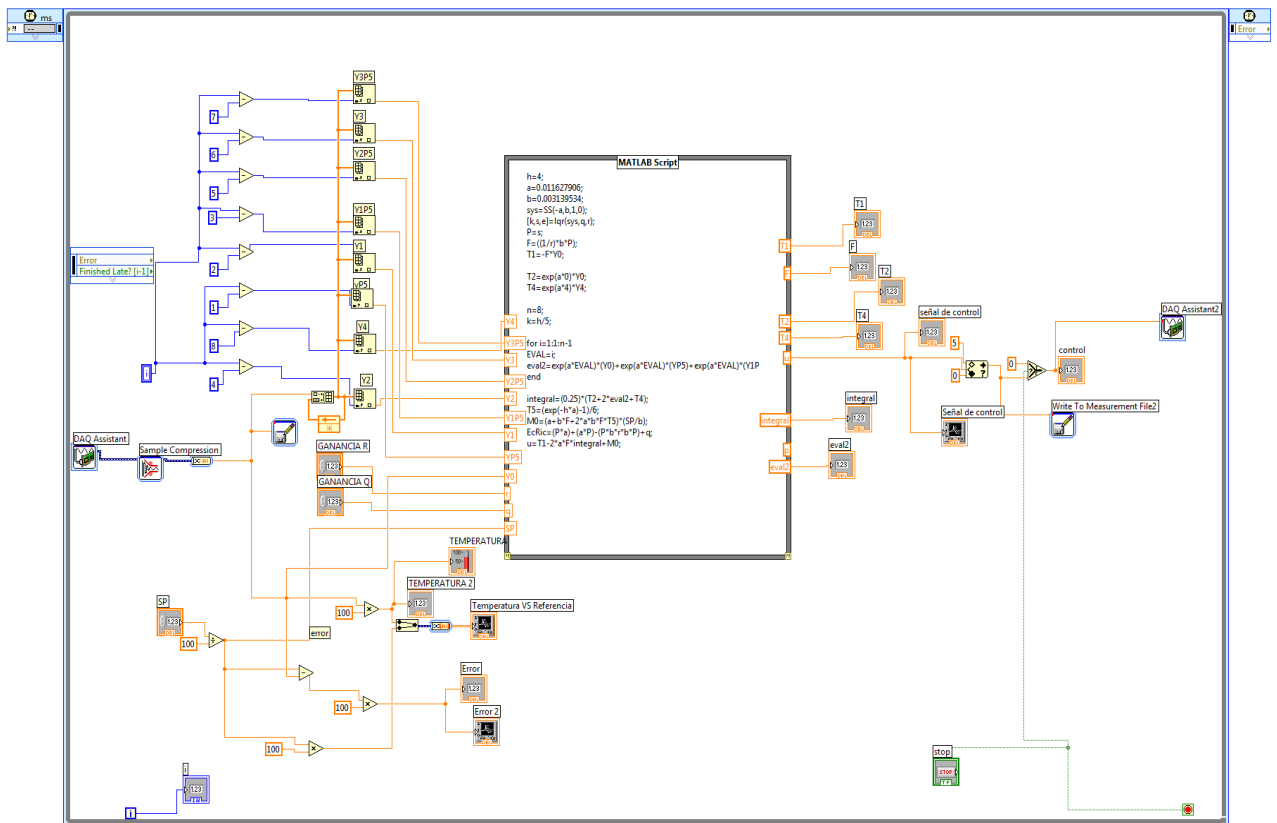


Figura 36: Programa para implementación de ley de control óptima.

Los pesos de penalización en el índice de desempeño utilizadas para este programa fueron:

$$R=3;$$

$$Q=1100;$$

Con estos valores de penalización el controlador funcionó de manera adecuada.

**B.2. Programa Matlab para solución de ecuación de Riccati**

```
clc clear all
```

```
A_tilde=0.011627906;
```

```
R=3;
```

```
Q=1100;
```

```
ham=[A R;Q -A'];
```

```
[x1,x2,flag] = ric_schr(ham) P=x2/x1
```

**B.3. Programa en Matlab para encontrar la solución de LMI**

```
clc
```

```
clear all
```

```
A=0.011627906;
```

```
b=0.007209302;
```

```
P=0.001;
```

```
h=4;
```

```
EP=(A+b*((1/5)*b*P)+2*A*b*((1/5)*b*P)*(exp(-h*A)-1)/6)*(60/b);
```

```
ALPHA=0.001; R=3;
```

```
%—————INICIO VARIABLES LMI—————
```

```
setlmis([]);
```

```
P=lmivar(1,[1 0;1 0]);
```

```
X=lmivar(1,[1 0;1 0]);
```

```
E=lmivar(1,[1 0;1 0]);
```

```
Yinv=lmivar(1,[1 0;1 0]);
```

```
%—————INICIO LMI—————
```

```
lmiterm([1 1 1 P],.5*A,1,'s'); % LMI #1: A*P (NON SYMMETRIC?)
```

```
lmiterm([1 1 1 P],.5*1,A,'s'); % LMI #1: P*A (NON SYMMETRIC?)
```

```
lmiterm([1 1 1 X],.5*1,A,'s'); % LMI #1: X*A (NON SYMMETRIC?)
```

```
lmiterm([1 1 1 X],.5*A,1,'s'); % LMI #1: A*X (NON SYMMETRIC?)
```

```
lmiterm([1 1 1 0],R+EP*ALPHA^2); % LMI #1: R+EP*ALPHA^2
```

```
lmiterm([1 2 1 X],A,-1); % LMI #1: -A*X
```

```
lmiterm([1 2 2 0],-R); % LMI #1: -R
```

```
lmiterm([1 3 1 P],1,1); % LMI #1: P
```

```
lmiterm([1 3 3 0],-EP);           % LMI #1: -EP
lmiterm([1 4 1 Yinv],A,1);       % LMI #1: A*Yinv
lmiterm([1 4 2 Yinv],A,1);       % LMI #1: A*Yinv
lmiterm([1 4 3 Yinv],A,1);       % LMI #1: A*Yinv
lmiterm([1 4 4 Yinv],1,1);       % LMI #1: Yinv
lmiterm([1 5 1 0],(X+P));        % LMI #1: (X+P)
lmiterm([1 5 5 Yinv],1,1);       % LMI #1: Yinv

lmisys=getlmis;

[lopt ,xopt]=feaspl(lmisys);
Pfinal=dec2mat(lmisys ,xopt ,P)
Xfinal=dec2mat(lmisys ,xopt ,X)
Rfinal=dec2mat(lmisys ,xopt ,R)
```

#### B.4. Principio de superposición

El principio de superposición es una propiedad de los mapeos, la cual permite descomponer un problema lineal en dos o más subproblemas más sencillos, de tal manera que el problema original se obtiene como “superposición” o “sum” de estos subproblemas más sencillos.

Técnicamente, el principio de superposición afirma que cuando las ecuaciones de comportamiento que rigen un problema físico son lineales, el resultado de la solución de un problema práctico relacionado con una magnitud asociada al fenómeno, tomando en cuenta que están presentes los conjuntos causantes.

$A$  y  $B$ , puede obtenerse como la suma de los efectos de  $A$  más los efectos de  $B$ . Es decir, sea  $L$  un mapeo tal que:  $L : D \rightarrow C$ ,  $L$  satisface el principio de superposición si

$$\begin{aligned} L(A + B) &= L(A) + L(B), \\ A, B \in D, L(A), L(B) &\in C. \end{aligned} \tag{63}$$

Se efectuó una prueba experimental en la deshidratadora para determinar la no linealidad de la planta:

- Se aplica un voltaje de 50 volts de CD a la resistencia calefactora, obteniendo una temperatura de 45 °C.
- Se aplica un voltaje de 84volts de CD a la resistencia calefactora, obteniendo una temperatura resultante de 59 °C.

De acuerdo al principio de superposición, la suma de los dos voltajes aplicados (50 y 84 volts) a la resistencia calefactora, debe reflejar como salida una temperatura que es la suma de las dos temperaturas de salida (104°C). obtenidas al aplicar los voltajes mencionados.

Al aplicar 134 volts a la resistencia calefactora se obtuvo una temperatura de 81°C.

Por lo tanto, de acuerdo al principio de superposición, la planta es no lineal debido a que en la salida de temperatura no se obtiene una temperatura de 104 °C, que es la suma de las temperaturas obtenidas.

## Apéndice C

### C. Desarrollo de programas para colorímetro

#### C.1. Desarrollo del colorímetro

```

#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <stdlib.h>

#include<string.h>
#include <cv.h>
#include <cvaux.h>
#include<highgui.h>
#include <cvcam.h>
#include <time.h>

#include<iostream>
#include<fstream>

using namespace std; // necesario para que funcione ofstream de
salida void on_mouse(int, int, int, int, void *); void
Deteccion(IplImage *);

IplImage* Imagen=NULL;
IplImage* Imagen2=NULL;
int roi_x0=6; int
roi_y0=6;
int roi_x1=6;
int roi_y1=6;
int Cam=0;
// SELECCIONAR
CAMARA*****
int Vec_c[3][2]; int bandera; int k; char sel; int raton=0; CvScalar
pixel; CvScalar pixel2; CvScalar pixel3; CvScalar pixel4;

int Colores [3][3]; int sumaR1=0; // [30][30];

```

```
int sumaG1=0;//[30][30];  
int sumaB1=0;//[30][30];
```

```
int sumaR2=0;//[30][30];  
int sumaG2=0;//[30][30];
```

```
int sumaB2=0;//[30][30];  
int sumaR3=0;//[30][30];
```

```
int sumaG3=0;//[30][30];  
int sumaB3=0;//[30][30];
```

```
int promedioR1=0;  
int promedioR2=0;  
int promedioR3=0;
```

```
int promedioG1=0;  
int promedioG2=0;  
int promedioG3=0;
```

```
int promedioB1=0;  
int promedioB2=0;  
int promedioB3=0;
```

```
int Rnorm1=0;  
int Rnorm=0;  
int Gnorm=0;  
int Bnorm=0;  
int FR=0;
```

```
int FG=0;  
int F=0;  
int FB=0;  
int X=0;  
int Y=0;  
int Z=0;  
int XF=0;  
int ZF=0;
```

```
int YF=0;
int XF1=0;
int YF1=0;
int ZF1=0;
int FX=0;

int FY=0;
int FZ=0;
int L=0;
int a=0;
int b=0;
int coor1;

int coor2;

int x1i, x2i, x3i, y1i, y2i, y3i, x1s, x2s, x3s, y1s, y2s, y3s,
punto1, punto2, punto3, punto4, punto5, punto6, punto7;
int R1;

int G1;
int B1;

int R2; //[30][30]; int G2; //[30][30]; int B2; //[30][30];

int R3; //[30][30]; int G3; //[30][30]; int B3; //[30][30];

int m=0, n=0, f=0, i=0;

FILE * archivo1;
FILE * archivo2;
FILE * archivo3;

FILE * archivo4;
FILE * archivo5;
FILE * archivo6;

//void main()
int main(int argc, char** argv) {
// do //ciclo para
```

```
// {
  bandera=0;
  Vec_c[0][0]=15;
  Vec_c[0][1]=15;
  Vec_c[0][0]=15;
  Vec_c[1][0]=15;
  Vec_c[2][0]=15;

  Vec_c[0][0]=15;
  Vec_c[1][0]=15;
  Vec_c[2][0]=15;

  Vec_c[0][1]=15;
  Vec_c[1][1]=15;
  Vec_c[2][1]=15;

  Vec_c[0][1]=15;
  Vec_c[1][1]=15;
  Vec_c[2][1]=15;

  pixel.val[0]=0;
  pixel.val[1]=0;
  pixel.val[2]=0;

  pixel2.val[0]=0;
  pixel2.val[1]=0;
  pixel2.val[2]=0;

  pixel3.val[0]=0;
  pixel3.val[1]=0;
  pixel3.val[2]=0;

  pixel4.val[0]=0;
  pixel4.val[1]=0;
  pixel4.val[2]=0;

  //k=0;
```



```

//rebanada2.open("rebanada2.txt");
//rebanada3.open("rebanada3.txt");

archivo1=fopen("rebanada1.txt", "w");

archivo2=fopen("rebanada2.txt", "w");

archivo3=fopen("rebanada3.txt", "w");

archivo4=fopen("rebanada1lab.txt", "w");

archivo5=fopen("rebanada2lab.txt", "w");

archivo6=fopen("rebanada3lab.txt", "w");

cvNamedWindow("Ventana1", 1);//creo ventana 1
cvNamedWindow("Ventana2", 1);// creo ventana 2
HWND hwnd1=(HWND)cvGetWindowHandle("Ventana1");
int ncams=cvcamGetCamerasCount();
cvcamSetProperty(Cam, CVCAM_PROP_ENABLE, CVCAMTRUE);
// Selecciona la primera camara que encuentra &Cam1 CVCAMTRUE
cvcamSetProperty(Cam, CVCAM_PROP_RENDER, CVCAMTRUE);
// Muestra el video de la camara activa &Cam1
cvcamSetProperty(Cam, CVCAM_PROP_WINDOW, &hwnd1);

// Selecciona la ventana para mostrar el video
cvcamSetProperty(Cam, CVCAM_PROP_CALLBACK, (void*)&Deteccion);
cvcamInit();
cvcamStart();
cvWaitKey(0);
//Your app is working
cvcamStop();
cvcamExit();

cvDestroyWindow("Ventana1");
cvDestroyWindow("Ventana2");

```

```

    fclose ( archivo1 );
    fclose ( archivo2 );
    fclose ( archivo3 );
    fclose ( archivo4 );
    fclose ( archivo5 );
    fclose ( archivo6 );
    //} while ( bandera == 100000 );
} //fin main

void Deteccion ( IplImage * video )
//void Deteccion ( IplImage * imagen )
{
    int val_r=0;
    int val_g=0;
    int val_b=0;
    CvSize pt;

    pt.width= video->width;
    pt.height=video->height;

    if ( bandera==100 )
    {
        //Imagen2=cvCreateImage ( pt , video->depth , 3 );
        Imagen=cvCloneImage ( video );
        //cvResize ( Imagen , Imagen2 , 1 );
        cvShowImage ( "Ventana2" , Imagen );

        for ( k=0;k<3;k++ )
        {
            do
            {
                cvSetMouseCallback ( "Ventana2" , on_mouse , NULL );
            } while ( raton==0 );
            Vec_c [ k ] [ 0 ] = roi_x0 ;
            //Vec_c [ k ] [ 1 ] = video->height-roi_y0 ;
            Vec_c [ k ] [ 1 ] = 480 - roi_y0 ;
            cvWaitKey ( 300 );
            printf ( " %d %d \n " , roi_x0 , roi_y0 );
        }
    }
}

```

```

    } //fin for
} //fin if

x1i=Vec_c[0][0]-3;
x2i=Vec_c[1][0]-3;
x3i=Vec_c[2][0]-3;

x1s=Vec_c[0][0]+3;
x2s=Vec_c[1][0]+3;
x3s=Vec_c[2][0]+3;

y1i=Vec_c[0][1]-3;
y2i=Vec_c[1][1]-3;
y3i=Vec_c[2][1]-3;

y1s=Vec_c[0][1]+3;
y2s=Vec_c[1][1]+3;
y3s=Vec_c[2][1]+3;

cvRectangle(video, cvPoint(x1i, y1i), cvPoint(x1s, y1s),
CV_RGB(255, 0, 0), 1);
cvRectangle(video, cvPoint(x2i, y2i), cvPoint(x2s, y2s),
CV_RGB(0, 255, 0), 1);
cvRectangle(video, cvPoint(x3i, y3i), cvPoint(x3s, y3s),
CV_RGB(0, 0, 255), 1);

    if (bandera >= 100)
{

//rebanada3<<promedioG3<<"\t"<<endl;

for (m=1; m<=5; m++) { for (n=1; n<=5; n++) {
printf("valor de m_y_n ... m= %d, n= %d, f= %d\n", m, n, f);

```

```
punto1=(Vec_c[0][1]-3)+m;
punto2=(Vec_c[0][0]-3)+n;

punto3=(Vec_c[1][1]-3)+m;
punto4=(Vec_c[1][0]-3)+n;

punto5=(Vec_c[2][1]-3)+m;
punto6=(Vec_c[2][0]-3)+n;

pixel=cvGet2D(video,punto1,punto2);

pixel2=cvGet2D(video,punto3,punto4);

pixel3=cvGet2D(video,punto5,punto6);

R1=(int)pixel.val[2];
G1=(int)pixel.val[1];
B1=(int)pixel.val[0];

R2=(int)pixel2.val[2];
G2=(int)pixel2.val[1];
B2=(int)pixel2.val[0];

R3=(int)pixel3.val[2];
G3=(int)pixel3.val[1];
B3=(int)pixel3.val[0];

sumaR1=sumaR1+(int)pixel.val[2];
sumaG1=sumaG1+(int)pixel.val[1];
sumaB1=sumaB1+(int)pixel.val[0];

sumaR2=sumaR2+(int)pixel2.val[2];
sumaG2=sumaG2+(int)pixel2.val[1];
sumaB2=sumaB2+(int)pixel2.val[0];

sumaR3=sumaR3+(int)pixel3.val[2];
sumaG3=sumaG3+(int)pixel3.val[1];
```

```

sumaB3=sumaB3+(int) pixel3 . val [0];

f+=1;

if (m==5 & n==5)
{
promedioR1=(sumaR1)/25;
promedioG1=(sumaG1)/25;
promedioB1=(sumaB1)/25;

promedioR2=(sumaR2)/25;
promedioG2=(sumaG2)/25;
promedioB2=(sumaB2)/25;

promedioR3=(sumaR3)/25;
promedioG3=(sumaG3)/25;
promedioB3=(sumaB3)/25;

fprintf(archivo1, "%d_%d_%d\n",
promedioR1, promedioG1, promedioB1);
fprintf(archivo2, "%d_%d_%d\n",
promedioR2, promedioG2, promedioB2);
fprintf(archivo3, "%d_%d_%d\n",
promedioR3, promedioG3, promedioB3);

fprintf(archivo4, "%d_%d_%d\n", L, a, b);
fprintf(archivo5, "%d_%d_%d\n", L, a, b);
fprintf(archivo6, "%d_%d_%d\n", L, a, b);

printf("_pixelR1=%d\n", R1);

printf("_sumaR1=%d\n", sumaR1);
printf("_sumaG1=%d\n", sumaG1);
printf("_sumaB1=%d\n", sumaB1);

printf("_sumaR2=%d\n", sumaR2);
printf("_sumaG2=%d\n", sumaG2);

```

```

printf("_sumaB2= %d\n" , sumaB2);

printf("_sumaR3= %d\n" , sumaR3);
printf("_sumaG3= %d\n" , sumaG3);
printf("_sumaB3= %d\n" , sumaB3);

printf("_PROMEDIOR1= %d\n" , promedioR1);
printf("_PROMEDIOG1= %d\n" , promedioG1);
printf("_PROMEDIOB1= %d\n" , promedioB1);

printf("_PROMEDIOR2= %d\n" , promedioR2);
printf("_PROMEDIOG2= %d\n" , promedioG2);
printf("_PROMEDIOB2= %d\n" , promedioB2);

printf("_PROMEDIOR3= %d\n" , promedioR3);
printf("_PROMEDIOG3= %d\n" , promedioG3);
printf("_PROMEDIOB3= %d\n" , promedioB3);

} // cierra if (m=5 &n=5)

} // primer for } // segundo for

} // if <=100

sumaR1=0; sumaG1=0; sumaB1=0;

sumaR2=0; sumaG2=0; sumaB2=0;

sumaR3=0; sumaG3=0; sumaB3=0;

    printf("BANDERA== %d\n\t" , bandera);
    bandera+=1;

}

////////////////////////////////////

```

```
void on_mouse(int event, int x, int y, int flag, void *param)
{
    if(event==CV_EVENT_LBUTTONDOWN)
    {
        roi_x0=x;
        roi_y0=y;
        raton=1;
    }
    else
    {
        roi_x1=x;
        roi_y1=y;
        raton=0;
    }
}
```

## Referencias

- [1] Santos-Sánchez, N. F., Valdéz-Blanco, R., Gómez-Gómez, M. S., Pérez-Herrera, A. and Salas-Coronado, R. Effect of rotating tray drying on antioxidant components, color and rehydration ratio of tomato saladette slices. *LWT-Food Science and Technology*, 46(1):298–304, 2011.
- [2] Huerta-Aguilar, A. D. *Análisis de los efectos de distintas estrategias de control en una deshidratadora. Caso de estudio: jitomate*. Tesis de maestría, Maestría en Ciencias en Automatización y Control, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 2013.
- [3] Gómez-Gómez, M. S. *Deshidratado de tomate saladette en un secador de charolas giratorias*. Tesis de licenciatura, Universidad Tecnológica de la Mixteca, 2009.
- [4] Dufour, P. Control engineering in drying technology: Review and trends. *Drying technologies*, 1(7):889–904, 2006.
- [5] Reyniecki, A. and Nellist, M.E. Optimization of control systems for near-ambient grain drying part 1. the optimization procedure. *Journal of Agricultural Engineering Research*, 48(1):1–17, 1991.
- [6] Astrom, K. J. and Hägglund, T. *Automatic tuning of PID Controllers*. Instruments Society of America, USA, 1988.
- [7] Andritsos, N., Damalapakis, P. and Kolios, N. Use of a geothermal energy for tomato drying. *GHC Bulletin*, 48:9–13, 2003.
- [8] Brooks, M.S., Abou El-Hana, N.H. and Ghaly, A.E. Effects of tomato geometries and air temperature on the drying behavior of plum tomato. *American Journal of Applied Sciences*, 5(10):1369–1375, 2008.
- [9] Niculescu, S.L. *Delay Effects on Stability a Robust Control Approach*. Springer Verlag, London Berlin Heidelberg, 2001.
- [10] Mishkin, M., Saguy, I. and Karel, M. Minimizing ascorbic acid loss during air drying with a constraint on enzyme inactivation for hypothetical food stuff. *Journal Food Process Preservation*, 7(3):193–210, 1983.
- [11] Santos-Sánchez, O. J., Rodríguez-Guerrero, L. and López-Ortega, O. Experimental results of a control time delay systems using optimal control. *Optimal control, Applications and Methods*, 8(3):340–348, 2012.



- [12] Jin, X., van des Sman, R.G.M., van Straten, G., Boom, R.M. and van Boxtel, A.J.B. Energy efficient drying strategies to retain nutritional components in broccoli (brassica oleracea var). *Journal of Food Engineering*, 123:172–178, 2014.
- [13] Mishkin, M., Saguy, I. and Karel, M. A dynamic test for kinetic models of chemical changes during processing: ascorbic acid degradation in dehydration of potatoes. *Journal of Food Science*, 49(5):1267–1270, 1984.
- [14] Terelea, I.C., Trystram, G. and Courtois, F. Optimal constrained non-linear control of batch processes: Application to corn drying. *Drying technology: An International Journal*, 31(4):403–421, 1997.
- [15] Pan, Y.K., Zhao, L.J. and Hu, W.B. The effect of tempering-intermittent drying on quality and energy of plant material. *Drying Technology*, 17(9):1795–1812, 1999.
- [16] Marfil, P.H.M., Santos, E.M. and Telis, V.R.N. Ascorbic acid degradation kinetics in tomatoes at different drying conditions. *Food Sci. Tech*, 41(9):1642–1647, 2008.
- [17] Olmos, A., Trelea, I.C., Courtois, F., Bonazzi, C. and Trystram, G. Dynamic optimal control of batch rice drying process. *Drying technologies an international Journal*, 20(7):1319–1345, 2002.
- [18] Chua, K.J., Hawlander, M.N.A., Chou, S.K. and Ho, J.C. On the study of time-varying temperature drying-effect on drying kinetics and product quality. *Drying technology: An International Journal*, 20(7):1559–1577, 2002.
- [19] Alekal, Y., Brunovsky, P., Chyung, D.H. and Lee, E.B. The quadratic problem for systems with time delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6):673 – 687, 1971.
- [20] Bekiaris-Liberis, N. and Kristic, M. Compensation of state-dependent input delay for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(2):275–289, 2013.
- [21] Rodríguez-Guerrero, L., López-Ortega, O. and Santos-Sánchez, O. J. Object-oriented optimal controller for a batch dryer system. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 58(4):293–307, 2012.
- [22] Richard, J.P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 41(10):1767–1694, 2003.

- [23] Loiseau, J.J., Mori, I.C., Van Asshe, V. and Lafay, J.F. Feedback realization of compensators for a class of time-delay systems. In *Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona, USA, December*, 38, pages 7–10, 1999.
- [24] Santos, O. and Mondié, S. Control laws involving distributed delays robustness of the implementation. In *Proc. of IEEE American Control Conference 2000*, 4, pages 2479–2480, 2000.
- [25] Santos, O., Mondié, S. and Romero, H. Asignación espectral en sistemas monovariantes con un retardo en la entrada, mediante leyes de control con retardos distribuidos. In *Tercer Congreso Internacional en Control Inst. Virtual y Sistemas Digitales, IPN-CIC, México, D. F.*, 1, pages 30–34, 2001.
- [26] Lobo-Rodrigo, M. G. Caracterización Bioquímica de frutos de papaya (Carga papaya, C.V. Sunrise) Hembra y Hermafrodita en relación con su aptitud al procesamiento por congelación. Tesis de doctorado, Universidad Complutense de Madrid Facultad de Farmacia, 1995.
- [27] Bakhshipour, A., Jafari, A. and Zomorodian, A. Vision based features in moisture content measurement during raisin production. *World Applied Sciences Journal*, 17(7):860–869, 2012.
- [28] Mohebbi, M. , Akbarzadeh-T, M.R., Shahidi, F., Moussavi, M. and Ghoddsid, H.B. Computer vision systems (cvs) for moisture content estimation in dehydrated shrimp. *Computer and Electronics in Agriculture*, 69(2):128–134, 2009.
- [29] Ziegler, J. and Nichols, N. B. Optimum settings for automatic controllers. *Transactions of The American Society of Mechanical Engineers*, 64:759 – 768, 1942.
- [30] Neimark, J.I. D-subdivision and spaces of quasi-polynomials. *Journal of applied Mathematics and Mechanics (En ruso)*, 13:349–380, 1949.
- [31] Haley, T. A. and Mulvaney, S. J. Advanced process control techniques for the food industry. *Trends in Food Science Technology*, 6(4):103–110, 1995.
- [32] Zhong, Q.C. On distributed delay in linear control laws part i and ii rational implementation inspired from the delta operator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(5):729–734, 2005.
- [33] Granberg, H. *Control of a Process with Large Time Constants and Significant Time Delay*. Tesis de maestría, Chalmers University of Technology, Suecia, 2013.

- [34] Buckbee, G. Poor controller tuning drives up valve costs. *Control Magazine*, 15:47–51, 2002.
- [35] Huang, M.D. and Hsieh, W.D. Control loop tuning in hsiakang refinery. *Taiwan Sugar*, 49(4):19–22, 2002.
- [36] Lyons, S. *Optimizing steam supply in a chemical plant (consultada en diciembre del 2013)*, 2000.
- [37] Maya-Gress, K. F. *Identificación, modelado y control difuso de una deshidratadora de alimentos*. Tesis de maestría, Maestría en Ciencias en Automatización y Control, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 2013.
- [38] Bellman, R., Cooke, K.L. *Differential-Difference Equations*. Academic Press, 1963.
- [39] Hassan, K. *Nonlinear systems*. Prentice Hall, 2001.
- [40] Chicala, C.D. *Adquisición de datos. Medir para conocer y controlar*. Soluciones en control S.R.L., 2004.
- [41] Barbosa-Canovas, G.V. and Mercado, H.V. *Dehydration of foods*. Chapman and Hall., 1996.
- [42] Ogata, K. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall Hispanoamerica, 1998.
- [43] Creus, A.S. *Instrumentacion Industrial*. Marcombo, 2005.
- [44] Boyd, S.P. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [45] Krstic, M. *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*. Printed on acid-free paper, 2004.
- [46] Kalman, R. E. Contributions to the theory of optimal control. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 5(2):102–119, 1960.
- [47] Kwakernaak, H. and Sivan, R. *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience, 1972.
- [48] Strang, G. *Calculus*. Wellsely-Cambridge Press, 1991.
- [49] Rodríguez-Guerrero, L. *Sistema de optimización y supervisión desarrollado en Java. Caso de estudio: Proceso de Temperatura con retardo*. Tesis de maestría, Maestría en Ciencias en Automatización y Control, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 2010.

- [50] Cheney, W. y Kincaid, D. *Métodos numéricos y computación*. 6a ed. CENGAGE Learning, 2011.
- [51] Park, P. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 44(4):876–877, 1999.
- [52] Kolmanovskii, V. B. and Myshkis, A. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. Springer Verlag, 1999.
- [53] Krasovkii, N. N. *Stability of Motion. Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delays*. Stanford University Press, 1963.
- [54] Han, Q. L. and Yu, L. Robust stability of linear neutral systems with nonlinear parameter perturbations. *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, 151(5):539–546, 2004.
- [55] Yakubovich, V.A. S-procedure in nonlinear control theory. *Vestnik Leningrad University Mathematics*, 13(1):62–77, 1971.
- [56] Kerrkhofs, N.S., Lister, C.E., Savage, G.P. Change in colour and antioxidant content of tomato cultivars following forced-air drying. *Plant Foods Human Nutr.*, 60:117–121, 2005.