



Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería.

Área Académica de Matemáticas y Física

Modos cuasi-normales del agujero negro de Bardeen
rodeado de materia y energía oscura

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE :

LICENCIADO EN FÍSICA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

P R E S E N T A :

José Antonio Juárez Loyola

DIRECTOR DE TESIS :

Dr. Luis Alberto López Suárez

Mineral de la Reforma Hgo.
Noviembre 2023



Mineral de la Reforma, Hgo., a 9 de noviembre de 2023

Número de control: ICBI-D/1619/2023
Asunto: Autorización de impresión.

**MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
 DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH**

Con fundamento en lo dispuesto en el Título Tercero, Capítulo I, Artículo 18 Fracción IV; Título Quinto, Capítulo II, Capítulo V Fracción IX del Estatuto General de nuestra Institución, por este medio le comunico que el Jurado asignado al Pasante de la Licenciatura en Física y Tecnología Avanzada **José Antonio Juárez Loyola**, quien presenta el trabajo de titulación **“Modos cuasi-normales del agujero negro de Bardeen rodeado de materia y energía oscura”**, después de revisar el trabajo en reunión de Sinodales ha decidido autorizar la impresión del mismo, hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación, firman de conformidad los integrantes del Jurado:

Presidente Dr. Omar Pedraza Ortega

Secretario: Dra. Victoria Elizabeth Cerón Ángeles

Vocal: Dr. Luis Alberto López Suárez

Suplente: Dr. Carlos Arturo Soto Campos

Sin otro particular por el momento, reciba un cordial saludo.

Atentamente
 “Amor, Orden y Progreso”

Dr. Otilio Arturo Acevedo Sandoval
 Director del ICBI



OAAS/YCC

Ciudad del Conocimiento
 Carretera Pachuca-Tulancingo km 4.5 Colonia
 Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo,
 México. C.P. 42184
 Teléfono: 771 71 720 00 ext. 2231 Fax 2109
 direccion_icbi@uaeh.edu.mx



Índice general

1. Agujeros negros.	6
1.1. Agujero negro de Bardeen.	6
1.2. Agujero negro de Bardeen con quintaesencia	10
1.3. Agujero negro de Bardeen rodeado de un fluido perfecto de materia oscura.	16
2. Ondas gravitacionales.	21
2.1. Modos cuasi-normales	21
2.1.1. Potencial efectivo y geodésicas nulas.	22
2.2. Potencial de agujero negro de Bardeen.	24
2.3. Potencial de agujero negro de Bardeen rodeado de quintaesencia.	26
2.4. Potencial de agujero negro de Bardeen rodeado de un fluido perfecto de materia oscura.	30
3. Modos cuasi-normales	36
3.1. Agujero negro de Bardeen rodeado de quintaesencia.	36
3.1.1. Parte real de la frecuencia de los modos cuasi-normales.	36
3.1.2. Parte imaginaria de los modos cuasi-normales.	37
3.2. Agujero negro de Bardeen rodeado de un fluido perfecto de materia oscura.	38
3.2.1. Parte real de los modos cuasi-normales	38
3.2.2. Parte imaginaria de los modos cuasi-normales.	39
4. Conclusión.	41
5. Bibliografía	43

Agradecimientos.

Le agradezco a Dios por permitirme llegar hasta donde estoy, a mis padres que siempre me han apoyado y motivado para seguir adelante, por todos sus esfuerzos que han hecho para que yo pueda alcanzar mis objetivos, a Marijo, a mis hermanos y abuelos por su apoyo que siempre me han brindado.

También quiero agradecer a mis amigos Nadia, Fer, Ottmar, Jorge, Arely, Benjamin y Memo, por haberme ayudado dentro y fuera de la universidad, por todas las risas y buenos momentos que compartimos durante este recorrido.

De igual forma quiero darle las gracias a mi asesor el Dr. Luis por haberme guiado y apoyado en la realización de este trabajo, a todos los doctores que durante la carrera resolvieron mis dudas y compartieron su conocimiento conmigo.

Resumen.

En este trabajo se estudian los modos cuasi-normales de un agujero negro de Bardeen en dos casos de interés, el primero considerando que el agujero negro de Bardeen se encuentre rodeado de quintaesencia y el segundo caso considerando el agujero negro de Bardeen se encuentre rodeado de un fluido perfecto de materia oscura. Con el fin de estudiar los modos cuasi-normales de los distintos escenarios se realiza el análisis de los horizontes de eventos, para ello se considera por simplicidad fijar el horizonte exterior en un valor específico con la finalidad de obtener relaciones de los distintos parámetros que conforman las soluciones y con ello garantizar que las soluciones representen a un agujero negro. Para obtener los modos cuasi-normales se hace uso del límite eikonal del cual se ha demostrado que existe una relación entre el radio de las geodésicas circulares nulas inestables y los modos cuasi-normales. Por lo que primeramente se calcula el potencial efectivo para obtener los radios de las órbitas circulares inestables. Al obtener los modos cuasi-normales, en la parte real observamos que en los dos casos la oscilación de los agujeros negros decrece al aumentar la carga magnética, en el caso de la parte imaginaria, se obtiene que en ambos casos las soluciones se vuelven más estables conforme aumenta la carga magnética. Dichos modos se comparan con los obtenidos de un agujero negro de Bardeen.

Introducción.

La teoría de la relatividad general fue propuesta por Albert Einstein en 1915 para describir la gravedad y la estructura del espacio-tiempo, en dicha teoría se postula que la gravedad no es una fuerza en el sentido tradicional, sino que surge debido a la curvatura del espacio-tiempo causada por la presencia de masa y energía. Einstein formuló las ecuaciones que describen, como la masa y energía curvan el espacio-tiempo dichas ecuaciones son muy complejas de resolver ya que son diez ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden acopladas no lineales, años después se encontró que estas ecuaciones permiten soluciones en las cuales la curvatura se vuelve infinita en ciertas regiones del espacio-tiempo, dando lugar a la idea de agujeros negros.[1] Hoy en día una forma en la cual sabemos que se crean los agujeros negros es cuando una estrella masiva se queda sin combustible nuclear y deja de producir energía, su núcleo colapsa debido a la gravedad y se comprime en un espacio muy pequeño. Si la masa comprimida es suficientemente grande, la creación de un agujero negro es posible. Los agujeros negros pueden ser descritos por sus parámetros de masa, momento angular, carga eléctrica entre otros, algo que es de mucho interés en el estudio de estos objetos es lo que se conoce como la singularidad, dichas singularidades son una predicción de la relatividad general, para imaginar que es una singularidad podemos pensar en el agujero negro como un embudo, la curvatura del agujero negro se irá incrementando hasta la región más interna de este, en donde la curvatura se haría infinita y no solamente la curvatura sino también la densidad de materia.

Es decir, una singularidad es un punto en el que la curvatura del espacio-tiempo se vuelve infinita y las leyes de la física que conocemos no pueden describir lo que sucede allí. Dichas singularidades pueden ser causa de que la teoría de la relatividad general no este completa aún. Los teoremas de singularidad probados por Penrose y Hawking en el marco de la relatividad general, prueban que cada agujero negro bajo ciertas condiciones contiene inevitablemente una singularidad.[2]

Según la teoría de la relatividad general de Einstein, los objetos masivos y acelerados pueden generar ondas gravitacionales que se propagan a la velocidad de la luz, de igual forma eventos cosmológicos masivos, como la fusión de dos agujeros negros o de estrellas de neutrones generan estas ondas, cuando un agujero negro sufre una perturbación, este tiene oscilaciones amortiguadas las cuales tienen frecuencias complejas, los modos de estas oscilaciones son conocidos como modos cuasi-normales, estos modos son cruciales para la identificación de los distintos parámetros del agujero negro, de igual forma desempeñan un papel primordial en la caracteri-

zación de las ondas gravitacionales, en los últimos años se han realizado avances tecnológicos para la detección de estas ondas y en el 2015 el experimento LIGO había encontrado ondas gravitacionales provenientes de la fusión de dos agujeros negros, dicho descubrimiento abrió una nueva ventana de observación del universo y fue ganador de un premio Nobel de Física en 2017.[3]

Recientes observaciones astronómicas han demostrado que el universo se está expandiendo de manera acelerada, para dar explicación a esta expansión los científicos han propuesto la existencia de la energía oscura. La naturaleza de esta energía sigue siendo hasta hoy en día un misterio que es estudiado activamente por la comunidad científica, se han propuesto varios modelos para la descripción de la energía oscura, uno de ellos es la quintaesencia la cual es descrita como un campo escalar acoplado a la gravedad la cual tiene un potencial que decrece mientras el campo aumenta. [4]

Otro tema de mucho interés recientemente es la materia oscura, esta materia se propuso originalmente para explicar discrepancias observacionales en la velocidad de rotación de las galaxias y la distribución de la materia en el universo, ya que, de acuerdo a las observaciones la masa visible de las galaxias es insuficiente para mantener las velocidades de rotación observadas, esta materia se postula como una forma de materia no bariónica es decir no está hecha de partículas subatómicas conocidas, esta forma de materia que no interactúa directamente con la luz ni con otras formas de radiación electromagnética, lo que la hace invisible y hasta hoy en día no se tiene una detección de forma directa de esta. Se han propuesto varios modelos para el estudio de esta materia, uno de ellos es modelarla como un fluido perfecto.

Para el estudio de escenarios más realistas se han propuesto varios modelos, los cuales consideran un agujero negro rodeado de materia o energía oscura, Kiselev propone la energía oscura como un campo escalar al cual se le llama quintaesencia, de igual forma Kiselev propone el modelo de un fluido de materia oscura.

El trabajo está estructurado de la siguiente forma, en el capítulo uno se estudian los horizontes de eventos del agujero negro de Bardeen así como el agujero negro de Bardeen rodeado de quintaesencia y del agujero negro de Bardeen rodeado de un fluido perfecto de materia oscura. Para dicho estudio se fija el horizonte de eventos en un valor fijo. En el capítulo dos se presenta un pequeño resumen de los modos cuasi-normales y su relación con las geodésicas circulares nulas inestables en el límite eikonal, por lo que se analiza los potenciales efectivos de las distintas soluciones. En el capítulo tres se presentan y analizan los resultados obtenidos para los modos cuasi-normales cuando se varía la carga magnética y se hace una comparativa entre los agujeros negros estudiados. Finalmente se presentan conclusiones generales del trabajo.

Capítulo 1

Agujeros negros.

1.1. Agujero negro de Bardeen.

El agujero negro de Bardeen es una solución de las ecuaciones de la relatividad general que describe un tipo de agujero negro que no tiene una singularidad en su centro. Fue propuesto por el físico estadounidense John Bardeen en 1968. Pero no se tenía una interpretación física razonable, años después con electrodinámica no lineal Ayón-Beato y García obtuvieron una posible interpretación física, la cual indica que el agujero negro de Bardeen puede interpretarse como un monopolo magnético con masa M y una carga magnética g . [5]

Al considerar un acoplamiento gravitacional y la electrodinámica no lineal, las ecuaciones de Einstein-Maxwell deben ser modificadas de la forma:

$$G_{\mu}^{\nu} = 2 \left(\frac{\partial L(F)}{\partial F} F_{\mu\lambda} F^{\nu\lambda} - \delta_{\mu}^{\nu} L \right) + 8\pi T_{\mu}^{\nu} \quad (1.1)$$

$$\nabla_{\mu} \left(\frac{\partial L(F)}{\partial F} F^{\nu\mu} \right) = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla_{\mu} (*F^{\nu\mu}) = 0 \quad (1.3)$$

Donde $F_{\nu\mu}$ es el tensor electromagnético dado por $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$, L es la lagrangiana y es una función arbitraria del invariante electromagnético $F \equiv \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, la acción de la gravedad acoplada a la electrodinámica no lineal esta dada por:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int dx^4 \sqrt{-g} [R - L(F)] \quad (1.4)$$

Donde R es el escalar de curvatura. En el límite lineal obtenemos que el Lagrangiano es directamente proporcional a F (Maxwell). Para un agujero negro de Bardeen la lagrangiana esta dada por: [6]

$$L(F) = \frac{6}{sg^2} \left(\frac{(g^2 F/2)^{\frac{5}{4}}}{(1 + \sqrt{g^2 F/2})^{\frac{5}{2}}} \right) \quad (1.5)$$

Donde $s = |g|/2M$, siendo g la carga magnética y M la masa del agujero negro. Teniendo un elemento de línea de un espacio-tiempo estático con simetría esférica de la forma:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (1.6)$$

Donde la función métrica $f(r)$ toma la forma:

$$f_B(r) = 1 - \frac{2Mr^2}{(r^2 + g^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.7)$$

Para poder obtener los horizontes de eventos es necesario obtener las raíces de la ecuación (1.8)

$$f(r) = 0 \quad (1.8)$$

Si las soluciones son reales y positivas se tiene un agujero negro.

Los horizontes de eventos así como las geodésicas de un agujero negro de Bardeen han sido estudiadas a detalle en [7], donde se ha demostrado que el agujero negro de Bardeen tiene dos horizontes de eventos los cuales dependen de la masa y carga magnética.

Debido a que el estudio de los horizontes de eventos se complica al considerar la interacción de la quintaesencia así como la interacción de un fluido perfecto de materia oscura, en este trabajo se fija el horizonte de eventos exterior en un valor fijo ($r_+ = 1$) y se resuelve la ecuación (1.8)

$$f_B(r_+ = 1) = 1 - \frac{2M}{(1 + g^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (1.9)$$

Por lo cual, al fijar el horizonte de eventos exterior en $r_+ = 1$ es posible obtener una relación entre masa y carga magnética:

$$M(g) = \frac{(1 + g^2)^{\frac{3}{2}}}{2} \quad (1.10)$$

Ahora encontraremos los máximos de la función, por lo que primero calculamos la derivada respecto de r la cual toma la forma:

$$f'_B(r) = \frac{2M(r^3 - 2rg^2)}{(r^2 + g^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (1.11)$$

Para asegurar que la existencia de un agujero negro se debe satisfacer que $f_B(r) \rightarrow 1$ cuando $r \rightarrow \infty$ es decir un espacio-tiempo plano, por lo cual es necesario que la función $f_B(r)$ sea decreciente, tenga un punto de inflexión para después ser creciente, matemáticamente esto es $f'(r_+) > 0$, de igual forma esta condición va relacionada con una temperatura de Hawking

positiva [8], al sustituir el valor de $r_+ = 1$ y (1.10) en (1.11) obtenemos:

$$f'(r_+ = 1) = \frac{2 \frac{(1+g^2)^{\frac{3}{2}}}{2} (1^3 - 2g^2)}{(1^2 + g^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1 - 2g^2}{1 + g^2} > 0 \quad (1.12)$$

Al resolver esta desigualdad obtenemos un rango para g^2 el cual es; $g^2 < \frac{1}{2}$. Para observar el comportamiento de $f_B(r)$, se sustituye (1.10) en (1.7) con lo cual obtenemos un agujero negro de Bardeen que solo depende del radio y la carga magnética, al considerar valores dentro del rango obtenido se tiene que el horizonte exterior de eventos se encuentra en uno, lo cual se muestra en la figura (1.1)

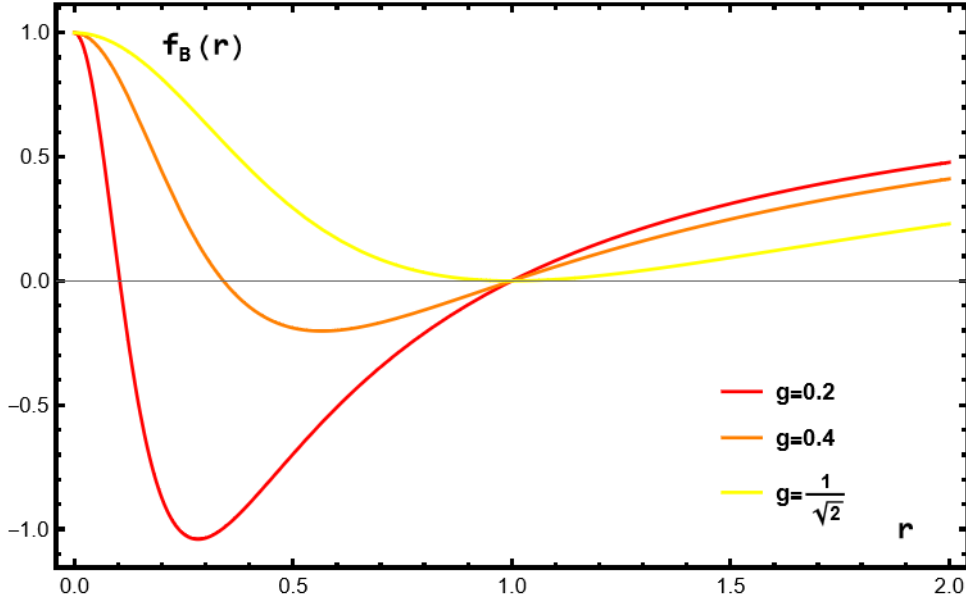


Figura 1.1: Comportamiento de $f_B(r)$, la cual solo depende de g y r , se tomaron tres valores de g uno de ellos siendo el caso extremo, en los tres casos tenemos el horizonte de eventos exterior en uno.

En la figura (1.1) podemos observar que al incrementar el valor de g , el horizonte interno se acerca al horizonte externo y si $g = \sqrt{\frac{1}{2}}$ solo tenemos un horizonte de eventos, este último caso se suele llamar “ caso extremo”, de igual manera es posible observar que en los tres casos se tiene que el horizonte externo se encuentra en uno, también es posible observar que al reducir el valor de la carga magnética los mínimos de la función aumentan.

Para poder analizar si este comportamiento varía según el valor en el cual fijemos r_+ , se realizó el mismo proceso pero en este caso se fijó el horizonte en $r_+ = 2$, con esto se obtuvo una relación de masa y carga de la forma:

$$M(g) = \frac{(4 + g^2)^{\frac{3}{2}}}{8} \quad (1.13)$$

Ahora al sustituir (1.13) en (1.11) con $r_+ = 2$ y recordando que se debe satisfacer la condición

$f'_B(r_+) > 0$ tenemos:

$$f'(r_+ = 2) = \frac{2 \frac{(4+g^2)^{\frac{3}{2}}}{8} (2^3 - 4g^2)}{(2^2 + g^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{8 - 4g^2}{4(4 + g^2)} > 0 \quad (1.14)$$

Al resolver esta desigualdad se obtiene un nuevo rango para g^2 el cual es; $g^2 < 2$, se grafica $f_B(r)$ con la nueva relación de masa que se obtuvo y los valores de g dentro de este intervalo.

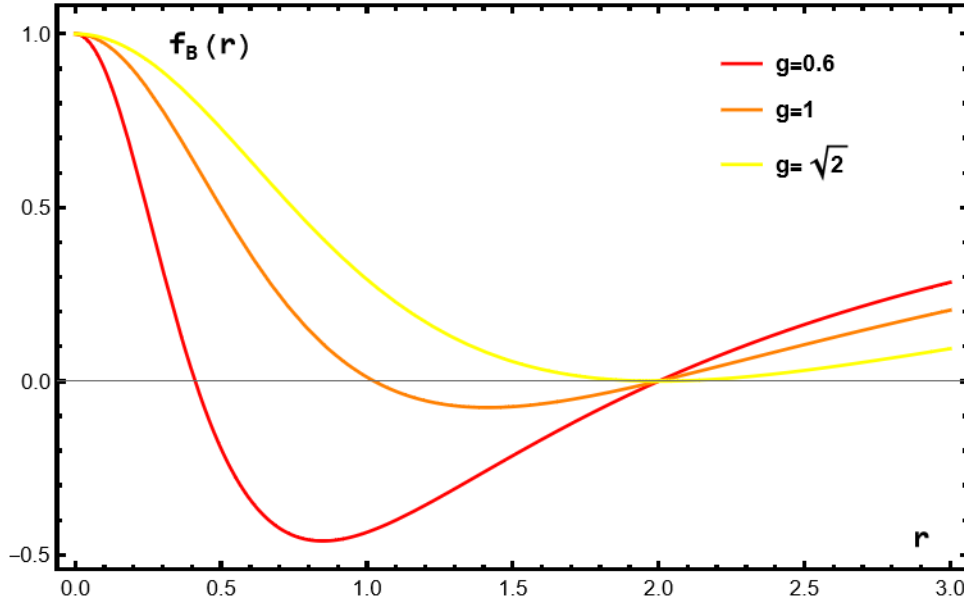


Figura 1.2: Comportamiento de $f_B(r)$ en la cual se substituyó la nueva relación de masa y carga magnética obtenida, al tomar valores de g dentro del rango, en los tres casos obtenemos un horizonte exterior en dos.

En la figura (1.2) podremos observar que nuevamente si g aumenta el horizonte interior se acerca al horizonte exterior y al tener $g = \sqrt{2}$ tenemos el caso extremo en donde solo se obtiene un horizonte de eventos y también es posible observar nuevamente que a disminuir el valor de la carga los mínimos de la función crecen.

1.2. Agujero negro de Bardeen con quintaesencia .

Observaciones cosmológicas recientes revelan que nuestro universo esta constituido principalmente de un 4.9 % de materia bariónica, 26.8 % de materia oscura y 68.3 % de energía oscura, por lo anterior, en los últimos años el estudio de agujeros negros rodeados de materia oscura, así como de energía oscura ha sido de gran interés para investigadores. Gracias a estas observaciones es posible decir que el universo se está expandiendo de forma acelerada y que la hipotética energía oscura es la principal causante de esto. [9]

La expansión de nuestro universo implica una contribución de materia con presión negativa, el origen de dicha presión tiene distintas posibilidades, una es la constante cosmológica Λ , otra que tiene que ver con modelos de campos escalares es la llamada quintaesencia, esta es descrita como un campo escalar acoplado a la gravedad el cual tiene un potencial que decrece mientras que el campo aumenta, tiene una ecuación de estado dada por la relación entre la presión p_q y la densidad de energía ρ_q , de la forma $p_q = \rho_q \omega_q$, donde ω_q es el parámetro de estado y se encuentra en un rango de $-1 < \omega_q < -\frac{1}{3}$. En el caso que $\omega_q = -1$ la quintaesencia cubre el término de la constante cosmológica.

Kiselev [10] obtuvo una nueva solución a las ecuaciones de Einstein para un agujero de simetría esférica, estático y rodeado de quintaesencia en donde, considera que el tensor de energía-momento para la quintaesencia debe satisfacer:

$$T_{\phi}^{\phi} = T_{\theta}^{\theta} = -\frac{1}{2}(3\omega + 1)T_r^r = \frac{1}{2}(3\omega + 1)T_t^t \quad (1.15)$$

Para satisfacer la condición de energía dominante es necesario que $\rho = T_{tt} \geq 0$, como ya se menciono anteriormente ρ es la densidad de energía y la ecuación de estado de la quintaesencia es $p = \rho\omega$. La densidad de energía esta dada por la siguiente expresión:

$$\rho = -\frac{3c\omega}{2r^{3(1+\omega)}} \quad (1.16)$$

Debido a la aceleración que esta sufriendo nuestro universo p_q debe ser negativa, pero la densidad de energía ρ_q es positiva, esto nos lleva a que $c > 0$ para ω_q negativas.

Considerando una métrica del estilo (1.6), obtenemos una función para un agujero negro de Bardeen rodeado de quintaesencia :

$$f_{\omega}(r) = 1 - \frac{2Mr^2}{(r^2 + g^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{c}{r^{3w_q+1}} \quad (1.17)$$

Donde M es la masa del agujero negro, g la carga magnética, w_q es el parámetro de estado de la quintaesencia y c es la constante positiva de normalización. Se ha observado que al momento de agregar el término de quintaesencia aparece un nuevo horizonte de eventos denominado “horizonte cosmológico”, por lo tanto se sabe que el agujero negro de Bardeen cuenta con dos horizontes de eventos, al considerar la presencia de quintaesencia este agujero negro tendrá tres

horizontes de eventos.[11][12]

Para este trabajo se toma $\omega_q = -\frac{2}{3}$, se considera dicho valor debido a que es sencillo de trabajar matemáticamente y también debido a que es un valor el cual se encuentra en medio del intervalo de ω_q , por lo tanto la ecuación (1.17) se reduce a:

$$f_\omega(r) = 1 - \frac{2Mr^2}{(r^2 + g^2)^{\frac{3}{2}}} - cr \quad (1.18)$$

Para realizar el análisis de los horizontes de eventos, se realiza un procedimiento análogo al mostrado en la sección anterior, fijando el horizonte exterior en $r_+ = 1$ y resolviendo la ecuación (1.8) se obtuvo una relación entre la masa, la carga magnética y la constante c

$$M(g, c) = -\frac{(c-1)(1+g^2)^{\frac{3}{2}}}{2} \quad (1.19)$$

Nuevamente se calcula la derivada y se evalúa en el radio exterior $r_+ = 1$ recordando que se debe satisfacer la condición para la temperatura de Hawking obtenemos:

$$f'_\omega(r) = \frac{2Mr(r^2 - 2g^2)}{(r^2 + g^2)^{\frac{5}{2}}} - c > 0 \quad (1.20)$$

Al sustituir la relación que se obtuvo para masa, carga y la constante de normalización (1.19) así como en $r_+ = 1$ la derivada se reduce de la siguiente manera

$$-c - \frac{(c-1)(1-2g^2)}{1+g^2} > 0 \quad (1.21)$$

Al resolver la desigualdad obtenemos que $c < \frac{1-2g^2}{2-g^2}$

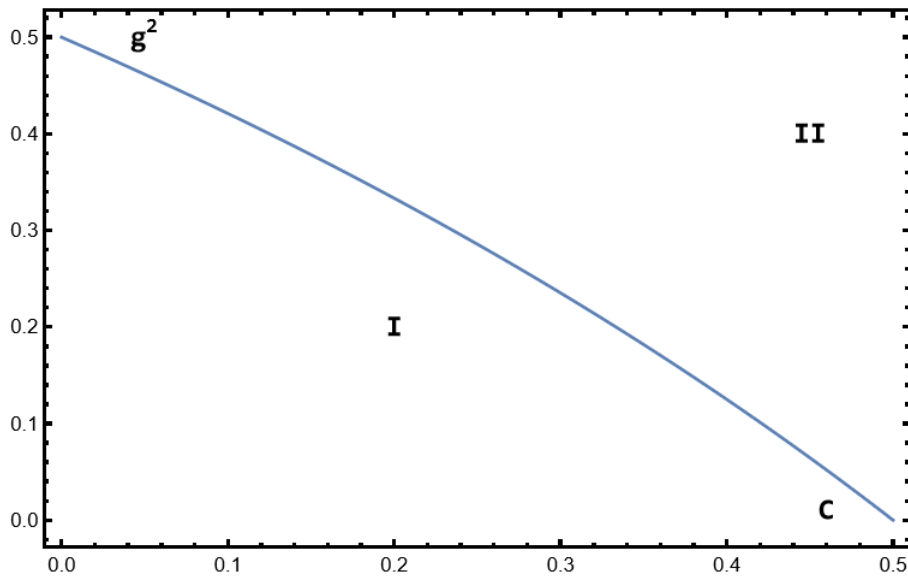


Figura 1.3: Gráfica g^2 vs c , se obtiene un comportamiento casi lineal, al tomar valores en la región I obtenemos el horizonte exterior en uno.

En la figura (1.3), la región I es aquella en la cual se tienen los parámetros permitidos por la desigualdad, de cual podemos observar que mientras que c aumenta, g disminuye, es importante mencionar que se están tomando $c > 0$ ya que nuestra ω_q es negativa.

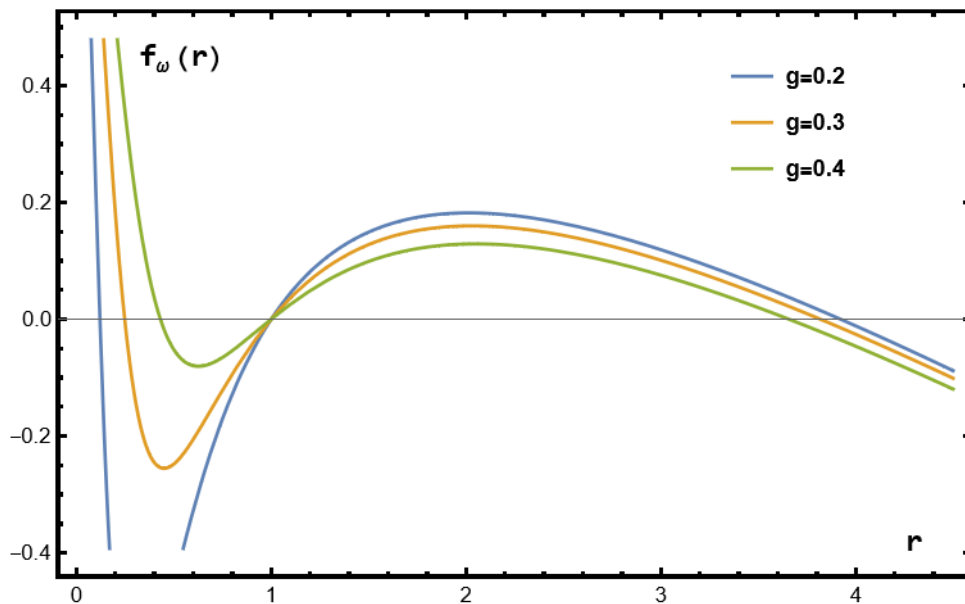


Figura 1.4: Comportamiento de $f_\omega(r)$ en la cual se sustituyó la relación de masa con g y c , al tomar valores para c y g en la región I obtenemos el horizonte exterior en uno y aparece el horizonte cosmologico.

Al analizar la figura (1.4) es posible notar que, al considerar la interacción de la quintaesencia con el agujero negro de Bardeen aparece el horizonte cosmologico el cual se ve afectado según el valor de g , al aumentar el valor de la carga este horizonte se encuentra más cercano al horizonte exterior aunque no es mucho el cambio que sufre, de igual manera al aumentar g el horizonte interior se acerca al horizonte exterior.

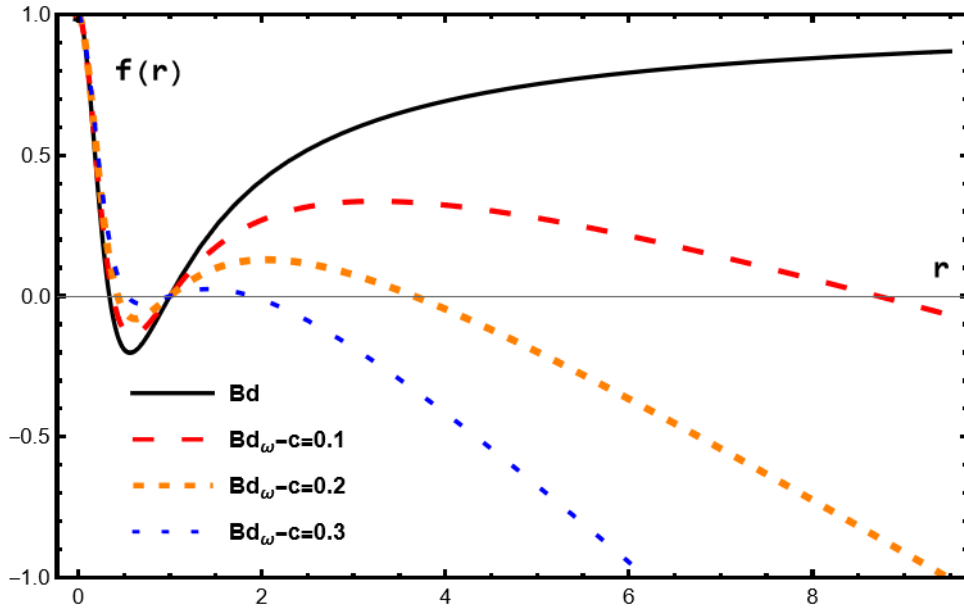


Figura 1.5: Comportamiento de agujero negro de Bardeen clásico (Bd) y rodeado de quintaesencia (Bd_ω), en ambos casos se sustituye las relaciones de masa correspondientes, con quintaesencia se fijó $g = 0.4$ mientras que c varía, en ambos casos se tiene el horizonte exterior en uno.

En la figura (1.5) es posible comparar el comportamiento de un agujero negro de Bardeen (Bd) sin presencia de quintaesencia y el agujero negro de Bardeen con quintaesencia (Bd_ω) en ambos casos se fijo una carga magnética $g = 0,4$, al analizar podemos observar la presencia del horizonte cosmológico cuando se considera la interacción con quintaesencia y este horizonte se va acercando al horizonte externo mientras c crece, de igual forma al aumentar c el horizonte interno se acerca al externo, al comparar las figuras (1.4) y (1.5) se observa que el horizonte cosmológico se ve más afectado por el cambio de c que el cambio de g .

Una vez obtenido lo anterior se realiza un procedimiento similar pero ahora se tomó $r_+ = 2$, con lo cual se obtuvo una relación entre masa, carga magnética y la constante c de la forma:

$$M(g, c) = -\frac{(2c - 1)(4 + g^2)^{\frac{3}{2}}}{8} \quad (1.22)$$

Lo cual al sustituir en (1.20) y considerando $r_+ = 2$ obtenemos:

$$-c - \frac{(2c - 1)(4 - 2g^2)}{2(4 + g^2)} > 0 \quad (1.23)$$

Al resolver la ecuación anterior obtenemos que $c < \frac{g^2 - 2}{g^2 - 8}$

Al comprar las figuras (1.3) y (1.6) podemos observar que tienen un comportamiento similar, pero al fijar el horizonte externo en $r_+ = 2$ los valores que puede tomar c se reducen mientras que los valores que puede tomar g^2 aumentan, en ambas figuras al tomar valores en la región I obtenemos el horizonte exterior en el valor fijado en cada caso.

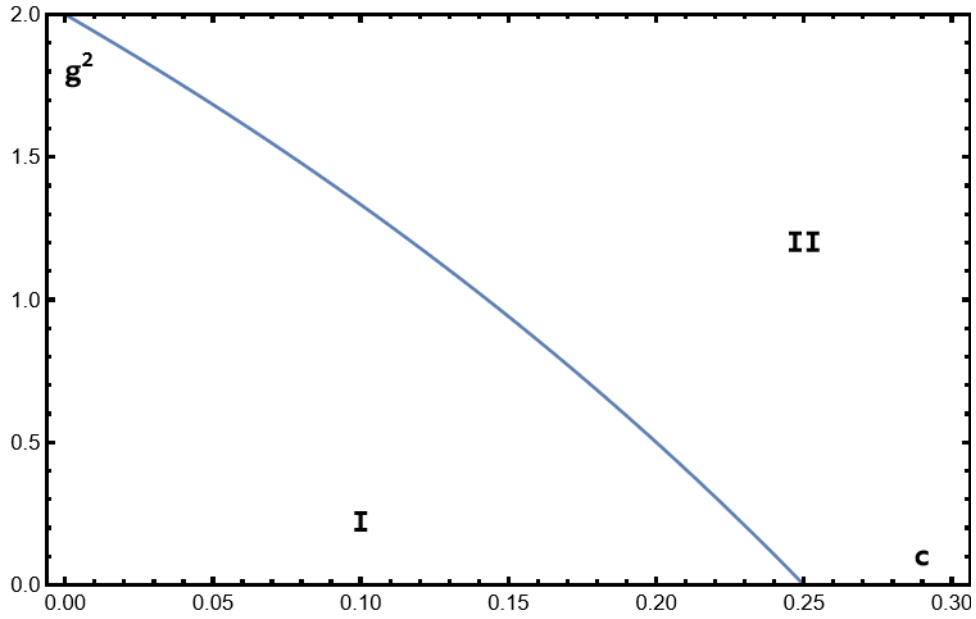


Figura 1.6: Gráfica g^2 vs c con $r_+ = 2$, se observa que los valores a tomar para c son menores mientras que los valores de g^2 aumentan, al tomar valores en la región I obtenemos un agujero negro con horizonte exterior en dos.

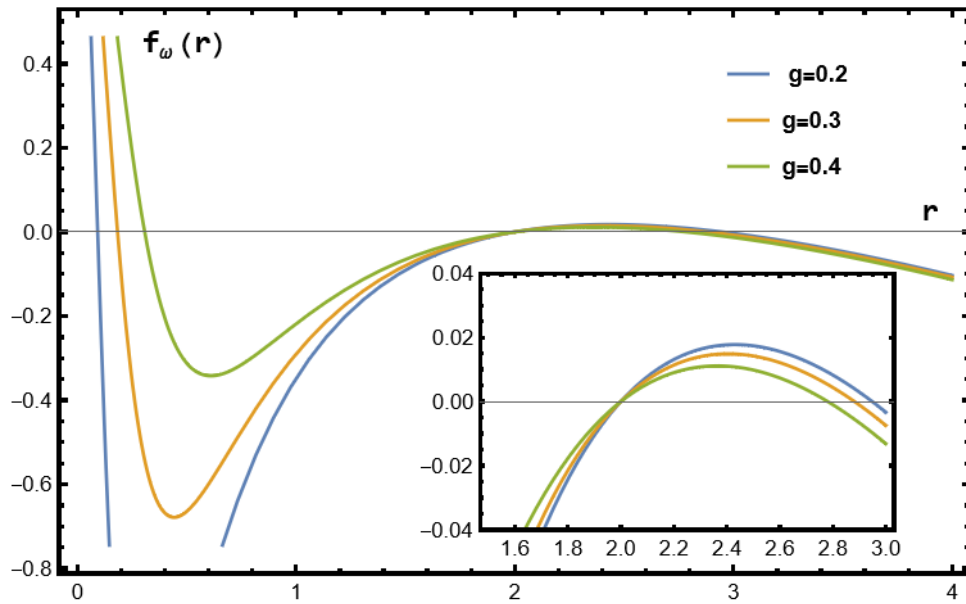


Figura 1.7: Comportamiento de f_ω en la cual se substituyó la nueva relación de masa, variando g con $c = 0,2$, al tomar valores de la región I obtenemos el horizonte exterior en dos, en este caso los máximos se ven reducidos.

En la figura (1.7) podemos observar que el horizonte cosmologico se encuentra más cercano al horizonte exterior y que este nuevamente se va acercando mientras g aumenta de igual forma al aumentar g el horizonte interno se acerca al externo, se observa que la amplitud es mucho menor en comparación con la obtenida en la figura (1.4).

En la figura (1.8) se graficaron los agujeros negros de Bd y Bd_ω este ultimo variando c , podemos

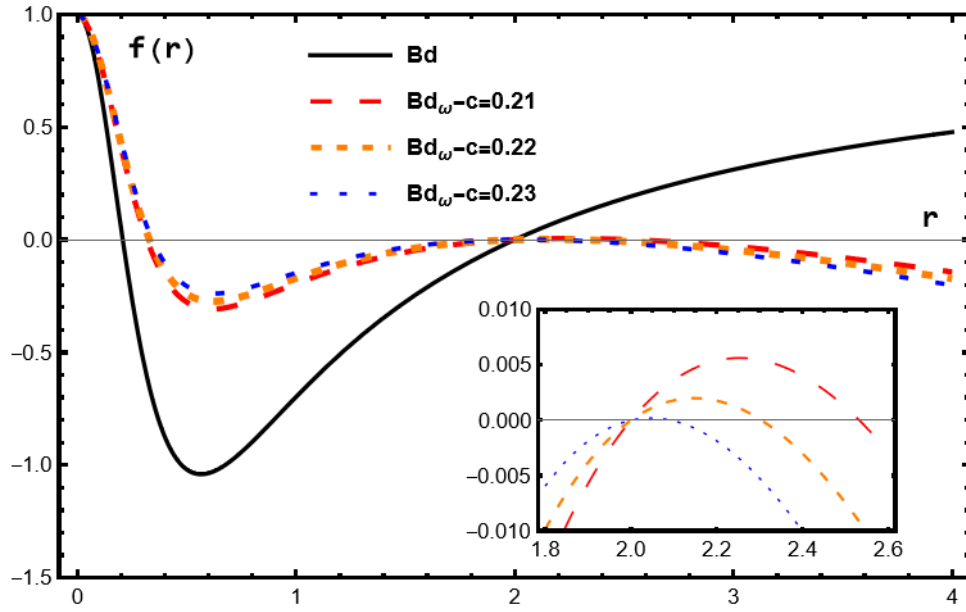


Figura 1.8: Comportamiento de agujero negro de Bardeen clásico (Bd) y rodeado de quintaesencia (Bd_ω), en ambos casos se fijó el horizonte exterior en dos, se sustituye las relaciones de masa correspondientes, en ambos casos se fijó $g = 0.4$ en el agujero Bd_ω se varía c .

observar que los horizontes cosmológicos están muy cercanos al horizonte exterior pero los cambios son muy pequeños debido a que los valores tomados de c varían muy poco entre ellos, de igual manera se observa que al aumentar c el horizonte interior se acerca al horizonte exterior.

1.3. Agujero negro de Bardeen rodeado de un fluido perfecto de materia oscura.

A principios de los años 1930 Fritz Zwicky observó una anomalía mientras revisaba las observaciones del telescopio Hubble, ya que, según las medidas de la cantidad visible de materia, las galaxias se movían demasiado rápido para mantenerse ligadas, propuso un nuevo tipo de materia no observable la cual denominó como “materia oscura” [13]. Hoy en día se sigue sin tener una detección experimental directa de esta pero, estudios y observaciones recientes muestran que la contribución de materia oscura a la masa de una galaxia puede llegar a ser de hasta el 90%, por lo tanto se cree que las galaxias gigantes tanto elípticas como espirales las cuales tienen agujeros negros supermasivos en sus centros se encuentran rodeados de halos de materia oscura. Se han propuesto varios modelos como la materia oscura fría, campo escalar de materia oscura y también materia oscura caliente.[14]

Un modelo que ha sido de mucho interés en los últimos años, es el modelo de un fluido perfecto de materia oscura, ya que este modelo da una explicación del por qué la rotación de las galaxias espirales tiende a ser plana[15]. Dicho modelo fue propuesto por Kiselev y es usado para obtener una solución de agujero negro estático y esférico, con un término logarítmico de la forma; $\alpha \log(\frac{r}{r_q})$. Más tarde Li y Yang propusieron otra solución de agujero negro que contiene un término; $\frac{r_q}{r} \log(\frac{r}{r_q})$.

De acuerdo a lo propuesto por Kiselev, Li y Yang, el tensor de energía-momento de un fluido perfecto de materia oscura en la base ortogonal viene dado por $T_{\nu}^{\mu} = diag(-\epsilon, p_r, p_{\theta}, p_{\phi})$, donde la densidad, la presión radial y tangencial tienen la forma:

$$\epsilon = -p_r = -\frac{\alpha}{8\pi r^3} \quad (1.24)$$

$$p_{\theta} = p_{\phi} = -\frac{\alpha}{16\pi r^3} \quad (1.25)$$

Con lo anterior Zhang[16] obtuvo una solución para el agujero negro de Bardeen el cual tiene simetría esférica, es estático y se encuentra rodeado de un fluido perfecto de materia oscura la cual es:

$$f_{\alpha}(r) = 1 - \frac{2Mr^2}{(r^2 + g^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\alpha}{r} \ln\left(\frac{r}{|\alpha|}\right) \quad (1.26)$$

Donde M es la masa del agujero negro, g la carga magnética y α es el campo de materia oscura, para poder satisfacer la condición de energía débil debemos tener $\rho \geq 0$ por lo que $\alpha < 0$. [17] Para realizar el análisis de sus horizontes de eventos se realizó el procedimiento de los agujeros anteriores, al resolver la ecuación (1.8) con un $r_+ = 1$ obtenemos una relación entre la masa, la carga magnética y α de la forma:

$$M(g, \alpha) = \frac{(1 + g^2)^{\frac{3}{2}}}{2} \left(1 + \alpha \ln\left(\frac{1}{|\alpha|}\right) \right) \quad (1.27)$$

Debido a que debemos satisfacer la condición $f'(r_+) > 0$ es necesario calcular la derivada de (1.26) la cual es:

$$f'_\alpha = \frac{6Mr^3}{(r^2 + g)^{5/2}} - \frac{4Mr}{(r^2 + g)^{3/2}} + \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\alpha \ln\left(\frac{r}{|\alpha|}\right)}{r^2} \quad (1.28)$$

Al sustituir la relación de masa así como $r_+ = 1$ en la ecuación anterior obtenemos la siguiente desigualdad

$$\alpha - \alpha \ln\left(\frac{1}{|\alpha|}\right) + \frac{(1 - 2g^2)\left(1 + \alpha \ln\left(\frac{1}{|\alpha|}\right)\right)}{1 + g^2} > 0 \quad (1.29)$$

Al resolver dicha desigualdad obtenemos que $g^2 < \frac{1+\alpha}{2-\alpha+3\alpha \ln\left(\frac{1}{|\alpha|}\right)}$.

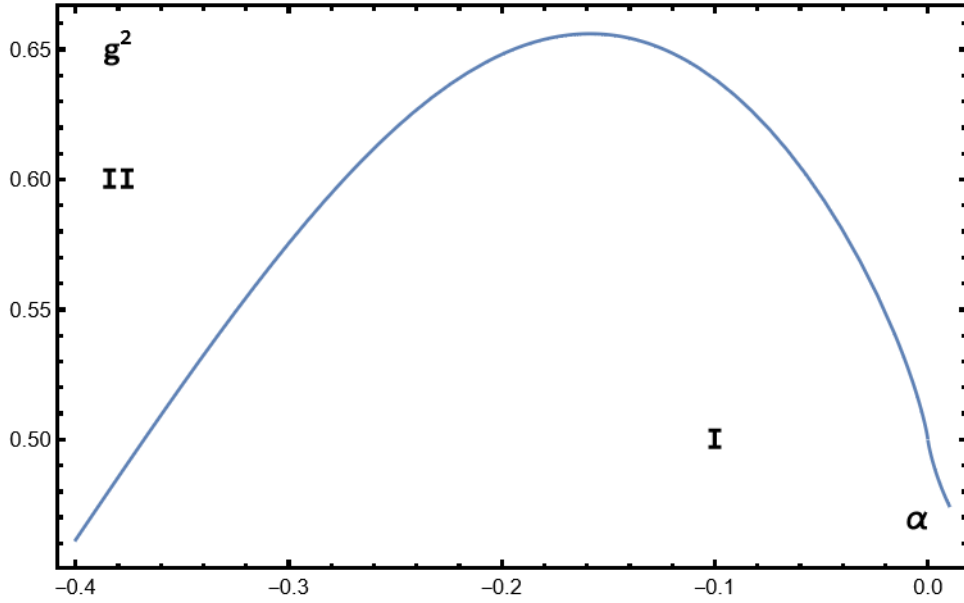


Figura 1.9: Gráfica g^2 vs α , se muestran $\alpha < 0$ debido a la condición de energía débil, al tomar valores de la región I tenemos un agujero negro con horizonte exterior en uno.

Debido a que debemos satisfacer la condición de energía débil, en la figura (1.9) solo podemos tomar valores que se encuentren en la región I con $\alpha < 0$. Al sustituir (1.27) en (1.28) obtenemos un agujero negro Bd_α el cual ya no depende de la masa solo depende de r , g y α .

Para observar el comportamiento de $f_\alpha(r)$ se toman valores de la región I para α y g .

En la figura (1.10) se tiene el comportamiento de $f_\alpha(r)$ con distintas g , podemos observar que al aumentar g el horizonte interior se acerca al horizonte exterior, se puede observar que al disminuir g el mínimo de la función es mayor, al considerar un fluido perfecto de materia oscura no se obtiene un horizonte de eventos extra a diferencia de cuando se considera la quintaesencia.

En la figura (1.11) se graficó el comportamiento del agujero negro Bd y Bd_α en el cual en ambos casos se presentan dos horizontes de eventos, también observamos que al ir aumentando α el horizonte interior se acerca al horizonte exterior, a menor valor α los mínimos de la función son mayores.

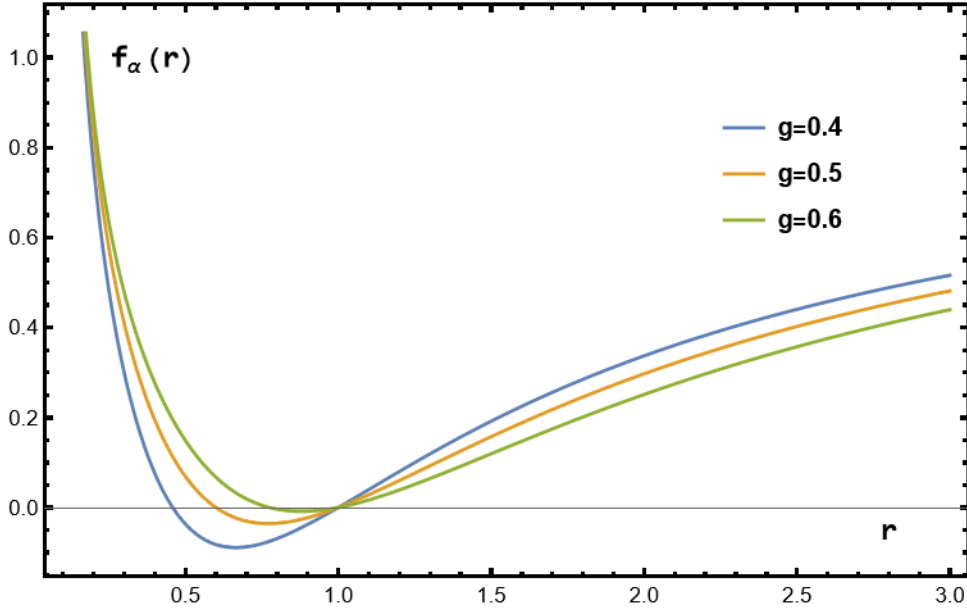


Figura 1.10: Comportamiento $f_\alpha(r)$ en la cual se sustituyó la relación de masa, con una $\alpha=-0.2$ y variando g , en los tres casos se tiene el horizonte exterior en uno y no se obtiene un horizonte cosmológico.

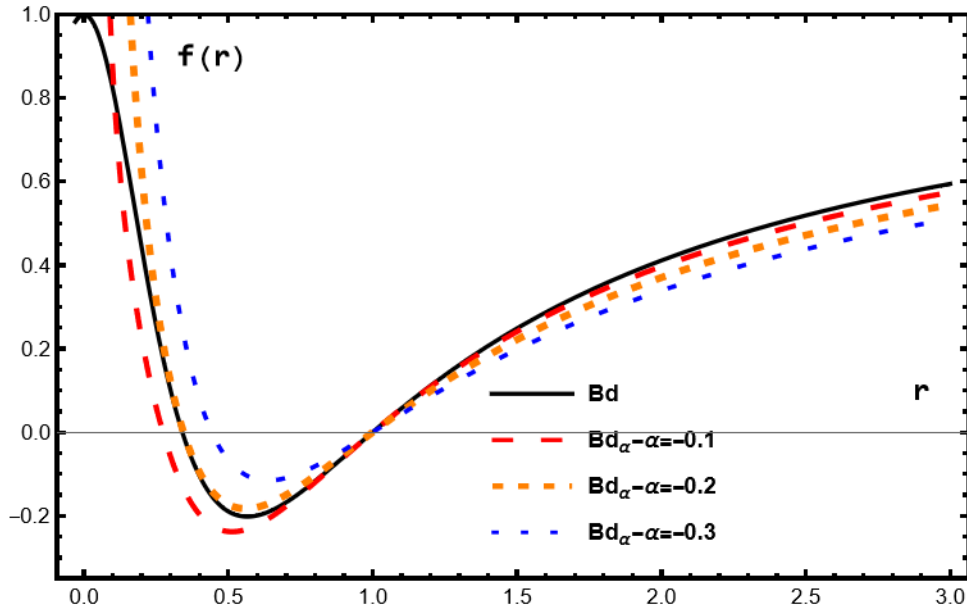


Figura 1.11: Comportamiento de un agujero negro de Bardeen (Bd) y Bardeen rodeado de un fluido perfecto de materia oscura (Bd_α), en ambos se tomó $g = 0.4$ con el horizonte exterior en uno, ambos agujeros no dependen de la masa ya que se sustituyó las relaciones de masa correspondientes.

De manera similar a los casos anteriores se realizó el estudio del agujero Bd_α cuando se fija el radio exterior $r_+ = 2$ con lo cual se obtuvo ahora una relación de masa, carga magnética y α de la forma:

$$M(g, \alpha) = \frac{(4 + g^2)^{\frac{3}{2}}}{16} \left(2 + \alpha \ln \left(\frac{2}{|\alpha|} \right) \right) \quad (1.30)$$

Al sustituir (1.30) en (1.28) así como considerando $r_+ = 2$ obtenemos

$$\frac{1}{4} \left(\alpha - \alpha \ln \left(\frac{2}{|\alpha|} \right) + \frac{(32 - 16g^2) \left(2 + \alpha \ln \left(\frac{2}{|\alpha|} \right) \right)}{8(4 + g^2)} \right) > 0 \quad (1.31)$$

Al resolver la desigualdad anterior obtenemos que $g^2 < \frac{4(2+\alpha)}{4-\alpha+3\alpha \ln(\frac{2}{|\alpha|})}$

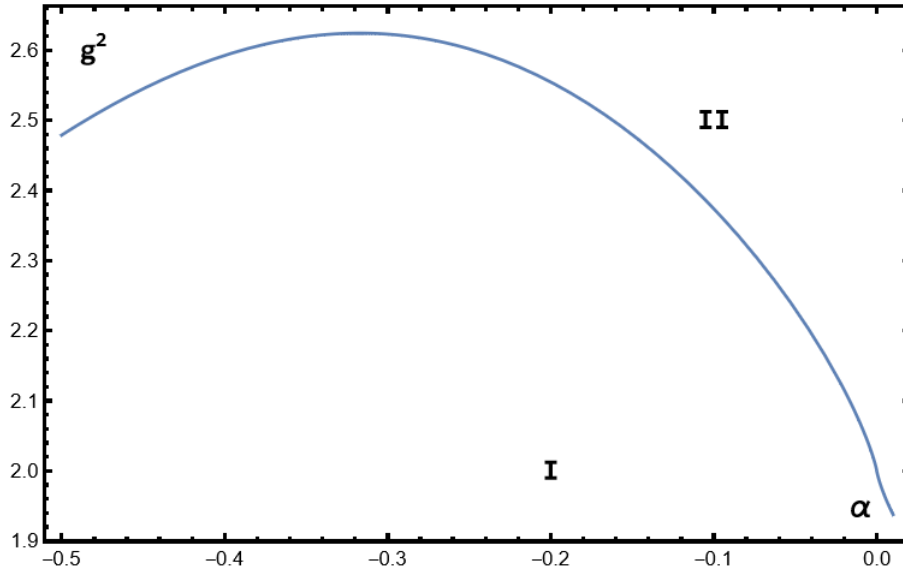


Figura 1.12: Gráfica g^2 vs α , los valores con $\alpha < 0$ de la región I cumplen la desigualdad por lo que en esa región se tiene un agujero negro con horizonte exterior en dos

Al comparar las figuras (1.9) y (1.12) podemos observar que en esta última g tiene una cantidad mayor de valores en la región I, es decir si fijamos el horizonte exterior en dos obtenemos una mayor cantidad de valores posibles entre g y α lo cual no sucede cuando se estudió el agujero Bd_ω ya que en ese caso al fijar el horizonte en dos la cantidad de valores posibles entre g y c se veía reducida.

En la figura (1.13) se grafica el comportamiento de $f_\alpha(r)$ cuando se fija el radio exterior en dos, donde se observa que al aumentar g nuevamente el horizonte interior se acerca al horizonte exterior y que al disminuir g los mínimos de la función aumentan, al comparar el mínimo obtenido cuando $g = 0.5$ en las gráficas (1.10) y (1.13) podemos observar que el mínimo es mayor cuando se tiene un horizonte externo fijo en dos.

En la figura (1.14) se graficó el comportamiento de Bd y Bd_α con $g = 0.4$, podemos observar que al aumentar α nuevamente el horizonte interior se acerca al horizonte exterior aunque en este caso dicha aproximación es menor comparada con la obtenida en (1.11), de igual forma es posible observar que los mínimos de Bd_α son mayores cuando el radio exterior es fijado en dos.

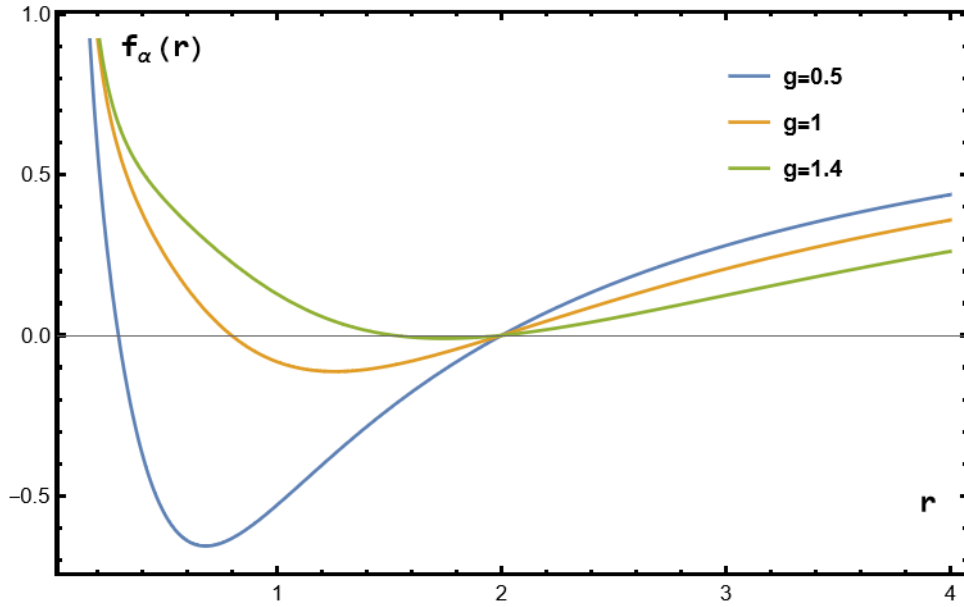


Figura 1.13: Comportamiento $f_\alpha(r)$ en la cual se substituyó la nueva relación de masa, con una $\alpha = -0.2$ y variando g , en los tres casos se tiene el horizonte exterior en dos.

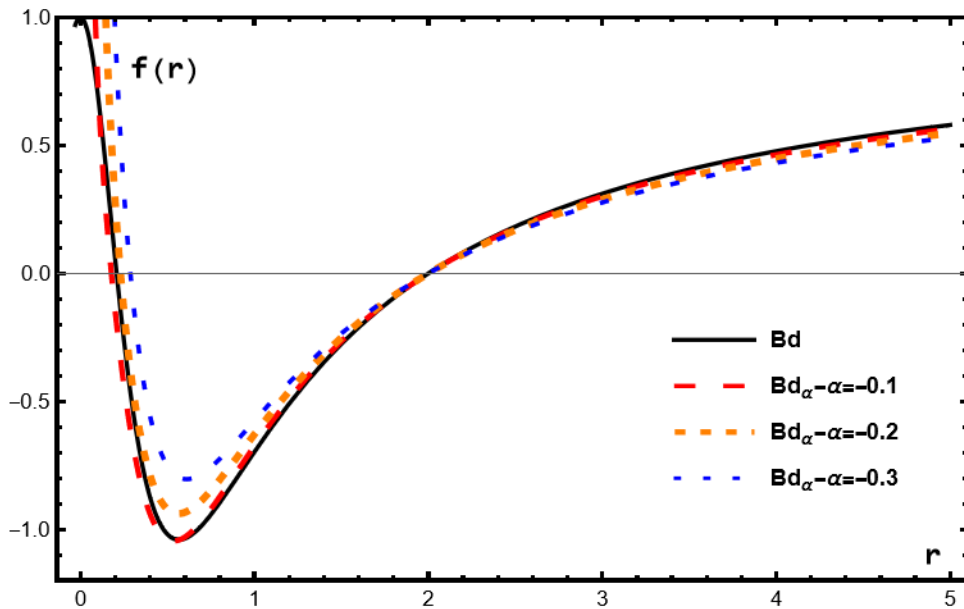


Figura 1.14: Comportamiento de un agujero negro de Bardeen (Bd) y Bardeen rodeado de un fluido perfecto de materia oscura (Bd_α), en ambos se tomó $g = 0.4$ en el caso de Bd_α se varió α , en todos los casos se tiene un horizonte externo en dos y los agujeros negros no dependen de la masa ya que esta se substituyó por las relaciones obtenidas.

Capítulo 2

Ondas gravitacionales.

Una onda gravitacional es una perturbación en el espacio-tiempo que se propaga a la velocidad de la luz. Estas ondas son generadas por eventos cósmicos extremadamente energéticos, como la colisión de agujeros negros. La teoría de la relatividad general de Einstein predice la existencia de estas ondas, y fue hasta 2015 que se pudo confirmar su existencia experimentalmente.

La detección de las ondas gravitacionales proporcionó una evidencia sólida de que la teoría de la relatividad general de Einstein es correcta en condiciones extremas, también nos brindan información detallada sobre objetos astrofísicos extremos, como agujeros negros y estrellas de neutrones. Esto nos permite investigar sus propiedades, su formación y su evolución.

2.1. Modos cuasi-normales

Los modos cuasi-normales son soluciones a las ecuaciones diferenciales que describen las oscilaciones o perturbaciones alrededor de objetos astrofísicos extremadamente compactos, como agujeros negros y estrellas de neutrones. Estos modos representan las oscilaciones de estos objetos después de que han sido perturbados por eventos como colisiones, caídas de materia o fusiones.

Las perturbaciones escalares alrededor de un agujero negro de Bardeen fueron estudiadas por [18], para estudiar dichas perturbaciones es necesaria la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar sin masa Φ en un espacio tiempo curvo [17]

$$\square^2 \Phi = 0 \tag{2.1}$$

O bien

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) = 0 \tag{2.2}$$

Para un campo escalar Φ tenemos

$$\Phi = e^{-i\omega t} Y_l^m(\theta, \phi) \frac{\xi(r)}{r} \quad (2.3)$$

Donde $Y_l^m(\theta, \phi)$ son los armónicos esféricos donde l y m son el grado y orden respectivamente, la ecuación (2.2) se puede simplificar a una ecuación de tipo Schrödinger de la forma:

$$\frac{d^2 \xi(r)}{dr_*^2} + (\omega^2 - V(r)) \xi(r) = 0 \quad (2.4)$$

Donde

$$V(r) = \frac{l(l+1)f(r)}{r^2} + \frac{f(r)f'(r)}{r} \quad (2.5)$$

Con $\omega = \omega_r + \omega_i$, es importante denotar el uso de la coordenada “tortuga” (r_*) la cual viene dada por

$$dr_* = \frac{dr}{f(r)} \quad (2.6)$$

Dichas coordenada es utilizada para eliminar la singularidad de coordenadas en el horizonte y para expresar el exterior del agujero negro de una forma más conveniente. La ecuación (2.5) es el potencial efectivo para un campo escalar sin masa, el cual en el límite eikonal ($l \rightarrow \infty$) obtenemos:

$$V_{scalar} \approx \frac{f(r)l}{r^2} \quad (2.7)$$

El potencial anterior es similar al potencial efectivo de geodésicas nulas el cual se mostrará en la siguiente sección.

Existen diferentes métodos numéricos para el cálculo de los modos cuasi-normales tales como; aproximación WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) a tercer y sexto orden, método fraccionario. Los modos cuasi-normales para este trabajo fueron estudiados en el límite eikonal, en dicho límite se tiene una relación entre geodésicas nulas inestables y el exponente de Lyapunov.

2.1.1. Potencial efectivo y geodésicas nulas.

Para el estudio de los modos cuasi-normales Cardoso [19] demostró un resultado muy importante al calcular los modos cuasi-normales en el límite eikonal por medio de las geodésicas nulas inestables de un agujero negro. Por lo cual es necesario analizar las geodésicas del agujero negro de Bardeen, estas fueron estudiadas a detalle por Zhou [20].

En matemáticas y geometría, una geodésica es la trayectoria o línea más corta entre dos puntos en una superficie curva. En la teoría de la gravitación de Einstein, una geodésica es la trayectoria seguida por una partícula en presencia de un campo gravitatorio. En este caso, la gravedad se interpreta como la curvatura del espacio-tiempo, y las geodésicas describen los caminos que

siguen las partículas en respuesta a esta curvatura.

$$\tilde{L} = -\frac{1}{2}g_{\nu\mu}\dot{x}^\nu\dot{x}^\mu \quad (2.8)$$

La expresión de la geodésica viene dada por (2.8). Recordando que el elemento de línea del espacio-tiempo estático con simetría esférica es:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (2.9)$$

Para obtener información de la geodésica se considera un lagrangiano de la siguiente forma:

$$\tilde{L} = -f(r)\dot{t}^2 + f(r)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = \delta \quad (2.10)$$

En este trabajo se realizó el estudio de geodésicas nulas por lo cual $\delta = 0$, al resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos:

$$\dot{\phi} = \frac{l}{r^2} \quad (2.11)$$

$$\dot{t} = \frac{E}{f(r)} \quad (2.12)$$

Al sustituir (2.11), (2.12) en (2.10) con $\delta = 0$ obtenemos:

$$-f(r)\frac{E^2}{f(r)^2} + \frac{\dot{r}^2}{f(r)} + r^2\frac{l^2}{r^2} = 0 \quad (2.13)$$

Al simplificar obtenemos:

$$\dot{r}^2 + V_{ef} = E^2 \quad (2.14)$$

Con:

$$V_{ef} = \left(\frac{l^2}{r^2}\right) f(r) \quad (2.15)$$

Donde l es el momento angular de los fotones, E la energía con la que se mueven los fotones. Tenemos que si $r = r_c$ donde r_c es el radio de la órbita circular, entonces $V'_{ef}(r_c) = 0$ y $V_{ef}(r_c) = E^2$, con estas ecuaciones se obtiene la siguiente condición con la cual se obtienen los r_c , para obtener los radios de geodésicas nulas inestables es necesario satisfacer otra condición la cual es $V''_{ef}(r_c) < 0$.

$$rf'(r_c) - 2f(r_c) = 0 \quad (2.16)$$

Cardoso demostró que las frecuencias de los modos cuasi-normales en el límite eikonal vienen dados por la expresión;

$$\omega_{QNM} = \Omega_c l - i \left(\frac{1}{2} + n\right) |\lambda| = \omega_r + i\omega_i \quad (2.17)$$

Donde n es el número de modo y Ω_c es la velocidad angular la cual viene dada por

$$\Omega_c = \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}} \quad (2.18)$$

λ es el exponente de Lyapunov el cual tiene la interpretación como la tasa de decaimiento de las geodésicas circulares nulas inestables, dichas expresiones pueden ser escritas de la siguiente manera

$$\Omega_c = \frac{\dot{\phi}(r_c)}{\dot{t}(r_c)} = \sqrt{\frac{f(r_c)}{r_c^2}} \quad (2.19)$$

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{-V_{ef}''(r_c)}{2\dot{t}(r_c)^2}} = \sqrt{\frac{f(r_c)[2f(r_c) - r^2 f''(r_c)]}{2r^2}} \quad (2.20)$$

2.2. Potencial de agujero negro de Bardeen.

Recordando que la función métrica para el agujero negro de Bardeen viene dada por (1.7), sustituyendo esta función en (2.15) obtenemos:

$$V_{ef}(r) = \frac{l^2}{r^2} \left(1 - \frac{2Mr^2}{(r^2 + g^2)^{3/2}} \right) \quad (2.21)$$

Anteriormente se obtuvo una relación entre masa y carga magnética, así como un rango de valores que puede tomar g , al sustituir la relación de masa en la función métrica y darle valores a g en el rango obtenido, esto nos da el horizonte exterior en uno, con esto en consideración se grafica el potencial efectivo (2.21).

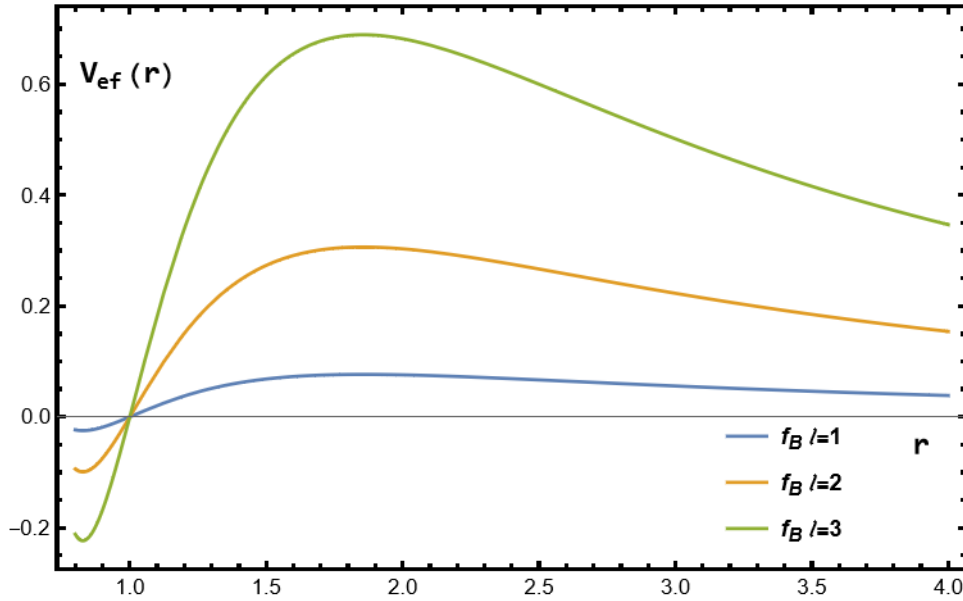


Figura 2.1: Potencial de Bd en el cual se substituyó la relación de masa con una carga $g = 0.6$ para distintos valores del momento angular l , cuando $r \rightarrow \infty$ entonces $V_{ef} \rightarrow 0$.

En la figura (2.1) se muestra el potencial efectivo del agujero negro de Bardeen (Bd), en el

cual podemos observar que al aumentar l el potencial aumenta y en todos los casos se tiene un máximo después de uno lo cual era de esperar ya que se esta fijando el horizonte exterior en dicho valor.

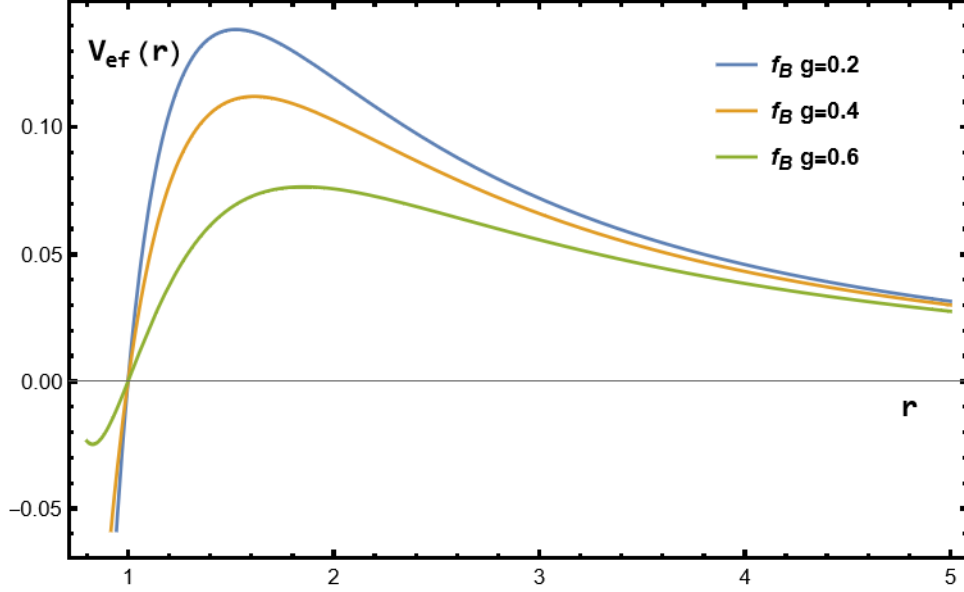


Figura 2.2: Potencial de Bd en el cual se substituyó la relación de masa, con momento angular $l = 1$ y distintos valores de carga magnética g , cuando $r \rightarrow \infty$ entonces $V_{ef} \rightarrow 0$.

La figura (2.2) muestra el potencial efectivo del agujero negro de (Bd) considerando distintos valores de g , podemos observar que al aumentar g el potencial disminuye, en los tres casos se obtiene el máximo de la función después del horizonte exterior es decir en uno, dichos máximos describen los radios de las geodésicas nulas inestables.

De igual manera se realizaron los potenciales del agujero negro Bd cuando se fijó el radio exterior en dos, recordando que se obtuvo una relación de masa distinta.

En la figura (2.3) se tiene el potencial de agujero negro Bd en donde podemos observar que las funciones tienen su máximo después de dos y que al aumentar l el potencial aumenta, pero al comprara las figuras (2.1) y (2.3) se tiene que las amplitudes de los potenciales con horizonte exterior en dos son menores comparadas con los potenciales con horizonte exterior en uno, también se tiene que si $r \rightarrow \infty$ entonces $V_{ef} \rightarrow 0$.

En la figura (2.4) se tiene el potencial de Bd con distintos valores de g , al analizar la figura vemos que al aumentar g el potencial disminuye, el máximo del potencial esta después del dos en los tres casos, al comprar las figuras (2.2) y (2.4) se tiene que las amplitudes del potencial efectivo cuando se fija el horizonte exterior en dos son menores.

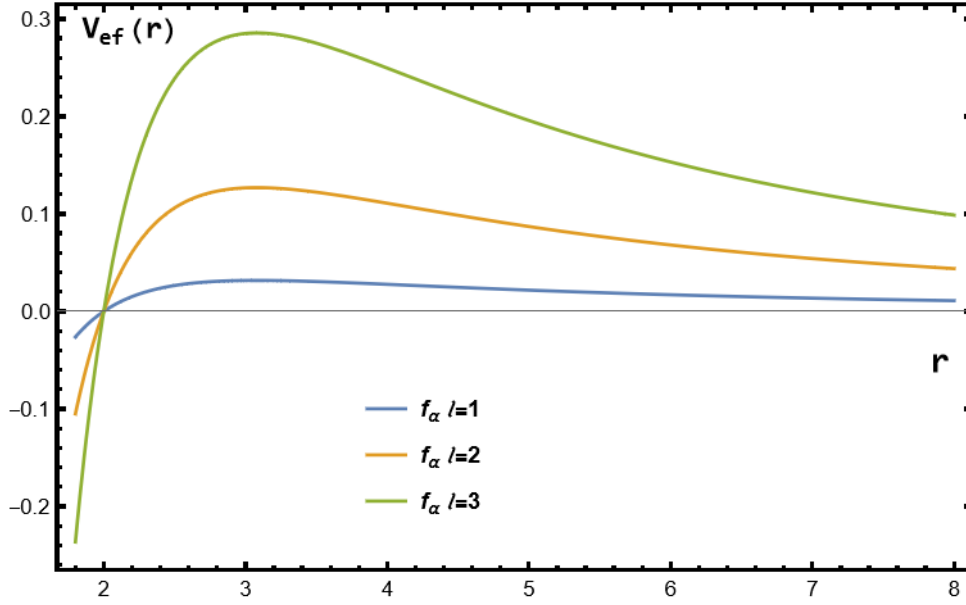


Figura 2.3: Potencial de Bd en el cual se sustituyó la relación de masa obtenida al fijar el horizonte exterior en dos con $g=0.6$ con distintos valores del momento angular

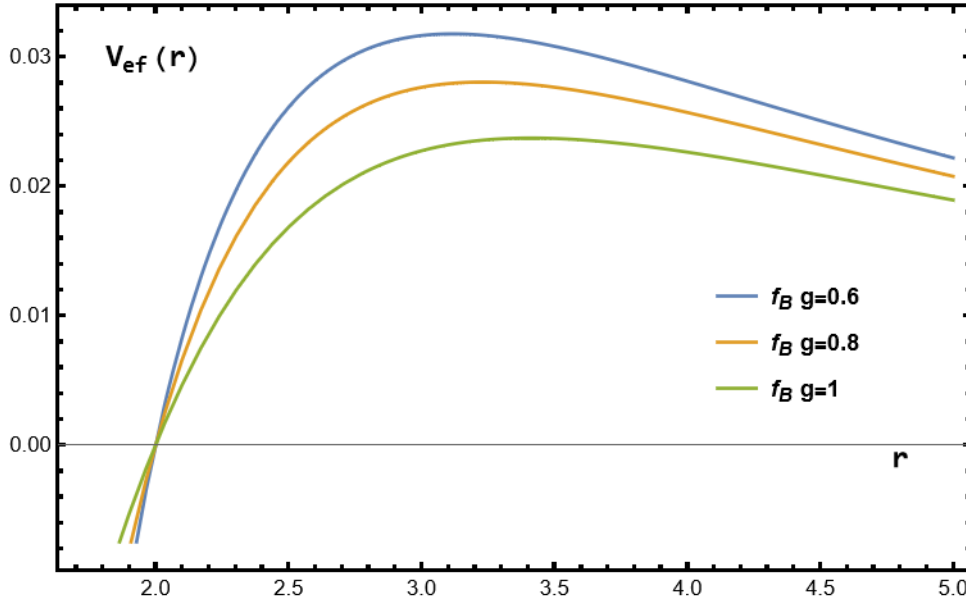


Figura 2.4: Potencial de Bd en el cual se sustituyó la relación de masa obtenida al fijar el horizonte exterior en dos con $l=1$ para distintos valores de carga magnética.

2.3. Potencial de agujero negro de Bardeen rodeado de quintaesencia.

Para un agujero negro de Bardeen rodeado de quintaesencia el potencial (2.15) toma la forma:

$$V_{ef}(r) = \frac{l^2}{r^2} \left(1 - \frac{2Mr^2}{(r^2 + g^2)^{3/2}} - cr \right) \quad (2.22)$$

Del capítulo anterior se obtuvieron relaciones entre masa, carga magnética y c , recordando que debemos tomar ciertos valores para obtener un agujero con horizonte en uno y dos respecti-

vamente, se graficaron los potenciales efectivos. Es importante notar que si $r \rightarrow \infty$ entonces $V_{ef} \rightarrow 0$.

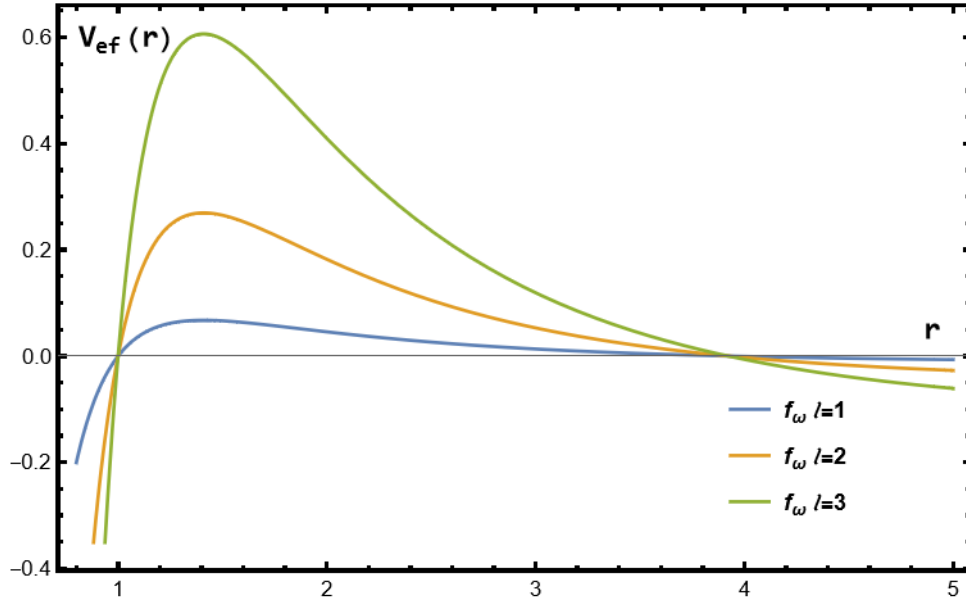


Figura 2.5: Potencial de agujero negro (Bd_ω) en el cual se substituyó la relación de masa al fijar el horizonte exterior en uno, si fijó $g = c = 0.2$ con distintos valores de l .

En la figura (2.5) se muestra el potencial de (Bd_ω) en el cual se mantuvo fijo g y c , se puede observar que al aumentar l el potencial aumenta y que en los tres casos el máximo de la función se obtiene después de uno, podemos observar que el potencial cruza en cero alrededor de $r = 4$ para los tres casos para después tender a cero.

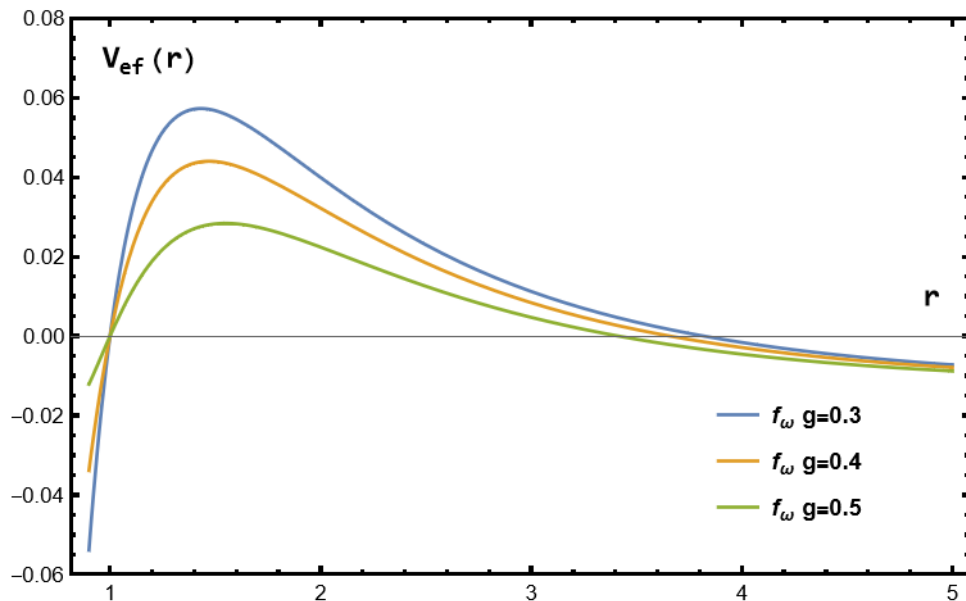


Figura 2.6: Potencial de agujero negro (Bd_ω) en el cual se substituyó la relación de masa, se fijó una $c = 0.2$, $l = 1$ y se tomaron distintos valores de g .

Al analizar la figura (2.6) podemos observar que al aumentar la carga magnética g el potencial efectivo disminuye y a diferencia del caso anterior los potenciales cruzan en cero en distintos puntos, al aumentar g este corte es más cercano a uno, nuevamente obtenemos los máximos del potencial después de uno.

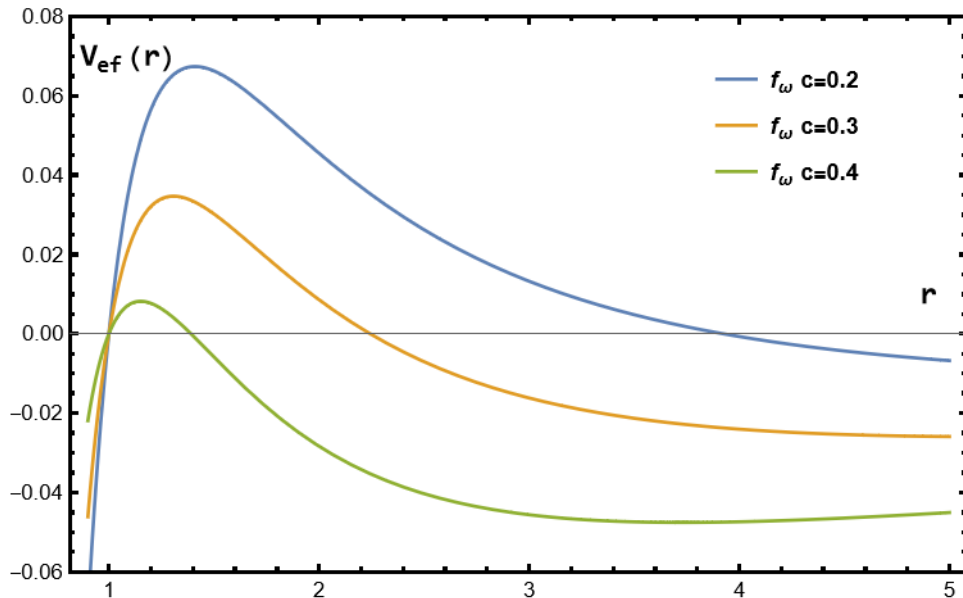


Figura 2.7: Potencial de agujero negro (Bd_ω) en el cual se fijó una $g = 0.2$ así como $l = 1$, se tomaron distintos valores para c .

En la figura (2.7) podemos observar que al aumentar c el potencial disminuye, dicha disminución en el potencial es mayor en comparación a la que sufre al aumentar g , de igual manera al aumentar c el corte que sufre el potencial en cero es más cercano a uno, por lo cual, el potencial efectivo se ve más afectado por variaciones de c que por variaciones de g .

Para poder analizar como afecta la presencia de quintaesencia en el potencial efectivo de un agujero negro de Bardeen se realizó la figura (2.8), en esta podemos observar que la presencia de quintaesencia reduce el potencial efectivo, en todos los casos el potencial tiene un máximo después de uno, pero al aumentar c este se desplaza a la izquierda.

Anteriormente se realizó el análisis del agujero negro (Bd_ω) cuando se fija el horizonte exterior en dos donde se obtuvo una relación nueva de masa, con esto se grafican los potenciales efectivos.

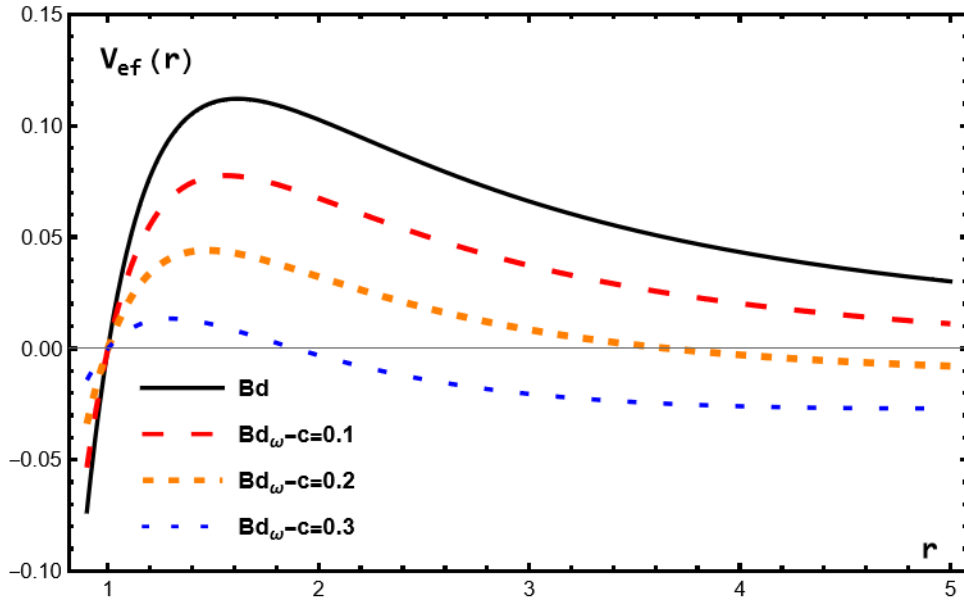


Figura 2.8: Comparación de potenciales efectivos de los agujeros negros de Bd y Bd_ω , en ambos agujeros la carga magnética se fijo $g = 0.4$ así como el momento angular $l = 1$, para el agujero negro Bd_ω se tomaron distintos valores de c .

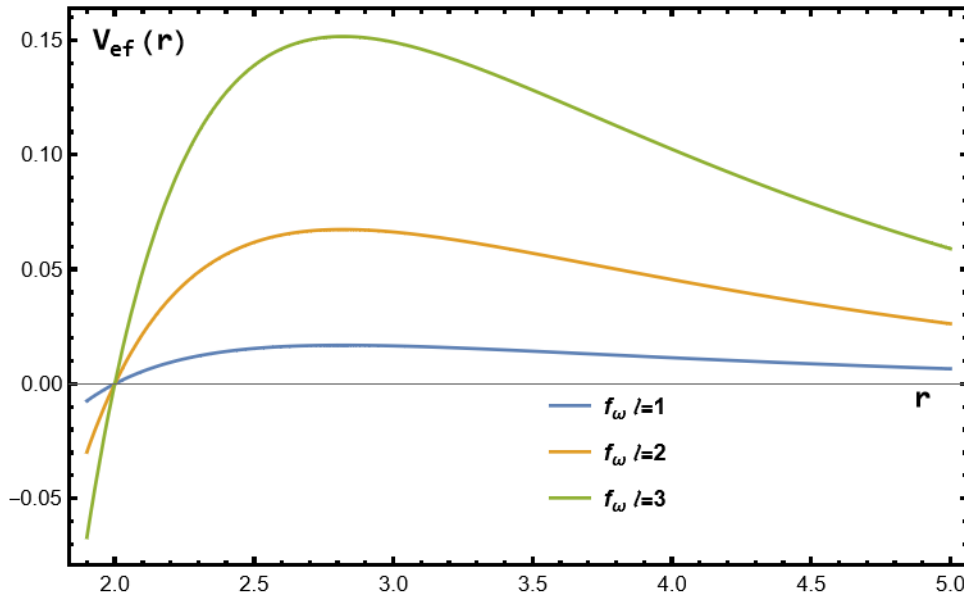


Figura 2.9: Potencial efectivo de agujero negro (Bd_ω) en el cual se sustituyó la relación de masa obtenida al fijar el horizonte exterior en dos, se obtienen máximos después de este horizonte, se toman distintos valores de l con $g = 0.4$ y $c = 0.1$.

Al comparar los potenciales efectivos obtenidos al fijar el horizonte exterior en dos como se muestra en las figuras (2.9), (2.10), (2.11) y (2.12) con los obtenidos al fijar el horizonte exterior en uno, podemos observar que tienen el mismo comportamiento, es decir al aumentar g ó c el potencial disminuye así como al aumentar l este también aumenta, pero al fijar el horizonte exterior en dos tenemos que el potencial efectivo es menor en todos los casos. Al fijar el horizonte exterior en dos se sigue cumpliendo que si $r \rightarrow \infty$ entonces $V_{ef} \rightarrow 0$.

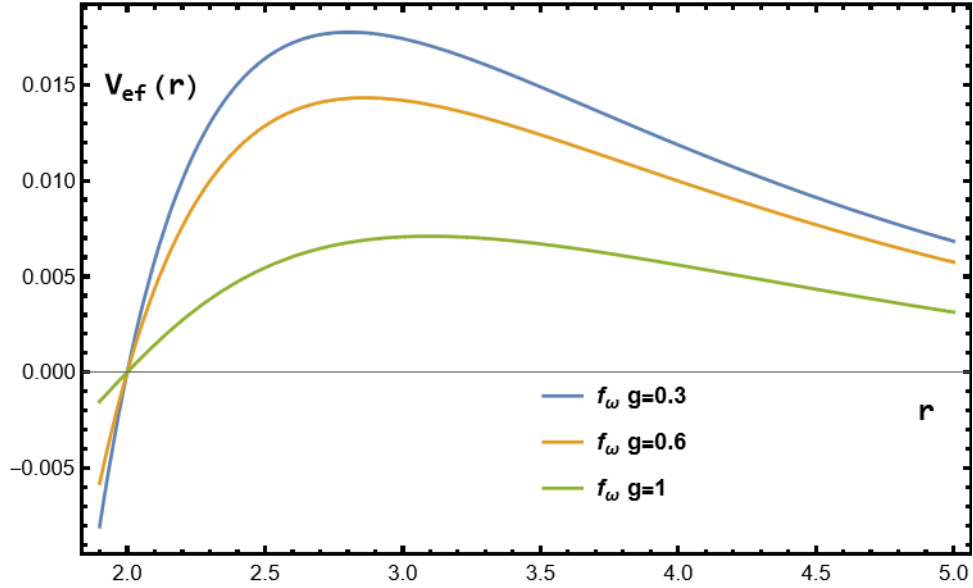


Figura 2.10: Potencial efectivo de agujero negro (Bd_ω) en el cual se sustituyó la relación de masa obtenida al fijar el horizonte exterior en dos, se toman distintos valores de g con $c = 0.1$ y $l = 1$.

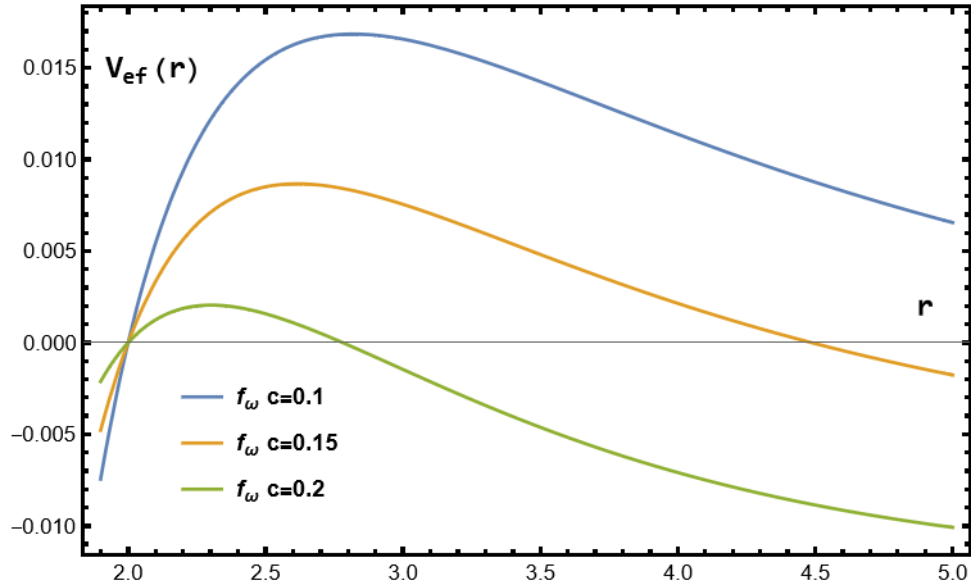


Figura 2.11: Potencial efectivo de agujero negro (Bd_ω) en el cual se sustituyó la relación de masa obtenida al fijar el horizonte exterior en dos, se fijó $l = 1$, $g = 0.4$ mientras c varía, se obtuvieron máximos después de dos y al aumentar c dicho máximo está más cercano al horizonte.

2.4. Potencial de agujero negro de Bardeen rodeado de un fluido perfecto de materia oscura.

Para un agujero negro de Bardeen rodeado de un fluido perfecto de materia oscura (Bd_α) el potencial (2.15) toma la forma

$$V_{ef}(r) = \frac{l^2}{r^2} \left(1 - \frac{2Mr^2}{(r^2 + g^2)^{3/2}} + \frac{\alpha}{r} \ln \left(\frac{r}{|\alpha|} \right) \right) \quad (2.23)$$

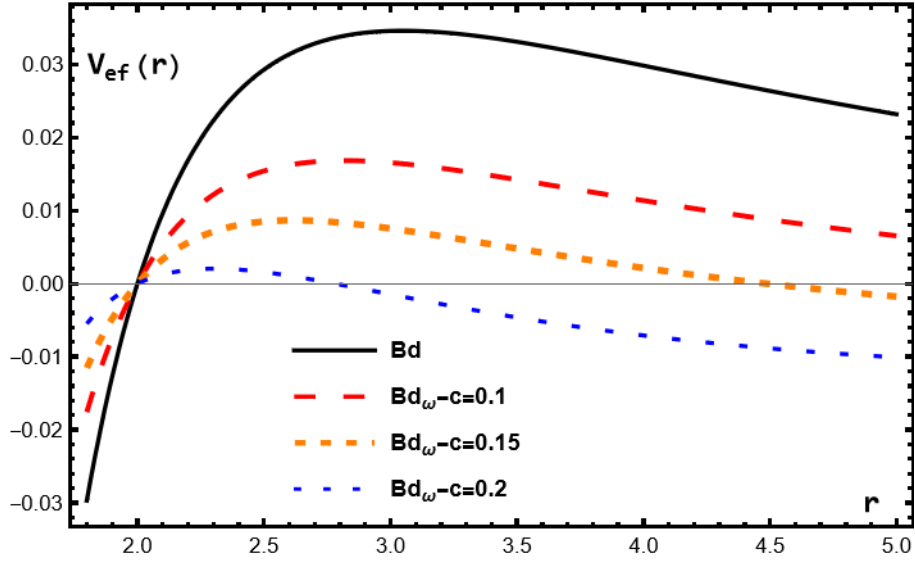


Figura 2.12: Comparativa de agujeros negro Bd y Bd_ω en ambos se sustituyó la relación de masa obtenida al fijar el horizonte exterior en dos, en ambos se tiene $g = 0.4$ y $l = 1$, en Bd_ω se tomaron distintos valores de c .

En el capítulo anterior se obtuvieron relaciones entre la masa, carga magnética y la constante α al fijar el horizonte exterior en uno y dos, dichas relaciones son usadas al graficar los potenciales efectivos, también es importante notar que si $r \rightarrow \infty$ entonces $V_{ef} \rightarrow 0$.

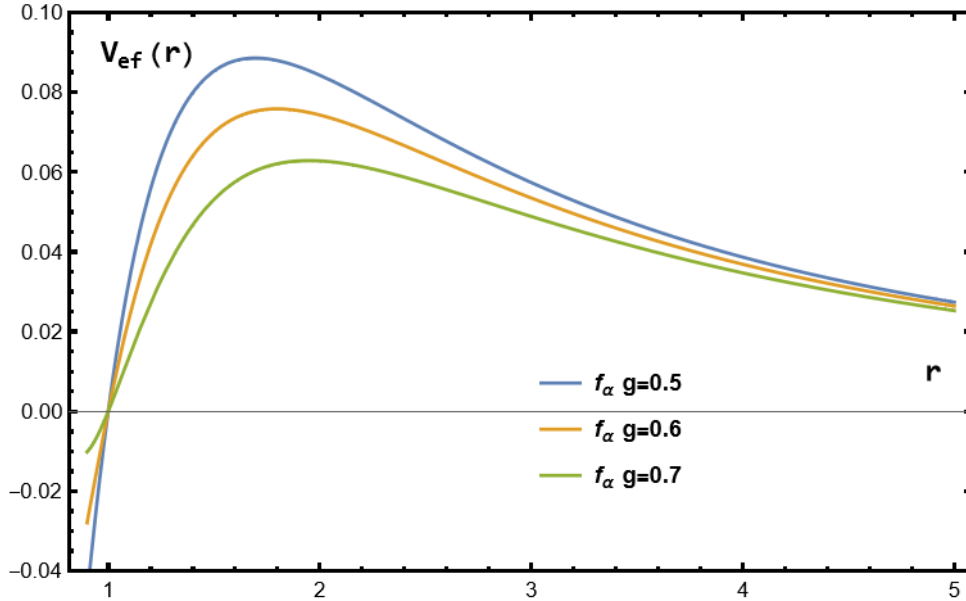


Figura 2.13: Potencial efectivo de agujero negro (Bd_α) en el cual se sustituyó la relación de masa obtenida al fijar el horizonte exterior en uno, se fijó $l = 1$, $\alpha = -0.2$ con distintos valores de g .

En la figura (2.13) se graficó el potencial efectivo de Bd_α el cual solo depende de r, g, α, l , se fijó $l = 1$, $\alpha = -0.2$ variando g , al analizar la figura se obtiene que al aumentar la carga magnética el potencial efectivo disminuye, también es posible observar que el potencial tiene su máximo después del horizonte exterior, dicho máximo se desplaza a la derecha al aumentar el valor de la carga magnética.

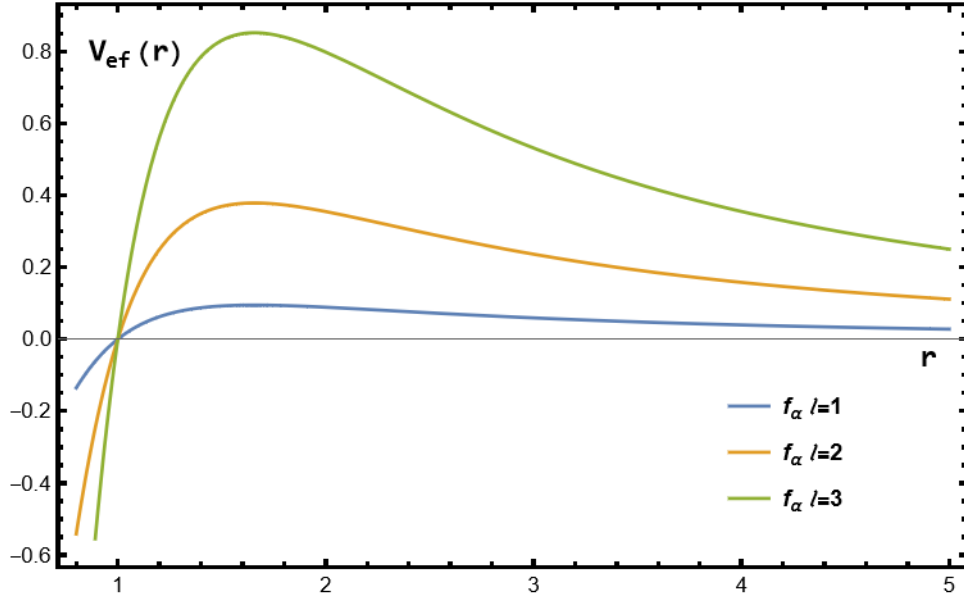


Figura 2.14: Potencial efectivo de agujero negro (Bd_α) en el cual se substituyó la relación de masa obtenida al fijar el horizonte exterior en uno, se fijó $g = 0.45$, $\alpha = -0.2$ y se tomaron distintos valores para l .

En la figura (2.14) se graficó el potencial efectivo al tomar distintos valores de l , como en los casos anteriores se substituyó la relación de masa obtenida al fijar el horizonte exterior en uno, al analizar la figura vemos que al aumentar l el potencial crece, de igual forma al aumentar l el máximo del potencial se desplaza a la derecha, a mayor valor de l este desplazamiento es mayor, todos estos máximos se encuentran después del horizonte exterior.

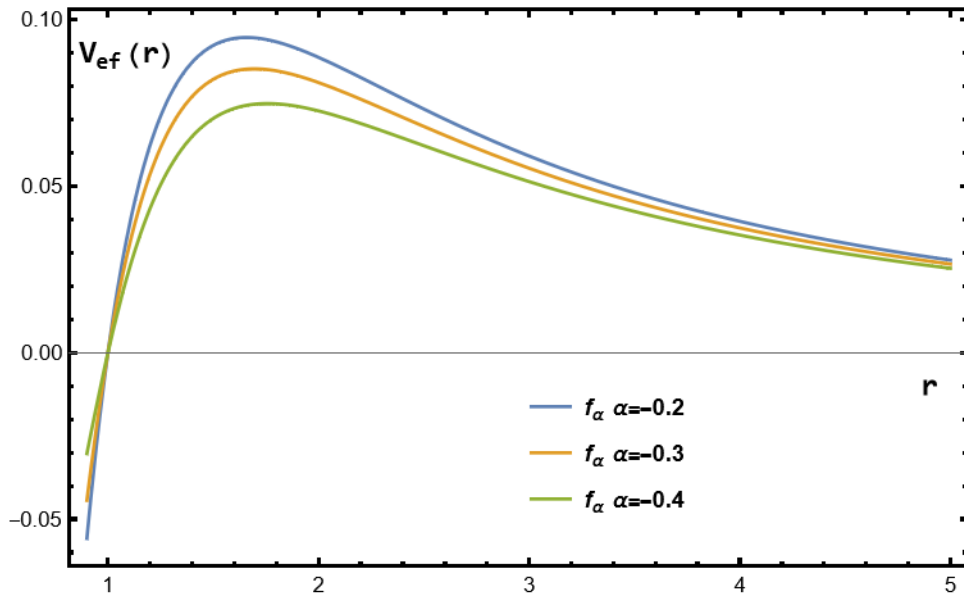


Figura 2.15: Potencial efectivo de agujero negro (Bd_α) en el cual se substituyó la relación de masa obtenida al fijar el horizonte exterior en uno, se fijó $g = 0.45$, $l = 1$ mientras se toman distintos valores de α .

En la figura (2.15) se graficó el potencial efectivo para distintas α mientras que g, l se fijaron, recordando que se debe satisfacer la condición de energía débil mencionada en el capítulo anterior se tomaron $\alpha < 0$, podemos observar que al aumentar α el potencial disminuye y que los máximos del potencial en estos casos casi no se ven afectados por el cambio de α .

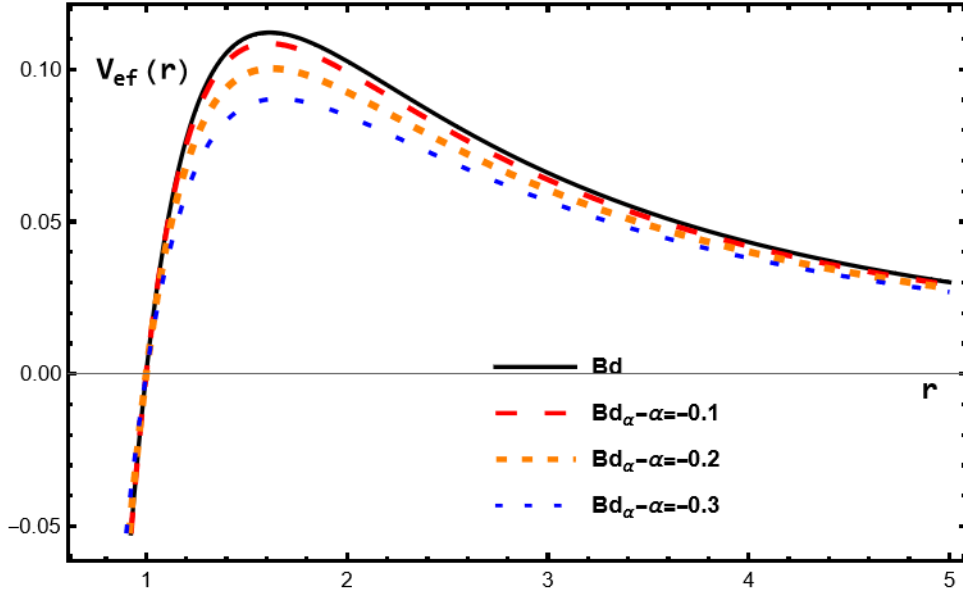


Figura 2.16: Comparativa de potenciales efectivos de Bd y Bd_α , en ambos casos se sustituyeron las relaciones de masa correspondientes al fijar el horizonte exterior en uno, en ambos casos se fijó $g = 0.4$ y $l = 1$.

En la figura (2.16) se graficaron los potenciales efectivos de los agujeros negros Bd y Bd_α , en el cual podemos observar que al aumentar α el potencial de Bd_α se reduce en comparación de Bd es decir la presencia de materia oscura hace que el agujero negro de Bardeen sea menos atractivo gravitacionalmente, de igual forma si $\alpha \rightarrow 0$ el potencial Bd_α regresa a Bd , es posible observar que los máximos de los potenciales efectivos se encuentran muy cercanos.

De igual manera se graficaron los potenciales efectivos cuando se fija el horizonte exterior en dos, en todos los casos se sustituye la relación de masa obtenida en el capítulo anterior.

Al analizar la figuras (2.17), (2.18), (2.19) y (2.20), podemos observar que el comportamiento del potencial efectivo se conserva al fijar el horizonte exterior en dos, es decir si g ó α aumentan el potencial disminuye, si l aumenta de igual forma el potencial, las amplitudes de los potenciales en todos los casos son menores cuando se fija el horizonte exterior en dos.

Al analizar las figuras (2.8) y (2.16), podemos observar que el aumentar c hace que el agujero negro Bd_ω sea menos atractivo gravitacionalmente, de igual manera en el caso de Bd_α pero dicha disminución es menor en este caso, por lo cual la presencia de materia oscura es de mayor interés para las observaciones experimentales, ya que los efectos de materia oscura serían más

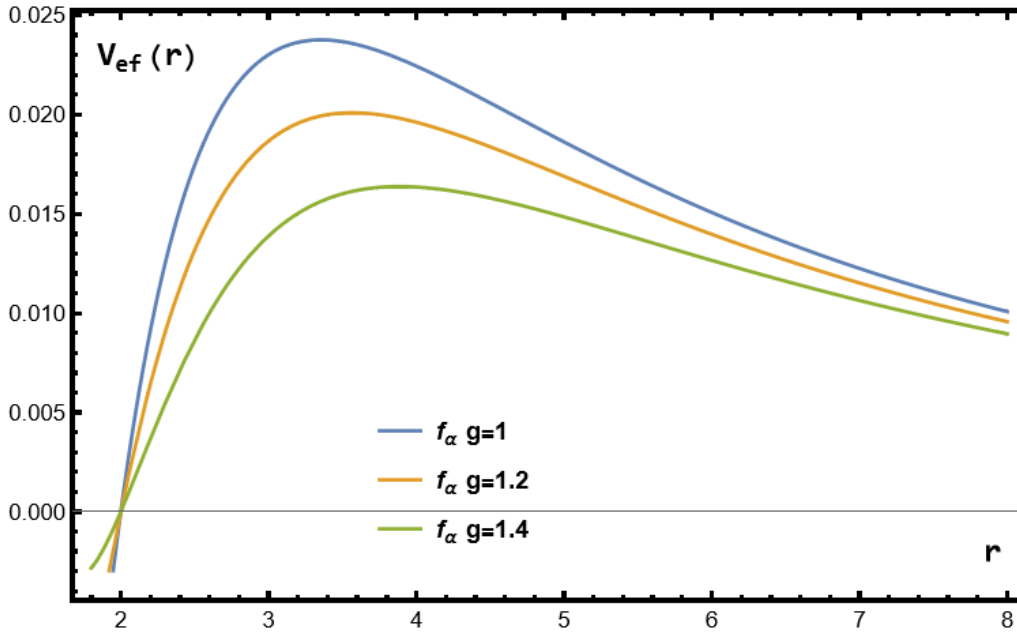


Figura 2.17: Potencial efectivo de agujero negro (Bd_α) en el cual se substituyó la relación de masa obtenida al fijar el horizonte exterior en dos, se fijó $l = 1$, $\alpha = -0.2$ con distintos valores de g .

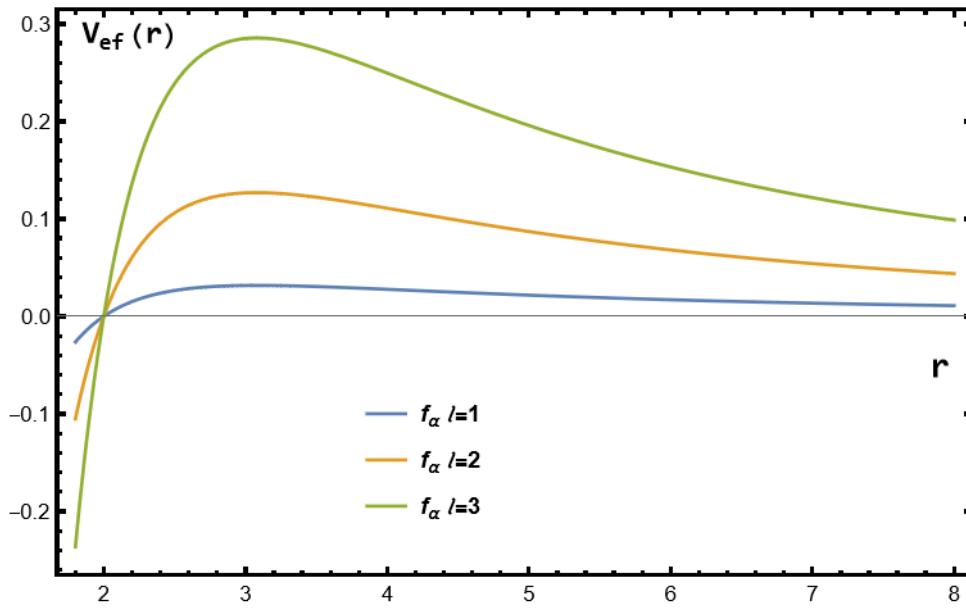


Figura 2.18: Potencial efectivo de agujero negro (Bd_α) en el cual se substituyó la relación de masa obtenida al fijar el horizonte exterior en dos, se fijó $g = 0.45$, $\alpha = -0.2$ y se tomaron distintos valores para l .

notorios que con el caso de quintaesencia.

$$V_{ef}Bd > V_{ef}Bd_\alpha > V_{ef}Bd_\omega \quad (2.24)$$

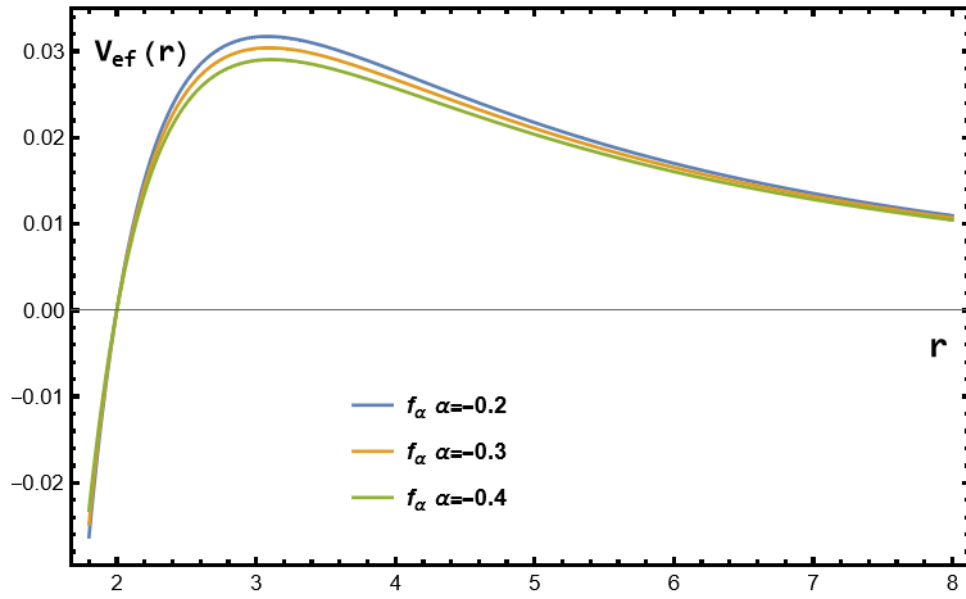


Figura 2.19: Potencial efectivo de agujero negro (Bd_α) en el cual se sustituyó la relación de masa obtenida al fijar el horizonte exterior en dos, se fijó $g = 0.45$, $l = 1$ mientras se toman distintos valores de α .

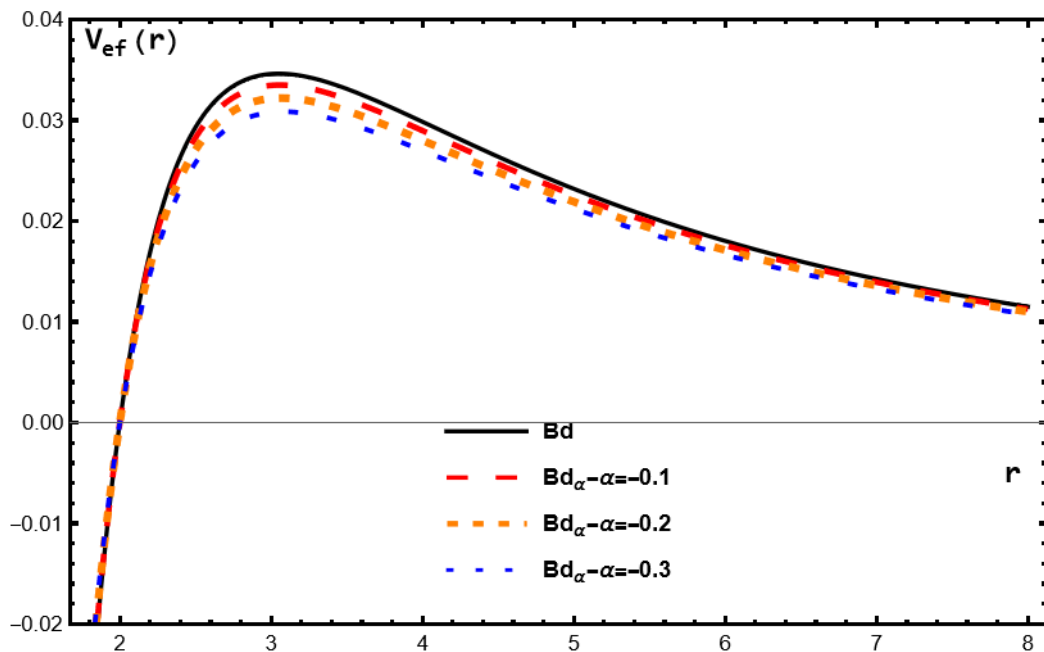


Figura 2.20: Comparativa de potenciales efectivos de Bd y Bd_α , en ambos casos se sustituyeron las relaciones de masa correspondientes al fijar el horizonte exterior en dos, en ambos casos se fijó $g = 0.4$ y $l = 1$.

Capítulo 3

Modos cuasi-normales

En el capítulo anterior se vio que Cardoso demostró que en el límite eikonal los modos cuasi-normales vienen dados por la expresión (2.17), se realizó el estudio de estos modos a partir de las geodésicas circulares nulas inestables.

3.1. Agujero negro de Bardeen rodeado de quintaesencia.

3.1.1. Parte real de la frecuencia de los modos cuasi-normales.

La parte real de los modos cuasi-normales viene dada por la velocidad angular, la cual viene descrita por la ecuación (2.19), sustituyendo la $f_\omega(r)$ tenemos que la expresión de la velocidad angular se escribe como:

$$\Omega|_{r_c} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2Mr^2}{(r^2+g^2)^{\frac{3}{2}}} - cr}{r^2}} \quad (3.1)$$

Recordando que la expresión anterior debe ser evaluada en los r_c los cuales son los radios de las órbitas circulares inestables, dichos radios deben satisfacer la ecuación (2.16), dicha expresión es complicada de obtener de forma analítica por lo cual se realizó su calculo punto a punto.

En la figura (3.1) se muestra la parte real de los modos cuasi-normales, es importante mencionar que de igual forma que en el capítulo anterior, se sustituyeron las relaciones de masa obtenidas por lo cual los agujeros negros no depende de la masa, al analizar la figura podemos observar que al aumentar c la magnitud de las frecuencias de vibración son menores es decir el agujero negro vibra menos, también es posible observar que al aumentar la carga magnética g las frecuencias de vibración van disminuyendo, es posible notar que Bd tiene una mayor vibración por lo cual la presencia de quintaesencia disminuye las vibraciones.

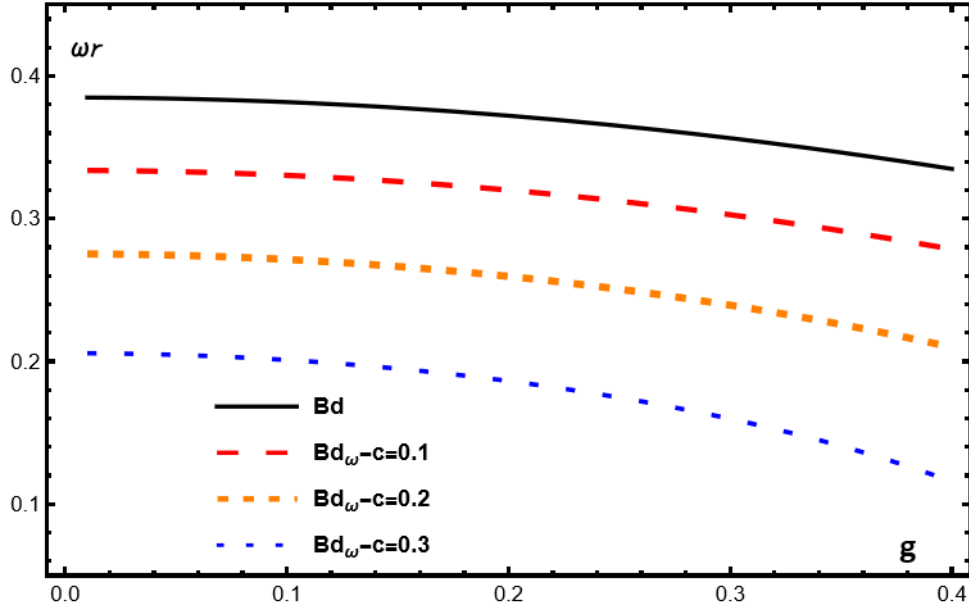


Figura 3.1: Parte real de los modos cuasi-normales del agujero negro Bd y Bd_ω en los cuales se realiza una variación de carga magnética, para Bd_ω se consideraron distintos valores de c .

3.1.2. Parte imaginaria de los modos cuasi-normales.

Como se vio en el capítulo anterior la parte imaginaria de los modos cuasi-normales la cual nos dice que tan estable es un agujero negro en el límite eikonal se relaciona con el exponente de Lyapunov, el cual depende de la segunda derivada del potencial efectivo, dicho potencial debe estar evaluado en los r_c por lo cual nuevamente para su cálculo se realiza punto a punto.

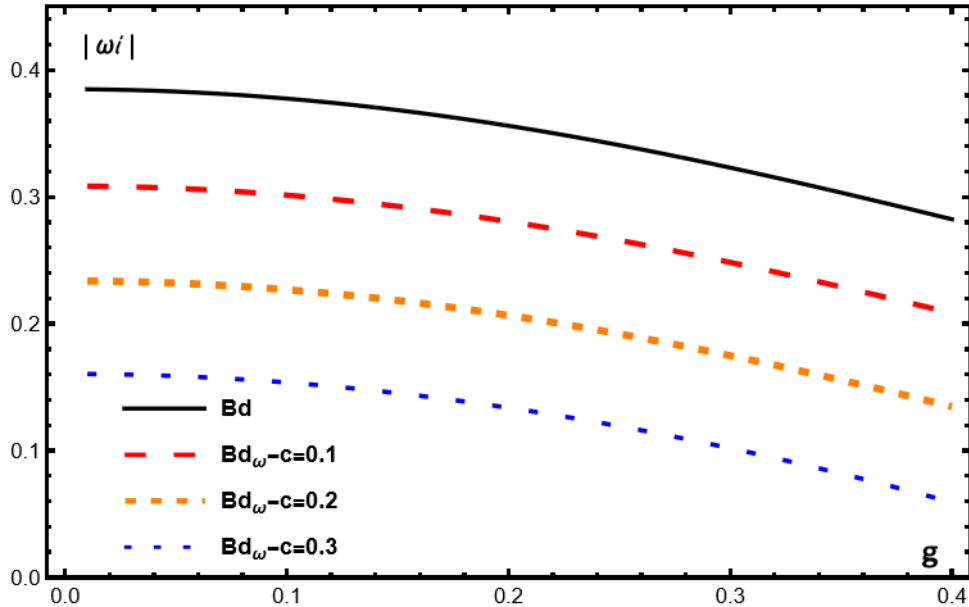


Figura 3.2: Parte imaginaria de los modos cuasi-normales del agujero negro Bd y Bd_ω en los cuales se realiza una variación de carga magnética, para Bd_ω se consideraron distintos valores de c .

En la figura (3.2) se muestra la parte imaginaria de los modos cuasi-normales en el modo $n = 0$, nuevamente se sustituyeron las relaciones de masa obtenidas en el capítulo uno al fijar el

horizonte exterior en uno, al analizar la figura se observa que al aumentar g la parte imaginaria de los modos va decreciendo, de igual forma obtenemos que al aumentar c la parte imaginaria es menor por lo cual al aumentar el valor de c el agujero negro es más estable, esto se puede relacionar con la parte real ya que esta nos indica que los agujeros negros dejan de vibrar más rápido a mayor c , es posible decir que debido a las consideraciones tomadas los agujeros dejan de vibrar rápidamente y son estables.

3.2. Agujero negro de Bardeen rodeado de un fluido perfecto de materia oscura.

3.2.1. Parte real de los modos cuasi-normales

Sustituyendo $f_\alpha(r)$ en la ecuación (2.19) la cual es la parte real de los modos cuasi-normales obtenemos:

$$\Omega|_{r_c} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2Mr^2}{(r^2+g^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\alpha}{r} \ln\left(\frac{r}{|\alpha|}\right)}{r^2}} \quad (3.2)$$

De igual forma esta expresión debe ser evaluada en los r_c , es decir los radios de las órbitas circulares inestables el cálculo fue realizado punto a punto como en los casos anteriores.

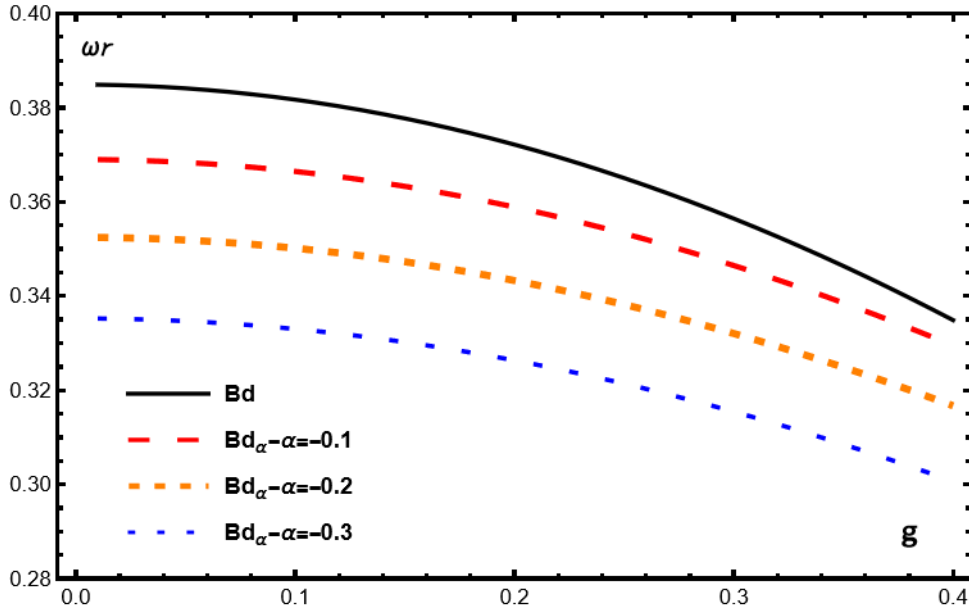


Figura 3.3: Parte real de los modos cuasi-normales del agujero Bd y Bd_α , en los cuales se realizó una variación de la carga magnética g en el caso de Bd_α se tomaron distintos valores para α .

En la figura (3.3) se muestra la parte real de los modos cuasi-normales, de igual forma que en los casos anteriores se sustituyó la relación de masa obtenida anteriormente, al analizar la figura observamos que al ir aumentando g las frecuencias de vibración van disminuyendo, de igual forma al aumentar α la magnitud de la vibración disminuye esto nos quiere decir que la presencia de materia oscura atenúa la vibración, es posible decir que las vibraciones

considerando la presencia de materia oscura se asemejan más a Bd pero este sigue teniendo una mayor vibración.

3.2.2. Parte imaginaria de los modos cuasi-normales.

Para el cálculo del exponente de Lyapunov se hizo uso del potencial efectivo de Bd_α , dicho potencial debe ser evaluado en los r_c , como en el caso anterior dichos radios fueron calculados punto a punto.

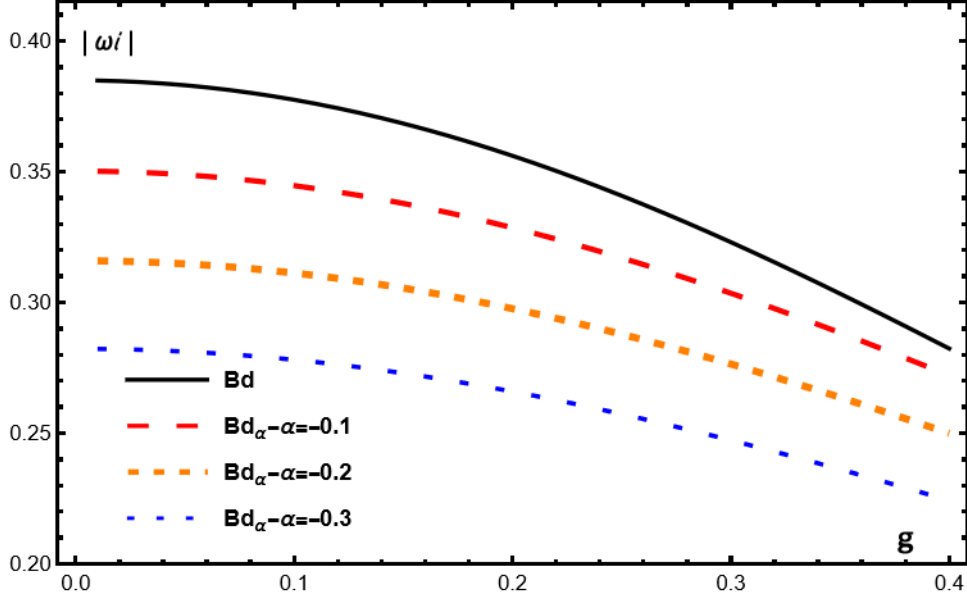


Figura 3.4: Parte imaginaria de los modos cuasi-normales del agujero Bd y Bd_α , en los cuales se realizó una variación de la carga magnética g en el caso de Bd_α se tomaron distintos valores para α .

En la figura (3.4) se muestra la parte imaginaria de los modos cuasi-normales, podemos observar que tienen el mismo comportamiento que la parte real, es decir al aumentar g esta disminuye, de igual forma al aumentar α la parte imaginaria es menor por lo que el agujero negro es más estable, es posible observar que en este caso la parte imaginaria de Bd_α es más cercana a Bd esto es posible relacionarlo con el potencial efectivo ya que como se mostró anteriormente dichos potenciales efectivos son muy similares.

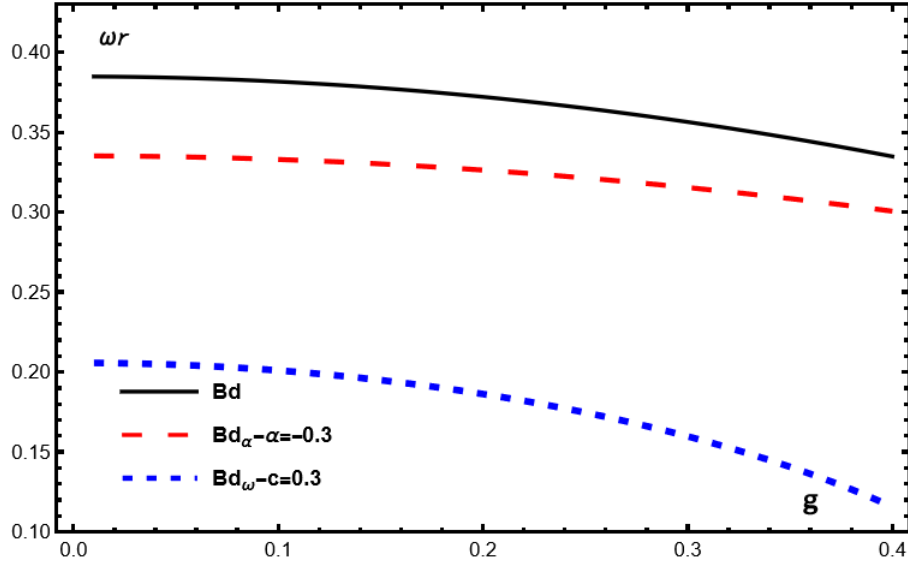


Figura 3.5: Parte real de los modos cuasi-normales del agujero Bd , Bd_α , Bd_ω donde se realiza un variación de carga magnética.

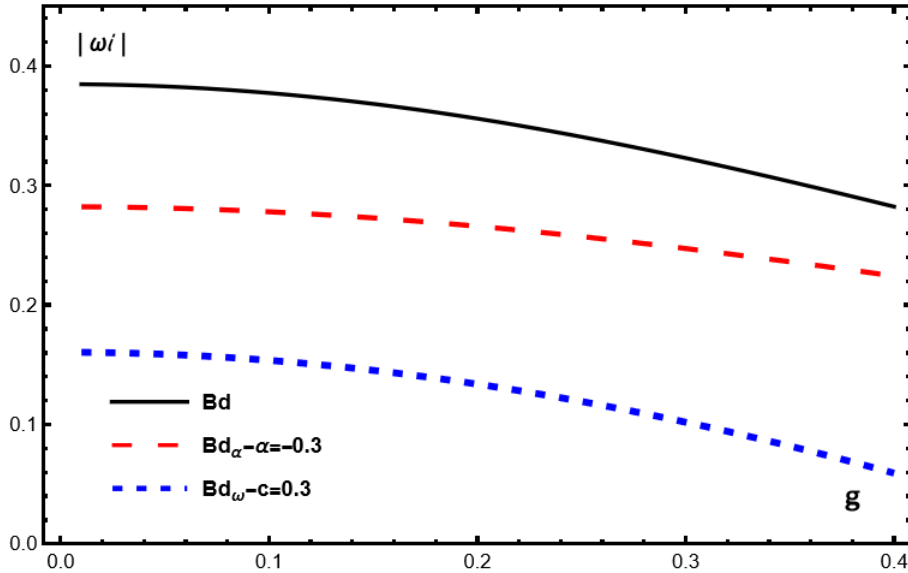


Figura 3.6: Parte imaginaria de los modos cuasi-normales del agujero Bd , Bd_α , Bd_ω donde se realiza un variación de carga magnética.

Para poder realizar una comparativa se graficaron los modos cuasi-normales de los agujeros Bd , Bd_ω y Bd_α los cuales se muestran en las figuras (3.5) y (3.6) las cuales corresponden a la parte real e imaginaria respectivamente, al analizar la parte real podemos observar que Bd_ω tiene la frecuencia de vibración menor de los casos estudiados, esto quiere decir que la presencia de quintaesencia atenúa más las oscilaciones que la presencia de materia oscura.

De igual forma al analizar la parte imaginaria de los modos cuasi-normales, es posible notar que Bd_ω es más estable, ya que recordando que la parte imaginaria de estos modos esta relacionada con el exponente de Lyapunov que a su vez se relaciona con el potencial efectivo sabemos que al aumentar c el potencial presenta una disminución mayor que al aumentar α , por cual es posible mencionar que al considerar la presencia de quintaesencia el agujero negro es más estable.

Capítulo 4

Conclusión.

En este trabajo se analizan los modos cuasi-normales de un agujero negro de Bardeen en dos escenarios de interés, el primero de ellos es considerando el agujero negro de Bardeen rodeado de quintaesencia y el segundo es considerar el agujero negro de Bardeen rodeado de un fluido perfecto de materia oscura. Los modos cuasi-normales son obtenidos y analizados considerando el límite eikonal, por lo que se realizó el análisis de los potenciales efectivos para geodésicas circulares nulas inestables.

Al analizar los potenciales efectivos podemos observar que la presencia de quintaesencia así como de un fluido perfecto de materia oscura ocasionan que el agujero negro de Bardeen sea menos atractivo gravitacionalmente. También es posible mencionar que dicha disminución gravitacional tiene un mayor efecto en el caso de considerar la presencia de quintaesencia es decir $V_{ef}Bd_\alpha > V_{ef}Bd_\omega$.

En relación a los modos cuasi-normales es posible mencionar que la parte real se ve disminuida al aumentar la carga magnética, dicho comportamiento es el mismo para ambos modelos, lo cual nos indica que la oscilación del agujero negro disminuye al aumentar la carga, dicho efecto es más evidente en el caso de considerar el agujero negro rodeado de quintaesencia.

La parte imaginaria de las frecuencias de los modos cuasi-normales la cual esta relacionada con la estabilidad, nos indica que en ambos casos los agujeros negros conforme aumenta la carga se vuelven más estables siendo el agujero negro de Bardeen rodeado de quintaesencia el más estable, esto se relaciona con el potencial efectivo, ya que como se mostró en la sección dos, la presencia de quintaesencia hace que el agujero negro sea menos atractivo gravitacionalmente.

Bibliografía

- [1] J. R. Oppenheimer and H. Snyder. On continued gravitational contraction. *Phys. Rev.*, 56:455–459, Sep 1939.
- [2] S. W. Hawking. Nature of space and time. 9 1994.
- [3] B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6):061102, 2016.
- [4] Sean M. Carroll. Quintessence and the rest of the world. *Phys. Rev. Lett.*, 81:3067–3070, 1998.
- [5] N. Breton and L. A. Lopez. Quasinormal modes of nonlinear electromagnetic black holes from unstable null geodesics. *Phys. Rev. D*, 94(10):104008, 2016.
- [6] Eloy Ayon-Beato and Alberto Garcia. The Bardeen model as a nonlinear magnetic monopole. *Phys. Lett. B*, 493:149–152, 2000.
- [7] Zdeněk Stuchlík and Jan Schee. Circular geodesic of Bardeen and Ayon–Beato–Garcia regular black-hole and no-horizon spacetimes. *Int. J. Mod. Phys. D*, 24(02):1550020, 2014.
- [8] Peng Liu, Chao Niu, and Cheng-Yong Zhang. Linear instability of charged massless scalar perturbation in regularized 4D charged Einstein-Gauss-Bonnet anti de-Sitter black holes. *Chin. Phys. C*, 45(2):025111, 2021.
- [9] P. A. R. Ade et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 571:A16, 2014.
- [10] V. V. Kiselev. Quintessence and black holes. *Class. Quant. Grav.*, 20:1187–1198, 2003.
- [11] L. A. López and Omar Pedraza. Effects of quintessence on scattering and absorption sections of black holes. *Indian J. Phys.*, 97(1):285–294, 2023.
- [12] Sharmanthie Fernando. Schwarzschild black hole surrounded by quintessence: Null geodesics. *Gen. Rel. Grav.*, 44:1857–1879, 2012.
- [13] Heinz Andernach and Fritz Zwicky. English and spanish translation of zwicky’s (1933) the redshift of extragalactic nebulae, 2017.

- [14] Javlon Rayimbaev, Sanjar Shaymatov, and Mubasher Jamil. Dynamics and epicyclic motions of particles around the Schwarzschild–de Sitter black hole in perfect fluid dark matter. *Eur. Phys. J. C*, 81(8):699, 2021.
- [15] G. Abbas and R. H. Ali. Thermal fluctuations, quasi-normal modes and phase transition of the charged AdS black hole with perfect fluid dark matter. 5 2023.
- [16] He-Xu Zhang, Yuan Chen, Tian-Chi Ma, Peng-Zhang He, and Jian-Bo Deng. Bardeen black hole surrounded by perfect fluid dark matter. *Chin. Phys. C*, 45(5):055103, 2021.
- [17] Qi Sun, Qian Li, Yu Zhang, and Qi-Quan Li. Quasinormal modes, Hawking radiation and absorption of the massless scalar field for Bardeen black hole surrounded by perfect fluid dark matter. 2 2023.
- [18] Sharmanthie Fernando and Juan Correa. Quasinormal Modes of Bardeen Black Hole: Scalar Perturbations. *Phys. Rev. D*, 86:064039, 2012.
- [19] Vitor Cardoso, Alex S. Miranda, Emanuele Berti, Helvi Witek, and Vilson T. Zanchin. Geodesic stability, Lyapunov exponents and quasinormal modes. *Phys. Rev. D*, 79(6):064016, 2009.
- [20] Sheng Zhou, Juhua Chen, and Yongjiu Wang. Geodesic Structure of Test Particle in Bardeen Spacetime. *Int. J. Mod. Phys. D*, 21:1250077, 2012.