



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

TESIS

**OPTIMIZACIÓN DE LA CONECTIVIDAD
ALGEBRAICA PARA CAMINOS CON PESOS**

Para obtener el título de
Licenciado en Matemáticas Aplicadas

PRESENTA

Alonso Cruz Ortega

Director (a)

Dr. Federico Menéndez Conde Lara

Comité tutorial

Dr. Rafael Villarroel Flores
Dr. Ronald Richard Jiménez Munguía
Dr. Fernando Barrera Mora

Pachuca de Soto, Hidalgo., agosto, 2023



Mineral de la Reforma, Hgo., a 13 de julio de 2023

Número de control: ICBI-D/1093/2023
 Asunto: Autorización de impresión.

**MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
 DIRECTORA DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH**

Con fundamento en lo dispuesto en el Título Tercero, Capítulo I, Artículo 18 Fracción IV; Título Quinto, Capítulo II, Capítulo V Fracción IX del Estatuto General de nuestra Institución, por este medio le comunico que el Jurado asignado al Pasante de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas **Alonso Cruz Ortega**, quien presenta el trabajo de titulación "**Optimización de la conectividad algebraica para caminos con pesos**", después de revisar el trabajo en reunión de Sinodales ha decidido autorizar la impresión del mismo, hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación, firman de conformidad los integrantes del Jurado:

Presidente Dr. Rafael Villarroel Flores



Secretario: Dr. Ronald Richard Jiménez Munguía



Vocal: Dr. Federico Menéndez Conde Lara



Suplente: Dr. Fernando Barrera Mora



Sin otro particular por el momento, reciba un cordial saludo.

Atentamente
 "Amor, Orden y Progreso"

Dr. Otilio Arturo Acevedo Sandoval
 Director del ICBI



OAASYCC

Ciudad del Conocimiento
 Carretera Pachuca-Tulancingo km 4.5 Colonia
 Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo,
 México. C.P. 42184
 Teléfono: 771 71 720 00 ext. 2231 Fax 2109
 direccion_icbi@uaeh.edu.mx



Índice general

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Preliminares | 8 |
| 1.1. | Operadores lineales auto-adjuntos | 8 |
| 1.2. | Irreducibilidad de matrices | 22 |
| 2 | El operador de Laplace en gráficas | 25 |
| 2.1. | Gráficas | 25 |
| 2.2. | Funciones sobre gráficas | 29 |
| 2.3. | Gráficas con pesos | 30 |
| 2.4. | Laplaciano sobre gráficas | 32 |
| 3 | La Métrica de Resistencia Efectiva | 39 |
| 3.1. | El problema de Dirichlet en gráficas | 40 |
| 3.1.1. | Caminos | 43 |
| 3.1.2. | Ciclos | 44 |
| 3.2. | Resistencia efectiva en caminos y ciclos | 47 |
| 3.2.1. | Caminos | 47 |
| 3.2.2. | Ciclos | 48 |
| 3.3. | La métrica de resistencia efectiva es una métrica | 53 |
| 3.4. | Resistencia total | 60 |
| 4 | La conectividad algebraica | 66 |
| 4.1. | Propiedades de la conectividad algebraica | 66 |
| 4.2. | Propiedades de los vectores Fiedler en cortes de una gráfica | 69 |
| 4.3. | Propiedades de los vectores Fiedler en caminos | 73 |
| 5 | Optimización de la conectividad algebraica en caminos | 80 |
| 5.1. | La Conectividad Algebraica Absoluta | 80 |
| 5.2. | Conectividad Algebraica máxima con Resistencia Total fija | 89 |

| | |
|-----------------------------------|-----------|
| <i>ÍNDICE GENERAL</i> | 4 |
| 5.2.1. El caso de P_3 | 91 |
| 5.2.2. El caso de P_4 | 95 |
| Bibliografía | 99 |

Agradecimientos

Este trabajo está dedicado a mi familia, quienes son y siempre serán parte de mí. Mamá, papá, hermano y hermanas, infinitas gracias por todo. En todo lo que hago están ustedes.

Quiero agradecer a mis amigos y amigas de la universidad. Gracias por dejarme ser parte de ustedes, aprendí mucho a su lado. Soy una mejor persona desde que los conozco.

Quiero agradecer al Dr. Federico, él fue quién me guió en este trabajo. Agradezco sus consejos y todo el tiempo dedicado. Todo este trabajo fue posible gracias a su ayuda. También, quiero agradecer al jurado por sus observaciones, ellos ayudaron a mejorar este texto. Finalmente, quiero expresar mi profundo agradecimiento por todos los profesores y profesoras de la LIMA, gracias a ellos puedo decir que sé un poco de matemáticas.

Introducción

A lo largo de la historia, la humanidad siempre se ha preocupado por obtener el mayor beneficio posible teniendo a disposición una cantidad limitada de recursos. En otras palabras, siempre se ha preocupado por optimizar. Traducido al lenguaje matemático, un problema de optimización consiste en hallar un valor extremo a una función bajo alguna restricción. La invención y el desarrollo del cálculo diferencial e integral proporcionó herramientas para poder abordar estos problemas. En matemáticas, un problema que generalmente se plantea cuando se tienen dos cantidades relacionadas es maximizar alguna mientras la otra se queda fija. Por ejemplo, un problema clásico en optimización consiste en hallar, de entre todas las figuras planas con perímetro fijo, aquella que encierra la mayor área posible. A este problema se le conoce como el problema isoperimétrico clásico.

En teoría de gráficas (o grafos), una cuestión que se presenta con frecuencia es el de determinar qué tan bien conectada está una gráfica. Resulta natural la pregunta ¿cómo medimos el nivel de conexión que tiene una gráfica? En este trabajo presentamos dos formas de cuantificar esto: por un lado la conectividad algebraica y por otro la *resistencia total*. Ambas cantidades se definen a partir del operador conocido como laplaciano u operador de Laplace de la gráfica, por lo que estas dos magnitudes están en principio relacionadas entre sí. Sin embargo, las definiciones de ambas son muy distintas y no es en general sencillo establecer relaciones entre ellas. La conectividad algebraica corresponde al segundo eigenvalor más pequeño del laplaciano. Dicho valor se ha estudiado en la literatura como cuantificador de la robustez de una gráfica (c.f. [1]). Su estudio se remonta al trabajo de M. Fiedler (cf. [11], [12] y [14]), que fue quien acuñó el término de conectividad algebraica. Por otro lado, la resistencia total de una gráfica es la suma de todas las distancias entre los vértices de la gráfica, en donde la

distancia considerada es la métrica de resistencia efectiva. La métrica de resistencia efectiva mide que tan bien están conectados dos vértices (e.g. [22]), por lo que la resistencia total es una manera natural de medir el nivel de conectividad global de una gráfica.

Consideramos estas dos maneras de cuantificar la conectividad global de una gráfica y abordamos el problema de maximizar la conectividad algebraica con la condición de que la resistencia total sea fija. Más en concreto, el objetivo es asignar pesos a la gráfica que proporcionen el mayor valor posible a la conectividad algebraica con la condición de que la resistencia total esté fija. Debido a que la conectividad algebraica y la resistencia total son funciones de los pesos, el problema se traduce en maximizar una función de varias variables bajo una restricción. La manera en que abordamos el problema se basa en la forma en la que Fiedler abordó el problema que propuso en [14], el cual consiste en maximizar la conectividad algebraica sujeta a que el promedio de todos los valores en las aristas sea uno. Fiedler demostró que, en dicho problema, el peso que proporciona la conectividad algebraica máxima se encuentra en el subconjunto de pesos tales que en aristas equivalentes toman el mismo valor. Análogo a este resultado de Fiedler, proponemos la conjetura de que, en el problema de maximizar la conectividad algebraica con resistencia total fija en caminos, la conectividad algebraica máxima debe alcanzarse en un peso que tiene la propiedad de que en aristas equivalentes toma el mismo valor. En este trabajo resolvemos el problema en P_3 y P_4 y observamos que en esos casos la conjetura es cierta.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera. En el primer capítulo nos dedicamos a introducir un poco de teoría básica de operadores lineales auto-adjuntos en espacios de dimensión finita y de reducibilidad de matrices. En el capítulo 2 hablamos de nociones básicas de teoría de gráficas, introducimos el operador de Laplace en gráficas y enunciamos algunas de sus propiedades. En el capítulo 3 presentamos la métrica de resistencia efectiva, a partir de la cual se define la resistencia total. En el capítulo 4 hablamos de la conectividad algebraica y los vectores Fiedler. Finalmente, en el último capítulo presentamos el problema, propuesto por Fiedler, de encontrar la conectividad algebraica absoluta 5.1. El material original de esta tesis está contenida en la sección 5.2, en la que se propone encontrar la conectividad algebraica máxima cuando la resistencia total permanece fija.

Capítulo 1

Preliminares

El propósito de este capítulo es revisar algunos resultados básicos sobre operadores lineales auto-adjuntos y teoría de matrices que usaremos a lo largo de este trabajo. Más específicamente, en la sección 1.1, presentamos una prueba del teorema de los ejes principales, introducimos el cociente de Rayleigh y el principio del mini-max de Courant-Fischer-Weyl. Finalmente, en la sección 1.2 hablamos de algunos resultados sobre irreducibilidad de matrices que usaremos en el capítulo 4.

1.1. Operadores lineales auto-adjuntos

Los resultados de álgebra lineal presentados en esta sección son bien conocidos y pueden consultarse, por ejemplo, en [4], [23] y [26]. Durante todo este trabajo, los espacios vectoriales considerados serán de dimensión finita. En esta sección los espacios vectoriales serán reales o complejos, en el resto del trabajo serán sobre el campo de los números reales. El objeto central de estudio de esta sección son los operadores lineales auto-adjuntos. Los operadores lineales auto-adjuntos pertenecen a la clase particular de operadores lineales que coinciden con su operador adjunto (Teorema 1.1.2).

Con espacio vectorial con producto interno nos referimos a la definición 1.1.1. Usamos la notación $\bar{\lambda}$ para referirnos al conjugado de un número complejo λ .

Definición 1.1.1. *Sea V un espacio vectorial real o complejo. La función*

$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \rightarrow \mathbb{C}$ (si V es real $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \rightarrow \mathbb{R}$) es un producto interno si cumple las siguientes propiedades:

1. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ para todos $u, v \in V$.
2. $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$ para todos $u, v, w \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
3. $\langle u, u \rangle \geq 0$ para todo $u \in V$ con igualdad si y solo si $u = 0$.

Note que, si V es un espacio vectorial real, la propiedad 1 se puede escribir como: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ para todos $u, v \in V$. De la definición de espacio vectorial sobre \mathbb{C} con producto interno se desprende la siguiente igualdad, $\langle w, \alpha u + \beta v \rangle = \bar{\alpha} \langle w, u \rangle + \bar{\beta} \langle w, v \rangle$.

Dos elementos, u y v , de un espacio vectorial complejo con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son **ortogonales** si $\langle u, v \rangle = 0$. Una base B de un espacio vectorial con producto interno es **ortonormal** si $\|u\| = 1$ para todo elemento u en B y si $\langle u, v \rangle = 0$ para todos $u \neq v$ en B . La norma asociada al producto interno es $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. En el teorema 1.1.2 definimos el operador adjunto y presentamos una demostración de su existencia, la unicidad del adjunto se puede demostrar a partir del teorema de representación de Riesz (e.g. [4]).

Teorema 1.1.2. *Sea V un espacio vectorial, real o complejo, sea $T : V \rightarrow V$ un operador lineal. Existe un único operador lineal $T^* : V \rightarrow V$ tal que para todos $u, v \in V$*

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle.$$

Decimos que el operador T^ es el operador adjunto de T .*

Demostración. Iniciamos con el caso complejo. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V , la cual, podemos suponer que es ortonormal por el proceso de Gram-Schmidt (e.g. [23]). Definimos T^* como

$$T^*v = \langle v, Tv_1 \rangle v_1 + \dots + \langle v, Tv_n \rangle v_n.$$

Entonces, T^* es lineal: aprovechando la linealidad de T y la linealidad del producto interno en la primera entrada, dados $u, v \in V$ y escalares α y β

se tiene que

$$\begin{aligned} T^*(\alpha u + \beta v) &= \langle \alpha u + \beta v, Tv_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle \alpha u + \beta v, Tv_n \rangle v_n \\ &= \alpha (\langle u, Tv_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle u, Tv_n \rangle v_n) + \beta (\langle v, Tv_1 \rangle v_1 + \cdots \\ &\quad + \langle v, Tv_n \rangle v_n) \\ &= \alpha T^*u + \beta T^*v. \end{aligned}$$

Ahora, para cualesquiera $u, v \in V$ se tiene que,

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

para algunos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ únicos y luego

$$\begin{aligned} \langle Tu, v \rangle &= \langle \alpha_1 Tv_1 + \cdots + \alpha_n Tv_n, v \rangle \\ &= \alpha_1 \langle Tv_1, v \rangle + \cdots + \alpha_n \langle Tv_n, v \rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \langle u, T^*v \rangle &= \langle u, \langle v, Tv_1 \rangle v_1 + \cdots + \langle v, Tv_n \rangle v_n \rangle \\ &= \overline{\langle v, Tv_1 \rangle} \langle u, v_1 \rangle + \cdots + \overline{\langle v, Tv_n \rangle} \langle u, v_n \rangle \\ &= \langle Tv_1, v \rangle \langle u, v_1 \rangle + \cdots + \langle Tv_n, v \rangle \langle u, v_n \rangle. \end{aligned}$$

Pero, aprovechando que la base es ortonormal, para todo $i = 1, \dots, n$ se tiene que

$$\begin{aligned} \langle u, v_i \rangle &= \langle \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, v_i \rangle \\ &= \alpha_1 \langle v_1, v_i \rangle + \cdots + \alpha_n \langle v_n, v_i \rangle \\ &= \alpha_i. \end{aligned}$$

De donde se sigue la igualdad

$$\langle u, T^*v \rangle = \alpha_1 \langle Tv_1, v \rangle + \cdots + \alpha_n \langle Tv_n, v \rangle.$$

Por lo tanto,

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle$$

como se quería. Finalmente, la unicidad se sigue directamente del teorema de representación de Riesz (e.g. [4]). El caso real es completamente análogo usando que, en este caso, se tiene la igualdad $\langle Tu, v \rangle = \langle v, Tu \rangle$ para todos $u, v \in V$. \square

Un operador lineal es auto-adjunto si es igual a su operador adjunto. De manera más específica:

Definición 1.1.3. *Sea V un espacio vectorial, real o complejo, con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Decimos que un operador lineal $T : V \rightarrow V$ es auto-adjunto si $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle$ para todos $u, v \in V$.*

A la función $(u, v) \mapsto \langle Tu, v \rangle$ se le conoce como la **forma bilineal** generada por T , mientras que $u \mapsto \langle Tu, u \rangle$ es la **forma cuadrática** generada por T . El **complemento ortogonal** de un subespacio W es el subespacio dado por

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0, \text{ para todo } w \in W\}.$$

Los siguientes lemas y el teorema 1.1.6 son consecuencia directa de la definición de operador lineal auto-adjunto.

Lema 1.1.4. *Los eigenvalores de un operador lineal auto-adjunto son reales.*

Demostración. Sea λ un eigenvalor de T y u un eigenvector asociado. Tenemos que, al ser T auto-adjunto, $\langle Tu, u \rangle - \langle u, Tu \rangle = 0$. Como u es eigenvector asociado a λ , $(\lambda - \bar{\lambda})\langle u, u \rangle = 0$. Pero, como $\langle u, u \rangle = \|u\|^2 \neq 0$, necesariamente $\lambda = \bar{\lambda}$, lo cual implica que λ es real. \square

Lema 1.1.5. *Los eigenvectores de un operador lineal auto-adjunto asociados a distintos eigenvalores son ortogonales.*

Demostración. Sean λ_1 y λ_2 eigenvalores distintos de T con u_1 y u_2 eigenvectores asociados, respectivamente. Por hipótesis, $\langle Tu_1, u_2 \rangle - \langle u_1, Tu_2 \rangle = 0$. Pero, esto es $\lambda_1 \langle u_1, u_2 \rangle - \lambda_2 \langle u_1, u_2 \rangle = (\lambda_1 - \lambda_2) \langle u_1, u_2 \rangle = 0$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se obtiene que $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ como se quería. \square

El siguiente teorema es el caso particular cuando T es auto-adjunto. En su forma general nos dice que, $\ker T = R(T^*)^\perp$, siendo $R(T^*)^\perp$ el complemento ortogonal de la imagen de T^* .

Teorema 1.1.6. *Sea $T : V \rightarrow V$ un operador lineal auto-adjunto. Entonces, $\ker T = R(T)^\perp$, donde $R(T)$ denota a la imagen de T .*

Demostración. Sea $u \in \ker T$. Para todo $v \in V$, $0 = \langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle$, con lo cual se tiene que $\ker T \subseteq R(T)^\perp$. Sea $u \in V$ tal que $\langle u, Tv \rangle = 0$ para todo $v \in V$, luego, $\langle Tu, v \rangle = 0$ para todo $v \in V$. En particular, si ponemos $v = Tu$, tenemos $\|Tu\|^2 = 0$, lo que implica que $Tu = 0$, es decir, $u \in \ker T$. \square

Dentro de la clase de operadores lineales auto-adjuntos, decimos que un operador T es **semi-definido positivo** si $\langle Tu, u \rangle \geq 0$ para todo vector u , y si $\langle Tu, u \rangle > 0$ para todo $u \neq 0$, decimos que T es **definido positivo**. Una observación inmediata es que el kernel de un operador definido positivo consiste únicamente del vector cero, lo que significa que es inyectivo. Otras consecuencias de las definiciones anteriores son que los eigenvalores de un operador definido positivo son positivos y los eigenvalores de un operador semi-definido positivo son no negativos. Dichos resultados se obtienen de las desigualdades $\lambda \langle u, u \rangle > 0$ y $\lambda \langle u, u \rangle \geq 0$, respectivamente, en donde u es un eigenvector asociado a λ .

Lo siguiente que haremos será presentar una serie de resultados con el fin de dar una demostración del teorema de los ejes principales, también conocido como el teorema espectral real (Teorema 1.1.15). Recordemos lo que significa diagonalizar un operador lineal.

Definición 1.1.7. *Un operador lineal $T : V \rightarrow V$, donde V es un espacio vectorial, es diagonalizable si existe una base de V de formada por eigenvectores de T .*

Dada una base $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ de V , cada vector $u \in V$ puede escribirse de manera única como combinación lineal de los elementos de la base. Es decir, existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ únicos tales que

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n.$$

Entonces, podemos identificar a cada vector u con un vector columna cuyas entradas son los escalares α_i :

$$u \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Dicho vector columna es la representación de u como vector columna respecto a la base B . Note que la representación de cada u_i respecto a la base es el vector columna canónico e_i , es decir, el vector columna cuya i -ésima entrada es 1 y 0 en las demás entradas. Un operador lineal $T : V \rightarrow V$ podemos identificarlo con una matriz cuyas columnas son los vectores columna Tv_i , donde cada Tv_i está representado respecto a la base B , es decir

$$T \mapsto \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Tv_1 & Tv_2 & \cdots & Tv_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

Dicha matriz es la representación matricial de T respecto a la base B . Abusando de la notación, pensaremos en un operador lineal como una matriz según el contexto. Si B' es otra base de V y T' es la representación matricial de T respecto a dicha base, existe una matriz P tal que

$$T = PT'P^{-1}.$$

Note que, si $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ es una base como en la definición 1.1.7, $Tu_i = \lambda_i u_i$ para todo i , donde λ_i es eigenvalor de T asociado a u_i . Luego, la representación matricial de T respecto a la base B es

$$T \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Es decir, la representación matricial de T respecto a dicha base es diagonal, en la diagonal están los eigenvalores de T . Sea D la matriz diagonal mencionada y T la representación matricial de T respecto a la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$. Si P es la matriz cuyas columnas son los eigenvectores de T normalizados, P es una matriz unitaria, es decir $P^{-1} = P^*$, donde P^* denota la adjunta de P , esto es la matriz transpuesta (caso real) o transpuesta conjugada (caso complejo). Se tiene la igualdad

$$T = PDP^*$$

La igualdad anterior se puede escribir como

$$T = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i u_i^*.$$

donde los u_i son los eigenvectores de T como vectores columna. Los resultados 1.1.8 y 1.1.9, los usaremos para demostrar que todo operador lineal auto-adjunto definido en un espacio vectorial real tiene un eigenvalor (resultado 1.1.11). El lema 1.1.8 es un resultado sobre polinomios, cuya demostración puede encontrarse en [4].

Lema 1.1.8. *Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ un polinomio no constante con coeficientes reales. Entonces, p tiene una única factorización, salvo orden de factores, de la forma*

$$p(x) = c(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_m)(x^2 + b_1x + c_1) \cdots (x^2 + b_qx + c_q),$$

donde, $c, \lambda_i, b_j, c_j \in \mathbb{R}$ y $b_j^2 < 4c_j$ para todo $i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, q$.

Lema 1.1.9. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \rightarrow V$ un operador lineal auto-adjunto. Si a, b y c son números reales tales que $b^2 < 4c$, entonces el operador*

$$T^2 + bT + cI$$

es definido positivo.

Demostración. Primero, de acuerdo con la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que para todo $v \in V$

$$-b\langle Tv, v \rangle \leq |b|\langle Tv, v \rangle \leq |b|(\|Tv\|)(\|v\|),$$

es decir, $-|b|(\|Tv\|)(\|v\|) \leq b\langle Tv, v \rangle$. Ahora, para todo $v \in V \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \langle (T^2 + bT + cI)v, v \rangle &= \langle T^2v, v \rangle + b\langle Tv, v \rangle + c\langle v, v \rangle \\ &= \langle Tv, Tv \rangle + b\langle Tv, v \rangle + c\|v\|^2 \\ &\geq \|Tv\|^2 - |b|(\|Tv\|)(\|v\|) + c\|v\|^2 \\ &= \left(\|Tv\| - \frac{|b|}{2}\|v\| \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4} \right) \|v\|^2 \\ &> 0, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se usó que T es auto-adjunto. Por lo tanto, como lo anterior fue para todo vector arbitrario distinto de cero, tenemos que $T^2 + bT + cI$ es un operador definido positivo, como se quería demostrar. \square

En un espacio vectorial complejo, la existencia de un eigenvalor queda garantizada por el teorema fundamental del álgebra:

Teorema 1.1.10. (Teorema fundamental del álgebra)

Todo polinomio no constante con coeficientes complejos tiene una raíz.

Una demostración de este resultado se puede encontrar en [2]. El siguiente lema nos dice que todo operador lineal auto-adjunto en un espacio vectorial real también tiene al menos un eigenvalor y por lo tanto, un eigenvector.

Lema 1.1.11. *Sea V un espacio vectorial real no trivial con producto interno. Si $T : V \rightarrow V$ es un operador lineal auto-adjunto, T tiene un eigenvalor.*

Demostración. Supongamos que $\dim V = n$. Para $v \neq 0$ consideremos el conjunto $\{v, Tv, T^2v, \dots, T^n v\}$. Dicho conjunto es linealmente dependiente debido a que en V no puede existir un conjunto linealmente independiente con más de n vectores. Entonces, existen coeficientes, digamos a_j , no todos iguales a cero tales que

$$0 = a_0v + a_1Tv + a_2T^2v + \dots + a_nT^n v.$$

Ahora, con los coeficientes anteriores, consideremos el polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

que no es constante porque, si $a_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, n$, tendríamos que $0 = a_0v$, lo cual es imposible si $v \neq 0$ y $a_0 \neq 0$. Así, podemos aplicar el lema 1.1.8, esto es, p puede escribirse como

$$p(x) = x(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_m)(x^2 + b_1x + c_1) \cdots (x^2 + b_qx + c_q),$$

donde, $c \neq 0$ y los números a_j , b_j y c_j son reales tales que $b_j < 4c_j$ para todo j . Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= a_0v + a_1Tv + \cdots + a_nT^n v \\ &= (a_0 + a_1T + \cdots + a_nT^n)v \\ &= c(T^2 + b_1T + c_1I) \cdots (T^2 + b_qT + c_qI)(T - \lambda_1I) \cdots (T - \lambda_mI)v. \end{aligned}$$

Como $T^2 + b_jT + c_jI$ es definido positivo (lema 1.1.9), y por lo tanto inyectivo, para todo $j = 1, \dots, q$, se sigue que, necesariamente

$$0 = (T - \lambda_1I) \cdots (T - \lambda_mI)v.$$

Por lo tanto, $T - \lambda_iI$ no es invertible para algún $i = 1, \dots, m$, esto es, T tiene un eigenvalor. \square

Usamos la notación $T|_W$ para referirnos a la restricción de T al subespacio W y $T(W)$ para referirnos a la imagen de W bajo T . Una característica de los operadores lineales auto-adjuntos es que si $T(W) \subseteq W$, también $T(W^\perp) \subseteq W^\perp$ (proposición 1.1.13). En otras palabras, en dicho caso, los operadores auto-adjuntos preservan la ortogonalidad. Los subespacios tales que su imagen bajo T queda contenido en el mismo subespacio tienen un nombre:

Definición 1.1.12. *Un subespacio W de V es invariante bajo T si*

$$T(W) \subseteq W.$$

Proposición 1.1.13. *Sea $T : V \rightarrow V$ un operador lineal auto-adjunto y W un subespacio invariante bajo T . Entonces, W^\perp es invariante bajo T .*

Demostración. Tomemos $v \in W^\perp$ arbitrario. Como $Tw \in W$ para toda $w \in W$, $\langle v, Tw \rangle = 0$. Entonces, puesto que T es auto-adjunto,

$$0 = \langle v, Tw \rangle = \langle Tv, w \rangle.$$

Así, $Tv \in W^\perp$ y, al ser w y v vectores arbitrarios, se sigue que

$$T(W^\perp) \subseteq W^\perp.$$

\square

El lema 1.1.14 nos dice que la propiedad de ser auto-adjunto se preserva en subespacios invariantes. Dicho resultado lo usaremos en la demostración del teorema 1.1.15.

Lema 1.1.14. *Sea T un operador lineal auto-adjunto y W un subespacio que es invariante bajo T . Entonces, $T|_W$ es auto-adjunto.*

Demostración. Note que $T|_W : W \rightarrow W$ y que para todos $u, v \in W$, aplicar T y $T|_W$ da el mismo resultado. Entonces,

$$\langle T|_W u, v \rangle = \langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle = \langle u, T|_W v \rangle,$$

como se quería. □

Teorema 1.1.15. (Teorema de los ejes principales)

Consideremos V un espacio vectorial real con producto interno. Supongamos que $T : V \rightarrow V$ es un operador lineal auto-adjunto. Entonces, existe una base ortonormal de eigenvectores de T .

Demostración. La demostración se hará por inducción sobre la dimensión de V . Si $\dim V = 1$, entonces T es de la forma $Tv = av$ para algún número a , esto es, cualquier $v \neq 0$ es eigenvector de T y la matriz de T es diagonal. Por otro lado, podemos elegir v de tal manera que $\|v\| = 1$ y así $B = \{v\}$ es una base ortonormal de eigenvectores de T . Supongamos que $\dim V > 1$ y que todo espacio de dimensión menor que la de V tiene una base ortonormal de eigenvectores de cualquier operador lineal auto-adjunto sobre dicho espacio. De acuerdo con el lema 1.1.11, T tiene un eigenvector, digamos u_1 , el cual, podemos suponer, sin perder generalidad, que tiene norma uno. Ahora, consideremos el subespacio $U = \text{Gen}(\{u_1\})$, es decir, U es el subespacio generado por el vector u_1 . Como U es invariante bajo T , podemos usar la proposición 1.1.13 y el lema 1.1.14 para concluir que $T|_{U^\perp} : U^\perp \rightarrow U^\perp$ es auto-adjunto. Luego, por hipótesis de inducción (ya que $\dim U^\perp < \dim V$) U^\perp tiene una base ortonormal de eigenvectores de $T|_{U^\perp}$, sea $\{u_2, \dots, u_m\}$ esta base. Ahora, $B = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ es una base ortonormal de V de eigenvectores de T . □

A continuación, en la definición 1.1.16 presentamos el llamado **cociente de Rayleigh** de un operador lineal auto-adjunto. En la proposición 1.1.17

se da una demostración de que su rango es el intervalo $[\lambda_1, \lambda_n]$ siendo λ_1 el eigenvalor más pequeño y λ_n el eigenvalor más grande. Esto permite establecer cotas de los eigenvalores de un operador lineal auto-adjunto al evaluar el cociente de Rayleigh en vectores del espacio vectorial. En el capítulo 4 y 5 usaremos el cociente de Rayleigh para demostrar ciertas propiedades del segundo eigenvalor más pequeño de un operador lineal auto-adjunto. Los eigenvalores de un operador lineal auto-adjunto pueden expresarse en términos de este cociente. Puesto que en este trabajo una tarea principal será estimar el segundo eigenvalor más pequeño de cierto operador, el cociente de Rayleigh resulta de gran importancia para nosotros.

Definición 1.1.16. *Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea $T : V \rightarrow V$ un operador lineal auto-adjunto. El cociente de Rayleigh de T es la función $\varrho_T : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\varrho_T(u) = \frac{\langle Tu, u \rangle}{\langle u, u \rangle}.$$

Nótese que el valor del cociente de Rayleigh evaluado en múltiplos de un vector siempre es el mismo, es decir, el valor del cociente de Rayleigh depende únicamente de la dirección de los vectores. También, si u es un eigenvector asociado a un eigenvalor λ , $\varrho_T(u) = \lambda$. Es decir, al evaluar el cociente de Rayleigh en un eigenvector, nos devuelve el eigenvalor asociado.

Proposición 1.1.17. *Sean $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ los eigenvalores de un operador lineal auto-adjunto $T : V \rightarrow V$. Entonces*

$$\lambda_1 \leq \varrho_T(u) \leq \lambda_n$$

para todo $u \in V \setminus \{0\}$.

Demostración. De acuerdo con el teorema de los ejes principales, existe una base ortonormal, $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, de eigenvectores de T . Entonces, dado $u \in V$, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tales que $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$. Luego, usando la linealidad de T y el hecho de que B es una base ortonormal

de eigenvectores, tenemos

$$\begin{aligned}\langle Tu, u \rangle &= \left\langle T \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right), \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \lambda_i \langle u_i, u_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i.\end{aligned}$$

De forma similar,

$$\begin{aligned}\langle u, u \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \langle u_i, u_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2.\end{aligned}$$

Ahora, dado que la desigualdad

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$$

es cierta, tenemos que

$$\lambda_1 \leq \frac{\langle Tu, u \rangle}{\langle u, u \rangle} \leq \lambda_n,$$

que es la desigualdad buscada. \square

Una consecuencia de la proposición anterior es que podemos encontrar cotas superiores para el eigenvalor más pequeño y cotas inferiores para el eigenvalor más grande de un operador lineal auto-adjunto, evaluando en

elementos del espacio vectorial. Este resultado puede usarse para poder encontrar cotas superiores e inferiores de cualquier eigenvalor λ_j de la siguiente manera:

Si $T : V \rightarrow V$ es un operador lineal auto-adjunto, el teorema de los ejes principales nos dice que existe una base ortonormal de V compuesta de eigenvectores de T , digamos $B = \{u_1, \dots, u_n\}$. Entonces, consideremos el subespacio $W_1 = \text{Gen}(\{u_2, \dots, u_n\})$, luego, $T|_{W_1}$ tiene eigenvalores

$$\lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Así, aplicando la proposición 1.1.17 a $T|_{W_1}$, tenemos que

$$\lambda_2 \leq \varrho_T(u) \leq \lambda_n,$$

para todo $u \in W_1 \setminus \{0\}$. En general,

$$\lambda_i \leq \varrho_T(u) \leq \lambda_n$$

para todo $u \in W_i \setminus \{0\}$, donde $W_i = \text{Gen}(\{u_i, \dots, u_n\})$. De forma similar, podemos acotar por abajo a los eigenvectores de T , pues

$$\lambda_1 \leq \varrho_T(u) \leq \lambda_{n-i}$$

para todo $u \in Z_i \setminus \{0\}$, donde $Z_i = \text{Gen}(\{u_1, \dots, u_{n-i}\})$.

La técnica descrita en el párrafo anterior, será la que usaremos principalmente para las aproximaciones de los eigenvalores que queremos encontrar. Finalmente, presentamos la demostración del resultado conocido como principio del mini-max de Courant-Fischer-Weyl que nos permite expresar los eigenvalores de un operador lineal auto-adjunto en términos del cociente de Rayleigh.

Teorema 1.1.18. (Principio del mini-max de Courant-Fisher-Weyl)

Sea $T : V \rightarrow V$ un operador lineal auto-adjunto y sean $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ los eigenvalores de T . Entonces

$$\lambda_k = \max_Y \min_{u \neq 0} \varrho_T(u) \quad Y \subset X \text{ subespacio con } \dim Y = n - (k - 1).$$

$$\lambda_k = \min_Y \max_{u \neq 0} \varrho_T(u) \quad Y \subset X \text{ subespacio con } \dim Y = k.$$

Demostración. Sea $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base ortonormal de eigenvectores de T . Consideremos el subespacio de dimensión k , $Z = \text{Gen}(\{u_1, \dots, u_k\})$. Tomemos un subespacio, $Y \subseteq V$, con $\dim Y = n - (k - 1)$ y notemos que

$$\dim Z + \dim Y = n + 1.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \dim(Y + Z) &= \dim Y + \dim Z - \dim(Z \cap Y) \\ &\leq \dim V = n. \end{aligned}$$

Así, $\dim(Y \cap Z) \geq 1$. Lo anterior significa que $Y \cap Z \neq \{0\}$. Luego, tenemos $\lambda_1 \leq \varrho_T(u) \leq \lambda_k$ para todo $u \in Z \setminus \{0\}$, en particular, $\varrho_T(u) \leq \lambda_k$ para todo $u \in (Y \cap Z) \setminus \{0\}$, entonces,

$$\min_{u \in Y \setminus \{0\}} \varrho_T(u) \leq \lambda_k.$$

Como Y fue un subespacio arbitrario de dimensión $n - (k - 1)$, se sigue que

$$\max_Y \min_{u \neq 0} \varrho_T(u) \leq \lambda_k,$$

para todo subespacio Y de dimensión $n - (k - 1)$. En particular, si ponemos $Y = \text{Gen}(\{u_k, \dots, u_n\})$, entonces $\dim Y = n - (k - 1)$ y además $\lambda_k \leq \varrho_T(u)$ para todo $u \in Y \setminus \{0\}$. De este modo,

$$\lambda_k \leq \max_Y \min_{u \neq 0} \varrho_T(u)$$

y por lo tanto,

$$\lambda_k = \max_Y \min_{u \neq 0} \varrho_T(u) \quad Y \subset X \text{ subespacio con } \dim Y = n - (k - 1)$$

como se quería. Para demostrar la otra igualdad, sea $Z = \text{Gen}(\{u_k, \dots, u_n\})$, de manera que, $\dim Z = n - (k - 1)$. Sea Y un subespacio de V de dimensión k . Nuevamente, como $\dim(Y + Z) = n + 1$, necesariamente $\dim(Y \cap Z) \geq 1$, entonces existe al menos un $v \in (Y \cap Z) \setminus \{0\}$. Por otro lado, $\lambda_k \leq \varrho_T(u)$ para todo $u \in Z \setminus \{0\}$, en particular esto es cierto para todo $u \in (Y \cap Z) \setminus \{0\}$. De lo anterior tenemos que

$$\lambda_k \leq \max_{u \in Y \setminus \{0\}} \varrho_T(u).$$

Al ser Y un subespacio arbitrario de dimensión k , tenemos que

$$\lambda_k \leq \min_Y \max_{u \neq 0} \varrho_T(u) \quad Y \subset X \text{ subespacio con } \dim Y = k.$$

Por otro lado, si elegimos $Y = \text{Gen}(\{u_1, \dots, u_k\})$, tenemos que $\dim Y = k$ y además $\varrho_T(u) \leq \lambda_k$ para todo $u \in Y \setminus \{0\}$, entonces se tiene que

$$\max_{u \neq 0} \varrho_T(u) \leq \lambda_k.$$

Por lo tanto,

$$\min_Y \max_{v \neq 0} \varrho_T(v) \leq \lambda_k \quad Y \subset X \text{ subespacio con } \dim Y = k,$$

con lo que la otra igualdad queda demostrada. \square

1.2. Irreducibilidad de matrices

En esta sección presentamos el concepto de matriz irreducible. Como veremos en el capítulo 4, una gráfica es conexa si y solo si su matriz laplaciana (capítulo 2) es irreducible. Este resultado nos será útil para poder demostrar que ciertas subgráficas son conexas. En especial, el resultado 1.2.4 será de gran importancia para tal propósito.

En lo que sigue, sea $[n] = \{1, \dots, n\}$. Con **matriz positiva** nos referimos a una matriz cuyas entradas son todas positivas (similarmente, podemos hablar de matrices negativas, no negativas y no positivas). Si un vector u tiene todas sus entradas positivas, decimos que u es positivo (análogamente, tenemos vectores negativos, no positivos y no negativos).

Definición 1.2.1. Una matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño $n \times n$ es irreducible si para ninguna partición no trivial de $[n]$, digamos $\{N_1, N_2\}$, se tiene que $a_{ij} = 0$ siempre que $i \in N_1$ y $j \in N_2$.

Por ejemplo, consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Si N_1 y N_2 forman una partición de $[3] = \{1, 2, 3\}$, necesariamente N_1 o N_2 posee un único elemento. Esto significa que en la misma fila o en la misma columna debe haber al menos dos entradas iguales a cero, lo cual no ocurre. Entonces, la matriz A es irreducible. En cambio, la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

no es irreducible, pues las entradas $b_{2,1}$ y $b_{2,3}$ son cero, entonces $N_1 = \{2\}$ y $N_2 = \{1, 3\}$ forman una partición tal que $b_{ij} = 0$ si $i \in N_1$ y $j \in N_2$. El siguiente lema es una consecuencia directa de la definición de matriz irreducible.

Lema 1.2.2. *La matriz $A + cI$, donde c es una constante, es irreducible si y solo si A es irreducible.*

Demostración. Tenemos que, si $B = A + cI$ tiene entradas b_{ij} y A tiene entradas a_{ij} , entonces $a_{ij} = b_{ij}$ siempre que $i \neq j$. Luego, para cualquier partición $\{N_1, N_2\}$ de $[n]$, tenemos $a_{ij} = b_{ij}$ si $i \in N_1$ y $j \in N_2$. Por lo tanto, si B es irreducible, A también debe serlo, y viceversa. \square

El siguiente teorema 1.2.3 es el resultado principal que usaremos en la sección 4.2 del capítulo 4. Se trata de una versión del teorema de Perron-Frobenius. En general, los teoremas de Perron-Frobenius garantizan la existencia de un eigenvalor positivo con eigenvector asociado también positivo. Para la demostración de este teorema ver por ejemplo [18].

Teorema 1.2.3. (Perron-Frobenius) *Si A es una matriz no negativa e irreducible, su eigenvalor más grande es positivo y simple, además, existe un eigenvector asociado positivo.*

La prueba del siguiente resultado puede consultarse en [12].

Teorema 1.2.4. *Sea A una matriz $n \times n$ no negativa, simétrica e irreducible con eigenvalores $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Sea $u > 0$ un eigenvector asociado a λ_n*

y v un eigenvector asociado a λ_{n-1} . Entonces, para cualquier $\alpha \geq 0$, la submatriz $A(M_\alpha)$, donde

$$M_\alpha = \{i \in [n] \mid v_i + \alpha u_i \geq 0\},$$

es irreducible. De forma similar, para $\alpha \leq 0$, la submatriz $A(M'_\alpha)$, donde

$$M'_\alpha = \{i \in [n] \mid v_i + \alpha u_i \leq 0\},$$

es irreducible.

En el enunciado del teorema anterior, la existencia de tal eigenvector queda garantizada por el teorema de Perron-Frobenius.

Capítulo 2

El operador de Laplace en gráficas

En este capítulo presentaremos ideas y conceptos básicos sobre gráficas (secciones 2.1-2.3) así como la teoría básica del operador de Laplace en gráficas (sección 2.4). El operador de Laplace es fundamental en el presente trabajo, ya que es central en las definiciones de las dos cantidades asociadas a gráficas con peso que son el estudio principal de este trabajo: por un lado la resistencia efectiva y por otro la conectividad algebraica. La primera la discutiremos en detalle en el capítulo 3, mientras que la segunda es el objeto de estudio del capítulo 4.

2.1. Gráficas

Iniciamos con la definición básica de gráfica (o grafo), así como la notación que usaremos a lo largo de este texto. Aquí, presentamos las construcciones y resultados que necesitamos para el desarrollo de este trabajo. Referimos a [7] y [17] para una exposición más extensa y detallada sobre el tema.

Definición 2.1.1. *Una gráfica G consiste en una pareja (V, E) donde V es un conjunto cuyos elementos llamamos vértices y E es un conjunto de parejas no ordenadas de vértices a las cuales llamamos aristas. Adicionalmente, si $\{a, b\} \in E$ decimos que los vértices a y b son adyacentes, en tal caso escribimos $a \sim b$.*

Si es necesario especificar el conjunto de vértices y aristas de una gráfica G , escribimos $V(G)$ y $E(G)$, respectivamente. Siempre consideraremos a V como un conjunto finito y las gráficas serán simples, es decir, no hay aristas dobles ni vértices que sean adyacentes a sí mismos. A lo largo de este texto usaremos la notación $ab = \{a, b\}$. Dado $ab \in E$ decimos que dicha arista es **incidente** en a y en b .

Es muy conveniente representar a cada gráfica con un dibujo, así que por convención dibujamos un círculo por cada vértice y unimos cada vértice con una curva para representar a una arista. Por ejemplo, la gráfica $G = (V, E)$ donde $V = \{a, b, c, d, e\}$ y $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$, se muestra en la figura 2.1.

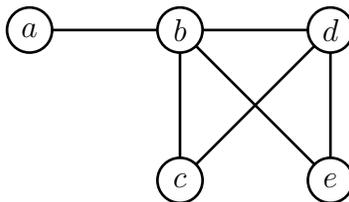


Figura 2.1: Ejemplo del dibujo de una gráfica

Para una misma gráfica podemos tener muchas representaciones. Es importante definir con precisión lo que significa que dos gráficas sean iguales. Es en este sentido que tenemos la siguiente definición.

Definición 2.1.2. *Dos gráficas $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son isomorfas si existe una biyección $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $xy \in E_1$ si y sólo si $\varphi(x)\varphi(y) \in E_2$. Si G_1 y G_2 son isomorfas escribimos $G_1 \cong G_2$.*

Nótese que dos gráficas isomorfas son iguales salvo la naturaleza del conjunto de vértices, pero esto es suficiente ya que de ser necesario solo basta volver a etiquetar los vértices. En un dibujo no nos importará la disposición de las aristas y vértices, así, por ejemplo, las gráficas en la figura 2.2 las consideraremos iguales. Algunas gráficas tienen nombres propios, presentamos algunas de ellas.



Figura 2.2: Gráficas isomorfas

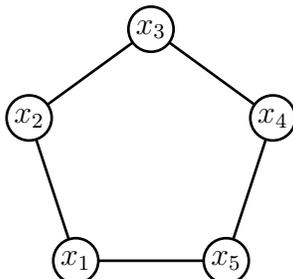
- **Caminos**

El camino de n vértices, P_n , con vértices $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ consiste en la gráfica cuyas aristas son de la forma $x_i x_{i+1}$ para $i = 1, \dots, n - 1$.

Figura 2.3: Camino de 4 vértices, P_4 .

- **Ciclos**

Denotamos por C_n al ciclo con n vértices. Si $V = \{x_1, \dots, x_n\}$, sus aristas son de la forma $x_i x_{i+1}$ para $i = 1, \dots, n - 1$ y agregamos la arista $x_1 x_n$.

Figura 2.4: Ciclo de 5 vértices, C_5 .

- **Completas**

La gráfica completa con n vértices, K_n , es la gráfica donde para cada par de vértices $x, y \in V$ se tiene que $xy \in E$.

- **Bipartitas**

Sea $V = V_1 \cup V_2$ con $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, entonces $K_{n,m}$, donde $m = |V_1|$

y $n = |V_2|$, denota a la gráfica tal que $xy \in E$ si y sólo si $x \in V_1$ y $y \in V_2$.

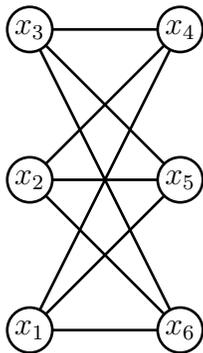


Figura 2.5: Bipartita $K_{3,3}$.

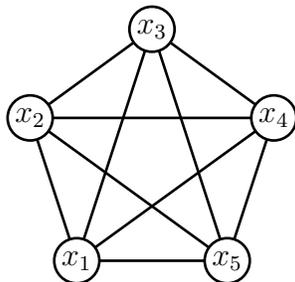


Figura 2.6: Completa de 5 vértices, K_5 .

Definición 2.1.3. Una subgráfica F de una gráfica G es una gráfica tal que $V(F) \subseteq V(G)$ y $E(F) \subseteq E(G)$.

Definición 2.1.4. Una subgráfica de G es inducida por un subconjunto de vértices U , si cumple que dos vértices son adyacentes si y sólo si son adyacentes en G . A tal gráfica podemos denotarla por $F(U)$ para especificar el subconjunto de vértices que la inducen.

Definición 2.1.5. Una gráfica $G = (V, E)$ es conexa si para cada par de vértices $x, y \in V$ existe una sucesión de vértices $\{x = x_1, x_2, \dots, y = x_n\}$ en V tal que $x_i x_{i+1} \in E$ para $i = 1, \dots, n - 1$. En caso contrario decimos que la gráfica es desconexa.

Que una gráfica $G = (V, E)$ sea desconexa es equivalente a que exista una partición no trivial $\{V_1, V_2\}$ de V de tal manera que ningún vértice de V_1 sea adyacente a un vértice de V_2 .

A las subgráficas inducidas conexas maximales de una gráfica G las llamamos **componentes conexas** de G . Finalmente, con **árbol** nos referimos a una gráfica conexas que no tiene ciclos como subgráficas. Un ejemplo de árbol lo podemos ver en la figura 2.7.

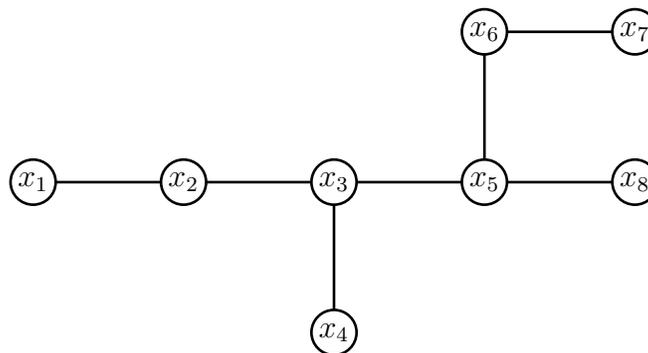


Figura 2.7: Ejemplo de árbol

2.2. Funciones sobre gráficas

Es de nuestro interés asignarle un número real a cada vértice, esto es, definir una función $u : V \rightarrow \mathbb{R}$. Dicha asignación la podemos representar en nuestro dibujo como en la figura 2.8, en donde a tal gráfica se le ha asignado la función u definida por: $u(a) = 1$, $u(b) = 7$, $u(d) = 5$, $u(c) = 11$ y $u(e) = 3$.

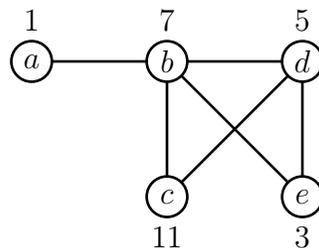


Figura 2.8: Gráfica con valores en sus vértices

Denotemos por $\ell(V)$ el conjunto de funciones que toman valores reales sobre el conjunto de vértices V . Se puede demostrar sin mucha dificultad que $\ell(V)$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} con la suma usual de funciones y producto por escalar. En todo lo que sigue es necesario fijar un orden de los vértices, pero, como hemos mencionado antes, el orden que elijamos no es importante, así que pongamos simplemente $V = \{x_1, \dots, x_n\}$. Con lo anterior, una base para $\ell(V)$ es $B = \{\chi_1, \dots, \chi_n\}$, donde χ_i es la función indicadora del vértice x_i , es decir,

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = x_i \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A este tipo de bases las llamaremos **bases naturales** de la gráfica.

Ahora bien, si $u \in \ell(V)$ entonces podemos identificar a dicha función como vector columna de \mathbb{R}^n , a saber,

$$u \mapsto \begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_n) \end{pmatrix}.$$

Pensaremos a un elemento de $\ell(V)$ indistintamente como vector columna de \mathbb{R}^n o como función sobre V . De este modo, la base natural B corresponde a la base canónica de \mathbb{R}^n .

Sobre $\ell(V)$ el producto interno que usaremos está dado por

$$\langle u, v \rangle = \sum_{x \in V} u(x)v(x).$$

2.3. Gráficas con pesos

En este trabajo estamos interesados en gráficas cuyas aristas se ha definido un peso, esto es, una función que asigna un valor positivo a cada arista.

Definición 2.3.1. *Un peso sobre una gráfica $G = (V, E)$ es una función $C : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

- 1.- $C_{x,y} = C_{y,x} > 0$ siempre que $xy \in E$
- 2.- $C_{x,y} = 0$ en otro caso.

Escribimos $G = (V, E, C)$.

O bien, podemos decir simplemente que un peso es una función positiva definida en el conjunto de aristas. Por ejemplo, en la figura 2.9 a C_3 se le ha definido un peso sobre sus aristas.

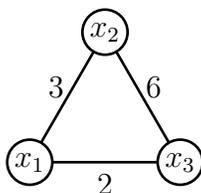


Figura 2.9: C_3 con pesos.

Para optimizar la notación escribimos $C_{i,j}$ en lugar de C_{x_i,x_j} y usaremos G_C para denotar que sobre la gráfica G se ha definido el peso C , en otras palabras, $G_C = (V, E, C)$. Particularmente, en los dibujos de las gráficas con peso idénticamente 1, no los escribiremos explícitamente (ver figura 2.10). Las gráficas usuales sin pesos son gráficas con peso idénticamente 1.

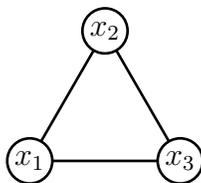


Figura 2.10: C_3 con peso idénticamente 1.

Definimos el **grado** de un vértice x como $g(x) = \sum_{y \sim x} C_{x,y}$, es decir, la suma de los pesos de las aristas incidentes en x . Notemos que podemos escribir

$$g(x) = \sum_{x,y \in V} C_{x,y}$$

2.4. Laplaciano sobre gráficas

El operador en el que estamos interesados es el llamado operador de Laplace o laplaciano sobre gráficas que presentamos en la siguiente definición.

Definición 2.4.1. Sea G_C una gráfica. El operador de Laplace o laplaciano $L(G_C) : \ell(V) \rightarrow \ell(V)$ sobre G_C está dado por Lu , donde

$$Lu(x) = \sum_{y \sim x} C_{x,y}(u(x) - u(y)).$$

A menos que sea necesario especificar, denotaremos a $L(G_C)$ como L .

El laplaciano se puede escribir en términos de otros dos operadores. A saber, el **operador de adyacencia** A , y el **operador de grado** denotado por D . Dado $u \in \ell(V)$, Au y Du son operadores definidos por

$$Du(x) = u(x) \sum_{y \sim x} C_{x,y} = u(x)g(x)$$

$$Au(x) = \sum_{y \sim x} C_{x,y}u(y).$$

Observemos que por ende se puede escribir

$$Lu(x) = \sum_{y \sim x} C_{x,y}u(x) - \sum_{y \sim x} C_{x,y}u(y) = Du(x) - Au(x).$$

Ahora, estos operadores tienen una representación matricial con respecto a la base natural $B = \{\chi_1, \dots, \chi_n\}$, que presentamos a continuación.

- La **matriz de grado** es la matriz asociada al operador de grado de una gráfica. Tenemos que

$$D\chi_i = \begin{pmatrix} D\chi_i(x_1) \\ \vdots \\ D\chi_i(x_n) \end{pmatrix},$$

donde

$$D\chi_i(x_j) = \chi_i(x_j)g(x_j) = \begin{cases} g(x_j) & \text{si } x_i = x_j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, la matriz de grado es

$$D = \begin{pmatrix} g(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g(x_n) \end{pmatrix}$$

- Para obtener la **matriz de adyacencia** notemos que

$$A\chi_i = \begin{pmatrix} A\chi_i(x_1) \\ \vdots \\ A\chi_i(x_n) \end{pmatrix},$$

donde

$$A\chi_i(x_j) = \sum_{x_k \sim x_j} C_{k,j} \chi_i(x_k) = \begin{cases} C_{i,j} & \text{si } x_i \sim x_j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

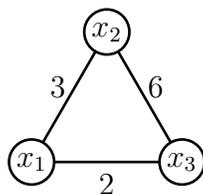
Entonces, la matriz de adyacencia está dada por $A = (a_{ij})$, donde

$$a_{ij} = \begin{cases} C_{i,j} & \text{si } x_i \sim x_j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Puesto que la **matriz laplaciana** puede obtenerse como $L = D - A$, entonces $L = (l_{ij})$ con

$$l_{ij} = \begin{cases} -C_{i,j} & \text{si } x_i \sim x_j \\ g(x_i) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por ejemplo, consideremos la gráfica



Tenemos que la matriz de adyacencia y la matriz de grado asociadas son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz laplaciana es

$$L = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 9 & -6 \\ -2 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

Observemos que la matriz laplaciana es simétrica, en consecuencia, el operador de Laplace es auto-adjunto. Puesto que las filas de la matriz laplaciana suman cero, toda función constante está en su kernel y, por lo tanto, no es invertible. Otras propiedades del laplaciano se pueden observar a partir del siguiente lema, en donde presentamos una expresión para la forma bilineal generada por L .

Teorema 2.4.2. *Para toda gráfica G_C se tiene que la forma bilineal generada por L es*

$$\langle Lu, v \rangle = \sum_{xy \in E} C_{x,y} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)).$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}\langle Lu, v \rangle &= \sum_{x \in V} (Lu)(x)v(x) \\ &= \sum_{x \in V} \left(\sum_{y \sim x} C_{x,y}(u(x) - u(y)) \right) v(x) \\ &= \sum_{x \in V} \sum_{y \in V} C_{x,y}(u(x) - u(y))v(x),\end{aligned}$$

luego, notemos que, por cada par de vértices $x, y \in V$ tales que $x \sim y$, en la suma anterior aparece el término

$$C_{x,y}[u(x) - u(y)]v(x) + C_{y,x}[u(y) - u(x)]v(y) = C_{x,y}(u(x) - u(y))(v(x) - v(y)),$$

de modo que es posible escribir

$$\langle Lu, v \rangle = \sum_{xy \in E} C_{x,y}(u(x) - u(y))(v(x) - v(y)).$$

□

Notemos que a partir de la expresión en el teorema 2.4.2, obtenemos una expresión para la forma cuadrática generada por L . A la forma cuadrática de L también se le conoce como la **energía del laplaciano** para la gráfica G_C (ver e.g. [21, 27]).

$$\langle Lu, u \rangle = \sum_{xy \in E} C_{x,y}(u(x) - u(y))^2. \quad (2.1)$$

A continuación, en el corolario 2.4.3 recopilamos algunas de las propiedades del operador de Laplace.

Corolario 2.4.3. *Sea G_C una gráfica, entonces:*

- (i) *L es un operador auto-adjunto. En particular es ortogonalmente diagonalizable.*
- (ii) *L es semi-definido positivo. En particular sus eigenvalores son no negativos.*

(iii) $\lambda = 0$ es el eigenvalor más pequeño de L .

Demostración. La propiedad (i) se sigue inmediatamente del teorema 2.4.2 (o bien, del hecho de que la matriz laplaciana es simétrica) y del teorema de los ejes principales. La propiedad (ii) puede observarse directamente de la ecuación 2.1. Finalmente, como el kernel de L contiene vectores distintos de cero (los vectores constantes), sabemos que $\lambda = 0$ es un eigenvalor. De la propiedad (ii) tiene que ser el más pequeño. \square

Antes hicimos la observación de que el conjunto de las funciones constantes está contenido en el kernel de L . Resulta que si la gráfica es conexa, el kernel del laplaciano es dicho conjunto.

Proposición 2.4.4. *Sea G_C una gráfica conexa, entonces*

$$\ker L = \{u \in \ell(V) \mid u \text{ es constante}\}.$$

Demostración. Necesitamos demostrar que

$$\ker L \subseteq \{u \in \ell(V) \mid u \text{ constante}\}.$$

Sea $u \in \ker L$. Entonces,

$$0 = \langle Lu, u \rangle = \sum_{xy \in E} C_{x,y} (u(x) - u(y))^2.$$

Cada término de la suma anterior debe ser cero para que la igualdad sea válida, es decir, $u(x) - u(y) = 0$ si $x \sim y$. Al ser G_C conexa, para cada $x, y \in V$ existe una sucesión de vértices $\{x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y\} \subseteq V$ tales que $x_{i-1} \sim x_i$ para $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Entonces, se tiene la igualdad $u(x_{i-1}) = u(x_i)$ para todo $i = 1, 2, \dots, n - 1$, lo que implica que $u(x) = u(y)$ para todos $x, y \in V$, es decir, u es constante en V . Por lo tanto, $\ker L \subseteq \{u \in \ell(V) \mid u \text{ constante}\}$. \square

Por la proposición 2.4.4, si tenemos una gráfica conexa, $\ker L = \text{Gen}(\mathbf{1})$, es decir, el subespacio generado por el vector cuyas entradas son todos unos. De acuerdo con 1.1.6, se tiene la igualdad $R(L) = (\text{Gen}(\mathbf{1}))^\perp$. En un operador lineal auto-adjunto, la dimensión del espacio generado por

los eigenvectores asociados a un eigenvalor es igual a la multiplicidad de dicho eigenvalor. El siguiente lema nos dice que el número de componentes conexas de una gráfica G_C es igual a la multiplicidad del eigenvalor $\lambda = 0$. En particular, si G_C es desconexa, el segundo eigenvalor más pequeño de L es cero.

Proposición 2.4.5. *Sea m el número de componentes conexas de G_C . Entonces $\dim \ker L = m$.*

Demostración. Denotemos por $G_{i,C} := (G_i)_C$ a las componentes conexas de G_C para $i = 1, 2, \dots, m$. Sea

$$A = \{u \in \ell(V) \mid u \text{ es constante en } V(G_{i,C}), i = 1, \dots, m\},$$

demostraremos que $\ker L = A$. Primero, notemos que

$$\begin{aligned} (Lu)(x) &= \sum_{y \sim x} C_{x,y}(u(x) - u(y)) \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{y \in V(G_{i,C})} C_{x,y}(u(x) - u(y)) \right). \end{aligned}$$

Entonces, si $x \in V(G_{i,C})$ y u es constante en $V(G_{i,C})$, se tiene que

$$\sum_{y \in V(G_{i,C})} C_{x,y}(u(x) - u(y)) = 0.$$

Para $j \neq i$ tenemos que ningún vértice en $V(G_{j,C})$ es adyacente a x , así que, si $y \in V(G_{j,C})$, $C_{x,y} = 0$. Luego

$$\sum_{y \in V(G_{j,C})} C_{x,y}(u(x) - u(y)) = 0.$$

Por lo anterior, $(Lu)(x) = 0$ para todo $x \in V$, esto es, $u \in \ker L$. Por lo tanto $A \subseteq \ker L$. Ahora, supongamos que $u \in \ker L$. Entonces, $Lu = 0$ y luego

$$0 = \langle Lu, u \rangle = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{xy \in E(G_{i,C})} C_{x,y}(u(x) - u(y))^2 \right),$$

esto implica que $\sum_{xy \in E(G_{i,C})} C_{x,y}(u(x) - u(y))^2 = 0$ para cada i . De lo anterior podemos concluir que, siempre que $xy \in E(G_{i,C})$, $u(x) = u(y)$. Como cada $G_{i,C}$ es conexa, podemos decir que u es constante en $V(G_{i,C})$ usando el mismo argumento de la demostración de la proposición 2.4.4. Así que, tenemos la inclusión $\ker L \subseteq A$, con lo cual, hemos demostrado la igualdad $\ker L = A$. A continuación, demostraremos que $\dim \ker L = m$. Sea

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in V(G_{i,C}) \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, el conjunto $B = \{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ es una base para $\ker L$: En efecto, para probar que es un conjunto linealmente independiente, consideremos la combinación lineal $\alpha_1\psi_1(x) + \dots + \alpha_m\psi_m(x) = 0$ para todo x , donde los α_i son escalares. Supongamos que $x \in V(G_{i,C})$, entonces la combinación lineal anterior se reduce a que $\alpha_i\psi_i(x) = \alpha_i = 0$. Así, $\alpha_i = 0$ para cada i , con lo cual tenemos que dicho conjunto es linealmente independiente. Para probar que B genera al kernel de L , tomemos $u \in \ker L$ con la regla de asignación: $u(x) = \alpha_i$ si $x \in V(G_{i,C})$. Entonces, puede verse directamente que $u(x) = \alpha_1\psi_1(x) + \dots + \alpha_m\psi_m(x)$ para todo x . Con lo anterior concluimos que $\dim \ker L = m$.

□

Capítulo 3

La Métrica de Resistencia Efectiva

El objetivo de este capítulo es presentar la métrica de resistencia efectiva en una gráfica y la resistencia total de una gráfica. Como veremos en la sección 3.4, la métrica de resistencia efectiva es una manera de medir el nivel de conectividad entre dos vértices. Debido a esta propiedad, ha sido estudiada y utilizada en distintas ramas de la ciencia y en distintos problemas. Particularmente, Klein y Randić motivaron su uso en química cf.[22]. La resistencia total es la suma de todas las distancias entre vértices de una gráfica, por lo que es una forma de cuantificar el nivel de conectividad global de una gráfica. La métrica de resistencia efectiva está relacionada con el problema de Dirichlet en gráficas, que consiste en encontrar extensiones armónicas. En [21] se generaliza la resistencia efectiva para incluir conjuntos auto-similares infinitos. En [19] se dan definiciones de la métrica de resistencia efectiva para gráficas infinitas.

En la sección 3.1 presentamos el problema de Dirichlet en gráficas y mostramos su solución para los casos particulares de caminos y ciclos. En la sección 3.2 damos una definición de resistencia efectiva y la calculamos en caminos y ciclos. La sección 3.3 está reservada a dar una demostración de que la métrica de resistencia efectiva es una métrica y en la sección 3.4 definimos la resistencia total de una gráfica.

3.1. El problema de Dirichlet en gráficas

En este trabajo, para poder definir Resistencia total de una gráfica (sección 3.4), necesitamos el concepto de resistencia efectiva entre dos vértices (sección 3.2). Como veremos más adelante, la resistencia efectiva está relacionado con el problema de Dirichlet en gráficas. En esta sección presentamos el problema de Dirichlet en gráficas. Se trata de una versión discreta del problema de Dirichlet en ecuaciones diferenciales, que consiste hallar una función u armónica en el interior de una región de \mathbb{R}^n tal que $u = f$ en la frontera, donde f es una función prescrita en la frontera de dicha región (ver e.g.[8]).

Definición 3.1.1. *Dada una gráfica G_C conexa, un subconjunto no vacío de vértices $U \subset V$ y una función $v \in \ell(U)$, el problema de Dirichlet en gráficas consiste en hallar una función $u \in \ell(V)$ tal que*

$$\begin{cases} u(x) = v(x), & x \in U \\ (Lu)(x) = 0, & x \in V \setminus U \end{cases}$$

donde L es el laplaciano sobre G_C .

En este caso, el subconjunto U es la **frontera** del problema. Si u es tal que $(Lu)(x) = 0$, decimos que u es **armónica** en x y si U es un subconjunto de vértices tales que $(Lu)(x) = 0$ para todo $x \in U$, decimos que u es armónica en U . El problema anterior puede pensarse en que dada una función v definida sobre un subconjunto de vértices $U \subseteq V$, se debe encontrar la **extensión armónica** de v sobre todo V , es decir, el problema de Dirichlet es un problema de hallar una extensión particular de una función. Por ejemplo, consideremos el problema de Dirichlet en la gráfica 3.1. En donde, pensemos que la frontera es $U = \{x_1, x_3, x_4\}$ y que $v \in \ell(U)$ está definida por: $v(x_1) = a$, $v(x_3) = b$ y $v(x_4) = c$. El objetivo es hallar $u \in \ell(V)$ de tal manera que $u|_U = v$ y que $(Lu)(x_2) = 0$. Es decir, queremos que

$$\begin{aligned} 0 &= (Lu)(x_2) \\ &= u(x_2)g(x_2) - (Au)(x_2). \end{aligned}$$

Es así que basta poner $u|_U = v$ y

$$u(x_2) = \frac{C_{1,2}a + C_{2,3}b + C_{2,4}c}{C_{1,2} + C_{2,3} + C_{2,4}}$$

para resolver este problema.

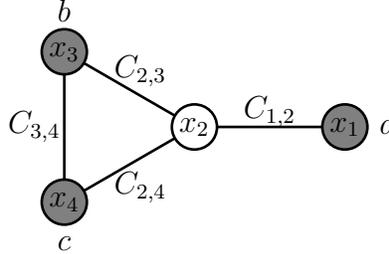


Figura 3.1

El siguiente teorema nos dice que la solución al problema de Dirichlet en gráficas conexas siempre existe y es única.

Teorema 3.1.2 ([21]). *Sea G_C una gráfica conexa y $U \subseteq V$ un subconjunto no vacío de vértices. Entonces, $v \in \ell(U)$ tiene una única extensión armónica en V .*

Demostración. Supongamos que $|U| = m$ y que $|V| = n$. Si $m = n$, basta tomar como extensión armónica $u = v$. Así que, veamos el caso en el que $m < n$. Sea $V = \{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n\}$, con $U = \{x_1, \dots, x_m\}$. Ahora, consideremos los operadores $H : \ell(U) \rightarrow \ell(U)$, $J : \ell(U) \rightarrow \ell(V \setminus U)$ y $X : \ell(V \setminus U) \rightarrow \ell(V \setminus U)$ de manera que la matriz laplaciana la podamos escribir como

$$L = \left(\begin{array}{c|c} H & J^T \\ \hline J & X \end{array} \right).$$

Dado $u \in \ell(V)$, tomemos su representación respecto a la base natural de la siguiente forma

$$u = \begin{pmatrix} u_0 \\ \text{---} \\ u_1 \end{pmatrix},$$

siendo $u_0 = u|_U$ y $u_1 = u|_{V \setminus U}$. Si u es armónica en $V \setminus U$, debe ocurrir que

$$\left(\begin{array}{c|c} H & J^T \\ \hline J & X \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_0 \\ \text{---} \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ \text{---} \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde $w = Hu_0 + J^T u_1 \in \ell(U)$. Lo anterior significa que u es armónica exactamente cuando $Ju_0 + Xu_1 = 0$, esto es, $u_1 = -X^{-1}Ju_0$. En otras palabras, u es armónica si y sólo si X es invertible, además notemos que esta solución, de existir, es única. Así pues, mostraremos que X es definida positiva, con lo cual la demostración estaría completa. Sea $v \in \ell(V \setminus U)$, tomemos la extensión, \tilde{v} , dada por $\tilde{v}|_{V \setminus U} = v$ y $\tilde{v}|_U = 0$. Entonces

$$\begin{pmatrix} H & | & J^T \\ \hline J & | & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \hline v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J^T v \\ \hline Xv \end{pmatrix},$$

luego,

$$\begin{aligned} \langle L\tilde{v}, \tilde{v} \rangle &= \langle (J^T v, Xv), (0, v) \rangle \\ &= \langle J^T v, 0 \rangle + \langle Xv, v \rangle \\ &= \langle Xv, v \rangle. \end{aligned}$$

Así, como L es semidefinido positivo, $\langle Xv, v \rangle \geq 0$. Sin embargo, sabemos que $\langle L\tilde{v}, \tilde{v} \rangle = 0$ exactamente cuando \tilde{v} es constante, esto implica que $\langle Xv, v \rangle = 0$ si y sólo si $v = 0$. Por lo tanto, X es definida positiva.

□

De la demostración anterior rescatamos los siguientes hechos:

Observación 3.1.3. *La solución al problema de Dirichlet con frontera U y $u_0 \in \ell(U)$ está dada por el vector $v \in \ell(V)$ definido por:*

$$\begin{aligned} v|_U &= u_0 \\ v|_{V \setminus U} &= -X^{-1}Ju_0, \end{aligned}$$

donde X y J son como en la demostración del teorema 3.1.2.

Observación 3.1.4. *Si H , J y X son operadores como en la demostración del teorema 3.1.2, el operador X es definido positivo.*

Para poder calcular la distancia entre dos vértices x_i y x_j usando la métrica de resistencia efectiva, es necesario resolver el problema de Dirichlet

con frontera $U = \{x_i, x_j\}$ y $v \in \ell(U)$ dada por $v(x_i) = 1$ y $v(x_j) = 0$. En lo que sigue, mostramos la solución del problema de Dirichlet en caminos y ciclos cuando la frontera consta de dos vértices. Estas soluciones las usaremos en la sección 3.2 para calcular la distancia entre dos vértices en caminos y ciclos. Las soluciones para cualquier frontera se derivan sin mucha dificultad de este caso.

3.1.1. Caminos

Consideremos el problema de hallar la extensión armónica de $v \in \ell(U)$, donde $U = \{x_i, x_j\}$ son dos vértices en el camino de n vértices. Sea $v(x_i) = a$ y $v(x_j) = b$, con $i < j$. Mostraremos que $u \in \ell(V)$, definida a continuación, resuelve el problema. Siendo $r_{i,j} = \frac{1}{C_{i,j}}$, sea u definido por: $u(x_k) = a$ si $k \leq i$, $u(x_k) = b$ si $k \geq j$ y

$$u(x_k) = \frac{(r_{i,i+1} + \cdots + r_{k-1,k})b + (r_{k,k+1} + \cdots + r_{j-1,j})a}{r_{i,i+1} + \cdots + r_{j-1,j}}$$

si $i < k < j$.

Entonces, tenemos que, si $k < i$ o $j < k$, $(Lu)(u_k) = 0$. Por otro lado, si $i < k < j$

$$\begin{aligned} (Lu)(u_k) &= (C_{k-1,k} + C_{k,k+1})u(x_k) - [C_{k-1,k}u(x_{k-1}) + C_{k,k+1}u(x_{k+1})] \\ &= C_{k-1,k}[u(x_k) - u(x_{k-1})] + C_{k,k+1}[u(x_k) - u(x_{k+1})] \\ &= \frac{1}{s}[C_{k-1,k}(br_{k-1,k} - ar_{k-1,k}) + C_{k,k+1}(-br_{k,k+1} + ar_{k,k+1})] \\ &= \frac{1}{s}[(b - a) + (-b + a)] \\ &= 0, \end{aligned}$$

siendo $s = r_{i,i+1} \cdots + r_{j-1,j}$. Por lo tanto, u es armónica en $V \setminus U$ como se quería.

Como caso particular, en un camino con peso idénticamente 1, la solución está dada por: $u(x_k) = a$ si $k \leq i$, $u(x_k) = b$ si $k \geq j$ y para $i < k < j$

$$u(x_k) = \frac{(k - i)b + (j - k)a}{j - i}.$$

Por ejemplo, consideremos el camino de seis vértices en la figura 3.2. Sea $v(x_2) = a$ y $v(x_5) = b$. La extensión armónica de v está dada por:

$$\begin{aligned} u(x_1) &= u(x_2) = a \\ u(x_5) &= u(x_6) = b \end{aligned}$$

y

$$u(x_k) = \frac{b(k-2) + a(5-k)}{3},$$

para $k = 3, 4$. Es decir,

$$\begin{aligned} u(x_3) &= \frac{b+2a}{3} \\ u(x_4) &= \frac{2b+a}{3}. \end{aligned}$$

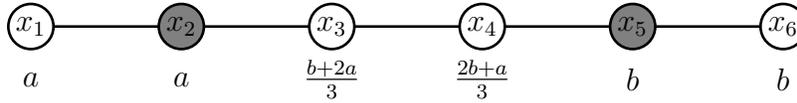


Figura 3.2

3.1.2. Ciclos

Consideremos un ciclo de n vértices. Para $i < j$, sea $v \in \ell(\{x_i, x_j\})$ dada por: $v(x_i) = a$ y $v(x_j) = b$. Queremos encontrar la extensión armónica de v que denotaremos por u . Para esto, consideremos el camino cuyas aristas son $x_k x_{k+1}$ con $k = i, \dots, j-1$ y el camino formado por las aristas que no están en dicho camino. Puesto que solo nos interesa que $(Lu)(x_k) = 0$ para todo $k \notin \{i, j\}$, basta resolver individualmente el problema de Dirichlet en los dos caminos mencionados.

Por ejemplo, abordemos el caso particular de un ciclo de n vértices con peso idénticamente 1. Según lo mencionado antes, consideremos el camino con vértices $y_1 = x_i, y_2 = x_{i+1}, \dots, y_r = x_j$ y denotemos por p el número de aristas que posee. Sea el camino con vértices $z_1 = x_j, z_2 = x_{j+1}, \dots, z_s = x_i$

y q el número de aristas que tiene. Notemos que $p = j - i$ y que, por ende, $q = n - (j - i)$ puesto que $p + q = n$. La extensión armónica de v está dada por: $u(x_i) = a$, $u(x_j) = b$,

$$u(y_k) = \frac{b(k - 1) + a(j - k)}{j - i}$$

para $i < k < j$ y

$$u(z_k) = \frac{b(s - k) + a(k - 1)}{n - (j - i)}$$

si $j < k \leq n$ o $1 \leq k < i$.

Como ejemplo, consideremos a C_5 (figura 3.3). Sea $v(x_2) = a$ y $v(x_4) = b$.

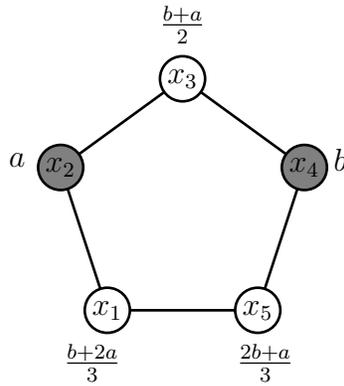


Figura 3.3

La extensión armónica de v está dada por: $u(x_2) = a$, $u(x_4) = b$

$$\begin{aligned} u(x_3) &= \frac{b + a}{2} \\ u(x_1) &= \frac{b + 2a}{3} \\ u(x_5) &= \frac{2b + a}{3}. \end{aligned}$$

Para resaltar las similitudes entre el caso continuo y el caso discreto en gráficas, tenemos el análogo a la versión en ecuaciones diferenciales parciales del llamado principio del máximo, el cual nos dice que las funciones armónicas alcanzan su máximo en la frontera.

Teorema 3.1.5 ([21]). (*Principio del máximo*)

Sea G_C una gráfica conexa y $U \subseteq V$ un subconjunto no vacío de tal manera que la gráfica inducida por $W = V \setminus U$ es conexa. Supongamos que $u \in \ell(V)$ es armónica en W . Si para algún $y \in W$ se tiene que $u(y) \geq u(x)$ para todo $x \in V$, entonces u es constante en W .

Demostración. Sea $y \in W$ tal que $u(y) \geq u(x)$ para todo $x \in V$. Como u es armónica en W , se tiene

$$0 = (Lu)(y) = \sum_{x \sim y} C_{xy}(u(y) - u(x))$$

pero, por hipótesis, $u(y) - u(x) \geq 0$ para todo $x \in V$, así que necesariamente $u(y) = u(x)$ si $x \sim y$. Denotemos por H_C a la subgráfica inducida por W . Para $z \in W$ existe una sucesión de vértices $\{x_0 = y, x_1, \dots, x_n = z\}$ en $V(H_C)$ tal que $x_{i-1} \sim x_i$ para $i = 1, \dots, n$. Así, primero tenemos que $u(x_1) = u(y)$, luego, como $x_1 \in W$, podemos repetir el mismo argumento y obtener que $u(x_1) = u(x_2)$. Aplicando el mismo argumento para los demás vértices se llega a que $u(z) = u(y)$, es decir, u es constante en W . \square

Debe mencionarse que es necesaria la hipótesis de que la gráfica inducida por $W = V \setminus U$ sea conexa. Por ejemplo, en la gráfica que se muestra en la figura 3.4, donde $U = \{x_1, x_3\}$ y $W = \{x_2, x_4\}$, se ha definido una función u que es armónica en W . La subgráfica inducida por W no es conexa y se tiene que $u(x_4) = 1 \geq u(x_i)$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$, pero u no es una función constante en W .

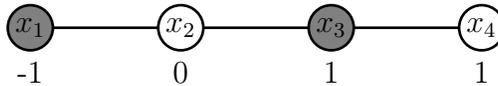


Figura 3.4

3.2. Resistencia efectiva en caminos y ciclos

En esta sección definimos la métrica de resistencia efectiva y calculamos la resistencia entre cualesquiera dos vértices en caminos y ciclos. La demostración de que efectivamente es una métrica la reservamos hasta la sección 3.3.

Definición 3.2.1. (Métrica de resistencia efectiva)

Sea G_C una gráfica conexa. Dados $x, y \in V$, tomemos $v \in \ell(\{x, y\})$ dada por: $v(x) = 1$ y $v(y) = 0$. Definimos la métrica de resistencia efectiva como la función $\rho : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(Lu)(x)}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

en donde u es la extensión armónica de v sobre V .

Observación 3.2.2. En la definición de métrica de resistencia efectiva, por definición de u se tiene la igualdad $(Lu)(x) = \langle Lu, u \rangle$.

Note que ρ está bien definida debido a que existe una única extensión armónica para cada par de vértices. Veamos a continuación cómo calcular la distancia entre cualesquiera dos vértices de un ciclo y un camino. En [16] pueden encontrarse una fórmula para el caso en árboles.

3.2.1. Caminos

Para hallar la distancia entre dos vértices $x_i, x_j \in V$, con $i < j$, tomemos $v \in \ell(\{x_i, x_j\})$ dada por: $v(x_i) = 1$ y $v(x_j) = 0$. Sea u la extensión armónica de v . Como queremos calcular $(Lu)(x_i)$, es necesario saber los valores que u toma en los vértices x_{i-1} y x_{i+1} . Usando los resultados que obtuvimos en la sección 3.1, para caminos tenemos que: $u(x_{i-1}) = 1$ y

$$u(x_{i+1}) = \frac{r_{i+1, i+2} + \cdots + r_{j-1, j}}{r_{i, i+1} + \cdots + r_{j-1, j}}.$$

Luego

$$\begin{aligned} (Lu)(x_i) &= C_{i-1,i}[1 - u(x_{i-1})] + C_{i,i+1}[1 - u(x_{i+1})] \\ &= C_{i,i+1}[1 - u(x_{i+1})] \end{aligned}$$

y como

$$C_{i,i+1} \left(1 - \frac{r_{i+1,i+2} + \cdots + r_{j-1,j}}{r_{i,i+1} + \cdots + r_{j-1,j}} \right) = \frac{1}{r_{i,i+1} + \cdots + r_{j-1,j}},$$

la distancia entre cualesquiera dos vértices es

$$\rho(x_i, x_j) = r_{i,i+1} + \cdots + r_{j-1,j}.$$

Por ejemplo, en el siguiente camino de 5 vértices (figura 3.5), la distancia entre x_2 y x_4 es $\rho(x_2, x_4) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$.

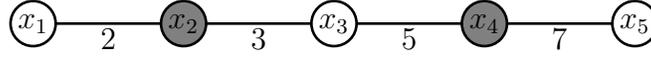


Figura 3.5

3.2.2. Ciclos

Para calcular la distancia entre dos vértices x_i y x_j , siendo $i < j$, consideremos la función $v \in \ell(\{x_i, x_j\})$ dada por $v(x_i) = 1$ y $v(x_j) = 0$. Comencemos suponiendo que $i = 1$. Para calcular $(Lu)(x_1)$ debemos hallar $u(x_n)$ y $u(x_2)$, donde $u \in \ell(V)$ es la extensión armónica de v . Entonces, para j tenemos tres posibilidades que abordaremos individualmente:

- $j = 2$: En este caso, como queremos que $u \in \ell(V)$ sea armónica en $V \setminus \{x_1, x_2\}$, podemos considerar el problema de Dirichlet sobre el camino que se obtiene de quitar la arista x_1x_2 (ver figura 3.6).

Entonces, sabemos que

$$u(x_n) = \frac{r_{2,3} + \cdots + r_{n-1,n}}{r_{2,3} + \cdots + r_{n-1,n} + r_{n,1}}.$$

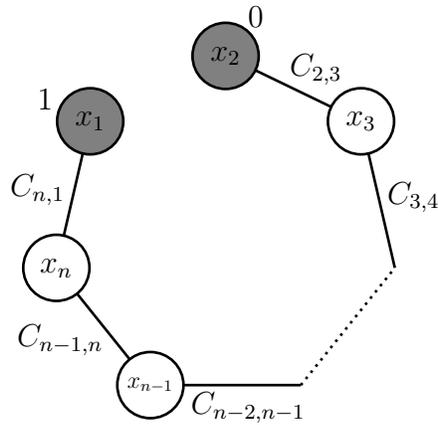


Figura 3.6

Luego, como $u(x_2) = 0$

$$\begin{aligned} (Lu)(x_1) &= C_{1,2}[1 - 0] + C_{n,1}[1 - u(x_n)] \\ &= \frac{1}{r_{1,2}} + \frac{1}{r_{2,3} + \cdots + r_{n-1,n} + r_{n,1}} \\ &= \frac{r_{1,2} + r_{2,3} + \cdots + r_{n-1,n} + r_{1,n}}{(r_{1,2})(r_{2,3} + \cdots + r_{n-1,n} + r_{n,1})}. \end{aligned}$$

- $j = n$: Basta resolver el problema de Dirichlet en el camino que se obtiene de quitar la arista $x_n x_1$ (ver figura 3.7).

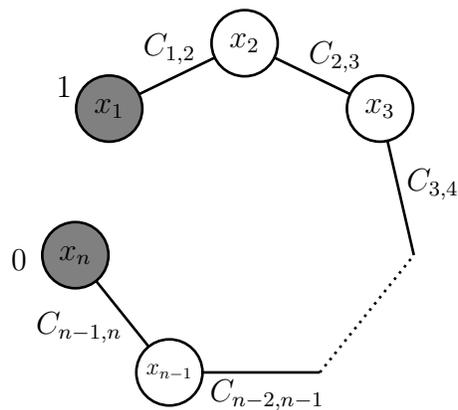


Figura 3.7

De nuevo, sabemos que

$$u(x_2) = \frac{r_{2,3} + \cdots + r_{n-1,n}}{r_{1,2} + \cdots + r_{n-1,n}}.$$

Entonces, como $u(x_n) = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} (Lu)(x_1) &= C_{1,2}[1 - u(x_2)] + C_{n,1}[1 - 0] \\ &= \frac{1}{r_{1,2} + \cdots + r_{n-1,n}} + \frac{1}{r_{n,1}} \\ &= \frac{r_{1,2} + \cdots + r_{n-1,n} + r_{n,1}}{r_{n,1}(r_{1,2} + \cdots + r_{n-1,n})}. \end{aligned}$$

- $2 < j < n$: Primero, u debe ser armónica en el camino cuyas aristas son $x_k x_{k+1}$ para $k = 2, \dots, j-2$ (ver figura 3.8). Resolviendo el problema de Dirichlet en dicho camino tenemos

$$u(x_2) = \frac{r_{2,3} + \cdots + r_{j-1,j}}{r_{1,2} + \cdots + r_{j-1,j}}.$$

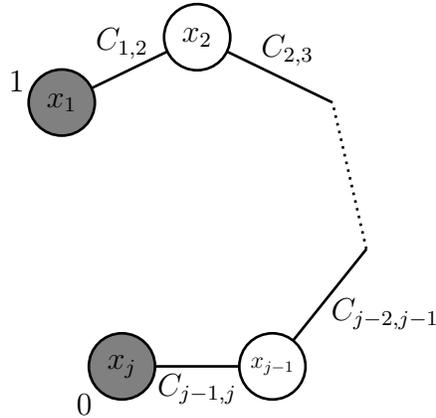


Figura 3.8

Luego, u debe ser armónica en el camino con aristas $x_k x_{k+1}$ para $k = j+1, \dots, n-1$ (ver figura 3.9).

En este caso también sabemos que

$$u(x_n) = \frac{r_{j,j+1} + \cdots + r_{n-1,n}}{r_{j,j+1} + \cdots + r_{n-1,n} + r_{n,1}}.$$

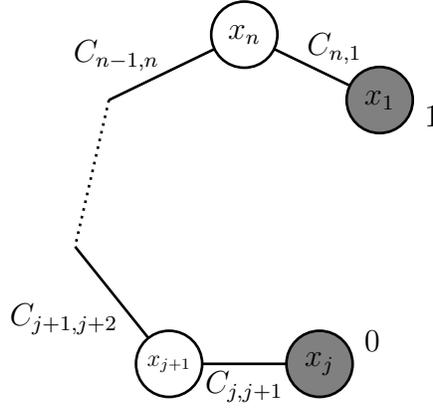


Figura 3.9

Entonces

$$\begin{aligned}
 (Lu)(x_1) &= C_{1,2}[1 - u(x_2)] + C_{n,1}[1 - u(x_n)] \\
 &= \frac{1}{r_{1,2} + \cdots + r_{j-1,j}} + \frac{1}{r_{j,j+1} + \cdots + r_{n-1,n} + r_{n,1}} \\
 &= \frac{r_{1,2} + \cdots + r_{n-1,n} + r_{n,1}}{(r_{1,2} + \cdots + r_{j-1,j})(r_{j,j+1} + \cdots + r_{n-1,n} + r_{n,1})}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, resumiendo los casos anteriores, la distancia entre los vértices x_1, x_j es

$$\rho(x_1, x_j) = \frac{(r_{1,2} + \cdots + r_{j-1,j})(r_{j,j+1} + \cdots + r_{n-1,n} + r_{n,1})}{r_{1,2} + \cdots + r_{n-1,n} + r_{n,1}}.$$

Ahora, para calcular la distancia entre dos vértices x_i y x_j , consideremos el isomorfismo dado por

$$y_k = x_{k+(i-1)}.$$

Entonces, $y_1 = x_j$ y $y_{j-(i-1)} = x_j$. Luego, como puede observarse en la figura 3.10, al aplicar el caso $i = 1$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \rho(x_i, x_j) &= \rho(y_1, y_{j-(i-1)}) \\
 &= \frac{(r_{i,i+1} + \cdots + r_{j-1,j})(r_{j,j+1} + \cdots + r_{n,1} + \cdots + r_{i-1,i})}{r_{1,2} + \cdots + r_{n-1,n} + r_{n,1}}.
 \end{aligned}$$

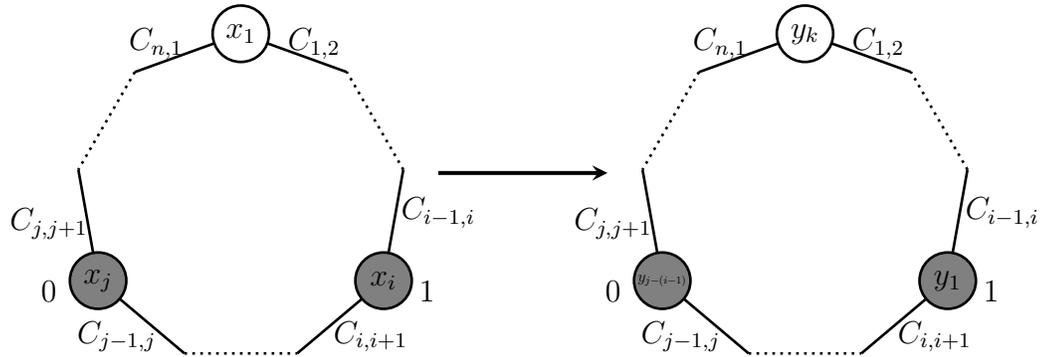


Figura 3.10

Por ejemplo, en el ciclo de cuatro vértices que aparece en la figura 3.11, la distancia entre el vértice x_2 y x_3 es

$$\rho(x_2, x_3) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}.$$

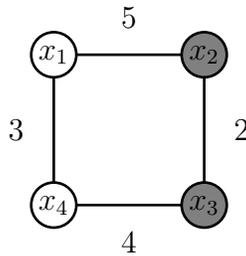


Figura 3.11

Si tenemos un ciclo de n vértices sin pesos, la fórmula para la distancia entre dos vértices x_i y x_j (con $i < j$) se reduce a la expresión

$$\rho(x_i, x_j) = \frac{(j-i)(n-(j-i))}{n}.$$

Por ejemplo, en el ciclo de 6 vértices que aparece en la figura 3.12 la distancia entre x_2 y x_5 es

$$\rho(x_2, x_5) = \frac{(3)(3)}{6}.$$

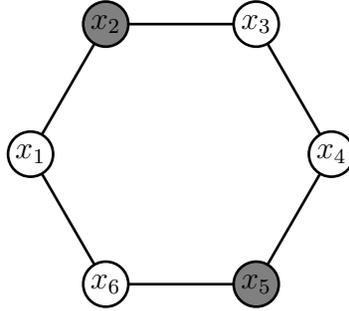


Figura 3.12

3.3. La métrica de resistencia efectiva es una métrica

Para poder demostrar que ρ define una métrica, son necesarios algunos conceptos y resultados. La demostración que se presenta aquí está basada en la que se puede encontrar en [21]. En la literatura pueden encontrarse varias versiones, por ejemplo en [22] se da una prueba distinta.

Lema 3.3.1 ([21]). *Sea G_C una gráfica conexa y sea U un subconjunto propio no vacío de V . Sean $H : \ell(U) \rightarrow \ell(U)$, $J : \ell(U) \rightarrow \ell(V \setminus U)$ y $X : \ell(V \setminus U) \rightarrow \ell(V \setminus U)$ de manera que la matriz laplaciana la podamos escribir como*

$$L = \left(\begin{array}{c|c} H & J^T \\ \hline J & X \end{array} \right).$$

Entonces, X es definida positiva. Sea $u \in \ell(V)$ escrito como

$$u = \begin{pmatrix} u_0 \\ \text{---} \\ u_1 \end{pmatrix},$$

donde $u_0 = u|_U$ y $u_1 = u|_{V \setminus U}$ son las restricciones de u sobre U y $V \setminus U$, respectivamente. Entonces, se tiene la igualdad

$$\langle Lu, u \rangle = \langle X(u_1 + X^{-1}Ju_0), u_1 + X^{-1}Ju_0 \rangle + \langle (H - J^T X^{-1}J)u_0, u_0 \rangle. \quad (3.1)$$

Demostración. X es definido positivo de acuerdo con la observación 3.1.4. Ahora, tenemos la siguiente serie de igualdades: primero

$$\begin{aligned} \langle X(u_1 + X^{-1}Ju_0), u_1 + X^{-1}Ju_0 \rangle &= \langle X(u_1 + X^{-1}Ju_0), u_1 \rangle \\ &\quad + \langle X(u_1 + X^{-1}Ju_0), X^{-1}Ju_0 \rangle, \end{aligned}$$

en donde el primer término puede separarse como

$$\langle Xu_1, u_1 \rangle + \langle Ju_0, u_1 \rangle$$

y, aprovechando que X es auto-adjunto y que el producto interno es real, se tiene para el segundo término

$$\begin{aligned} \langle X(u_1 + X^{-1}Ju_0), X^{-1}Ju_0 \rangle &= \langle Xu_1, X^{-1}Ju_0 \rangle + \langle Ju_0, X^{-1}Ju_0 \rangle \\ &= \langle u_1, X^T X^{-1}Ju_0 \rangle + \langle Ju_0, X^{-1}Ju_0 \rangle \\ &= \langle u_1, Ju_0 \rangle + \langle X^{-1}Ju_0, Ju_0 \rangle. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \langle (H - J^T X^{-1}J)u_0, u_0 \rangle &= \langle Hu_0, u_0 \rangle - \langle J^T X^{-1}Ju_0, u_0 \rangle \\ &= \langle Hu_0, u_0 \rangle - \langle X^{-1}Ju_0, Ju_0 \rangle. \end{aligned}$$

Juntando las expresiones anteriores se obtiene

$$\begin{aligned} \langle X(u_1 + X^{-1}Ju_0), u_1 + X^{-1}Ju_0 \rangle &+ \langle (H - J^T X^{-1}J)u_0, u_0 \rangle \\ &= \langle Xu_1, u_1 \rangle + \langle Ju_0, u_1 \rangle + \langle J^T u_1, u_0 \rangle \\ &\quad + \langle Hu_0, u_0 \rangle \\ &= \langle Hu_0 + J^T u_1, u_0 \rangle + \langle Ju_0 + Xu_1, u_1 \rangle \\ &= \langle (Hu_0 + J^T u_1, Ju_0 + Xu_1), (u_0, u_1) \rangle \\ &= \langle Lu, u \rangle \end{aligned}$$

□

El siguiente teorema nos dice que la extensión armónica de una función es la extensión que minimiza la energía del laplaciano.

Teorema 3.3.2 ([21]). *Supongamos la misma situación que en el lema 3.3.1. Para $u \in \ell(U)$, sea $v \in \ell(V)$ la extensión armónica de u en V (observación 3.1.3):*

$$\begin{aligned} v|_U &= u \\ v|_{V \setminus U} &= -X^{-1}Ju. \end{aligned}$$

Entonces, v es el único elemento en el que se alcanza el mínimo del conjunto

$$\{\langle Lw, w \rangle \mid w \in \ell(V), w|_U = u\}. \quad (3.2)$$

Demostración. Sea $w \in \ell(V)$ definida por: $w|_U = u$ y $w|_{V \setminus U} = \tilde{u}$. Entonces, por el lema 3.3.1

$$\begin{aligned} \langle Lw, w \rangle &= \langle X(\tilde{u} + X^{-1}Ju), \tilde{u} + X^{-1}Ju \rangle + \langle (H - J^T X^{-1}J)u, u \rangle \\ &= \langle X(\tilde{u} + X^{-1}Ju), \tilde{u} + X^{-1}Ju \rangle + \langle Lv, v \rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle Lv, v \rangle \geq 0$ y $\langle X(\tilde{u} + X^{-1}Ju), \tilde{u} + X^{-1}Ju \rangle > 0$ cuando $\tilde{u} + X^{-1}Ju \neq 0$ ya que X es definido positivo, el mínimo del conjunto en 3.2 debe alcanzarse cuando $\tilde{u} = -X^{-1}Ju$, es decir, en v . \square

En el siguiente teorema presentamos el operador $P_{V,U}(L)$, el cual jugará un papel importante en la demostración de que la métrica de resistencia efectiva es una métrica. Además, se obtiene una expresión para la métrica de resistencia efectiva en términos de dicho operador.

Teorema 3.3.3 ([21]). *Supongamos la misma situación que en el lema 3.3.1. Sea el operador $P_{V,U}(L) : \ell(U) \rightarrow \ell(U)$ definido por*

$$P_{V,U}(L) = H - J^T X^{-1}J.$$

Entonces, $P_{V,U}(L)$ es semi-definido positivo, auto-adjunto y su kernel consiste en el conjunto de las funciones constantes. Además, para $u \in \ell(U)$, se tiene la igualdad

$$\langle P_{V,U}(L)u, u \rangle = \langle Lv, v \rangle, \quad (3.3)$$

en donde v es la extensión armónica de u en V .

Demostración. Usando la igualdad 3.1 se puede ver directamente que

$$\langle Lv, v \rangle = \langle P_{V,U}(L)u, u \rangle.$$

Lo anterior implica que $P_{V,U}(L)$ es semi-definido positivo. Ahora, $P_{V,U}(L)$ es auto-adjunto debido a que H y $J^T X^{-1} J$ son auto-adjuntos (X^{-1} es auto-adjunto porque X lo es). Veamos que el kernel de $P_{V,U}(L)$ consiste en las funciones constantes. Si u está en el kernel de $P_{V,U}(L)$, $\langle P_{V,U}(L)u, u \rangle = 0$, entonces $\langle Lv, v \rangle$ también es cero por 3.3. En tal caso, v debe ser constante, en particular, u es constante. Finalmente, si u es constante, podemos elegir $w \in \ell(V)$ constante, así que

$$\begin{aligned} 0 &= \text{mín}\{\langle Lw, w \rangle \mid w \in \ell(V), w|_U = u\} \\ &= \langle Lv, v \rangle \\ &= \langle P_{V,U}(L)u, u \rangle, \end{aligned}$$

en donde la segunda igualdad es cierta porque en v se alcanza el mínimo y la tercera igualdad se sigue de 3.3. Por lo tanto, $\langle P_{V,U}(L)u, u \rangle = 0$, si y solo si u es constante, lo cual implica que el kernel de $P_{V,U}(L)$ consiste en el conjunto de las funciones constantes. \square

Observación 3.3.4. Dado $U \subseteq V$ y $u \in \ell(U)$, el teorema 3.3.2 nos dice que el mínimo del conjunto

$$\{\langle Lw, w \rangle \mid w \in \ell(V), w|_U = u\}$$

se alcanza en la extensión armónica de u . Por lo tanto, una definición equivalente de la métrica de resistencia efectiva es (para $x \neq y$)

$$\rho(x, y) = \frac{1}{m},$$

donde

$$\begin{aligned} m &= \text{mín}\{\langle Lw, w \rangle \mid w(x) = 1, w(y) = 0\} \\ &= \langle P_{V,U}(L)u, u \rangle, \end{aligned}$$

siendo $U = \{x, y\}$ con $u(x) = 1$ y $u(y) = 0$.

El operador $P_{V,U}(L)$ es un laplaciano sobre U (cf. [21]), por lo que podemos hablar de la métrica de resistencia efectiva respecto a este operador (la definición es completamente análoga a la definición 3.2.1). Si $G(U)$ es la subgráfica inducida por U , no necesariamente $P_{V,U}(L) = L(G(U))$. Más bien, el operador $P_{V,U}(L)$ puede pensarse que es la restricción de L a la subgráfica $G(U)$ en el sentido de que generan la misma resistencia efectiva, es decir, que conserva las distancias entre los vértices. En general esto no ocurre si tomamos el laplaciano usual en $G(U)$, basta revisar la figura 3.13 en donde hemos considerado a $P_{2,C}$ como subgráfica de $C_{4,C}$. En tales gráficas tenemos que, si $\rho_{L(C_{4,C})}$ denota a la métrica de resistencia efectiva respecto al laplaciano $L(C_{4,C})$ y $\rho_{L(P_{2,C})}$ respecto al laplaciano $L(P_{2,C})$,

$$\rho_{L(C_{4,C})}(x_2, x_4) = \frac{(\frac{1}{5} + \frac{1}{7})(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}}$$

mientras que

$$\rho_{L(P_{2,C})}(x_2, x_4) = \frac{1}{5} + \frac{1}{7}.$$

Observemos que las distancias no coinciden.

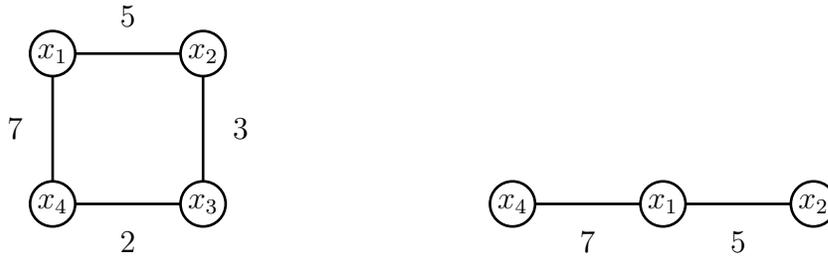


Figura 3.13

Al considerar el operador $P_{V,U}(L)$ en la subgráfica $G(U)$ las distancias se conservan.

Proposición 3.3.5 ([21]). *Sea G_C una gráfica conexa y H_C una subgráfica de G_C . Sean, U y V los conjuntos de vértices de H_C y G_C , respectivamente. Denotemos por \tilde{L} al operador $P_{V,U}(L)$. Entonces, $\rho_L(x, y) = \rho_{\tilde{L}}(x, y)$ para todos $x, y \in U$.*

Demostración. Si $x = y$, la igualdad es cierta por definición. Supongamos que $x \neq y$. Sea $W = \{x, y\}$ y $u \in W$ tal que $u(x) = 1$ y $u(y) = 0$. Entonces, si v es la extensión armónica de u en U , por definición y por el teorema 3.3.3 se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\rho_{\tilde{L}}(x, y) &= (\langle \tilde{L}u, u \rangle)^{-1} \\ &= (\langle P_{V,W}(L)v, v \rangle)^{-1} \\ &= (\langle Lw, w \rangle)^{-1},\end{aligned}$$

en donde w es la extensión armónica de v en V . Como w también es armónica en $U \setminus W$, pues L y $P_{V,U}(L)$ coinciden en U , $(\langle Lw, w \rangle)^{-1} = \rho_L(x, y)$. \square

El recíproco es cierto y puede consultarse en [21]:

Si G_C es una gráfica donde L_1 y L_2 son dos laplacianos tales que $\rho_{L_1}(x, y) = \rho_{L_2}(x, y)$, entonces $L_1 = L_2$.

Para demostrar que la métrica de resistencia efectiva es una métrica (Teorema 3.3.6), la proposición 3.3.5 es suficiente y juega un papel principal para verificar la desigualdad del triángulo.

Teorema 3.3.6 ([21]). *Sea G_C una gráfica conexa. La métrica de resistencia efectiva es una métrica.*

Demostración.

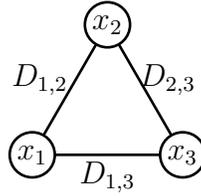
1. Por definición, ρ es una función no negativa tal que $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
2. Reflexividad. Si $x = y$, directamente $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ por definición. Supongamos que $x \neq y$. Por un lado, notemos que, si $u(x) = 1$ y $u(y) = 0$, $(Lu)(x) = \langle Lu, u \rangle \geq 0$, pues L es semi-definido positivo. Pero, por otro lado, si $u(x) = 0$ y $u(y) = 1$, $(Lu)(y) = \langle Lu, u \rangle \geq 0$. En cualquier caso, de acuerdo con el teorema 1.1.6, $Lu \in (\ker L)^\perp$ y ,

aprovechando que u es armónica en $V \setminus \{x, y\}$

$$0 = \sum_{x \in V} (Lu)(x) = (Lu)(x) + (Lu)(y),$$

entonces $|(Lu)(x)| = |(Lu)(y)|$. Por lo tanto, la igualdad $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ es verdadera.

3. Desigualdad del triángulo. Si $|V| < 3$, directamente la desigualdad del triángulo es cierta. Sean $U = \{x, y, z\} \subseteq V$ tales que la gráfica inducida por dichos vértices es conexa. Entonces, dicha subgráfica es C_3 o P_3 . La idea es considerar la métrica de resistencia efectiva en tal subgráfica respecto al operador $P_{V,U}(L)$. De esta forma, usando la proposición 3.3.5, podemos calcular la distancia entre cualesquiera dos vértices en U considerándolos como vértices de la subgráfica inducida $G_C(U)$. Iniciemos con el caso en el que es C_3 . Podemos suponer que para C_3 tenemos la siguiente representación



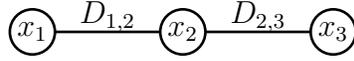
Entonces, tenemos que la distancia entre los vértices x_i y x_j , respecto al operador $P_{V,U}(L)$, es

$$\rho(x_i, x_j) = \frac{s_{i,j}(s_{i,k} + s_{k,j})}{s_{1,2} + s_{2,3} + s_{3,4}}.$$

Siendo $s_{i,j} = \frac{1}{D_{i,j}}$. Haciendo los cálculos necesarios se comprueba que si $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} \rho(x_i, x_j) &< \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) \\ \rho(x_i, x_j) &< \rho(x_1, x_3) + \rho(x_3, x_2) \end{aligned}$$

con lo cual se observa que la desigualdad del triángulo es cierta. Por otra parte, para P_3 supongamos que tenemos



Con un cálculo directo se puede comprobar que para $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned}\rho(x_i, x_j) &< \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) \\ \rho(x_i, x_j) &< \rho(x_1, x_3) + \rho(x_3, x_2)\end{aligned}$$

de modo que la desigualdad del triángulo se satisface también en este caso. Si la gráfica inducida por los vértices elegidos no fuera conexa, puede ocurrir que solo dos vértices son adyacentes o que ningún vértice es adyacente a algún otro, sin embargo, en ambos casos existe un camino, $P_{m,C}$, con $V(P_{m,C}) \subseteq V$, de más de tres vértices que los contiene. Para el primer caso, podemos suponer sin perder generalidad que $x_1 \sim x_2$ y que x_k es tal que $k > 3$. Luego, si $i, j \in \{1, 2, k\}$

$$\begin{aligned}\rho(x_i, x_j) &< \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_k) \\ \rho(x_i, x_j) &< \rho(x_1, x_k) + \rho(x_k, x_2)\end{aligned}$$

por lo que, en el primer caso la desigualdad del triángulo se cumple. Para el segundo caso, supongamos que $U = \{x_1, x_p, x_q\}$ y que $2 < p$ y $p + 1 < q$. Entonces, para $i, j \in \{1, p, q\}$

$$\begin{aligned}\rho(x_i, x_j) &< \rho(x_1, x_p) + \rho(x_p, x_q) \\ \rho(x_i, x_j) &< \rho(x_1, x_q) + \rho(x_q, x_p)\end{aligned}$$

así que, la desigualdad del triángulo también se satisface.

□

3.4. Resistencia total

La resistencia total de una gráfica (definición 3.4.1) se refiere a la suma de las distancias entre todos los vértices donde la métrica considerada es la métrica de resistencia efectiva.

Definición 3.4.1. Sea G_C una gráfica conexa. Definimos la resistencia total de una gráfica como la cantidad

$$R(G_C) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V} \rho(x,y).$$

Cuando se habla de métricas en gráficas, la distancia más usual entre dos vértices es la llamada *métrica geodésica*. Esta métrica está dada por la menor suma posible de los pesos de las aristas en un camino que los une. Una de las diferencias entre la métrica de resistencia efectiva y la métrica geodésica es que la métrica de resistencia efectiva tiene la propiedad de que dos vértices están más cerca si están mejor conectados en el sentido de que hay más caminos que los conectan. Para ilustrar esto, consideremos la sucesión de gráficas mostradas en las figuras 3.14-3.17. Para obtener la distancia entre los vértices a y b en una gráfica de este tipo, tomemos u con $u(a) = 1$ y $u(b) = 0$. Luego, para extender u de manera que sea armónica en los vértices x_1, \dots, x_n , basta poner $u(x_k) = \frac{1}{2}$ para cada $k = 1, \dots, n$. De esta manera, puede verse directamente que $(Lu)(a) = \left(\frac{n}{2}\right)^{-1}$. De este ejemplo podemos intuir lo que ocurre: mientras que en la métrica de resistencia efectiva la distancia entre dos vértices se acorta al agregar más caminos que los unan, en la métrica geodésica las distancias no cambian si los caminos que se agregan no son más cortos que los que ya había. Siguiendo esta idea, podemos pensar que la métrica de resistencia efectiva mide el nivel de conectividad entre dos vértices: entre más pequeña sea la distancia, están mejor conectados. En cuanto a la resistencia total, podemos pensar que dicho valor cuantifica el nivel de conectividad global de una gráfica: entre más pequeño sea, mayor es el nivel de conectividad.

A la resistencia total de una gráfica también se le conoce como **índice de Kirchhoff**. El problema de hallar la resistencia total de algunas gráficas ha sido estudiado en [3], [5] y [24], por mencionar algunos. En la proposición 3.4.2 presentamos una expresión para la resistencia total de un camino. El teorema 3.4.3 proporciona una expresión para la resistencia total de una gráfica en términos de los eigenvalores del laplaciano.

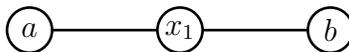


Figura 3.14: $\rho(a, b) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

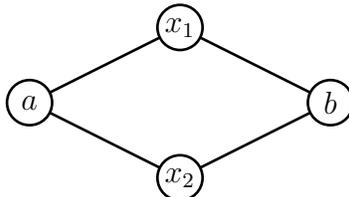


Figura 3.15: $\rho(a, b) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{-1}$

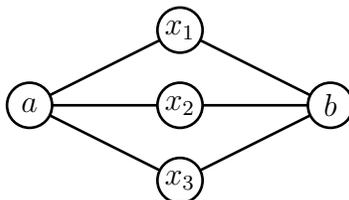


Figura 3.16: $\rho(a, b) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{-1}$

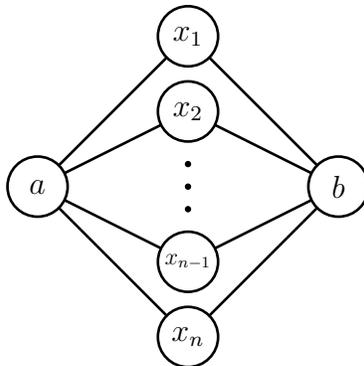


Figura 3.17: $\rho(a, b) = \left(\frac{n}{2}\right)^{-1}$

Proposición 3.4.2. *La resistencia total de un camino de n vértices se puede escribir como*

$$R(P_{n,C}) = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)r_{k,k+1},$$

en donde $r_{k,k+1} = \frac{1}{C_{k,k+1}}$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
 R(P_{n,C}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n \rho(x_i, x_j) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n \sum_{k=i}^{j-1} r_{k,k+1} \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)r_{i,i+1}.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 3.4.3 ([22]). *Sea G_C una gráfica conexa con n vértices. Sean λ_k con $k = 2, \dots, n$ los eigenvalores positivos del laplaciano. Entonces, la resistencia total de G_C está dada por la fórmula*

$$R(G_C) = n \sum_{k=2}^n \frac{1}{\lambda_k}.$$

La demostración del teorema 3.4.3 que aquí presentamos, se basa en obtener otra expresión para la métrica de resistencia efectiva. Sean x_i y x_j dos vértices distintos de una gráfica conexa. Sea $v(x_i) = 1$ y $v(x_j) = 0$. Por definición, si u es la extensión armónica de v , la distancia entre x_i y x_j es

$$\rho(x_i, x_j) = \frac{1}{(Lu)(x_i)}.$$

De acuerdo con el teorema 1.1.6, $Lu \in (\text{Gen}(\mathbf{1}))^\perp$ y, como $(Lu)(x_k) = 0$ si $k \notin \{i, j\}$, $(Lu)(x_i) + (Lu)(x_j) = 0$. Entonces,

$$Lu = (Lu)(x_i)(e_i - e_j)$$

en donde e_i es el vector cuya entrada i -ésima es 1 y 0 en las demás entradas. La igualdad anterior se puede reescribir como

$$\rho(x_i, x_j)Lu = e_i - e_j$$

y si ponemos $w = \rho(x_i, x_j)u$, puede volver a escribirse como

$$Lw = e_i - e_j. \tag{3.4}$$

Veamos que $\rho(x_i, x_j)$ se puede escribir en términos del vector que resuelve la ecuación 3.4. Para ver esto, pensemos en el problema inverso: supongamos que w cumple la ecuación 3.4. Sea

$$u = \frac{w - w(x_j)\mathbf{1}}{w(x_i) - w(x_j)}$$

siendo $\mathbf{1}$ el vector cuyas entradas son todos 1. De la definición de u se tiene $u(x_i) = 1$ y $u(x_j) = 0$, además

$$\begin{aligned} Lu &= \frac{Lw - w(x_j)L\mathbf{1}}{w(x_i) - w(x_j)} \\ &= \frac{e_i - e_j}{w(x_i) - w(x_j)} \end{aligned}$$

por lo que u es armónica en $V \setminus \{x_i, x_j\}$. Así, por definición

$$\begin{aligned} \rho(x_i, x_j) &= \frac{1}{(Lu)(x_i)} \\ &= w(x_i) - w(x_j). \end{aligned}$$

La ecuación 3.4 siempre puede resolverse aún si L no es invertible. Por el teorema 1.1.6, sabemos que $R(L) = (\ker L)^\perp$, donde $R(L)$ denota a la imagen de L . Note que la restricción de L en $R(L)$, que denotaremos por $L|_{R(L)}$, es invertible porque todos sus eigenvalores son distintos de cero. Debido a que $(e_i - e_j) \in R(L)$, si L^+ denota a la inversa de $L|_{R(L)}$, entonces

$$w = L^+(e_i - e_j).$$

Por lo anterior, la distancia entre los vértices x_i y x_j está dada por

$$\begin{aligned} \rho(x_i, x_j) &= w(x_i) - w(x_j) \\ &= (e_i - e_j)^T L^+(e_i - e_j). \end{aligned}$$

Usando la igualdad anterior podemos demostrar el teorema 3.4.3. Al operador L^+ se le conoce como la pseudoinversa de L (e.g. [9]).

Demostración del teorema 3.4.3. Tenemos que

$$\begin{aligned}
 R(G_C) &= \frac{1}{2} \sum_{x_i, x_j \in V} (e_i - e_j)^T L^+ (e_i - e_j) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (e_i^T L^+ e_i - 2e_i^T L^+ e_j + e_j^T L^+ e_j) \\
 &= \frac{1}{2} \left(2n \operatorname{Tr}(L^+) - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_i^T L^+ e_j \right),
 \end{aligned}$$

en donde $\operatorname{Tr}(L^+)$ denota a la traza de L^+ . Notemos que podemos escribir

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e_i^T L^+ e_j = \mathbf{1}^T L^+ \mathbf{1}.$$

Sean λ_k con $k = 2, \dots, n$ los eigenvalores positivos del laplaciano y u_k los eigenvectores asociados. Por el teorema de los ejes principales, se tiene la igualdad

$$L^+ = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\lambda_k} u_k u_k^T.$$

De esta forma

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1}^T L^+ \mathbf{1} &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{1}^T u_k u_k^T \mathbf{1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

pues cada u_k es ortogonal al vector $\mathbf{1}$. Así, ya que

$$\operatorname{Tr}(L^+) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\lambda_k},$$

se tiene

$$R(G_C) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\lambda_k}.$$

□

Capítulo 4

La conectividad algebraica

Para estudiar las características de una gráfica, un recurso muy utilizado es el estudio de los eigenvalores de operadores asociados a la gráfica. Esto se conoce como la *teoría espectral de gráficas* (ver e.g. [6, 10]). Un caso muy especial, es el segundo eigenvalor más pequeño del laplaciano, que ha sido estudiado de manera amplia, a partir del trabajo de M. Fiedler [11]. En particular, se ha usado como cuantificador de robustez de una gráfica (cf. [1]). Fiedler acuñó el término **conectividad algebraica** para referirse a dicho eigenvalor. A la conectividad algebraica se le conoce también como **valor Fiedler** y a los eigenvectores asociados como **vectores Fiedler**. En este capítulo nos dedicamos a establecer algunas propiedades de la conectividad algebraica y de los vectores Fiedler. Especialmente, en la sección 4.3 estudiamos el comportamiento de los vectores Fiedler en caminos. Para una exposición más amplia de los resultados de este capítulo referimos a [11], [12] y [14].

4.1. Propiedades de la conectividad algebraica

Si $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ son los eigenvalores del laplaciano de G_C ordenados de menor a mayor, la **conectividad algebraica** de G_C , que denotaremos por $a(G_C)$, es el valor de λ_2 . En el capítulo 2 se demostró que una gráfica tiene conectividad algebraica igual a cero si y solo si la gráfica es disconexa. El cociente de Rayleigh (ver capítulo 1) del laplaciano, denotado

por ϱ_L , será la clave para poder demostrar más propiedades de la conectividad algebraica. Como se discutió en el capítulo 1, los eigenvalores se pueden escribir en términos del cociente de Rayleigh. La conectividad algebraica se puede escribir en términos de dicho cociente:

Proposición 4.1.1 ([13]). *Sea G_C una gráfica conexa. Tenemos que*

$$a(G_C) = \min_{u \in Y} \varrho_{L(G_C)}(u),$$

siendo $Y = \text{Gen}(\mathbf{1})^\perp$ ($\mathbf{1}$ denota al vector cuyas entradas son todos unos).

Demostración. Al aplicar la proposición 1.1.17 en el subespacio Y tenemos la desigualdad

$$a(C_C) \leq \varrho_{L(G_C)}(u)$$

para todo $u \in Y$. Pero, por otro lado, si u es un vector Fiedler, sabemos que $u \in Y$ y que

$$a(C_C) = \varrho_{L(G_C)}(u).$$

Por lo tanto,

$$a(G_C) = \min_{u \in Y} \varrho_{L(G_C)}(u).$$

□

Si \tilde{G}_C es la gráfica que se obtiene de quitar una arista (dejando los mismos vértices) de G_C , se tiene

$$\varrho_{L(\tilde{G}_C)} \leq \varrho_{L(G_C)}$$

y en consecuencia

$$a(\tilde{G}_C) \leq a(G_C).$$

Sean $H_{1,C}$ y $H_{2,C}$ son dos subgráficas de G_C tales que $E(H_{1,C})$ y $E(H_{2,C})$ son disjuntos y $V(H_{1,C}) = V(H_{2,C}) = V(G_C)$, entonces, si L_1 y L_2 son los laplacianos correspondientes en $H_{1,C}$ y $H_{2,C}$, tenemos

$$\begin{aligned} a(G_C) &= \min_{u \in Y} (\varrho_{L_1}(u) + \varrho_{L_2}(u)) \\ &\geq \min_{u \in Y} \varrho_{L_1}(u) + \min_{u \in Y} \varrho_{L_2}(u) \\ &= a(H_{1,C}) + a(H_{2,C}), \end{aligned}$$

en donde $Y = \text{Gen}(\mathbf{1})^\perp$.

Entonces, la conectividad algebraica no crece si se quitan aristas y la suma de las conectividades algebraicas de subgráficas con aristas disjuntas y todos los vértices no es mayor a la conectividad algebraica de la gráfica completa. El teorema 4.1.2 resume las propiedades anteriores y de cierto modo justifica que la conectividad algebraica sea usada como cuantificador de la conectividad global de una gráfica.

Teorema 4.1.2 ([13]). *La conectividad algebraica de una gráfica tiene las siguientes propiedades:*

- (a) $a(G_C) = 0$ si y solo si la gráfica es desconexa.
- (b) $a(G_C) \leq a(H_C)$ si H y G son gráficas tales que $V(G) = V(H)$ y $E(G) \subset E(H)$.
- (c) $a(H_{1,C}) + a(H_{2,C}) \leq a(G_C)$ si H_1 y H_2 son subgráficas de G tales que $V(H_1) = V(H_2) = V(G)$ con $E(H_1)$ y $E(H_2)$ disjuntos.

El siguiente resultado establece que la conectividad algebraica crece al aumentar el valor de los pesos en las aristas y que multiplicar los pesos por una constante es equivalente a multiplicar la conectividad algebraica por dicha constante. La conectividad algebraica que se obtiene de sumar dos pesos es mayor a la suma de las conectividades algebraicas con tales pesos.

Proposición 4.1.3 ([13]). *Sea G una gráfica conexa. Sean C, D, H pesos sobre G , entonces*

- (a) $a(G_C) \leq a(G_D)$, si $C_{x,y} \leq D_{x,y}$ para todo $xy \in E$.
- (b) $a(G_C) + a(G_D) \leq a(G_H)$, si $C_{x,y} + D_{x,y} = H_{x,y}$ para todo $xy \in E$.
- (c) $a(G_{\beta C}) = \beta a(G_C)$ para $\beta > 0$.

Demostración. Sea $Y = \text{Gen}(\mathbf{1})^\perp \setminus \{0\}$. Primero, demostraremos (a). Por hipótesis de (a) se tiene que para toda función $u \in \ell(V)$

$$C_{x,y}(u(x) - u(y))^2 \leq D_{x,y}(u(x) - u(y))^2,$$

en particular, para todo $u \in Y$

$$\varrho_{L(G_C)}(u) \leq \varrho_{L(G_D)}(u).$$

Esto significa que $a(G_C)$ es una cota inferior del conjunto

$$\{\varrho_{L(G_D)}(u) \mid u \in Y\}.$$

Por lo tanto, usando la proposición 4.1.1

$$a(G_C) \leq \min_{u \in Y} \varrho_{L(G_C)}(u) = a(G_D).$$

Para el inciso (b), notemos que

$$\varrho_{L(G_H)} = \varrho_{L(G_C)} + \varrho_{L(G_D)}.$$

Luego, si $u \in Y$

$$a(G_C) + a(G_D) \leq \varrho_{L(G_H)}(u).$$

Por consiguiente, $a(G_C) + a(G_D)$ es una cota inferior del conjunto

$$\{\varrho_{L(G_H)}(u) \mid u \in Y\},$$

lo que implica que

$$a(G_C) + a(G_D) \leq \min_{u \in Y} \varrho_{L(G_H)}(u) = a(G_H).$$

Finalmente, el inciso (c) se sigue de la igualdad $\beta L(G_C) = L(G_{\beta C})$. \square

4.2. Propiedades de los vectores Fiedler en cortes de una gráfica

A continuación, introducimos el concepto de corte de una gráfica. La intención es presentar algunas propiedades de los vectores Fiedler en términos de cortes en gráficas. De forma intuitiva, un corte es una colección de aristas que, al ser quitadas, dividen a la gráfica en dos subgráficas disjuntas. La idea es ver que un vector Fiedler divide a la gráfica, es decir, induce un corte.

Definición 4.2.1. *Un corte de una gráfica consiste en un subconjunto de aristas \mathcal{C} tal que existen dos subconjuntos disjuntos no vacíos V_1 y V_2 cuya unión es V (una partición de V) de manera que*

$$\mathcal{C} = \{xy \in E \mid x \in V_1, y \in V_2\}.$$

A las subgráficas inducidas por V_1 y V_2 las llamaremos orillas.

Como ejemplo, consideremos el subconjunto de aristas $\mathcal{C} = \{x_1x_3, x_2x_3\}$ de la gráfica en la figura 4.1.

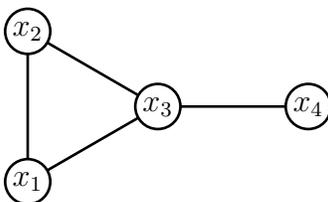


Figura 4.1

\mathcal{C} es un corte pues $V_1 = \{x_1, x_2\}$ y $V_2 = \{x_3, x_4\}$ es partición asociada. Las orillas $G(V_1)$ y $G(V_2)$ se observan en la figura 4.2.



Figura 4.2: Orillas

Los siguientes resultados van encaminados a obtener propiedades de las subgráficas inducidas por los vértices donde el signo de los vectores Fiedler no cambia. Antes, presentamos un lema que se usará frecuentemente en las demostraciones restantes de este capítulo debido a que relaciona el concepto de irreducibilidad de una matriz con el de conexidad de una gráfica, lo que permite trasladar un problema de gráficas a un problema de matrices y viceversa.

Lema 4.2.2 ([12]). *Una gráfica $G_{\mathcal{C}}$ es conexa si y solo si su matriz laplaciana es irreducible.*

Demostración. Dada cualquier partición de $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, digamos $\{N_1, N_2\}$, tenemos que $V_1 = \{x_i \mid i \in N_1\}$ y $V_2 = \{x_i \mid i \in N_2\}$ forman una partición de V . Entonces, si G_C es conexa, al menos un par de vértices $x_i \in V_1$ y $x_j \in V_2$ son tales que $x_i x_j \in E$. Esto se traduce en que $a_{ij} \neq 0$ para tales $i \in N_1$ y $j \in N_2$, siendo $L = (a_{ij})$. Por consiguiente, L es irreducible. Por otro lado, que L sea irreducible significa que $a_{ij} \neq 0$ para algún $i \in N_1$ y $j \in N_2$, lo cual implica que $x_i x_j \in E$, es decir, G_C es conexa. \square

Del siguiente teorema (resultado 4.2.3) obtenemos que los vectores Fiedler inducen subgráficas conexas tomando aquellos vértices donde es menor o mayor a algún valor fijo positivo o negativo, respectivamente. Usando este teorema es posible concluir que los vértices donde un vector Fiedler no cambia de signo inducen subgráficas conexas. Como veremos en la sección 4.3, este comportamiento caracteriza a los vectores Fiedler en caminos.

Teorema 4.2.3 ([12]). *Sea G_C una gráfica conexa y u un vector Fiedler. Para cualquier número $r \geq 0$ definamos el conjunto*

$$M_r = \{x_i \in V \mid u(x_i) + r \geq 0\}.$$

Entonces, la subgráfica inducida por M_r es conexa para cada r . Similarmente, para cada $r \leq 0$ la subgráfica inducida por

$$M'_r = \{x_i \in V \mid u(x_i) + r \leq 0\}$$

es conexa.

Demostración. En la demostración $[n] = \{1, \dots, n\}$. Para $\alpha \geq 0$ lo suficientemente grande, la matriz $\alpha I - L$ es no negativa, además de ser simétrica e irreducible. Sus eigenvalores son

$$\mu_1 = \alpha - \lambda_n \leq \mu_2 = \alpha - \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \mu_n = \alpha - \lambda_1$$

donde los λ_i son los eigenvalores del laplaciano L . Notemos que u es un eigenvector asociado a μ_{n-1} y que $\mathbf{1}^T = (1, 1, \dots, 1)$ es un eigenvector asociado a μ_n . De acuerdo con el corolario 1.2.4, para cualquier $r \geq 0$, la submatriz $\alpha I(N_r) - L(N_r)$, donde

$$N_r = \{i \in [n] \mid u(x_i) + r \geq 0\},$$

es irreducible. Luego, por el lema 1.2.2, $L(N_r)$ es irreducible. Ahora, si $L(N_r) = (a_{ij})$ y $L(G(M_r)) = (b_{ij})$, entonces $a_{ij} = b_{ij}$ si $i \neq j$. Entonces, $L(G(M_r))$ debe ser irreducible y por lo tanto, usando el lema 4.2.2, podemos concluir que $G(M_r)$ es conexa. De forma similar, usando el corolario 1.2.4, la submatriz $\alpha I(N'_r) - L(N'_r)$ es irreducible. Luego, $L(N'_r)$ es irreducible. Como las entradas de $L(N'_r)$ y $L(G(M'_r))$ coinciden fuera de la diagonal principal, entonces $L(G(M'_r))$ es irreducible y por tanto $G(M'_r)$ es conexa. \square

Si $0 \leq \alpha < \max_{x_i \in V} u(x_i)$ y $\alpha \neq u(x_i)$ para todo $x_i \in V$, los subconjuntos

$$\begin{aligned} V_1 &= \{x_i \in V \mid \alpha < u(x_i)\} \\ V_2 &= \{x_i \in V \mid u(x_i) < \alpha\} \end{aligned}$$

forman una partición de V correspondiente al corte \mathcal{C} dado por

$$\mathcal{C} = \{xy \in E \mid u(x) < \alpha < u(y)\}.$$

Nótese que, por el teorema 4.2.3, la orilla asociada con V_2 es conexa. En particular, si $\alpha = 0$

$$\mathcal{C} = \{xy \in E \mid u(x)u(y) < 0\}$$

es un corte con partición asociada

$$\begin{aligned} V_1 &= \{x \in V \mid u(x) > 0\} \\ V_2 &= \{x \in V \mid u(x) < 0\} \end{aligned}$$

y ambas orillas resultantes son conexas. Por ejemplo, en la gráfica que aparece en la figura 4.3 tenemos un vector Fiedler. Puede notarse que los vértices con el mismo signo inducen subgráficas conexas.

Los resultados anteriores nos dan información sobre el comportamiento de los vectores Fiedler en una gráfica. En especial, en caminos nos dan una idea más clara de cómo deben ser estos vectores.

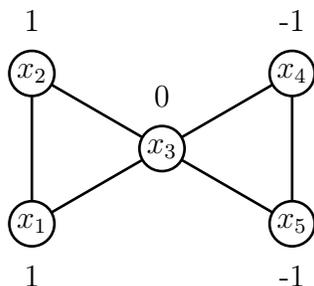


Figura 4.3

4.3. Propiedades de los vectores Fiedler en caminos

El objetivo de esta sección es demostrar que los valores de un vector Fiedler de un camino forman una sucesión monótona (resultado 4.3.4). El teorema 4.3.1 es el resultado principal que usaremos en la demostración. Una observación inmediata, pero que será útil, es que si u es un vector Fiedler y x es un vértice tal que $u(x) > 0$, entonces

$$0 < a(G_C)u(x) = \sum_{y \sim x} C_{xy}(u(x) - u(y)).$$

En consecuencia, debe existir un vértice z tal que $x \sim z$ y $u(x) - u(z) > 0$. Debido a que $u \neq 0$ y

$$\sum_{x \in V} u(x) = 0,$$

deben existir dos vértices x y y tales que $u(x) < 0$ y $u(y) > 0$.

Teorema 4.3.1 ([12]). *Sea $P_{n,C}$ un camino y un vector Fiedler u . Sea x_k un vértice tal que $k \notin \{1, n\}$ y tal que $u(x_k) > 0$. Entonces, en exactamente una de las componentes conexas que se obtienen de quitar el vértice x_k , u toma valores mayores a $u(x_k)$.*

Demostración. Lo que queremos mostrar es que ocurre uno solo de los siguientes casos:

- (A) $u(x_k) < u(x_j)$ para todo $j = 1, \dots, k - 1$.

(B) $u(x_k) < u(x_j)$ para todo $j = k + 1, \dots, n$.

Para todo $\varepsilon > 0$ tal que $u(x_k) - \varepsilon > 0$ definamos

$$M_\varepsilon = \{x_i \mid u(x_i) \leq u(x_k) - \varepsilon\}.$$

Por el teorema 4.2.3 la subgráfica inducida por M_ε es conexa. Puesto que $x_k \notin M_\varepsilon$, para todo $x_i \in M_\varepsilon$ se tiene que $i \leq k - 1$, o bien, que $i \geq k + 1$. Sin perder generalidad, supongamos que $i \leq k - 1$ siempre que $x_i \in M_\varepsilon$. Demostraremos que $u(x_k) < u(x_i)$ para todo $i \in \{k + 1, \dots, n\}$. Si para algún $j \in \{k + 1, \dots, n\}$ se tuviera que $u(x_j) < u(x_k)$, existiría $\varepsilon > 0$ tal que $u(x_k) - \varepsilon \geq u(x_j)$, lo cual implicaría que $j \leq k - 1$, pero eso es imposible. Si $u(x_j) = u(x_k)$ para algún $j \in \{k + 1, \dots, n\}$, en particular tendríamos que $u(x_j) > 0$, entonces $u(x_{j-1}) < u(x_j)$ o $u(x_{j+1}) < u(x_j)$, lo cual no es posible. Por lo tanto, $u(x_k) < u(x_i)$ para todo $i \in \{k + 1, \dots, n\}$. \square

Nótese que un resultado similar se obtiene si x_k es un vértice tal que $u(x_k) < 0$. En este caso, la conclusión es que, en una sola de las componentes conexas, los valores que toma u son menores que $u(x_k)$. Este resultado se sigue de aplicar el teorema 4.3.1 al vector $-u$. Usando dicho teorema, podemos mejorar el caso particular $r = 0$ del teorema 4.2.3 en caminos.

Corolario 4.3.2. *Sea $P_{n,C}$ un camino, u un vector Fiedler y sean*

$$M = \{x_i \mid u(x_i) < 0\}$$

$$N = \{x_i \mid u(x_i) = 0\}$$

$$O = \{x_i \mid u(x_i) > 0\}.$$

Entonces, las gráficas inducidas por M , N y O son conexas.

Demostración. Por el teorema 4.2.3 los conjuntos

$$A = \{x_i \mid u(x_i) \leq 0\}$$

$$B = \{x_i \mid u(x_i) \geq 0\}$$

inducen gráficas conexas. Esto significa que existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que, digamos, $u(x_i) \leq 0$ para todo $i \leq k$ y $u(x_i) \geq 0$ para todo $i \geq k$. Sean

$$p = \text{máx}\{i \mid u(x_i) < 0\}$$

$$q = \text{mín}\{i \mid u(x_i) > 0\}.$$

Sabemos que existen vértices x_r y x_s tales que $u(x_r) < 0$ y $u(x_s) > 0$, entonces, $q > 1$ y $p < n$. Si aplicamos el teorema 4.3.1 al vértice x_q obtenemos que $u(x_q) < u(x_i)$ para todo $i > q$, en particular $u(x_i) > 0$ para todo $i = q, \dots, n$. Similarmente, usando dicho teorema concluimos que $u(x_i) < 0$ para todo $i = 1, \dots, p$. Finalmente, para todo $p < i < q$, $u(x_i) = 0$, o bien, u no se anula en ningún vértice. Por lo tanto M , N y O inducen gráficas conexas. \square

Por el teorema 4.2.3, ya sabíamos que un vector Fiedler en un camino cambia de signo exactamente una vez. El corolario 4.3.2 adicionalmente nos dice que, el conjunto de vértices donde es positivo y el conjunto de vértices donde es negativo, están separados por los vértices donde se anula (ver figura 4.4). En el corolario 4.3.3 demostramos que, en un camino, un vector Fiedler se anula en a lo más un vértice.

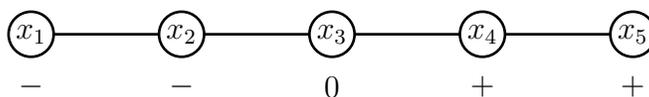


Figura 4.4

Proposición 4.3.3 ([12]). *Sea $P_{n,C}$ un camino y u un vector Fiedler. Entonces, u solo se anula una vez o no se anula. Si u se anula en x_k , entonces $u(x_{k-1})u(x_{k+1}) < 0$.*

Demostración. Sabemos por el corolario 4.3.2 que el conjunto

$$N = \{x_i \mid u(x_i) = 0\}$$

induce una gráfica conexas. Supongamos que N tiene al menos dos elementos. Entonces, existe un índice $k \in \{2, \dots, n-1\}$ tal que x_{k-1} y x_k están en N , pero x_{k+1} no está en N . Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= a(P_{n,C})u(x_k) \\ &= (Lu)(x_k) \\ &= C_{k-1,k}(u(x_k) - u(x_{k-1})) + C_{k,k+1}(u(x_k) - u(x_{k+1})) \\ &= -C_{k,k+1}u(x_{k+1}) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Así, N tiene a lo más un elemento. Supongamos que u se anula en x_k , entonces

$$\begin{aligned} 0 &= a(P_{n,C})u(x_k) \\ &= (Lu)(x_k) \\ &= C_{k-1,k}(u(x_k) - u(x_{k-1})) + C_{k,k+1}(u(x_k) - u(x_{k+1})) \\ &= -C_{k-1,k}u(x_{k-1}) - C_{k,k+1}u(x_{k+1}). \end{aligned}$$

Como $C_{k-1,k}$ y $C_{k,k+1}$ son números positivos, $u(x_{k-1})$ y $u(x_{k+1})$ deben tener signos distintos. \square

Si un vector Fiedler no se anula en un camino, se sigue del teorema 4.3.1 que sus valores forman una sucesión monótona. Si se anula, por sí solo, dicho teorema no es suficiente para obtener esa conclusión debido a que existía la posibilidad de que se anulara en más de un vértice. La importancia de la proposición 4.3.3 está en que nos dice que este inconveniente no ocurre.

Teorema 4.3.4 ([12]). *Sea $P_{n,C}$ un camino y un vector Fiedler u . Entonces, los valores que u toma sobre $P_{n,C}$ forman una sucesión monótona.*

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} M &= \{x_i \mid u(x_i) < 0\} \\ N &= \{x_i \mid u(x_i) = 0\} \\ O &= \{x_i \mid u(x_i) > 0\}. \end{aligned}$$

Sabemos que M y O son no vacíos. Supongamos que N es vacío. Si M y O solo contienen un vértice, terminamos. Supongamos que O posee al menos dos elementos. Como N es vacío, existe una arista, digamos $x_k x_{k+1}$, tal que $u(x_k) < 0$ y $u(x_{k+1}) > 0$. Luego, al aplicar el teorema 4.3.1 al vértice x_{k+1} obtenemos que $u(x_{k+1}) < u(x_{k+2})$. Volviendo a aplicar el teorema 4.3.1 al vértice x_{k+2} obtenemos $u(x_{k+2}) < u(x_{k+3})$. Siguiendo este proceso, concluimos que los valores que u toma en O forman una sucesión monótona creciente. Usando el mismo procedimiento con el conjunto M , obtenemos que los valores que u toma en M forman una sucesión monótona creciente. Por lo tanto, los valores de u sobre $P_{n,C}$ forman una sucesión monótona que es creciente. Con un etiquetamiento distinto de los vértices obtenemos una

sucesión monótona decreciente. Si N es no vacío, sabemos que N posee un único elemento, digamos x_k . Por la proposición 4.3.3 sabemos que u no se anula en x_{k-1} y x_{k+1} , además, el signo de u es distinto en dichos vértices. Aplicando el mismo proceso iniciando en los vértices x_{k-1} y x_{k+1} , obtenemos la misma conclusión. \square

Para ilustrar el teorema 4.3.4, en el camino de cuatro vértices que aparece en la figura 4.5 hemos calculado un vector Fiedler.

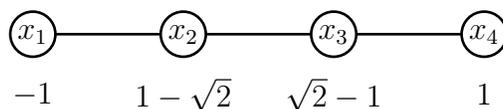


Figura 4.5

Si agregamos más hipótesis sobre los pesos de un camino, podemos obtener más información sobre el comportamiento de los vectores Fiedler. En el capítulo 5, estaremos interesados en caminos con pesos simétricos, es decir, pesos con la propiedad de que $C_{i,i+1} = C_{n+1-i,n-i}$. En la proposición 4.3.5 mostramos el comportamiento de un vector Fiedler en tales caminos.

Proposición 4.3.5. *Supongamos que $P_{n,C}$ es tal que C es un peso que tiene la propiedad de que $C_{i,i+1} = C_{n+1-i,n-i}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces, si u es un vector Fiedler*

$$u(x_i) + u(x_{n+1-i}) = 0$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración. Sea v un vector definido por $v(x_i) = u(x_{n+1-i})$ para todo $i = 1, \dots, n$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} (Lv)(x_i) &= C_{i,i+1}[v(x_i) - v(x_{i+1})] + C_{i-1,i}[v(x_i) - v(x_{i-1})] \\ &= C_{i,i+1}[u(x_{n+1-i}) - u(x_{n-i})] + C_{i-1,i}[u(x_{n+1-i}) - u(x_{n+2-i})] \\ &= C_{n+1-i,n-i}[u(x_{n+1-i}) - u(x_{n-i})] + C_{n+2-i,n-i}[u(x_{n+1-i}) - u(x_{n+2-i})] \\ &= (Lu)(x_{n+1-i}) \\ &= a(P_{n,C})u(x_{n+1-i}) \\ &= a(P_{n,C})v(x_i) \end{aligned}$$

por lo que v también es un vector Fiedler. Luego, $w = u + v$ es un vector Fiedler o es el vector idénticamente cero. Demostraremos que w no puede ser un vector Fiedler. Notemos que para todo $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} w(x_i) &= u(x_i) + v(x_i) \\ &= v(x_{n+1-i}) + u(x_{n+1-i}) \\ &= w(x_{n+1-i}). \end{aligned}$$

Entonces, w no puede ser un vector Fiedler debido a que es imposible que forme una sucesión monótona en $P_{n,C}$. Por lo tanto, w es el vector idénticamente cero, lo cual concluye la prueba. \square

En la proposición 4.3.5, si n es impar, digamos $n = 2m + 1$, tenemos que $2u(x_{m+1}) = 0$, lo que implica que $u(x_{m+1}) = 0$.

Resulta que los vectores Fiedler se caracterizan por inducir exactamente dos subgráficas conexas en donde su signo no cambia. Esto se establece en el teorema 4.3.6. La demostración requiere introducir el concepto de matriz acíclica y algunos resultados sobre ellas. Para no extender más este trabajo, omitimos su demostración. El teorema 4.3.6 es un caso particular del teorema que se puede encontrar en [14] el cual es una versión para árboles.

Teorema 4.3.6 ([12]). *Sea $P_{n,C}$ un camino y u un eigenvector que tiene una de las siguientes propiedades:*

- (i) *u no se anula y existe una única arista xy tal que $u(x)u(y) < 0$.*
- (ii) *u se anula en un único vértice x y u tiene el mismo signo en cada componente que se obtienen después de quitar el vértice x .*

Entonces, u es un vector Fiedler.

Usando el teorema 4.3.6, se puede comprobar que u definido por

$$u(x_j) = \cos\left(\frac{j\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}\right)$$

es un vector Fiedler de un camino de n vértices con peso idénticamente 1. Su conectividad algebraica es

$$a(P_n) = 2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

La conectividad algebraica de algunas gráficas con peso idénticamente 1 es conocida, e.g [1]. Se sabe que para un camino con pesos los eigenvalores de $L(P_{n,C})$ son **simples**, es decir, que tienen multiplicidad uno (e.g. [6]). En el teorema 4.3.7, demostramos que la conectividad algebraica de un camino con pesos es simple.

Teorema 4.3.7. *La conectividad algebraica de un camino con pesos es simple.*

Demostración. Sea por contradicción. Supongamos que existen dos vectores Fiedler u y v linealmente independientes. Sea

$$w_\alpha = u + \alpha v.$$

Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, w_α es un vector Fiedler. Sea

$$\alpha_0 = -\frac{u(x_1)}{v(x_1)}.$$

Note que, en un camino, un vector Fiedler no se anula en los vértices x_1 y x_n (esto es porque si se anulara, digamos en x_1 , necesariamente debería anularse en x_2 , pero los vectores Fiedler se anulan en a lo más un vértice). Pero, $w_{\alpha_0}(x_1) = 0$. Esto es imposible. Por lo tanto $a(P_{n,C})$ es simple. \square

La proposición 4.3.3 y el teorema 4.3.4 son el caso particular en caminos de los resultados más generales demostrados por Fiedler en [12]. Queremos mencionar que existen resultados similares para los demás eigenvalores, una referencia donde pueden encontrarse es en [6]. Los resultados se refieren al número de subgráficas conexas donde los eigenvalores no cambian de signo, a los cuales se les llama **gráficas signo** o **dominios nodales**.

Capítulo 5

Optimización de la conectividad algebraica en caminos

En este capítulo presentamos dos problemas, relacionados entre sí, en los que el objetivo es encontrar los pesos que maximizan la conectividad algebraica de una gráfica bajo la condición de que cierto valor permanezca fijo. El primero de estos problemas lo presentamos en la sección 5.1 y corresponde a dejar fija la suma de los pesos. Este problema fue propuesto y estudiado por Fiedler [14]. El segundo problema trata de dejar fija la resistencia total de la gráfica y lo presentamos en la sección 5.2. Los resultados presentados en dicha sección constituyen la aportación original de este trabajo.

5.1. La Conectividad Algebraica Absoluta

En [14] Fiedler propuso el problema de maximizar la conectividad algebraica de una gráfica conexa con la condición de que la suma de todos los valores en las aristas sea igual al número de aristas, o dicho de otro modo, que el promedio de todos los valores en las aristas sea igual a uno. A tal valor máximo, Fiedler lo nombró **conectividad algebraica absoluta**. Fiedler logró resolver por completo este problema en el caso de árboles y demostró que la conectividad algebraica absoluta de un árbol siempre es un número racional (cf. [14]). En esta sección presentamos la solución de Fiedler para el caso particular de caminos. La solución para árboles en general

puede consultarse en [14] y en [25] hay resultados para clases más generales de gráficas.

Dada una gráfica conexa G , denotaremos por $\mathcal{C}(G)$ al conjunto de pesos sobre G tales que

$$\sum_{xy \in E} C_{xy} = |E|,$$

en donde $|E|$ denota al número de aristas de la gráfica.

Definición 5.1.1. *Sea G una gráfica conexa. Al número*

$$\hat{a}(G) = \max_{c \in \mathcal{C}(G)} a(G_C)$$

lo llamaremos conectividad algebraica absoluta.

El siguiente teorema que presentamos (teorema 5.1.3) fue probado por Fiedler [14] y resulta muy útil para determinar la conectividad algebraica de gráficas en las que hay simetría. Este teorema nos dice que, bajo ciertas condiciones, dada una gráfica con peso es posible construir otro peso más simétrico que tiene la propiedad de aumentar la conectividad algebraica. En consecuencia los pesos para los que se alcanza la conectividad algebraica absoluta resultan ser simétricos. Describimos esto a continuación.

Definición 5.1.2. *Dos aristas en una gráfica G son equivalentes si existe un automorfismo de G en sí misma que mapea una arista en la otra.*

Teorema 5.1.3 ([13]). *Sea G una gráfica conexa. Dados pesos $C \in \mathcal{C}(G)$, existen pesos $D \in \mathcal{C}(G)$ tales que los pesos en aristas equivalentes son iguales y satisfacen $a(G_C) \leq a(G_D)$.*

Demostración. Lo que haremos será construir explícitamente al peso D a partir del peso C . Si $\{\varphi_1, \dots, \varphi_s\}$ es el conjunto de automorfismos de G , para cada $k \in \{1, \dots, s\}$, sea $D^{(k)}$ el peso dado por

$$D_{xy}^{(k)} = C_{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}.$$

Ya que los eigenvalores del laplaciano no cambian bajo automorfismos de G , $a(G_C) = a(G_{D^{(k)}})$ para todo $k \in \{1, \dots, s\}$. Ahora, definimos el peso D

como

$$D_{xy} = \frac{D_{xy}^{(1)} + \cdots + D_{xy}^{(s)}}{s}$$

y notemos que las siguientes igualdades son ciertas

$$\begin{aligned} \sum_{xy \in E(G)} D_{xy} &= \frac{1}{s} \sum_{xy \in E(G)} \sum_{k=1}^s D_{xy}^{(k)} \\ &= \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \sum_{xy \in E(G)} D_{xy}^{(k)} \\ &= \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s |E| \\ &= |E|. \end{aligned}$$

En consecuencia, $D \in \mathcal{C}(G)$. Luego, usando los incisos (b) y (c) de la proposición 4.1.3, tenemos

$$a(G_C) = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s a(G_{D^{(k)}}) \leq a(G_D).$$

Finalmente, notemos que, si φ es un automorfismo de G , $D_{xy} = D_{\varphi(x)\varphi(y)}$. Entonces, D toma el mismo valor en aristas equivalentes. \square

El siguiente resultado es inmediato del teorema anterior.

Corolario 5.1.4. *El peso que proporciona la conectividad algebraica absoluta se alcanza para un peso $D \in \mathcal{C}(G)$ con la propiedad de que los pesos en aristas equivalentes son iguales.*

Entonces, en gráficas donde todas las aristas son equivalentes entre sí, la conectividad algebraica absoluta la proporciona la gráfica con peso idénticamente 1. Por ejemplo, esto nos dice que en el caso de ciclos la conectividad algebraica absoluta se alcanza para la gráfica con peso 1 que es igual a (ver e.g. [1])

$$\hat{a}(C_n) = 2 - 2 \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right).$$

El siguiente resultado nos dice cómo deben ser los vectores Fiedler de la conectividad algebraica absoluta en el caso de que su multiplicidad como eigenvalor sea igual a 1. Es decir, en el caso en que λ_2 es un eigenvalor simple. Nos da además una condición suficiente para que un vector Fiedler sea el que corresponde a la conectividad algebraica absoluta. Esto resulta útil para determinar la conectividad algebraica absoluta de manera eficiente en el caso de caminos (Teorema 5.1.6).

Teorema 5.1.5 ([14]). *Supongamos que G es una gráfica conexa y $C \in \mathcal{C}(G)$ es tal que $a(G_C) = \hat{a}(G)$. Entonces, si $a(G_C)$ es un eigenvalor simple y u es un vector Fiedler, entonces existe $K > 0$ tal que para todo $xy \in E$*

$$|u(x) - u(y)| = K. \quad (5.1)$$

Recíprocamente, si $C \in \mathcal{C}(G)$ es tal que $a(G_C)$ es simple y un vector Fiedler cumple 5.1 para algún $K > 0$, entonces

$$a(G_C) = \hat{a}(G).$$

Demostración. Sea $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función distinta de cero tal que

$$\sum_{xy \in E} \omega_{xy} = 0. \quad (5.2)$$

Dado $r \in \mathbb{R}$, la función $\gamma(r) : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\gamma(r) = C + r\omega$$

cumple que

$$\sum_{xy \in E} \gamma(r)_{xy} = \sum_{xy \in E} (C_{xy} + r\omega_{xy}) = |E|.$$

Ahora, existe $\varepsilon > 0$ tal que, si $|r| \leq \varepsilon$, $\gamma(r)$ es un peso sobre G . Luego, debido a la optimalidad de C , tenemos

$$a(G_{\gamma(r)}) \leq a(G_C).$$

Por otro lado, notemos que

$$L(G_{\gamma(r)}) = L(G_C) + rL(G_\omega).$$

Entonces, como $a(G_C)$ es simple, se sigue de [20] que para r lo suficientemente pequeño

$$a(G_{\gamma(r)}) = a(G_C) + r \varrho_{L(G_\omega)}(u) + o(r^2)$$

donde $\varrho_{L(G_\omega)}(u)$ es el cociente de Rayleigh de $L(G_\omega)$ evaluado en un vector Fiedler asociado a $a(G_C)$. Como consecuencia, $a(G_C) \leq a(G_{\gamma(r)})$, así que necesariamente

$$\varrho_{L(G_\omega)}(u) = 0.$$

La igualdad anterior es cierta exactamente cuando

$$\sum_{xy \in E} \omega_{xy} (u(x) - u(y))^2 = 0$$

y como esto es cierto para todo $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple 5.2, se sigue que

$$|u(x) - u(y)| = K$$

para algún $K > 0$.

Supongamos ahora que $C \in \mathcal{C}(G)$, es tal que $a(G_C)$ es simple y un vector Fiedler u cumple 5.1 para algún $K > 0$. Mostraremos que $a(G_C) = \hat{a}(G)$. Para $P \in \mathcal{C}(G)$ y v_P eigenvector unitario asociado a $a(G_P)$, consideremos la función

$$a(G_P) = \varrho_{L(G_P)}(v_P) = \sum_{xy \in E} P_{xy} (v_P(x) - v_P(y))^2.$$

Puesto que P está en $\mathcal{C}(G)$, para algún $\tilde{x}\tilde{y} \in E$ tenemos

$$P_{\tilde{x}\tilde{y}} = |E| - \sum_{xy \neq \tilde{x}\tilde{y}} P_{xy},$$

luego,

$$a(G_P) = \left(|E| - \sum_{xy \neq \tilde{x}\tilde{y}} P_{xy} \right) (v_P(\tilde{x}) - v_P(\tilde{y}))^2 + \sum_{xy \neq \tilde{x}\tilde{y}} P_{xy} (v_P(x) - v_P(y))^2$$

y entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(G_P)}{\partial P_{zw}} &= \left(|E| - \sum_{xy \neq \tilde{x}\tilde{y}} P_{xy} \right) \frac{\partial (v_P(\tilde{x}) - v_P(\tilde{y}))^2}{\partial P_{zw}} - (v_P(\tilde{x}) - v_P(\tilde{y}))^2 \\ &\quad + (v_P(z) - v_P(w))^2 + P_{zw} \frac{\partial (v_P(z) - v_P(w))^2}{\partial P_{zw}} \\ &\quad + \sum_{\substack{xy \neq \tilde{x}\tilde{y} \\ xy \neq zw}} P_{xy} \frac{\partial (v_P(z) - v_P(w))^2}{\partial P_{zw}}. \end{aligned}$$

Luego, como $(u(x) - u(y))^2 = K^2$ para algún $K > 0$

$$\frac{\partial (u(x) - u(y))^2}{\partial P_{xy}} = 0.$$

Por lo que

$$\frac{\partial a(G_C)}{\partial P_{zw}} = -(u(\tilde{x}) - u(\tilde{y}))^2 + (u(z) - u(w))^2 = 0.$$

Esto significa que C es un máximo local. Para finalizar la demostración, probaremos que todo máximo local de $a(G_P)$ es un máximo global. Supongamos que $D \in \mathcal{C}(G)$ es tal que

$$a(G_C) < a(G_D).$$

Para $0 < \varepsilon < 1$, sea $H(\varepsilon) = (1 - \varepsilon)C + \varepsilon D$. Ahora, por la proposición 4.1.3

$$\begin{aligned} a(G_{H(\varepsilon)}) &\geq (1 - \varepsilon)a(G_C) + \varepsilon a(G_D) \\ &> (1 - \varepsilon)a(G_C) + \varepsilon a(G_C) \\ &= a(G_C) \end{aligned}$$

Esto significa que en cualquier vecindad de C podemos hallar otro peso donde la conectividad algebraica de G es mayor, lo que contradice que C es un máximo local. Por lo tanto, C debe ser un máximo global. \square

Usando el teorema anterior, podemos resolver completamente el problema en caminos. Para ilustrar esto, revisaremos el siguiente ejemplo. Consideremos el problema en el camino de cinco vértices. Sabemos que, si D es el peso que proporciona la conectividad algebraica absoluta, los valores en aristas equivalentes deben ser iguales. Entonces, usando la proposición 4.3.5 y el teorema 4.3.4, podemos suponer que el peso y el vector Fiedler asociado son de la forma mostrada en la gráfica de la figura 5.1.

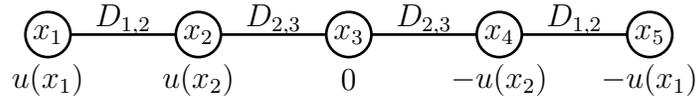


Figura 5.1

Puesto que sabemos que la conectividad algebraica de un camino con pesos es simple, podemos aplicar el teorema 5.1.5. El teorema 5.1.5 nos da una condición suficiente para que un vector Fiedler sea un vector Fiedler asociado a $\hat{a}(P_{n,D})$; debemos asignar los valores de u de manera que las distancias de los valores en vértices adyacentes sea la misma. Pongamos $u(x_1) = -2$, luego $u(x_2) = -1$ y $u(x_3) = 0$. Entonces u es vector Fiedler asociado a la conectividad algebraica absoluta $\hat{a}(P_{n,D})$. Ahora, para obtener los valores de $D_{1,2}$, $D_{2,3}$ y $\hat{a}(P_{n,D})$, consideremos las igualdades:

$$2\hat{a}(P_{n,D}) = (Lu)(x_5) = D_{1,2}$$

y

$$\hat{a}(P_{n,D}) = (Lu)(x_4) = D_{2,3} - D_{1,2}$$

que junto con la restricción

$$2(D_{1,2} + D_{2,3}) = 4$$

forman el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2\hat{a}(P_{n,D}) &= D_{1,2} \\ \hat{a}(P_{n,D}) &= D_{2,3} - D_{1,2} \\ D_{1,2} + D_{2,3} &= 2 \end{aligned}$$

cuya solución es: $D_{1,2} = \frac{4}{5}$, $D_{2,3} = \frac{6}{5}$ y $\hat{a}(P_{n,D}) = \frac{2}{5}$.

Notemos que el teorema 5.1.5 nos da una caracterización concreta del vector Fiedler para caminos. Esto nos permite, a su vez, calcular la conectividad algebraica absoluta. Hacemos esto en el siguiente teorema. En la demostración del teorema tomamos un camino ligeramente distinto al ejemplo anterior al usar el cociente de Rayleigh, pero la idea es esencialmente la misma.

Teorema 5.1.6 ([14]). *La conectividad algebraica absoluta de un camino de n vértices es*

$$\hat{a}(P_n) = \frac{12}{n(n+1)}$$

y el peso para el que se alcanza ese valor está dado por

$$C_{k,k+1} = \frac{6k(n-k)}{n(n+1)}$$

para $k = 1, \dots, n-1$.

Demostración. La idea es que, una vez que tenemos un vector Fiedler, podemos encontrar el valor de la conectividad algebraica y el peso asociado con un sistema de ecuaciones. Vamos a elegir un vector cuya distancia entre los valores de vértices adyacentes sea la misma. Consideremos el vector

$$u(x_k) = 2k - (n+1).$$

Entonces,

$$|u(x_{k+1}) - u(x_k)| = 2$$

para todo $k = 1, \dots, n-1$. Aún no sabemos que u es un eigenvector, pero de serlo, por el teorema 4.3.6 y el teorema 5.1.5 sería un vector Fiedler asociado a la conectividad algebraica absoluta. Lo que haremos será encontrar un valor λ y un peso C de manera que u sea un eigenvector asociado a λ . Si u es un eigenvector, usando el cociente de Rayleigh tenemos

$$\begin{aligned} \lambda &= \rho_L(u) \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n-1} C_{k,k+1} [u(x_{k+1}) - u(x_k)]^2}{\sum_{k=1}^n u(x_k)^2} \\ &= \frac{4(n-1)}{\sum_{k=1}^n u(x_k)^2}, \end{aligned}$$

en donde hemos supuesto que $C \in \mathcal{C}(P_n)$. Note que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u(x_k)^2 &= 4 \sum_{k=1}^n k^2 - 4(n+1) \sum_{k=1}^n k + n(n+1) \\ &= 4 \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] - 4(n+1) \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] + n(n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)}{3}. \end{aligned}$$

Así que

$$\lambda = \frac{12}{n(n+1)}.$$

Ahora, vamos a encontrar el peso C . De acuerdo con la definición de laplaciano

$$\lambda u(x_1) = C_{1,2}[u(x_1) - u(x_2)],$$

entonces,

$$\begin{aligned} C_{1,2} &= -\frac{\lambda u(x_1)}{2} \\ &= \frac{6(n-1)}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

De forma similar

$$\begin{aligned} \lambda u(x_2) &= C_{1,2}[u(x_2) - u(x_1)] + C_{2,3}[u(x_2) - u(x_3)] \\ &= 2(C_{1,2} - C_{2,3}) \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned} C_{2,3} &= \frac{2C_{1,2} - \lambda u(x_2)}{2} \\ &= \frac{12(n-2)}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Continuando con este proceso, se llega a que

$$C_{k,k+1} = \frac{6k(n-k)}{n(n+1)}$$

y como

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{6k(n-k)}{n(n+1)} &= \frac{6}{n(n+1)} \left(n \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \right) \\ &= n-1, \end{aligned}$$

entonces, $C \in \mathcal{C}$. Para finalizar la demostración, debemos verificar que u es un eigenvector. Tenemos que

$$\begin{aligned} (Lu)(x_k) &= 2(C_{k-1,k} - C_{k,k+1}) \\ &= \frac{12}{n(n+1)} [2k - (n+1)] \\ &= \lambda u(x_k), \end{aligned}$$

entonces, u es un eigenvector. Usando el teorema 4.3.6 podemos concluir que u es un vector Fiedler y por el teorema 5.1.5 es un vector Fiedler asociado a la conectividad algebraica absoluta, por lo que

$$\lambda = \hat{a}(P_n).$$

□

5.2. Conectividad Algebraica máxima con Resistencia Total fija

En [15] Fiedler hace una revisión de varios problemas de optimización en una gráfica. La idea general es maximizar o minimizar alguna característica de una gráfica con pesos, sujeta a la condición de que el promedio de los valores en las aristas sea uno. En nuestro caso, estamos interesados en la resistencia total de una gráfica y en la conectividad algebraica de la misma. En el artículo [16], se aborda el problema de minimizar la resistencia total de una gráfica sujeta a que la suma de los pesos sea igual a 1. En esta sección proponemos el problema de maximizar la conectividad algebraica sujeta a la condición de mantener la resistencia total fija. Denotaremos por $\tilde{a}(G)$ a la conectividad algebraica máxima de la gráfica G sujeta a que la resistencia total sea igual a 1.

Abordaremos el problema solo en caminos debido a que poseemos una expresión explícita para $R(P_{n,C})$. En este trabajo solo presentamos las soluciones para P_3 y P_4 (La solución para P_2 es directa). Además, análogo a lo que hizo Fiedler, proponemos una conjetura que permite restringir la búsqueda de los pesos óptimos. Resumimos lo anterior en la siguiente definición:

Definición 5.2.1. *Definimos $\tilde{a}(P_n)$ como el siguiente máximo*

$$\tilde{a}(P_n) = \max_{C \in \mathcal{R}(P_n)} a(P_n),$$

donde $\mathcal{R}(P_n)$ denota al conjunto de pesos tales que $R(P_{n,C}) = 1$.

Recordemos que en un camino $P_{n,C}$, la resistencia total está dada por la expresión

$$R(P_{n,C}) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{C_{k,k+1}}.$$

Como vimos en la sección 5.1, Fiedler logró demostrar que los pesos que dan la conectividad algebraica absoluta, son aquellos que en aristas equivalentes toman los mismos valores (lema 5.1.3). En resumen, la idea de la demostración proporcionada por Fiedler consiste en que, dado un peso C , se puede construir un nuevo peso que mantenga el promedio de los valores de las aristas (es decir, que siga cumpliendo la restricción), pero cuya conectividad algebraica resultante sea mayor o igual y que en aristas equivalentes tome el mismo valor. Siguiendo esa misma idea, dada una gráfica G y un peso C sobre ella, deseamos encontrar un nuevo peso D en función de C de tal manera que la resistencia total de G_D sea la misma que G_C , que en aristas equivalentes tome el mismo valor y que la conectividad algebraica de G con el peso D no disminuya. Para el caso específico de caminos tenemos lo siguiente:

Sea $P_{n,C}$ tal que $R(P_{n,C}) = 1$. Defínase el peso D de la siguiente manera:

$$D_{k,k+1} = 2 \left(\frac{1}{C_{k,k+1}} + \frac{1}{C_{n-(k-1),n-k}} \right)^{-1}$$

es decir, tomamos la media armónica de los valores que C toma en aristas equivalentes. Luego, se siguen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
 R(P_{n,D}) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{D_{k,k+1}} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) \left(\frac{1}{C_{k,k+1}} + \frac{1}{C_{n-(k-1),n-k}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{C_{k,k+1}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{C_{n-(k-1),n-k}} \right) \\
 &= \frac{1}{2}(1+1) \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el peso D construido de esa manera preserva la resistencia total de un camino. El siguiente paso consiste en demostrar que la conectividad algebraica no disminuye. En P_2 la respuesta es inmediata: la conectividad algebraica es la misma. Demostraremos que en P_3 y P_4 la conectividad algebraica no disminuye al tomar el peso D .

5.2.1. El caso de P_3

Lema 5.2.2. *Sea C un peso sobre P_3 . Tomemos el peso D dado por*

$$\begin{aligned}
 D_{1,2} &= \frac{2}{\frac{1}{C_{1,2}} + \frac{1}{C_{2,3}}} \\
 D_{2,3} &= D_{1,2}.
 \end{aligned}$$

Entonces, $a(P_{3,C}) \leq a(P_{3,D})$.

Demostración. Consideremos el vector $u = (1, 0, -1)$, el cual, es vector Fiedler asociado a $a(P_{3,D})$. Esto se justifica viendo que u es un eigenvector y usando el teorema 4.3.6. Luego, tomemos

$$v(\alpha) = \alpha u + (-1, 2, -1)$$

y notemos que, para todo α , $v(\alpha)$ es ortogonal a los vectores constantes. Ahora, el cociente de Rayleigh de $L(P_{3,C})$ evaluado en $v(\alpha)$ es

$$\begin{aligned}\varrho_{L(P_{3,C})}[v(\alpha)] &= \frac{C_{1,2}[\alpha - 1 - 2]^2 + C_{2,3}[2 - (-\alpha - 1)]^2}{(\alpha - 1)^2 + 2^2 + (-\alpha - 1)^2} \\ &= \frac{C_{1,2}(3 - \alpha)^2 + C_{2,3}(\alpha + 3)^2}{2\alpha^2 + 6}\end{aligned}$$

Sea

$$\alpha_0 = 3 \left(\frac{C_{1,2} + C_{2,3}}{C_{1,2} - C_{2,3}} \right).$$

Entonces, se sigue lo siguiente

$$\begin{aligned}\varrho_{L(P_{3,C})}[v(\alpha_0)] &= \frac{D_{1,2}}{1 + \frac{3}{\alpha_0^2}} \\ &< D_{1,2} \\ &= a(P_{3,D}).\end{aligned}$$

Por la proposición 1.1.17

$$a(P_{3,C}) \leq \varrho_{L(P_{3,C})}[v(\alpha)]$$

para todo α . Por lo tanto, se tiene que

$$a(P_{3,C}) < a(P_{3,D}).$$

Notemos que la igualdad se da exactamente cuando $C_{1,2} = C_{2,3}$. □

Como consecuencia de este lema, el peso en el que se alcanza la conectividad algebraica máxima debe estar en el subconjunto de pesos tales que en aristas equivalentes toman el mismo valor (figura 5.2).

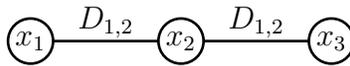


Figura 5.2: P_3 con peso simétrico

Ahora, usando el lema 5.2.2, es posible resolver el problema que proponemos en el camino de tres vértices de forma inmediata:

Sabemos que

$$a(P_3) = 1,$$

y por el lema 4.1.3, se sigue que

$$a(P_{3,D}) = D_{1,2},$$

donde D es tal que $D_{1,2} = D_{2,3}$ y tal que cumple la restricción

$$1 = R(P_{3,D}) = 2 \left(\frac{1}{D_{1,2}} + \frac{1}{D_{2,3}} \right).$$

De la restricción obtenemos $D_{1,2} = 4$, por lo que necesariamente

$$\tilde{a}(P_3) = 4.$$

Sin embargo, aún sin usar el lema 5.2.2, es posible resolver el problema en el camino de tres vértices de forma directa; encontrando una expresión explícita de $a(P_{3,C})$. Para encontrar esta forma explícita, recordemos que

$$\lambda_2(P_{3,C}) + \lambda_3(P_{3,C}) = \text{Tr}(L(P_{3,C})) = 2(C_{1,2} + C_{2,3})$$

siendo $\text{Tr}(L(P_{3,C}))$ la traza de $L(P_{3,C})$, y que

$$3 \left(\frac{1}{\lambda_2(P_{3,C})} + \frac{1}{\lambda_3(P_{3,C})} \right) = R(P_{3,C}) = 2 \left(\frac{1}{C_{1,2}} + \frac{1}{C_{2,3}} \right),$$

usando el teorema 3.4.3. Entonces, resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda_2(P_{3,C}) + \lambda_3(P_{3,C}) &= 2(C_{1,2} + C_{2,3}) \\ \frac{1}{\lambda_2(P_{3,C})} + \frac{1}{\lambda_3(P_{3,C})} &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{C_{1,2}} + \frac{1}{C_{2,3}} \right) \end{aligned}$$

obtenemos que los eigenvalores de $L(P_{3,C})$ son

$$\begin{aligned} \lambda_2(P_{3,C}) &= (C_{1,2} + C_{2,3}) - \sqrt{(C_{1,2} - C_{2,3})^2 + C_{1,2}C_{2,3}} \\ \lambda_3(P_{3,C}) &= (C_{1,2} + C_{2,3}) + \sqrt{(C_{1,2} - C_{2,3})^2 + C_{1,2}C_{2,3}}. \end{aligned}$$

Nuestra intención es maximizar

$$a(P_{3,C}) = (C_{1,2} + C_{2,3}) - \sqrt{(C_{1,2} - C_{2,3})^2 + C_{1,2}C_{2,3}} \quad (5.3)$$

sujeta a la restricción

$$2 \left(\frac{1}{C_{1,2}} + \frac{1}{C_{2,3}} \right) = 1.$$

Despejando $C_{2,3}$ se obtiene que

$$C_{2,3} = \frac{2C_{1,2}}{C_{1,2} - 2},$$

luego, sustituyendo en 5.3, queda la función de una sola variable

$$a(P_{3,C}) = C_{1,2} \left(\frac{C_{1,2} - \sqrt{C_{1,2}^2 - 6C_{1,2} - 12}}{C_{1,2} - 2} \right).$$

Si multiplicamos y dividimos por el factor $C_{1,2} + \sqrt{C_{1,2}^2 - 6C_{1,2} - 12}$, resulta la expresión

$$a(P_{3,C}) = \frac{6C_{1,2}}{C_{1,2} + \sqrt{C_{1,2}^2 - 6C_{1,2} - 12}}.$$

Ahora, siendo $r = \frac{1}{C_{1,2}}$, esto se puede escribir como

$$a(P_{3,C}) = \frac{6}{1 + \sqrt{12r^2 - 6r + 1}}.$$

De esta última expresión se observa que $a(P_{3,C})$ se maximiza exactamente cuando $12r^2 - 6r + 1$ se minimiza, lo cual, ocurre cuando $r = \frac{1}{4}$, es decir, cuando $C_{1,2} = 4$. Sustituyendo, resulta que $C_{2,3} = 4$. Esto coincide con lo que se había obtenido antes. Este resultado lo enunciamos a continuación.

Teorema 5.2.3. *Se tiene que*

$$\tilde{a}(P_3) = 4.$$

El peso que proporciona dicho máximo está dado por

$$C_{1,2} = 4$$

$$C_{2,3} = 4.$$

5.2.2. El caso de P_4

Para el camino de cuatro vértices con pesos, también tenemos el lema análogo.

Lema 5.2.4. *Dado $P_{4,C}$ definamos el peso D como*

$$\begin{aligned} D_{1,2} &= \frac{2}{\frac{1}{C_{1,2}} + \frac{1}{C_{3,4}}} \\ D_{2,3} &= C_{2,3} \\ D_{3,4} &= D_{1,2} \end{aligned}$$

entonces, $a(P_{4,C}) \leq a(P_{4,D})$.

Demostración. Sea u un vector Fiedler asociado a $a(P_{4,D})$, con $\|u\| = 1$. De acuerdo con el teorema 4.3.4 y la proposición 4.3.5, sabemos que u tiene la forma

$$u = (-u(x_1), -u(x_2), u(x_2), u(x_1)).$$

Consideremos el vector

$$\begin{aligned} v(\alpha) &= u + \alpha(1, -1, -1, 1) \\ &= (\alpha - u(x_1), -\alpha - u(x_2), -\alpha + u(x_2), \alpha + u(x_1)). \end{aligned}$$

El vector $v(\alpha)$ es ortogonal a los vectores constantes para cualquier α . Por otro lado, el cociente de Rayleigh de $L(P_{4,C})$ evaluado en $v(\alpha)$ es

$$\begin{aligned} \varrho_{L(P_{4,C})}[v(\alpha)] &= \frac{1}{\|v(\alpha)\|^2} \{ C_{1,2}[(\alpha - u(x_1)) - (-\alpha - u(x_2))]^2 \\ &\quad + C_{2,3}[(-\alpha - u(x_2)) - (-\alpha + u(x_2))]^2 + C_{3,4}[(-\alpha + u(x_2)) - (\alpha + u(x_1))]^2 \} \end{aligned}$$

en donde

$$\|v(\alpha)\|^2 = [\alpha - u(x_1)]^2 + [-\alpha - u(x_2)]^2 + [-\alpha + u(x_2)]^2 + [\alpha + u(x_1)]^2.$$

Luego de simplificar, se puede escribir como

$$\begin{aligned} \varrho_{L(P_{4,C})}[v(\alpha)] &= \frac{1}{4\alpha^2 + 1} \{ 4\alpha^2(C_{1,2} + C_{3,4}) + 4\alpha[u(x_2) - u(x_1)](C_{1,2} - C_{3,4}) \\ &\quad + 4u(x_2)^2 C_{2,3} + (C_{1,2} + C_{3,4})[u(x_2) - u(x_1)]^2 \}. \end{aligned}$$

Para

$$\alpha_0 = \frac{(u(x_1) - u(x_2))(C_{1,2} - C_{3,4})}{2(C_{1,2} + C_{3,4})}$$

se tiene

$$\begin{aligned} \varrho_{L(P_{4,C})}[v(\alpha_0)] &= \frac{1}{4\alpha_0^2 + 1} \left(\frac{[u(x_1) - u(x_2)]^2 4C_{1,2}C_{3,4}}{C_{1,2} + C_{3,4}} + 4u(x_2)^2 C_{2,3} \right) \\ &= \frac{2D_{1,2}[u(x_1) - u(x_2)]^2 + D_{23}[2u(x_2)]^2}{4\alpha_0^2 + 1} \\ &= \frac{\varrho_{L(P_{4,D})}(u)}{4\alpha_0^2 + 1} \\ &= \frac{a(P_{4,D})}{4\alpha_0^2 + 1} \\ &\leq a(P_{4,D}). \end{aligned}$$

La igualdad se da si $C_{1,2} = C_{3,4}$. Debido a la proposición 1.1.17

$$a(P_{4,C}) \leq \varrho_{L(P_{4,C})}[v(\alpha)],$$

y se tiene que la desigualdad es cierta para todo α , lo que implica que

$$a(P_{4,C}) \leq a(P_{4,D})$$

como se quería demostrar. \square

Entonces, el peso que proporciona la conectividad algebraica máxima en P_4 , debe ser tal que $C_{1,2} = C_{3,4}$ (ver figura 5.3).

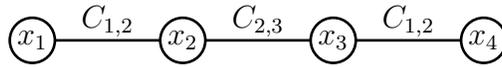


Figura 5.3: P_4 con peso simétrico

Es posible obtener una expresión explícita de $a(P_{4,C})$ bajo el supuesto de que el peso C es tal que $C_{1,2} = C_{3,4}$. En tal caso, podemos suponer que

el eigenvector, u , asociado a $a(P_{4,C})$ es de la forma:

$$\begin{aligned} u(x_1) &= -p \\ u(x_2) &= -1 \\ u(x_3) &= 1 \\ u(x_4) &= p. \end{aligned}$$

Luego, tenemos que $(Lu)(x_3)$ y $(Lu)(x_4)$ están dados por

$$\begin{aligned} a(P_{4,C})p &= C_{1,2}(p-1) \\ a(P_{4,C}) &= C_{1,2}(1-p) + 2C_{2,3}. \end{aligned}$$

Notemos que las igualdades anteriores forman un sistema de ecuaciones que es posible resolver para $a(P_{4,C})$ y p . Al resolver se obtiene que

$$a(P_{4,C}) = (C_{1,2} + C_{2,3}) - \sqrt{C_{1,2}^2 + C_{2,3}^2}. \quad (5.4)$$

Nuestra intención es maximizar $a(P_{4,C})$, sujeto a que

$$1 = R(P_{4,C}) = \frac{6}{C_{1,2}} + \frac{4}{C_{2,3}}.$$

Si despejamos $C_{2,3}$ de la restricción tenemos que

$$C_{2,3} = \frac{4C_{1,2}}{C_{1,2} - 6},$$

luego, sustituyendo en 5.4, se obtiene (luego de simplificar)

$$a(P_{4,C}) = \frac{C_{1,2} \left(C_{1,2} - 2 - \sqrt{(C_{1,2} - 6)^2 + 4^2} \right)}{C_{1,2} - 6}.$$

Multiplicando y dividiendo por $C_{1,2} - 2 + \sqrt{(C_{1,2} - 6)^2 + 4^2}$, queda

$$a(P_{4,C}) = \frac{8C_{1,2}}{C_{1,2} - 2 - \sqrt{(C_{1,2} - 6)^2 + 4^2}}.$$

Poniendo $r = \frac{1}{C_{1,2}}$ la expresión anterior puede escribirse como

$$a(P_{4,C}) = \frac{8}{(1-2r) + \sqrt{(1-6r)^2 + (4r)^2}}.$$

El problema ahora consiste en minimizar la función dada por

$$f(r) = (1-2r) + \sqrt{(1-6r)^2 + (4r)^2}.$$

Tenemos que

$$f'(r) = -2 + \frac{6(6r-1) + 16r}{\sqrt{(6r-1)^2 + (4r)^2}},$$

entonces, al resolver la ecuación $f'(r) = 0$

$$r = \frac{1}{9 - \sqrt{3}}.$$

Luego, después de calcular f'' , usando GeoGebra para evaluar, resulta que $f''\left(\frac{1}{9-\sqrt{3}}\right) \approx 83,138 > 0$, entonces, r es un mínimo local. Por lo tanto, el peso óptimo está dado por

$$\begin{aligned} C_{1,2} &= 9 - \sqrt{3} \\ C_{2,3} &= 16 + 4\sqrt{3} \\ C_{3,4} &= 9 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

resultando que $\tilde{a}(P_4) = 25 - 3\sqrt{3} - \sqrt{388 - 110\sqrt{3}} \approx 6,143$. Resumimos lo anterior en el siguiente resultado.

Teorema 5.2.5. *Se tiene que*

$$\tilde{a}(P_4) = 25 - 3\sqrt{3} - \sqrt{388 - 110\sqrt{3}} \approx 6,143.$$

El peso donde se alcanza el máximo está definido por

$$\begin{aligned} C_{1,2} &= 9 - \sqrt{3} \\ C_{2,3} &= 16 + 4\sqrt{3} \\ C_{3,4} &= 9 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] N. M. Abreu. Old and new results on algebraic connectivity of graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 423(1):53–73, 2007.
- [2] L. Ahlfors. *Complex Analysis: An Introduction to The Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. McGraw-Hill Education, 1979.
- [3] C. Arauz. The Kirchhoff indexes of some composite networks. *Discrete Applied Mathematics*, 160(10):1429–1440, 2012.
- [4] S. Axler. *Linear Algebra Done Right*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2014.
- [5] E. Bendito, Á. Carmona, A. M. Encinas, and J. M. Gesto. A formula for the Kirchhoff index. *International Journal of Quantum Chemistry*, 108:1200–1206, 2008.
- [6] T. Biyikoglu, J. Leydold, and P. Stadler. *Laplacian Eigenvectors of Graphs: Perron-Frobenius and Faber-Krahn Type Theorems*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [7] B. Bollobas. *Modern Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.
- [8] D. Borthwick. *Introduction to Partial Differential Equations*. Universitext. Springer International Publishing, 2017.
- [9] S. L. Campbell and C. D. Meyer. *Generalized Inverses of Linear Transformations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.
- [10] D. Cvetkovic, P. Rowlinson, and S. Simić. *Introduction to the Theory of Graph Spectra*, volume 75 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, 2009.

- [11] M. Fiedler. Algebraic connectivity of graphs. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 23:298–305, 1973.
- [12] M. Fiedler. A property of eigenvectors of nonnegative symmetric matrices and its application to graph theory. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 25(4):619–633, 1975.
- [13] M. Fiedler. Laplacian of graphs and algebraic connectivity. *Banach Center Publications*, 25:57–70, 1989.
- [14] M. Fiedler. Absolute algebraic connectivity of trees. *Linear and Multilinear Algebra*, 26(1-2):85–106, 1990.
- [15] M. Fiedler. Some minimax problems for graphs. *Discrete Mathematics*, 121(1):65–74, 1993.
- [16] A. Ghosh, S. Boyd, and A. Saberi. Minimizing effective resistance of a graph. *SIAM Review*, 50(1):37–66, 2008.
- [17] F. Harary. *Graph theory*. 1969.
- [18] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 2 edition, 2012.
- [19] P. E. T. Jorgensen and E. P. J. Pearse. A Hilbert Space Approach to Effective Resistance Metric. *Complex Analysis and Operator Theory*, 4(4):975–1013, 11 2009.
- [20] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Classics in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1995.
- [21] J. Kigami. *Analysis on Fractals*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2001.
- [22] D. Klein and M. Randić. Resistance distance. *Journal of Mathematical Chemistry*, 12(1):81–95, 1993.
- [23] J. Mora. *Álgebra Lineal*. Ingeniería y Ciencia Básicas. Larousse - Grupo Editorial Patria, 2014.
- [24] J. L. Palacios. Closed-form formulas for Kirchhoff index. *International Journal of Quantum Chemistry*, 81(2):135–140, 2001.

- [25] S. Richter and I. Rocha. Absolute algebraic connectivity of double brooms and trees. *Discrete Applied Mathematics*, 201:213–221, 2016.
- [26] G. Strang. *Álgebra Lineal y Sus Aplicaciones*. CENGAGE Learning, 2006.
- [27] R. S. Strichartz. *Differential Equations on Fractals: A Tutorial*. Princeton University Press, 2006.