



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Modelo de suministro de agua para la región de Pachuca de Soto, Hidalgo

TESIS
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA

Josué Neftalí Gutiérrez Corona

Bajo la dirección de

Benjamín Alfonso Itzá Ortiz
Luis Alberto Quezada Téllez

PACHUCA, HIDALGO. JULIO DE 2023.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
 Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
 School of Engineering and Basic Sciences
Área Académica de Matemáticas y Física
 Department of Physics and Mathematics

Mineral de la Reforma, Hgo., a 4 de julio de 2023

Número de control: ICBI-AAMyF/2189/2023

Asunto: Autorización de impresión de tesis.

MTRA. OJUKY DEL ROCÍO ISLAS MALDONADO
DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UA EH

El Comité Tutorial de la tesis titulada “**Modelo de suministro de agua para la región de Pachuca de Soto, Hidalgo**”, realizada por el sustentante **Josué Neftalí Gutiérrez Corona**, con número de cuenta **467840**, perteneciente a la **Maestría en Matemáticas**, una vez que ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el Artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente:

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.


Atentamente


“Amor, Orden y Progreso”

El Comité Tutorial


 Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz
 Director

 Dr. Jorge Viveros Roge
 Miembro del comité




 Dr. Luis Alberto Quezada Téllez
 Codirector

 Dr. Velitchko G. Tzatchkovel
 Miembro del comité

Ciudad del Conocimiento
 Carretera Pachuca-Tulancingo km 4.5 Colonia
 Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo,
 México. C.P. 42184
 Teléfono: +52 (771) 71 720 00 ext. 2531
 aamyf_icbi@uaeh.edu.mx



www.uaeh.edu.mx

*A mi amada esposa Dany,
quien ha sido mi apoyo incondicional y mi motivación en cada paso que he dado.*

A Dios, por su amor y su guía en mi vida.

A mi familia, por su cariño y su incesante apoyo.

Y a mis amigos, por su presencia constante y sus ánimos durante este camino.

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que contribuyeron a la realización de este trabajo. En primer lugar, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por su apoyo financiero a través de la beca 1145038.

También quiero extender un agradecimiento especial a la maestra Martha Patricia Hansen Rodríguez, quien amablemente proporcionó los datos actualizados de PIGOO, los cuales fueron fundamentales para el desarrollo de esta investigación.

A lo largo de mi maestría, conté con el apoyo y la motivación de muchos profesores, quienes me brindaron su conocimiento y experiencia. Quiero expresar mi agradecimiento a todos ellos por su ayuda y por ser una fuente constante de inspiración.

No puedo dejar de mencionar a mis directores de tesis, quienes me guiaron en todo momento. En primer lugar, quiero expresar mi profundo agradecimiento al Dr. Luis Alberto Quezada Téllez, quien no solo fue mi director de tesis, sino que se convirtió en un mentor y un amigo en el camino. Su apoyo incondicional, su sabiduría y su orientación fueron fundamentales para alcanzar los resultados obtenidos en esta investigación. Además, el Dr. Quezada siempre estuvo disponible para brindarme ideas y soluciones a los problemas que se presentaron, lo que me permitió avanzar con mayor seguridad y confianza en mi trabajo. Su dedicación y compromiso con mi formación académica y personal siempre serán recordados con gratitud y aprecio.

Asimismo, agradezco al Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz por su inestimable ayuda y apoyo durante el desarrollo de esta tesis. Sus aportes y consejos en el fascinante mundo de las matemáticas fueron cruciales para poder entender los conceptos más complejos y avanzar en mi investigación con mayor claridad y precisión. Gracias a su guía y orientación, hoy puedo presentar este trabajo con orgullo y satisfacción. Además, las conversaciones con el Dr. Itzá fueron siempre una fuente inagotable de ideas y reflexiones, donde descubrí la pasión y el entusiasmo que él tiene por su disciplina. Su dedicación y enseñanzas hicieron que cada hora que pasé con él fuera sumamente placentera y enriquecedora, y lograron fascinarme con el mundo de las

matemáticas de una manera que nunca antes había experimentado. Gracias, Dr. Itzá, por su entusiasmo, por compartir sus conocimientos y por haberme inspirado a seguir explorando en este fascinante campo del conocimiento.

Quiero agradecer al Maestro Arturo Torres Mendoza por ser una fuente de inspiración y un apoyo invaluable durante mi investigación. Su experiencia en docencia e investigación fue fundamental para el éxito del proyecto y su ayuda en la elaboración de mapas en Qgis me permitió visualizar los resultados de manera clara y precisa. El Maestro Arturo brindó consejo y guía en todo momento, y su apoyo fue vital para avanzar en mi trabajo con éxito. Sin su ayuda, hubiera sido difícil alcanzar los resultados obtenidos. Nuevamente, gracias al Maestro Arturo Torres Mendoza por su contribución invaluable a esta investigación

Además, quiero mencionar a personas muy importantes en mi vida, sin las cuales no habría podido llegar hasta aquí. En primer lugar, quiero agradecer a mi esposa Daniela, quien ha sido mi compañera de vida y mi mayor apoyo en todo momento. Sin el apoyo moral que ella me brindó durante todo el proceso, no hubiera podido superar los momentos de estrés y frustración que se presentaron. Daniela ha sido un pilar en el desarrollo de mi tesis, siempre dispuesta a escucharme y aconsejarme en los momentos más difíciles. Su amor, paciencia y comprensión me han impulsado a alcanzar este gran logro en mi vida.

También quiero agradecer a la Licenciada Esmeralda Trejo Ramírez, quien con su ayuda propedéutica me permitió comprender temas vitales de la maestría y me proporcionó una base sólida para avanzar en mi investigación. La orientación que ella me brindó fue fundamental para tener un enfoque claro y organizado en mi tesis. Además, su disposición y compromiso con mi proyecto fueron valiosos para mí en todo momento.

A mi amiga la doctora Ana Gabriela Hernández Dávila y a la Doctora Annel Ayala, quienes en más de una ocasión me asesoraron cuando no comprendí algunos temas. La experiencia y el conocimiento que ellas poseen fueron de gran ayuda para aclarar mis dudas y permitirme avanzar en mi investigación. Ana Gabriela me ayudó a comprender temas complejos que no lograba entender, y la doctora Anel me brindó asesoramiento y apoyo cuando lo necesité. Agradezco su tiempo, dedicación y paciencia para ayudarme en todo momento.

Gracias a todas estas personas, pude cumplir con éxito este gran logro en mi vida. Su apoyo, su paciencia y su guía fueron fundamentales para alcanzar los resultados obtenidos.

A todos ellos, mi más sincero agradecimiento.

Josué Neftalí Gutiérrez Corona

Índice general

Agradecimientos	5
Índice general	7
Resumen	9
Introducción	11
1. Preliminares: sistemas dinámicos autónomos	15
1.1. Definiciones	16
1.2. Sistemas de dos dimensiones	18
1.2.1. Sistemas bidimensionales lineales	18
1.2.2. Sistemas bidimensionales no lineales	19
1.2.3. Interpretación geométrica de las soluciones	21
1.2.4. El plano traza-determinante	22
1.3. Sistemas dinámicos no lineales en \mathbb{R}^n	23
1.3.1. Teorema de Hartman-Grobman	24
2. Sistemas dinámicos no autónomos (SDNA)	29
2.1. Ecuaciones diferenciales no autónomas	30
2.2. Motivación de utilizar SDNA en el modelado matemático	31
2.3. Análisis de estabilidad en sistemas dinámicos no autónomos	31
2.4. Control de sistemas no autónomos	34
2.5. Aplicaciones	35
2.5.1. Ejemplos de modelos matemáticos que emplean SDNA	36
2.6. Modelación y simulación	38
2.7. Identificación de sistemas no autónomos	39

3. El agua	41
3.1. El agua en el mundo	41
3.2. El agua en México	42
3.3. El agua en Hidalgo	42
3.4. El agua en Pachuca	43
3.5. Fuentes de abastecimiento de agua	47
4. Modelo SUR	51
4.1. Desarrollo y planteamiento del modelo SUR	51
4.2. Calibración del modelo	55
4.3. Ventajas y limitaciones del modelo SUR	61
5. Estabilidad de SUR	63
5.1. Análisis de estabilidad del modelo	63
6. Análisis numérico de SUR	69
6.1. Simulaciones	69
6.2. Gráficas de las simulaciones	71
7. Resultados	75
7.1. Discusión de los resultados	75
7.2. Conclusiones	77
8. Conflicto de intereses y disponibilidad de datos	79
8.1. Declaración de disponibilidad de datos	79
8.2. Declaración de no intereses	80
Bibliografía	81
	81
A. Programas para el análisis del agua	87
A.1. Programa para resolver numéricamente el sistema SUR usando MATLAB	87
A.2. Programa para graficar las soluciones del modelo SUR empleando MATLAB .	89
A.3. Programa empleado para calcular los puntos de equilibrio de SUR empleando Mathematica.	90

Resumen

En este trabajo se propone un modelo matemático para el abastecimiento de agua en la región de Pachuca de Soto, Hidalgo, México. El modelo considera la interacción entre las tres principales fuentes naturales que abastecen a la región; agua superficial, agua subterránea y agua de recarga. El modelo se basó en un balance de materia en estado no estacionario sobre las fuentes de abastecimiento, dando lugar a un sistema no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias. Los parámetros del sistema se calibraron con datos experimentales obtenidos del Sistema Nacional de Información sobre el Agua. Por último, se realizó un análisis cualitativo para determinar la naturaleza de sus puntos de equilibrio. Se comprobó que las tres fuentes de agua presentan una dinámica oscilatoria. Este comportamiento es más pronunciado en la fuente superficial y de recarga y menos pronunciado en la fuente subterránea, donde se encontró una tendencia a la disminución. Entre los puntos de equilibrio encontrados, el origen, que se interpreta como "punto apocalíptico", resulta ser un punto de silla. Es importante destacar que el sistema propuesto en este trabajo modeló con éxito el comportamiento del agua en la región con un error medio cuadrático promedio de 0.006189956.

Abstract

In this work, a mathematical model for the water supply in the region of Pachuca de Soto, Hidalgo, México, is proposed. The model considers the interaction between the three main natural sources that supply the region; surface water, groundwater and recharge water. The model was based on a non-steady-state balance of matter over the supply sources, giving rise to a non autonomous system of ordinary differential equations. The system parameters were calibrated with experimental data obtained from the National Water Information System. Finally, a qualitative analysis was performed to determine the nature of their equilibrium points. It was verified that the three water sources have oscillatory dynamics. This behavior is more pronounced in the surface source and recharge and less pronounced in the groundwater source, where a tendency to decrease was found. Among the equilibrium points found, the origin, which is interpreted as an "apocalyptic point", is proved to be a saddle point. It is important to highlight that the system proposed in this work successfully modeled the behavior of water in the region with a $\overline{MSE} = 0.006189956$.

Introducción

El agua potable se ha convertido cada vez más en un tema de preocupación en todo el mundo, hasta el punto de que ya no se puede dar por sentada la certeza de la suficiencia de agua disponible para el consumo humano en los próximos años. La relevancia de esta preocupación se hace urgente si tenemos en cuenta la diversidad de la distribución del agua, ya que aproximadamente el 75 % de la población humana se concentra en zonas donde sólo se dispone del 20 % del agua potable [Toledo, 2002]. Se ha documentado que la escasez de agua impacta directamente en los hogares, la industria, la agricultura, así como en otros sectores económicos, provocando incrementos de precios en la canasta básica de alimentos [Esparza, 2014]. Se prevé que para el año 2025, alrededor del 80 % de la población mundial experimentará condiciones de muy alta escasez de agua y un tercio de la población vivirá situaciones consideradas "altamente catastróficas" por falta de agua [Toledo, 2002].

El agua es un motor para el crecimiento y desarrollo de cualquier sociedad, por lo que es muy relevante contar con un acceso confiable en cantidad y calidad [Silva et al., 2006]. En México, la Comisión de Agua y Alcantarillado de los Sistemas Intermunicipales (CAASIM), la Comisión Nacional del Agua (CONAGUA), el Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA), el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), el Programa de Indicadores de Gestión para Organismos Operadores (PIGOO) y el Sistema Nacional de Información del Agua (SINA), son los encargados de manejar la información del agua en el país. Entre otras cosas, estos organismos publican estadísticas y modelos matemáticos básicos sobre el balance hídrico, que permiten tener una idea general de cómo se distribuye el agua. Sin embargo, la mayoría de estos modelos carecen de precisión y exactitud porque consideran los caudales en régimen constante. Además, los modelos disponibles parecen considerar estable la variación de los recursos con respecto al tiempo, a pesar de que los datos muestran su disminución. Por lo tanto, no es aconsejable basarse en la información estadística accesible para predecir con exactitud la disponibilidad de agua.

Entre los pocos trabajos donde se modela la oferta/demanda de agua en México considerando regímenes no constantes se encuentran los analizados en [Martínez et al., 2011] y [Martínez et al., 2013]. En estos trabajos se modela la interacción entre el agua subterránea y el agua su-

perficial. Por otro lado, en [Tzatchkov & Alcocer, 2016] los autores modelan la variación del consumo de agua potable utilizando métodos estocásticos. Otra forma de abordar este problema se describe en [Hernández et al., 2016]. Basándose en el suministro de petróleo y gas los autores evaluaron las fuentes de abastecimiento de agua subterránea en la región del Valle del Mezquital. En el mismo año, en [Montesillo, 2017], los autores demuestran mediante un análisis estadístico que la tasa de crecimiento de la población es un factor determinante de la cantidad de demanda de agua potable en México.

Este trabajo surge de la necesidad de modelar la interacción de las fuentes naturales de agua que abastecen la región, considerando caudales variables con el fin de tener una mejor aproximación de la dinámica del abastecimiento de agua potable en la región de Pachuca de Soto, Hidalgo. Esto contrasta fuertemente con la literatura disponible donde, para los autores, los caudales estimados se consideran como constantes.

En este trabajo se presenta un sistema dinámico para el abastecimiento de agua potable en la región de Pachuca de Soto, Hidalgo. En el modelo propuesto se establecen como variables las siguientes tres fuentes naturales de agua disponibles en la región: agua superficial, agua subterránea y recarga natural. Para desarrollar el modelo se realizó un diagrama de interacciones entre las fuentes y se propuso un balance de materia no estacionario [Felder & Rousseau, 2004]. A continuación, se modelizó cada uno de los flujos teniendo en cuenta la interacción entre las variables. Posteriormente, se calibra el modelo con datos experimentales [Gobierno de México, 2014]. Dado que la propuesta en este trabajo puede considerarse como un fenómeno continuo, se sigue el trabajo con balances de materia en regímenes no estacionarios [Contreras et al., 2018].

A partir de las ecuaciones de equilibrio, se obtuvo un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias. Posteriormente se llevó a cabo un análisis cualitativo para determinar la estabilidad de sus puntos de equilibrio. Este análisis permite comprender la dinámica del agua así como el comportamiento y escenarios catastróficos en el suministro de agua potable. El modelo mostró que la cantidad de agua disponible en la región de Pachuca tiende a disminuir con el tiempo. De acuerdo con las simulaciones computacionales mostradas, existen escenarios en los que la cantidad de agua puede incluso aumentar si se modifican algunas condiciones iniciales.

La presente tesis se organiza de la siguiente manera. En el Capítulo 1, se abordan los sistemas dinámicos autónomos, proporcionando las definiciones y conceptos fundamentales para comprender el tema central de la investigación. El Capítulo 2 se centra en los sistemas dinámicos no autónomos, analizando su estabilidad y explorando sus aplicaciones en diversos campos. En el Capítulo 3 se examina el agua en diferentes contextos geográficos, abarcando su distribución y características a nivel mundial, en México y específicamente en la región de estudio. A continuación, en el Capítulo 4 se presenta el modelo SUR, detallando su desarrollo y planteamiento. El Capítulo 5 se dedica al análisis de estabilidad del modelo SUR, evaluando su comportamiento en diferentes escenarios. En el Capítulo 6 se lleva a cabo un análisis numérico del modelo SUR, realizando simulaciones y representando gráficamente los resultados obtenidos. Los resultados se discuten en el Capítulo 7, donde se presentan las conclusiones derivadas del trabajo realizado. Finalmente, en el Capítulo 8 se aborda el conflicto de interés y la disponibilidad de datos,

asegurando la transparencia y ética en la investigación. Además, se incluyen la bibliografía y los anexos que complementan y respaldan el desarrollo de la tesis.

CAPÍTULO 1

Preliminares: sistemas dinámicos autónomos

En este capítulo de preliminares se presentará la teoría de sistemas dinámicos autónomos, los cuales son un objeto de estudio importante en matemáticas, física, biología, ingeniería y otras áreas. Los sistemas dinámicos autónomos describen el comportamiento temporal de un sistema que evoluciona en el tiempo sin la influencia de factores externos.

Los sistemas dinámicos son modelos matemáticos que describen cómo evolucionan ciertas variables a lo largo del tiempo, y son de gran importancia en una amplia variedad de disciplinas científicas y tecnológicas. En particular, los sistemas dinámicos autónomos son aquellos en los que la evolución de las variables depende únicamente de su estado actual, sin que intervengan factores externos. Estos sistemas se presentan en problemas tan diversos como el movimiento de los planetas, la propagación de epidemias, la dinámica de poblaciones, el comportamiento de sistemas eléctricos o electrónicos, y muchos otros [Hirsch et al., 2013].

El estudio de los sistemas dinámicos se ha desarrollado de manera intensa y fructífera durante más de un siglo, y ha llevado a la formulación de importantes teoremas y herramientas matemáticas para el análisis de su comportamiento. Entre las principales preguntas que se pueden plantear sobre un sistema dinámico se encuentran la existencia y estabilidad de puntos de equilibrio, la caracterización de trayectorias periódicas o caóticas, la identificación de bifurcaciones o transiciones en su comportamiento, y la posibilidad de controlar o manipular su evolución [Strogatz, 2018].

En este capítulo, nos enfocaremos en el estudio de sistemas dinámicos autónomos desde un punto de vista matemático riguroso, comenzando con el caso más sencillo de sistemas lineales

bidimensionales y extendiéndonos gradualmente a sistemas no lineales de dimensión arbitraria. Veremos las definiciones y conceptos fundamentales, como puntos de equilibrio, estabilidad y linealización, y nos centraremos en teoremas clave como el teorema de Hartman-Grobman y el teorema de Poincaré-Bendixson. También exploraremos algunos ejemplos interesantes de sistemas dinámicos, y discutiremos su relevancia en diferentes áreas de la ciencia y la tecnología.

1.1

Definiciones

Antes de adentrarnos en el estudio de los sistemas dinámicos autónomos, es importante tener claridad sobre algunos conceptos fundamentales. En esta sección, presentamos un conjunto de definiciones que nos permitirán comprender de manera precisa y rigurosa los términos que utilizaremos a lo largo del texto. Las definiciones aquí presentadas se basan en la literatura especializada y se han seleccionado cuidadosamente para asegurar una adecuada comprensión de los sistemas dinámicos autónomos.

Definición 1.1. *Llamaremos sistema dinámico a un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:*

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}) \quad (1.1)$$

donde $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{Y}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ y $\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \frac{dx_2(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt} \right)$. Dicho sistema se puede ver como:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

A cada una de las $x_i(t)$ se les llama variables de estado del sistema.

Definición 1.2. *Se dice que el sistema es autónomo si se escribe en forma $\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{Y})$. En caso contrario, se dice que es no autónomo.*

Definición 1.3. Decimos que un sistema dinámico es lineal si se puede expresar como $\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{Y}$, donde $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es una matriz de coeficientes. Es decir:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Definición 1.4. Los planos formados por los valores (x_p, x_q) para $p, q = 1, 2, \dots, n$ los llamamos planos fase $X_p X_q$.

Definición 1.5. Una curva solución $C = (x_p(t), x_q(t))$ para $p, q = 1, 2, \dots, n$, en los planos fase $X_p X_q$, está definida por el par de funciones $x_p(t)$ y $x_q(t)$ que son solución de la ecuación (1.1).

Definición 1.6. Al conjunto de vectores $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ tangentes a las trayectorias, los llamaremos campo de direcciones (o vectorial) del sistema (1.1).

Definición 1.7. Llamamos puntos de equilibrio (o críticos) a aquellos puntos $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}(t)$, tales que $\mathbf{F}(\mathbf{Y}_0) = \mathbf{0}$. Cabe resaltar que los puntos críticos son solución de (1.1).

Teorema 1.1. Considérese el sistema dinámico lineal $\frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t)$. Si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, entonces el único punto de equilibrio del sistema es el origen.

Demostración. Supongamos que \mathbf{Y}_0 es un punto de equilibrio del sistema, es decir, $\mathbf{A}\mathbf{Y}_0 = \mathbf{0}$. Si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, entonces la matriz \mathbf{A} es invertible. Podemos entonces multiplicar ambos lados de la ecuación por la matriz inversa \mathbf{A}^{-1} para obtener:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Y}_0 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0}$$

lo que implica que $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{0}$. Por lo tanto, el único punto de equilibrio del sistema es el origen. \square

Definición 1.8. El punto \mathbf{Y}_0 es un punto de equilibrio estable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $\mathbf{Y}(t)$ es una solución del sistema y $|\mathbf{Y}(t_0) - \mathbf{Y}_0| < \delta$, para algún t_0 , entonces para todo $t \geq t_0$ se cumple que $|\mathbf{Y}(t) - \mathbf{Y}_0| < \varepsilon$.

Definición 1.9. El punto \mathbf{Y}_0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable si $\exists \delta > 0$ tal que si $\mathbf{Y}(t)$ es una solución del sistema, y $|\mathbf{Y}(t_0) - \mathbf{Y}_0| < \delta$ para algún t_0 , entonces cuando $t \rightarrow \infty$ se tiene que $\mathbf{Y}(t) \rightarrow \mathbf{Y}_0$.

Definición 1.10. Todo punto de equilibrio que no sea estable le llamaremos inestable.

1.2

Sistemas de dos dimensiones

En este estudio, comenzaremos con sistemas dinámicos bidimensionales, ya que estos permiten una observación gráfica clara de los distintos puntos estables presentes. Un sistema dinámico bidimensional se puede representar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x,y)\end{aligned}$$

En este contexto, es importante distinguir entre sistemas lineales y no lineales de dos dimensiones.

En lo que sigue, exploraremos los sistemas dinámicos lineales y no lineales de dos dimensiones, respectivamente, para analizar cómo se comportan los puntos estables y entender mejor su dinámica.

1.2.1

Sistemas bidimensionales lineales

Un sistema dinámico autónomo lineal bidimensional se define como un conjunto de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy\end{aligned}$$

Donde a , b , c y d son constantes y se denominan coeficientes del sistema. Estas ecuaciones son lineales en x e y , y su solución general se puede expresar como una combinación lineal de exponenciales con coeficientes constantes.

La solución del sistema se puede obtener por medio de la matriz exponencial, dada por:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{X}_0$$

donde \mathbf{A} es la matriz de coeficientes del sistema.

En los sistemas dinámicos lineales bidimensionales, los valores propios de la matriz \mathbf{A} determinan el comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema. Específicamente, se pueden identificar los siguientes casos [Hirsch et al., 2013]:

- Si ambos valores propios son reales y de signo opuesto, se tiene un punto de silla.
- Si ambos valores propios son reales y del mismo signo, se tiene un nodo estable si ambos son negativos, o un nodo inestable si ambos son positivos.
- Si ambos valores propios son complejos conjugados con parte real negativa, se tiene un foco estable.
- Si ambos valores propios son complejos conjugados con parte real positiva, se tiene un foco inestable.
- Si los valores propios son complejos conjugados con parte real cero, se tiene un centro.
- Si uno de los valores propios es 0 y el otro es positivo, se tiene un punto de equilibrio no hiperbólico (también conocido como punto silla degenerado).
- Si uno de los valores propios es 0 y el otro es negativo, se tiene un nodo estable degenerado si la derivada de la función del sistema es negativa en la dirección transversal al conjunto de equilibrio, o un nodo inestable degenerado si la derivada es positiva en la dirección transversal.
- Si ambos valores propios son 0, se tiene un punto de equilibrio degenerado.

Consultar la figura 1.1, ahí se pueden observar los distintos casos de comportamientos mencionados.

1.2.2

Sistemas bidimensionales no lineales

Para el caso de sistemas bidimensionales no lineales, se puede recurrir al teorema de linealización que establece que cerca de un punto de equilibrio, un sistema no lineal puede ser

aproximado por un sistema lineal. La demostración de este teorema se basa en la expansión de Taylor de las funciones no lineales alrededor del punto de equilibrio. A continuación se presenta un caso particular en dicho teorema para el caso de dos dimensiones:

Teorema 1.2. *Supongamos que tenemos un sistema dinámico autónomo no lineal dado por:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

donde f_1, \dots, f_n son funciones continuamente diferenciables en alguna región alrededor de un punto de equilibrio (x_1^*, \dots, x_n^*) . Entonces, se cumple que el sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Se puede aproximar al sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_1^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{pmatrix}$$

En las cercanías del punto (x_1^*, \dots, x_n^*) .

Demostración. Supongamos que (x_1^*, \dots, x_n^*) es un punto de equilibrio del sistema. Para comprender mejor lo que ocurre con las soluciones cercanas a este punto, necesitamos linealizar el sistema en las inmediaciones de (x_1^*, \dots, x_n^*) . Para hacerlo, podemos utilizar una expansión en series de Taylor de cada una de las funciones en torno a dicho punto. De esta manera, podremos obtener una aproximación lineal del sistema que nos permitirá analizar su comportamiento en la vecindad de (x_1^*, \dots, x_n^*) .

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= f_1(x_1^*, \dots, x_n^*) + \frac{\partial f_1(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial f_1(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + O_1 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= f_n(x_1^*, \dots, x_n^*) + \frac{\partial f_n(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial f_n(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + O_n \end{aligned}$$

Donde los términos O_1, \dots, O_n representan el resto de la serie de Taylor de las funciones dadas, como (x_1^*, \dots, x_n^*) es un punto de equilibrio por hipótesis, entonces $f_1(x_1^*, \dots, x_n^*) = \dots = f_n(x_1^*, \dots, x_n^*) = 0$, si despreciamos los términos de residuo se puede reescribir como sigue:

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, \dots, x_n) &\approx \frac{\partial f_1(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial f_1(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_n} (x_n - x_n^*) \\
&\vdots \\
f_n(x_1, \dots, x_n) &\approx \frac{\partial f_n(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^*) + \dots + \frac{\partial f_n(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_n} (x_n - x_n^*)
\end{aligned}$$

Lo que en su forma matricial se escribe como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_1^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

que es lo que se pretendía demostrar. \square

Observación: Note que la ecuación (1.4) en el caso de 2 ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f(x, y), \dot{y} = g(x, y)$ con punto de equilibrio (x_0, y_0) es:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Cabe resaltar que (1.5) es un sistema lineal bidimensional. En general, el teorema 1.2 nos dice que se puede aproximar un sistema no lineal a uno lineal en las cercanías del punto de equilibrio, obteniendo un comportamiento similar al expuesto anteriormente en el punto de equilibrio.

1.2.3

Interpretación geométrica de las soluciones

La interpretación geométrica de las soluciones de un sistema autónomo de dos ecuaciones diferenciales se puede hacer en términos de las trayectorias en el plano fase. Las trayectorias son curvas que describen cómo se comportan las soluciones en el espacio de estados. A continuación, se presentan algunas propiedades geométricas importantes de las trayectorias.

- Las trayectorias tienden a ser paralelas en regiones en las que el campo vectorial es uniforme. Esto se debe a que el campo vectorial describe la dirección de la derivada en cada punto, y por lo tanto, en una región uniforme, el cambio de la derivada es constante y las trayectorias son rectas paralelas.

- Las trayectorias pueden converger hacia un punto fijo o alejarse de él. Un punto fijo es un estado del sistema que no cambia en el tiempo, es decir, una solución constante. Las trayectorias cercanas a un punto fijo se acercan o se alejan de él dependiendo de la orientación del campo vectorial en esa región. Si el campo vectorial apunta hacia el punto fijo, entonces las trayectorias cercanas a él convergen hacia él, mientras que si apunta lejos del punto fijo, las trayectorias se alejan de él.
- Las trayectorias pueden ser cerradas, es decir, una trayectoria completa es una curva cerrada que se repite periódicamente. Esto ocurre cuando hay un ciclo límite en el plano fase, que es una curva cerrada que no se cruza a sí misma y que es un límite para todas las trayectorias cercanas.

Estas propiedades geométricas son importantes para entender el comportamiento de las soluciones en el tiempo. En particular, pueden ayudar a identificar los puntos fijos y los ciclos límite del sistema, que son importantes en el análisis de estabilidad y bifurcación.

1.2.4

El plano traza-determinante

En el estudio de sistemas dinámicos autónomos de dos dimensiones, es útil utilizar el diagrama traza-determinante para determinar el tipo de puntos de equilibrio del sistema. Este diagrama se construye a partir de las ecuaciones del sistema, que se pueden escribir de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{1.6}$$

donde f y g son funciones continuamente diferenciables en algún dominio del plano (x, y) . Los puntos de equilibrio (x_0, y_0) son aquellos que satisfacen $f(x_0, y_0) = 0$ y $g(x_0, y_0) = 0$.

Para construir el diagrama traza-determinante, se considera la matriz jacobiana del sistema evaluada en cada punto de equilibrio:

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}\tag{1.7}$$

La traza de esta matriz se define como la suma de los elementos diagonales:

$$T = \text{tr}(J(x_0, y_0)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (1.8)$$

y el determinante se define como el producto de los elementos diagonales menos el producto de los elementos fuera de la diagonal:

$$D = \det(J(x_0, y_0)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \quad (1.9)$$

Se puede demostrar que la traza y el determinante de la matriz jacobiana determinan el tipo de punto de equilibrio del sistema. En particular, si $T > 0$ y $D > 0$, el punto de equilibrio es un nodo (estable si $T < 4D$, inestable si $T^2 > 4D$). Si $T < 0$ y $D > 0$, el punto de equilibrio es un foco (estable si $T^2 < 4D$, inestable si $T^2 > 4D$). Si $D < 0$, el punto de equilibrio es un punto silla .

El diagrama traza-determinante consiste en el plano cartesiano con la traza en el eje horizontal y el determinante en el eje vertical. Se pueden trazar distintas curvas en el plano que separan regiones correspondientes a diferentes tipos de puntos de equilibrio. Por ejemplo, la curva $T = 0$ separa los puntos donde la traza es positiva de los puntos donde la traza es negativa. La curva $T^2 = 4D$ separa los nodos estables de los inestables, y la curva $D = 0$ separa los nodos y focos de los puntos silla [Hirsch et al., 2013].

En resumen, el diagrama traza-determinante es una herramienta útil para analizar el comportamiento cualitativo de sistemas dinámicos autónomos de dos dimensiones. Permite determinar el tipo de puntos de equilibrio del sistema y, por lo tanto, predecir su estabilidad y el comportamiento de las trayectorias cercanas a estos puntos (Ver fig. 1.2).

1.3

Sistemas dinámicos no lineales en \mathbb{R}^n

En el análisis de sistemas dinámicos, es común encontrarnos con sistemas no lineales cuya solución es difícil de obtener analíticamente. Sin embargo, existe un teorema fundamental en este campo que nos permite entender el comportamiento de estos sistemas cerca de sus puntos de equilibrio, y que es de gran importancia en la teoría de sistemas dinámicos. Este teorema es conocido como el teorema de Hartman-Grobman, el cual establece una relación entre sistemas no lineales y sistemas lineales cerca de sus puntos de equilibrio. En esta sección, exploraremos en detalle el teorema de Hartman-Grobman, su enunciado y su aplicación en la determinación de

la estabilidad de puntos de equilibrio y la identificación de bifurcaciones en sistemas dinámicos no lineales en \mathbb{R}^n .

1.3.1

Teorema de Hartman-Grobman

El teorema de Hartman-Grobman es una herramienta fundamental en el estudio de sistemas dinámicos no lineales. Este teorema permite analizar la dinámica de un sistema no lineal en términos de un sistema lineal aproximado, lo que facilita el análisis matemático. En este apartado, explicaremos en qué consiste este teorema y su importancia en el estudio de sistemas dinámicos. Antes del teorema presentamos la siguiente definición:

Definición 1.11. *Punto de equilibrio hiperbólico: Un punto hiperbólico es un punto de equilibrio cuya matriz jacobiana tiene valores propios (eigenvalues) con parte real distinta de cero. [Perko, 2001].*

El teorema de Hartman-Grobman establece una relación entre la estabilidad de un punto de equilibrio en un sistema dinámico no lineal y la estabilidad del punto de equilibrio correspondiente en un sistema dinámico linealizado en el mismo punto.

En otras palabras, el teorema establece que si tenemos un sistema dinámico no lineal y un punto de equilibrio que es hiperbólico (es decir, que no tiene ninguna dirección nula), entonces el comportamiento local de este sistema cerca del punto de equilibrio es topológicamente equivalente al comportamiento de un sistema linealizado en el mismo punto, siempre y cuando se restrinja a una región lo suficientemente pequeña.

Esto significa que si un punto de equilibrio es estable en el sistema linealizado, entonces será estable en el sistema no lineal, y si es inestable en el sistema linealizado, entonces será inestable en el sistema no lineal. Además, el teorema también proporciona información sobre la estabilidad asintótica: si el punto de equilibrio es asintóticamente estable en el sistema linealizado, entonces también lo será en el sistema no lineal.

Es importante destacar que el teorema de Hartman-Grobman solo es aplicable a puntos de equilibrio hiperbólicos. En caso de que el punto de equilibrio tenga una o más direcciones nulas, es necesario utilizar otros métodos de análisis para determinar su estabilidad.

Considere los sistemas:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y}) \quad (1.10)$$

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{Y} \quad (1.11)$$

Definición 1.12. *Dos sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales como (1.10) y (1.11) se dicen topológicamente equivalentes en un vecindario del origen “o tienen la misma estructura cualitativa cerca del origen” si existe un homeomorfismo H que mapea un conjunto abierto U que contiene el origen a un conjunto abierto V que también contiene el origen, y que mapea las trayectorias de (1.11) en U a las trayectorias de (1.10) en V preservando su orientación en el tiempo, en el sentido de que si una trayectoria se dirige de \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2 en U , entonces su imagen se dirige de $H(\mathbf{x}_1)$ a $H(\mathbf{x}_2)$ en V . Si el homeomorfismo H preserva la parametrización por tiempo, entonces los sistemas (1.11) y (1.10) se dicen topológicamente conjugados en un vecindario del origen [Perko, 2001].*

Teorema 1.3 (Teorema de Hartman-Grobman). *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene el origen, $\mathbf{f} \in C^1(E, \mathbb{R}^n)$ y sea φ_t el flujo del sistema no lineal $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y})$. Supongamos que $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y que la matriz $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{0})$ no tiene autovalores con parte real cero (es decir, el origen es hiperbólico). Entonces, existe un homeomorfismo H de un conjunto abierto U que contiene al origen en un conjunto abierto V que también contiene al origen, tal que para cada $\mathbf{x}_0 \in U$ hay un intervalo abierto $I_0 \subseteq \mathbb{R}$ que contiene a cero, de manera que para todo $t \in I_0$ y $\mathbf{x} \in U$, se cumple que:*

$$H \circ \varphi_t(\mathbf{x}_0) = e^{\mathbf{A}t} H(\mathbf{x}_0)$$

es decir, H mapea trayectorias del sistema no lineal $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y})$ cerca del origen a trayectorias del sistema lineal $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{Y})$ cerca del origen y preserva la parametrización por tiempo.

El teorema de Hartman-Grobman es un resultado fundamental en el estudio de los sistemas dinámicos no lineales. Su demostración es bastante compleja y extensa, por lo que suele ser omitida en muchos textos introductorios. Sin embargo, para aquellos interesados en conocer la demostración en detalle, se puede consultar el libro “Differential Equations and Dynamical Systems” de Lawrence Perko [Perko, 2001], donde se presenta una demostración completa y rigurosa del teorema. Por lo tanto, si se desea profundizar en el teorema de Hartman-Grobman, se recomienda la consulta de dicha referencia.

El teorema de Hartman-Grobman tiene una gran cantidad de aplicaciones en el análisis de sistemas dinámicos. Una de las principales aplicaciones es en la determinación de la estabilidad de los puntos de equilibrio. El teorema establece que si un punto de equilibrio de un sistema dinámico autónomo no lineal es hiperbólico, entonces el sistema dinámico es topológicamente equivalente a un sistema dinámico lineal cerca del punto de equilibrio. Esto significa que se puede estudiar la estabilidad del punto de equilibrio mediante el análisis del sistema dinámico lineal asociado.

Otra aplicación importante del teorema es en la identificación de bifurcaciones en sistemas dinámicos. Las bifurcaciones son cambios cualitativos en el comportamiento del sistema dinámico, que se producen cuando un parámetro del sistema se varía. El teorema de Hartman-Grobman permite estudiar la estabilidad del punto de equilibrio y la dinámica local del sistema dinámico cerca del punto de equilibrio, lo que facilita la identificación de bifurcaciones.

En resumen, el teorema de Hartman-Grobman tiene muchas aplicaciones importantes en el análisis de sistemas dinámicos, como la determinación de la estabilidad de los puntos de equilibrio y la identificación de bifurcaciones. Es una herramienta fundamental para el estudio de sistemas dinámicos no lineales y ha sido ampliamente utilizado en diferentes campos de la ciencia y la ingeniería.

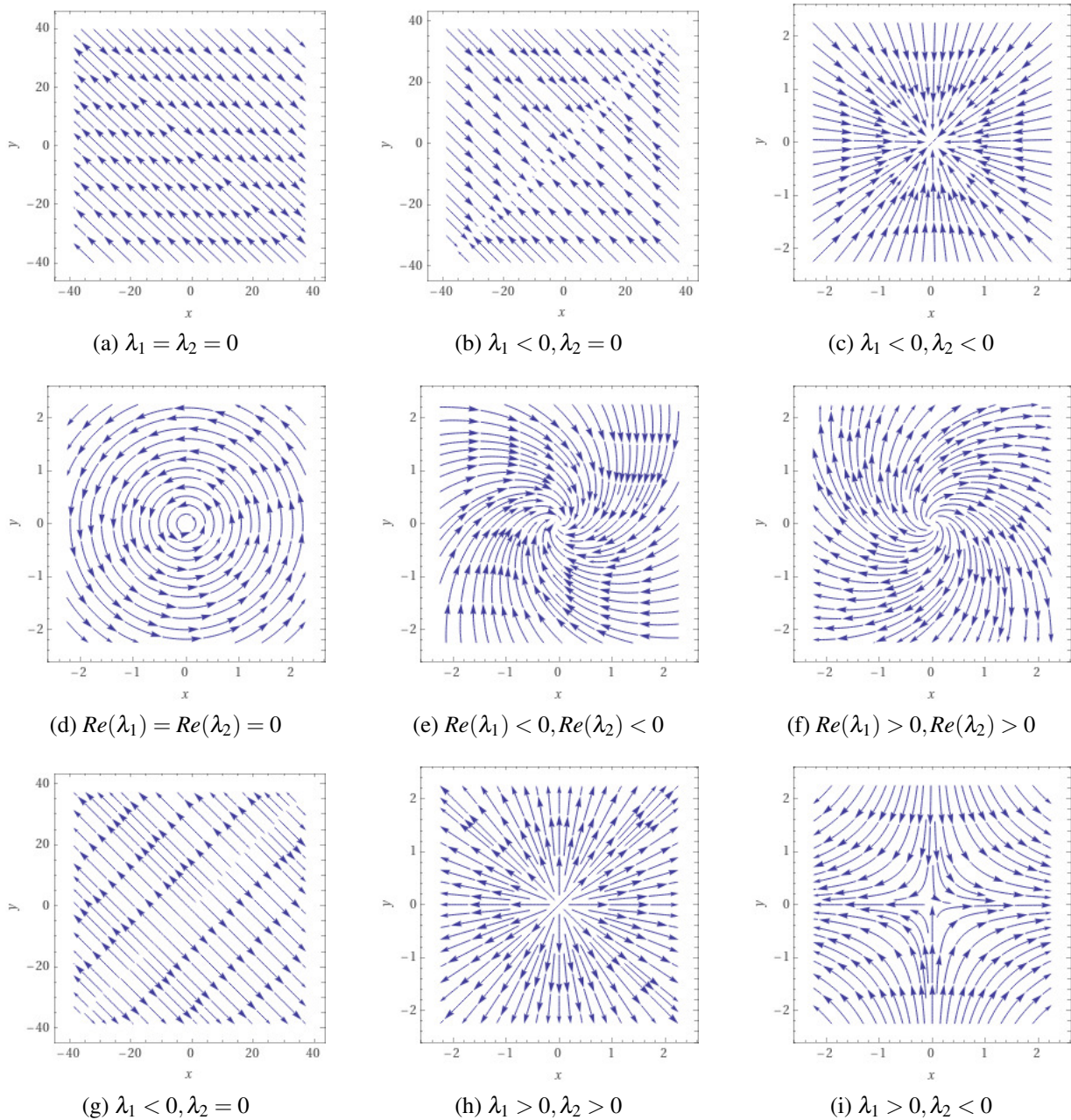


Figura 1.1: Representación de algunos planos fases para combinaciones particulares de valores propios, de sistemas autónomos lineales de dos dimensiones. Las imágenes fueron construidas usando WolframAlpha.

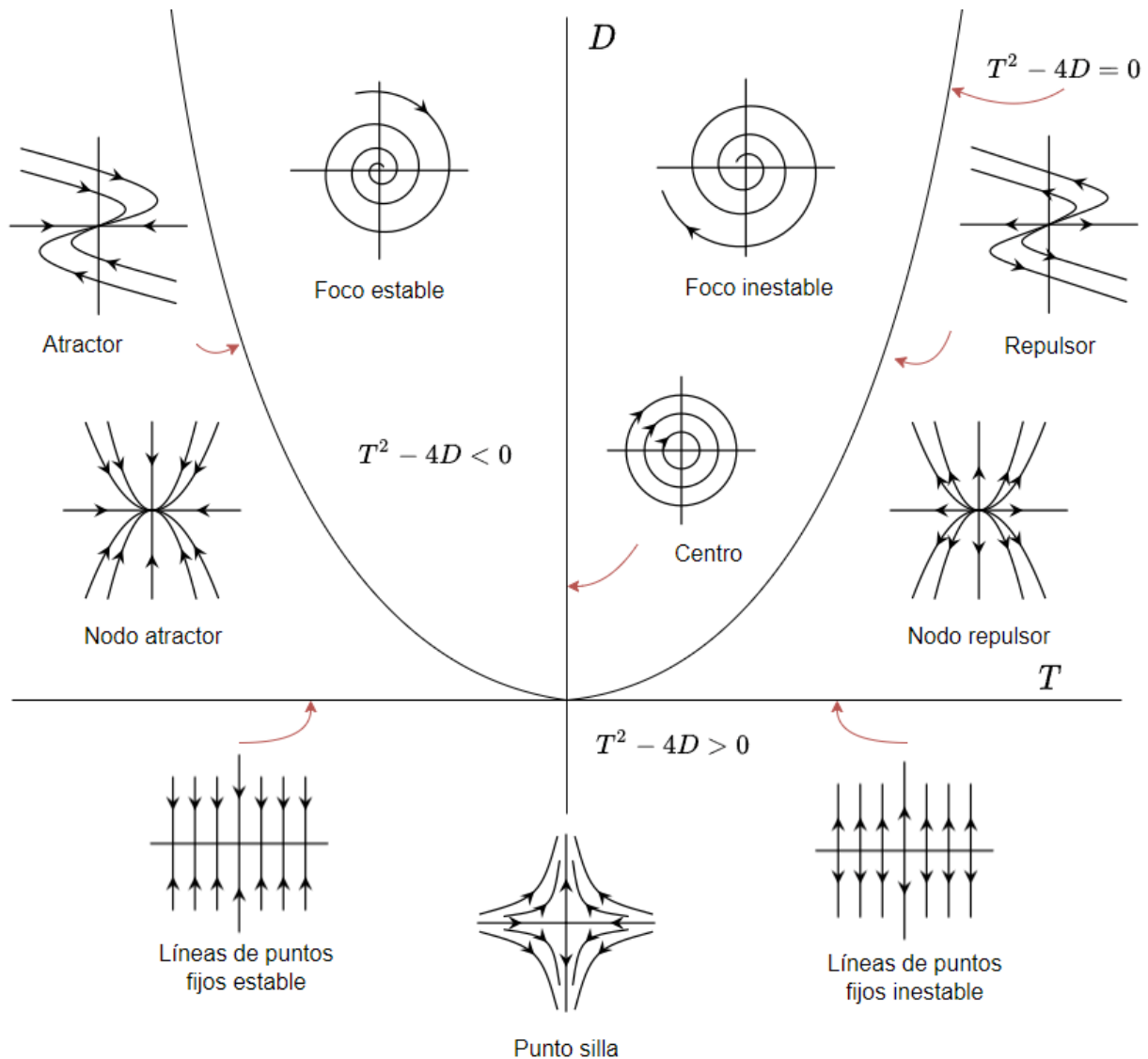


Figura 1.2: Plano traza determinante. Este diagrama ayuda a resumir todos los tipos de puntos que se pueden encontrar en sistemas bidimensionales. La imagen no es de autoría propia, fue extraída de <https://blog.nekomath.com/ecuaciones-diferenciales-i-el-plano-traza-determinante/>

Sistemas dinámicos no autónomos (SDNA)

En este capítulo, se profundizará en los conceptos fundamentales de la teoría de sistemas dinámicos no autónomos. Se discutirán temas como el control, el análisis de estabilidad y las aplicaciones de estos conceptos en diversas áreas, como la ingeniería, la física y las matemáticas. Además, se proporcionarán ejemplos concretos y casos de estudio para ilustrar cómo estos conceptos se aplican en la práctica. A través de este análisis, el lector adquirirá una comprensión sólida de los fundamentos de la teoría de sistemas dinámicos no autónomos y cómo pueden ser utilizados para resolver problemas en una variedad de campos.

Los SDNA son sistemas cuyo comportamiento cambia con el tiempo, pero su evolución temporal está influenciada por una o más funciones externas [Kloeden and Protsche, 2011]. Estas funciones externas pueden ser periódicas o aperiódicas, y pueden ser controladas o no controladas.

En la ingeniería, los SDNA se utilizan para modelar y controlar sistemas mecánicos, eléctricos, electrónicos y de control. Por ejemplo, en la industria automotriz se utilizan SDNA para diseñar sistemas de control de estabilidad y tracción en los vehículos.

En la física, los SDNA se utilizan para modelar y estudiar sistemas en los que el tiempo es un factor importante, como los sistemas mecánicos, eléctricos, ópticos y termodinámicos. Por ejemplo, en la física de la materia condensada se utilizan SDNA para estudiar la dinámica de los electrones en los materiales semiconductores.

En las matemáticas, los SDNA se utilizan para estudiar y analizar las propiedades topológicas y geométricas de las soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales. Esto permite entender el comportamiento a largo plazo de los sistemas y predecir su comportamiento en un futuro [Carballo and Han, 2017].

En resumen, los SDNA son una herramienta importante para modelar y analizar sistemas en los que el tiempo es un factor importante, y su importancia está en su aplicación en diferentes campos como la ingeniería, la física y las matemáticas.

2.1

Ecuaciones diferenciales no autónomas

Las ecuaciones diferenciales no autónomas son ecuaciones que involucran tanto una variable independiente (generalmente el tiempo) y una o más variables dependientes. En estas ecuaciones, la evolución temporal de las variables dependientes está influenciada por una o más funciones externas, que pueden ser controladas o no controladas. Por ejemplo, una ecuación diferencial no autónoma puede ser de la forma $\frac{dx}{dt} = f(x, t, u)$, donde x es la variable dependiente, t es la variable independiente, y u es una función externa.

Por otro lado, las ecuaciones diferenciales autónomas son ecuaciones que involucran solo variables dependientes y no involucran ninguna variable independiente. En estas ecuaciones, la evolución temporal de las variables dependientes solo depende de las variables dependientes mismas. Por ejemplo, una ecuación diferencial autónoma es de la forma $\frac{dx}{dt} = f(x)$, donde x es la variable dependiente.

La principal diferencia entre las ecuaciones diferenciales no autónomas y las ecuaciones diferenciales autónomas es la presencia de una variable independiente (en las no autónomas) y su ausencia (en las autónomas). Esto significa que las ecuaciones diferenciales no autónomas tienen un componente adicional de complejidad debido a la influencia de una o más funciones externas sobre la evolución temporal de las variables dependientes. Por lo tanto, resolver ecuaciones diferenciales no autónomas puede ser más desafiante que resolver ecuaciones diferenciales autónomas. Sin embargo, también proporcionan una mayor flexibilidad en el modelado de sistemas en los que el tiempo es un factor importante.

2.2

Motivación de utilizar SDNA en el modelado matemático

Los sistemas dinámicos no autónomos son una herramienta muy valiosa para el modelado y análisis de sistemas en los que las entradas externas cambian con el tiempo. En muchos casos, es más realista y preciso modelar estos sistemas como no autónomos, ya que las entradas externas pueden ser críticas para su comportamiento.

La motivación de utilizar sistemas dinámicos no autónomos en el modelado matemático radica en que muchos sistemas en la vida real no son autónomos, es decir, sus entradas y parámetros varían con el tiempo. Por lo tanto, para obtener modelos matemáticos precisos y representativos de estos sistemas, es necesario incluir las variaciones en las entradas y parámetros en las ecuaciones que los describen.

Al considerar las entradas externas en el modelado de un sistema, se puede tener en cuenta la influencia que estas tienen en su comportamiento dinámico, lo que permite analizar y controlar el sistema de una manera más completa. Además, el modelado de sistemas no autónomos también puede proporcionar información útil sobre cómo el sistema puede responder a cambios en las entradas y parámetros.

2.3

Análisis de estabilidad en sistemas dinámicos no autónomos

El análisis de la estabilidad de los SDNA difiere del de los sistemas autónomos en algunos aspectos fundamentales. Los sistemas no autónomos dependen de fuerzas externas para mantenerse estables, mientras que los sistemas autónomos se autorregulan. En los sistemas no autónomos, las fuerzas externas pueden hacer que el sistema se vuelva inestable, lo que provoca inestabilidad. Para analizar la estabilidad de un sistema dinámico no autónomo, hay que identificar las fuerzas externas que pueden afectar al sistema. Estas fuerzas externas pueden proceder de fuerzas físicas, como la gravedad y la fricción, o de fuentes de datos externas, como entradas de sensores o sistemas externos. Una vez identificadas estas fuerzas externas, sus efectos sobre el sistema pueden evaluarse y utilizarse para determinar la estabilidad del sistema. Un análisis de estabilidad de un sistema dinámico no autónomo puede implicar el uso de técnicas de análisis numérico para identificar y analizar la estabilidad del sistema, como el análisis de estabilidad de

Lyapunov, el análisis de estabilidad de Laplace o una combinación de ambos. Además, pueden utilizarse técnicas de análisis cualitativo para evaluar la estabilidad del sistema, como el examen de la respuesta del sistema a las perturbaciones, el examen del espacio de fases del sistema o el examen del comportamiento del sistema en respuesta a entradas externas. Combinando estos métodos, se puede obtener una comprensión global de la estabilidad de un sistema dinámico no autónomo [Kloeden and Protsche, 2011].

El análisis de estabilidad es una herramienta importante en el estudio de los sistemas dinámicos, ya que permite comprender cómo se comporta un sistema a lo largo del tiempo y si es posible que se estabilice en un estado deseado. Los SDNA son aquellos en los que las ecuaciones que los describen dependen explícitamente del tiempo, mientras que los sistemas autónomos son aquellos en los que las ecuaciones no dependen del tiempo.

Para analizar la estabilidad de los SDNA, es necesario analizar la ecuación diferencial que los describe. Un enfoque común es utilizar el análisis de puntos críticos, en el cual se buscan las soluciones de equilibrio del sistema, es decir, aquellas soluciones para las cuales las variables del sistema no cambian con el tiempo. A partir de estas soluciones, se pueden analizar las perturbaciones alrededor de ellas y determinar si el sistema se estabiliza o se desestabiliza.

En comparación, el análisis de estabilidad de los sistemas autónomos se realiza mediante el análisis de las ecuaciones del sistema en un espacio de fases. Este enfoque se basa en el estudio de las trayectorias del sistema en el espacio de fases, y se utilizan técnicas como el análisis linealizado o la teoría de los sistemas no lineales para determinar si el sistema es estable o inestable.

En resumen, el análisis de estabilidad de los SDNA se realiza mediante el análisis de las soluciones de equilibrio del sistema y la determinación de cómo las perturbaciones alrededor de estas soluciones afectan al sistema a lo largo del tiempo. En cambio, el análisis de estabilidad de los sistemas autónomos se realiza mediante el estudio de las trayectorias del sistema en el espacio de fases y la utilización de técnicas de análisis lineal o no lineal.

A continuación se presenta un ejemplo extraído de [Wang et al., 2020] en el que se propone un SDNA de tipo Lorentz. El ejemplo se aborda convirtiendo el sistema dinámico no autónomo en uno autónomo, posteriormente se determinan sus puntos de equilibrio para concluir analizando la matriz jacobiana del sistema para determinar el tipo de puntos de equilibrio que hay.

Ejemplo 2.1 (Wang et al., 2020). *Determinar los puntos de equilibrio y tipos de punto para el sistema:*

$$\left[\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + A \sin(2\pi Ft)y \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha x - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z \end{aligned} \right. \quad (2.1)$$

Donde x, y y z son variables de estado y α, β son dos constantes.

Solución: Para estudiar el sistema de manera adecuada se introduce la variable $\omega = A \sin(2\pi Ft)$, haciendo eso, se puede reescribir (2.1) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x + \omega y \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha x - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z \\ \frac{d\omega}{dt} &= 2\pi FA \cos(2\pi Ft)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Los puntos de equilibrio de (2.1) se encuentran donde $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$. Es decir, resolviendo:

$$\begin{aligned}-x + \omega y &= 0 \\ \alpha x - xz &= 0 \\ xy - \beta z &= 0\end{aligned}\tag{2.3}$$

Las soluciones de (2.3) son $x = 0, x = \pm\sqrt{\omega\alpha\beta}, y = 0, y = \pm\sqrt{\alpha\beta/\omega}, z = 0, z = \alpha$, con lo que se obtienen los puntos de equilibrio siguientes: $E_0 = (0, 0, 0)$ y $E_{\pm} = (\pm\sqrt{\omega\alpha\beta}, \pm\sqrt{\alpha\beta/\omega}, \alpha)$. Donde E_0 es el punto de equilibrio trivial y E_{\pm} son puntos de equilibrio variable, estos puntos de equilibrio cambiarán su localización en función del tiempo pues ω depende del tiempo.

Para determinar el equilibrio de E_0 y E_{\pm} , según el teorema 1.3 podemos recurrir a analizar los valores propios de la matriz Jacobiana del sistema. La Jacobiana de (2.1) es:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & \omega & 0 \\ \alpha - z & 0 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}\tag{2.4}$$

Al evaluar la (2.4) en E_0 se obtiene:

$$J_0 = \begin{pmatrix} -1 & \omega & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}\tag{2.5}$$

Mientras que, al evaluar (2.4) en E_{\pm} se obtiene:

$$J_{\pm} = \begin{pmatrix} -1 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & -\pm\sqrt{\omega\alpha\beta} \\ \pm\sqrt{\alpha\beta/\omega} & \pm\sqrt{\omega\alpha\beta} & -\beta \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Las ecuaciones características de (2.5) y (2.6) son:

$$f_0(\lambda) = \lambda^3 + (1 + \beta)\lambda^2 + (\beta - \alpha\omega)\lambda - \alpha\beta\omega \quad (2.7)$$

$$f_{\pm}(\lambda) = \lambda^3 + (1 + \beta)\lambda^2 + (\beta + \alpha\omega)\lambda + \alpha\beta\omega \quad (2.8)$$

Se puede probar que el punto E_0 es un atractor (punto estable) si $\omega < 0$ y un repulsor (punto inestable) si $\omega > 0$. Por otro lado, el punto E_{\pm} se puede demostrar que cuando $\omega = (1 + \beta)/\alpha(1 - \beta)$, pequeñas perturbaciones causarán inestabilidad en dicho punto.

2.4

Control de sistemas no autónomos

El control de sistemas dinámicos no autónomos es un tema de gran importancia en la ingeniería y las ciencias aplicadas, ya que permite a los expertos manipular y regular el comportamiento de los sistemas que están bajo su control. En contraste con los sistemas autónomos, los sistemas no autónomos son aquellos en los que las entradas externas varían continuamente, lo que requiere de una técnica de control adecuada que permita mantener la estabilidad del sistema [Chen, 2015].

Las técnicas de control utilizadas en sistemas dinámicos no autónomos son diversas y se basan en diferentes enfoques. Por un lado, existen técnicas de control adaptativo que se centran en ajustar los parámetros del controlador en tiempo real para mantener la estabilidad del sistema. Estas técnicas son especialmente útiles en situaciones en las que las entradas del sistema varían de manera impredecible o incontrolable. Por otro lado, existen técnicas de control en línea que se centran en la regulación en tiempo real del sistema para mantener su estabilidad [Li and Wang, 2011].

Además, es importante destacar que en el control de sistemas no autónomos, es fundamental realizar un estudio previo de la estabilidad del sistema. Este estudio se enfoca en determinar cómo las condiciones iniciales y las entradas externas afectan la estabilidad del sistema a lo largo del tiempo. De esta forma, los expertos pueden diseñar un controlador que garantice la estabilidad del sistema, incluso en presencia de cambios en las entradas externas.

En conclusión, el control de sistemas dinámicos no autónomos es un tema de gran importancia en la ingeniería y las ciencias aplicadas. Los expertos utilizan diversas técnicas de control adaptativo y en línea para mantener la estabilidad del sistema, y es fundamental realizar un estudio previo de la estabilidad para garantizar el éxito en el control del sistema.

2.5

Aplicaciones

Los SDNA, o sistemas dinámicos no autónomos, son una herramienta valiosa en una amplia variedad de campos, debido a su capacidad para modelar y analizar sistemas en los que existen entradas externas variables. La capacidad de los SDNA para representar interacciones complejas entre diferentes factores y variables, les permite a los investigadores predecir y entender el comportamiento de los sistemas dinámicos en respuesta a cambios en las condiciones externas.

Algunas de las aplicaciones más comunes de los SDNA incluyen la investigación en áreas como la biología, la ecología, la economía, la ingeniería y la física. A continuación se explora más al respecto:

Robótica: los SDNA se utilizan ampliamente en el diseño y control de robots, ya que estos sistemas a menudo deben interactuar con su entorno y responder a señales externas. Por ejemplo, un robot industrial puede ser controlado mediante un sistema dinámico no autónomo para seguir una trayectoria específica, mientras que un robot móvil puede utilizar un SDNA para evitar obstáculos en su camino.

Aeronáutica: los SDNA son esenciales en el diseño de aviones y cohetes, ya que estos sistemas deben ser capaces de maniobrar en respuesta a las condiciones del vuelo. Por ejemplo, un sistema dinámico no autónomo puede ser utilizado para controlar la velocidad y la altitud de un avión, o para guiar un cohete hacia su destino.

Biología: los SDNA se utilizan para modelar y analizar sistemas biológicos, como el comportamiento de las poblaciones de animales o el crecimiento de las plantas. Por ejemplo, un SDNA puede ser utilizado para modelar el comportamiento de una población de peces en un

lago, o para analizar cómo el clima afecta al crecimiento de un cultivo.

Economía: los SDNA se utilizan para modelar y analizar sistemas económicos, como el comercio internacional o el mercado de acciones. Por ejemplo, un SDNA puede ser utilizado para modelar el intercambio entre dos países, o para analizar cómo una fluctuación en el precio del petróleo afecta a la economía global.

Otros campos: los SDNA también se utilizan en campos como la epidemiología, la ecología, la ingeniería civil, la física, la química y la informática para modelar y analizar diferentes sistemas dinámicos no autónomos.

En resumen, los sistemas dinámicos no autónomos son una herramienta valiosa en una amplia variedad de campos debido a su capacidad para modelar y analizar sistemas en los que existen entradas externas variables. Los SDNA son especialmente útiles en campos como la robótica, la aeronáutica, la biología y la ingeniería.

2.5.1

Ejemplos de modelos matemáticos que emplean SDNA

- El caso de un sistema de control de temperatura de un horno industrial (2.9)*, las entradas externas como la tasa de flujo de combustible, la velocidad del ventilador, las condiciones ambientales, etc., pueden cambiar continuamente. Si se modelara este sistema como autónomo, se estaría ignorando el efecto de estas entradas externas en la temperatura del horno [Hou et al., 2017].

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C}(q - UA[T(t) - T_a]) + \frac{1}{C_f}u(t) \quad (2.9)$$

- Modelo de FitzHugh-Nagumo: este modelo describe la actividad eléctrica de las células nerviosas y se puede escribir como un sistema dinámico no autónomo de dos ecuaciones diferenciales ordinarias (2.10) † [FitzHugh, 1961], [Nagumo et al., 1962], [Strogatz, 2018].

*Donde T es la temperatura del horno, C es la capacidad térmica del horno, q es la tasa de transferencia de calor al horno, U es el coeficiente global de transferencia de calor, A es el área de transferencia de calor, T_a es la temperatura ambiente, C_f es la capacidad térmica del fluido de enfriamiento, y $u(t)$ es la entrada de control, que puede ser la tasa de flujo de combustible, la velocidad del ventilador u otras entradas externas.

†donde $v(t)$ y $w(t)$ son las variables de estado del sistema, c , a y b son parámetros que controlan la dinámica del sistema y $I(t)$ es una corriente externa periódica que modula la actividad neuronal.

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= c \left(v - \frac{1}{3}v^3 - w + I(t) \right) \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{1}{c} (v + a - bw)\end{aligned}\tag{2.10}$$

- Sistemas de presa-depredador no autónomos: un ejemplo de sistema dinámico no autónomo que modela la interacción entre dos especies es el sistema de presa-depredador, también conocido como modelo de Lotka-Volterra. Si se introduce una variación periódica en el crecimiento de la población, el sistema se vuelve no autónomo y se puede describir mediante las ecuaciones diferenciales (2.11) [‡] [Lotka, 1925], [Volterra, 1962], [Murray, 2002].

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy + F(t) \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy\end{aligned}\tag{2.11}$$

- El modelado del movimiento de un péndulo forzado(2.12) [§]. En este caso, el sistema no es autónomo ya que la fuerza impulsora es una función del tiempo. A medida que el péndulo se mueve, su posición cambia y por lo tanto, la fuerza que actúa sobre él también cambia, lo que hace que el sistema no sea autónomo. [Strogatz, 2018].

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = F(t)\tag{2.12}$$

- El movimiento armónico forzado (2.13) [¶]. En este caso, el sistema se ve influenciado por una fuerza externa, que no es constante en el tiempo. La amplitud y frecuencia de esta fuerza externa pueden variar, lo que hace que el sistema no sea autónomo. Un ejemplo de esto es un sistema masa-resorte-amortiguador al que se le aplica una fuerza externa sinusoidal [Strogatz, 2018].

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega t)\tag{2.13}$$

[‡]Donde $x(t)$ y $y(t)$ son las poblaciones de las especies de presa y depredador, respectivamente, a , b , c y d son parámetros que representan las tasas de crecimiento y depredación, y $F(t)$ es una función periódica que representa la variación en la tasa de crecimiento de la población.

[§]Donde θ es el ángulo que describe el péndulo, g es la aceleración debida a la gravedad y L es la longitud del hilo del péndulo y $F(t)$ es la fuerza impulsora. La ecuación describe la oscilación del péndulo alrededor de su posición de equilibrio.

[¶]Donde m es la masa del objeto en movimiento, b es el coeficiente de amortiguamiento, k es la constante elástica del resorte, F_0 es la amplitud de la fuerza impulsora, ω es la frecuencia angular de la fuerza impulsora, t es el tiempo y x es la posición del objeto

- La ecuación logística con capacidad de carga dependiente del tiempo (2.14)^{||} es otro ejemplo de un sistema dinámico no autónomo. Este modelo se utiliza para estudiar el crecimiento de una población donde la capacidad de carga del ambiente varía en el tiempo. En este caso, la capacidad de carga no es constante y depende del tiempo, lo que hace que el sistema no sea autónomo.

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K(t)} \right) \quad (2.14)$$

Este modelo ha sido utilizado en diversos estudios, como en el análisis del crecimiento de poblaciones de animales en ambientes que experimentan cambios estacionales en su capacidad de carga [Singer et al., 1998], [Buzsáki, 2010], [Harris, 2005], [Ikegaya et al., 2004].

En conclusión, el uso de sistemas dinámicos no autónomos en el modelado matemático surge como una alternativa adecuada para representar sistemas que están expuestos a factores externos variables. Estos sistemas ofrecen una representación más precisa y realista del comportamiento del sistema, permitiendo un análisis más completo y una mejor comprensión del mismo. Además, el empleo de técnicas de análisis de estabilidad y control adaptativo en estos sistemas proporciona información valiosa sobre cómo el sistema puede responder a diferentes situaciones y cambios en las entradas y parámetros. En resumen, el uso de sistemas dinámicos no autónomos en el modelado matemático es una herramienta valiosa para comprender y controlar sistemas complejos con entradas externas variables.

2.6

Modelación y simulación

La modelación y simulación son herramientas clave para el estudio y el diseño de los sistemas dinámicos no autónomos. La modelación consiste en representar matemáticamente un sistema real, capturando su comportamiento y sus características dinámicas. La simulación, por su parte, permite evaluar y predecir el comportamiento del sistema a partir de la modelación matemática.

En el caso de los sistemas dinámicos no autónomos, la modelación se enfoca en representar las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema en función de las entradas externas y las condiciones iniciales. Además, es importante tener en cuenta la influencia

^{||}Donde N es la población, r es la tasa de crecimiento intrínseca de la población, y $K(t)$ es la capacidad de carga del ambiente que varía en el tiempo, es decir, el tamaño máximo que puede tener la población en un entorno determinado.

de las entradas variables en el comportamiento del sistema.

La simulación, por su parte, permite evaluar la estabilidad del sistema, así como su respuesta ante diferentes entradas y condiciones iniciales. Esto resulta fundamental para el diseño y la optimización de los sistemas dinámicos no autónomos. Además, la simulación permite evaluar el rendimiento de diferentes estrategias de control y compararlas con el objetivo de seleccionar la más adecuada.

En conclusión, la modelación y simulación son cruciales en el estudio y diseño de sistemas dinámicos no autónomos, ya que permiten representar matemáticamente el sistema, evaluar su estabilidad y predecir su comportamiento ante diferentes entradas y condiciones iniciales.

2.7

Identificación de sistemas no autónomos

La identificación de sistemas no autónomos se refiere al proceso de determinar los parámetros y estructuras del modelo de un sistema no autónomo a partir de observaciones del sistema. Este proceso es esencial para el control y la optimización de los sistemas no autónomos, ya que permite a los ingenieros conocer las características y comportamiento del sistema [Kloeden and Rasmussen, 2011].

Existen diferentes técnicas de identificación de sistemas no autónomos, incluyendo técnicas basadas en el modelado, técnicas basadas en la observación y técnicas basadas en la identificación en línea. Cada técnica tiene sus propios desafíos y limitaciones, por lo que es importante seleccionar la técnica adecuada para el sistema específico.

Además, la identificación de sistemas no autónomos también requiere la selección de un conjunto apropiado de entradas y salidas para el sistema, así como la selección de un modelo adecuado para representar el sistema. La precisión de la identificación depende de la calidad de las observaciones y de la elección de los modelos.

En resumen, la identificación de sistemas no autónomos es un proceso crítico para el control y la optimización de los sistemas no autónomos. Existen diferentes técnicas de identificación disponibles, y es importante seleccionar la técnica adecuada para el sistema específico y garantizar la precisión de la identificación.

CAPÍTULO 3

El agua

En este capítulo, profundizaremos en los fundamentos del agua y su importancia para la vida. También abordaremos la distribución del agua en la tierra, con un énfasis especial en el estado de Hidalgo y cómo se relaciona con la distribución global del agua. Además, discutiremos los desafíos y problemas relacionados con el acceso al agua potable y la gestión sostenible del agua en esta región y en el mundo.

3.1

El agua en el mundo

Se estima que en el mundo hay unos 1.4 billones de kilómetros cúbicos de agua, de los cuales solo el 2,5 % es agua dulce [SEMARNART, 2013]. Según los estudios, solo el 0.007 % de esta agua dulce está disponible para el consumo humano [Toledo, 2002]. Del total de agua dulce del planeta, el 30 % son aguas subterráneas; el 0.8 % corresponde al permafrost (amalgama de tierra formada por rocas, suelo y sedimentos congelados); el agua superficial y atmosférica es el 0.4 %. Si sólo se considera el agua dulce no congelada (31.2 % del total de agua dulce), el agua subterránea representaría el 96 %. Esta agua es de vital importancia, ya que abastece arroyos, manantiales y humedales que son utilizados por las sociedades de diversas regiones del planeta [SEMARNART, 2013].

3.2

El agua en México

México tiene una superficie de 1.964 millones de kilómetros cuadrados, de los cuales 1.959 millones de kilómetros cuadrados son de superficie continental, mientras que el resto pertenece a zonas insulares. La CONAGUA (fundada el 16 de enero de 1989 [CONAGUA, 2009]) es responsable de administrar y regular la gestión del agua en México. Ejerce sus funciones a través de 13 regiones hidrológicas administrativas (RHA), cada una de las cuales está conformada por un conjunto de cuencas, las cuales son consideradas unidades básicas para la gestión de los recursos hídricos [CONAGUA, 2018]. Durante el año 2019, el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) registró un total de $451.858 \text{ hm}^3/\text{año}$ de agua renovable en México, con un promedio de $3.586 \text{ m}^3/\text{habitante/año}$ de agua renovable per cápita. El estado de Hidalgo, por su parte, reportó una cantidad de $7.475 \text{ hm}^3/\text{año}$ de agua renovable, con un promedio de $2.485 \text{ m}^3/\text{habitante/año}$ de agua renovable per cápita, cifra por debajo de la media nacional. Estos datos permiten tener una idea general de la disponibilidad de agua en el país y en una región específica.[CONAGUA, 2005].

3.3

El agua en Hidalgo

Hidalgo se localiza geográficamente en la zona centro del país como se muestra en la fig. 3.1. Actualmente es una de las regiones con estrés hídrico, debido a una precipitación promedio de 400 milímetros anuales [CONAGUA, 2007]. El agua en el estado de Hidalgo, de jurisdicción federal, es administrada por la región hidrológica IX, correspondiente al norte del Golfo, y por la región hidrológica XIII (Fig. 3.2 y Fig. 3.3), correspondiente a las aguas del Valle de México.

Para 2008, en el estado de Hidalgo se otorgaron 2347.7 hm^3 , de los cuales 86.4% fueron para uso agrícola, 7.2% para abastecimiento público, 3.5% para energía termoeléctrica y el restante para autoabastecimiento industrial [CONAGUA, 2010]. Por otra parte, en 2012 se otorgó un total de 2390.8 hm^3 , de los cuales 87.8% fue para uso agrícola, 7.2% para abastecimiento público, 3.45% para termoeléctricas y el resto para la industria autoabastecida [CONAGUA, 2010]. En 2017, la cantidad de agua concesionada disminuyó a 2388 hm^3 , el 87,9% fue para uso agrícola, el porcentaje de agua para uso público disminuyó a 6.93% y el resto para termoeléctricas e industrias autoabastecidas. No es de extrañar que la mayor parte del agua concesionada se destine a uso agrícola [CONAGUA, 2012]. Cabe destacar, que el enfoque de este trabajo es el abastecimiento público de agua mediante recursos naturales.



Figura 3.1: Hidalgo se localiza en la parte central del país, entre los $19^{\circ}36'$ y $21^{\circ}24'$ de latitud norte y los $97^{\circ}58'$ y $99^{\circ}54'$ de longitud oeste. El estado de Hidalgo tiene una superficie aproximada de 20905km^2 que representa aproximadamente el 1,1 % del territorio nacional, con una población aproximada de 2.5 millones de habitantes [UAEH, 2022].

3.4

El agua en Pachuca

Pachuca de Soto es uno de los 84 municipios que conforman el estado de Hidalgo. Ubicado en el centro del estado, ligeramente al sur del país, entre los paralelos $20^{\circ}01'$ y $20^{\circ}12'$ de latitud norte, y los meridianos $98^{\circ}41'$ y $98^{\circ}52'$ de longitud oeste, Pachuca se encuentra en una posición geográfica estratégica [Presidencia de Pachuca de Soto 2020-2024, 2020]. La región en la que se sitúa, conocida como Comarca Minera, abarca una superficie de 154.01 km^2 , representando aproximadamente el 0.74%. En términos de recursos hídricos, el municipio de Pachuca de Soto se encuentra principalmente en la región hidrológica XIII, con una pequeña porción en la región IX (ver Figura 3.4). La región XIII, conocida como aguas del Valle de México, depende en gran medida del sistema de abastecimiento de agua Cutzamala, que registró una oferta promedio de $4.1\text{ m}^3/\text{s}$ en 2005 y $4.12\text{ m}^3/\text{s}$ en 2007 [CONAGUA, 2005][CONAGUA, 2007]. La gestión del agua en esta región está a cargo de la Comisión de Agua y Alcantarillado del Municipio de Pachuca (CAASIM) [Amaya, 2011].



Figura 3.2: Mapa de México dividido en regiones hidrológicas. En la parte superior, al noreste, se muestra la región hidrológica IX, y en la parte inferior, en el centro del territorio nacional, se ubica la región XIII. El estado de Hidalgo abarca ambas regiones

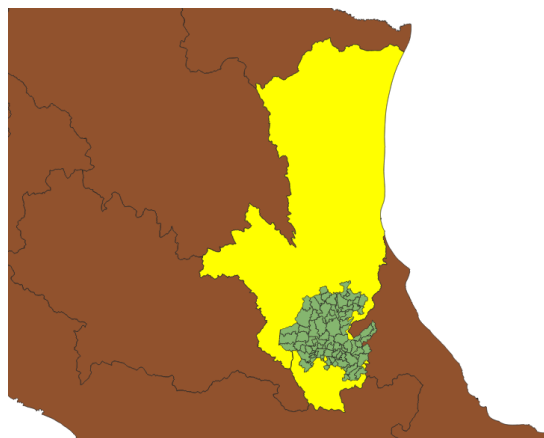


Figura 3.3: Geográficamente, el estado de Hidalgo abarca las regiones acuáticas del norte del Golfo (Región IX) y las aguas del Valle de México (Región XIII).

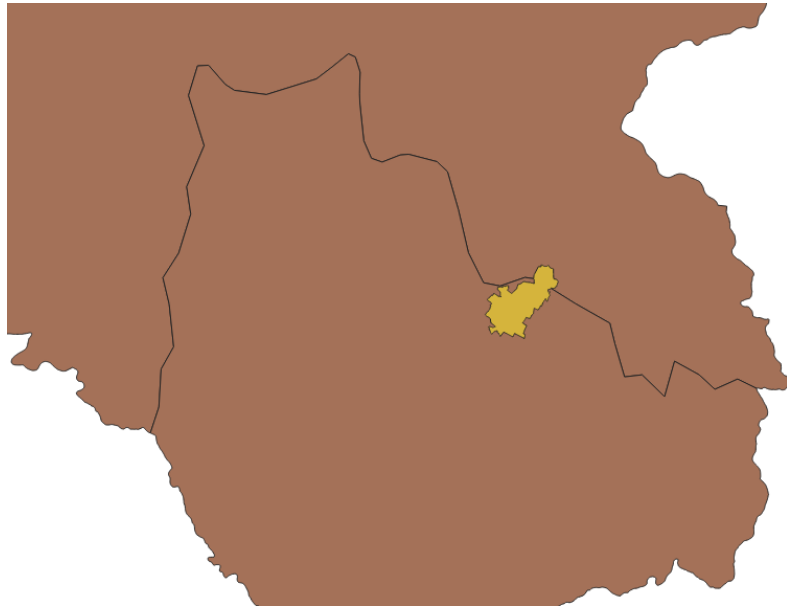


Figura 3.4: Ubicación del municipio de Pachuca de Soto, Hidalgo, que comprende las regiones IX y XIII de aguas. Se observa una mayor concentración de territorio dentro de la región XIII, aguas del Valle de México.

A pesar de la importancia de los recursos hídricos en la región, Pachuca ha experimentado una disminución preocupante en la dotación de agua en los últimos años. Según datos de PIGOO, de 2012 a 2018, la dotación de agua en Pachuca disminuyó de 167.59 litros por habitante al día a 143.03 litros por habitante al día, lo que representa una caída de casi 25 litros en un período de 6 años [UN, 2005]. Esta tendencia descendente es alarmante, ya que, si continúa, se estima que en 12 años la dotación de agua podría caer por debajo de los 100 litros por habitante al día, un nivel crítico para el abastecimiento de agua potable.

Es importante destacar que el cambio más brusco en la disminución de la dotación de agua se observó entre 2016 y 2017, cuando se registró una reducción de 10.36 litros por habitante al día en el suministro de agua en Pachuca. Estos datos se presentan en detalle en la Tabla 3.1, mientras que la Figura 3.5 muestra claramente la tendencia descendente en la dotación de agua durante el periodo 2012-2018 [IMTA, 2012].

La disminución en el volumen de agua per cápita se debe en gran medida al crecimiento de la población en Pachuca. A medida que la ciudad ha experimentado un aumento demográfico, la demanda de agua ha aumentado, lo que ejerce presión sobre los recursos hídricos disponibles. Esta combinación de un suministro de agua limitado y una creciente demanda ha llevado a la reducción de la dotación de agua por habitante en la ciudad [Gobierno de México, 2022b].

La situación actual plantea desafíos significativos en términos de seguridad hídrica y acceso a agua potable en Pachuca. La disminución de la dotación de agua por habitante puede tener

consecuencias negativas para la calidad de vida de los ciudadanos, así como para el desarrollo socioeconómico de la región. La falta de acceso adecuado a agua potable puede afectar la salud de la población y dificultar el funcionamiento de actividades diarias esenciales, como la higiene personal, la producción de alimentos y el desarrollo de actividades económicas.

Es necesario implementar medidas y estrategias efectivas para garantizar un suministro de agua adecuado y sostenible en Pachuca. Esto implica la mejora de la infraestructura hídrica, la implementación de prácticas de uso eficiente del agua, la promoción de la conciencia y educación sobre la importancia de conservar el agua, y la colaboración entre los diferentes actores involucrados, incluyendo las autoridades locales, la sociedad civil y el sector privado.

En conclusión, la dotación de agua en Pachuca ha experimentado una preocupante disminución en los últimos años, lo que plantea desafíos en términos de seguridad hídrica y acceso a agua potable. La combinación de un suministro limitado y una creciente demanda debido al crecimiento demográfico ha llevado a esta situación. Es fundamental tomar medidas para garantizar un suministro de agua adecuado y sostenible, promoviendo la eficiencia en el uso del agua y fomentando la participación y colaboración de todos los actores involucrados. Solo a través de acciones conjuntas y sostenibles se podrá enfrentar esta problemática y asegurar el acceso a un recurso vital como el agua en Pachuca.

Cuadro 3.1: Dotación de agua en Pachuca

Año	Dotación
	L/habitante/día
2012	167.59
2013	162.68
2014	160.28
2015	165.73
2016	159.93
2017	149.57
2018	143.03
Promedio	158.401429

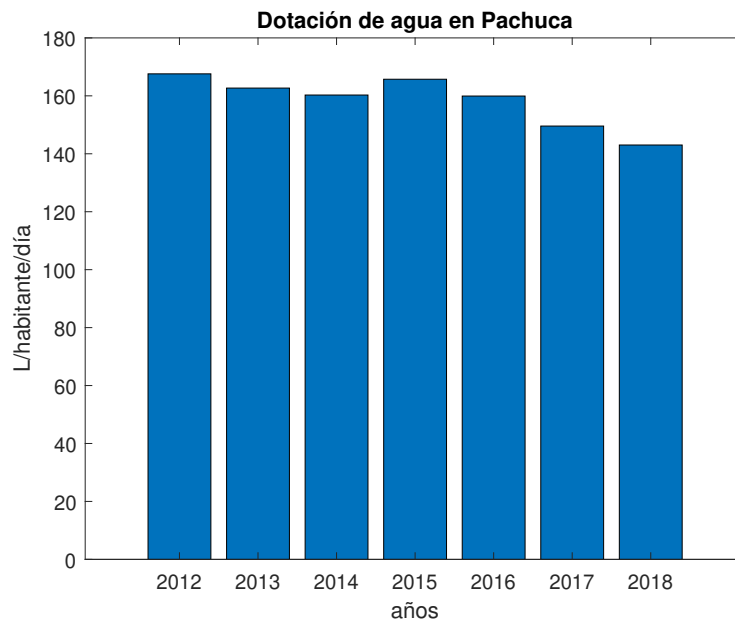


Figura 3.5: Suministro de agua en Pachuca de Soto, Hidalgo durante el periodo 2012-2018. Se puede observar como el suministro diario de agua disminuyó de 2012 a 2018 en aproximadamente 14.65 %. Datos obtenidos de [IMTA, 2012].

3.5

Fuentes de abastecimiento de agua

Las fuentes naturales son todas aquellas de las que se puede captar agua directamente de la naturaleza. Las fuentes de agua se clasifican generalmente en superficiales y subterráneas [SIAPA, 2014]. Sin embargo, en este trabajo se incluyó la recarga como otra fuente de abastecimiento. Las definiciones de las fuentes naturales de agua utilizadas en este estudio son las siguientes.

Agua superficial: Agua que procede directamente de las precipitaciones o del afloramiento de fuentes subterráneas. Esta agua no se filtra ni regresa a la atmósfera en forma de vapor, el cual puede estar en reposo o fluyendo. En general, se puede decir que el agua superficial es la que se encuentra en la superficie del suelo [Gobierno de México, 2012]. Para este estudio se consideró como fuente la presa Jaramillo, ubicada en mineral del chico $20^{\circ}10'18''N$ $98^{\circ}43'54''O$ (ver 3.6).

Agua subterránea: Agua que está contenida dentro de oquedades interconectadas de suelo rocoso [Gobierno de México, 2012]. Estas formaciones rocosas se denominan acuíferos. Los acuíferos están formados por materiales permeables capaces de almacenar cierta cantidad de agua, entre estos.



Figura 3.6: Imagen de la Presa de Jaramillo en Mineral del Chico, fuente de agua superficial que abastece a la zona de Pachuca de Soto, Hidalgo, objeto de estudio. Esta imagen no es de autoría propia, fue recuperado el 20 de febrero de 2023, de <http://elchico.mx/lugares/presa-el-jaramillo/>

Los materiales presentes en la zona incluyen arena suelta, grava, rocas sedimentarias permeables como areniscas o fangolitas, así como rocas fracturadas de lava volcánica y cristalizadas [International Groundwater Resources Assessment Centre, 2001]. Existen dos procesos fundamentales que relacionan las aguas superficiales con las subterráneas: el escurrimiento de aguas subterráneas y la infiltración [Fuentes, 1993], [CONAGUA, 2020b]. Sin embargo, es importante destacar que estos procesos no se consideran en el modelo propuesto en este estudio.

En este trabajo, el enfoque se centra específicamente en el acuífero Cuautitlán-Pachuca, el cual tiene una amplia extensión que abarca partes del estado de Hidalgo, la Ciudad de México y el estado de México. El acuífero se encuentra ubicado al norte de la Ciudad de México, limitando al suroeste con el estado de Hidalgo. Aproximadamente el 10% de la superficie de este acuífero se encuentra en el estado de Hidalgo, mientras que el resto se extiende hacia el estado de México [CONAGUA, 2020a]. Cabe mencionar que el acuífero Cuautitlán-Pachuca también abastece a la Ciudad de México y a otras localidades cercanas. Sin embargo, el enfoque principal de este trabajo se centra en la región de Pachuca de Soto, Hidalgo.

La disponibilidad de agua subterránea se refiere al volumen promedio anual de agua que se puede extraer del acuífero para usos adicionales, sin comprometer la integridad del ecosistema, cuando es positiva. Esto significa que hay un excedente de agua subterránea disponible para extraer, además de las concesiones existentes y la descarga natural. Por otro lado, una disponi-

bilidad negativa indica que hay un déficit de agua subterránea, lo que implica que la demanda supera la oferta [Gobierno de México, 2022a]

Recarga (Promedio anual): Se refiere al volumen de agua que ingresa al acuífero, ya sea de manera directa o superficial, en promedio durante un año [Gobierno de México, 2012]. Para calcularlo, se divide la recarga total entre el número de años considerados en el intervalo de tiempo [Gobierno de México, 2022a]. La recarga del acuífero se produce de forma natural a través del proceso de infiltración, el cual puede variar dependiendo de cambios en la cobertura vegetal y la erosión del suelo. En casos en los que el acuífero lo requiera, se pueden construir estructuras para llevar a cabo la recarga artificial [RUVIVAL, 2017].

En el caso específico del acuífero Cuautitlán-Pachuca, que se encuentra entre los estados de Hidalgo y Estado de México, la recarga artificial podría llevarse a cabo mediante diferentes estrategias. Una posible fuente de recarga artificial podría ser el desvío controlado de agua proveniente de fuentes externas, como ríos o cuerpos de agua cercanos, hacia el acuífero. Otra opción sería la recarga mediante la infiltración de agua tratada proveniente de plantas de tratamiento de aguas residuales. Además, podrían implementarse técnicas de recarga localizada, como la captación y almacenamiento de agua de lluvia en infraestructuras específicas, como embalses o pozos de infiltración. La selección de la fuente y la metodología de recarga artificial dependerá de la disponibilidad y calidad del agua, así como de la infraestructura existente y las características hidrogeológicas de la zona. En todos los casos, es importante destacar que el agua de lluvia desempeña un papel crucial como componente significativo de la recarga del acuífero [Cruz et al., 2013].

CAPÍTULO 4

Modelo SUR

En este capítulo, se explicará en detalle el funcionamiento y la metodología utilizada para desarrollar el modelo SUR. Este modelo es especialmente importante ya que permite acoplar las tres fuentes de agua natural en la región de estudio. Se describirán las etapas y procedimientos seguidos para su elaboración, así como los resultados obtenidos y su aplicación práctica para mejorar la gestión y planificación del agua en la región. Además, se discutirán las ventajas y limitaciones del modelo SUR y se propondrán posibles mejoras para futuros estudios.

4.1

Desarrollo y planteamiento del modelo SUR

El desarrollo del modelo se basó en la realización de un balance de materia sobre las tres fuentes de agua: aguas superficiales (S), aguas subterráneas (U) y recarga (R). La ecuación de balance de materia para cada una de estas fuentes considera que cualquier flujo de masa que aporte masa al sistema es positivo, mientras que los flujos que sustraen masa del sistema son negativos. En general, un balance de masas tiene la siguiente forma [Felder y Rousseau, 2004];

$$\text{acumulación del sistema} = \text{entradas} + \text{generación} - \text{salidas} - \text{consumo} \quad (4.1)$$

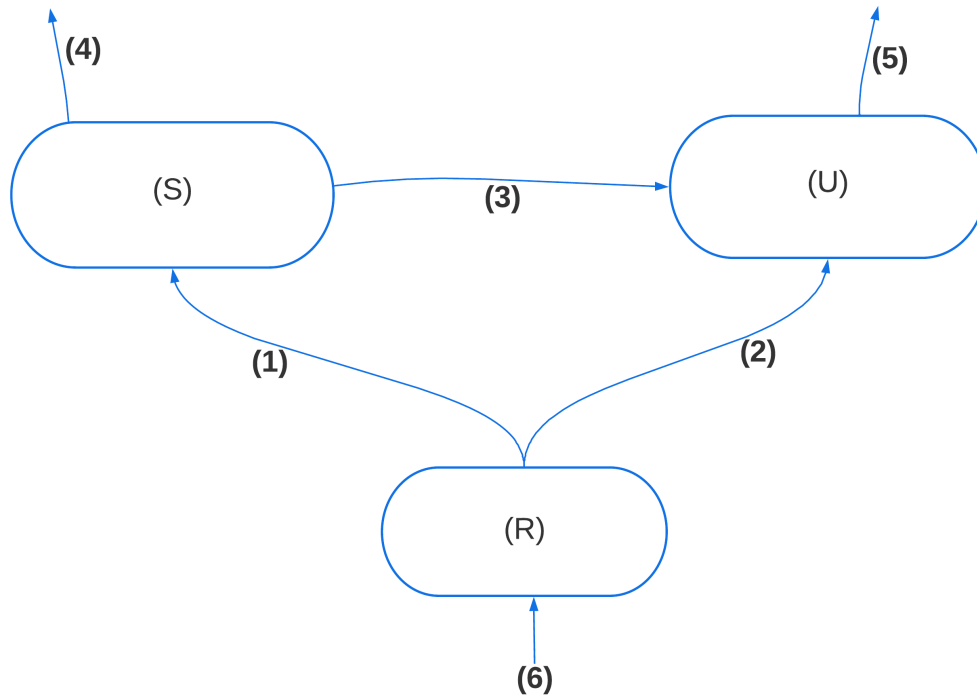


Figura 4.1: Diagrama de acoplamiento entre las 3 fuentes de suministro de agua. Las flechas indican la dirección del flujo de las corrientes de agua. El sistema tiene la entrada global L_6 y dos salidas globales L_4 y L_5 . Individualmente, cada una de las fuentes tiene sus propias entradas y salidas.

Para ilustrar la relación entre cada una de las fuentes, se utiliza el diagrama de la Fig. 4.1, en el que las flechas muestran cómo fluye el agua de una fuente a otra. Denotemos por S la cantidad de agua en la superficie anualmente en $10^3 \text{ hm}^3/\text{año}$, por U la cantidad de agua en el subsuelo anualmente en $10^3 \text{ hm}^3/\text{año}$, y por R la recarga media anual del acuífero en $10^3 \text{ hm}^3/\text{año}$. Sea t el tiempo en años. Denotemos también L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 y L_6 las 6 corrientes representadas en la Fig. 4.1, el balance de materia de estos sistemas se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= L_1 - L_4 - L_3 \\ \dot{U} &= L_2 + L_3 - L_5 \\ \dot{R} &= \phi(L_6 - L_1 - L_2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

El término ϕ es un factor de escala que satisface $|\phi| \leq 1$; el caso $|\phi| = 1$ significará que la contribución a la tasa de variación de R es del 100%, mientras que si ϕ es negativo, significará que la contribución a la tasa de variación de R también cambia de signo. En el caso de que $\phi = 1$, el modelo (4.2) cumpliría las características de un balance de materia, ya que al sumar las tres ecuaciones, se obtiene que la tasa de acumulación total es igual a la suma de todas las entradas, menos la suma de todas las salidas.

Cada una de las corrientes L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 y L_6 Mostradas en la ecuación (4.2) fueron modeladas teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

- Las corrientes L_1, L_2, L_6 se modelan utilizando la ecuación logística, la cual es una ecuación diferencial comúnmente usada para modelar el crecimiento de una población [Hirsch et al., 2013]. Su elección fue motivada por el comportamiento de los caudales de abastecimiento, los cuales contribuyen al aumento de agua en las fuentes hasta alcanzar una capacidad máxima. En el caso de L_1 que modela el abastecimiento de la recarga, se optó por incluir la función $k(t) = \beta_0 + \beta_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{c}\right)$, la cual es de tipo oscilatoria. Este último término debido a que el comportamiento del agua de lluvia, la cual contribuye en gran medida a la recarga, es oscilatoria [Beavis and White, 2016].
- La corriente L_3 , que representa la interacción entre (U) y (S), se planteó como directamente proporcional al producto entre la cantidad de agua en ambas fuentes. El motivo de esto viene de pensar que entre más agua haya en la fuente superficial más va a ser la que se infiltre a las fuentes subterráneas y, entre más agua haya en las fuentes subterráneas, es porque más se ha infiltrado desde la fuente superficial.
- Las corrientes L_4 y L_5 que son las salidas de las fuentes superficial y subterránea, se plantearon directamente proporcionales a la cantidad de agua en cada una de las fuentes. El motivo es que entre más agua haya en cada una de las fuentes, más agua se extrae y, entre menos haya, menos se extrae.

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \mu_1 S \left(1 - \frac{S}{k(t)}\right) \\
 L_2 &= \mu_2 U \left(1 - \frac{U}{k_1}\right) \\
 L_3 &= \alpha_3 SU \\
 L_4 &= \alpha_4 S \\
 L_5 &= \alpha_5 U \\
 L_6 &= \mu_6 R \left(1 - \frac{R}{k_2}\right)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

En la parte inferior se presenta la nomenclatura de las constantes y el análisis dimensional de (4.3):

- α_i : Tasas de proporcionalidad de intensidad de flujo, toman valores reales positivos, se relacionan con la intensidad de los flujos de agua, α_4, α_5 están dados en $\frac{1}{\text{año}}$ mientras que α_3 tiene unidades de $\frac{1}{10^3 \text{hm}^3}$.
- μ_i son los coeficientes logísticos de proporcionalidad de flujo, los cuales tienen unidades de $\frac{1}{\text{año}}$: Miden la cantidad de líquido que entra del caudal principal a cada fuente, toma valores reales positivos.

- k_i : Los llamaremos capacidad de persistencia de flujo, y sus unidades son de $\frac{10^3 \text{hm}^3}{\text{año}}$. Es un indicador de la capacidad de la fuente.
- $k(t)$: Es la capacidad de persistencia de flujo variable en $\frac{1}{10^3 \text{hm}^3}$, es un indicador de la capacidad de la fuente. Por su carácter periódico se escribe como $k(t) = \beta_0 + \beta_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{c}\right)$.
- β_0 : Es la capacidad de persistencia promedio en $\frac{1}{10^3 \text{hm}^3}$.
- β_1 : Es la amplitud de la capacidad de persistencia promedio en $\frac{1}{10^3 \text{hm}^3}$, se relaciona con la capacidad máxima de la fuente.
- c : Es el periodo en años.

Sustituyendo (4.3) en (4.2) se obtiene (4.4) la cual nos indica cómo interactúan entre sí las 3 principales fuentes de agua potable natural.

$$\begin{aligned}
 \dot{S} &= \mu_1 S \left(1 - \frac{S}{k(t)}\right) - \alpha_4 S - \alpha_3 S U \\
 \dot{U} &= \mu_2 U \left(1 - \frac{U}{k_1}\right) + \alpha_3 S U - \alpha_5 U \\
 \dot{R} &= \phi \left(\mu_6 R \left(1 - \frac{R}{k_2}\right) - \mu_1 S \left(1 - \frac{S}{k(t)}\right) - \mu_2 U \left(1 - \frac{U}{k_1}\right) \right) \\
 k(t) &= \beta_0 + \beta_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{c}\right)
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

El sistema (4.4), formado por 3 ecuaciones diferenciales ordinarias, se denomina "modelo S,U,R,". Se trata de un sistema no lineal y no autónomo. Si sumamos \dot{S} , \dot{U} y \dot{R} , se obtiene la tasa de variación de la oferta total, mientras que la suma de S , U y R , nos da la oferta total, es decir, la oferta total tiene la forma de la expresión (4.5):

(4.5):

$$\text{suministro total} = \text{oferta total} = S + U + R \tag{4.5}$$

Derivando (4.5) y sustituyendo en (4.1), obtenemos la tasa de variación total de la oferta, que se llamará T , es decir:

$$\dot{T} = \dot{S} + \dot{U} + \dot{R} \tag{4.6}$$

En el caso de que el término ϕ sea igual a 1, se puede escribir:

$$\dot{T} = \mu_6 R \left(1 - \frac{R}{k_2} \right) - \alpha_4 S - \alpha_5 U \quad (4.7)$$

Obsérvese que (4.7) cumple el balance de materia de todo el sistema.

4.2

Calibración del modelo

Los datos utilizados para calibrar el modelo SUR se presentan en la Tabla 4.1, que contiene información sobre el área del acuífero, la disponibilidad de agua subterránea, la extracción media anual y la recarga. Estos datos fueron extraídos del registro de acuíferos del SINA [Gobierno de México, 2014]. En el caso de la disponibilidad de agua, es importante destacar que, para facilitar el análisis y la modelación, se consideró el valor absoluto de la disponibilidad, aunque se reconoce que el resultado es negativo. Esta decisión de utilizar el valor absoluto nos permite interpretar de manera más clara los resultados y comprender la magnitud de la sobreexplotación del acuífero Cuautitlán-Pachuca.

Por otro lado, el comportamiento observado en otros acuíferos y fuentes superficiales muestra dinámicas oscilatorias. Por ejemplo, las presentadas en la Fig. 4.3. Dado que los datos en la tabla 3.1 (que están graficados en la fig. 4.2) son relativamente pocos, este comportamiento oscilatorio no es apreciable. En los resultados obtenidos por nuestro modelo, se comprueba que se obtiene el comportamiento oscilatorio deseado.

La calibración del modelo consistió en calcular los parámetros $\phi, \mu_1, \mu_2, \mu_6, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \beta_0, \beta_1, k_1, k_2, k_3$ y c así como para las condiciones iniciales $S(0) = S_0, U(0) = U_0, R(0) = R_0$ hasta conseguir el mejor ajuste. Los valores que mejor ajustaron fueron: $\mu_1 = 1.7, \mu_2 = 1.95, \mu_6 = 1.1, \alpha_3 = 1.04, \alpha_4 = 0.9, \alpha_5 = 1.9, \beta_0 = 3, \beta_1 = 2.5, k_1 = 0.18, k_2 = -0.16, \phi = -0.1, c = 0.000001$.

Con estos parámetros se obtuvo el gráfico de la Fig. 4.4, en el que se representan las 3 variables en función del tiempo. Estos gráficos se presentan individualmente en la Fig. 4.5. Cabe destacar la similitud entre el comportamiento de la gráfica del modelo SUR (Fig. 4.4) y el comportamiento esperado de estas fuentes (Fig. 4.3) así como ajustando los datos presentados en 4.2. Por otro lado, la Fig. 4.6 muestra el gráfico 3D del modelo SUR. Los errores cuadráticos medios (ECM) fueron: $ECM_S = 0.00389, ECM_U = 0.00766, ECM_R = 0.00702$. El valor medio del ECM es: $\overline{ECM} = 0.006189956$.

Cuadro 4.1: Datos del acuífero Cuautitlán-Pachuca

Año	Área	Disponibilidad de agua sub- terránea	Extracción	Recarga
	km^2	$10^3 hm^3/año$	$10^3 hm^3/año$	$10^3 hm^3/año$
2003	3870.460000	-	0.483315	0.203100
2004	3870.460000	-	0.483315	0.204000
2005	3870.460000	-	0.483315	0.202900
2006	3870.460000	-0.134121	0.483315	0.203000
2007	3870.460000	-0.134121	0.483315	0.203000
2008	3870.460000	-0.0487538	0.75127	0.356700
2010	3870.460000	-0.0487538	0.751270	0.356700
2011	3870.460000	-0.050344	0.751270	0.356700
2012	3870.460000	-0.189991	0.751270	0.356700
2013	3870.460000	-0.055595	0.751270	0.356700
2014	3870.460000	-0.055595	0.751300	0.356700
2015	3870.460000	-0.058374	0.751300	0.356700
2016	3870.460000	-0.058374	0.751300	0.356700
2017	3870.460000	-0.058374	0.751300	0.356700
2018	3870.460000	-0.106040	0.751270	0.356700
2019	3870.460000	-0.106040	0.751270	0.356700
2020	3870.600000	-0.188697	0.545397	0.356700
2021	3870.600000	-0.188697	0.545397	0.356700

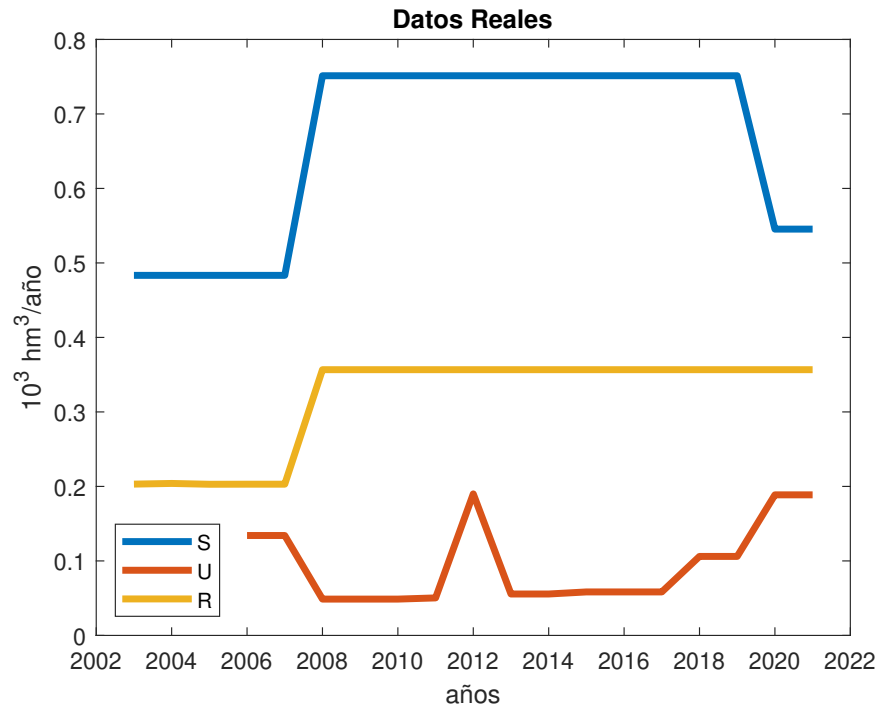


Figura 4.2: En esta gráfica se presentan la cantidad de agua superficial (S), subterránea (U) y recarga (R) en miles de hectómetros cúbicos por año, con respecto al tiempo, el cual está en años. Las gráficas se obtienen de graficar los datos de la tabla 4.1. Cabe resaltar que se graficó el valor absoluto de la subterránea.

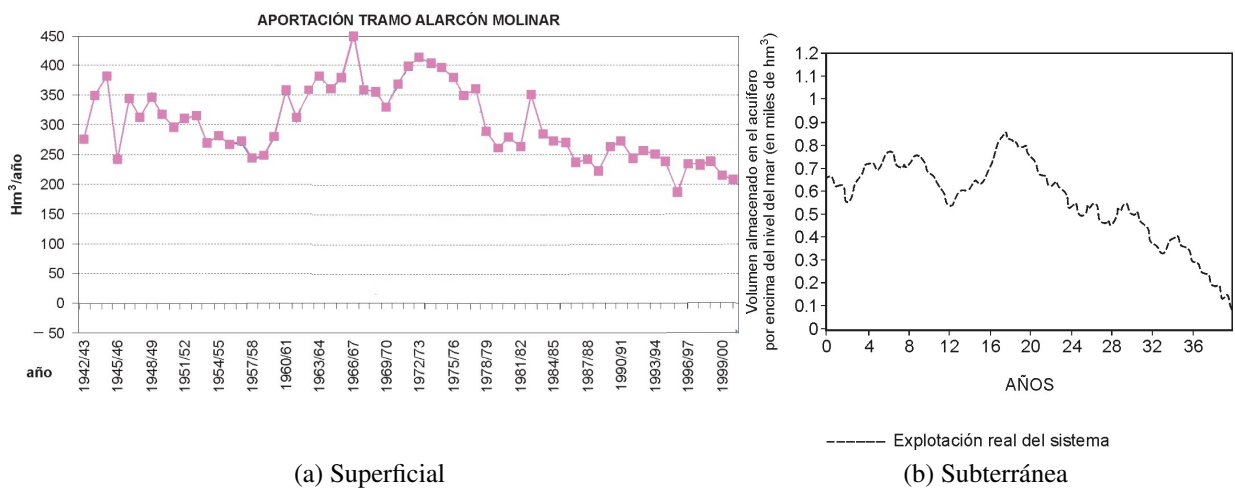


Figura 4.3: Ejemplo de comportamiento de fuentes de agua superficiales y subterráneas, extraído de [Sahuquillo, 2009].

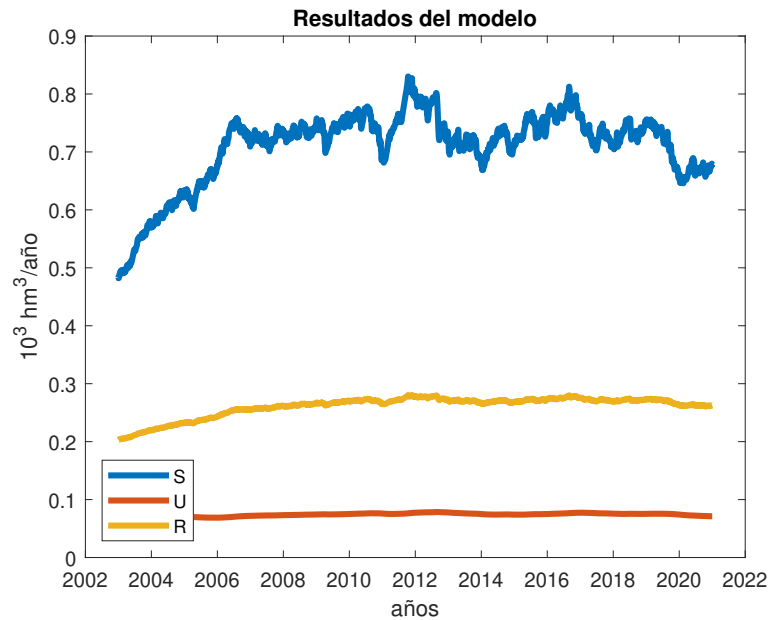


Figura 4.4: En esta gráfica se presenta el modelo con los parámetros ya calibrados, se puede apreciar la semejanza que guarda con los datos reales de acuífero reportado, los cuales están en el gráfico de la fig. 4.3, así como muestra la tendencia de los datos de estudio presentados en la fig. 4.2

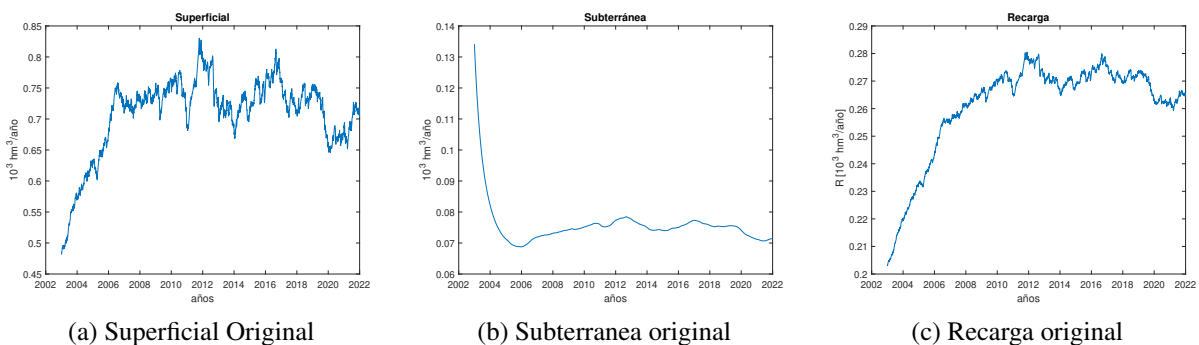


Figura 4.5: Valores originales

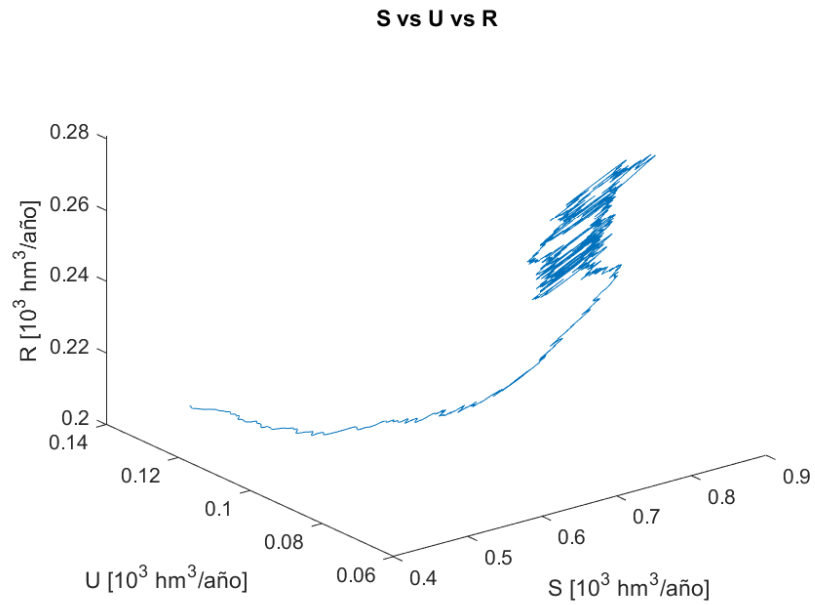


Figura 4.6: En esta gráfica se presenta el modelo con los parámetros ya calibrados en 3 dimensiones, la gráfica fue contruida con valores de $t \in [0, 5000]$.

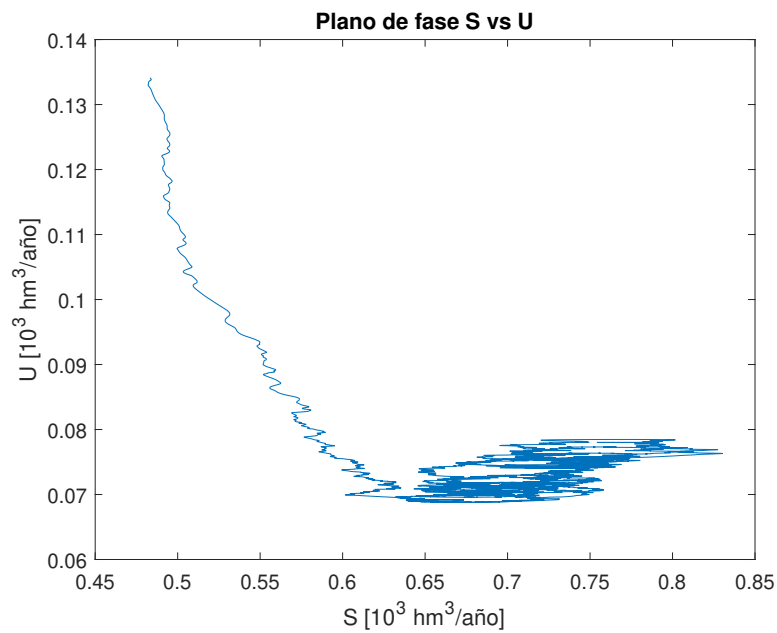


Figura 4.7: En esta gráfica se presenta el plano fase de S vs U

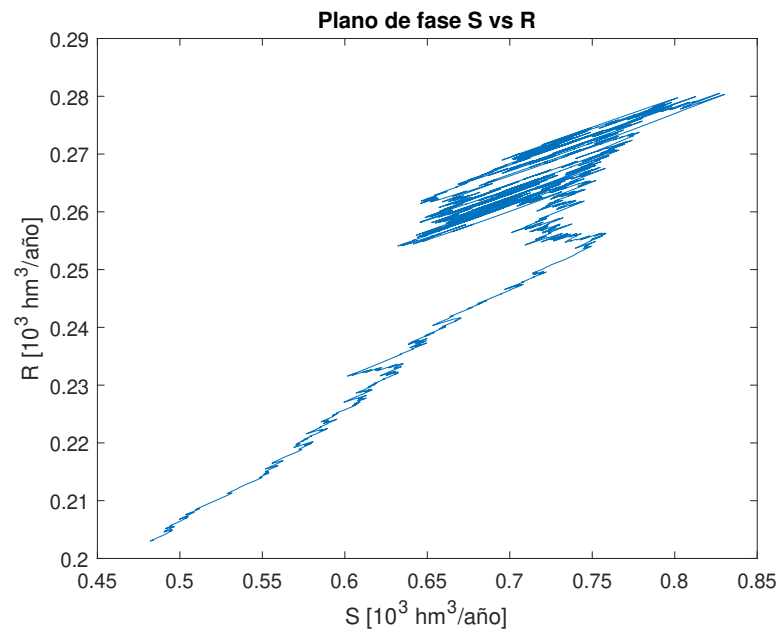


Figura 4.8: En esta gráfica se presenta el plano fase de S vs R.

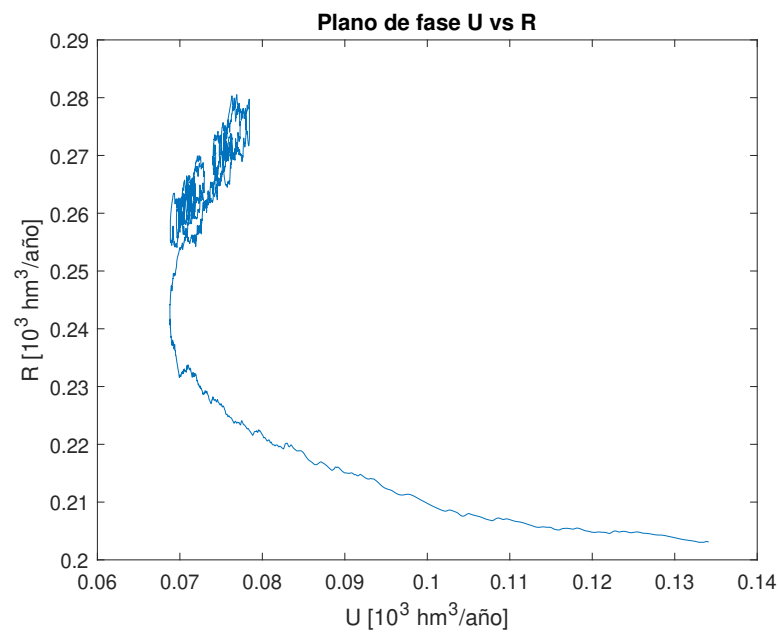


Figura 4.9: En esta gráfica se presenta el plano fase de U vs R.

4.3

Ventajas y limitaciones del modelo SUR

El modelo SUR que se presenta en esta tesis es una herramienta de gran utilidad en el campo de la gestión del agua, ya que permite modelar de manera integral el suministro de agua en una región específica, utilizando datos relacionados con el flujo pluvial, los mantos acuíferos y las fuentes subterráneas. Su capacidad para ser ajustado y adaptado a las características particulares de un área determinada es una de sus principales fortalezas, ya que proporciona una comprensión más precisa de cómo el agua se mueve y se almacena en dicha región. Además, el modelo tiene la capacidad de realizar predicciones sobre el suministro futuro, lo que resulta especialmente valioso para la planificación y la toma de decisiones en relación con el agua.

No obstante, el modelo SUR también presenta ciertas limitaciones que es importante tener en cuenta. En primer lugar, su enfoque determinista implica que no considera variables estocásticas o aleatorias, lo que puede resultar en una subestimación de la incertidumbre asociada a las predicciones realizadas. Esta falta de consideración de la variabilidad inherente a los procesos hidrológicos puede afectar la precisión de los resultados obtenidos. Además, el modelo no realiza un análisis individualizado de los componentes del agua superficial y subterránea, lo que impide calcular de manera exacta factores clave como la tasa de infiltración o la tasa de evaporación del agua. Asimismo, no permite calcular de forma individualizada los flujos de agua de una fuente a otra, lo que podría limitar su capacidad para capturar la complejidad de los sistemas hidrológicos.

En conclusión, el modelo SUR constituye una herramienta valiosa para comprender el suministro de agua en una región específica y realizar predicciones a futuro. No obstante, es importante tener en cuenta sus limitaciones, las cuales incluyen su enfoque determinista, la falta de consideración individualizada de los componentes del agua y la imposibilidad de calcular flujos específicos. Al utilizar este modelo, se recomienda considerar otras técnicas y herramientas complementarias que permitan abordar de manera más precisa y detallada los flujos y procesos hidrológicos específicos de interés.

CAPÍTULO 5

Estabilidad de SUR

Este capítulo se enfoca en llevar a cabo un capítulo dedicado para realizar todo el análisis cualitativo detallado del modelo SUR mediante el uso de técnicas matemáticas y herramientas computacionales. El objetivo principal es identificar los puntos de equilibrio del sistema, es decir, los estados estables a los que el sistema tiende a converger. Además, se analizará la naturaleza de dichos puntos de equilibrio, es decir, si son estable, inestable o semi-estable, lo que permitirá entender cómo el sistema reacciona ante cambios en las condiciones iniciales y en los parámetros. El análisis cualitativo proporcionará una comprensión más profunda del comportamiento del modelo SUR y su interacción con las distintas variables, lo que permitirá proponer mejoras y ajustes al modelo, con la finalidad de determinar los puntos de equilibrio, así como la naturaleza de dichos puntos.

5.1

Análisis de estabilidad del modelo

El sistema (4.4) al ser un sistema no autónomo, dado que considera una perturbación externa $k(t)$, no se puede analizar de una forma clásica, por lo que, para poder analizar los puntos estables de (4.3) se debe convertir en un modelo autónomo, esto se consiguió introduciendo la función $\omega = \frac{\mu_1}{k(t)} = \frac{\mu_1}{\beta_0 + \beta_1 \cos(\frac{2\pi t}{c})}$ lo cual convierte el sistema (4.3) en un sistema de 4 ecuaciones [Wang

et al., 2020]. quedando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\dot{S} &= \mu_1 S - \omega S^2 - \alpha_4 S - \alpha_3 S U \\
\dot{U} &= \mu_2 U \left(1 - \frac{U}{k_1}\right) + \alpha_3 S U - \alpha_5 U \\
\dot{R} &= \phi \mu_6 R \left(1 - \frac{R}{k_2}\right) - \phi \mu_1 S + \phi \omega S^2 - \phi \mu_2 U \left(1 - \frac{U}{k_1}\right) \\
\dot{\omega} &= \frac{2\pi\beta_1\mu_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{c}\right)}{c(\beta_0 + \beta_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{c}\right))^2}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Se pueden encontrar los puntos de equilibrio de (5.1) igualando a cero las tasas de variación, es decir:

$$\dot{S} = \dot{U} = \dot{R} = 0 \tag{5.2}$$

Con lo que queda resolver el sistema planteado en (5.3):

$$\begin{aligned}
\mu_1 S - \omega S^2 - \alpha_4 S - \alpha_3 S U &= 0 \\
\mu_2 U \left(1 - \frac{U}{k_1}\right) + \alpha_3 S U - \alpha_5 U &= 0 \\
\phi \mu_6 R \left(1 - \frac{R}{k_2}\right) - \phi \mu_1 S + \phi \omega S^2 - \phi \mu_2 U \left(1 - \frac{U}{k_1}\right) &= 0
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Durante el análisis del modelo se encontraron ocho puntos de equilibrio, los cuales se presentan en la ecuación (5.4). Es importante destacar que los puntos E_5, E_6, E_7 y E_8 varían en función de ω , mientras que los puntos restantes son constantes. De especial interés es el punto E_1 , ya que indica que la cantidad de agua superficial, subterránea y de recarga se agotarían simultáneamente. A partir de este punto, las tres principales fuentes de agua estarían completamente agotadas. En adelante, en el presente trabajo, haremos referencia a este punto como el "punto apocalíptico".

Para referirnos a los diferentes puntos de equilibrio, acordamos la siguiente notación: $E_i = (E_i^S, E_i^U, E_i^R)$. Es importante destacar que el conocimiento y análisis de los puntos de equilibrio en un modelo es crucial para la comprensión y la predicción de su comportamiento. En particular, estos puntos representan las soluciones estacionarias del modelo, en las cuales el sistema permanece en equilibrio a lo largo del tiempo, sin cambios en las variables. En este caso, el modelo describe el comportamiento del sistema hidrológico, por lo que los puntos de equilibrio representan estados en los que la cantidad de agua en cada una de las fuentes (superficial, subterránea y de recarga) se mantiene constante.

$$\begin{aligned}
E_1^S &= 0, & E_1^U &= 0, & E_1^R &= 0 \\
E_2^S &= 0, & E_2^U &= 0, & E_2^R &= -0.16 \\
E_3^S &= 0, & E_3^U &= 0.00461538, & E_3^R &= -0.16761 \\
E_4^S &= 0, & E_4^U &= 0.00461538, & E_4^R &= 0.00761007 \\
E_5^S &= \frac{0.8}{\omega}, & E_5^U &= 0, & E_5^R &= -0.08 - \frac{0.0241209\sqrt{\omega(180+11\omega)}}{\omega} \\
E_6^S &= \frac{0.8}{\omega}, & E_6^U &= 0, & E_6^R &= -0.08 + \frac{0.0241209\sqrt{\omega(180+11\omega)}}{\omega} \\
E_7^S &= \frac{0.7952}{0.09984 + \omega}, & E_7^U &= \frac{0.0768 + 0.00461538\omega}{0.09984 + \omega} \\
E_7^R &= \frac{-0.0079872 - 0.08\omega - 4.00503 \cdot 10^{-6}\sqrt{7.84033 \cdot 10^8 + 7.90067 \cdot 10^9\omega + 4.78516 \cdot 10^8\omega^2}}{0.09984 + \omega} \\
E_8^S &= \frac{0.7952}{0.09984 + \omega}, & E_8^U &= \frac{0.0768 + 0.00461538\omega}{0.09984 + \omega} \\
E_8^R &= \frac{-0.0079872 - 0.08\omega + 4.00503 \cdot 10^{-6}\sqrt{7.84033 \cdot 10^8 + 7.90067 \cdot 10^9\omega + 4.78516 \cdot 10^8\omega^2}}{0.09984 + \omega}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Debido al sentido físico del problema, se restringen al caso donde los puntos son reales y positivos, por lo que los puntos E_2 y E_3 no son de interés en la investigación. Adicionalmente, restringimos el valor de ω de tal manera que los puntos presentados en (5.4) satisfagan la condición de ser reales y positivos, los conjuntos donde tienen sentido físico son:

$$\begin{aligned}
E_5 &\in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \text{si } & \omega \in \emptyset \\
E_6 &\in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \text{si } & \omega > 0 \\
E_7 &\in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \text{si } & \omega \in \emptyset \\
E_8 &\in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \text{si } & \omega > -0.09984
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Es importante destacar que algunos puntos de equilibrio pueden no tener relevancia física en el contexto del estudio, como es el caso de E_5 y E_7 . Estos puntos no permiten que se establezcan valores de ω que tengan una interpretación física significativa en el modelo, lo que significa que no pueden ser considerados en el análisis del sistema. Aunque estos puntos de equilibrio no son relevantes para el estudio, es necesario tenerlos en cuenta para una comprensión completa del comportamiento del modelo. Por lo tanto, en la investigación se prestará atención únicamente a los puntos de equilibrio que sean físicamente significativos para el sistema y que permitan obtener información valiosa para la toma de decisiones en el ámbito de la gestión de los recursos hídricos.

Por tanto, los puntos de equilibrio de interés son E_1 , E_4 , E_6 y E_8 . Para determinar la estabilidad de estos puntos, calculamos la matriz jacobiana del sistema y evaluamos en las coordenadas (S, U, R) que representan $E_i = (E_i^S, E_i^U, E_i^R)$.

$$J = \begin{pmatrix} \mu_1 - 2\omega S - \alpha_4 - \alpha_3 U & -\alpha_3 S & 0 \\ \alpha_3 U & \mu_1 - 2\frac{\mu_2}{k_1} U + \alpha_3 S - \alpha_5 & 0 \\ -\phi\mu_1 + 2\phi\omega S & -\phi\mu_1 + 2\phi\frac{\mu_2}{k_1} U & \phi\mu_6 - 2\phi\frac{\mu_6}{k_1} R \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

entonces se deben encontrar los valores μ tales que $P(\lambda) = |J(r_i) - \lambda I| = 0$. El polinomio característico $P(\mu)$ asociado con (5.6) es:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \mu_1 - 2\omega S - \alpha_4 - \alpha_3 U - \lambda & -\alpha_3 S & 0 \\ \alpha_3 U & \mu_1 - 2\frac{\mu_2}{k_1} U + \alpha_3 S - \alpha_5 - \lambda & 0 \\ -\phi\mu_1 - 2\phi\omega S & -\phi\mu_1 + 2\phi\frac{\mu_2}{k_1} U & \phi\mu_6 - 2\phi\frac{\mu_6}{k_1} R - \lambda \end{vmatrix} \quad (5.7)$$

Sustituyendo los valores de los parámetros y resolviendo la ecuación asociada a (5.7) se obtiene:

$$P(\lambda) = (-0.11 + 1.2222R - \lambda) \cdot (\lambda^2 - 0.6\lambda - 2.08S^2\omega + 2\lambda S\omega - 1.04\omega S + 43.3333SU\omega - 2.22045 \times 10^{-16}SU + 0.4S\omega + 0.832S + 22.5333U^2 + 22.7067\lambda U - 17.1253U - 0.16) = 0 \quad (5.8)$$

El cual tiene las soluciones:

$$\begin{aligned} \lambda_{i,1} &= -0.11 + 1.2222R \\ \lambda_{i,2} &= \frac{-(22.7067U - 1.04S - 2S\omega - 0.6) + \Delta}{2} \\ \lambda_{i,2} &= \frac{-(22.7067U - 1.04S - 2S\omega - 0.6) - \Delta}{2} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Donde Δ viene dado por:

$$\Delta = \sqrt{Q - 4P} \quad (5.10)$$

Y los términos Q y P son:

$$\begin{aligned} Q &= (22.7067U - 1.04S + 2S\omega - 0.6)^2 \\ P &= -2.08S^2\omega + 43.3333U^2 - 2.22045 \times 10^{-16}SU + 0.4S\omega \\ &+ 0.832S + 22.5333U^2 - 17.1253U - 0.16 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Los puntos de equilibrio del sistema se analizaron en términos de su estabilidad, y se encontró que los puntos de interés son E_1 , E_4 , E_6 y E_8 . Se utilizó la matriz jacobiana del sistema evaluada en las coordenadas correspondientes a cada punto de equilibrio para obtener los valores propios, que permiten determinar la estabilidad de los puntos.

Los puntos E_1 y E_4 fueron identificados como puntos de silla debido a que los valores propios correspondientes tienen signos distintos. En particular, para E_1 se obtuvieron los valores propios $\lambda_{1,1} = -0.11$, $\lambda_{1,2} = 0.8$, $\lambda_{1,3} = -0.4$, mientras que para E_4 se obtuvieron $\lambda_{4,1} = -0.314819$, $\lambda_{4,2} = 0.7951$, $\lambda_{4,3} = -0.30083$.

En el caso del punto E_6 , se obtuvieron los valores propios que se presentan en (5.12), los cuales muestran que $\lambda_{6,1}$ toma valores positivos en el conjunto $\{\omega : 0 < \omega < 0.113559\}$ y negativos en el conjunto $\{\omega : \omega > 0.113559\}$, mientras que $\lambda_{6,2}$ es positivo en el conjunto $\{\omega : 0 < \omega < 4.16\}$ y negativo en $\{\omega : \omega > 4.16\}$. Por otro lado, $\lambda_{6,3}$ es negativo para todo $\omega > 0$. Debido a que los valores propios tienen signos opuestos independientemente del valor de ω , se concluye que E_6 es un punto de silla para $\omega \in (0, 4.16)$ y un atractor para $\omega \in (4.16, \infty)$. En resumen, los resultados indican que los puntos E_1 y E_4 son equilibrios de tipo silla. Por otro lado, E_6 en el intervalo $\omega \in (0, 4.16)$ es un equilibrio tipo silla, y en $\omega \in (4.16, \infty)$ es un atractor.

$$\begin{aligned}\lambda_{6,1} &= -1.43924 + \frac{0.0360252\sqrt{\omega(180+11\omega)}}{\omega} \\ \lambda_{6,2} &= \frac{\frac{0.832}{\omega} - 1 + \sqrt{0.36 + \frac{0.9984}{\omega} + \frac{0.692224}{\omega^2}}}{2} \\ \lambda_{6,3} &= \frac{\frac{0.832}{\omega} - 1 - \sqrt{0.36 + \frac{0.9984}{\omega} + \frac{0.692224}{\omega^2}}}{2}\end{aligned}\tag{5.12}$$

Para el punto E_8 , los valores propios satisfacen que $\lambda_{8,2}, \lambda_{8,3} < 0$ para $\omega > -0.09984$, por otro lado, $\lambda_{8,1}$ es positivo para $\omega \in (-0.09984, 5.79729)$ y positiva en $\omega \in (5.79729, \infty)$ con lo que se puede concluir que es un atractor para $\omega \in (5.79729, \infty)$ y un punto silla para $\omega \in (-0.09984, 5.79729)$.

CAPÍTULO 6

Análisis numérico de SUR

Este capítulo se dedica a evaluar el desempeño del modelo mediante la realización de simulaciones computarizadas. Con esto, se busca analizar el comportamiento del modelo al someterlo a diferentes escenarios, variando los parámetros y condiciones. De esta manera, se podrá observar el efecto de cada una de las variables en el sistema y cómo éstas afectan al suministro de agua en la región de Pachuca de Soto. Esta metodología es esencial para entender la dinámica del agua en la región y para hacer predicciones futuras. Además, estas simulaciones permiten identificar posibles problemas o limitaciones del modelo, lo que es esencial para mejorarlo y hacerlo más preciso. En resumen, el objetivo de este capítulo es analizar el comportamiento del modelo en diferentes escenarios para entender mejor la dinámica del agua en la región de Pachuca de Soto y poder hacer prestintos escenarios utilizando simulación por computadora. Esto con la finalidad de ver el comportamiento de las fuentes bajo distintas condiciones precisas sobre el suministro de agua en el futuro.

6.1

Simulaciones

Para obtener una mejor comprensión del modelo SUR y su interacción con cada una de las variables que influyen en el suministro de agua en la región de Pachuca de Soto, se llevaron a cabo una serie de simulaciones en las que se variaron los parámetros del modelo. Estas simulaciones permitieron evaluar la dinámica del agua en la región bajo diferentes escenarios, tales como variación en las tasas de proporcio-

nalidad de intensidad de flujo, los coeficientes logísticos de proporcionalidad de flujo, las persistencias de flujo, cambios en la demanda de agua, entre otros. Los resultados de estas simulaciones permitieron evaluar la sensibilidad del modelo a cambios en los parámetros, y proporcionaron información valiosa para entender cómo cada variable afecta el suministro de agua en la región. Además, estos resultados pueden ser utilizados para hacer predicciones sobre el suministro de agua en el futuro, y para tomar decisiones informadas en la gestión del recurso hídrico en la región de Pachuca de Soto.

Caso 1. Simulación predictiva: La figura 14 muestra el comportamiento predictivo de las fuentes de agua para los años siguientes. Esta simulación se realizó con el propósito de entender el comportamiento futuro de las fuentes. En la simulación se utilizaron los mismos parámetros con los que se calibró el modelo, el único cambio fue el intervalo, que es $2003 \leq t \leq 2100$.

Caso 2. Aumento del periodo de onda: En este escenario el valor de c se incrementa desde $c = 0,000001$ a $c = 0,01$. Esto provoca un alargamiento horizontal en las gráficas (véase la Fig. 6.2). Este comportamiento puede explicarse por el comportamiento oscilatorio atribuido al modelo. Con esta modificación, la onda alcanza sus picos y valles en intervalos de tiempo más largos.

Caso 3. Aumento de la persistencia de flujo variable: En este caso (véase la Fig. 6.3), el valor de $\beta_0 = 3$ se incrementa a $\beta_0 = 3.5$ y $\beta_1 = 2.5$ a $\beta_1 = 3$, esto hace que aumente $k(t)$, provocando que las curvas de solución sufran un alargamiento vertical. Esto puede atribuirse al hecho de que al aumentar el valor de $k(t)$ se supone que aumenta la capacidad de agua superficial variable máxima, lo que desplaza el equilibrio a valores más grandes.

Caso 4. Aumento de k_2 : En este caso se incrementó el valor de la persistencia del flujo k_2 , lo que influyó en el comportamiento de la recarga R . El aumento va desde $k_2 = -0.16$ (fig. 4.5) a $k_2 = -0.06$ (fig. 6.4). Con este aumento se observa un cambio en la tendencia de la gráfica, ya que en la primera tiende a crecer y oscilar, mientras que en la segunda tiende a disminuir y oscilar.

Un cambio similar al del Caso 4 se obtiene en los **Casos 5 y caso 6**. En el Caso 5, al disminuir β_0 de $\beta_0 = 3$ a $\beta_0 = 2.5$, se obtiene un comportamiento decreciente en la recarga, como puede verse en la Fig. 6.5 Por otro lado, en el Caso 6, al aumentar β_1 de $\beta_1 = 2.5$ a $\beta_1 = 3$ como puede verse en la Fig. 6.6, la recarga también presenta un comportamiento decreciente.

En los siguientes casos (figura 6.7, 6.8) se presentan comportamientos similares a los iniciales con muy ligeros cambios, solo se mencionará el cambio que se realizó en cada figura.

Finalmente, los **casos 7, 8, 9, 10, 11 y 12** (figura 6.7, 6.8) presentan un conjunto de simulaciones para diferentes parámetros. Se observa que el sistema es muy sensible a la variación de los parámetros, de forma que en estos escenarios el agua subterránea y de recarga aumenta o disminuye; para el suministro de agua superficial sigue siendo oscilante.

6.2

Gráficas de las simulaciones

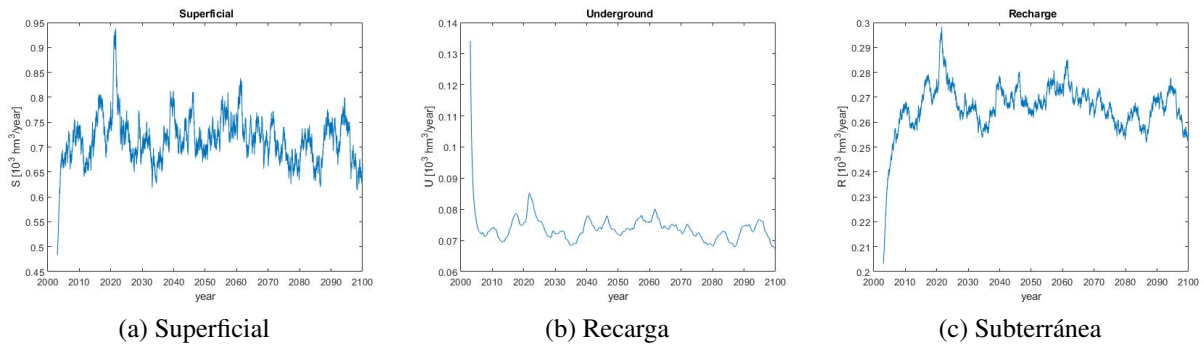


Figura 6.1: Caso 1. Simulación predictiva

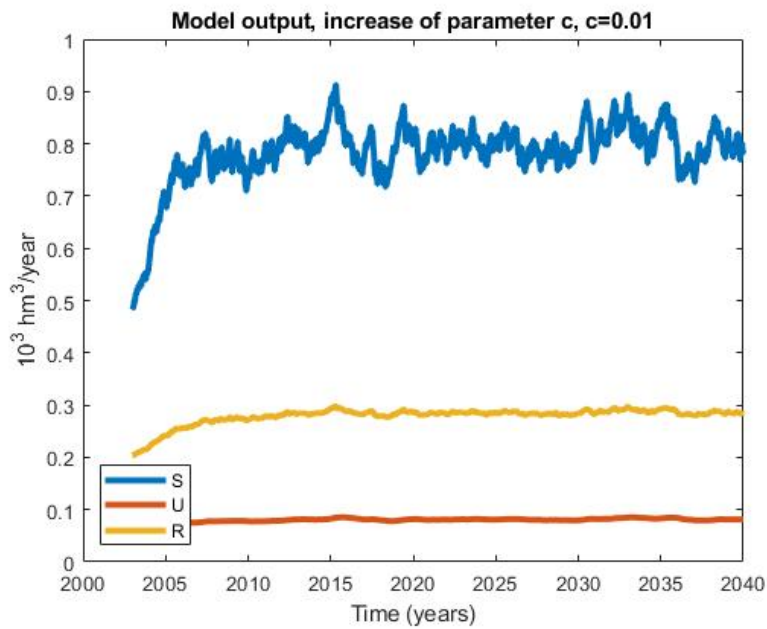
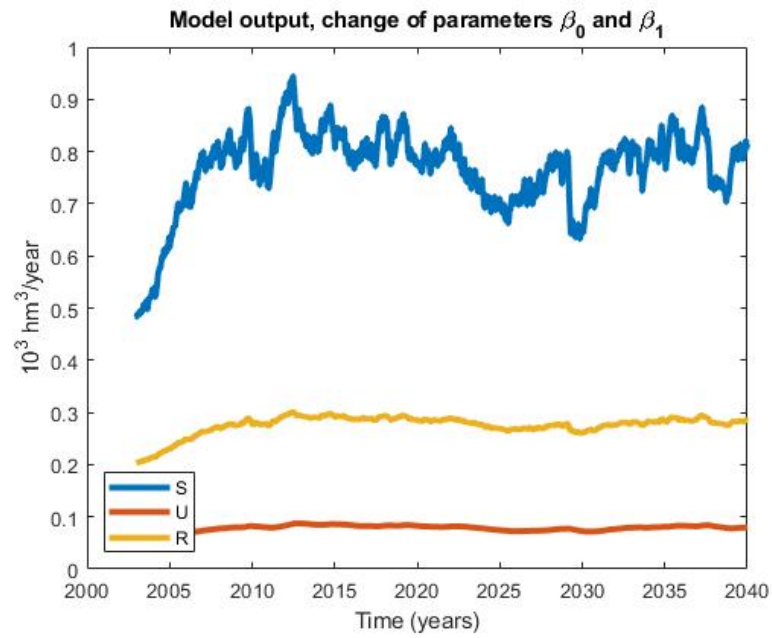
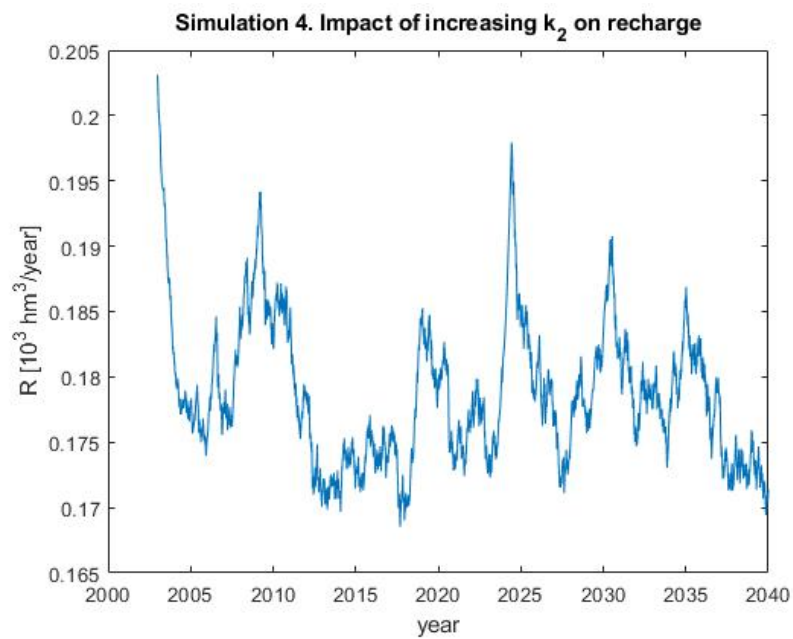
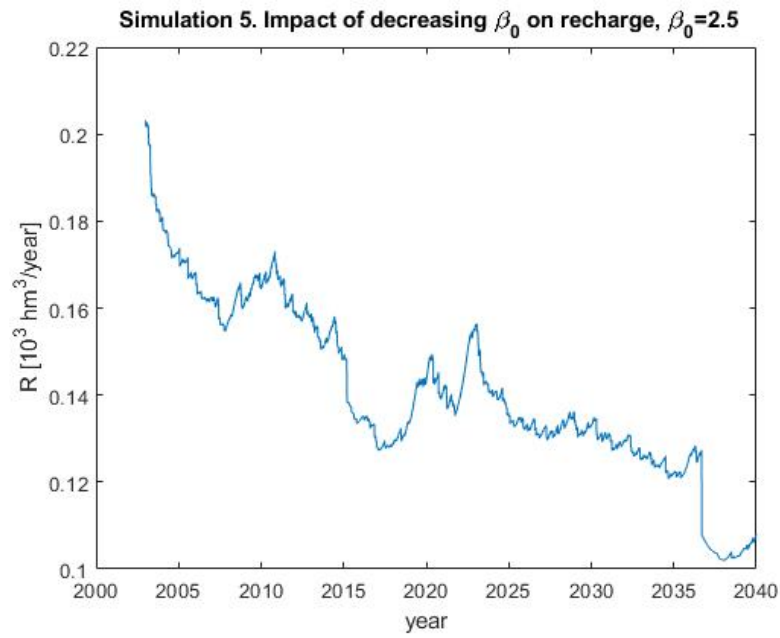
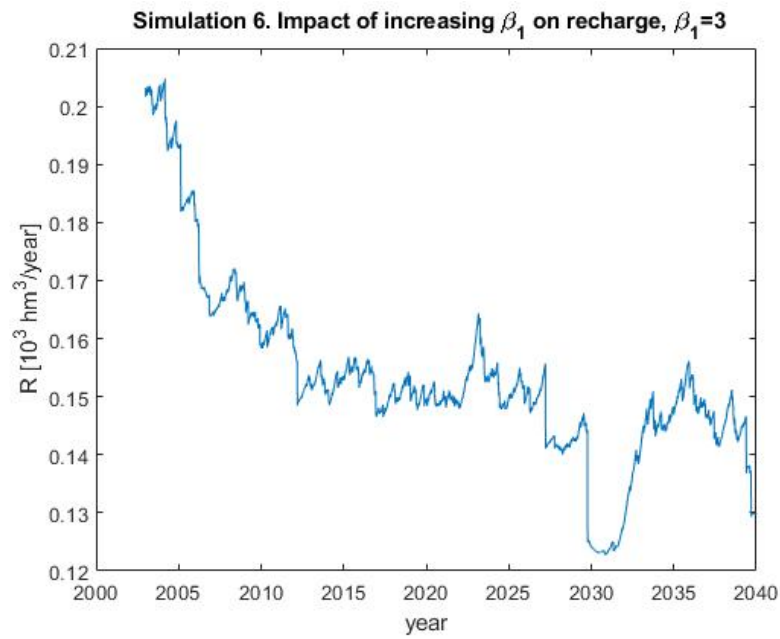
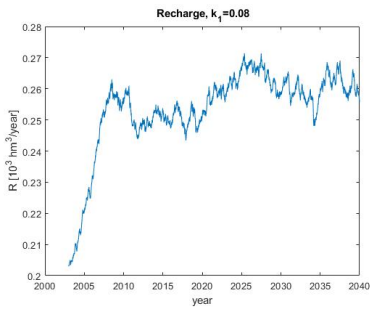


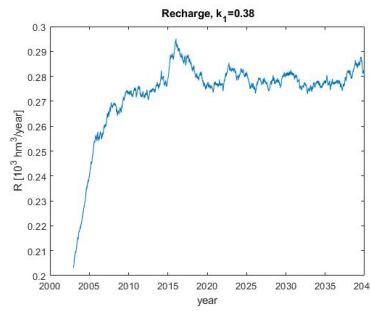
Figura 6.2: Caso 2. Incremento del periodo de onda.

Figura 6.3: Caso 3. Incremento de $k(t)$.Figura 6.4: Caso 4. Simulación de R

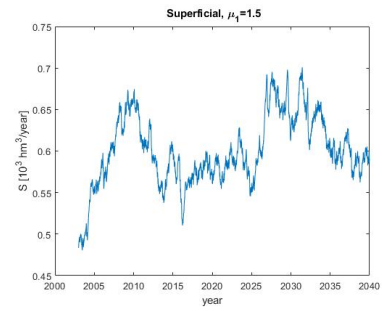
Figura 6.5: Caso 5. Simulación de R Figura 6.6: Caso 6. Simulación de R



(a) Caso 7

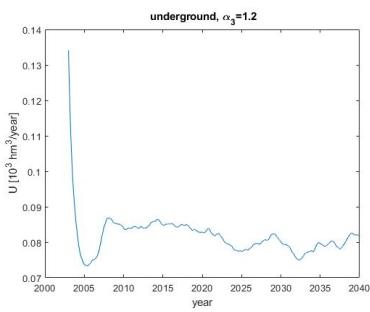


(b) Caso 8

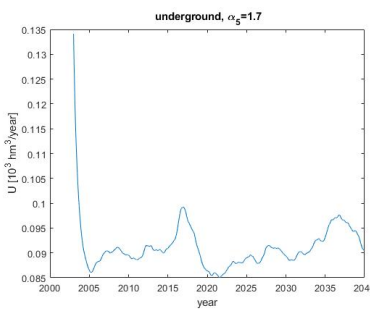


(c) Caso 9

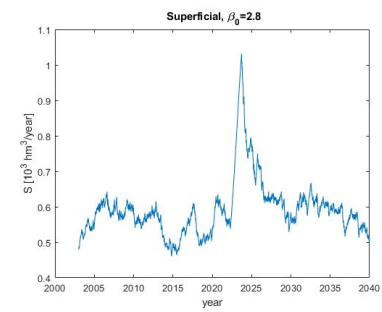
Figura 6.7: Caso 7, 8 y 9



(a) Caso 10



(b) Caso 11



(c) Caso 12

Figura 6.8: Caso 10, 11 y 12.

Resultados

Este capítulo se enfoca en proporcionar una visión general de los hallazgos obtenidos a través del análisis del modelo SUR se realizará una discusión detallada de los resultados obtenidos en las simulaciones y los análisis cualitativos realizados. Se presentarán gráficos y tablas que ilustran el comportamiento del modelo bajo diferentes escenarios, así como los puntos de equilibrio y su naturaleza. También se discutirán las limitaciones y posibles mejoras del modelo, así como su aplicabilidad en la realidad y su importancia para la gestión del agua. Además, se darán las conclusiones finales del trabajo y se sugerirán líneas de investigación futura.

7.1

Discusión de los resultados

Mediante el ajuste de los parámetros del modelo SUR, se modeló la dinámica de las fuentes de abastecimiento de agua en Pachuca de Soto, Hidalgo. El modelo presentó un error cuadrático medio (ECM) $\overline{ECM} = 0.006189956$. La tabla 7.1 muestra el ECM de los casos presentados. La primera fila muestra el para el ajuste original, mientras que las filas siguientes muestran los valores para los casos presentados. Cabe mencionar que los casos 1 y 2 no se presentan porque el primero es una simulación predictiva y el segundo sólo sufre un cambio en su periodo. Cabe señalar que bajo los parámetros ajustados, que el modelo SUR original resulta en la mejor aproximación a los datos reales en la Tabla 4.1.

Cuadro 7.1: Error cuadrático medio para las simulaciones de SUR

Caso	ECM_S	ECM_U	ECM_R	\overline{ECM}
Original	0.00389047	0.0076648	0.0070146	0.00618996
Caso 3	0.00322631	0.02244088	0.00392565	0.00986428
Caso 4	0.00340658	0.0141966	0.02254739	0.01338352
Caso 5	0.0072611	0.1660882	0.03248747	0.06861226
Caso 6	0.00704007	0.15452174	0.0306156	0.06405914
Caso 7	0.00714761	0.01358265	0.00741325	0.00938117
Caso 8	0.00452273	0.01269224	0.00483081	0.00734859
Caso 9	0.00414206	0.01598695	0.00976141	0.00996347
Caso 10	0.0032227	0.01299142	0.00516011	0.00712474
Caso 11	0.00289224	0.01044561	0.00640336	0.0065804
Caso 12	0.00436009	0.01607759	0.01093406	0.01045725

^a Los valores están dados en $10^3 hm^3$.

El análisis cualitativo del modelo SUR revela la presencia de ocho puntos de equilibrio. Sin embargo, para el propósito de este estudio, nos centraremos en cuatro puntos de equilibrio específicos que son particularmente relevantes: E_1 , E_4 , E_6 y E_8 .

Interpretando estos puntos de equilibrio en un sentido físico, E_1 representa un escenario apocalíptico donde los niveles de agua en algunas de las tres fuentes exhiben una tendencia decreciente, mientras que en otras, aumentan. Esto resalta las dinámicas contrastantes y la escasez potencial de agua en diferentes fuentes.

Pasando a E_6 , exhibe un comportamiento interesante como un atractor para ciertos valores de ω . Este fenómeno demuestra cómo la dinámica del agua subterránea tiende a disminuir a medida que las cantidades de agua convergen hacia los valores especificados de E_6 . Por otro lado, para valores de ω entre 0 y 4.16, E_6 funciona como un punto de silla, indicando un comportamiento más complejo y variado de los niveles de agua.

Por último, E_8 muestra una transición en la dinámica a medida que ω aumenta. Pasa de ser un punto de silla a un atractor, lo que indica cómo la cantidad de agua superficial tiende a disminuir con valores más altos de ω . Esto resalta la importancia de considerar los impactos de los valores variables de ω en los recursos hídricos y la necesidad de prácticas de gestión sostenible.

En resumen, los puntos de equilibrio en el modelo SUR ofrecen conocimientos sobre el comportamiento del agua en el sistema. E_1 representa un “escenario apocalíptico” de fluctuación de niveles de agua en diferentes fuentes. E_4 muestra un escenario donde en el que el agua superficial se agota es un punto de silla, es decir se atrae solo en algunas direcciones y en otras se repele. E_6 exhibe un comportamiento atractor para ciertos valores de ω , enfatizando la disminución de la dinámica del agua subterránea. E_8 muestra el cambio hacia un atractor a medida que ω aumenta, indicando una tendencia decreciente en el agua superficial. Estas interpretaciones brindan una comprensión valiosa de la dinámica del agua en el modelo y subrayan la importancia de estrategias de gestión adecuadas para garantizar recursos hídricos sostenibles.

Las simulaciones se realizaron variando los parámetros del modelo SUR, lo cual proporcionó información valiosa sobre la dinámica del sistema. Específicamente, se observó una tendencia decreciente en el agua subterránea, indicando un declive inminente, lo cual es consistente con la sobreexplotación actual del acuífero Cuautitlán-Pachuca [Galindo et al., 2010]. El comportamiento del agua de recarga varió según los valores de los parámetros β_0 , β_1 y k_1 , lo que resultó en escenarios de aumento y disminución del suministro. La relación entre la recarga y las capacidades persistentes resaltó la dependencia del comportamiento de recarga en la capacidad de almacenamiento de agua de las fuentes superficiales y subterráneas. Si la demanda de agua excede la cantidad de recarga, esta disminuirá, mientras que un exceso de agua ofrecida llevará a un aumento en la recarga.

En cuanto al comportamiento del agua superficial, se observó una evolución oscilatoria en su dinámica. Estos resultados respaldan la idea de que, independientemente de los valores de los parámetros del sistema, la dinámica del agua superficial se asemeja a una variable aleatoria.

En general, el análisis de los resultados revela hallazgos importantes sobre el sistema de suministro de agua en Pachuca de Soto, Hidalgo. En primer lugar, destaca la necesidad de considerar un enfoque dinámico en la modelización de las fuentes de agua, ya que la dinámica varía con el tiempo y no puede ser capturada adecuadamente por enfoques estáticos. El uso del modelo SUR permitió incorporar esta dinamicidad y obtener una mejor aproximación a la realidad.

Las simulaciones realizadas, al variar significativamente los parámetros del modelo, nos permitieron explorar diferentes escenarios y comprender mejor la dinámica del sistema de suministro de agua. La observación de una tendencia decreciente en el agua subterránea es particularmente relevante, ya que refuerza la necesidad de implementar medidas de gestión y conservación para este recurso. Asimismo, el comportamiento oscilatorio del agua superficial señala la importancia de considerar la variabilidad natural y los patrones estacionales en la gestión del agua.

En resumen, este estudio ofrece un enfoque más preciso y dinámico para el problema de suministro de agua potable en Pachuca de Soto, Hidalgo. Los resultados obtenidos a través del modelo SUR y las simulaciones realizadas proporcionan información valiosa para comprender la dinámica de las fuentes de agua y su interacción. Estos hallazgos pueden ser utilizados como base para la toma de decisiones y la implementación de estrategias de gestión del agua que promuevan la sostenibilidad y la seguridad hídrica en la región. Se requiere más investigación y perfeccionamiento de estos modelos para mejorar aún más nuestra comprensión y capacidad de planificación en el campo del suministro de agua.

7.2

Conclusiones

En conclusión, este estudio presenta un análisis exhaustivo de la dinámica de las fuentes de suministro de agua en Pachuca de Soto, Hidalgo, utilizando el modelo SUR. El modelo demuestra un ajuste satisfactorio a los datos reales, como se evidencia por el bajo valor del error cuadrático medio (MSE,

por sus siglas en inglés). Los puntos de equilibrio identificados en el modelo proporcionan información valiosa sobre el comportamiento de las fuentes de agua y resaltan la necesidad de estrategias efectivas de gestión para garantizar recursos hídricos sostenibles.

La interpretación de los puntos de equilibrio revela dinámicas contrastantes y posibles escaseces de agua en diferentes fuentes. E_1 representa un .escenario apocalíptico con niveles de agua fluctuantes, mientras que E_6 y E_8 demuestran comportamiento de atractor y un cambio en la dinámica con valores variables de los parámetros. Estas interpretaciones mejoran nuestra comprensión del sistema de suministro de agua y enfatizan la importancia de enfoques de gestión adaptados.

Es importante destacar que la tendencia decreciente en el agua subterránea se alinea con la situación actual de sobreexplotación en el acuífero Cuautitlán-Pachuca, lo que subraya la necesidad urgente de medidas de conservación. El comportamiento oscilatorio del agua superficial resalta la importancia de considerar la variabilidad natural y los patrones estacionales en las estrategias de gestión del agua.

La flexibilidad del modelo SUR permite su aplicabilidad en otras regiones al ajustar los datos a las características específicas de cada área. Esta característica lo convierte en una herramienta valiosa para tomadores de decisiones y gestores de recursos hídricos en todo el mundo, ya que les permite analizar y predecir la dinámica del suministro de agua y desarrollar estrategias adaptadas para sus respectivas regiones. Al incorporar el modelo SUR, los responsables de la formulación de políticas pueden anticipar desafíos, implementar prácticas de gestión efectivas y garantizar un suministro de agua sostenible a largo plazo.

Los hallazgos de este estudio tienen implicaciones más allá de la comunidad científica y llegan a los responsables de la formulación de políticas, autoridades del agua y partes interesadas involucradas en la gestión del agua. Se destaca la necesidad de un enfoque holístico que vaya más allá de soluciones técnicas y modelos matemáticos. Una gestión efectiva del agua requiere monitoreo constante, colaboración y la implementación de políticas y regulaciones adecuadas.

Conflicto de intereses y disponibilidad de datos

En este capítulo, se describe la declaración de no conflicto de interés y la declaración de disponibilidad de datos relacionados con el modelo SUR. La declaración de no conflicto de interés indica que no existe conflicto alguno entre los intereses de los autores y los resultados presentados en la tesis. Además, la declaración de disponibilidad de datos establece que los datos utilizados en el modelo estarán disponibles para aquellos interesados en utilizarlos para futuras investigaciones relacionadas con el análisis hidrológico en la Región de Pachuca.

8.1

Declaración de disponibilidad de datos

Es importante destacar que los datos utilizados en este estudio son de acceso público y están disponibles a través del [Sistema Nacional de Información del Agua], una plataforma en línea que se encuentra a cargo de la Comisión Nacional del Agua. En este estudio se han organizado y analizado los datos para llegar a las conclusiones presentadas en este trabajo. Para aquellos interesados en examinar los datos directamente, se proporciona el enlace al sitio web <http://sina.conagua.gob.mx/sina/index.php>, donde se pueden encontrar los datos utilizados. Los datos se presentan en formatos de fácil acceso y descarga, como archivos de texto y hojas de cálculo, y se alienta a otros investigadores y profesionales a utilizarlos en futuras investigaciones relacionadas con el manejo del agua.

8.2

Declaración de no intereses

En aras de la transparencia y la integridad académica, el autor de este estudio declara expresamente que no existen conflictos de intereses financieros o personales que puedan influir en la investigación o en los posibles productos derivados de la misma. Esto incluye, pero no se limita a, relaciones financieras o de colaboración con empresas, instituciones o personas que puedan tener un interés en los resultados de este estudio. El autor garantiza que se ha llevado a cabo una investigación independiente y objetiva y que los resultados presentados en este trabajo son el fruto de un análisis riguroso y transparente de los datos.

Además, se informa que algunos resultados obtenidos de este trabajo han sido sometidos en una revista científica para su posible publicación como artículo. El autor declara que se han seguido las normas y directrices éticas para la presentación y publicación de investigaciones en dicha revista.

Bibliografía

- [1] Amaya, M. (2011). Aspectos institucionales de la gestión del agua en Pachuca, Hidalgo. *Revista Mexicana de Sociología*, 73(3), 509–537. Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Investigaciones Sociales.
- [2] Amodo, M. (2011). The use of non-autonomous dynamical systems in mathematical biology. *Bulletin of Mathematical Biology*, 73(3), 657-675. doi: [10.1007/s11538-010-9556-7](https://doi.org/10.1007/s11538-010-9556-7).
- [3] Beavis, S., and White, I. (2016). Rainwater harvesting augmentation of domestic water supply in Honiara, Solomon Islands. *Australian Journal of Water Resources*, 10(1), 65–77.
- [4] Buzsáki, G. (2010). Neural syntax: cell assemblies, synapsembles, and readers. *Neuron*, 68(3), 362-385.
- [5] Caraballo, T., and Han, X. (2017). *Applied nonautonomous and random dynamical systems: Applied dynamical systems*. New York, NY: Cambridge University Press.
- [6] Chen, C. (2015). *Control de sistemas dinámicos no autónomos*. Springer.
- [7] Comisión Nacional del Agua (CONAGUA). (2005). *Estadísticas del agua en México (1st ed.)*. SEMARNART.
- [8] Comisión Nacional del Agua (CONAGUA). (2007). *Estadísticas del agua en México (1st ed.)*. SEMARNART.
- [9] Comisión Nacional del Agua (CONAGUA). (2009). ¿Qué es la CONAGUA? Recuperado de <https://www.conagua.gob.mx/CONAGUA07/Publicaciones/Folleter%C3%A9SGJ3%202.pdf>
- [10] Comisión Nacional del Agua (CONAGUA). (2010). *Estadísticas del agua en México*. SEMARNART, 1era edición.
- [11] Comisión Nacional del Agua (CONAGUA). (2012). *Glosario general de términos del desarrollo de la base metodológica para el inventario nacional de humedales en México*. Inventario nacional de humedales, México.

- [12] Comisión Nacional del Agua (CONAGUA). (2018). Estadísticas del agua en México. SEMARNART, 1era edición.
- [13] Comisión Nacional del Agua (CONAGUA). (2020). Actualización de la disponibilidad media anual de agua en el acuífero Cuautitlán-Pachuca (1508), estado de México. Ciudad de México: CONAGUA.
- [14] Comisión Nacional del Agua (CONAGUA). (2020). Actualización de la Disponibilidad de Agua en el Acuífero Actopan-Santiago de Anaya, estado de Hidalgo. México: Gobierno de la República.
- [15] Contreras, O., Quezada, L., Quezada, E. and Cuenca, F. (2018). Operational model equation applying material balance in a non-stationary state. *Revista Ciencia UNEMI*, 11(28), 33-40.
- [16] Cruz, A., Ramírez, J., Vázquez, R., Nava, E., Troyo, E., and Fraga, H. (2013). Estimation of the hydrological balance and recharge of the aquifer of la paz, BCS, México. *Universidad y Ciencia*, 29(1), 87-100.
- [17] Esparza, M. (2014). Drought and water shortages in México: Current status and future prospects. *Secuencia*, 1(89), 193-219.
- [18] Felder, M., and Rousseau, R. (2004). *Elementary Principles of Chemical Processes* (3rd ed.). John Wiley and Sons Inc.
- [19] FitzHugh, R. (1961). Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical Journal*, 1(6), 445-466. doi: [10.1016/S0006-3495\(61\)86902-6](https://doi.org/10.1016/S0006-3495(61)86902-6).
- [20] Fuentes, J. (1993). *Aguas subterráneas*. Madrid, España: Ministerio de agricultura pesca y alimentación. Recuperado de https://www.mapa.gob.es/ministerio/pags/biblioteca/hojas/hd_1992_01.pdf
- [21] Galindo, E., Otazo, E., Reyes, L., Arellano, S., Gordillo, A., and Gonzales, C. (2010). Balance hídrico y afectaciones a la recarga para el año 2021 en el acuífero Cuautitlán-Pachuca. *International Review of Geographical Information Science and Technology*, 10(1), 56–90.
- [22] Gobierno de México. (2012). *Glosario general de términos del desarrollo de la base metodológica para el inventario nacional de humedales en México*. Inventario nacional de humedales, México.
- [23] Gobierno de México. (2014). *Sistema Nacional de Información del Agua*. <http://sina.conagua.gob.mx/sina/index.php>. Registro de acuíferos nacionales.
- [24] Gobierno de México. (2022). *Disponibilidad por Acuíferos*. https://sigagis.conagua.gob.mx/gas1/sections/Disponibilidad_Acuiferos.html.
- [25] Gobierno de México. (2022). *Informe del Medio Ambiente*. <https://apps1.semarnat.gob.mx:8443/dgeia/informe18/tema/cap6.html>.
- [26] Hale, J. K. (1980). Nonautonomous differential equations and topological dynamics. *Transactions of the American Mathematical Society*, 251, 1-59.
- [27] Harris, K. D. (2005). Neural signatures of cell assembly organization. *Nature Reviews Neuroscience*, 6(5), 399-407.

- [28] Hernández, A., Arango, C., Reyes, P., Martínez, A., Pita, C., Macias, S., Arias, A., and Breña, J. (2016). Water Supply Source Evaluation in Unmanaged Aquifer Recharge Zones: The Mezquital Valley (México) Case Study. *Water*, 9(1), 1-25.
- [29] Hirsch, M., Smale, S., and Devaney, R. (2013). *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos* (3rd ed.). Academic Press.
- [30] Hou, Z. G., Tan, Y., and Lee, T. H. (2017). Robust control of non-autonomous systems with uncertain time-varying inputs: A disturbance observer-based approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 27(17), 3753-3769. doi: [10.1002/rnc.3732](https://doi.org/10.1002/rnc.3732)
- [31] Ikegaya, Y., Aaron, G., Cossart, R., Aronov, D., Lampl, I., Ferster, D., and Yuste, R. (2004). Synfire chains and cortical songs: temporal modules of cortical activity. *Science*, 304(5670), 559-564.
- [32] IMTA. (2012). Programa de indicadores de gestión de organismos operadores. Recuperado de <http://www.pigoo.gob.mx/descargarData.jsp/>
- [30] INEGI (2020). Cuéntame INEGI. Recuperado de: <https://cuentame.inegi.org.mx/monografias/informacion/hgo/poblacion/> INEGI Official web site.
- [33] International Groundwater Resources Assessment Centre (2001). ¿Qué es el Agua Subterránea? Recuperado de <https://www.un-igrac.org/es/es/que-es-agua-subterranea>
- [34] Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems* (3rd ed.). Prentice Hall.
- [35] Kloeden, P. E., and Protsche, C. (2011). *Nonautonomous dynamical systems in the life sciences*. New York, NY: Springer Science and Business Media.
- [36] Kloeden, P. E., and Rasmussen, M. (2010). *Nonautonomous dynamical systems (Mathematical Surveys and Monographs)*. Providence, RI: American Mathematical Society.
- [37] Li, Y., and Wang, W. (2011). *Applications and Methods in the Control of Non-Autonomous Dynamical Systems*. John Wiley and Sons.
- [38] Liu, Y., Lu, J., and Chen, G. (2014). *Control and Synchronization of Chaotic Nonlinear Dynamics in the Presence of Random Noise: Theory and Applications*. Springer.
- [39] Lotka, A. J. (1925). Elements of physical biology. *Science*, 61(1577), 186-187.
- [40] Municipio de Pachuca de Soto (2020-2024). Descripción general. Portal municipal de Pachuca. Recuperado de [https://www.pachuca.gob.mx/portal/descripcion-general/#:~:text=%E2%\\$80%\\$8B%\\$20De%\\$20acuerdo%\\$20al%\\$20INEGI,municipios%\\$20de%\\$20Hidalgo%\\$20por%\\$20superficie](https://www.pachuca.gob.mx/portal/descripcion-general/#:~:text=%E2%$80%$8B%$20De%$20acuerdo%$20al%$20INEGI,municipios%$20de%$20Hidalgo%$20por%$20superficie)
- [41] Marsden, J., and Tromba, A. (2011). *Vector calculus* (6th ed.). W. H. Freeman.
- [42] Martinez, J., Cruickshank, C., and Berezowsky, M. (2011). Evaluation of the interaction between rivers and aquifers for water supply. *WIT Transactions on Ecology and the Environment*, 146(6), 15–23.
- [43] Martinez, J., Cruickshank, C., and Berezowsky, M. (2013). On the physical and mathematical modeling of the coupling of rivers and aquifers as sustainable water supply systems. *International Journal of Sustainable Development and Planning*, 8(2), 197–213.

- [44] Montesillo, J. (2017). Suministro de agua potable en México: más allá del crecimiento poblacional. *Tecnología y ciencias del agua*, 8(1):21–33.
- [45] Murray, J. D. (2002). *Mathematical biology: I. An introduction* (3rd ed.). Springer.
- [46] Nagumo, J., Arimoto, S., and Yoshizawa, S. (1962). An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*, 50(10), 2061-2070. doi: [10.1109/JRPROC.1962.288235](https://doi.org/10.1109/JRPROC.1962.288235).
- [47] Perko, L. (2001). *Differential equations and dynamical systems* (3ª ed.). Springer. (Capítulo 5, Sección 5.5).
- [48] United Nations (2005). The human right to water and sanitation. UN-Water Decade Programme on Advocacy and Communication and Water Supply and Sanitation Collaborative Council 7s. Recuperado de https://www.un.org/waterforlifedecade/pdf/humanrighttowaterandsanitationmedia_brief.pdf.
- [49] RUVIVAL. (2017). Acuífer recharge. Recuperado de <https://www.ruvival.de/aquifer-recharge/>
- [50] Sahuquillo, A. (2009). La importancia de las aguas subterráneas. X Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica, 103(1), 97–114.
- [51] SEMARNART (2013). Informe de la situación del medio ambiente en México: Compendio de estadísticas ambientales. Indicadores clave y de desempeño ambiental. Edición 2012. México: SEMARNART.
- [52] SIAPA. (2014). Actualización de los criterios y lineamientos técnicos para factibilidades en la Z.M.G. SIAPA. 1era edición.
- [53] Silva, H., Martín, I., and Alarcón, M. (2006). Modelación matemática para el manejo integrado de los recursos hídricos en cuencas hidrológicas: Estado actual y tendencias. In 3er Congreso CIMAV (pp. 1-25). Chihuahua, Chih. México.
- [54] Singer, W., Engel, A. K., Kreiter, A. K., Munk, M. H., Neuenschwander, S., and Roelfsema, P. R. (1998). Neuronal assemblies: necessity, signature and detectability. *Trends in cognitive sciences*, 2(5), 206-214.
- [55] Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Westview Press.
- [56] Toledo, A. (2002). El agua en México y el mundo. *Gaceta Ecológica*, 3(64), 9-18.
- [57] Tzatchkov, V., and Alcocer, V. (2016). Modelación de la variación del consumo de agua potable con métodos estocásticos. *Tecnología y Ciencias del Agua*, 7(3), 115-133.
- [58] Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH) (2022). Ubicación geográfica. Obtenido de <https://www.uaeh.edu.mx/excelencia/ubicacion.htm>.
- [59] Volterra, V. (1926). Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically. *Nature*, 118(2972), 558-560.

-
- [60] Wang, M., Li, J., Yu, S. S., Zhang, X., Li, Z., and Iu, H. H. C. (2020). A novel 3D non-autonomous system with parametrically excited abundant dynamics and bursting oscillations. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 30(4), 043125. doi: [10.1063/1.5131186](https://doi.org/10.1063/1.5131186)
- [61] Zhang, X. (2016). Dynamics of a class of nonautonomous Lorenz-type systems. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 31, 229-238.

Programas para el análisis del agua

En esa sección se describen los códigos utilizados para resolver las ecuaciones diferenciales en el modelo SUR, incluyendo las características y funcionalidades de los programas, los métodos y algoritmos implementados, los detalles técnicos del proceso de solución, y otros aspectos relevantes para comprender la solución de las ecuaciones diferenciales en el modelo.

A.1

Programa para resolver numéricamente el sistema SUR usando MATLAB

Este código proporcionado a continuación brinda una solución numérica eficiente y precisa para el sistema SUR presentado (4.4), lo que ha resultado en resultados valiosos en la investigación de la oferta de agua en la Región de Pachuca. La implementación del modelo en MATLAB R2019a ha permitido que el código sea una herramienta útil para aquellos interesados en el análisis hidrológico y en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales no autónomas. La solución numérica proporcionada por este código es una herramienta importante que ha ayudado a mejorar la comprensión del comportamiento hidrológico en la región, y se espera que sea útil en futuras investigaciones relacionadas con la oferta de agua en la Región de Pachuca.

```

% Universidad Autonoma del Estado de Hidalgo (UAEH)
% Maestría en matemáticas
% Resolución del modelo SUR para la oferta de agua en la región de Pachuca
% S: Agua superficial
% U: Agua subterránea
% R: Recarga de agua (de lluvia y natural)
% Josué Neftalí Gutiérrez Corona 04/MARZO/2022 PACHUCA/APAN HIDALGO
% Dirige: PhD Luis Alberto Quezada telled; PhD Benjamín Alfonso Itzá
% Área académica de Matemáticas y Física

function dxdt = resolverEDOEjemploDos(t,x)
%Declaración de variables
lambda1 = 1.7;
lambda2 = 1.95;
lambda6 = 1.1;
alpha3 = 1.04;
alpha4 = 0.9;
alpha5 = 1.9;
beta0 = 3;
beta1 =2.5;
c = .000001;
k1 = .18;
k2 = -0.16;
phi=-0.1

k =beta0 + beta1*cos((2*pi*t)/c);
% SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES SUR

% Superficial (S)
dxdt(1) =1*( lambda1*x(1)*(1-(x(1))/k)-alpha4*x(1)-alpha3*(x(1))*(x(2)));
% Subterránea (U)
dxdt(2) =1*( lambda2*x(2)*(1-(x(2))/k1)+alpha3*(x(1))*(x(2))-alpha5*(x(2)));
% Recarga (R)
dxdt(3) =-0.1*( lambda6*x(3)*(1-(x(3))/k2)-lambda1*(x(1)*(1-(x(1))/k))-
lambda2*x(2)*(1-(x(2))/k1));
dxdt = dxdt';
end

```


A.2

Programa para graficar las soluciones del modelo SUR empleando MATLAB

El código presentado tiene como objetivo principal generar visualizaciones de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales no autónomas SUR en la Región de Pachuca, utilizando MATLAB R2019a. Estas gráficas brindan una representación clara y detallada del comportamiento hidrológico en la región, lo que permite una mejor comprensión de la oferta de agua. Este código es una herramienta valiosa para aquellos interesados en el análisis hidrológico y en la representación gráfica de sistemas de ecuaciones diferenciales no autónomas. Los resultados generados por este código han demostrado ser precisos y eficientes, lo que ha permitido obtener una mejor comprensión del comportamiento hidrológico en la región. Se espera que esta herramienta sea útil en futuras investigaciones relacionadas con la oferta de agua en la Región de Pachuca y en el análisis hidrológico en general.

```
% Universidad Autonoma del Estado de Hidalgo
% Maestría en matemáticas
% Resolución del modelo SUR para la oferta de agua en la región de Pachuca
% S: Agua superficial
% U: Agua subterránea
% R: Recarga de agua (de lluvia y natural)
% Josué Nefthalí Gutiérrez Corona 04/MARZO/2022 PACHUCA/APAN HIDALGO
% Dirige: PhD Luis Alberto Quezada Tellez; PhD Benjamín Alfonso Itzá
% Área académica de Matemáticas y Física

clear variables
clc
% ( valor inicial, paso, valor final)
t = (2003:0.0000001:2200);

% condiciones iniciales
%(superficial, subterránea, recarga)
Xo = [0.483315;0.134121;0.2031];

% Resolver
[T,Y] = ode45(@resolverEDOEjemploDos,t,Xo);

% Funciones que se van a graficar
x1 = Y(:,1);
x2 = Y(:,2);
x3 = Y(:,3);

% Grafica
```

```

plot(T,Y,'linewidth',3);
title('Model Results')
xlabel('Time (years)');
ylabel('10^3 hm^3/year');
legend({'S','U','R'},'Location','southwest')

```

A.3

Programa empleado para calcular los puntos de equilibrio de SUR empleando Mathematica.

El presente código, desarrollado en Mathematica 12 resuelve el sistema de ecuaciones no lineales (5.3) para calcular los puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales no autónomas SUR propuesto, es una solución numérica eficaz y eficiente para el análisis hidrológico de la Región de Pachuca. Mathematica se ha demostrado como una herramienta sólida para la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales, y este código es valioso para quienes buscan analizar sistemas de ecuaciones diferenciales no autónomas. Se espera que esta herramienta sea útil para futuras investigaciones relacionadas con la oferta de agua en la Región de Pachuca y en el análisis hidrológico en general.

```

Clear[ecuaciones, S, U, R]
ecuaciones = {1.7*S - (S^2)*W - 0.9*S - 1.04*(S)*(U) == 0 &&
  1.95*(U)*(1 - (U)/0.18) + 1.04*(S)*(U) - 1.9*(U) == 0 &&
  1.1*R*(1 - (R)/(-0.16)) - 1.7*S + W*(S^2) -
  1.95*U*(1 - (U)/0.18) == 0 } ; Refine[
Simplify[Solve[ecuaciones, {S, U, R}]]]

```

Programa empleado para analizar el punto E_7 y E_8 obtenidos del sistema S.U.R:

```
Reduce[Gamma[x] <= 2 x && -2 <= x <= 2, x, Reals]
```

```
Reduce[W >
0 && -0.07999999999999999 Sqrt[W (180. + 11. W)]/W >= 0, Reals]
```

```
Reduce[W >
0 && -0.07999999999999999 Sqrt[W (180. + 11. W)]/W >= 0, Reals]
```

```
Reduce[0.7952/(0.09984 + 1. W) >= 0 && (
0.0768 + 0.004615384615384615 W)/(0.09984 + 1. W) >= 0 &&
```

```

1/(0.09984 +
  1. W) (-0.0079872 - 0.080000000000000002 W +
  4.005031800158361*^-6 Sqrt[
  7.84032912*^8 + 7.90066875*^9 W + 4.78515625*^8 W^2]) >=
0, Reals]

```

Los códigos utilizados para llevar a cabo los cálculos y análisis presentados en este estudio fueron desarrollados por el autor con la finalidad de cumplir con los objetivos planteados. Se utilizaron dos herramientas de programación, específicamente MATLAB R2019a y WOLFRAM MATHEMATICA versión 12.0.0.0, debido a su capacidad para resolver ecuaciones y analizar datos complejos. La autoría de estos programas es exclusiva del autor, quien garantiza su originalidad y eficacia en la realización de los cálculos y análisis requeridos.