UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

COORDINACIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
Subnodo Regional de Matemática Educativa a

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN: Un estudio realizado con estudiantes de bachillerato

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

P R E S E N T A

LORENZO CONTRERAS GARDUÑO

DIRECTOR: Dr. Ricardo Cantoral Unza

Diciembre del 2000

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

COORDINACIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
SUBNODO REGIONAL DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

1NG LORENZO CONTRERAS GARDUÑO
P R E S E N T E.

Nos permitimos comunicarte que este jurado después de revisar la tesis con el título **"INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN UN ESTUDIO REALIZADO CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO",** que usted presenta para obtener el grado de Maestro en Ciencias con Orientación en la Enseñanza de las Matemáticas, ha decidido autorizar la impresión de la misma, una vez que se han cubierto los requisitos de la normatividad respectiva y haber realizado las correcciones que fueron acordadas.

Firman de conformidad

PRESIDENTE:
DR RICARDO A. CANTORAL URIZA

SECRETARIO
DRA. ROSA MA. FARFÁN MÁRQUEZ

VOCAL:
M. en C. CARLOS RONDERO GUERRERO

1ER SUPLENTE:
M en C. JUAN ALBERTO ACOSTA HERNÁNDEZ

2o SUPLENTE:
M. en C. FRANCISCO JAVIER LEZAMA ANDALÓN

Lo anterior para los trámites correspondientes a que haya lugar

Con copia para:
Subnodo Regional de Matemática Educativa
Dirección de Estudios de Posgrado
Interesado

A mis padres

A mi esposa

A mis hijos

A mis familiares

A mis maestros

A mis amigos

Al Dr. Ricardo Cantoral Uriza

ÍNDICE

CAPÍTULO IV
ANÁLISIS PRELIMINAR

CAPÍTULO V
DISEÑO DE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA Y ANÁLISIS A PRIORI

CAPÍTULO VI
ANÁLISIS DE RESULTADOS

ANEXO No. 1

ANEXO No. 2

INTRODUCCIÓN

En los niveles educativos, uno de los problemas más fuertes en cuanto a la enseñanza, se presenta en el área de Matemáticas, siendo en el Cálculo donde se presentan los mayores problemas tanto en el nivel medio superior como en el superior; por tal motivo es aquí donde se realizan un gran número de investigaciones para detectar las dificultades que los alumnos muestran al estudiar el Cálculo y de esta manera implementar acciones dentro del aula que ayuden a disminuir este problema.

Actualmente se le está dando un gran impulso a la Matemática Educativa, disciplina que no sólo considera a la Matemática como tema escolar, sino también, trata de entender cómo es que los que aprenden se postran ante ella, ya que la Matemática Educativa estudia los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar (Cantoral, 1995), donde uno de sus fines es describir y explicar los fenómenos inmersos en las relaciones entre enseñanza y aprendizaje para afectar al sistema educativo en forma benéfica a través de la investigación.

El presente proyecto, pertenece al grupo de trabajo que desarrolla la línea de Investigación*: Pensamiento y Lenguaje Variacional*, que estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida.

Específicamente el proyecto que desarrollamos dentro de esta línea de investigación y dirigido por el Dr. Ricardo Cantoral, corresponde a "la interpretación geométrica de las derivadas sucesivas de una función", con la cual se pretende cambiar la noción que el estudiante adquiere con respecto a la interpretación de las derivadas, desde el punto de vista algebraico así como el graneo para lograr estabilizar esta noción de derivada en el estudiante de bachillerato.

La investigación se desarrolla siguiendo la metodología de la Ingeniería Didáctica, fundamentándose en la Teoría de Situaciones Didácticas, para lo cual se diseño e implemento una Situación Didáctica con un grupo de alumnos de bachillerato, con la finalidad de que construyeran como un nuevo conocimiento para ellos, la derivada de una función desde el punto de vista geométrico.

Este trabajo se estructura en seis capítulos: en el primero se presenta la naturaleza que da origen a nuestro problema de investigación, el cual forma parte de un proyecto colectivo dentro del grupo de trabajo que desarrolla la línea de investigación: Pensamiento y Lenguaje Variacional. Se describen cuáles son los motivos que nos llevaron a realizar la investigación, así como los antecedentes que se tienen al respecto, en mi lugar de trabajo, se presenta el planteamiento del problema de estudio, así como la razón por la cual este problema es importante dentro del sistema educativo, a quien va dirigido, además de cuáles son los objetivos que se pretenden lograr basados en las hipótesis de la investigación, y cuáles son los supuestos con los cuales partimos. Por último se presentan algunas limitaciones de nuestro trabajo de investigación.

En el segundo capítulo, se describe el marco teórico con el cual se fundamenta la investigación, el cual corresponde a la Teoría de Situaciones Didácticas, así como el contexto en donde se realiza el trabajo, además de la articulación existente entre el mareo teórico y nuestro problema de investigación y la revisión crítica de otras investigaciones realizadas al respecto. Se enuncian algunas características que deben tomarse en cuenta para el diseño de una Situación Didáctica y finalmente se muestran las situaciones variacionales que se pretenden obtener en esta investigación.

En el tercer capítulo, se describe el método utilizado en la investigación, el cual se basa en la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, a quién está dirigida la investigación, el contexto en donde se realizó, las características del grupo de estudiantes que participaron en la investigación y finalmente un bosquejo de cómo se realiza el análisis de datos.

En el capítulo cuatro se presenta el estudio preliminar que se realizó con el grupo de alumnos que participaron en la investigación, así como las conclusiones de la misma.

En el quinto capítulo, se muestra el diseño de la Situación Didáctica que se aplicó, así como el análisis a priori. Cabe mencionar que el objeto de estudio de la Situación Didáctica, es totalmente desconocido para el grupo de alumnos, ya que ellos aún no cursan la asignatura de Cálculo Diferencial, por lo que la relevancia de esta Situación Didáctica estará en los resultados que se obtengan.

En el capítulo seis, se presenta el análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de la Situación Didáctica, presentándose en tres partes con el propósito de obtener un mayor número de elementos que ayuden a apreciar con más detalle la evolución del aprendizaje adquirido por los alumnos en la interpretación de cada una de las tres primeras derivadas sucesivas de una función.

Finalmente se presentan sugerencias y conclusiones del trabajo, así como dos anexos que muestran los problemas que constituyen las situaciones didácticas aplicadas tanto en el estudio preliminar como en la fase final.

CAPITULO I

ASPECTOS INICIALES DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

En el primer capítulo se presenta la naturaleza que da origen a nuestro problema de investigación, el cual forma parte de un proyecto colectivo dentro del grupo de investigación que desarrolla la línea: Pensamiento y Lenguaje Variacional. Se establecen cuales son los objetivos que se pretenden lograr, los cuáles están basados en las hipótesis de la investigación, así como algunas limitaciones que se pueden presentar durante el desarrollo de la investigación.

1.1 ANTECEDENTES

La Matemática Educativa es una disciplina que tuvo como origen la necesidad de mejorar la actividad tanto práctica como teórica que aparece vinculada a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Uno de los puntos de partida es la Matemática misma, pero aunque el conocimiento matemático es necesario, no es suficiente, porque la forma de conocimiento que se genera en la Matemática Educativa es diferente, esto es, el conocimiento se construye, transmite y adquiere mediante una continua interacción con el sistema educativo.

A pesar de que esta disciplina incursiona día con día en nuestro medio realizándose ya un gran número de investigaciones en todos los niveles escolares donde la Matemática forma parte del curriculum[1], en nuestro sistema educativo, los métodos de enseñanza así como los diseños del curriculum que se aplican en el área de Matemáticas, han y siguen siendo diseñados por profesores que con base en su experiencia, tanto en el salón de clase como en las concepciones que tienen de la estructura matemática, presentan estrategias que por lo regular van de lo simple a lo complejo con la finalidad de que el alumno asimile tales conocimientos, apoyándose en una didáctica tradicional en la cual es muy frecuente confundir la enseñanza con una exhibición de objetos, lo cual trae como consecuencia que el aprendizaje de las Matemáticas en los diferentes niveles sea un obstáculo para muchos estudiantes y al no poder trasponerlo, provoque en ellos el desaliento por esta área o incluso llegar al fracaso escolar.

Este tipo de problemas que se presentan en el medio en el cual laboro, me impulsó a incursionar dentro de la Matemática Educativa, ingresando primero al programa de maestría y ahora, desarrollando un proyecto de investigación con el cual pretendo contribuir a esclarecer la problemática constituida en el proceso de adquisición de saberes matemáticos en los

[1] La realización cada vez más frecuente de seminarios y congresos relacionados con la Matemática Educativa tanto estatales, nacionales como internacionales y la participación cada vez mayor de investigadores que presentan sus avances o reportes de investigación hacen evidente esta acción.

estudiantes, específicamente en la interpretación geométrica de las derivadas sucesivas de una función.

El estudio de la matemática es considerado fundamental en la formación de todo profesional, ya que la disciplina posee características intrínsecas cuyo dominio brinda a quien la estudia el desarrollo de áreas claves de su potencial humano, como son los aspectos cognitivo y afectivo; sin embargo, a pesar del valor social, cultural y educativo que se le atribuye a la matemática, no es satisfactorio el rendimiento académico que en ella exhiben los alumnos de bachillerato (nivel con el cual trabajo). Esto se debe, entre otros aspectos, a que los alumnos tienen dificultades para hacer abstracciones y establecer relaciones, presentan carencias significativas en el manejo de herramientas y operaciones básicas y elementales del cálculo matemático; predomina en ellos un proceso algebraico sobre el geométrico sin aparecer un tránsito entre ello, resuelven problemas en forma mecánica, etc.

Considero que con lo hasta aquí expuesto, se justifica la realización de investigaciones que aborden diversos aspectos para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje en el área de Matemáticas, específicamente en mi lugar de trabajo, el nivel medio superior de la Universidad Autónoma del Estado de México, institución que ha mostrado interés en tratar de aminorar este problema organizando cursos de didáctica, de actualización disciplinaria etc.; sin embargo, ahí poco se ha incursionado en la disciplina de la Matemática Educativa, ya que como menciona Cantoral (1995):

> *"La Matemática Educativa estudia los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar"*

En esta disciplina se proponen dos fines importantes:

- Describir y explicar los fenómenos inmersos en las relaciones entre enseñanza y aprendizaje.

- Afectar al sistema educativo en un sistema benéfico a través de la investigación.

Por esta razón, es importante que más docentes de esta institución se incorporen a este movimiento, ya que en un mediano plazo se empezarían a plasmar resultados positivos para aminorar esta problemática de la Enseñanza de las Matemáticas, porque así como yo, que tengo más de dieciséis años practicando la docencia, hay más profesores que están preocupados por resolver este problema y lo que hace falta aquí, es alguien que desde la perspectiva de la Matemática Educativa guíe las acciones de investigación tendientes a estudiar como es que los alumnos se apropian del conocimiento matemático.

Ahora bien, dentro de este nuevo proyecto de investigación que planteo, elegí un tema de Calculo Diferencial, con el cual se pretende abordar el estudio de la interpretación geométrica de las derivadas sucesivas de una función desde una perspectiva diferente a la que abordan los libros de texto, forma que ha sido reproducida en el aula por los docentes que la enseñan, ocasionando que en el alumno no se logre una estabilización del concepto de derivada. Esta nueva forma de abordar las derivadas de orden superior es viéndolas precisamente como una sucesión, no como una iteración que ha sido la forma tradicional de presentarla.

1.2 DEFINICION DEL PROBLEMA

Por ser el Cálculo tanto en el nivel medio superior como en el superior donde se presentan los problemas más fuertes en el área de Matemáticas, se realizan un gran numero de investigaciones para detectar, primero, las dificultades que los alumnos muestran al estudiar el cálculo (Steen, 1988) y de esta manera implementar acciones dentro del aula que ayuden a disminuir este problema, a este respecto. Algunas investigaciones muestran que se puede enseñar a los estudiantes de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y primitivas, encontrándose grandes dificultades para lograr una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento de esta parte de las Matemáticas.

Lo anterior genera la problemática de que las matemáticas no se están enseñando mediante actividades que produzcan aprendizajes significativos en los alumnos, repercutiendo, como se ha mencionado, en bajos índices de aprobación por lo que se deben implementar acciones dentro del aula, que ayuden a disminuir este problema.

Por tal motivo establecemos como problema de investigación: el estudio de la noción de derivada mediante la interpretación geométrica de las derivadas sucesivas de una función.

1.3 JUSTIFICACIÓN

La importancia del presente trabajo de investigación radica principalmente en dejar presente en el estudiante la noción de derivada de una función, tema que dentro del Cálculo tiene una gran importancia, como señala Swokowski en su libro de texto:

> *"La derivada de una función, es uno de los instrumentos más poderosos de las Matemáticas y las ciencias aplicadas"*

Específicamente con el estudio realizado, se pretende fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de este tema tan importante del Cálculo, así como dejar planteadas con base en los resultados que se obtengan, propuestas de interés para la investigación, tanto para mí cómo para cualquier otro docente que pretenda incursionar en este campo de la investigación, o bien para ser desarrollado por colegas como trabajo de tesis.

Como se mencionó, también con el presente estudio, pretendo en la institución donde trabajo, iniciar una nueva etapa en la cual se inicie el desarrollo de proyectos de investigación en Matemática Educativa dirigidos al nivel medio superior, de tal manera que en corto plazo, se tenga ya un equipo de trabajo formado por varios docentes de la misma institución en las cuales se trabaje en varias líneas de investigación.

Con respecto al proyecto de investigación, se pretende que al concluirlo, se tenga como resultado el diseño de una propuesta didáctica que pueda implementarse en el aula para fortalecer el concepto que en la forma tradicional el alumno adquirió sobre la derivada, y posteriormente incorporar esta nueva forma de abordar las derivadas sucesivas de una función al sistema educativo correspondiente, mostrando con esto la utilidad del proyecto.

1.4 OBJETIVO

Algunas investigaciones al respecto (Cantoral 1988, Dolores 1996) muestran las dificultades que tienen los alumnos en la construcción del concepto de derivada geométricamente. Por otro lado, Dreyfus encontró que los estudiantes no coinciben a la derivada como una aproximación (Dreyfus, 1990), forma en que es presentada la derivada geométricamente en los libros de texto, y que los procesos de aproximación se olvidan inmediatamente después de trabajar a la derivada algebraicamente. Además, cuando los estudiantes se encuentran ante problemas matemáticos en donde está involucrada la derivada, no son capaces de reconocerla; lo mismo ocurre con las derivadas sucesivas.

En otra investigación realizada (Reséndiz, 1997), muestra que no se puede establecer un paso de la segunda a la tercera derivada, esto es, en un escenario de clase, un profesor no caracteriza los cambios más allá del orden dos. En caso de que el problema lo requiera, cuando se habla de la primera o segunda derivada, se hace una analogía con la física: velocidad, aceleración; o con la matemática: pendiente, concavidad. Para problemas que requieren de la tercera derivada, el trabajo se reduce sólo al manejo simbólico.

Al parecer, según el estudio, el medio didáctico no nos provee de los elementos básicos para expresar variaciones más allá de orden dos, por lo que debemos buscar algo más que vaya rompiendo con cierto tipo de obstrucciones cognitivas para apropiarse de este nuevo conocimiento.

Así, establecemos como objetivo general de nuestra investigación:

- Interpretar geométricamente las derivadas sucesivas de una función, y como objetivos particulares:

- Conocer la interpretación geométrica de las derivadas en alumnos que no han cursado Cálculo, y

- Utilizar la tecnología como apoyo para la interpretación geométrica de la derivada de una función.

Para lograr estos objetivos se ha diseñado y aplicado una Situación Didáctica en la cual, a partir de la regla de correspondencia de una función polinomial, tabulando, el alumno construirá su gráfica y a partir de la tabulación, calculará las primeras, segundas y terceras diferencias de sus ordenadas, determinará como es su signo y lo interpretará en la gráfica de la función.

Se pretende que el alumno pueda interpretar geométricamente las derivadas sucesivas de una función en forma independiente, esto es, sin recurrir a la iteración, con lo cual quedará presente en él la noción de derivada y su significado geométrico.

1.5 HIPÓTESIS

Para el desarrollo de la investigación, partimos de las hipótesis siguientes:

a) La noción de derivada se llega a estabilizar en el pensamiento de los alumnos cuando se adquiere la comprensión de las derivadas sucesivas.

b) Los alumnos entenderán mejor los conceptos del Cálculo Diferencial cuando puedan desarrollar estrategias variacionales propias de su pensamiento y de su representación.

1.6 LIMITACIONES

La investigación se realizó con estudiantes de bachillerato de la Universidad Autónoma del Estado de México, los cuales en el momento de la aplicación de la Situación Didáctica, no conocían el concepto de derivada, motivo por el cual hace aún más interesante el presente estudio, porque al realizar el análisis correspondiente, se podrá ver hasta dónde fue capaz el alumno de construir un concepto nuevo para él, a través de interactuar con la Situación Didáctica, que consiste en darle significado geométrico a las derivadas sucesivas de una función; sin embargo, limitamos el estudio sólo a la interpretación geométrica de hasta la tercera derivada, lo cual deja abierta la posibilidad de realizar nuevos diseños que consideren a la cuarta y demás derivadas.

1.7 RESUMEN

De manera general, se ha presentado en qué consiste nuestro trabajo de investigación, para el cual se diseñó e implemento una Situación Didáctica con la finalidad de interpretar geométricamente las derivadas sucesivas de una función, se describen cuales son los motivos que nos llevaron a realizar la investigación, así como los antecedentes que se tienen al respecto en mi lugar de trabajo, se definió el problema de estudio, así como la razón por la cual éste problema es importante dentro del sistema educativo, a quien va dirigido, además de cuáles son los objetivos que se pretenden lograr con la investigación y cuáles son los supuestos de los que partimos. Por último se presentan algunas limitaciones de nuestro trabajo de investigación.

CAPÍTULO II

TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

En el presente capítulo, se describe el marco teórico con el cual se fundamenta nuestra investigación, el cual corresponde a la Teoría de Situaciones Didácticas desarrollada por el francés Guy Brousseau, se describe el contexto en donde se realiza el trabajo y la revisión crítica de otras investigaciones realizadas al respecto, así como las características básicas que se deben considerar para el diseño de una Situación Didáctica. Se finaliza presentando la importancia que tiene la enseñanza de las Matemáticas en la sociedad.

2.1 ANTECEDENTES

Las ideas básicas del cálculo y específicamente el concepto de la derivada de una función, se encuentra escondido bajo una capa de formalismo, originando en el estudiante la posibilidad de apoyarse en una noción auténtica del concepto de derivada, por esta razón, se han y siguen realizando investigaciones en las cuales la derivada es el objeto de estudio[1], sin embargo, dentro de la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional (P&LV) en la cual nos encontramos trabajando, se pretende cambiar la noción que el estudiante tiene con respecto a la derivada a través de interpretar geométricamente las derivadas sucesivas de una función.

A pesar de que el concepto de derivada lleva varios años siendo objeto de estudio, la forma en la cual nuestro grupo de trabajo la ha abordado, hasta la fecha es única, siendo la principal diferencia con respecto a los estudios realizados sobre las derivadas sucesivas que, en ellos predomina el concepto de iteración, esto es, la derivada de una función resulta otra función, la cual se puede volver y volver a derivar, obstaculizando que en el alumno se tenga un significado de la derivada de una función.

Con este estudio, se pretende fijar en el alumno el concepto de sucesión, tomando como base la forma en la cual los alumnos pueden interpretar y representar la variación, es decir, los cambios. Más adelante se explica cómo es que a través de estos cambios, a partir de una comparación de ordenadas se le da un significado geométrico a la primera derivada, comparando las pendientes de las rectas tangentes a la curva, se le da un significado geométrico a la segunda derivada y así sucesivamente, con lo cual se pretende fijar en el alumno la noción de derivada mediante la

[1] En la XIII reunión del Clame 1999, se presentaron un gran número de reportes de investigación en los cuales la derivada fue objeto de estudio y sólo uno correspondió a la parte que nosotros estamos abordando. El reporte fue presentado por el M en C Rigoberto González con el tema: la derivada como una organización de las derivadas sucesivas.

interpretación geométrica de las derivadas sucesivas de la función, esto es, si el alumno es capaz de interpretar geométricamente una derivada sucesiva, entonces la primera derivada forma parte del saber del alumno.

Un trabajo de investigación que se ha elaborado al respecto, corresponde al realizado por Rigoberto González para obtener el grado de Maestro en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa en 1999, en el cual diseñó una Situación Didáctica y la aplicó a un grupo de profesores inscritos en el programa de maestría en la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Uno de los objetivos de la investigación fue interpretar geométricamente la tercera derivada en un punto localizado en una parte de la gráfica de una cierta función, en las conclusiones de la tesis señala lo siguiente: (González, 1999)

- *"Los problemas referidos a tercera derivada no pueden resolverse aún en grupo.*

- *Aunque en nuestro diseño sólo planteamos un problema referido a tercera derivada, consideramos que no coordinan los aspectos de cambio propios de la derivada"*

Más adelante señala:

> *"En un pedazo de gráfica no se percibe el cambio de la función como en aspectos globales de las funciones*
>
> *Cuando se plantea solo una parte de la gráfica, ellos no conciben posibles formas de la primera derivada; sin embargo, cuando se les plantean formas globales, pueden utilizar el recurso de proponer una posible gráfica para la primera derivada y para la segunda derivada"*

Considero que en el diseño de la situación, se pudo haber previsto este caso, ya que como se muestra en las conclusiones, no es fácil darle un significado geométrico a la tercera derivada, entonces se debió haber incluido dentro de la situación, un caso en el cual se considerara a la gráfica en forma global.

Por otro lado, un grupo de alumnos de la maestría, paralelamente al trabajo de González, realizó una investigación para obtener el grado de Especialidad en Matemática Educativa, obteniendo como resultado la elaboración, presentación y defensa de una tesina (Peña, Chimal y Contreras, 1998), aquí aplicamos la misma Situación Didáctica a un grupo de alumnos de bachillerato de la Universidad Autónoma del Estado de México, encontrando que la mayoría de los alumnos cayeron en el teorema factual siguiente:

Si $a > 0$ entonces $f(a)>0, f'(á)>0, f''(a) > 0$, etcétera.

Consideramos que la presencia de este teorema factual, se debió principalmente a que los alumnos desarrollan en sus cursos un manejo predominantemente algebraico en el cálculo de derivadas y no logran transitar entre lo algebraico y lo geométrico, de tal manera que al trabajar las derivadas en forma geométrica, los alumnos no aplicaron los conocimientos que en ese momento tenían con respecto a la derivada.

Después de aplicar las fases de acción, formulación, validación e institucionalización, se logró superar este conflicto que nosotros consideramos epistemológico; este mismo resultado también se observa en la tesis de maestría (González, 1999). Una diferencia es, que mientras que todos los alumnos de bachillerato cayeron en el teorema factual, con el grupo de profesores sólo algunos cayeron en él, pero hasta la segunda o tercera derivada, siendo la más común que si $a>0$ entonces la tercera derivada en ese punto también es positiva.

Con respecto a la interpretación de la tercera derivada, señalamos en las conclusiones de la tesina lo siguiente (Peña, Chimal y Contreras, 1998):

> *"Debido a la secuencia de la situación, los alumnos tienen el significado algebraico de la tercera derivada, incluso para fundamentar sus respuestas, proponen funciones y las derivan tres veces; sin embargo, en la discusión grupal una vez que habían entendido el significado geométrico de la primera y segunda derivada, no pudieron dar un significado para la tercera derivada"*

De estos dos trabajos de investigación realizados con la finalidad de interpretar geométricamente las derivadas sucesivas de una función, específicamente la tercera derivada, se deduce que el haber considerado en el diseño de la Situación Didáctica sólo una parte de la gráfica, fue determinante para que tanto alumnos como profesores no pudieran realizar correctamente la interpretación geométrica, razón por la cual, en ésta segunda parte de la investigación, se realiza el diseño de una nueva Situación Didáctica en la cual se ha considerado la representación gráfica de una función en todo su dominio, esto es la gráfica completa o en forma global como se interpreta en González, 1999.

Además de nosotros, tres equipos de trabajo de la especialidad, implementaron la misma Situación Didáctica con alumnos del nivel superior que cursan carreras de Ingeniería en el Instituto Tecnológico de Toluca, y la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, obteniendo de manera general resultados similares, esto es, presencia de teoremas factuales, predominio de lo algebraico sobre lo geométrico, problemas en interpretar sólo la parte de una granea, etc. Tampoco lograron que los alumnos pudieran dar la interpretación geométrica de la tercera derivada.

En esta segunda parte del proyecto, una diferencia importante que tendrá la implementación de la Situación Didáctica con respecto a las anteriores, es que ahora el grupo de alumnos que participan en la fase experimental no conoce aún el concepto de derivada de una función, por lo cual la Situación Didáctica se ha diseñado de manera tal, que el alumno por si solo vaya construyendo su propio conocimiento, para que al final de la Situación Didáctica se confronten los avances logrados con el análisis a priori correspondiente.

2.2 TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

El presente trabajo de investigación correspondiente a interpretar geométricamente las derivadas sucesivas de una función, está dentro de una perspectiva teórica que propone el desarrollo de una rama del conocimiento, designada como Didáctica de las Matemáticas, la cual da origen a implementar actividades relacionadas con la construcción del conocimiento. Una de estas actividades a implementar, es la Teoría de Situaciones Didácticas basadas en los trabajos de Guy Brousseau, con la cual se pretende afectar en forma benéfica al sistema educativo.

Su origen se le atribuye a los matemáticos de los Institutos de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM) creados en Francia luego de la reforma educativa a fines de los años 60's, con la cual se implantó la enseñanza de la Matemática Moderna.

En un principio, se dedicaron a terminar la formación matemática de los maestros que estaban en servicio y capacitando a los nuevos, así como la implementación de nuevos planes y programas de estudio; otra actividad importante fue la producción de materiales de apoyo para los maestros en el aula, especialmente textos de matemáticas, fichas de trabajo para los alumnos, juegos y juguetes didácticos, etc.

Posteriormente fue surgiendo otra clase de actividades relacionadas con la producción del conocimiento para controlar y producir acciones sobre la enseñanza, planteándose la investigación científica de los procesos que tienen lugar en el dominio de la enseñanza de las Matemáticas, destacándose los trabajos de Guy Brousseau, quien considera de vital importancia que el análisis de la Didáctica sea a priori para que al final de la situación, se puedan comparar los resultados obtenidos con los esperados.

Esto es, la investigación de los fenómenos relativos a la enseñanza de las Matemáticas, no se pueden reducir a la observación y análisis de los procesos que cotidianamente se presentan en el aula, puesto que su objetivo es la determinación de las condiciones en las que se produce la apropiación del saber por parte de los alumnos, y para esto se necesita ejercer cierto grado de control sobre ellas, lo que implica que el investigador debe participar en la producción o diseño de las Situaciones Didácticas que analiza.

La Teoría de las Situaciones se desarrolla con la intención de abordar el estudio de los problemas de la enseñanza por los contenidos, como lo testifica la conclusión expuesta en LEEDS en julio de 1977.

> *"De hecho el problema más importante parece ser el de encontrar las condiciones didácticas de aprendizaje, las características*

> *informativas de los conceptos enfocados y no tanto de encontrar los modelos generales y simplificados que finalmente funcionan sólo de manera ideal"*

De aquí la necesidad de desarrollar una Ingeniería Didáctica como una línea de investigación en Didáctica de las Matemáticas, donde el objeto de estudio de la Didáctica de las Matemáticas, es la Situación Didáctica, definida por Brousseau (1982) como:

> *"Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de construcción"*

Estas relaciones se establecen a través de una negociación entre maestros y alumnos cuyo resultado ha sido designado como contrato didáctico. Este contrato, con componentes explícitos e implícitos, define las reglas de funcionamiento dentro de la situación: distribución de responsabilidades, asignación de plazos temporales a diferentes actividades, permiso o prohibición del uso de determinados recursos de acción, etcétera.

La presencia de un contexto escolar no es esencial en la definición de una Situación Didáctica; lo que sí es esencial es su carácter intencional, el haber sido construida con el propósito explícito de que alguien aprenda algo.

El objetivo fundamental de la Didáctica de las Matemáticas es averiguar como funcionan las Situaciones Didácticas, es decir, cuáles de las características de cada situación, resultan determinantes para la evolución del comportamiento de los alumnos y subsecuentemente, de sus conocimientos.

Las Situaciones Didácticas son entonces el objeto de estudio de la Didáctica de las Matemáticas, donde ha sido necesario desarrollar una metodología para diseñarlas y analizarlas. Es frecuente que los investigadores que han llegado a la experimentación educativa con la formación previa en psicología, diseñen Situaciones Didácticas, las pongan a prueba en una o varias aulas, y luego centren su interés en los comportamientos manifestados por los alumnos; dentro de la situación experimental, no intentan explicar estos comportamientos o su evolución, en función de las características particulares de la situación en la que se produjeron, ignoran si variando algunas de las condiciones de la situación, volverían a aparecer los mismos comportamientos.

El investigador en didáctica debe ser capaz de prever los efectos de la situación que ha elaborado, antes de ponerla a prueba en el aula; sólo posteriormente podrá constatar sus previsiones con los comportamientos observados. Para las Situaciones Didácticas que nosotros estamos diseñando y que más tarde se van a aplicar al grupo de alumnos, hemos considerado las posibles respuestas por parte de ellos, de esta forma podremos realizar un análisis de los comportamientos que nosotros ya esperábamos y los que surjan en la aplicación de las mismas.

Si bien, las teorías de las situaciones se orientan cada vez más hacia la Didáctica básica, su finalidad permite la organización y control de los fines de la enseñanza, que nos llevan a la identificación de aspectos importantes para su análisis, para con esto no limitarnos a la observación y comparación de prácticas como las que actualmente se vienen dando en la enseñanza tradicional.

Otro aspecto relevante que se considera para la instrumentación y análisis de las Situaciones Didácticas, es su organización, la cual consta de cuatro fases:

- Las situaciones de *acción*, en las que se genera una interacción entre los alumnos y la Situación Didáctica, los alumnos son quienes deben de tomar las decisiones necesarias para organizar la actividad de resolución con el problema planteado.

- Las situaciones de *formulación*, cuyo objetivo es la comunicación de saberes adquiridos entre los alumnos, en donde adecuan el lenguaje que utilizan cotidianamente a la información que deben comunicarse.

- Las situaciones de *validación*, tratan de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de lo que se está diciendo.

- La situación de *institucionalización*, destinada a establecer condiciones sociales, es donde se presenta la intervención del que más sabe, que en este caso es el maestro, convenciendo a todos de lo que trata la situación, en caso de presentarse algún error, es quien lo corrige.

En las Situaciones Didácticas, el profesor intenta hacer saber al alumno lo que él quiere que haga. Ya que el único medio de hacer Matemáticas, es buscar y resolver ciertos problemas específicos y a ese respecto plantear nuevas interrogantes. El maestro debe pues efectuar no la comunicación de un conocimiento, sino la transmisión del problema correcto buscando que el alumno pueda por si solo, construir el conocimiento mediante la superación de obstáculos que la misma Situación Didáctica contempla, esto es, cuando el alumno logra superar el conflicto, es porque en él se ha presentado un nuevo conocimiento.

Para el desarrollo de la Teoría de Situaciones Didácticas, Guy Brousseau plantea que saber Matemáticas, no se reduce a la aplicación de teoremas y definiciones, sino más bien a formular una situación en un sentido amplio donde se pretende que el educando entre en conflicto y logre superarlo provocando con esto la construcción de un nuevo saber matemático.

En ésta investigación se ha diseñado una Situación Didáctica (ver anexo No. 2), basada en la teoría presentada, en donde se provoca que exista un conflicto en el estudiante, el cual debe ser superado por el mismo y con esto, construir y apropiarse de un nuevo conocimiento. El grupo de alumnos a los cuales se les aplicará la Situación Didáctica, son alumnos de tercer y quinto semestre de bachillerato, los cuales no han tomado ningún curso de Cálculo, la situación se ha diseñado de tal manera que a partir del cálculo de las diferencias de las ordenadas de una función lineal, el alumno en primera instancia logre darle una interpretación geométrica al signo obtenido y lo vincule con el crecimiento o decrecimiento de la función, lo cual equivale a la interpretación de la primera derivada. Posteriormente se pide el cálculo e interpretación de las segundas diferencias, con lo cual el alumno cae en el conflicto, ya que al realizarlo con funciones lineales donde su pendiente es positiva para una y negativa para otra, entonces las segundas diferencias resultan cero.

Para que el alumno salga del conflicto, se formula el siguiente problema en el cual a partir de una función cuadrática el alumno le dará significado geométrico a las segundas diferencias, logrando con esto la interpretación geométrica de la segunda derivada; después, a partir de una función cúbica se pide al estudiante interpretar el significado geométrico de la tercera derivada y finalmente para una cierta función se pide interpretar estas tres derivadas sucesivas.

Para la aplicación de la Situación Didáctica, se llevaron a cabo las cuatro fases, esto es, las etapas de acción, formulación, validación e institucionalización.

La relevancia de esta Situación Didáctica, radica en el hecho de tratar que el alumno construya un conocimiento que antes de aplicar la situación él desconoce, debido a que aún no ha llevado cursos de Cálculo. Con los resultados obtenidos se pretende incursionar este modelo en los alumnos de bachillerato cuando tengan su primer acercamiento con las derivadas.

Es importante mencionar que para el diseño e implementación de una buena Situación Didáctica, el profesor tiene que hacer saber al alumno lo que él quiere que haga y si el alumno entra en el juego y termina por ganarlo, el aprendizaje se logra. En el diseño de la Situación Didáctica a implementar, como se ha mencionado, se busca que a partir de la interpretación geométrica de la primera y segunda derivada, el alumno logre darle significado geométrico a la tercera derivada y aunque en la Situación Didáctica no se consideró, es posible intentarlo con la cuarta, quinta, etc. derivadas, logrando con esta sucesión de interpretaciones geométricas una noción del concepto de derivada en el alumno.

Se ha descrito brevemente en qué consiste la Situación Didáctica que se ha diseñado y la importancia que estriba en diseñar una buena situación; sin embargo, es conveniente señalar algunas características básicas que se deben considerar para el diseño de una Situación Didáctica.

- ✓ Debe ser comunicable, pero sin utilizar el conocimiento que se quiere que el alumno adquiera.
- ✓ Deben darle al alumno el control sobre la construcción de su conocimiento.

- ✓ Deben considerar los conocimientos previos de los alumnos.

- ✓ Se debe provocar un desequilibrio entre dos estados de aprendizaje que permita que el conocimiento del estudiante evolucione hacia uno nuevo.

- ✓ Se deben prever los obstáculos que el estudiante va a tener y la forma en que los van a superar.

- ✓ El investigador debe tener claro cuál es el saber del que el estudiante debe apropiarse.

- ✓ Se debe considerar que el diseño de una situación no siempre resulta exitoso.

- ✓ Es importante considerar variantes de la misma situación con la finalidad de detectar problemas de aprendizaje no previstos.

- ✓ Se debe considerar una predicción de los posibles efectos de aprendizaje que la situación puede producir en los estudiantes, esto es el análisis a priori.

También en el diseño de las Situaciones Didácticas, se debe considerar que favorezcan las cuatro fases de la organización didáctica, esto es:

? Deben favorecer la acción. Es aquí donde debe haber una gran interacción entre el alumno y la situación, de tal manera que el estudiante pueda tomar sus propias decisiones para realizar sus elecciones pertinentes.

? Deben favorecer la formulación. Los alumnos deben ser capaces de intercambiar información con un pequeño grupo, esto es deben comunicar lo que obtuvieron en la etapa de acción.

? Deben ayudar a la validación. En el pequeño grupo, los estudiantes deben llegar a un consenso planteando una solución general al problema planteado.

? Deben favorecer la institucionalización. Aunque esta última fase es muy difícil de lograrse por parte del grupo sin la ayuda del profesor, la situación debe considerar que el grupo de alumnos establezcan por si solos un consenso general reduciendo al mínimo la intervención del profesor.

2.3 SITUACIONES VARIACIONALES

La Situación Didáctica que se aplicó al grupo de alumnos con la finalidad de interpretar geométricamente las derivadas sucesivas de una función, se ha diseñado de tal manera que el alumno tenga presente la idea de variación en todo momento, con lo cual nuestro estudio, pretende además extenderse a las situaciones variacionales, consideradas por Cantoral como: (Cantoral, 1997)

> *"Se entiende por situación variacional al conjunto de problemas que requieren un tratamiento variacional tanto desde el punto de vista de las funciones cognitivas de quienes la aborden, cómo desde la perspectiva matemática y epistemológica"*

Una situación variacional, está vinculada con el cambio, existen muchas cosas a nuestro alrededor que están cambiando constantemente, la forma de nuestros cuerpos, el movimiento del mar, la tormenta, la temperatura de algunos materiales, la economía, el movimiento de electrones a través de un conductor, el fluido del aceite a través de un motor, en fin, podríamos citar infinidad de procesos en los cuales está implicado el cambio. Por eso decimos que el cambio primero se siente y luego se percibe apropiándose de lo real y finalmente se concibe, se recrea en un mundo de objetos abstractos en los que adquiere sentido sólo a través de otros objetos y de sus relaciones, por lo cual partiremos de una premisa básica: **"en la naturaleza, lo único constante es el cambio"**, esto es, hay un sin número de situaciones de cambio que escenifican nuestra cotidianidad. Este cambio como parte de la realidad es independiente de la conciencia, pero sólo a través de ella es que lo hacemos parte de nuestro conocimiento.

Este cambio que caracteriza a la naturaleza, ha interesado a grandes personajes[2] durante distintas épocas y bajo diversos programas de investigación. Ahora la noción de cambio, da lugar al concepto de variación, describiendo las cualidades del cambio y proporcionando elementos para saber cómo es que cambia eso que cambia. En este sentido la variación trata de la medida de los cambios.

En este sentido, se consideran como estrategias variacionales: la estimación, la comparación, la aproximación, la predicción, la acotación, etc. enseguida se desarrolla la estrategia de comparación correspondiente a la actividad cognitiva que desarrollaran los alumnos; para lo cual se utilizará una gráfica para analizar la variación de cada una de las derivadas sucesivas de una función.

---

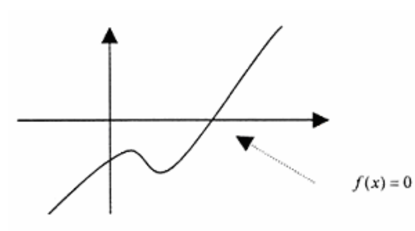
[1] En la literatura científica, puede encontrarse que Newton, Euler, Clairaut, Feynman, Maxwell. Aristóteles. Galileo, Laplace, Einstein, etc., trataron sistemáticamente con las situaciones de cambio.

Para el análisis variacional, se cons ideran cuatro casos:

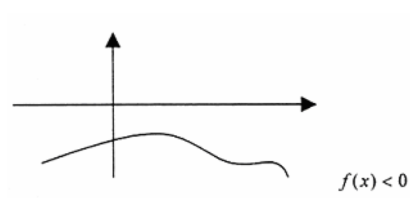
a) ¿Qué condición se debe cumplir para que una función sea positiva, negativa o nula? Es decir; ¿Cuándo $f(x)<0$, f (x)>0 o $f(x)=0$?

La comparación se realiza tomando como referencia el eje x, así:

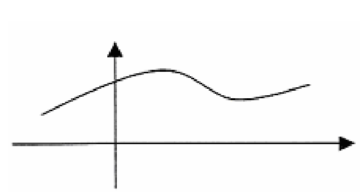
? $f(x) = 0$ Si la gráfica se encuentra en el eje x.



? $f(x) <$ O Si la gráfica se encuentra por debajo del eje x.



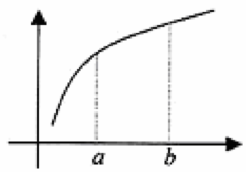
? $f(x) <$ O Si la gráfica se encuentra por arriba del eje x.



b) ¿Qué condición se debe cumplir para que la derivada de una función sea positiva, negativa o nula? Es decir; ¿Cuándo $f'(x)<0$, $f'(x)>0$ o $f'(x) = 0$?

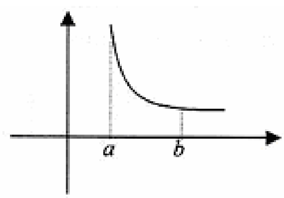
Una interpretación geométrica de la primera derivada usada en la investigación corresponde al crecimiento o decrecimiento de la función, así:

? $f'(x) > 0$ Si el cambio de posición es positivo



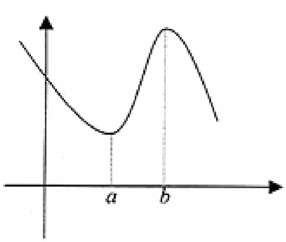
$f(b) - f(a) > 0$

? $f'\{x) < 0$ Si el cambio de posición es negativo.



$f(b) - f(a) < 0$

? $f'(x) = 0$ Cuando se presenta un cambio de creciente a decreciente o viceversa.

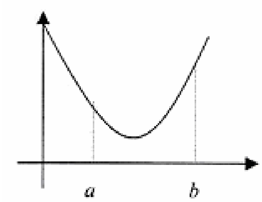


$f'(a) = f'(b) = 0$

c) ¿Qué condición se debe cumplir para que la segunda derivada de una función sea positiva, negativa o nula? Es decir; ¿Cuándo *f''(x)<0, f''(x)>0 o f''(x)=0* ?

En este caso la comparación se realiza con las primeras diferencias de las ordenadas, la interpretación geométrica de la segunda derivada corresponde al tipo de concavidad que presenta la curva, se tiene:

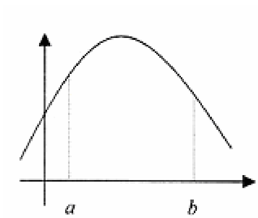
? $f''(x) > 0$ Si el cambio de las primeras diferencias es positivo, en este caso se tiene una concavidad positiva.



$$f'(b) - f'(a) > 0$$

$$(+) - (-) > 0$$

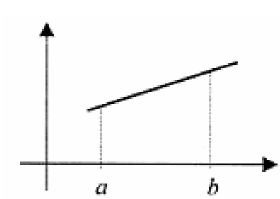
? $f''(x) < 0$ Si el cambio de las primeras diferencias es negativo, en este caso se tiene una concavidad negativa.



$$f'(b) - f'(a) < 0$$

$$(-) - (+) < 0$$

? $f''(x) = 0$ Si el cambio de las primeras diferencias es nulo, en este caso no se tiene concavidad en la gráfica de la función.

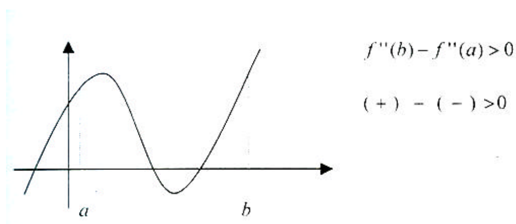


$$f'(b) - f'(a) = 0$$

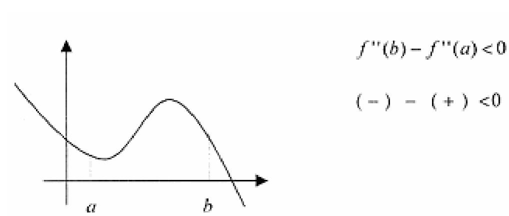
d) ¿Qué condición se debe cumplir para que la tercera derivada de una función sea positiva, negativa o nula? Es decir; ¿Cuándo *f'''(x)<0, f'''(x)>0, f'''(x)=0* ?

En este caso la comparación se realiza con las segundas diferencias de las ordenadas, resultando:

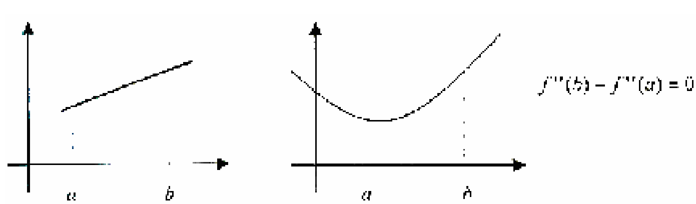
? *f'''(x)>0* Si el cambio de las segundas diferencias es positivo, una posible gráfica es la siguiente:



? *f'''(x)<0* Si el cambio de las segundas diferencias es negativo.



? *f'''(x)=0* Si el cambio de las segundas diferencias es nulo.



2.4 ACERCAMIENTO SOCIOLÓGICO

En general, la enseñanza y el aprendizaje constituyen una práctica humana y social, involucran tres factores esenciales: maestro, alumno y saber, donde estos factores se interrelacionan entre sí a través de un contrato didáctico, que al igual que en un contrato social, cada parte tiene obligaciones específicas y todos a su vez tienen un objetivo común: que el estudiante se apropie del conocimiento para afectar positivamente el medio social. Por esta razón los trabajos que se desarrollan dentro de la Matemática Educativa son adaptados al medio social con que el estudiante tiene relación directa, para que su desarrollo esté ligado estrechamente con su entorno.

Se pretende estudiar un problema social muy conocido por todos, qué es la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, ya que los alumnos cuando son niños y sobre todo cuando ingresan al sistema escolar, muestran una afición natural y espontánea por diversos temas de las Matemáticas, pero a medida que avanzan en el sistema educativo, en muchos de ellos inicia un rechazo hacia esta disciplina, provocando muchas veces no sólo un estancamiento en su aprendizaje, sino un retroceso en el proceso mismo de aprender, ocasionando incluso que más adelante los jóvenes eludan las carreras profesionales que incluyen Matemáticas en sus planes de estudios. Por eso, es importante rediseñar el discurso matemático escolar en todos los niveles educativos, no sólo para lograr que el alumno se apropie del conocimiento, sino para explotar esa afición que el alumno tiene o tuvo algún día por las Matemáticas.

En el afán de aminorar este problema, se desarrolla la Didáctica para el estudio de las actividades relativas a un proyecto social, que pretende adecuar al alumno a un saber constituido o en vías de construcción; estas actividades consisten esencialmente en un control de las relaciones del alumno con su entorno inmediato, éstas no podrían ser concebidas sin la intervención de un conocimiento específico y sin salirse del dominio de éste, se trata de describir las interacciones de los tres factores que intervienen en el proceso: el maestro, el alumno y el saber.

De estas interacciones, las básicas son aquellas donde interacciona el alumno con el medio, los conocimientos existen en la medida que representan una solución óptima y logra estabilizar las relaciones del alumno con su entorno y particularmente las opciones creadas por diversos mecanismos de retroalimentación, como las Situaciones Didácticas.

La implementación de las Situaciones Didácticas, se apoya en un principio: promover el aprendizaje del conocimiento en el alumno mediante la aplicación de estrategias acordes a las condiciones particulares del nivel educativo, ya que los métodos actuales no son funcionales del todo. Al ser esta una actividad nueva, se espera, pueda impactar favorablemente en la sociedad. Una de sus metas será favorecer los cambios en el medio social en forma positiva, y se espera que con este tipo de estrategias e investigaciones en el campo de la didáctica, la actitud del alumno se vea modificada al mostrar interés por la adquisición de nuevos conocimientos, motivándolo a asumir una postura diferente hacia el área de las matemáticas que le permita un mejor desarrollo en la aplicación de conceptos.

Las situaciones que se plantean, están acordes con la teoría de Ingeniería Didáctica que se precisa en la explicación de las nociones de las variables didácticas. Con este papel del maestro, deberá empezar a ser tomado en cuenta identificando un cierto número de fenómenos del contrato didáctico, las ideas de institucionalización y de innovación en relación con los nuevos conceptos, las nociones del medio y de situaciones que van a formalizarse y a diversificarse.

De acuerdo al contrato didáctico, es el profesor quien representa a la sociedad y por lo tanto, su papel es fundamental en el diseño y aplicación de las Situaciones Didácticas, lo cual lo lleva al estarse capacitando continuamente, porque, la nueva corriente en la enseñanza de las Matemáticas, modifica la forma tradicionalista de impartición de clases, modificando así la actitud del profesor para adaptarse a las nuevas exigencias que demandará la enseñanza de las Matemáticas del tercer milenio.

2.5 RESUMEN

Se ha presentado la Teoría de Situaciones Didácticas como sustento del marco teórico de nuestra investigación, cómo se fundamenta y fórmula esta teoría, así como sus objetivos, además de la articulación existente entre el marco teórico y nuestro problema de investigación *"La interpretación geométrica de las derivadas sucesivas de una función"*.

También se describieron los antecedentes que se han realizado con respecto al tema en estudio, en la cual se destaca que se realizó una investigación previa en la cual se diseñó y aplicó una Situación Didáctica a un grupo de alumnos y profesores, obteniéndose resultados poco favorables pero importantes para ahora poder diseñar una nueva Situación Didáctica en donde se busca, que el alumno logre darle significado geométrico a las derivadas sucesivas de una función a través del cálculo e interpretación de las diferencias sucesivas de sus ordenadas.

Se enuncian algunas características que deben tomarse en cuenta para el diseño de una Situación Didáctica y finalmente se muestran las situaciones variacionales que se pretenden obtener en esta investigación, así como la importancia que representa la Enseñanza de las Matemáticas en la sociedad.

CAPITULO III

EL MÉTODO APLICADO

Se describe ahora el método utilizado durante el desarrollo de la investigación, el cual está basado en la Ingeniería Didáctica como Metodología de Investigación y apoyado en la Teoría de Situaciones Didácticas. Se describe la forma en como se diseñó e implemento una Situación Didáctica a un grupo de alumnos de bachillerato y la forma en que serán analizados los datos obtenidos en la investigación.

3.1 ESTUDIOS ESPECÍFICOS SOBRE PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACONAL

Actualmente parece que la enseñanza está cada vez más al alcance de los estudiantes; sin embargo, no ha dejado de ser un problema, el sistema educativo acepta el hecho de que es imposible enseñar los conceptos del cálculo bajo su forma definitiva, razón por la cual es importante presentar una aproximación intuitiva para darle significado al cálculo a través de la selección de problemas y por medio de la puesta en práctica de técnicas de aproximación en este campo.

La terna, maestro alumno y saber en cualquier ambiente social se constituyen como el núcleo básico de análisis del sistema de enseñanza, por esto, durante los últimos años se han realizado trabajos cuya finalidad es identificar las dificultades y obstáculos que impiden el acceso a este campo conceptual, así como analizar los efectos de la enseñanza tradicional, formal y en esencia algebraica; sin embargo, poco se ha hecho por ubicar las potencialidades y límites de los enfoques intuitivos que el alumno puede desarrollar.

Ahora, nosotros practicamos un proceso experimental con un grupo de alumnos de bachillerato para analizar la concepción que tienen referente a la interpretación geométrica de las derivadas sucesivas de una función dentro de la línea de investigación en Matemática Educativa: *Pensamiento y Lenguaje Variacional*. Para el diseño de la situación implementada, se tuvo especial cuidado en considerar el aspecto cognitivo del estudiante, así como la intuición que el estudiante tiene antes de resolver un determinado problema.

3.2 INGENIERÍA DIDÁCTICA

El trabajo de investigación está basado en la Ingeniería Didáctica como una Metodología de Investigación usado en la Didáctica de las Matemáticas, como se ha mencionado, con la finalidad de afectar en un sentido benéfico al sistema educativo, en el que el sustento teórico proviene de la Teoría de las Situaciones Didácticas cuyo fundador es Guy Brousseau.

El término Ingeniería Didáctica surge, en el seno de la escuela francesa, a inicios de la década de los 80's en analogía al quehacer en ingeniería, en tanto que éste no sólo se realiza apoyándose en resultados científicos, involucra también una toma de decisiones y el control sobre las diversas componentes inherentes del proceso. Así la Ingeniería Didáctica se constituye como una metodología de investigación que le aplica tanto a los productos de enseñanza basados o derivadas de ella, pero también como una metodología de investigación para guiar las experimentaciones en clase. El sustento teórico proviene de la Teoría de la Transposición Didáctica y de la Teoría de las Situaciones Didácticas. De ambas se desprende la necesidad de dotar al estudio del fenómeno didáctico un acercamiento sistémico, con la primera se alcanza una dimensión global, en tanto que la segunda es de carácter local (Farfán, 1997).

En este sentido la preparación de Matemáticas para Estudiantes no es un proceso de elementarizar el conocimiento en cualquier sitio, ni adaptarlo a un conocimiento previo y habilidades cognitivas del estudiante; se le percibe como una tarea didáctica que requiere un mayor análisis global de carácter sistémico (Artigue, 1992).

Durante la investigación se implementaron las tres fases que señala la Ingeniería Didáctica. Enseguida se describe cómo se aplican cada una de estas fases en nuestro problema de estudio y en los capítulos siguientes se desarrollan estas tres fases.

1. *Análisis preliminar*. Aquí se contemplaron las tres componentes que señala la metodología, esto es, la didáctica, la epistemológica y la cognitiva, para lo cual se efectúo un trabajo previo con el grupo de alumnos, el cual consistió en el diseño (ver anexo No. 1) implementación y análisis de una Situación Didáctica , con la finalidad de fortalecer en el alumno el concepto de función, debido a que en la tesina de especialidad (Chimal, Contreras, Peña, 1998), se muestran algunas de las carencias que el alumno tiene con respecto al dominio geométrico de una función.

Con los resultados obtenidos en el análisis, se trabajó con el grupo de alumnos para fortalecer este dominio del tema, ya que tiene un papel determinante en el diseño de la segunda Situación Didáctica. Este trabajo se efectúo durante los meses de Junio, Julio y Agosto.

2. *Diseño de la situación*. En esta fase de la Ingeniería Didáctica, debido a que el grupo de alumnos, aún no han cursado la asignatura de Cálculo Diferencial, se diseñó una Situación Didáctica formada por trece problemas (ver anexo No. 2) buscando que el estudiante primero construyera y se apropiara del significado geométrico de la primera derivada y una vez logrado esto, en el siguiente problema se le hace caer en un conflicto. Con los siguientes problemas, se espera que el alumno supere ese conflicto y le dé significado a la segunda derivada; en el siguiente problema nuevamente se hace que el alumno entre en conflicto, de tal manera que al superarlo logre interpretar geométricamente la tercera derivada de una función.

De esta manera, nuestro problema de estudio pretende que el alumno logre dar una adecuada resignificación a la derivada, ya que la definición de la primera derivada presentada en los libros de texto y reproducida en el aula por los maestros, ha representado una seria construcción para su aprendizaje, esto es, la obstrucción radica en entender a la primera, a la segunda, a la tercera, etc. derivada sólo como una iteración. La resignificación a la cual nos referimos consiste en justamente cambiar esa obtención de las derivadas como una iteración por una sucesión, con lo cual el alumno no necesita de una derivada para poder interpretar la de orden superior siguiente, lográndose con esto una estabilización en la noción de derivada, esto es, se pretende implementar el siguiente cambio en la enseñanza cuando al alumno se le presente por primera ocasión la noción de derivada.

$$(((f)')')' \longrightarrow f,\ f',f'',f'''$$

Forma en la cual trabaja en los textos de Cálculo	cambio	Propuesta del proyecto

3. Puesta en escena y análisis de resultados. Una vez diseñada la Situación Didáctica, se procedió a su implementación y una vez recopilados los datos, se realizó el análisis de resultados en donde se efectúa una confrontación entre un análisis a priori y el análisis a posteriori.

Para la puesta en escena de la Situación Didáctica, se implementaron las cuatros etapas que contempla la teoría, esto es la acción, la formulación, la validación y la institucionalización.

Durante la *etapa de acción*, se trabajo en forma individual en una sala de cómputo, en donde cada uno de los doce alumnos utilizó una computadora, la cual utilizó para efectuar el trazo de las gráficas y calcular las diferencias de las ordenadas. Al final de la Situación Didáctica que se realizó en dos sesiones de dos horas con quince minutos cada una, el estudiante entregó un reporte escrito.

Durante la etapa de formulación, se formaron cuatro equipos de tres integrantes cada uno (se les asignó: equipos A, B, C y D) los cuales nuevamente trabajaron la misma Situación Didáctica, con la finalidad que realizaran ahora la discusión con base en las soluciones individuales que cada uno había obtenido en la etapa anterior, al final de la situación, cada equipo entregó un reporte escrito. En esta etapa, se grabaron las discusiones que los estudiantes realizaron durante el desarrollo de la Situación Didáctica, la cual sirvió de base para analizar como cada equipo fue construyendo su propio conocimiento y como algunos alumnos lograron superar lo realizado en la etapa de acción. Esta etapa se realizó en una sesión de tres horas de duración. En ésta etapa y en las dos siguientes, un alumno (Diego) por motivos personales, ya no pudo participar, por lo cual el equipo B, estuvo formado sólo por dos estudiantes.

En la *etapa de validación*, los estudiantes dejaren plasmadas sus conclusiones en el reporte escrito y en la grabación.

Finalmente en la etapa de institucionalización, se integró el grupo de alumnos y se les recordó cuál fue el objetivo de la Situación Didáctica, se les pidió que realizaran una discusión que los llevara a establecer una conclusión sobre el significado geométrico de la primera, segunda y tercera derivada de una función. En esta etapa se utilizó un pintarrón plumones y computadora. El trabajo realizado fue grabado y filmado con la finalidad de capturar todos bs registros y argumentos que los alumnos presentaron. La implementación de esta etapa tuvo duración de 1 hora.

3.3 SELECCIÓN Y CARACTERÍSTICAS DE LOS ALUMNOS

Para llevar a cabo la parte experimental del proyecto de investigación, era indispensable contar con la participación activa y entusiasta de un grupo de alumnos, los cuales debido a los objetivos que se establecieron, este grupo debía tener las siguientes características:

? Ser estudiantes de bachillerato, y
? No haber cursado la asignatura de Cálculo.

Realmente no fue difícil encontrar un grupo de alumnos que cumplieran con estas características, ya que desde el mes de Enero del presente año, venía trabajando un Taller de Matemáticas en la Escuela Preparatoria Ignacio Ramírez de la Universidad Autónoma del Estado de México con la finalidad de entrenar para la participación en la Olimpiada de Matemáticas 1999. Al invitarlos a participar en el presente proyecto, aceptaron de inmediato, lo cual se consideró en ese momento, que este grupo de alumnos aportaría elementos importantes a la investigación.

Se consideró importante trabajar con este grupo de alumnos, ya que además de las dos características mencionadas, se encontró en ellos lo siguiente:

- Se tenían nueve alumnos cursando el segundo y tres el primer año de preparatoria, lo cual permitía interaccionar con dos niveles escolares.

- Mostraron un gran interés por participar en la investigación.

- La mayoría de alumnos eran de diferentes grupos.

- El grupo de alumnos ocupa los promedios más altos en calificaciones del plantel.

- Muestran de manera natural, un interés especial por el estudio de las Matemáticas.

Enseguida se presenta la relación del grupo de alumnos, así como algunas de sus características.

NOMBRE	GRADO	GRUPO	EDAD
Erwin	1°	101	16
Miguel	1°	103	16
Mauricio	1°	103	15
Diego	3°	301	16
Rosa María	3°	303	16
Ángel	3°	303	17
Armando	3°	303	17
Yeimi	3°	305	17
Beatriz	3°	305	16
Mario	3°	305	17
Gerardo	3°	306	17
Alberto	3°	308	17

La participación de los alumnos en la Olimpiada de Matemáticas 1999, fue la siguiente:

? Beatriz, Yeimi y Armando, fueron eliminados en la primera etapa estatal realizada en Mayo.

? Ángel y Rosa María, fueron eliminados en la segunda etapa estatal realizada en Julio.

? Miguel, Gerardo y Diego, fueron eliminados en la segunda etapa realizada en Julio; sin embargo, lograron un segundo lugar estatal (se otorgan doce lugares).

? Erwin, Mauricio y Mario, obtuvieron un primer lugar estatal (se otorgan doce lugares) y el derecho de pasar a la tercera y última etapa estatal.

? Erwin, Mauricio y Mario, obtuvieron un lugar para participar en la Olimpiada Nacional celebrada en Oaxaca en el mes de Octubre (la delegación del Estado de México se forma por seis alumnos).

Cabe destacar que en la etapa estatal participaron casi mil alumnos inscritos en más de setenta planteles del nivel medio superior del Estado de México, tales como Preparatorias tanto públicas como privadas, Tecnológicos, Normales, Colegios de Bachilleres, etcétera.

Con base en los resultados obtenidos en las diferentes etapas de la olimpiada, fue como se asignaron los equipos para la fase de formulación, ya que se consideró que los alumnos tenían el mismo nivel y por tal motivo la discusión realizada no se vería influenciada por alguno de ellos.

Ahora se describen características particulares de algunos de los alumnos.

Erwin. Al ingresar a la preparatoria ocupó el primer lugar en el examen de admisión, el cual fue presentado por más de mil aspirantes; al finalizar el segundo semestre, ocupa el tercer lugar en promedio general de calificaciones.

Mauricio. Al ingresar a la preparatoria ocupó el tercer lugar en el examen de admisión; al finalizar el segundo semestre, ocupa el primer lugar en promedio general de calificaciones.

Miguel. Al ingresar a la preparatoria ocupó el sexto lugar en el examen de admisión; al finalizar el segundo semestre, conserva el sexto lugar en promedio general de calificaciones.

Gerardo. AI término del cuarto semestre, tiene el promedio general más alto en el plantel.

Solamente describí características de estos cuatro alumnos; sin embargo, los demás, tiene el mejor promedio de sus respectivos grupos, participan en eventos académicos, etc.

Al grupo de alumnos, se le pidió que realizaran una autobiografía donde destacaran el papel que la Matemática ha jugado en su vida; al analizar las autobiografías, se encontraron regularidades en ellos, destacando las siguientes:

? Han sido alumnos de "buenas notas" desde la primaria.

? La afición por las Matemáticas, ha estado presente en ellos desde la primaria y se va incrementando día con día.

? Desde la primaria, han participado en concursos.

? Las Matemáticas no se les hacen difíciles.

Me llamaron la atención, dos críticas realizadas por los alumnos en su autobiografía, Gerardo señala:

> *"Yo pienso que esta tendencia hacia las Matemáticas se origina a que desde pequeño, nunca les tuve miedo a las Matemáticas; como nos lo repetían a cada rato los maestros de que las Matemáticas eran las más difíciles de la vida; quizás nos decían a los alumnos esto porque esa era su concepción personal"*

Me sorprendió en esta parte que señala Gerardo, come es que un alumno puede percibir que el hecho de que un maestro les tenga un cierto rechazo a las Matemáticas, se lo transmite a sus alumnos llegando a tener una gran influencia en ellos.

Por otra parte, Mario indica lo siguiente:

> *"Recuerdo el nombre de cada uno de los 39 maestros que tuve en la secundaria y sería tedioso nombrarlos, por eso sólo resalto alguno o algunos casos; pero lo importante es que hubo de todo, desde especialistas en la materia como taxistas impartiendo Física II, es decir, maestros sin vocación"*

Estas dos críticas realizadas por alumnos de bachillerato, muestran como algunas de las fallas que se presentan en nuestro sistema educativo mexicano, se acrecientan en el área de Matemáticas y están a la luz de los alumnos.

Un comentario con respecto al desarrollo de la Situación Didáctica que me pareció importante, es el realizado por Gerardo, en el cual señaló:

> *"En general toda la serie de problemas que se aplicaron en la investigación me parecieron interesantes; pero hubo algunos problemas por ejemplo, en los que pedían obtener una gráfica con determinado signo en sus derivadas basándonos en el caso anterior, y fue en esos problemas donde yo tuve dificultades, ya que no me quedó bien claro el conocimiento que se pretendía alcanzar con el problema anterior..."*

La importancia que veo en este comentario, es cómo los mismos alumnos aceptan que se les dificulta resolver un problema cuando deben usar un resultado que antes han obtenido; generalmente esto ocurre dentro del aula, en donde los alumnos tratan de ver los problemas o ejemplos como si estos fueran independientes, después de revisar las respuestas que Gerardo dio en la situación, se ve él porque de su comentario; ahí se observa, que a pesar de que él resuelve correctamente un determinado problema, por ejemplo, logró asignar el signo de la primera derivada a una parte de la función, no pudo apropiarse en forma general de este conocimiento, es decir, cuando lo requería, en lugar de indicar que para una función creciente el signo de la primera derivada es positivo, realizaba nuevamente el proceso de comparación. Lo cual muestra que Gerardo a pesar de ser el alumno de más alto promedio general hasta el cuarto semestre de entre aproximadamente 600 alumnos en el plantel, al resolver un problema, lo hace bien, pero necesita que le indiquen la parte importante.

En el análisis a priori, no se contempla esta situación, pues ahí, se parte de que el alumno obtiene un resultado al resolver un problema y lo aplica en el siguiente; más aún, la Situación Didáctica se diseñó considerando cada derivada sucesiva en varios problemas con la finalidad de comprobar lo anterior, esto es, ver si un alumno que en un problema había logrado dar una interpretación, más adelante la podía sostener.

Regresando a nuestro trabajo de investigación, se consideró importante trabajar con este grupo de alumnos, por las características propias que ellos tienen, al ser muy participa ti vos y mostrar además un gran interés por colaborar en ésta investigación, pensando que de ellos se pueden obtener resultados importantes al aplicar la Situación Didáctica diseñada, la cual con base en los resultados obtenidos, se puede rediseñar para adaptarla a otro grupo de alumnos de diferentes características.

La Situación Didáctica se diseñó para trabajar con alumnos que no han tenido ningún acercamiento con el Cálculo; sin embargo, también es factible trabajarla con alumnos que ya han cursado Cálculo, porque como se mostró en las conclusiones de la tesina de especialidad (Chímal, Contreras, Peña, 1998), cuando los alumnos tienen su primer acercamiento con el Cálculo, lo que perdura en ellos es lo algebraico y después de un cierto tiempo no reconocen que las derivadas sucesivas tengan un significado geométrico, debido a que la presente investigación tiene como finalidad dejar presente en el estudiante la noción geométrica de la derivada; la Situación Didáctica se puede implementar con cualquier grupo de alumnos.

3.4 PUESTA EN ESCENA

Para la implementación de la Situación Didáctica, se trabajó con el grupo de alumnos en tres sesiones, en horario diferente al que asisten a clases normales como se indica a continuación:

? Cada problema de la Situación Didáctica se resolvió en forma individual apoyándose con una computadora Pentium, utilizaron Derive y Excel para el trazo de gráficas y cálculo de las diferencias de las ordenadas respectivamente.

? La fase individual se realizó en dos sesiones con una duración de dos horas cada una. Se recopilaron sus respuestas escritas.

? Se formaron cuatro equipos considerando los resultados que obtuvieron durante su participación en la Olimpiada de Matemáticas, con la finalidad de que los equipos estuvieran balanceados en cuanto al nivel de conocimientos y participación de los alumnos, quedando de la siguiente forma:

EQUIPO	**INTEGRANTES**
A	Erwin, Mauricio y Mario
B	Miguel y Gerardo
C	Rosa María, Ángel y Alberto
D	Armando, Yeimi y Beatriz

? Cada equipo resolvió nuevamente la Situación Didáctica en una sesión de tres horas, contando con el apoyo de la computadora.

? Se Grabaron las discusiones realizadas por cada equipo.

? Finalmente se realizó la discusión grupal en una sesión de una hora.

? La aplicación de la Situación Didáctica se llevó a cabo en una sala de computo, con la finalidad de que cada alumno trabajara con una computadora en la etapa individual; para la fase grupal, se utilizó un pintarrón en la misma aula.

3.5 ANÁLISIS A POSTERIORI

Una vez aplicada la Situación Didáctica, se procedió a recopilar los datos, con la finalidad de realizar el análisis y confrontar los resultados con el análisis a priori efectuado. Para el análisis a posterior, se consideran por separado las construcciones que realizan los alumnos para cada una de las derivadas sucesivas de la función, ahí se indican los resultados más importantes que se van obteniendo con respecto al análisis a priori. Al inicio del capítulo seis, se detalla la forma en que se realiza este análisis.

3.6 RESUMEN

En este capítulo, se describió el método empleado en la investigación, el cual utiliza a la Ingeniería Didáctica, por tal motivo, se describen las tres fases que se desarrollan en esta metodología, a decir, el análisis preliminar, el diseño de la situación y la puesta en escena y análisis de resultados. Se describen también algunas de las características del grupo de alumnos que participaron en el estudio realizado.

CAPITULO IV

ANÁLISIS PRELIMINAR

Se presenta la situación actual del Bachillerato Universitario por ser el sistema al que pertenecen los alumnos con los cuales se trabajó en la investigación realizada.

Este proyecto, tuvo su primer etapa de investigación con un grupo de estudiantes de este sistema educativo, obteniéndose como resultado final la escritura de una tesina de especialidad, aquí se describen algunos de los aspectos más relevantes de este trabajo de investigación. Con base en las sugerencias y conclusiones de ese trabajo, se realizó un estudio preliminar con el nuevo de grupo de estudiantes, para lo cual se articularon las componentes epistemológica, didáctica y cognitiva en el diseño de una primer Situación Didáctica, la cual se trabajó con la finalidad de fortalecer en el estudiante la noción gráfica de una función; se presentan también los resultados más relevantes obtenidos durante esta etapa preliminar.

4.1 ESTADO EDUCATIVO

En la tarea cotidiana del maestro, al exponer los conocimientos matemáticos que se consideran en los programas de estudio, el alumno generalmente se enfrenta a la problemática de representar y relacionar el mundo de objetos abstractos a través de otros objetos, por ejemplo, en la figura 1, se tiene la representación gráfica de una función cuadrática, el pensamiento que se refleja en los alumnos, es que parecería indicar que la gráfica nunca cortaría al eje vertical, esto es, que sólo se ubica en el primer cuadrante tal y como está representada en la figura, cuando en realidad, la gráfica va más allá de lo que se muestra; ya que sabemos que el dominio de la función son todos los números reales. Casos como éste, nos llevan a establecer que hay que trabajar con el alumno un discurso diferente al tradicional, cuando se le enseñan conceptos de este tipo, surgiendo la necesidad de rediseñar el discurso matemático escolar.

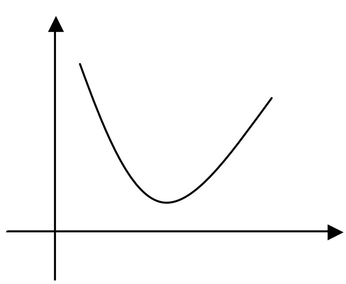


Figura 1

Problemas como este, se encuentran muchos durante la práctica educativa, radicando en ello nuestra línea de investigación, el Pensamiento y Lenguaje Variacional, el cual toma como objeto de estudio, la base fenomenológica de los significados de los objetos matemáticos a partir de las intuiciones primarias del alumno, y que tiene por objetivo el rediseño del discurso matemático escolar. Se ha encontrado que la enseñanza y el aprendizaje de situaciones variacionales plantean un gran número de problemas no triviales. Cada concepto avanzado que se desea enseñar suele apoyarse en conceptos más elementales y se resiste al aprendizaje si no se antecede por uno sólido en el entendimiento de los conceptos previos.

Uno de los recursos que ayudarían a resolver este problema, es que los profesores adoptaran los modelos de las situaciones que se consideran dentro de la Ingeniería Didáctica y que ya se están desarrollando. Este paso de la investigación fundamental al diseño de Ingenierías Didácticas tiene tres preguntas de investigación:

1. ¿Cuáles son las leyes que regulan las situaciones de enseñanza del pensamiento variacional en nuestro sistema educativo y en el medio social?

2. ¿De qué naturaleza son las regularidades en los actos de entendimiento, ante situaciones que precisan del pensamiento variacional?

3. ¿Cuáles son las formas de articulación de los saberes matemáticos de modo que la aprehensión de situaciones variacionales sea alcanzada por la mayoría de los estudiantes en situación escolar?

Estas preguntas son vistas como una misma problemática desde diversos dominios de observación, que son la epistemológica, la cognitiva y la didáctica.

En el dominio de la epistemología, se pregunta ¿Cómo se forma una idea variacional?

Mientras que en el de la cognición, ¿Cómo se construye el pensamiento variacional en la mente de los estudiantes?

Por último, en la didáctica ¿Cómo se ejerce la gestión de una situación de enseñanza que incorpore las ideas variacionales?

Las cuestiones anteriores se pueden replantear en términos de preguntas que sugieren rutas para la acción, en:

¿Qué procesos epistemológicos operan cuando se conforma en la cultura una teoría variacional?

¿Cuáles son las funciones cognitivas que operan cuando un estudiante trata con situaciones variacionales?

¿Cuáles son las regularidades de una situación de enseñanza que pretenda poner en funcionamiento ideas variacionales en el ambiente escolar?

Estas tres cuestiones buscan localizar las regularidades en el proceso de formación de las ideas y las teorías variacionales en las tres grandes dimensiones humanas, la individual, la colectiva y la cultural. Estamos interesados en reconstruir un sistema analítico que señale las líneas de evolución del Pensamiento y Lenguaje Variacional, localizar sus estadios, caracterizarlos, aislar los mecanismos de pasaje entre ellos y explicar a la luz de una síntesis teórica, la forma en la que es posible optimizar el funcionamiento de nuestro sistema didáctico.

Por otro lado, la situación actual en el aula es demasiado tradicionalista y al parece que sólo exponemos lo poco que hemos aprendido, y queremos que este conocimiento se transfiera tal y como lo tenemos hacia los alumnos, limitando y por mucho, la aparición de ideas que pudiera tener el alumno y que nos lleven hacia la solución del problema.

Haciendo un análisis de nuestra situación, nos damos cuenta que existe un gran problema en la enseñanza de las Matemáticas, presentándose en todos los niveles. El origen de este problema radica fundamentalmente en los planes y programas de estudios que se han y se siguen aplicando y en los que las autoridades educativas de nuestro país son las encargadas de marcar las directrices y lineamientos que dichos programas deben cubrir, los cuales no son acordes a nuestra idiosincrasia, se modifican al realizarse cambios en el gabinete gubernamental ocurriendo que el que entra, lo que busca es trascender, según ellos, mediante la innovación de modelos curriculares, los cuales de innovadores no tienen nada, casi siempre resultan ser copias de lo que se está aplicando en los países considerados del primer mundo y lo que nosotros necesitamos son programas propios de nuestra cultura que ayuden a resolver nuestro problema.

En mi caso particular, laboró en un plantel del nivel medio superior de la Universidad Autónoma del Estado de México, donde se han realizado diversas reestructuraciones en el Plan de Estudios; hasta el año de 1991, se contemplaban varias áreas de especialidad, incluso se llegaron a trabajar planes de dos y de tres años simultáneamente; sin embargo, en la última reestructuración al Plan de Estudios, se implemento el bachillerato único cuya duración es de seis semestres.

Dentro de la currícula, el área de Matemáticas sufrió cambios considerables; en el plan anterior se impartían cinco cursos seriados de Matemáticas de una hora diaria, iniciando el primer curso en el segundo semestre. Aquí el principal problema que se consideraba es que el alumno de cuando egresaba de la secundaria (Junio, aproximadamente) a cuando nuevamente iniciaba su primer curso de Matemáticas en la preparatoria (Marzo del siguiente año) casi había transcurrido un año sin que tuviera contacto alguno con las Matemáticas, dificultándole retomar el estudio de esta asignatura. Al realizarse el cambio del Plan de Estudios, la gran mayoría de los maestros por no decir todos, solicitaba que los cursos de Matemáticas iniciaran desde el primer semestre.

Para la reforma del 91, existieron varias propuestas para el curriculum del bachillerato, en las cuales se consideraba el reacomodo plenamente justificado de algunas asignaturas en semestres diferentes a los que se venían impartiendo en el plan anterior, lo cual para llevarse al cabo, tenía un impacto presupuestal considerable en ese momento, por lo que los cambios que se realizaron fueron mínimos. La Academia de Matemáticas insistió en que sus cursos deberían iniciar en el primer semestre, lo cual se logró pero a medias, porque ahora se imparte un curso en el primer semestre de tres horas a la semana y otros cuatro cursos de cinco horas a la semana cada uno, del segundo al quinto semestre.

Se estructuraron dos cursos de Álgebra, uno de Trigonometría, uno de Geometría Analítica y por último uno de Cálculo Diferencial e Integral, rompiendo la seriación que existía antes para evitar el problema de rezago que presentaban los alumnos que no acreditaban algún curso. Los programas están muy apretados en cuanto a su contenido. Para terminar los programas en ocasiones se dan clases adicionales o bien la Academia acuerda reducir o eliminar algún tema para ese curso.

En el primer curso que se imparte (Álgebra I) de tres horas a la semana, se tiene el problema de que se pierde continuidad en el desarrollo de los temas. Además, las otras seis asignaturas que el alumno cursa en ese semestre son de cinco horas a la semana, ocasionando esto, que el alumno no le de la debida importancia por ser de tres horas. Lo anterior se fundamenta en las conclusiones obtenidas en el foro de trabajo realizado en el año de 1994 en la UAEM, con la participación de los docentes que impartían esta asignatura de Álgebra I.

En el último curso, que corresponde a Cálculo Diferencial e Integral, muchos maestros se resisten a impartir el curso completo, porque aunque duela decirlo, una de las consecuencias que implicó el cambio del Plan de Estudios fue la reubicación del personal académico en su calidad de "definitivo". Algunos de los maestros profundizan en temas del inicio del curso y al término del semestre argumentan que no les dio tiempo de ver Cálculo Integral, aún cuando en el programa sólo se consideran los conceptos elementales del Cálculo, por impartirse este curso a todos los estudiantes independientemente de la carrera que elijan a futuro. Otro de los problemas que se presentan, es que en su gran mayoría los que imparten los cursos de cálculo son ingenieros, tratan de imponer a sus alumnos un rigor semejante al que se trabaja en las Escuelas de Ingeniería, y lo que es peor, muchos confunden el rigor de la Matemática con el rigorismo en su enseñanza, repercutiendo esto en el proceso de evaluación que aplican.

Muchos de los maestros que laboramos en la Universidad Autónoma del Estado de México, estamos conscientes de esta problemática que se vive en nuestra Universidad y por eso estamos buscando alternativas en la enseñanza para tratar de aminorar este problema.

Una vez expuesta la situación actual en la cual se labora en el Bachillerato de la Universidad Autónoma del Estado de México y con base en los resultados obtenidos en la investigación realizada para cursar la especialidad, obtuvo que el alumno de preparatoria, a pesar de lo que en sus planes y programas de estudios se considera, no logra fortalecer un adecuado manejo geométrico de los temas que estudia, predominando en é1, un manejo más aritmético y algebraico; por esta razón, antes de aplicar la Situación Didáctica para interpretar geométricamente las derivadas sucesivas de una función, se realizó un estudio preliminar sobre la gráfica de una función.

4.2 GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

En esta etapa preliminar, como se ha mencionado, se pretende lograr en el alumno una mayor transición entre lo algebraico y lo geométrico en la construcción de la gráfica de una función, ya que como se observa más adelante, el alumno en forma mecánica traza la gráfica de una función, esto es, tabula de -3 a 3, localiza los puntos y los une, sin hacer un análisis a priori de cual podrá ser la posible gráfica, ni tampoco un análisis a posteriori en cuanto a si la gráfica que trazó fue correcta o no.

Para el desarrollo de esta etapa preliminar, se realizaron las siguientes actividades:

- Se diseñó una Situación Didáctica que le llamo preliminar (ver anexo No. 1), con la finalidad de ver los conocimientos que los alumnos tenían en ese momento con respecto a la construcción de la gráfica de funciones polinomiales, para después estandarizar el nivel de conocimientos en el grupo.

- Se efectuó la validación de la Situación Didáctica preliminar con un grupo de alumnos del tercer semestre de Ingeniería del Tecnológico de Ecatepec.

- Se aplicó la Situación Didáctica preliminar a un grupo de quince alumnos de segundo y cuarto semestre de bachillerato, los cuales no han cursado Cálculo.

- Se aplicó la misma Situación Didáctica a un grupo de tres alumnos de sexto semestre que ya habían cursado Cálculo.

- Se aplicó la misma Situación Didáctica a tres maestros del plantel.

Se Analizó la Situación Didáctica aplicada y con base en los resultados obtenidos:

- Se trabajó con el grupo para estandarizar los conocimientos, formándose equipos y resolviendo nuevamente la Situación Didáctica con algunas variantes, también se efectuó la situación en su fase grupal.

- Se analizaron con los alumnos los resultados tanto por equipos como las conclusiones obtenidas de la situación en la fase grupal.

- Se efectúo un trabajó con el grupo de alumnos en una sala de cómputo para mostrar el uso y manejo del graficador *Derive* y la hoja electrónica Excel, obteniéndose por parte de los alumnos una buena habilidad en el manejo de estos paquetes.

Ahora describo resumidamente algunas conclusiones obtenidas del análisis de la Situación Didáctica preliminar aplicada al grupo. Aunque en esta parte se identifican varios aspectos importantes (más de lo esperado), sólo menciono los más significativos.

- Para granear, en los alumnos persiste la rutina de tabular de -2 a 2 ó de -3 a 3 únicamente; en general trazan bien la parte de la gráfica que se encuentra en este intervalo.

- Cometen errores al realizar operaciones aritméticas, esto en las tabulaciones que realizan.

- No perciben gráficamente el significado de los ceros de la función.

- Nadie puede identificar cuando una función es positiva y cuando es negativa.

- Los alumnos de cuarto semestre que ya estudiaron el tema de recta, no aplican los conocimientos adquiridos en el curso de Geometría

Analítica; resolvieron los problemas igual que los de segundo semestre, esto es, mediante una tabulación.

Conclusiones del análisis de la Situación Didáctica preliminar aplicado a tres alumnos de sexto semestre que ya cursaron Cálculo.

- Aquí lo relevante es que resolvieron la situación en una forma muy similar que el grupo de estudiantes. Les pregunte el porqué habían utilizado la técnica de granear mediante una tabulación y no mediante máximos y mínimos. Su respuesta fue que no se les ocurrió. Como el primer problema era una recta, se les hizo fácil tabular y después así continuaron. Aquí uno de ellos mencionó que en realidad sí hubiera resultado más fácil hacer la gráfica utilizando Cálculo. Apliqué esta situación al grupo de alumnos del sexto semestre, porque al pedirle a un maestro que me resolviera el cuestionario pensando en como lo resolverían los alumnos, omití decirle que no utilizara Cálculo y él si lo usó. Por eso quise ver como lo hacían los alumnos y el resultado fue que ellos no utilizaron Cálculo.

Conclusiones del trabajo efectuado con el grupo de estudiantes.

El trabajo con el grupo de estudiantes lo realicé efectuando algunos cambios a la situación aplicada previamente, con la finalidad de que ellos aportaran o ampliaran sus respuestas a la anterior. Formé equipos de tres alumnos y les apliqué nuevamente la Situación Didáctica, para lo cual, interactuaron entre sí y después con todo el grupo.

Enseguida describo las conclusiones que considero más relevantes. Considero importante esta fase, porque fue el punto de partida para el diseño de la nueva Situación Didáctica. Se describen las respuestas más relevantes que se presentaron en el grupo.

1. En los problemas 1, 2 y 3, se pide construir la gráfica de dos funciones lineales, una con pendiente positiva y otra con pendiente negativa, y

que indiquen las diferencias y semejanzas que encuentran en las gráficas.

Algunos de los resultados a los que se llegaron en la discusión grupal son:

- Las dos gráficas son rectas.

- En una gráfica los valores de *y* aumentan y en la otra disminuyen.

- En ambas gráficas el término independiente indica donde se corta al eje *y*.

- En ambas gráficas los valores de *y* siempre aumentan o disminuyen en un mismo valor. Específicamente en el primer problema, un alumno dijo: cuando *x* aumenta en 1, y aumenta en 2. (Esta observación me parece importante porque más adelante la vamos a utilizar con lo que hemos denominado diferencias, aquí ellos ya introdujeron este término y significado de las diferencias, en problemas posteriores que no son rectas, sólo perciben que estas diferencias ya no son constantes y por lo tanto la gráfica ya no es una recta).

- A pesar de que desde antes habían identificado que se trataba de una recta, vuelven a tabular de -3 a 3, prevalece esta situación en todo el grupo. Aquí les pregunté porque no habían utilizado lo aprendido en el curso de Geometría Analítica sobre recta ya que una variante que se tiene para resolver este ejercicio, por ejemplo fue haber obtenido intersecciones con los ejes coordenados y graficar, etc. Respondieron que no lo relacionaron, por costumbre, se les hace más fácil tabular. Aquí pienso que el alumno está acostumbrado a recibir instrucciones precisas de cómo resolver el ejercicio. Cuando ésta no se da, entonces recurren a la primera que aprendieron.

- Las líneas rectas tienen diferente dirección.

- Las dos rectas van de menos infinito a más infinito.

2. Les di el problema 4, en el cual se pide graficar $f(x)= 1/2x^2 -9x + 40$ y les agregué que mencionaran cual fue la finalidad de que en los otros dos problemas se les pedía valuar la función en 8, 9 y 12.

- En su discusión por equipo, todos concluyeron que se trataba de una función cuadrática, que su gráfica era una parábola y la graficaron.

- Les pregunté, porqué habían considerado un intervalo más amplio en su tabulación que les permitió dibujar la parábola que antes no hicieron; respondieron que antes sólo pensaban que se debía de graficar de -3 a 3, porque así están acostumbrados.

- La gráfica corta al eje y en 40.

- La gráfica corta al eje x en 10 y 8.

- Un equipo menciona que la finalidad de valuar la función en los tres puntos, es para observar los puntos cercanos al vértice.

- Cuando x aumenta y disminuye, pero después vuelve a aumentar.

3. Para el problema 7, donde originalmente se les pidió graficar $y = x^3 - 8x^2 +9x + 18$, nadie trazó correctamente la gráfica, por lo cual ahora les pedí que compararan esta gráfica con $y = -x^2 + 12x +18$.

- Trazan bien las dos curvas, aquí se ven ya los resultados positivos de la aplicación de la situación y sobre todo, que aprendieron a considerar ya la gráfica en todo su dominio.

- Una gráfica es de segundo grado y por lo tanto tiene una curva; la otra, es de tercer grado y por lo tanto tiene dos curvas.

- La primera gráfica corta al eje x tres veces y la segunda dos veces.

- La parábola abre en el cuarto cuadrante hacia abajo.

- Las dos cortan al eje y en el término independiente.

4. En los problemas 8, 9 y 10, no reportó nada relevante, pero si fue importante la discusión, pues reafirmaron lo que habían concluido en los problemas anteriores y sirvió como base para el siguiente problema.

5. En el problema 11, en que se pide escriban características de la gráfica de una función polinomial de quinto grado que tiene una raíz doble, recopilé lo siguiente:

- La función es de quinto grado.

- Tiene cuatro vértices.

- Toca cinco veces al eje x, dos en el mismo punto.

- Tiene diferente abertura cada vértice.

6. En el problema doce, se pedía granear una parte de una función positiva y otra de una negativa. En las respuestas individuales, nadie contestó correctamente, por lo cual ahora cambié la pregunta por la siguiente: La siguiente figura (se las dibuje) corresponde a la gráfica de $y = 4\text{-}x^2$, cuál es el signo de la función en los siguientes intervalos (les puse siete intervalos). Ahora sus respuestas fueron.

- Asignaron el signo de la función de acuerdo al signo de x.

- Un equipo da como resultado los signos de los puntos en cada uno de los intervalos, esto es, para el intervalo (- 2, 0) dicen que los signos son (- , +), la asignación de signos que realizan es correcta de acuerdo a su razonamiento, pero saben que el signo de la función corresponde al signo de y.

Conclusión general de la etapa preliminar

- La discusión por equipo y grupal, se realizó en seis sesiones con duración de un poco más de una hora cada una.

- Se logró que los alumnos identificaran las diferentes formas de las gráficas polinomiales. Por el momento ellos asociaron que las gráficas están formadas por varias curvas o por varias parábolas, yo así lo dejé, no hice aclaraciones; sin embargo después de aplicar la segunda Situación Didáctica, acepto que hubiera sido importante considerar el concepto de concavidad porque tal vez hubieran tratado de relacionar la concavidad con el signo de alguna de las diferencias obtenidas.

- Los alumnos por si mismos lograron percibir las diferencias en los valores de *y* en una tabulación, aunque por el momento sólo cuando la diferencia es constante; de esto concluyen que si las diferencias son constantes, entonces la gráfica es una recta y si no lo es, la gráfica es una curva, también así lo dejé sin hacer aclaraciones.

- Logré una participación por parte de los alumnos mejor de lo esperado, todos participaban y además realicé preguntas dirigidas a cualquiera de ellos y al preguntar, argumentaban su respuesta. Aquí no encontré respuestas como no entiendo o no sé, aunque en ocasiones las respuestas no eran correctas, siempre respondieron y argumentaron algo.

- Por las propias actividades de los alumnos, no fue posible que todos asistieran a las seis sesiones, pero el interés de cuando menos doce alumnos está de manifiesto y es con ellos con los que seguiremos trabajando.

Trabajo realizado con en el grupo de estudiantes en la Sala de Cómputo.

Se tuvieron tres sesiones con una duración de casi dos horas cada una con el grupo de estudiantes en la sala de cómputo utilizando el programa *Derive*, realizando principalmente lo siguiente:

- Se inicio graficando funciones lineales, variando la pendiente y la ordenada al origen.

- Se graficaron funciones cuadráticas, variando el vértice.

- Se graficaron funciones cúbicas y de grado superior a partir de los ceros de la función.

Al final de estas tres sesiones y con la discusión del cuestionario exploratorio, se logró:

- Los alumnos ya tienen la noción de la gráfica de una función, ahora a partir de la regla de correspondencia pueden intuir la forma de su gráfica.

- Los alumnos también a partir de la gráfica de una función pueden dar una posible regla de correspondencia; el trabajo se ha limitado a funciones polinomiales.

- Un aceptable dominio en el uso y manejo del paquete.

Con el paquete *Excel*, se trabajaron tres sesiones con una duración de lora y media cada una, logrando lo siguiente:

- Los alumnos construyen la tabulación de cualquier función a partir de la regla de correspondencia.

- A partir de la tabulación, pueden calcular las diferencias de las ordenadas para cualquier orden.

- Un aceptable dominio en el uso y manejo del paquete.

Con el trabajo realizado en la Sala de Computo, consideré que los alumnos a estaban preparados para resolver la Situación Didáctica diseñada con la finalidad de interpretar geométricamente las derivadas sucesivas de una función.

Ahora se presenta la articulación que tienen las componentes epistemológica, cognitiva y didáctica con nuestro estudio.

4.3 COMPONENTE EPISTEMOLÓGICA

La componente epistemológica, se refiere a como se constituye el saber, así, de esta manera encontramos en la actualidad diferentes expresiones para referirse a la derivada de una función, siendo las más comunes:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \qquad \lim_{x_0\to x}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \text{ó} \qquad \lim_{\Delta_x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Enseguida se presenta una breve historia con la finalidad de ilustrar el proceso de constitución del cálculo.

En la segunda mitad del siglo V antes de nuestra era, el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables llevó a al Escuela Pitagórica a todo un proceso de reconsideración de su Matemática Discreta.

El Método de Exhaución de Éxodo, cuya demostración aparece en la proposición 2 del libro XII de los Elementos de Euclides que dice "Las áreas de los círculos son proporcionales a los cuadrados de sus diámetros". El Método de Exhaución derivó en método de demostración riguroso, el cual no permitía descubrir resultados, sólo los validaba.

Arquímedes en su libro titulado El Método, muestra un ingenioso procedimiento heurístico por medio del cual se descubren resultados novedosos, tales como: área, volumen y centros de gravedad para algunos cuerpos geométricos.

En el siglo XVI se sustituye el esquema clásico de prueba usado por los griegos por una serie de silogismos que muestran un cambio de actitud respecto del infinito, y por otra se inicia el estudio del infinito en la matemática con la perspectiva de construir procedimientos y herramientas de cálculo.

En el siglo XVII, el uso cotidiano de ideas como los indivisibles trajeron a la par la obtención de resultados novedosos y un proceso de reflexión acerca de lo que significaba el continuo. Situación que permitió a la postre iniciar la construcción del aparato algorítmico que actualmente se conoce como Cálculo. En esta época destacan los trabajos de Cavalieri (1598 - 1647) y Fermat (1601 - 1665).

La idea central de Cavalieri, era pensar en las figuras geométricas como la suma de partes indivisibles.

Fermat a diferencia de Cavalieri, realizaba sus trabajos en un contexto más algebraico, situación que lo llevo a sustituir las magnitudes indivisibles por cantidades infinitesimales.

La segunda mitad del siglo XVII y el siglo XVIII, periodo conocido como la era de los infinitesimales o los infinitamente pequeños, se ubican los trabajos de Newton (1642 - 1727), Leibniz (1646 - 1716) y Euler (1707 - 1783).

A Newton y a Leibniz se les considera como los descubridores del cálculo infinitesimal por haber sido ellos quienes reconocieron la importancia de sus descubrimientos.

En la actualidad, la derivada desde el punto de vista geométrico, se ve como la pendiente de la recta tangente a una curva y la segunda derivada se asocia a la concavidad que presenta una curva; sin embargo, para la tercera derivada ya no se presenta ninguna interpretación geométrica.

Pero ¿por qué, no estudiar geométricamente las derivadas sucesivas de una función? ¿Acaso es porque en los modelos matemáticos sólo se requiere hasta la segunda derivada? ¿Qué no prevalece en el estudiante la noción de derivada, cuando ha logrado interpretar geométricamente las derivadas sucesivas de una función?

4.4 COMPONENTE DIDÁCTICA

Dentro de la componente didáctica, se considera un análisis de textos, profesores y el Curriculum del Bachillerato Universitario, ya que ésta componente se refiere al escenario en el que interactúan el maestro, el alumno y el saber.

Antes de analizar la forma en que son presentadas las derivadas sucesivas de una función, revisé la bibliografía que se incluye en el programa de estudios de la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral del Nivel Medio Superior en la Universidad Autónoma del Estado de México, y lo primero que encontré fue que siete de los ocho libros que ahí se contemplan, son libros que se utilizan en las Escuelas de Ingeniería, por tal motivo, considero que el uso de estos libros en este nivel es inapropiado, sobre todo es este curso que resulta ser el primer acercamiento al Cálculo por parte de los alumnos. Aquí considero importante mencionar lo que señalan Del Valle R. y Colexcua, H. en el Segundo Simposio Internacional de Matemática Educativa 1991.

> *"Independientemente de la orientación que se siga para hacer el rediseño del discurso matemático para la enseñanza del Cálculo, se debe considerar que en un curso en el nivel medio superior debe ser formativo introductorio y propedeútico.*
>
> *Formativo porque se desea dar a conocer qué es el Cálculo y el tipo de problemas que resuelve, con el objetivo de desarrollar habilidades y comprender los procesos de razonamiento involucrados en la metodología que se usa para la resolución de esos problemas; así que las nociones fundamentales del Cálculo deben ser introducidas por medio del papel que juegan en la solución de problemas prácticos, de esta manera se facilitará la comprensión de las mismas y el desarrollo de tales habilidades; inclusive a través de la resolución de problemas se propicia el*

> *desarrollo de habilidades y la comprensión de nociones que corresponden a cursos anteriores.*
>
> *Introductorio porque la enseñanza, en los cursos de Cálculo en este nivel se imparten generalmente a estudiantes que seguirán carreras de Ingeniería, Matemáticas o Ciencias (Naturales o Sociales) y, entonces cursarán posteriormente cursos de mayor profundidad; por lo tanto no hay razón de que se presente una teoría acabada y rigurosamente expuesta; así el enfoque debe darse en un contexto significativo que favorezca el uso de la intuición geométrica y física, debe ser concreto y operacional más que abstracto y deductivo, informal y aplicado oponiéndose a lo riguroso y teórico.*
>
> *Propedéutico, porque lo indicado anteriormente con relación al aspecto formativo, les dará a los alumnos una preparación que les facilitará acceder a las cuestiones abstractas, deductivas, rigurosas y teóricas en los cursos superiores"*

El abuso de ésta referencia, se debe a que en el Curriculum del Bachillerato Universitario, se indica como parte esencial que el Bachillerato debe ser: formativo, introductorio y propedéutico.

Regresando a los textos que se incluyen en la bibliografía, nos damos cuenta que no están acordes a lo que se pretende obtener en un curso de Cálculo para Bachillerato.

A pesar de que en estos libros se maneja un rigor propio del nivel superior, dentro del aula, los maestros que en su mayoría son ingenieros, cambian la concepción de derivada presentada en los textos, primero por la regla de los cuatro pasos para calcular la derivada de una función y después por una lista de fórmulas que llevan al alumno a perder la idea de variación, ya que los que se consideran buenos alumnos, son aquellos que logran mecanizar el uso de estas fórmulas.

En la mayoría de las veces, en la preparatoria, el alumno aprende a derivar e ignora que esas derivadas que ha calculado tienen un significado geométrico; con respecto a las derivadas sucesivas ocurre lo mismo, sólo sabe que el proceso resultará más laborioso porque tiene que derivar varias veces y en ocasiones la función que resulta es más compleja que la original.

Pero pasando ahora a la interpretación geométrica, los libros de texto relacionan a la primera derivada con la pendiente de la recta tangente, con el crecimiento de la curva o con la velocidad de una partícula, mientras que la segunda derivada, la presentan como un concavidad o la relacionan con la aceleración; sin embargo, para la tercera derivada ya no se establece ninguna interpretación geométrica.

Con respecto al Curriculum, en el capítulo IV, se describió ya la forma cómo se estructuran los cursos de Matemáticas en las Preparatorias de la Universidad Autónoma del Estado de México; sin embargo, considero que hay una parte esencial que hace falta fortalecer en todos los cursos de esta área, y corresponde a trabajar más la parte geométrica además de articularla con la algebraica.

4.5 COMPONENTE COGNITIVA

La cognición, de manera general, estudia el funcionamiento de la mente, que en nuestro caso particular, permitirá explicar los procesos del pensamiento de los estudiantes de bachillerato, ya que ellos juegan el papel más importante de nuestra investigación. Para desarrollar esta componente, partiremos de la teoría constructivista del conocimiento, porque desde nuestra perspectiva, aprender Matemáticas es apropiarse del lenguaje matemático a través de su construcción.

La propuesta constructivista de los conocimientos matemáticos en situación escolar, radica principalmente en que la forma bajo la cual laboramos debe cambiar, esto es, no se trata de cómo hacer accesibles las Matemáticas, sino más bien, de cómo el alumno construye desde su propia concepción un lenguaje matemático para comprender, entender y argumentar explicaciones y soluciones a los problemas que se le presentan, esto es, el conocimiento no debe recibirse pasivamente por los estudiantes, sino más bien, debe ser construido activamente. Al respecto en (Wheatley, 1989) se encuentra;

> *"Un constructivista cree que el conocimiento no está separado sino íntimamente relacionado a la acción y experiencia del cognicente, nunca separado del individuo conocedor"*

Como consecuencia de esto, el alumno tiene un mejor aprendizaje cuando: los conocimientos nuevos se relacionan con los elementos que ya existen en la estructura cognitiva del estudiante y si además a estos conceptos se les logra dar un sentido para los estudiantes.

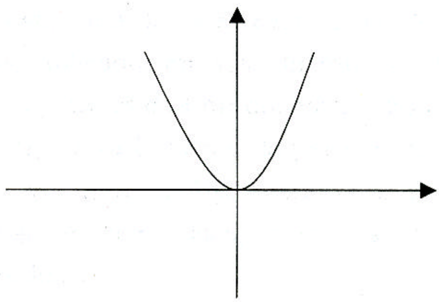
Con las Situaciones Didácticas que se diseñaron se ha considerado en la medida de lo posible, el pensamiento que los alumnos tienen al respecto, de tal manera que con base en la cognición de los estudiantes se establecen problemas en los cuales el alumno entre en conflicto y más adelante logre superarlos.

Esta parte cognitiva se ha contemplado tanto para el trabajo individual que realizan los alumnos, como para el trabajo en equipo, que es ahí donde el alumno debe formular sus respuestas para después validarlas. Dentro de las ventajas que trae consigo esta forma de trabajar, se tiene el respeto de las ideas de los demás, el aprender a debatir las ideas propias, el aprender a argumentar las propias afirmaciones, a construir explicaciones de sus razonamientos, en todo este proceso para decirle a otro como pensaron un determinado problema, etc., los estudiantes logran elaborar y refinar su forma de pensar y por tanto profundizar en su comprensión.

Específicamente en nuestro trabajo, observamos varias formas de pensamiento que los alumnos traen consigo. En el trabajo de tesina desarrollado (Chimal, Contreras, Peña, 1998), encontramos varios aspectos cognitivos del estudiante relacionados con la gráfica de una función, en la cual por no tener un manejo geométrico adecuado, establecen a menudo teoremas factuales, ahí, uno de los más comunes fue: sí $a > 0$ entonces $f(a) > 0$.

Por esta razón, ahora se efectúa un estudio preliminar con la finalidad de analizar la concepción que el grupo de alumnos tenía con respecto a una función y su representación geométrica. Con base en los resultados obtenidos, se realizó un trabajo con el fin de estabilizar en el alumno la representación geométrica de una función, así como algunas características, logrando además entre otras cosas, que el alumno ampliara su universo de funciones.

Después de aplicar la Situación Didáctica para interpretar geométricamente las derivadas sucesivas de una función, en el problema cuya representación gráfica es:



Después de calcular las primeras diferencias de sus ordenadas, siete de doce alumnos en lugar de asociar el signo negativo de esas primeras diferencias con la parte decreciente de la gráfica, lo relacionaron con la parte negativa del eje x.

Lo anterior muestra que cognitivamente, el alumno relaciona un nuevo conocimiento con los que se encuentran en su mente; aquí, el alumno tiene presente que el eje x en una parte es negativo y en otra positivo, por eso la relación inmediata con el signo que había obtenido. Con respecto a la gráfica, a pesar de que ha sido objeto de estudio en algunos de sus cursos, y que se trabajó durante la etapa preliminar, él está acostumbrado a trabajarla en forma global, no en partes, por eso, en esta primera ocasión en la cual se pretendía que el alumno por primera ocasión dividiera a la parábola en dos partes no lo hizo; sin embargo, esta etapa es superada al resolver los siguientes problemas; pero más adelante también ocurre algo semejante con la concavidad.

Otro aspecto importante que se refleja en la mente de los estudiantes es el predomino del manejo aritmético o algebraico sobre el geométrico, lo cual provoca que el estudiante al obtener un valor numérico, ya no indague más en la gráfica de la función.

4.6 RESUMEN

Se describió en este capítulo, la estructura del Plan de Estudios en el área de Matemáticas aplicado en los diferentes Planteles de la Escuela Preparatoria de la Universidad Autónoma del Estado de México, el estudio preliminar realizado para fortalecer la parte geométrica, ya que representa un obstáculo en el alumno de bachillerato y la articulación que presentan las componentes epistemológica, cognitiva y didáctica con nuestro problema de estudio.

CAPÍTULO V

DISEÑO DE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA

Y ANÁLISIS A PRIORI

Se presenta en qué consiste cada uno de los trece problemas de la Situación Didáctica diseñada para obtener la interpretación geométrica de las derivadas sucesivas de una función, la justificación de los mismos, así como un análisis a priori, es decir, lo que se espera que el alumno logre resolver y como lo realizará.

5.1 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

Se muestra el diseño de la Situación Didáctica, así como la justificación que se consideró para incluir cada uno de los problemas.

Problema 1

Dadas las funciones $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$

a). Efectúa una tabulación e indica que comportamiento observas en sus ordenadas, esto es, para cualesquiera dos valores de *x*, ¿qué comportamiento se presenta en los valores de *y*? Considera para tu análisis varias parejas de valores de x.

b). Realiza el trazo de las dos gráficas

c). Relaciona el comportamiento obtenido en a) con la gráfica de las funciones, ¿qué puedes decir al respecto?

Justificación

Con este problema, se pretende que a partir del valor de las ordenadas y la forma de las gráficas, el alumno, deduzca o interprete que la recta crece o decrece, aunque pienso que usarán una terminología diferente.

Problema 2

a) En las tabulaciones anteriores obtén las primeras diferencias con las ordenadas.

b) Con base al problema anterior y específicamente en las gráficas, ¿qué significado le das al signo de estas primeras diferencias?

Justificación

Aquí pretendo ratificar que con base en el signo de las primeras diferencias de las ordenadas, el alumno diga que la gráfica de la función crece o decrece.

Problema 3

a). Con las tabulaciones anteriores determina las segundas diferencias de las ordenadas.

b). ¿A qué crees que se debe que en tu tabla tengas esos resultados?

Justificación

Por haber obtenido un valor igual a cero en las segundas diferencias de las ordenadas para las dos gráficas, se pretendió crear aquí un conflicto en el alumno, puesto que antes él había obtenido valores diferentes en las gráficas y aquí tiene el mismo resultado. Con el siguiente problema se pretende que el alumno salga de este conflicto.

Problema 4

Para la función $y = x^2$

a) Construye la gráfica de la función.

b). Determina las primeras diferencias de las ordenadas.

c). Interpreta en la gráfica el o los signos obtenidos de las primeras diferencias.

d). Obtén las segundas diferencias de las ordenadas.

Interpreta el signo de las segundas diferencias de las ordenadas apoyándote en la gráfica.

Justificación

Aquí se pretende que el alumno supere el conflicto provocado en el problema anterior al obtener un valor diferente de cero para las segundas diferencias y empezar a inducir la concavidad, aunque con otros términos. Nuevamente se pidió interpretar el signo de las primeras diferencias de las ordenadas con la finalidad de fortalecer la noción que el alumno creó en los primeros problemas con respecto al crecimiento y decrecimiento de la gráfica.

Problema 5

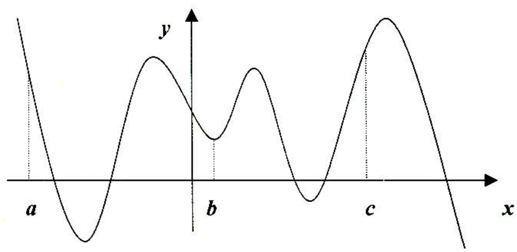
Apoyándote en el problema anterior, dibuja la gráfica de una función en la que las segundas diferencias sean negativas, por ejemplo -3. Indica porque trazaste así ésta gráfica.

Justificación

La finalidad de este problema es para que el alumno salga totalmente del conflicto distinguiendo los dos tipos de concavidad que se presentan, así como la relación que tienen con el signo de las segundas diferencias de las ordenadas.

Problema 6

Considera la siguiente gráfica de una cierta función como la siguiente:



¿Cómo crees que sea el signo de las primeras y segundas diferencias en las puntos a, b y c. Escribe una justificación de tus respuestas.

Justificación

Con este problema, se pretende que el alumno logre identificar cuando la función es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo en un punto determinado; se incluye el punto *b* para ver como interpreta el alumno un punto crítico de la función.

Problema 7

Dada la función $y = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ esboza la gráfica y sin efectuar operaciones:

a). Establece en forma aproximada el o los intervalos en los cuales consideres que las primeras diferencias de las ordenadas son positivas y aquellos en donde sean negativas.

b). Establece en forma aproximada el o los intervalos en los cuales consideres que ahora las segundas diferencias de las ordenadas son positivas y aquellos en donde sean negativas.

c). Qué puedes decir de las terceras diferencias de las ordenadas ¿Cuál crees que sea su significado?, ¿Cómo lo interpretas en la granea?

Justificación

Nuevamente aquí se pretende que el alumno ratifique la noción de concavidad y ver que puede intuir sobre las terceras diferencias.

Esta es la parte esencial de nuestro trabajo ya que es aquí donde le pedimos al alumno dar una interpretación geométrica de la tercera derivada.

Problema 8

Determina las primeras y segundas diferencias de las ordenadas con la función que aparece en el problema anterior.

Con los resultados obtenidos, ¿ratificas o rectificas la interpretación que diste en el problema anterior? Justifica tu respuesta.

Justificación

Este problema nos permite ratificar la interpretación de las primeras y segundas diferencias, creo que si el alumno en el problema anterior todavía no fue capaz de dar una interpretación intuitiva, con el proceso numérico realizado puede darse cuenta del error cometido y corregirlo.

Problema 9

Calcula las terceras diferencias de las ordenadas y apoyándote en la gráfica, menciona que interpretación le das al signo obtenido.

Justificación

Con este proceso y la respuesta anterior, analizaremos realmente el significado que el alumno le da a la tercera derivada.

Problema 10

Dibuja una gráfica donde aparezca una parte en la cual las terceras diferencias resulten positivas y otra parte en donde sean negativas.

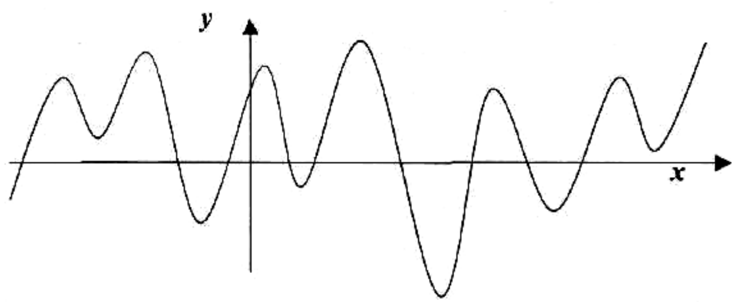
Justificación

La razón de este problema es para analizar la respuesta de los alumnos que resolvieron correctamente el problema anterior, esto es, para ratificar la correcta interpretación.

Para los alumnos que no lograron dar la interpretación en el problema anterior, veo muy difícil que aquí den una interpretación correcta. Esta suposición la baso en los estudios ya realizados al respecto, como por ejemplo: la tesina de especialidad.

Problema 11

Para resumir la interpretación geométrica de las derivadas sucesivas de una función, consideremos la siguiente gráfica:



a) Remarca una parte de la gráfica donde la función sea positiva.

b) Remarca una parte de la gráfica donde la primera derivada de la función sea positiva, esto es, donde las primeras diferencias de las ordenadas de la función son positivas.

c) Remarca una parte de la gráfica donde la segunda derivada de la función sea positiva, esto es, donde las segundas diferencias de las ordenadas de la función son positivas.

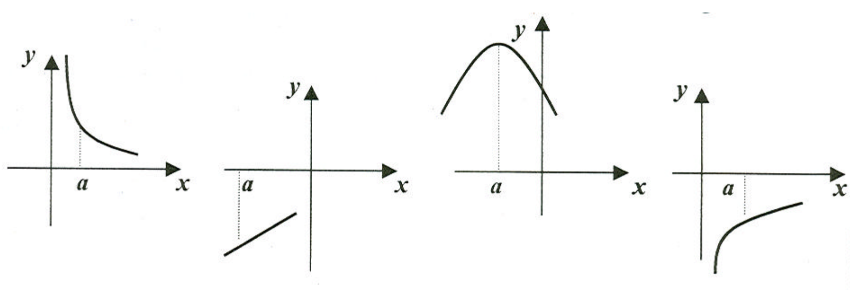
d) Remarca una parte de la gráfica donde la tercera derivada de la función sea positiva, esto es, donde las terceras diferencias de las ordenadas de la función son positivas.

Justificación

Este problema es con la finalidad de realizar un resumen de nuestra Situación Didáctica, esto es, interpretar geométricamente las derivadas sucesivas de una función.

Problema 12

Durante toda esta Situación Didáctica, hemos trabajado con gráficas representadas globalmente, esto es, en todo su dominio, pero existen casos en los cuales encontramos la representación sólo de una parte de la gráfica, como se muestra a continuación, en las cuales se ha localizado un punto de abscisa *a* en la gráfica.



Indica cómo es el signo de la primera derivada, de !a segunda y de la tercera derivada en el punto de abscisa a para cada una de las gráficas de la función.

Justificación

Ahora pretendo ver las respuestas que dan los alumnos al considerar sólo una parte de la gráfica.

Problema 13

¿Cuál crees que fue el objetivo de esta Situación Didáctica? Escribe tus conclusiones finales, esto es, qué consideras que aprendiste después de haber realizado la Situación Didáctica.

Justificación

Esta última pregunta, se incluyó con la finalidad de ver si el alumno logró identificar cuál fue el objetivo de la Situación Didáctica y proponer por si solo la interpretación geométrica de las derivadas sucesivas de una función.

5.2 ANÁLISIS A PRIORI

Con la justificación de cada uno de los problemas que constituyen la Situación Didáctica, se establece lo que se pretende obtener con ella antes de ser aplicada al grupo de alumnos, sin embargo, de manera general, menciono algunos otros aspectos que considero importantes y que fueron considerados durante el diseño de la Situación Didáctica, los cuales serán obtenidos por el grupo de alumnos.

? El alumno tiene un buen dominio gráfico de una función, por lo que podrá interpretar geométricamente las derivadas sucesivas de la función.

? Se considera que la noción de derivada se estabiliza en el alumno sólo hasta que haya transitado en las derivadas sucesivas de la función. Por esta razón se incluye el problema 11, en el cual se pide que el alumno marque una parte de la gráfica de acuerdo al signo de las primeras tres derivadas.

? El alumno interpretará la derivada de una función en la medida en la que logre transitar entre lo geométrico, analítico, verbal y numérico.

? Se ha considerado que en la etapa de acción no todos los alumnos podrán dar una interpretación de la tercera derivada; sin embargo, se pretende lograr esta interpretación en las etapas de formulación o institucionalización.

? La secuencia de problemas se han diseñado para que el alumno obtenga la interpretación de las derivadas en forma de sucesión, es decir, no como una iteración que es la forma que tradicionalmente se presenta en los libros de texto, esto es, sí un alumno no logra darle significado a la primera derivada, es posible que a la segunda derivada si le pueda asociar un significado geométrico.

? Se busca encontrar dificultades que le obstaculizan al alumno encontrar la noción de derivada, con lo cual intentaremos responder a ¿por qué los alumnos a este nivel no pueden desarrollar pensamiento y lenguaje variacional?

? Los alumnos recurrirán al uso de teoremas factuales, entonces analizaremos que alumnos logran abandonar este tipo de teoremas y como es que logran salir de ellos.

? Durante la secuencia didáctica, se provoca que el alumno caiga en varios obstáculos epistemológicos, por lo que se estudiará cómo los estudiantes logran superarlos y cuáles no son superados y por qué.

5.3 RESUMEN

Se ha presentado la secuencia de problemas que constituyen la Situación Didáctica, así como el por qué se incluyó cada uno de los problemas y lo que se espera que el alumno obtenga en esta Situación Didáctica, esto es, el análisis a priori.

CAPÍTULO VI

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Una vez que se ha aplicado la Situación Didáctica al un grupo formado por doce alumnos de bachillerato, se procedió al análisis de resultados, en donde se hizo una confrontación con el análisis a priori, tomando como base todos los pasos desarrollados por el alumno en cada problema de la Situación Didáctica. El análisis se realizó para las cuatro etapas que con base en la Ingeniería Didáctica se deben considerar en el análisis a posteriori, esto es, las etapas de acción, formulación, validación e institucionalización.

Al iniciar con el análisis de resultados, se procedió a examinar lo que en la etapa individual cada alumno pudo construir acerca de la interpretación geométrica de las derivadas sucesivas de una función, para lo cual se construyó una tabla que concentra las respuestas dadas por cada alumno y para cada problema. Debido a que una vez efectuada esta recopilación de datos se tenían pocas regularidades en las respuestas dadas por los estudiantes, se dividió de la siguiente forma:

1. Análisis de resultados para la interpretación geométrica de la primera derivada.

2. Análisis de resultados para la interpretación geométrica de la segunda derivada, y

3. Análisis de resultados para la interpretación geométrica de la tercera derivada.

Cabe recordar que los alumnos hasta antes de la aplicación de la Situación Didáctica, desconocían este tema, por lo que la importancia del análisis a efectuar consiste en ver que tanto el alumno pudo primero construir y después apropiarse del conocimiento establecido por él, ya que la misma situación ha contemplado que el alumno en un problema posterior utilice ese conocimiento adquirido.

Para el análisis de cada una de estas tres partes se consideró lo siguiente:

a) ETAPA DE ACCIÓN

ANÁLISIS INDIVIDUAL. Lo que cada alumno logró construir al interactuar con la Situación Didáctica.

REGULARIDADES. Lo que más se repite en las respuestas formuladas por los alumnos, además se presenta una conclusión parcial de ésta etapa.

CONFRONTACIÓN CON EL ANÁLISIS A PRIORI. Al analizar lo que cada alumno logró o no aprender en cada problema, se realizó confrontando con lo establecido en el análisis a priori.

TEOREMAS FACTUALES Y OBSTÁCULOS. En el análisis a priori se contempló que el estudiante caería en obstáculos y establecería teoremas factuales, por lo que ahora se analiza la forma en que el alumno logra superar los obstáculos y si no es así, determinar las posibles causas por las cuáles el alumno no logra superarlos. Con respecto a los teoremas factuales, que generalmente son establecidos por el alumno para superar un obstáculo; se analizará si el alumno lo fortalece o logra superarlo.

b) ETAPA DE FORMULACIÓN

Se analizó lo que formularon los alumnos una vez que realizaron la etapa individual para lo cual, con base en el análisis a priori, se confrontó lo formulado por cada equipo, la presencia de teoremas factuales y si los obstáculos fueron o no superados.

c) ETAPA DE VALIDACIÓN

Una vez que se efectuó el trabajo en equipo en donde la finalidad fue que los alumnos formularan sus respuestas, se analizó con base en el análisis a priori, cuáles respuestas pudieron validar y detectar posibles causas para las que no les fue posible.

d) ETAPA DE INSTITUCIONALIZACIÓN

Finalmente se analizó qué aprendizaje logró ser del consenso del grupo y hasta dónde el grupo de alumnos fue capaz de adquirir este nuevo conocimiento: La interpretación geométrica de las derivadas sucesivas de una función.

La estructura anterior se planteó de forma genera , sin embargo, se incluyeron algunos otros aspectos que resultaron relevantes durante el análisis, como por ejemplo la evolución más significativa de aprendizaje que se presentó en algunos alumnos del grupo durante el desarrollo de la Situación Didáctica.

6.1 ETAPA DE ACCIÓN

Se describe lo más relevante en cuanto a las construcciones realizadas por los alumnos en la etapa individual, el análisis se efectuó en tres partes, esto es, se analizó por separado el trabajo realizado para cada derivada sucesiva.

6.1.1 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA PRIMERA DERIVADA

Los problemas en los cuales se pretendió que el alumno lograra establecer una interpretación geométrica al signo de la primera derivada de una función fueron el 1, 2, 4, 6, 7, 8, 11 y 12 (Ver anexo No. 2).

Se presenta en forma general lo que cada alumno logró construir acerca de la interpretación geométrica de la primera derivada; donde fue necesario, se transcribieron las partes relevantes del argumento presentado por los estudiantes.

1. Erwin. En el primer problema, sólo analizó los valores obtenidos en la tabla, no los vinculó con la forma de la gráfica como está contemplado en el análisis a priori, su argumento es:

> *"Las primeras diferencias son de dos y marcan que los números siguen una consecutividad, por lo tanto saldrá una recta"*

En la función cuadrática, describió aritméticamente como se obtuvieron las primeras diferencias y asoció el signo con el eje x en el cual se encuentra la parte de la función. Esto es:

> *"El signo negativo de las primeras diferencias se debe a que se encuentran en el eje x negativo, y por lo tanto se está restando un número mayor a un número menor, resultando así negativo, cosa que ya no resulta con la parte de las diferencias que se sacan de los números que se encuentran en el eje x positivo, ya que ahí se resta un número menor a un número mayor"*

En la gráfica del problema 6, asoció el signo de las primeras diferencias con la parte de la curva que va en ascenso o decrimento (así lo dice). Para el punto mínimo, aplicó el criterio de tomar dos puntos de la gráfica y compararlos, por lo que obtuvo un valor diferente de cero. Su argumento es:

Primeras diferencias			Segundas diferencias
Punto	Signo	Justificación	
a	−	Debido a que se le va a restar un número mayor (va en decrimento la curva)	a + ya que es progresivo.
b	−	Ya que se le va a restar un número mayor (va en descenso la curva.	b − ya que puede haber variaciones.
c	+	Ya que se le va a restar un número menor (va en ascenso la curva)	c + ya que es progresivo.

En el problema de la recta, Erwin interpretó aritméticamente el signo de las primeras diferencias de las ordenadas tomando dos puntos y comparándolos, en ese y en el siguiente problema, al parecer se apropió de este conocimiento, pero no logró asociar el signo obtenido con la gráfica, incluso en la parábola cayo en un teorema factual; en el problema 6, encontré algo interesante: Erwin marcó puntos en la gráfica y los comparó al igual que en los dos anteriores. La gran diferencia fue que ahora relacionó correctamente el signo obtenido con la forma de la gráfica. En este momento, creo que Erwin aprendió a interpretar cuando una función es creciente o decreciente con base en el signo de las primeras diferencias; sin embargo, en el punto mínimo marcado en el problema 6, al considerar dos puntos de la gráfica lo llevó a dar una interpretación errónea.

En los problemas 7 y 8 se confirmó nuevamente que Erwin, al parecer, se apropió del conocimiento, ya que escribió lo siguiente:

> *"... por lo que observé, que si la curva asciende, las primeras diferencias serán positivas y que si la parte de curva desciende, las primeras diferencias serán negativas"*

Debido a lo anterior, en los últimos dos problemas, Erwin no tuvo dificultad en asociar el signo de la primera derivada a la parte creciente o decreciente de la gráfica. Con respecto al punto máximo que apareció en el problema 12, no logró superar el obstáculo epistemológico en el cual cayó desde el problema 6; aquí considero que fue debido a que en el diseño de la Situación Didáctica, no se consideró un problema en donde el alumno pudiera percibir que la primera derivada en los puntos máximos y mínimos tiene valor cero.

En conclusión, Erwin, en la etapa de acción, logró interpretar el signo de la primera derivada de una función, excepto para un punto máximo o mínimo.

2. Miguel. En las rectas, explicó aritméticamente como se obtuvieron las primeras diferencias, no las vinculó con la gráfica. En la parábola, asoció el signo de las primeras diferencias con los cuadrantes uno y dos, cayendo en un teorema factual.

En el problema 6, para cada punto dado, propuso otro delante de él y calculó las diferencias de sus ordenadas, obteniendo el signo adecuadamente, excepto para el punto mínimo, pero al interpretar el signo obtenido en la gráfica, Miguel fortaleció el teorema factual establecido en el problema anterior.

> *"Creo que será en a negativo, porque al sacar las diferencias el signo es negativo. En b y c creo que serán positivas por el cuadrante en el que están ubicados los puntos, el cual es (+,+). En a el cuadrante es de signos diferentes (-,+) por lo tanto el resultado es negativo"*

Debido a la presencia del teorema factual: si $a>0$ entonces $f'(a)>0$ que no fue superado, Miguel no logró interpretar geométricamente la primera derivada de una función, ya que en los problemas siguientes nuevamente lo aplicó.

3. Mauricio. En la recta, asoció el signo de las primeras diferencias con el signo de la variable de la regla de correspondencia de la función. En la parábola, asoció el signo de las primeras diferencias con los cuadrantes uno y dos, cayó en un teorema factual.

> *"La mitad es negativa, por lo que media parábola está en el cuadrante II ya que el vértice está en el origen"*

Para los puntos a, b y c, del problema 6, toma dos puntos, los comparó y determinó el signo de las primeras diferencias, pero lo efectuó a la inversa, resultando con esto los signos invertidos, aquí empezó a asociar el crecimiento o decrecimiento de la gráfica, dijo que en el punto c, la gráfica va de subida, se dio cuenta que el punto b corresponde a un punto mínimo, pero al considerar otro punto de la granea y compararlo, obtuvo un signo para la primera diferencia en *b*.

En el problema 6, aunque a la inversa, Mauricio logró asociar el signo de las primeras diferencias con la forma ascendente o descendente de la granea, y lo aplicó en el problema 7; sin embargo, en el problema 8, después de calcular el valor numérico de las primeras diferencias, se dio cuenta del error cometido y superó el conflicto diciendo:

> *"Me doy cuenta de que en el inciso b del problema 7 debí poner los intervalos con respecto a los signos exactamente al contrario"*

En los problema 11 y 12, no aplicó lo obtenido en el problema 8, con lo cual se concluye que Mauricio no logró darle significado geométrico al signo de la primera derivada. Pero considero que en la etapa de formulación logrará completar esta última parte que le faltó, porque con lo realizado estuvo muy cerca de lograrlo.

4. Diego. En las rectas, cuando se extienden del primero al tercer cuadrante, sus primeras diferencias fueron positivas y cuando van del segundo al cuarto cuadrante, negativas. Aquí observo que podría empezar a incorporar los conceptos de ascendente y descendente; es importante ver que hará más adelante.

En la parábola confundió los signos de las primeras diferencias con los cuadrantes. En el problema 7, menciona:

> *"De -¥ hasta 10 serán positivos y de 10 a +¥ negativos"*

Al calcular los valores numéricos en el problema 8, se dio cuenta que no estableció correctamente el intervalo y escribió "rectifico", pero su justificación no contribuyó a la interpretación correcta de las primeras diferencias.

En el problema 11 remarcó una parte de la gráfica donde incluyó una concavidad; en el problema 12, estableció adecuadamente el signo de la primera derivada en el punto indicado en tres de las cuatro gráficas; en donde se considera un punto máximo, Diego le asignó signo negativo, rectificó y le asignó ahora signo positivo, lo cual puede ser el resultado de haber caído en un conflicto en ese punto y no lograr superarlo. A pesar de asignar el signo correcto en las últimas gráficas, con lo realizado en el problema 11, se percibió que Diego no logró asociar el signo con la parte creciente y decreciente de la gráfica.

En la conclusión, Diego escribió lo siguiente:

> *"El objetivo fue profundizar sobre el concepto de función, además de las derivadas de la misma.*
>
> *Lo que yo creo que aprendí fue más allá sobre los conceptos de tabulación, diferencias de una función cuando estas diferencias o derivadas se convierten en positivas o negativas y aún más importante, las causas en las que sucede esto"*

A pesar de que Diego no logró interpretar geométricamente la primera derivada de una función, una vez terminada la Situación Didáctica, tuvo presente cuál fue el objetivo de la misma, apropiándose del lenguaje pretendido, esto es, le dio el significado de derivada a las diferencias de las ordenadas.

Considero que Diego a pesar de no lograr interpretar geométricamente la primera derivada de una función, estuvo cerca de hacerlo, pues como escribió al final, no sólo se trata de obtener los signos de las derivadas, sino de interpretarlos en la gráfica. Creo que él en la etapa del trabajo por equipos hubiera hecho contribuciones importantes y con esto avanzar en su interpretación, pero ya no participó en esa etapa.

5. Rosa María. En las rectas indicó para las primeras diferencias:

> *"El signo de las primeras diferencias indican hacia donde tienden los valores de y"*

Al parecer, empezó a intuir el ascenso o descenso de las ordenadas; quizás aquí si se hubiese fijado en la gráfica, hubiera podido establecer una posible interpretación. Después en la parábola, al calcular las primeras diferencias, sólo indicó que se obtienen valores positivos y negativos, nuevamente le hizo falta interpretar sus resultados con la gráfica.

Para el problema 6, se vio obligada a obtener los signos a partir de la gráfica y aplicó el resultado del problema anterior, ya que indicó:

> *"Al hacer una tabulación, notamos que el signo que tenga x, será el signo de las primeras diferencias"*

Para este problema no efectuó ninguna tabulación, lo que atribuyo a que ella se basa en la tabulación del problema 4.

El pensamiento que hasta el momento ha desarrollado Rosa María, la ha llevado a construir el teorema factual: si $a>0$ entonces $f'(a)>0$. Teorema que nuevamente aplicó en el problema 7.

En el problema 8, al calcular las primeras diferencias, se dio cuenta del error, dedujo que al comparar dos ordenadas se obtuvo el signo de las primeras diferencias, primero escribió cómo hizo esta comparación y después concluyó lo siguiente:

> *"Entonces, las primeras diferencias serán positivas en intervalos de x (-¥, 0) y (3, +¥), aproximadamente. Donde los valores de y van de menor a mayor*"

En el problema 11, marcó correctamente una parte de la gráfica donde las primeras diferencias son positivas y justificó:

> *"En esta parte los valores de y van de menor a mayor y sus primeras diferencias serán positivas"*

Al parecer, Rosa María ha logrado interpretar geométricamente la primera derivada, lo cual se ratifica en el problema 12, donde asignó adecuadamente el signo de la primera derivada en el punto indicado, excepto para el punto máximo, ya que comparó el punto dado con un anterior que al parecer es el proceso que vino utilizando.

En su conclusión indicó lo siguiente:

> *"Las derivadas sirven para dar una forma aproximada de alguna parte de una función debido a que éstas dependen de los valores de y."*
>
> *El signo de las primeras diferencias va a depender del orden ascendente o descendente de los valores de y.*
>
> *Si el orden es ascendente, las primeras derivadas serán positivas, si es descendente serán negativas"*

Al parecer, Rosa María logró interpretar geométricamente el signo de la primera derivada de una función, además, al final de la situación, manejó el lenguaje de primera derivada.

6. Ángel. Identificó que las rectas tienen diferente sentido y al calcular las primeras diferencias, le dio una interpretación al signo obtenido, estableció una terminología propia para indicar que la recta es creciente o decreciente, ya que indicó:

> *"La primera gráfica va de izquierda a derecha, mientras que la segunda de derecha a izquierda.*
>
> *Por lo tanto el signo positivo de las primeras diferencias indican que va de izquierda a derecha y el signo negativo que va de derecha a izquierda"*

En la parábola se apoyó en su hipótesis anterior, pero, por la forma en que argumentó:

> *"Las primeras diferencias entre los primeros valores de y tienen signo negativo lo que indica que la gráfica empieza en el lado izquierdo del eje x y los del signo positivo aparecen del lado derecho del eje de las x"*

Parece que también asoció el signo de las primeras diferencias a los cuadrantes. Aquí considero importante revisar la evolución de ésta interpretación.

En el problema 6, aplicó lo que había establecido en un principio, pues indicó:

> *"Cuando las primeras diferencias son positivas, la gráfica va de izquierda a derecha y cuando son negativos va de derecha a izquierda"*

Con la justificación, al parecer, Ángel ha logrado darle significado al signo de las primeras diferencias, además, para el punto *b* que corresponde a un punto mínimo de la gráfica, indicó que las primeras diferencias son cero, al parecer se dio cuenta que ahí se presentó un cambio de dirección en la gráfica.

En los problemas 7, 8, 11 y 12 realizó una interpretación correcta sobre la primera derivada, excepto para una gráfica del problema 12 que incluyó un punto máximo; ahora dijo que la primera diferencia es negativa, esto es, no tuvo presente lo que él había establecido en el problema 6.

Ángel concluyó diciendo:

> *"Aprendí principalmente a analizar y entender el por qué los sentidos hacia adonde van las gráficas; aprendí un concepto nuevo llamado derivada de una función"*

Mi conclusión es que Ángel aprendió a interpretar geométricamente el signo de la primera derivada de una función excepto para los puntos máximos y mínimos.

7. Armando. En las rectas, no interpretó las primeras diferencias, sólo las calculó.

En la parábola no dio una interpretación geométrica de las diferencias, lo hizo sólo aritméticamente:

> *"Salen diferencias negativas, puesto que los valores de* x^2 *son mayores que los de* x *"*

Al parecer, Armando dedujo el signo de las primeras diferencias a partir de la tabla, esto es, sin relacionarlas con la gráfica.

En el problema 6, se basó en el análisis aritmético que realizó en los anteriores y a partir de la gráfica, le asignó valores a los puntos dados y propuso un punto anterior; después efectuó la resta obteniendo con esto el signo de las primeras diferencias, pero no relacionó este signo con la forma de la gráfica, incluso para el punto mínimo al considerar un valor anterior le resultaron negativas las primeras diferencias.

En el problema 7 estableció dos intervalos y les asignó un signo; no presentó una justificación del por qué estableció esos intervalos y como fue que les asignó el signo, pero no aplicó lo establecido ya en los problemas anteriores; sin embargo, al calcular los valores en el problema 8, rectificó lo establecido porque se basa en la tabla obtenida. No asocia sus resultados con la gráfica. Después en el problema 11, marco una parte de la gráfica que no correspondió a las primeras diferencias positivas.

Finalmente en el último problema, tampoco asignó correctamente el signo a la primera derivada con base en las gráficas dadas.

En su conclusión, Armando no mencionó a las derivadas como objeto de estudio, para él, el objetivo de la Situación Didáctica fue el analizar las funciones.

Considero que Armando no logró interpretar la primera derivada de una función, por lo que será interesante en él, analizar el trabajo realizado en equipo.

8. Yeimi. Obtuvo las primeras diferencias realizando una justificación tanto aritmética como geométrica, argumentó:

> *"En cuanto a las gráficas, indica hacia donde se dirigen los valores, ya que los valores para y en la primer función va de negativos a positivos y en la segunda función van de positivos a negativos"*

En la parábola asoció el signo negativo de las primeras diferencias a que los valores de la ordenada están en orden decreciente y cuando son crecientes el signo es positivo. Aquí parece que enjaezó a interpretar correctamente el significado geométrico de la primera derivada.

En el problema 6, asignó el signo de las primeras diferencias cometiendo errores, tal parece que se confundió; lo mismo ocurre en el problema 7. Hasta el momento, considero que Yeimi no logró estabilizar un significado para las primeras diferencias. En el siguiente problema, al calcular los valores, se dio cuenta de sus errores, pero no se apoyó en la gráfica para justificar.

En la gráfica siguiente, remarcó bien una parte de la gráfica donde las primeras diferencias eran positivas, pero no se puede decir que logró aprender este concepto, porque en el último problema cometió errores al asignar el signo.

En la conclusión emitida, se ve que Yeimi no logró percibir el objetivo de la situación. Considero que Yeimi no logró interpretar la primera derivada de una función al término de la situación.

9. Beatriz. Indicó que las ordenadas de la primera función son de forma ascendente y las de la segunda de forma descendente y que el signo de las primeras diferencias sirve para identificar la inclinación de las rectas; sin embargo, en la parábola, después de calcular las primeras diferencias, argumentó:

> *"... los signos de las diferencias también los hay positivos y negativos.*
>
> *Pienso que estas diferencias son la distancia entre un extremo y otro de la parábola"*

En el problema 6, interpretó correctamente las primeras diferencias, porque consideró dos puntos y los comparó, lo cual originó que no percibiera que en *b* se tiene un mínimo de la función y entonces le asignó signo negativo.

En la función cúbica intuyó el signo de las primeras diferencias al establecer intervalos. Después, al calcular los valores, los ratificó ya que en forma aproximada (como se pidió en el problema) los había establecido adecuadamente.

Hasta el momento, parecía que Beatriz iba logrando darle significado a las primeras diferencias; sin embargo, en los siguientes dos problemas ya no aplicó lo que había construido, lo cual indicó que no logró apropiarse del nuevo conocimiento adquirido.

En su conclusión, Beatriz no mencionó que el objetivo de la situación fue interpretar el signo de las derivadas, más bien, consideró que se trata de un manejo de funciones.

Considero que Beatriz sólo para algunos casos, logró interpretar geométricamente la primera derivada de una función, pero no prevalece en ella este concepto al final de la Situación Didáctica.

10. Mario. En la primera gráfica, inició incorporando en su justificación la noción de variación:

> *"Las variaciones en las correspondencias en y es de dos unidades para ambas funciones, es decir, se presenta una sucesión de dos en dos"*

Con respecto a las primeras diferencias, explicó aritméticamente cómo resultan:

> *"Puedo interpretar que las primeras diferencias son las diferencias de un valor inferior menos un superior"*

Al parecer esta forma aritmética satisfizo a Mario y no vinculó sus resultados con la forma de la gráfica. Después, en la parábola nuevamente prevaleció lo aritmético, pero además agregó:

> *"El cambio de signo se debe a que la parábola toma valores en x negativo y después en x positivo"*

Esto es, Mario relacionó el signo de las primeras diferencias de la función con el signo del eje *x*, noción que aplicó en el problema 6, en donde indicó:

> *"En cuanto a las primeras diferencias, no estoy seguro, pero creo que es, para **a**: negativo, para **b**: quizá sea ±, es decir, el valor numérico es cero y para **c**, quizá sea positivo. Estas conclusiones las obtengo al recordar que tracé una parábola $y = x^2$, en donde del lado izquierdo las primeras diferencias eran negativas, quizá se repita este comportamiento (para el punto **a**)..."*

Al observar la gráfica, encontré una analogía con la parábola: el punto *a*, se encuentra en una parte decreciente de la curva y del lado negativo del eje *x*, el punto *b*, se encuentra en una parte creciente y del lado positivo del eje *x*, lo cual hasta el momento no ha permitido que Mario asociara una correcta interpretación al signo de las primeras diferencias, al parecer estableció y aplicó el teorema factual: si $a>0$ entonces *¦'(a)>0*, acción que confirmo al ver como estableció los intervalos en el problema 7. Sin embargo, en el punto *b*, que corresponde a un mínimo de la función, le asignó por analogía con la parábola el valor de cero argumentando que se debe a:

> *"En este caso, el punto b está en el vértice de la parábola, al igual que (0,0) de la parábola $y = x^2$"*

Como había indicado, Mario había caído en un obstáculo al aplicar el teorema factual; sin embargo, al calcular los valores de las primeras diferencias en el problema 8, superó este conflicto, indicando lo siguiente:

> *"Al observar esto *, me doy cuenta que estoy totalmente equivocado en mis establecimientos"*

Enseguida indicó cuales son los intervalos en los cuales las primeras diferencias son tanto positivas como negativas; con lo anterior, se deduce que, a pesar de que Mario aún no logra darle un significado a la primera derivada, ha superado el conflicto en el cual se encontraba.

En la granea del problema 11, remarcó correctamente una parte donde la primera derivada es positiva. Parece que entendió ya el concepto. Finalmente, en las cuatro gráficas del siguiente problema, asignó correctamente el signo a las primeras diferencias, incluyendo al punto máximo. Para asignar los signos se observó que Mario marcó varios puntos en las gráficas y los comparó, obteniendo de esta manera el signo, pero al parecer, no lo relaciona con la forma de la gráfica, esto es, para una función creciente, dedujo que la primera derivada es positiva, pero no percibió que se trata efectivamente de una función creciente.

Mario concluyó que el objetivo fue para introducir el estudio de las derivadas sucesivas, pero no lo asoció con la gráfica de la función.

Finalmente, considero que Mario logró interpretar geométricamente el signo de la primera derivada incluyendo los puntos máximos y mínimos.

11. Gerardo. En las rectas indicó que las gráficas tienen direcciones contrarias, al obtener las primeras diferencias primero justifica el valor aritméticamente, pero al relacionarlo con las gráficas, indicó:

> *"... en ② los valores de "y" van a ir disminuyendo cada vez más como si fueran hacia abajo, según el pedazo de la gráfica trazada"*

---

*Se refiere a la tabulación donde aparecen las primeras diferencias.

Por su argumento, parece que en este primer problema, Gerardo logró asociar el signo de la primera derivada con el crecimiento o decrecimiento de la gráfica. Lo cual ratificó al continuar con el análisis, ya que en la parábola, incorporó los términos: ascendiendo y descendiendo.

En el problema 6, tomó dos puntos y los comparo" para obtener las primeras diferencias. Para el punto mínimo, tomó uno delante del que se marcó y la resta resultó positiva.

En la función cúbica, estableció correctamente los intervalos donde las primeras diferencias fueron positivas; después, al calcular el valor de las primeras diferencias ratificó su propuesta. En el problema 11, Gerardo, remarcó correctamente una parte de la gráfica donde las primeras diferencias fueron positivas y en el último problema asignó correctamente el signo indicado excepto para el punto máximo.

Gerardo concluyó que aprendió a generalizar las distintas formas de las gráficas, así como a conocer como varían los valores de las funciones.

Considero que Gerardo logró a interpretar la primera derivada, excepto para los puntos máximos o mínimos.

12. Alberto. En las rectas, asoció el signo de las primeras diferencias con el signo de la variable *x* en la regla de correspondencia. En la parábola, sólo interpretó aritméticamente el signo de las primeras diferencias; después, en el problema 6, asignó signo positivo a las primeras diferencias en los tres puntos, tal parece que se confundió con la parte positiva del eje *y*, y para las segundas diferencias asoció signos de acuerdo al crecimiento de la gráfica; en *b* dijo que es cero por ser un vértice. Creo que invirtió la interpretación de las primeras y segundas diferencias, pero asoció el crecimiento de la función.

En la función cúbica asoció correctamente los signos de las primeras diferencias en los intervalos que propuso. Con esto creo que en el problema anterior se había confundido.

En el problema 11, remarcó correctamente una parte de la gráfica con primeras diferencias positivas, y finalmente en el último problema, volvió a invertir los signos en las primeras y segundas diferencias.

Al final Alberto indicó que el objetivo de la situación fue relacionar una tabulación con la gráfica correspondiente.

Al parecer, Alberto no logró del todo interpretar geométricamente las derivadas sucesivas de la función; sin embargo, quedó presente en él, la idea de crecimiento y decrecimiento, pero no logró relacionarlos con una gráfica determinada. Quizá en el trabajo por equipo logre darle ya un significado a la primera derivada.

6.1.2 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA SEGUNDA DERIVADA

Los problemas en los cuales se pretende que el alumno logre establecer una interpretación geométrica al signo de la segunda derivada de una función son el 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11 y 12 (Ver anexo No. 2).

Con base en el análisis a priori, se presenta ahora lo más relevante de la construcción realizada por cada alumno para interpretar geométricamente el signo de la segunda derivada.

1. Erwin. En la recta, las segundas diferencias son cero porque las primeras diferencias son iguales. En la parábola, sólo explicó aritméticamente cómo se obtienen las segundas diferencias, esto es:

> *"Las segundas diferencias tienen signo positivo ya que siempre se va a restar un número menor a un número mayor"*

Después, dibujó una gráfica con dos concavidades e indicó:

> *"Yo trace ésta gráfica debido a que como hay cambios repentinos, se presentan algunos casos en donde la segunda diferencia sea negativa, ya que se puede llegar a dar la resta de diferencias en donde el sustraendo sea mayor que el minuendo"*

Deduzco que Erwin no asoció el signo positivo de las segundas diferencias con la concavidad positiva de la gráfica, ya que, en el trazo de su gráfica, consideró también una concavidad negativa.

En el problema 6, asoció el signo positivo cuando la gráfica es creciente o decreciente y negativa para el punto mínimo. Noción que aplicó en el siguiente problema; sin embargo, después, al calcular las segundas diferencias, se dio cuenta del error, y dijo:

> *"En las segundas diferencias me equivoqué ya que creí que en los cambios de dirección serían negativas, observando en este momento que las segundas diferencias son de -¥ a 0, y que el resto son positivas"*

En este momento, Erwin ha superado uno de los conflictos en los cuales había caído; sin embargo, creo que el ver sólo la tabla, genera que aún no asocie el significado del signo de las segundas diferencias.

En el problema 11, nuevamente marcó una parte creciente de la gráfica para segundas diferencias positivas, con el último problema. Creo que esta fue la interpretación que Erwin le dio al signo positivo de las segundas diferencias.

En conclusión, Erwin asoció el signo positivo de las segundas diferencias a la parte creciente o decreciente de la gráfica, no a la concavidad como se contempla en el análisis a priori.

2. Miguel. En las rectas, explicó aritméticamente cómo se obtiene el valor de las segundas diferencias, pero no lo relacionó con las gráficas, indicó:

> *"Dado que las primeras diferencias poseen el mismo signo, el resultado será cero"*

Lo mismo realiza con la parábola:

> *"Hay un aumento de dos en dos en cada resultado de las primeras diferencias, entonces la diferencia en todos los valores será dos"*

Después, no trazó la gráfica que se pidió. Con base en lo anterior describió como seria la gráfica, la cual corresponde a la esperada. Pero, aún así no se puede decir que ha logrado comprender el significado de las segundas diferencias.

En el problema 6, sólo argumentó para el punto *a*, pero asoció el signo negativo con el segundo cuadrante en donde se ubica el punto *a*. Aquí Miguel estableció el teorema factual, si $x<0$ entonces $f''(x)<0$, lo cual aplicó en el problema 7, en donde indicó:

> *"Creo que serán negativos y positivos porque hay una prolongación hacia dos cuadrantes distintos"*

Al obtener los valores de las segundas diferencias, dijo que rectificaba, pero no argumentó. En el problema 11, marcó una parte de la gráfica ubicada en el primer cuadrante y en el último problema les asocia el signo negativo a las cuatro gráficas.

En conclusión, Miguel, no logró interpretar el signo de la segunda derivada.

3. Mauricio. En las rectas, argumentó que las segundas diferencias son cero por ser una función lineal. Después en la parábola, escribió lo siguiente:

> *"El signo de las segundas diferencias determina hacia dónde abrirá la parábola"*

Con esta afirmación que expresa Mauricio, tal parece que ha logrado darle significado al signo de las segundas diferencias.

En el siguiente problema dibujó una función parecida a $y = -x^2$ y argumenta:

> *"Me imagino que así será, puesto que al tener segundas diferencias positivas, obtuve una parábola positiva, al tener segundas diferencias negativa, obtendré una parábola negativa".*

El problema 6, no lo resolvió, al parecer no percibió que también se pedía justificar las segundas diferencias, pues sólo lo hizo con las primeras diferencias y en el problema 7, sólo justificó las terceras diferencias.

En el problema 11 marcó una parte de la gráfica que tiene concavidad positiva. En el problema siguiente, asignó correctamente el signo de la segunda derivada en los puntos indicados, incluyendo que la segunda diferencia de la recta es cero.

En conclusión, Mauricio logró interpretar geométricamente el signo de la segunda derivada de una función.

4. Diego. En las rectas, indicó que las segundas diferencias son cero porque las funciones son lineales. En la parábola, dijo que el signo es positivo por ser una función de segundo grado positiva; para la función con segundas diferencias negativas, traza una parábola que abre hacia abajo.

En el problema 6, asignó correctamente el signo de las segundas diferencias, aquí da la impresión de haber entendido ya el significado, debido a su argumento:

> *"En a y b las segundas diferencias serán positivas y en c tendrán que ser negativas. En a y b tomando en cuenta como si fuera una parábola y sería como el del problema 4... en c porque estamos hablando de una parábola semejante a la del problema pasado"*

En el problema 7, para las primeras y segundas diferencias da la misma respuesta, la cual es incorrecta, sin embargo al calcular los valores, rectificó, pero lo hizo con base en la tabla obtenida, no lo relacionó con la gráfica.

En el problema 11, marcó una parte de la gráfica con segundas diferencias negativas en lugar de positivas, aunque aquí no interpretó correctamente el signo, si lo está relacionando con la concavidad.

En el problema 12, asignó correctamente el signo de las segundas diferencias excepto para la recta.

En conclusión, Diego, no logró obtener una interpretación geométrica de la segunda derivada de la función; sin embargo, en la mayoría de los problemas consideró partes de la gráfica que presentan concavidad. Diego, no participó en las siguientes etapas de la situación, con lo cuál hubiera podido lograr un avance en la interpretación.

5. Rosa María. No relacionó las segundas diferencias obtenidas con la recta, sólo lo explica aritméticamente:

> *"Como los valores de las primeras diferencias son los mismos, al restarlos, el resultado será cero"*

En la parábola, obtuvo el signo positivo en las segundas diferencias, pero no lo interpretó, Para las segundas diferencias negativas dijo que la gráfica era inversa a la anterior y trazó una parábola negativa.

En el problema 6, asoció el signo de las segundas diferencias con el signo del eje *y*; después en el siguiente problema propuso de esta forma los intervalos; en el problema 8, al calcular las segundas diferencias, sólo rectificó el resultado del problema anterior, es decir, no argumentó.

En el problema 11, marcó una parte creciente de la gráfica y argumentó:

> *"Para que las segundas diferencias sean positivas, los valores de las primeras deben de ir de menor a mayor y los valores de y deben ir de menor a mayor también"*

Finalmente, en el último problema, alternó el signo de la segundas diferencias con el de las primeras diferencias, excepto para la recta en donde indicó que sus segundas diferencias fueron cero.

En conclusión, Rosa María solamente logró interpretar la segunda derivada para las funciones lineales.

6. Ángel. En las rectas, justificó aritméticamente el valor de las segundas diferencias:

> *"Como la primera diferencia es constante en ambas funciones, al hacer las segundas diferencias es obvio que al restar dos números iguales su diferencia es cero"*

En la parábola, sólo calculó las segundas diferencias. No interpretó el resultado y después, para las segundas diferencias negativas; dibujó una parábola negativa.

En el problema 6, asignó correctamente el signo en los puntos *a* y *c*; en el punto *b*, que corresponde a un mínimo, por haber asignado cero a las primeras diferencias, estableció el teorema factual: si las primeras diferencias son cero, las segundas diferencias también.

En el problema 7, no tuvo presente el concepto de intervalo, marcó las intersecciones de la gráfica con el eje *x*, y analizó los tres puntos, de los cuales sólo a dos de ellos les asignó el signo correctamente, por lo que aún no podemos decir que ya logró a interpretar el signo de las segundas diferencias. Después, al calcular las segundas diferencias, sólo ratificó el signo en los tres puntos que había establecido.

En el problema 11, marcó una parte decreciente para las segundas diferencias positivas y en el último problema, al asignar los signos, cometió errores, incluso para la recta que antes enfatizó que era cero, aquí no lo aplicó.

En conclusión, Ángel no logró interpretar el signo de la segunda derivada.

7. Armando. Tanto en las rectas como en la parábola, justificó aritméticamente el valor de las segundas diferencias sin relacionarlo con las gráficas. No trazó una gráfica con segundas diferencias negativas, pero argumentó:

> *"Si las segundas diferencias fueran negativas entonces la gráfica (parábola) abriría hacia abajo"*

En la gráfica del problema 7, no pudo intuir el significado del signo de las segundas diferencias; sin embargo, al calcular las segundas diferencias rectificó los signos, pero no lo asoció con la gráfica.

En el problema 11, estableció un teorema factual, su argumento fue:

> *"Las segundas diferencias van a depender de las primeras diferencias, sí las primeras diferencias son positivas, las segundas son negativas y así sucesivamente"*

Este mismo criterio aplicó en el último problema.

En conclusión, Armando no logró interpretar el signo de la segunda derivada.

8. Yeimi. Antes de calcular el valor, intuyó que las segundas diferencias resultaban œro; al calcularlas sólo ratifica su predicción. En la parábola sólo explicó aritméticamente el valor obtenido. Después trazó una parábola negativa para las segundas diferencias negativas.

En el problema 6, asignó arbitrariamente el signo en los tres puntos indicados.

Para la función cúbica estableció el signo relacionándolo con el del eje x, al calcular los valores; ratificó los intervalos propuestos.

En la gráfica del problema 11, marcó una parte ascendente en el primer cuadrante. En el último problema se concluye que no logró dar un significado geométrico al signo de la segunda derivada.

En conclusión, Yeimi no logró interpretar el signo de la segunda derivada de una función.

9. Beatriz. No entendió el procedimiento para calcular las segundas diferencias. En todos los problemas asignó el mismo signo que obtuvo en las primeras diferencias, argumentando que se debe a que los valores de y son de forma ascendente o descendente.

En conclusión, Beatriz no logró interpretar el signo de la segunda derivada de una función.

10. Mario. Explicó aritméticamente como se obtiene el valor tanto en las rectas como en la parábola; no relacionó el resultado con la forma de la gráfica. En el problema 5, trazó la gráfica de la función $y = -x^2$ y argumenta:

> *"Hasta aquí, creo que el signo de las segundas diferencias determina la posición de la gráfica. Si las diferencias son positivas, la gráfica se ubicará donde encuentre y positiva, caso contrario "y" negativa, es decir tercer y cuarto cuadrante. Esto lo deduzco apoyándome en el problema 4, en donde la gráfica es una parábola que abre hacia arriba, pero no estoy totalmente seguro del significado de las segundas diferencias"*

Mario estableció el teorema factual: si $y>0$ entonces $f''(x)>0$; también lo aplicó en el problema 6, argumentando:

> *"Las segundas diferencias tienen signo positivo con base a la interpretación que hice en el problema 5, es decir, en donde y es positiva"*

Este mismo criterio fue aplicado en el problema 7, pero al realizar los cálculos, se dio cuenta del error y rectifica argumentando:

> *"Por el momento, ignoro parcialmente a que se deba esto, pues tenía una noción pero al ver mi error, necesito rectificarla"*

Aunque por el momento, Mario no ha logrado interpretar el signo de la segunda derivada, percibió el teorema factual que había establecido, pero no logró abandonarlo, ya que en el problema 11, marcó una parte de la gráfica que es descendente, pero sólo consideró la parte donde *y* es positivo.

Finalmente, en el último problema, nuevamente utilizó el teorema factual. Además estableció otro en la gráfica donde se ha marcado un máximo: si ¦*'(x)*>0 entonces ¦*"(x)*>0.

En conclusión, Mario no logró interpretar el signo de la segunda derivada de una función.

11. Gerardo. Explicó aritméticamente el valor de las segundas diferencias tanto para la recta como para la parábola, después dibujó una parábola negativa. En el problema 6, asignó el signo positivo para los tres puntos y basó su argumento en que la gráfica se encuentra por arriba del eje *x*, esto es, estableció el teorema factual: si *y*>0 entonces ¦*"(x)*>0.

En la función cúbica, estableció intervalos, los cuales en forma aproximada se pueden tomar como válidos, pero no argumentó por qué los estableció; así, al obtener los valores, sólo ratifica sus intervalos sin vincularlos con la gráfica.

En el problema 11, marcó una parte de la gráfica con una concavidad, pero esa concavidad tiene signo negativo, no positivo como se indicó en el problema. Finalmente en el último problema sólo asignó correctamente el signo en dos de las cuatro gráficas.

En conclusión, Gerardo no logró interpretar el signo de la segunda derivada de una función.

12. Alberto. En las rectas, obtuvo que las segundas diferencias son cero, porque los valores de las primeras diferencias son iguales. En la parábola, se apoya en la gráfica, pero da una explicación aritmética del signo obtenido y dice que:

> *"En una función todas las segundas diferencias salen positivas"*

Por esta razón, no dibujó una gráfica con segundas diferencias negativas.

En el problema 6, asignó signos y los justificó con el ascenso y descenso de la gráfica; para el punto mínimo dijo que es cero. En este problema estableció el mismo signo que había asignado a las primeras diferencias.

En el problema 7, se dio cuenta del error cometido y logró superar el obstáculo argumentando:

> *"Sí hay segundas diferencias negativas"*

Después, propuso dos intervalos, pero su argumento está basado aritméticamente; al calcular los valores, no agregó nada importante.

En la gráfica del problema 11, remarcó correctamente una parte con segunda derivada positiva. Parecería aquí que comprendió el significado; sin embargo, en el último problema sólo obtuvo bien el signo en una de las cuatro gráficas.

En conclusión, Alberto no logró interpretar el signo de la segunda derivada de una función.

6.1.3 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA TERCERA DERIVADA

Los problemas en los cuales se pretende que el alumno logre proponer una interpretación geométrica al signo de la tercera derivada de una función son del 7 al 12.

1. Erwin. En la función cúbica, consideró que tendrá sólo un signo. Después, al calcular el valor, lo justificó aritméticamente y argumentó:

> *"En la gráfica se observa que ésta termina ya casi como recta en el cuadrante uno"*

Al parecer, Erwin asoció las terceras con las primeras diferencias.

En el problema donde se pidió trazar una gráfica con terceras diferencias positivas y negativas, dibujó una semejante a la anterior pero no señaló nada.

En el problema 11, marcó el extremo de la gráfica, lo cual correspondió al argumento que dio en la función cúbica.

Siguiendo este criterio, en el último problema, asignó los mismos signos a la tercera y primera derivada, es decir positivo para la función creciente y negativo para la función decreciente. Aunque el signo que Erwin asignó está basado en las primeras derivadas, no está lejano de la realidad, ya que su planteamiento se cumple para la parte final de la gráfica.

En conclusión, Erwin sólo logró asignar el signo de la tercera derivada al extremo derecho de la gráfica.

2. Miguel. En la función cúbica, indicó:

> *"Creo que serán positivas y negativas porque hay una prolongación hacia dos cuadrantes distintos"*

Al parecer, Miguel asoció la tercera derivada con lo obtenido en las rectas para la primera. Después, al calcular el valor, concluyó que las terceras diferencias eran siempre positivas.

En el problema donde se pidió trazar una gráfica con terceras diferencias positivas y negativas, propuso una función y asignó signo positivo a la parte de la gráfica que se encuentra en el primer cuadrante y signo negativo a la parte de la gráfica que se encuentra en el segundo cuadrante.

En el problema 11, marcó la última parte ascendente de la gráfica y argumentó:

> *"Con respecto a las anteriores gráficas se ha notado que en ésta parte las terceras diferencias son positivas"*

En el último problema, aplicó el mismo criterio, es decir, si el extremo derecho de la gráfica es creciente, le asignó signo positivo y para el caso contrario, negativo.

En conclusión, Miguel sólo logró asignar el signo de la tercera derivada al extremo derecho de la gráfica.

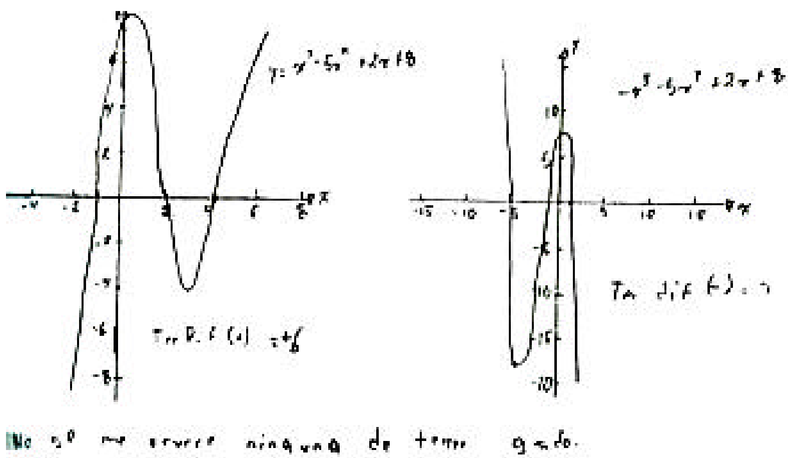
3. Mauricio. En la función cúbica, no escribió nada respecto al signo; sin embargo, descubrió algo que me parece muy interesante:

> *"Por lo que he visto, las terceras diferencias equivalen a la multiplicación de los exponentes de la variable en la expresión (3 x 2). Lo hice con $x^4 + x^3 + x^2 + x$, y resultó que las cuartas diferencias son 24 todas, esto es el producto de los exponentes de*

la variable (4 . 3 . 2), y siempre, las diferencias que no son constantes, son en cantidad, igual al grado de la función"

Después, al calcular el valor, sólo dijo que el signo es positivo.

En el problema donde se pidió trazar una gráfica con terceras diferencias positivas y negativas, se apoyó en el anterior y como tenía terceras diferencias positivas ahora dibujó su negativa, en la cual sus terceras diferencias son negativas, incluso dio el valor como se observa en sus gráficas:



En el trabajo desarrollado por Mauricio, se podría pensar que ha logrado interpretar la tercera derivada; sin embargo, no logró apropiarse de este resultado porque en el problema 11, marcó la última parte cóncava hacia arriba de la gráfica, que corresponde al extremo final.

En el último problema, asignó el signo a los puntos marcados; en la recta, indicó que las terceras diferencias son cero.

En conclusión, Mauricio para un caso asignó correctamente el signo, pero terminó la situación asignando el signo de la tercera derivada al extremo derecho de la gráfica.

4. Diego. En la función cúbica, consideró:

> *"Que es el pequeño tramo donde se forman las parábolas o curvas"*

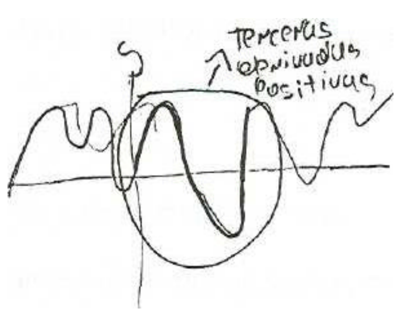
Después, al calcular el valor, argumentó aritméticamente el valor.

En el problema donde se pidió trazar una gráfica con terceras diferencias positivas y negativas, dibujó una gráfica con varias concavidades y argumentó:

> *"Las terceras diferencias son positivas cuando los puntos de las parábolas en las que se encuentran se extienden al infinito y son negativas cuando se encuentran en un lugar donde todavía da otra curva"*

Esto es, Diego asoció el signo positivo de las terceras diferencias a los extremos de la gráfica y signo negativo a la parte central.

En el problema 11, no aplicó este criterio que estableció, pues marcó una parte central de la gráfica para terceras diferencias positivas, aquí lo interesante es que consideró correctamente ésta parte marcada, esto es:



En el análisis a priori, se consideró que el alumno que resolviera este problema, habría logrado interpretar geométricamente la tercera derivada. Con Diego esto no se puede asegurar, porque en el último problema, por ver sólo parte de una gráfica asignó los signos arbitrariamente sin apoyarse en el resultado que había obtenido.

En conclusión, Diego en un caso logró asignar el signo de la tercera derivada, pero no se apropió de este resultado que obtuvo.

5. **Rosa María**. En la función cúbica, consideró que:

> *"Las terceras diferencias tal vez tengan el mismo signo que x"*

Después, sólo calculó el valor sin argumentar nada.

En el problema donde se pidió trazar una gráfica con terceras diferencias positivas y negativas, dibujó una gráfica y asignó el signo positivo a las partes donde la función es creciente y signo negativo a la parte donde la función es decreciente.

En el problema 11, no marcó nada y en el último problema, asignó el mismo signo que para la primera, excepto para la recta a la que asignó cero.

En conclusión, Rosa María sólo logró interpretar la tercera derivada de las funciones lineales.

6. **Ángel**. En la función cúbica, consideró que:

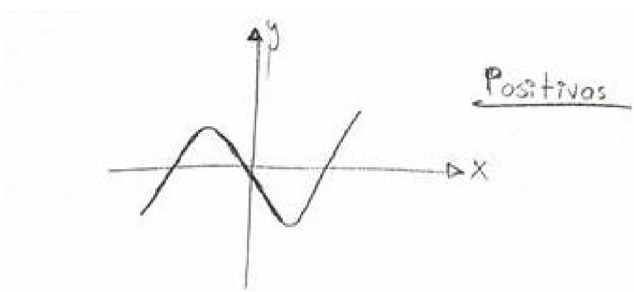
> *"Las terceras diferencias serán constantes porque el exponente de la función es 3. Una forma de explicar mi respuesta es:*

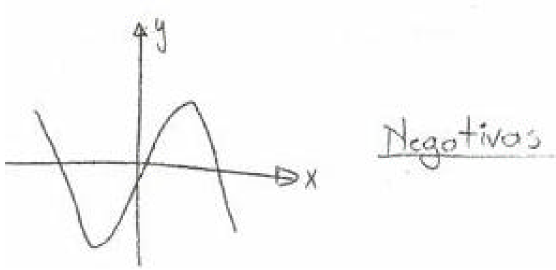
> -*Cuando la función es lineal, las segundas diferencias son iguales a cero.*
>
> -*Cuando la función es cuadrática, las terceras diferencias son igual a cero.*
>
> -*Cuando la función es cúbica, las terceras diferencias serán constantes para que al sacar las cuartas diferencias sean iguales a cero"*

Después, al calcular el valor, indicó:

> *"Yo había dicho que las terceras diferencias serian constantes y así fue"*

En el problema donde se pidió trazar una gráfica con terceras diferencias positivas y negativas, dibujó una función cúbica positiva y una función cúbica negativa.





Al ver esa página, uno pensaría que Ángel ha interpretado correctamente el significado geométrico de la tercera derivada, pero al analizar el problema 11, se observó que no pudo apropiarse de ese conocimiento porque la parte marcada no correspondió a lo que el dibujó en el problema anterior.

En el último problema, ya no puede asignar un signo a las terceras diferencias en las cuatro gráficas dadas.

En conclusión, Ángel en un caso logró asignar el signo de la tercera derivada, pero no se apropió de este resultado que obtuvo.

7. Armando. En la función cúbica, consideró que el signo será contrario al de las segundas diferencias. Después, al calcular el valor, sólo justificó aritméticamente.

En el problema donde se pidió trazar una gráfica con terceras diferencias positivas y negativas, dibujó la gráfica de una función cúbica y asignó signo negativo a los extremos y positivo a la parte central. La parte que Armando marcó con signo positivo, está muy cercana a la correcta, pero al analizar el problema 11, se observó que no pudo apropiarse de ese conocimiento porque la parte marcada no corresponde a lo que el dibujó en el problema anterior.

En el último problema, asignó el signo positivo en las cuatro gráficas.

En conclusión, Armando en un caso logró asignar el signo de la tercera derivada, pero no se apropió de este resultado que obtuvo.

8. Yeimi. En la función cúbica, consideró que:

> *"Para las terceras diferencias el signo será positivo. En la gráfica, el signo positivo se da por la tercera intersección en el eje x, que está en números positivos"*

Después, al calcular el valor, dijo que resultan seis y lo argumenta aritméticamente.

En el problema donde se pidió trazar una gráfica con terceras diferencias positivas y negativas, dibujó una gráfica negativa a la anterior, pero no dijo nada. Aquí parece que ésta corresponde a las terceras diferencias negativas por el argumento dado.

En el problema 11, marcó una parte ascendente de la curva y en el último problema, asignó signo positivo excepto para la recta que no le asignó signo.

En conclusión, en un caso logró asignar el signo de la tercera derivada, pero no se apropió de este resultado que obtuvo.

9. Beatriz. Tuvo problemas para calcular las segundas diferencias, por lo que los argumentos que expuso no corresponden a los esperados, ya que ni siquiera pudo obtener los valores correctos para las terceras diferencias.

En conclusión, Beatriz no logró interpretar el signo de la tercera derivada de una función.

10 Mario. En la función cúbica, consideró que pueden resultar cero u otro valor constante e indicó lo siguiente:

> *"Imagino que, en la gráfica, su significado corresponde a la continuidad de la parábola cúbica, ya que estas terceras diferencias representan un valor constante"*

Después, al calcular el valor, ratificó la respuesta anterior.

En el problema donde se pidió trazar una gráfica con terceras diferencias positivas y negativas, dibujó dos funciones cúbicas, una positiva y la otra negativa. Al ver esa página, uno pensaría que Mario ha interpretado correctamente el significado geométrico de la tercera derivada, pero al analizar el problema 11, se observa que no pudo apropiarse de ese conocimiento porque marcó toda la gráfica; esto es lo asoció con el primer resultado que dio, el cual corresponde a la continuidad de la función.

En el último problema, asignó cero a la función lineal como era de esperarse; en el punto máximo, estableció el teorema factual: si la primera derivada es cero, la segunda y tercera también lo son y en las dos gráficas restantes les asignó signo positivo, quizás por la continuidad de las gráficas como él había establecido en los problemas anteriores.

En conclusión, Mario además de la función lineal, en un caso logró asignar el signo de la tercera derivada, pero no se apropió de este resultado que obtuvo.

11. Gerardo. En la función cúbica, consideró que el signo resultará positivo, después, al calcular el valor, justificó el signo aritméticamente.

En el problema donde se pidió trazar una gráfica, dibujó aproximadamente una con terceras diferencias positivas y otra con terceras diferencias negativas, pero este resultado no lo aplicó en el problema 11, ya que marcó una concavidad de la gráfica.

En el último problema, asignó el signo positivo cuando la gráfica asciende y negativo cuando desciende.

En conclusión, Gerardo no logró interpretar el signo de la tercera derivada de una función.

12. Alberto. En la función cúbica, consideró que deben ser iguales y positivas, después, al calcular el valor, ratificó su respuesta.

En el problema donde se pidió trazar una gráfica con terceras diferencias positivas y negativas, dibujó una gráfica y asocia el signo positivo a la parte positiva del eje x y viceversa.

En el problema 11, marcó una parte de la gráfica que contiene tres concavidades y en el último problema, asignó arbitrariamente los signos.

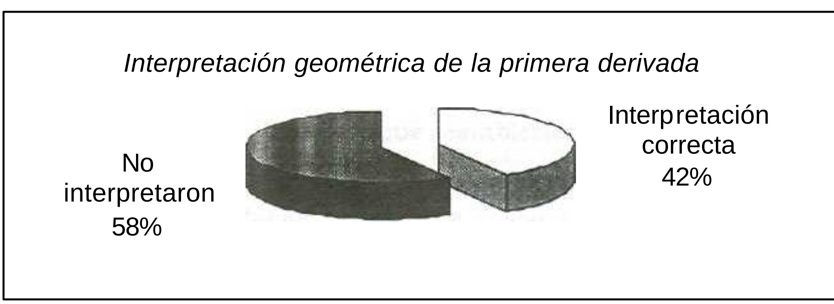
En conclusión, Alberto no logró interpretar el signo de la tercera derivada de una función.

6.1.4 PRINCIPALES RESULTADOS OBTENIDOS EN LA ETAPA DE ACCIÓN.

Una vez que se han descrito las construcciones realizadas por cada alumno durante el trabajo individual realizado, se presentan ahora de forma general los aspectos más relevantes encontrados al confrontarlos con los establecidos en el análisis a priori, así como algunas regularidades efectuadas por la mayoría de los alumnos.

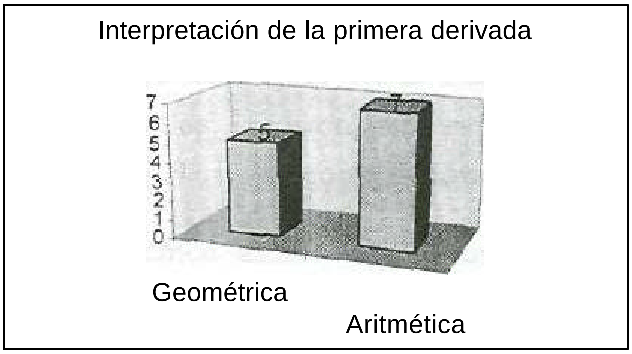
6.1.4.1 PRIMERA DERIVADA

1. Al término de la situación, sólo cinco de los doce alumnos lograron asociar el signo positivo de la primera derivada a la parte creciente y el signo negativo a la parte decreciente de la función.



2. En los alumnos hay un marcado predominio aritmético sobre el geométrico, a pesar de que en algunos problemas, se decía en las instrucciones “interprete geométricamente el signo …”. En las rectas, sólo cinco de ellos con base en el resultado obtenido aritméticamente, lo relacionan con la forma de la gráfica, los demás indican únicamente el resultado numérico 2 ó -2. En el análisis a priori, se consideraba que

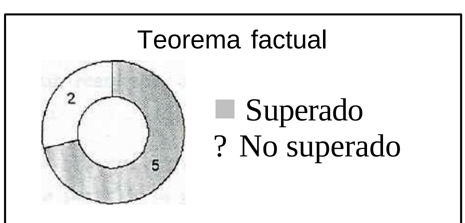
todos los alumnos podrían interpretar geométricamente el signo de la primera derivada con las rectas propuestas.



3. En la parábola, tres alumnos asignan correctamente el signo de la primera derivada sin establecer teoremas factuales.

4. Siete alumnos al tener una función con primeras diferencias positivas y negativas, caen en conflicto como se previo en el análisis a priori, pero, para lograr superarlo, establecen el teorema factual: si x>0 entonces $f'(x) > 0$.

5. Cinco de los siete alumnos que establecieron el teorema factual, lograron superarlo, y al final de la situación, cuatro de ellos, lograron establecer la interpretación geométrica al signo de la primera derivada.



6. En el análisis a priori, se consideró que desde la etapa individual, se lograría establecer la interpretación geométrica del signo de la primera derivada, por tal motivo se incluyó el análisis para un punto máximo y un mínimo de la función con la finalidad de ver si el alumno por si sólo podía superar este nuevo obstáculo en el cual se le hace caer, sin embargo, sólo dos de ellos lograron superar el conflicto, esto es, obtuvieron que la primera derivada en esos puntos es igual a cero.

7. En la función cúbica, cinco alumnos a priori establecen en forma aproximada el signo de la primera derivada para las partes crecientes y la parte decreciente, pero sólo tres de ellos aplicaron este resultado más adelante, los otros dos no lograron apropiarse del conocimiento adquirido.

8. Los siete alumnos que no lograron asignar intuitivamente el signo, al calcular numéricamente el valor de las primeras diferencias, rectificaron su error, pero sólo dos de ellos aplicaron este resultado mas adelante, los otros no relacionaron el signo obtenido con la forma de la gráfica.

9. Por la forma de resolver el problema número seis, siete alumnos, tienen presente la idea de variación, esto es, consideran dos puntos de la gráfica y los comparan para obtener el signo de las primeras diferencias; sin embargo en el análisis a priori, se había considerado que ellos asignarían el signo sólo viendo si la gráfica era creciente o decreciente en el punto indicado, lo cual muestra que el alumno no es capaz de al obtener un resultado, aplicarlo posteriormente, necesitan primero una validación.

10. Finalmente, para la primera derivada, en el último problema donde se considera sólo una parte de la gráfica, no se observan resultados diferentes a cuando se trabaja con la gráfica en forma global, excepto para los dos alumnos que no lograron superar el teorema factual

señalado en el punto 4, ya que ahí su resultado se ve influenciado por el cuadrante en el cual se ubica la gráfica.

Los resultados anteriores, se concentran en la siguiente tabla, con la finalidad de identificar quienes fueron los alumnos que ahí se mencionan en forma general.

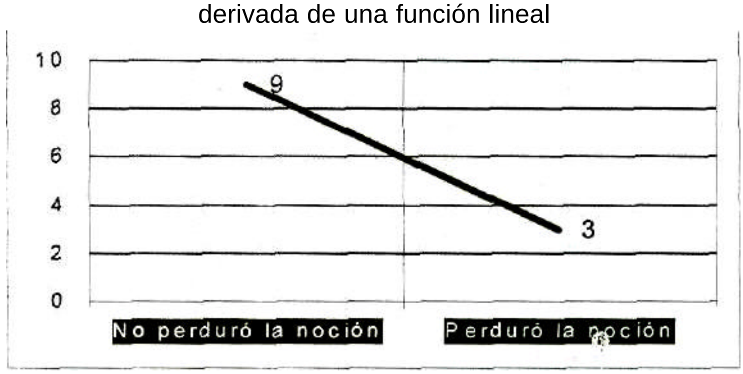
	1. Logran interpretar geométricamente el signo de la primera derivada.	2. Realizan una interpretación geométrica además de la aritmética.	3. Interpretan correctamente el signo el la parábola sin establecer el teorema factual.	4. En la parábola establecen el teorema factual: si $x>0$ entonces $f'(X)>0$.	5. logran superar el teorema factual establecido.	6. Obtienen que la primera derivada en un máximo y en un mínimo es igual a cero.	7. Establecen intuitivamente los intervalos donde la primera derivada es positiva.	8. Rectifican los signos propuestos a la primera derivada en función cúbica después de realizar los cálculos	9. Propone y comparan dos puntos en la gráfica del problema 6.
Erwin	✓			✓	✓		✓		✓
Miguel				✓	No			✓	✓
Mauricio				✓	✓			✓	✓
Diego		✓		✓	No			✓	
Rosa Ma.	✓			✓	✓			✓	✓
Ángel	✓	✓		✓	✓		✓		
Armando								✓	✓
Yeimi		✓	✓					✓	
Beatriz		✓					✓		✓
Mario	✓			✓	✓	✓		✓	✓
Gerardo	✓	✓	✓				✓		
Alberto			✓			✓	✓		

6.1.4.2 SEGUNDA DERIVADA

1. Durante la etapa individual, solamente Mauricio logró asociar el signo de la segunda derivada con la concavidad de la gráfica.

2. En la recta, los doce alumnos determinaron que la segunda derivada es cero, sin embargo, en el problema 12, donde se pretendía ver si este concepto había sido adquirido por los alumnos, solamente en tres de ellos perduró este concepto.

Interpretación geométrica de la segunda derivada de una función lineal



3. Siete de los doce alumnos, estableció un teorema factual, siendo cinco teoremas diferentes:

TEOREMA FACTUAL	ESTABLECIDO POR
Sí $x>0 \Rightarrow f''(x)>0$	Miguel y Rosa María
Sí $y>0 \Rightarrow f''(x)>0$	Rosa María, Mario y Gerardo
Sí $f'(x) = 0 \Rightarrow f''(x) = 0$	Ángel
Sí $f'(x)>0 \Rightarrow f''(x)>0$	Rosa María y Armando
Sí $f'(x)>0 \Rightarrow f''(x)>0$	Mario

4. Nueve alumnos trazaron una parábola negativa para representar una función con segunda derivada negativa, pero solamente Mauricio logró asociar el signo con la forma de la gráfica (concavidad); en los demás predominó el teorema factual que habían establecido y en los problemas siguientes no aplican este criterio.

Los resultados anteriores, se concentran en la siguiente tabla, con la finalidad de identificar quienes fueron los alumnos que ahí se mencionan en forma general.

	1. lograr interpretar geométricamente el signo de la segunda derivada	2. Aplican el problema 12 que la segunda derivada de una recta es cero.	3. Establecieron un teorema factual.	4. trazaron una parábola negativa para representar una función cuya segunda derivada es negativa.
Edwin				
Miguel			✓	✓
Mauricio	✓	✓		✓
Diego				✓
Rosa Ma.		✓	✓	✓
Ángel			✓	✓
Armando			✓	✓
Yeimi			✓	✓
Beatriz				
Mario		✓	✓	✓
Gerardo			✓	✓
Alberto				

6.1.4.3 TERCERA DERIVADA

1. Cinco de los doce alumnos, lograron en una ocasión, interpretar correctamente el signo de la tercera derivada en una gráfica, sin embargo, ninguno pudo apropiarse de este conocimiento.

Interpretación geométrica de la tercera derivada

2. Solamente tres alumnos recurrieron al uso de teoremas factuales, sin que lograran superarlos.

3. Tres alumnos relacionaron el signo de la tercera derivada con la parte derecha de la gráfica.

Los resultados anteriores, se concentran en la siguiente tabla, con la finalidad de identificar quienes fueron los alumnos que ahí se mencionan en forma general.

	1. En una ocasión vincularon el signo de la tercera derivada con la forma de la gráfica.	2. Establecieron teoremas factuales durante la interpretación de la tercera derivada.	3. Relacionaron el signo de la tercera derivada con la parte derecha de la gráfica.
Erwin			✓
Miguel		✓	✓
Mauricio	✓		✓
Diego	✓		
Rosa Ma.			
Ángel	✓		
Armando	✓		
Yeimi		✓	
Beatriz			
Mario	✓	✓	
Gerardo			
Alberto			

6.2 ETAPA DE FORMULACIÓN

Una vez terminada la etapa de acción, se llevó a cabo el análisis del trabajo realizado por cada uno de los cuatro equipos que se formaron, en donde se esperó con base en el análisis a priori, que en el trabajo en equipo, los alumnos formularan las respuestas realizadas en la etapa individual y ver hasta donde lograban validarlas.

El tiempo empleado en esta etapa fue de aproximadamente 3 horas; cada equipo utilizó una computadora.

Al igual que en la etapa de acción, se ha dividido el análisis en tres partes, en donde para cada una de ellas, se presentan las evidencias más relevantes que se encontraron en la discusión realizada por cada grupo de alumnos, confrontándose los resultados obtenidos con el análisis a priori. En esta etapa se grabaron las discusiones realizadas durante la secuencia de la Situación Didáctica.

6.2.1 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA PRIMERA DERIVADA

Durante la etapa de acción, con base en el análisis a priori, se esperaba lograr que los alumnos interpretaran la primera derivada, sin embargo, sólo cinco de los doce alumnos lograron establecer: si la primera derivada es positiva, entonces la función es creciente y si es negativa, la función es decreciente; además dos de ellos indicaron que la primera derivada en un punto máximo o mínimo es igual a cero.

Durante la etapa de acción, fue notoria la presencia de teoremas factuales en más de la mitad de los alumnos, siendo el más común, que si $a > 0$ entonces $f'(a)>0$, sin embargo, sólo cinco alumnos lograron superarlos. Además de establecer un predominio aritmético sobre el geométrico.

Por tanto, en esta etapa de formulación, se espera que los alumnos que no lograron construir la interpretación geométrica del signo de la primera derivada, logren un avance y aquellos que si lo hicieron, logren formular y defender sus respuestas.

EQUIPO A

El equipo está integrado por Erwin (E), Mauricio (M) y Mario (V).

En la etapa individual, Erwin, logró asociar el signo de la primera derivada a la parte creciente o decreciente de la gráfica de una función; Mauricio no pudo realizar esta interpretación, pero trabajo la parte ascendente y descendente de la gráfica, por lo que se espera en esta etapa, se apropie del conocimiento. Por último, Mario también logró interpretar geométricamente el signo de la primera derivada en la gráfica de una función incluyendo los puntos máximos y mínimos. Además los tres establecen el teorema factual: si $x>0$ entonces $f'(x)>0$ y los tres lograron superarlo.

Durante esta etapa, considero a priori que no existirá una gran discusión en este equipo para lograr la interpretación, ya que sólo Mauricio no logró obtener el significado, pero al relacionar el crecimiento y decrecimiento de la gráfica, le será rápido a sus compañeros convencerlo; sin embargo, resultará importante la forma en como formulan sus respuestas.

Enseguida se describe el análisis de la discusión realizada por este equipo en la cual se presentan los principales resultados obtenidos, así como la transcripción de episodios de aprendizaje que evidencian la formulación realizada.

Para las transcripciones de los episodios de aprendizaje, se utilizó el siguiente código:

A Letra inicial del nombre o apellido del alumno que interviene en la discusión, por ejemplo, la A indicó la intervención de Alberto.

/ Denota interrupciones breves de tres a cinco segundos.

// Denota interrupciones de más de cinco segundos.

: Denota la omisión de comentarios no relevantes al tema.

En las rectas, además de lo obtenido en la etapa individual, ahora consideran: que las primeras diferencias sean constantes, significa que las gráficas no se interrumpen. Aquí observo algo importante, que no había contemplado en el análisis a priori, ellos, intuyen un teorema de continuidad. En la parte individual Erwin anotó como característica, que las rectas pasaban por determinados cuadrantes, pero aquí provoca que sus compañeros realicen este análisis con base a los cuadrantes y lo asocian con el signo de las primeras diferencias. A pesar de que los tres ya habían superado este conflicto, los argumentos formulados por Erwin provocan que sus dos compañeros regresen al uso del teorema factual.

E Yo pienso que la diferencia de la función negativa es negativa debido a que uno de sus extremos se encuentra en // mejor dicho aparte de que es negativa, su fin se encuentra en el eje *y* negativo //

V Bueno pero su fin también puede ser este / y está en *y* positivo
E No en *y* negativo

V No, en y negativo sería aquí.

E *y* negativo

M ese es *x*

E Digo *x*
:
E Lo que decía es que alguno de los extremos final o inicial de la recta / se encuentra en el eje *x* negativo, su diferencia va ha ser negativa

M Cuando *y* es positivo / el punto final de la gráfica en *y* positivo tiene el mismo signo que las primeras diferencias

E Ajá

M O sea el punto final cuando y es positivo está por acá

E Aja

M Tiene el signo *x* negativo / que es el mismo signo de las primeras diferencias

E Si // por eso si, veamos la regla de correspondencia y la primera diferencia forman el signo de la coordenada en la que se encuentra un punto de la gráfica / o sea la correspondencia en *y* / sería *x* y la primera diferencia / bueno sus signos en el cuadrante en el que está / por ejemplo en *y* tenemos -19 / y la primera diferencia para ese punto es dos, eso quiere decir que cuando *x* es -10 cualquier punto que ubiquemos en ese sitio está en el segundo cuadrante / porque / bueno lo dice el -19 y el 2, un signo es positivo / y un negativo y esos signos corresponden al segundo cuadrante, lo podemos ver en la gráfica, sería por acá / menos / más

M Y eso como lo expresas

E ¡Se quedó ahí no!

M Ja jajá, pues entonces el /

V Sí se puede comprobar para las positivas / si tomamos un punto de aquí / va a ser +, + y si nos vamos a las tabulaciones, vamos a tener el signo de las primeras diferencias que coinciden / más / más / bueno el signo de la correspondencia en *y* y el signo de la diferencia / a no es aquí / por acá

E Sí, por qué

M Porque / desde que *x* es cero la correspondencia en *y* empieza positiva / la primera diferencia para ese punto es positiva, entonces en ese lugar de la gráfica se va a encontrar que va a pertenecer al primer cuadrante y va a tener los signos de *y* y de las primeras diferencias

E Ajá

V Si desde aquí

E Sí *y* se considera positivo

M Ajá //

E Concluimos entonces que / si sus extremos se encuentran en el cuadrante dos o en el cuadrante cuatro / sus diferencias van a ser negativas y si sus extremos se encuentran en el cuadrante uno y en el cuadrante tres sus diferencias van a ser positivas / ya que sus ejes / en el primer cuadrante serían / más por más da más / en el segundo cuadrante sería / más por menos da menos / en el tercer cuadrante sería menos por menos da más y en el cuarto cuadrante sería / más por menos da menos.

Realizaron una discusión muy larga, considerando que en la etapa individual ya habían interpretado el signo de las primeras diferencias, lo cual muestra que es necesario realizar con el estudiante un trabajo de reforzamiento para que una vez que se apropian de un nuevo conocimiento, este logre estabilizarse en ellos.

En la parábola, asocian el signo de las primeras diferencias con el eje x; consideración que Erwin contempló en la etapa individual, pero de nuevo aquí los convence.

Después en el problema 6, establecen intervalos para las primeras diferencias, pero asignan los signos a las primeras diferencias tomando dos puntos de las gráficas y comparándolos, sólo que para el punto mínimo, toman un punto anterior, con lo cual resulta negativa, concluyen lo siguiente:

E Comentando que cuando una parte de curva va en descenso va a ser negativo y cuando va en ascenso va a ser positivo

M Exacto

En el problema 7, eligen intervalos e inician asignando el signo de las primeras diferencias con el signo del eje x, sin embargo, Mauricio insiste en que no es así, por lo que toman dos puntos y los comparan, y de esta forma asignan correctamente los signos de las primeras diferencias, realizando una gran discusión hasta que bgran ponerse de acuerdo en esa asignación.

V Si habíamos establecido que las primeras diferencias estaban dadas por el eje x, entonces el intervalo para esas primeras diferencias va a ser de menos infinito a //

E A cero abierto

M Sí, a cero abierto

M y el otro

V Sí, para las positivas

E De cero a infinito //

E Las primeras diferencias de menos infinito a cero abierto es negativo / y de cero a más infinito va a ser positiva

M Va a ser hasta acá

E Hasta acá

M La primera diferencia hasta aquí / hasta este punto de aquí va a ser negativa porque a este / va a ser positiva

E Hasta aquí va a ser negativa

M ¿Por qué?

E Porque está con respecto a *x*, por eso las primeras diferencias de menos infinito

M Sí

E A cero / va a ser negativa y de cero a infinito positivo va a ser

M Pero mira si estás aquí / le vas a restar un valor menor que es este / a este le vas a restar un valor menor / te va a dar un positivo

E No, pero supongamos / si quieres aquí se le va a restar el de acá arriba, por eso

M Ah, órale

E Oh, a ver, a ver, a ver /

M Creo que sí / hasta aquí va a ser negativa, no es cierto, hasta aquí va a ser negativa, esto va a ser positivo

E Sí, sí, sí

M y esto va a ser negativo //

V Habíamos determinado que el signo de

M Cuando *y* va de subida y *x* va de subida es

E Pero eso es para las segundas diferencias

M No, ese es cuando *y* va de bajada y *x* va de subida / es positivo

V Sí, es cierto

E Si, sí cierto

M O sea, todo esto va a ser positivo

E No, no, haber déjame ver

M y esto va a ser negativo /

E Esto va a ser positivo / esto positivo y esto negativo

M No, así ya se lo habíamos puesto y luego dijimos que no

E No, pues eso sí

V *y* va de bajada y *x* va de subida

E O sea, este cacho va a ser negativo y estos dos positivos

V Bueno / vamos a dejar que va a ser positivo

E Vamos a comprobar

V Que va a ser positivo / porque aquí /

M Pero dice que sin efectuar operaciones

V No, yo digo que este va a ser positivo, porque para *x* de subida y *y* de bajada

E Si queremos encontrar / bueno a ver //

M No, no se raje

E Ja, ja, ja // si queremos encontrar este punto /

M Vamos a empezar por acá //

E No, no // si esta bien, ya lo comprobé / si queremos este punto / va a estar / este menos este, por lo tanto se va a restar un número menor a un número mayor, por lo tanto /

M Ese va a ser

E Pero este va a ser positivo

M Claro eso es lo que iba a decir

E No, tú decías lo otro

M No eso es lo que estaba diciendo

E No. tú estabas diciendo que estaban en /

V No, no / yo lo que dije fue que era positivo

M Pero eso es falso

V Si, eso es falso, pero no lo comprendo bien

M ¿Por qué?

V Ah

M Mira, ponle cero

E Entonces hay un comentario que estamos mal

M Va a ser /

E No esa sí está bien, o sea de menos infinito a cero va a ser la primera diferencia positiva, de cero a tres negativo y de tres a infinito la primera diferencia va a ser positiva.

Al calcular los valores, ratifican lo obtenido en las primeras diferencias y Mario exclama:

“Somos muy buenos”

En el problema 11, Marcan con un color diferente cada inciso, lo hacen bien para la función y para la primera derivada, de acuerdo a la variación de la gráfica, dicen que es una función polinomial de grado trece y para la primera derivada será donde la gráfica va de subida.

V La función es positiva en toda la parte que se encuentra arriba del eje x

M Después, la primera derivada de la función es positiva /

V Las primeras diferencias /

E En toda parte donde la curva ascienda

M Todo esto / todo lo que va subiendo hasta la cresta

Aquí se ratifica que han interpretado el signo de la primera derivada en la gráfica y esto se comprueba nuevamente en el último problema. Sin embargo, en el punto máximo en el cual Mario en la etapa individual había establecido que era cero, aquí ya no lo aplicó.

Finalmente indican que el objetivo de la situación fue aprender sobre las funciones, las derivadas o sea a determinar el signo de las diferencias. Mauricio dice que aprendió más de las primeras diferencias.

En conclusión, los integrantes de este equipo, lograron interpretar geométricamente la primera derivada para cualquier función exceptuando en los máximos y mínimos. En esta etapa se observo que Mauricio (como se esperaba), logró un avance significativo con respecto al trabajo individual realizado, por el contrario de Mario, que en la etapa individual había construido el significado de la primera derivada para los puntos máximos y mínimos, aquí ya no lo aplicó.

EQUIPO B

El equipo está integrado por Miguel (M) y Gerardo (G).

En la etapa individual, Miguel no logró interpretar el signo de la primera derivada al contrario de Gerardo, que si lo hace, excepto para los puntos máximos y mínimos. Este equipo quedó integrado sólo por dos alumnos, ya que Diego no asistió, aquí, resultó interesante el análisis de la discusión ya que uno logró obtener una interpretación y el otro no, además de que estos dos alumnos son hermanos.

Deducen que las rectas son inversas, analizan los valores de las ordenadas y dan varias características, para las primeras diferencias establecen que son positivas y negativas, asocian el signo con el crecimiento y decrecimiento de la gráfica

G ¿Esta cuál es?

M Es $y = 2x + 1$

G Mira como son las primeras diferencias

M Van aumentando de dos en dos

G Van aumentando

M De dos en dos

G Mira y va como subiendo

M Va hacia arriba

G Y la otra va como bajando

M Bajando

También argumentan aritméticamente el signo de las primeras diferencias.

En la parábola, las primeras diferencias de menos infinito a cero tiene signos negativos, y la parábola va disminuyendo, ya que los valores en la tabla van disminuyendo,

M Si aquí está mira, para los negativos va hacia abajo

G Va hacia abajo la gráfica

M Para los positivos va hacia arriba

G Va hacia arriba

M Aja, va aumentando, haz de cuenta que va elevándose

Aquí Miguel ya interpreta las primeras diferencias, algo que en la etapa de acción no había logrado, incluso él es quien incorpora primero la idea ascenso o descenso de la gráfica, debido a que Gerardo desde la etapa individual realiza un excesivo trabajo aritmético, Miguel logra dar el significado que sólo no pudo establecer.

En el problema 6, para obtener las primeras diferencias, marcaron en la gráfica un punto antes y uno después y aritméticamente mediante la comparación de las ordenadas de estos puntos establecieron el signo de las primeras diferencias. A pesar de que ya pudieron obtener el signo a partir de la gráfica, basándose en las discusiones anteriores, persistió en Gerardo el manejo algebraico como se aprecia en el diálogo.

G	En *c* / en *c* va subiendo
M	Va subiendo
G	Entonces como acá fue subiendo* / van a ser también positivas
M	Van a ser positivos
G	Si, haber, porque este número mayor se lo vas a restar a este número menor
M	Sí / sería nueve menos ocho / da positivo
G	Positivo

Para el punto mínimo, argumentan que por el cambio en la forma de la gráfica, se presenta el cambio de signo, les faltó decir que en *b* las primeras diferencias son cero, asumo que no lo percibieron.

Aunque al parecer han establecido el criterio de que las primeras diferencias son positivas siempre que la gráfica es creciente, no abandonan el hecho de comprobar sus resultados comparando dos puntos, en el problema 7, a partir de la gráfica proponen intervalos y al calcular los valores de las primeras diferencias, ratifican los intervalos propuestos.

En la gráfica del problema 11, Para la función positiva no tuvieron ningún problema porque dicen que es positiva para todo el primer y segundo cuadrante. Para las primeras diferencias establecieron que será cuando la gráfica sube, esto es, cualquier parte ascendente. Criterio que ya habían establecido y que nuevamente aplican en el problema 12, lo cual muestra que lograron apropiarse de este conocimiento: interpretar geométricamente el signo de la primera derivada.

Durante toda la Situación Didáctica, persistió en Gerardo la idea de comparación, a pesar de que Miguel en todos los casos mencionaba que la gráfica subía o bajaba y por tanto el signo sería positivo o negativo.

---
*Se refieren al punto *a*.

En este equipo, se logró en Gerardo ratificar el significado que ya le había dado a la primera derivada; sin embargo no veo que él haya avanzado, puesto que no abandona la idea de comparar puntos, a pesar de que Miguel se lo indicaba, él seguía comparando; tampoco logró algo más para los máximos y mínimos. Por otro lado, Miguel que en la etapa individual no logró construir el significado, durante la discusión logró dársela e incluso apropiarse del conocimiento, ya que él al ver la forma de la gráfica le indicaba a Gerardo que el signo sería positivo o negativo según el caso.

EQUIPO C

El equipo está integrado por Rosa María (R), Ángel (A) y Alberto (B).

En la etapa individual, Rosa María y Ángel lograron interpretar el signo de la primera derivada excepto para los puntos máximos y mínimos, Alberto, argumenta para la parte creciente y decreciente de la gráfica, pero no logra darle significado.

Para el trabajo en equipo, en las rectas, cuando *x* avanza en una unidad, *y* avanza o disminuye en dos, por eso el signo del coeficiente es el que indica el sentido de la gráfica. En su análisis predomina lo aritmético. El signo de las primeras diferencias cuando es positivo, la gráfica va de izquierda a derecha, se observa aquí que predomina el argumento que Ángel realizó en la etapa individual.

En la parábola, establecieron que las primeras diferencias son positivas cuando los valores de *y* van en orden ascendente y negativos cuando van en orden descendente. Aquí les falto vincularlo con la forma de la gráfica, pero quizás cada uno de ellos lo consideró.

R El signo de las primeras diferencias indican los valores de *y*, ¿no? / de cómo van de menor a mayor o de mayor a menor

A A ver qué /

R Que el signo de las primeras diferencias / me indican la secuencia que siguen los valores de *y*, por ejemplo aquí en el signo menos / la secuencia es de mayor a menor / cuando el signo es más, la secuencia es de menor a mayor

A Es que yo lo enfoco más de acuerdo del eje *x* / porque cuando las primeras diferencias son negativas / están en el lado negativo de acuerdo al cero y las positivas también en el *x* serían positivas

B Entonces, tomando como referencia al origen, los valores de *y* que son pares ordenados de los números negativos de *x* van en orden descendente y sus primeras diferencias son negativas, a partir del cero los valores de *y* van en orden ascendente y los valores de las primeras diferencias son positivos.

A Ahora si ya me parece perfecto.

Al parecer, los tres empiezan a formular la interpretación del signo de la primera derivada, aunque se percibe que hace falta vincular este argumento con la forma de la gráfica; sin embargo, aquí aparece un avance con respecto a la etapa individual. Ángel, logró superar el teorema factual que había formulado, ya que acepta el argumento de Rosa. Alberto, al dar la conclusión, muestra por el momento que asoció el crecimiento y decrecimiento con el signo de las primeras diferencias.

En el problema 6, ven la parte de la gráfica donde se localizó el punto, como una recta y aplicaron lo del problema uno, lo hicieron bien. El crecimiento de la función lo asociaron con hacia dónde va la gráfica. Para el punto mínimo, dicen que ahí sería un vértice, argumentan pero toman un punto delante de él y les resulta positiva.

B Aquí sería como el vértice de una parábola / ¿Cómo pensarías que es?

R Haber déjenme ver / yo le puse la primera diferencia era positiva

A ¿Por qué?

R Porque mira / es un punto *x* ¿no? / Pero si se ve de aquí hacia la derecha todos los valores de *y* van hacia arriba no / pon tú que este es cinco, seis, siete, ocho, así / haca arriba, ¿no? /

A Aja

R Y entonces como dijimos hace rato / cuando va de menos a más / las primeras diferencias son positivas

B Aja

Para la gráfica de la función cúbica, dedujeron que las primeras diferencias son positivas cuando va de menos a más, parece que ellos identificaron que esto ocurre cuando la gráfica va subiendo, pero no lo dicen. Al obtener los valores, ratifican el signo indicado para las primeras diferencias.

En el problema 11, argumentan que la función es positiva en todo lo de arriba, las primeras diferencias son positivas cuando sube. Lo han hecho bien, y al parecer, ya se apropiaron de este conocimiento y en el último problema lo hacen bien, excepto para los puntos máximos o mínimos.

En este equipo, Alberto logró con base en la discusión realizada con sus compañeros, darle significado a la primera derivada, sus compañeros, sólo ratificaron lo que antes habían interpretado y no se logró la interpretación en los máximos y mínimos.

EQUIPO D

El equipo está integrado por Armando (A), Yeimi (Y) y Beatriz (B)

En la etapa individual, sólo Beatriz logró en algunos casos interpretar correctamente el signo, pero no logró apropiarse del conocimiento.

La discusión de este equipo me parece importante porque en la etapa individual no se logró lo que se había considerado en el análisis a priori, por lo que será interesante con base a las formulaciones que realicen, ver que tanto avanzan.

En la recta, argumentaron aritméticamente el valor de las primeras diferencias, no logrando asociar el signo con la forma de la gráfica. En la parábola, observaron la forma ascendente y descendente de los valores de *y*, lo relacionan con el signo de la derivada, pero esta interpretación la realizaron con la tabla, no con la gráfica.

En el análisis del problema 6, vieron la semejanza con la parábola del problema 4 y asignan negativas las primeras diferencias y positivas las segundas diferencias; el punto *b* lo ven como un punto que va bajando y por eso le asignan el signo negativo; para *c*, dicen que las primeras diferencias son positivas porque la curva va aumentando. Su formulación es correcta para las primeras diferencias.

Para la función cúbica, Armando tuvo ya la idea de que cuando la gráfica crece, las primeras diferencias son positivas; sin embargo en su discusión se deja convencer que está mal.

A Las primeras diferencias / acá serían positivas ¿no?

B ¿Por qué?

A Porque mira, van aumentando // entonces el intervalo pudiera ser /

B Serían negativas / dijiste negativas

A No, positivas, porque va aumentando // si mira, esto va aumentando, aumentando, aumentando y aquí vuelven a aumentar

B Pero / el intervalo en cuanto a *x*

A En cuanto a *x*

B Aja, bueno tomando el intervalo / si viene de aquí acá // serían negativas ¿no?

A No / porque negativas, si arranca de menos infinito hasta siete coma / ¿no?

Y Yo diría que son negativas

A ¿Porque negativas? //

Y Bueno si estuviéramos viendo desde menos diez a / o de aquí aquí, las diferencias serían negativa ¿no?

A Negativas

B Negativas, verdad que si son negativas

Y Aja

B Tú dijiste que eran positivas

A Si dije positivas

Y Aja

B Estábamos discutiendo eso y yo te decía que eran negativas y tú decías que eran positivas, por eso

A ¡Ah¡ es que yo lo estaba tomando con respecto a *y* y es con respecto a *x*

Después rectifican sus intervalos con base en los cálculos realizados, sin embargo no lograron darle un significado geométrico a los signos que obtuvieron; esto es, sólo los determinan mediante la tabla.

En el problema 11, las partes que marcaron pudieran ser válidas; sin embargo, lo importante son los argumentos que dan. Para las primeras diferencias marcan una parte que crece y finalmente, en el último problema, llama la atención que para todas las gráficas las prolongaron considerando cambio de concavidad, lo cual muestra que ampliaron su universo de gráficas. Su discusión la siguieron basando en proponer puntos y realizar un análisis aritmético. En esta discusión sólo quedó presente en ellos la idea de ascendente descendente.

Como conclusión dijeron: Aprendimos a sacar derivadas, más o menos y el tipo de gráfica que tiene una función.

Resultó importante el trabajo de este equipo ya que lograron asignar el signo de la primera derivada a una función creciente y decreciente, no lo hicieron con los máximos y mínimos.

En conclusión, se cumplió con lo que se había contemplado en el análisis a priori, esto es, después del trabajo en equipos, los once alumnos, al parecer, pueden interpretar geométricamente el signo de la primera derivada en la gráfica de una función, excepto para los puntos máximos y mínimos, pero a decir verdad, en el análisis a priori considerado al diseñar la Situación Didáctica, sólo se contempló que los alumnos entraran en conflicto al marcarles esos puntos, (lo cual sólo ocurrió con algunos de ellos en la etapa individual) pero no se consideró algún problema donde salieran del conflicto. En el trabajo realizado en equipos, no se logró que todos los alumnos cayeran en el conflicto, por lo que sugiero diseñar una nueva situación en donde se considere el análisis en esos puntos, se debe tener mucho cuidado en el diseño de los problemas.

6.2.2 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA SEGUNDA DERIVADA

Durante la etapa individual, aritméticamente los alumnos lograron obtener el signo de las segundas diferencias en las funciones indicadas; sin embargo, no pudieron relacionar el signo obtenido con la concavidad de la gráfica como se había contemplado en el análisis a priori. Enseguida se describen las formulaciones realizadas por el grupo de alumnos, en donde será interesante ver como lo hacen, se presentan entonces, los resultados más relevantes que se encontraron durante el trabajo en equipos, donde al igual que en la etapa individual, siguieron prevaleciendo los teoremas factuales.

EQUIPO A

En la etapa individual, solamente Mauricio logró asociar el signo de la segunda derivada a la concavidad en la gráfica de una función, incluyendo a las funciones lineales, donde determinó que es cero.

En las rectas, ratificaron lo obtenido en la etapa individual, esto es, que las segundas diferencias resultaron cero, Mauricio dijo que son cero por ser una función lineal. En la parábola, al asociar el signo de las primeras diferencias con el eje *x*, asociaron el signo de las segundas con el eje *y*.

E Las primeras diferencias dependen del eje *x* y las segundas diferencias dependen del eje *y* / las segundas diferencias aparecen constantes debido a que sólo hay una curva, en lo demás / ya no hay ninguna otra desviación / hacia otro cambio de sentido

M Si, bueno, toda función tiene / unas diferencias en las que se llega a una constante y / el número de la diferencia / primera, segunda, tercera / corresponde a los mayores valores del exponente de la variable o sea / si tú tienes x^2 la diferencia que va a ser constante es la segunda / si fuera x^6, la diferencia que va ser constante es la sexta diferencia

V Ah OK

M ¿Sí?

V Parece que sí

E Por el número de cambios de sentidos que tienen

V Que tienen, así es / sí / es lo mismo que cuando tienes una x^3 hay un cambio y ya después se van constantes o sea cuando ya presenta las dos curvas se dispara / el exponente es la última diferencia constante

Mauricio, no utilizó lo que antes en la etapa individual, había logrado interpretar, por lo que los tres establecieron el teorema factual: si $y > 0$ entonces $f''(x)>0$.

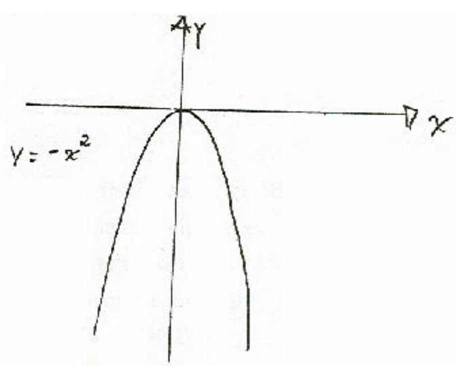
Con base en el problema anterior, para el problema 5, dibujaron la función $y = -x^2$ en donde incluso para cerciorarse, propusieron otra función cuadrática negativa y calcularon las segundas diferencias. Sin embargo, al concluir indicaron:

M El signo de la segunda diferencia nos dice para dónde abre la parábola

V Sí

E Así es

Para este problema reportan por escrito lo siguiente:



Por lo visto en el problema 4, el signo de la segunda diferencia indica hacia dónde abrirá la parábola.

En ésta parte, observo algo que me parece importante, ahora Mauricio en su discurso usa el argumento de que el signo de las segundas diferencias indica hacia donde abre la parábola, teniendo él presente la concavidad (esto lo afirmo basándome en los argumentos que Mauricio dio en la etapa individual), sin embargo, sus compañeros no lo ven de esa forma, ellos lo relacionaron con el eje *y*, en este caso, la afirmación que dio Mauricio coincidió con la interpretación que dieron sus compañeros por tratarse de una parábola con vértice en el origen.

En el problema 6, nuevamente Erwin los convenció de que el signo de las segundas diferencias los determina el eje *y*. Incluso aquí Mauricio no sólo aceptó el argumento de Erwin, sino que también cayó en el teorema factual; en la grabación se escucha:

M	A ver, no
V	Sí, las segundas diferencias / así como había comentado Erwin / la primera diferencia estaba dada por el signo de *x*, ahora la segunda esta dada por él
M	de *y*
V	Por el signo de *y*
M	Entonces las tres van a ser positivas
V	Las tres positivas
M	Ah OK
R	*a*, *b* y *c* van a ser positivas

Después en el problema 7, Para las segundas diferencias, establecieron intervalos y volvieron a asociar el signo con el eje *y*; pero al calcular los valores, aceptaron que se equivocaron. A pesar de que superaron el teorema factual, no lograron relacionar el signo de las segundas diferencias con la forma de la gráfica.

Finalmente, al no lograr superar el conflicto en el que se encontraron, en los últimos problemas, no lograron interpretar el signo de la segunda derivada, en el análisis a priori se había considerado que sí se lograría superar este conflicto que se provocó en el alumno. Cabe hacer mención que en la etapa individual, Mauricio había logrado superar este conflicto, pero no logró apropiarse del conocimiento construido.

En conclusión, con respecto a la segunda derivada, no se logró lo establecido en el análisis a priori, esto es, el equipo no interpretó geométricamente el signo de la segunda derivada de una función.

EQUIPO B

En la etapa individual, no lograron interpretar el signo de la segunda derivada de una función, por lo que aquí resultará importante ver que logran establecer.

En las rectas, argumentaron que las segundas diferencias son cero porque todos los valores son iguales y al restarlos resultaron cero. Siguieron argumentando aritméticamente fundamentados en las propiedades de los números reales.

En la parábola, obtuvieron que las segundas diferencias son dos, relacionaron el signo obtenido con las primeras diferencias y la gráfica, obtuvieron que cuando las primeras diferencias son positivas, entonces también lo son las segundas diferencias, pero cuando las primeras diferencias son negativas, entonces van como intercambiándose, considero que aquí hubieran podido relacionar el signo con la concavidad de la gráfica, sin embargo, por carecer de este concepto, no lograron hacerlo. Descubrieron que en el origen, las primeras diferencias son cero, pero no le dieron importancia.

Basados en el desarrollo anterior, establecieron una función con segundas diferencias negativas, considerando la parábola negativa y comprobaron las diferencias, concluyeron que en el primer y segundo cuadrante las segundas diferencias siempre eran positivas, mientras que en el tercero y cuarto cuadrante eran negativas.

Para las segundas diferencias del problema 6, nuevamente propusieron valores para los puntos que marcaron y realizaron las diferencias sin tener valores fijos, pero resulta difícil obtener las diferencias de las diferencias, por lo que terminaron restando también las ordenadas para calcular las segundas diferencias. Aquí no percibieron que realizaron lo mismo para obtener las primeras y segundas diferencias.

Para las segundas diferencias, en el problema 7, siguieron comparando puntos y establecieron los intervalos, se apoyaron en lo que antes habían concluido, al calcular las segundas diferencias, descubrieron algo importante, Miguel dijo que las segundas diferencias son negativas cuando la gráfica va aumentando y luego disminuyendo, sin embargo Gerardo regresó a la comparación de puntos, pero ya no dieron ninguna conclusión. Nuevamente, Miguel se acercó a la noción de concavidad.

G Las segundas diferencias son negativas

M A ver espérame / cuando va aumentando y luego disminuyendo la gráfica

G Aja // al mayor le vas a restar el menor y ...

En el problema 11, Para las segundas diferencias, nuevamente propusieron puntos, los compararon y efectivamente en la parte que marcaron, las segundas diferencias son positivas, aquí predijeron como sería el signo de las segundas diferencias tomando puntos y comparándolos, a pesar de que antes Miguel había percibido ya la forma de la gráfica, abandonó la idea y no lo relacionó con la concavidad.

Finalmente, en el último problema, para las segundas diferencias siguieron comparando valores pero sólo asignaron correctamente el signo de la primera gráfica. No percibieron que en la recta las segundas diferencias son cero.

En conclusión, en las primeras diferencias, Gerardo siempre consideró dos puntos y los comparó para obtener el signo, obteniendo éxito en los problemas de la situación, sin embargo, para las segundas diferencias, este método que él siguió utilizando, ya no le funcionó, Miguel apoyándose en los resultados de Gerardo, para las primeras diferencias predecía el signo, sin embargo Gerardo lo comprobaba, ahora en las segundas diferencias, Miguel basándose en la forma de la gráfica proponía el signo para las segundas diferencias, pero al persistir Gerardo en su método, ese fue el que siempre terminaron aplicando, lo cual trajo como consecuencia, que no vincularan el signo de la segunda derivada con la forma de la gráfica.

En este caso, creo que no se logró lo contemplado en el análisis a priori, porque los argumentos de Gerardo predominaron en los de Miguel.

EQUIPO C

En la etapa individual, solamente Rosa María estableció que la segunda derivada de las funciones lineales era cero.

En las funciones lineales, argumentaron aritméticamente que las segundas diferencias resultaron cero. Rosa agregó que eso ocurrió por ser una recta. En la parábola, iniciaron estableciendo el teorema factual: si la función es positiva, las segundas diferencias son positivas, porque obtuvieron que las segundas diferencias son positivas cuando la gráfica se traza en el primer y segundo cuadrante, pero al continuar la discusión, concluyeron que con las segundas diferencias se ve hacia adonde abre la gráfica.

A Haber, interpreta el signo de acuerdo a la gráfica, ¿no?

R El signo es positivo

A Si es positivo, además es constante ya siempre

R ¿Y de acuerdo a la gráfica?

A Es positivo, todo esto es positivo, a ver / pero como lo podíamos / a ver

R Todas las segundas diferencias son positivas / ahora ¿a qué se debe?

B Yo lo había relacionado con que como la gráfica sólo se traza del origen hacia arriba, eso indica incluir sólo el rango de cero a más infinito en cuanto a *y* / por eso todas son también positivas / por eso también repercute en las diferencias

A Si, si

R No, porque los valores de *y*

A Van de cero a más infinito

R Son positivos ¿no? Y mira las segundas diferencias también

A Porque la gráfica abre hacia arriba

R Ándale, como que el signo de las segundas diferencias indicó hacia adonde abre la gráfica

A Tienen algo más que agregar

R No

B Tampoco

Esta conclusión que formularon, parecería que lograron lo establecido en el análisis a priori, sin embargo, al parecer no lograron apropiarse del conocimiento adquirido, porque en el siguiente problema no es contundente su aplicación.

En el problema 5, propusieron la función $y = x^3 - 2x^2 + x - 8$, la graficaron y calcularon las segundas diferencias, luego en la gráfica indicaron en que parte son positivas y negativas. Aquí se pedía resolver el problema intuitivamente, por lo que el resultado se vio influenciado por los cálculos realizados; sin embargo, este análisis pudo en cierto momento fortalecer la conclusión que establecieron en el problema 4, pero no fue así, sólo se limitaron a obtener el signo y no lo interpretaron en la forma de la gráfica.

En el problema 6, Alberto dijo que las segundas diferencias eran cero por ser funciones lineales, pero Ángel le dijo que no, porque no son rectas y asignaron ya sin discutir que son positivas en los tres puntos.

En la función cúbica, dedujeron que las segundas diferencias tenían signo contrario a las primeras diferencias, el argumento de Rosa fue:

B ¿En qué intervalo las segundas diferencias son positivas?

A Cuando las primeras diferencias son positivas, pero ahora, a ver / ¿Cuando son positivas las primeras diferencias?

B De menos infinito a cero

A Según esto también van a ser positivas

R Pero // no. porque ve, las segundas diferencias son positivas cuando estos valores van de menor a mayor esto es, cero, dos, tres

B Aja

R Y son positivas las segundas diferencias

B Aja

R Entonces, aquí estas primeras diferencias van de mayor, no / van al revés como estas de mayor a menor

A No. van de menor a mayor

R No

A Van de menos infinito a cero

R Pero los valores que van a tener

A ¿Cómo los valores?

R Aquí van a ser todas positivas, en este / a ver / de este para acá / hasta aquí son todas positivas,

A Sí

R Pero sus valores van a ir de mayor a menor / entonces las segundas diferencias van a ser negativas

A ¿porque?

R Mira, por ejemplo aquí, los valores de y van de menos / de uno menor a uno mayor ¿no?

A Aja

R Y las primeras diferencias son positivas ¿no? Pero van de menor a mayor

A Las primeras diferencias

R Pero ya en las segundas diferencias es al contrario como van de mayor a menor / las segundas diferencias son negativas, por eso aquí las segundas diferencias son también negativas

B Y bien ¿cuándo son positivas?

A Cuando van de mayor a menor

Aquí se observó que no pueden validar su formulación establecida en el problema de la parábola.

Al calcular los valores, rectificaron y establecieron los intervalos con base en la tabla que habían obtenido. En el problema 11, para las segundas diferencias positivas, consideraron una parte donde las primeras diferencias eran negativas, cayeron en un conflicto y no salieron de él porque sólo marcaron la parte que está abajo del eje *y*, hasta antes del mínimo; nunca percibieron la concavidad.

En el problema 12, obtuvieron correctamente el signo de las segundas derivadas, cuando la función era lineal.

En conclusión, solamente lograron deducir que las segundas diferencias de las funciones lineales eran iguales a cero.

EQUIPO D

En la etapa individual, no lograron interpretar geométricamente la segunda derivada.

En las dos rectas argumentaron que las segundas diferencias eran cero, porque la resta de dos números iguales resulta cero. Trabajaron mucho la parte aritmética. En la parábola, las segundas diferencias resultaron dos, por ser una función cuadrática, entonces las diferencias dependen de los exponentes.

En el problema 5, consideraron el problema anterior y dibujaron una parábola negativa, esto es, con la parábola que abre hacia abajo las segundas diferencias serían negativas, lo dijeron, pero no se puede asegurar que se apropiaron de esta interpretación. Después trazaron una parábola negativa para ejemplificar una función con segundas diferencias negativas.

A Sería igual que ésta, pero en vez de ser x^2, sería $-x^2$, y la parábola nos queda hacia abajo / también con el vértice en el origen, pero se abre hacia abajo

B Y las segundas diferencias ya serían negativas

Y Entonces nada mas invirtiendo el signo

B Invirtiendo la parábola, o sea hacia abajo

Y Pero igual que parta del origen

B Aja

A Abriendo hacia abajo

En el análisis del problema 6, vieron la semejanza con la parábola del problema 4 y asignaron positivas las segundas diferencias en los tres puntos, en el punto *c*, Armando dijo que son negativas, pero después lo convencieron de que eran positivas.

En el problema 7, propusieron intervalos y alternaron el signo de las segundas diferencias con el de las primeras diferencias, para las primeras diferencias, lo hicieron bien; después, rectificaron sus intervalos con base en los cálculos realizados, sin embargo no lograron darle un significado geométrico a los signos que obtuvieron, esto es, sólo los determinaron mediante la tabla.

Para las segundas diferencias del problema 11, dijeron que podría ser una cuadrática, pero sólo marcaron una parte cuando baja, no toda la parte donde la gráfica era cóncava.

En el problema 12, me llamó la atención que todas las gráficas las prolongaron considerando cambio de concavidad, lo cual muestra que ampliaron su universo de gráficas; su discusión la siguieron basando en proponer puntos y realizar un análisis aritmético, en esta discusión sólo quedó presente en ellos la idea de ascendente y descendente.

Finalmente concluyeron: aprendimos a sacar derivadas, más o menos y el tipo de gráfica que tiene una función,

En conclusión, no lograron obtener un significado geométrico para la segunda derivada.

6.2.3 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA TERCERA DERIVADA

Con base en la etapa individual, donde solamente en algunos casos se logró dar la interpretación geométrica de la tercera derivada, sin que esto perdurara en los alumnos que lo habían establecido, en el trabajo en equipo, más que analizar como se formulan las respuestas por los integrantes de los equipos, se analizará nuevamente que tanto lograrán construir entre ellos y sí podrán apropiarse de ese nuevo conocimiento para ellos.

EQUIPO A

En la etapa individual, Erwin y Mauricio consideraron el extremo derecho de la gráfica para la interpretación de la tercera derivada, el cual consideraron equivalente a la primera derivada. Mario, logró hacerlo con la función lineal y en otro caso asignó correctamente el signo de la tercera derivada a una parte de la gráfica, pero no logró apropiarse de este resultado que el mismo había construido. También para un caso, Mauricio logró establecer el signo de la tercera derivada a una función, pero no se apropió de ese resultado.

En el problema 7, obtuvieron que las terceras diferencias son constantes y positivas por el signo de x cúbica, aquí Mauricio les explicó como se obtuvo ese valor constante, también Mario argumentó y sus compañeros aceptaron: que si se llega a un valor constante, la gráfica es continua.

En el problema 9, ratificaron lo anterior, y agregaron que el signo de las terceras diferencias lo determinan los extremos de las gráficas:

E En conclusión, el valor de las terceras diferencias, como decía Mauricio, lo marcan ya los extremos finales de la curva que se encuentran en el cuadrante uno y en el cuadrante tres, porque más por más da más y menos por menos da más

M Exacto

V Creo que si le invertimos el signo a la función, va a cambiar la posición de la gráfica, es decir, va ser

M Si le cambias el signo al

V Ya las terceras diferencias van a ser negativas

M Sí, claro

E Seria -6

M y 6 para el signo de x positivo

E Exactamente

En sus argumentos, además de lo que se pidió, establecieron una respuesta válida para el problema siguiente, en el cual propusieron la función $y = 2x^4 + 5x^3 + x^2 + x + 2$ trazaron la gráfica y establecieron dos intervalos: uno para las terceras diferencias positivas y otro para las negativas, sin embargo sólo en forma aproximada se puede considerar como válido el intervalo donde resultan positivas; argumentaron que usaron una función de cuarto grado, porque la mitad de las terceras diferencias son positivas y la mitad negativas, ya que en una de tercer grado, las terceras diferencias son constantes.

A pesar de que no lograron interpretar geométricamente el signo de las terceras diferencias, la construcción que realizaron contribuyó más adelante durante la etapa grupal a que Mauricio dibujara dos funciones: una con terceras diferencias positivas y otra con negativas.

En el problema 11 establecieron que el grado de la función es trece y por tanto no tienen bases para interpretar la tercera derivada.

Finalmente en el último problema, como se contempló en el análisis a priori, no se logró obtener la interpretación de la tercera derivada.

En conclusión, sólo en algunos casos establecieron una interpretación geométrica de la tercera derivada, sin embargo no lograron estabilizar este conocimiento. Para ellos fue importante el grado de la función polinomial en el cálculo de la diferencias.

EQUIPO B

Obtuvieron en el problema 9, que las terceras diferencias eran seis con signo positivo, Gerardo no abandonó la idea de comparación, lo cual como en los problemas anteriores, sólo le sirvió para comparar. Aquí les faltó nuevamente una conclusión para apropiarse del conocimiento construido.

En el problema 10, propusieron varias gráficas, las cuales correspondieron a funciones cúbicas, pero asignan los extremos de la gráfica con los signos de las terceras diferencias. Aquí perdieron la idea de asenso y descenso que tenían al inicio, ya que dividieron la gráfica y consideraron que decrece del origen hacia la izquierda y asciende hacia la derecha, lo cual originó que Gerardo al seguir comparando del lado izquierdo considerará los puntos propuestos a la inversa, obteniendo con esto el signo invertido, y en esta gráfica vieron que tiene una parte positiva y otra negativa para las terceras diferencias. El no haber concluido en el problema anterior, los llevó a esta contradicción. No percibieron que las restas que realizaron correspondían a las primeras diferencias, no a las terceras diferencias como dijeron.

Después, en el problema 11, dijeron que para las terceras diferencias, será lo mismo que para las primeras y consideraron una parte ascendente para el signo positivo. Por los problemas anteriores, era de esperarse ya este resultado; el cual volvieron a aplicar en el mismo problema.

En conclusión, no lograron interpretar la tercera derivada, al predominar un manejo aritmético, esto es, no pudieron relacionar las terceras diferencias con la forma de la gráfica.

EQUIPO C

En el problema 7, obtuvieron que las terceras diferencias eran constantes y positivas, para que las cuartas diferencias se eliminaran por ser tres el grado de la función. En el problema 9, las terceras diferencias eran constantes por el grado y positivas porque los valores de las segundas diferencias iban de menos infinito a más infinito. Dijeron que las terceras diferencias eran positivas porque la gráfica es simétrica, esa simetría no con respecto al eje sino a un punto, ésta simetría la asociaron con una regularidad de la gráfica.

Después, trazaron dos gráficas, y dijeron que sólo las invirtieron, esto es, copiaron la misma y la otra sólo la invirtieron. Aquí apareció algo muy importante, volvieron a leer el problema y concluyeron que no les pedían dos gráficas, sino una sola en la cual aparecieran los dos signos, pero también dijeron que esas gráficas les iban a servir y que con una cúbica no se podía, porque serían constantes, entonces tuvieron que tomar una de grado mayor y propusieron la función de cuarto grado $y = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 5$ y corroboraron los signos calculando las diferencias.

En el problema 11, para las terceras diferencias positivas, a pesar de que en el problema anterior ya tenían el significado, aquí sólo marcaron una parte, en la cual sí cumplía, aquí hubiera sido importante que hubieran considerado un intervalo mayor. En el siguiente problema, para la tercera derivada, no percibieron que debían tener una parte mayor de la gráfica. Asociaron la gráfica con una parábola, además dijeron que era cuadrática, olvidaron que sólo es una parte de la gráfica, aquí, prolongaron las dos gráficas como si fueran polinomiales, Rosa dijo que no importa toda la gráfica si sólo se está analizando un punto. Perduró en ellos hacer una asociación de los signos de las diferencias con los signos de los ejes.

En conclusión, no lograron interpretar el signo de la tercera derivada.

EQUIPO D

En la parábola, obtuvieron que sus terceras diferencias eran cero. Después, para el problema 9, las terceras diferencias, resultaron constantes por ser una función cúbica, su valor era seis, el significado geométrico fue que la gráfica va hacia más infinito.

En el problema donde se pidió trazar una función con terceras diferencias positivas y negativas, Armando dijo que con una función cúbica, le dijeron que ahí no aparecerían los dos signos, entonces prepusieron: "una de cuarto grado que tenga una curvita más que la de tercer grado", dijeron también que no podía ser una de segundo grado. La dibujaron, pero no marcaron el signo.

Para las terceras diferencias del problema 11, marcaron una parte donde la función crecía, esto es, la alternaron también con la segunda diferencia, aunque Armando dijo que era una cúbica, les faltó marcarla completa. En el problema 12, me llamó la atención que prolongaron todas las gráficas considerando cambios de concavidad, lo cual muestra que ampliaron su universo de gráficas. Su discusión la siguieron basando en proponer puntos y realizar una análisis aritmético, en ésta discusión sólo se vio presente en ellos, la idea de ascendente y descendente.

Concluyeron que aprendieron a sacar derivadas, más o menos y el tipo de gráfica que tiene una función,

En conclusión, tampoco lograron interpretar geométricamente el signo de las terceras derivadas en la gráfica de una función.

6.2.4 PRINCIPALES RESULTADOS OBTENIDOS EN LA ETAPA DE FORMULACIÓN

Una vez que se han descrito las construcciones realizadas por cada alumno durante el trabajo en equipo realizado, se presentan ahora de forma general los aspectos más relevantes encontrados al confrontarlos con los establecidos en el análisis a priori, así como algunas regularidades efectuadas por los equipos.

6.2.4.1 PRIMERA DERIVADA

1. En los cuatro equipos se logró asociar el signo de la primera derivada con la parte ascendente o descendente de la curva.

2. En los cuatro equipos se tuvo presente la idea de variación, ya que en las gráficas eligieron dos puntos y los compararon para obtener el signo de las primeras diferencias.

3. A pesar de que en la etapa individual establecieron teoremas factuales, que más adelante superaron, en el trabajo en equipo nuevamente los formularon.

4. En ningún equipo se percibió que los puntos que se localizaron en un máximo o mínimo de la gráfica se tenían que analizar en forma diferente a los demás.

5. Existe en el grupo de alumnos un marcado predominio algebraico sobre el geométrico.

6.2.4.2 SEGUNDA DERIVADA

1. En tres de los cuatro equipos, al analizar el signo de las segundas diferencias en la parábola, indicaron que: el signo indica hacia adonde abre la parábola, sin embargo, este criterio que ellos mismos construyeron, no lo aplicaron en los siguientes problemas.

2. En los cuatro equipos, se logró un buen manejo para el cálculo de las segundas diferencias, pero el resultado que obtenían, no lo relacionaron con la forma de la gráfica, sólo lo indicaban pensando que ahí terminaba el problema.

3. Sólo en un alumno, se pudo observar que empezaba a intuir la concavidad como el cambio de dirección en la curva, sin embargo nunca prospero su propuesta, ya que en su equipo predomino considerablemente lo aritmético sobre lo geométrico.

4. Apareció la presencia de teoremas factuales en los cuatro equipos.

6.2.4.3 TERCERA DERIVADA

1. Ningún equipo logró interpretar geométricamente el signo de la tercera derivada de una función, tres de los equipos lograron en al menos un caso asignar correctamente el signo a una gráfica, pero no pudieron apropiarse de este nuevo conocimiento para ellos.

2. Relacionaron el signo de la tercera derivada con la primera, esto es, en el último problema donde sólo se dio una parte de la gráfica, lo vincularon con la parte ascendente y descendente.

3. También asociaron el signo con la parte final de la gráfica.

4. Esta fue la parte donde los alumnos establecieron menos teoremas factuales.

6.2 ETAPA DE VALIDACIÓN

Durante la etapa anterior, se fueron presentando las principales validaciones que los alumnos realizaron para cada una de las derivadas sucesivas con base en la formulación de las mismas.

Lo más relevante de esta etapa, fue que en todos los equipos se logro validar el signo de la primera derivada, esto es, que si la primera derivada es positiva en un punto determinado de la gráfica, ahí la función es creciente y si es negativo entonces es decreciente. Faltó, pero debido a que tampoco se logro formular, que la primera derivada en un punto máximo y en un mínimo es igual a cero.

A pesar de que se abuso en el uso de teoremas factuales, afortunadamente, no se logró validar ninguno.

Con respecto a la segunda y tercera derivada, no se logró establecer una validación, debido a que en las formulaciones presentabas por los alumnos no se maduró el concepto obtenido y por tanto no se llegaban a apropiar del conocimiento construido, lo cual muestra que para que un alumno logre validar un resultado, este debe no solamente trabajarse una vez.

6.3 ETAPA DE INSTITUCIONALIZACIÓN

Finalmente se realizó la etapa de Institucionalización con la participación sólo de diez alumnos en una sesión de aproximadamente 1 hora. Para ésta etapa se contó con el apoyo de una computadora y un pintarrón.

Para iniciar esta etapa, les dije a los alumnos lo siguiente:

> *"Estamos en la etapa denominada: Institucionalización; aquí se pretende ver hasta donde ustedes solos son capaces de realizar un consenso con respecto a lo que aprendieron durante el desarrollo de la Situación Didáctica, esto es, quiero que efectúen una discusión en la que todos participen y logren establecer lo que aprendieron tanto en el trabajo individual como por equipos sobre la interpretación geométrica de las derivadas sucesivas de una función"*

Durante esta etapa pretendía dejarlos que discutieran sin que tuviera que intervenir, razón por la cual, creí que con las instrucciones que les había dado, era suficiente, sin embargo, no fue así, por lo que agregué:

> *"Específicamente, quiero que discutan sobre la interpretación geométrica de la primera derivada, de la segunda derivada y de la tercera derivada; esto es, quiero que obtengan que representa en una gráfica que el signo de la primera derivada sea positivo o negativo, lo mismo para la segunda y tercera derivada, ¿está claro? ... a ver quién dice algo"*

La primera derivada, no representó mayor problema, ya que con base en trabajo realizado, todos coincidieron en que si la primera derivada es positiva en un punto, la gráfica es creciente y si es negativa, entonces es decreciente; durante la discusión, dibujaron gráficas en el pintarrón.

Considero que funcionó la etapa de institucionalización para esta primera parte, tal y como se establece en la Ingeniería Didáctica, ya que se logró el consenso del grupo sin la intervención del profesor.

Para la segunda derivada, después de una gran discusión en donde predominó la presencia de teoremas factuales que no eran validados por el grupo, llegó un momento en que fue necesaria mi intervención, en donde realice varias preguntas con la finalidad de encaminar la respuesta, llegándose primero a establecer, que si la segunda derivada es positiva, la función era una parábola que abría hacia arriba; y si era negativa, entonces la parábola abría hacia abajo.

Al establecerse este consenso en el grupo, les pregunte:

> *"¿Qué pasa en una función de grado mayor que dos, esto es para una función polinomial?"*

Finalmente apareció en el grupo la noción de concavidad en una curva y su relación que tiene con la segunda derivada.

Como vi que la interpretación para la segunda derivada había sido un poco forzada, creí conveniente terminar ahí el trabajo, y les pedí que de tarea lograran establecer una interpretación geométrica para el signo de la tercera derivada y que me la entregaran al día siguiente, incluso que la podían discutir antes de entregarla; pero en ese momento Mauricio se levantó de su butaca y en una gráfica polinomial (de *n* grado) que estaba dibujada en el pizarrón, marcó una parte de la gráfica semejante a una función cúbica positiva y dijo que así era la gráfica de una función cuando la tercera derivada era positiva, después marcó otra invertida y dijo que ahí la tercera derivada era negativa.

Todos estuvieron de acuerdo y se dio por terminada la etapa de Institucionalización para la Situación Didáctica.

En ese momento el pintarrón contenía lo siguiente:

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

Una vez aplicada la Situación Didáctica *La interpretación geométrica de las derivadas sucesivas de una función* perteneciente a la Línea de Investigación *Pensamiento y Lenguaje Variacional* a un grupo de alumnos de la Preparatoria Ignacio Ramírez de la Universidad Autónoma del Estado de México, con la finalidad de analizar la noción de derivada que ellos mismos construyen al interactuar con la Situación Didáctica, se establecen las siguientes conclusiones:

? El grupo de alumnos que participaron en la investigación aún no ha cursado la asignatura de Cálculo, por tal motivo el desarrollo de la Situación Didáctica, no se ve afectada por los conocimientos que el alumno ya tiene. Todos los problemas de la Situación, son nuevos para el alumno, lo cual refleja al final el avance que el alumno logra con esta nueva forma de enseñanza para él.

? El grupo está formado por alumnos con los más altos promedios de la preparatoria, por lo que los resultados obtenidos serán importantes para analizar el estado educativo y proponer sugerencias aplicables a futuras reformas curriculares como estrategias de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

? Los alumnos desarrollaron un eficiente trabajo algebraico, no así en la forma gráfica, mostrando esto en los alumnos que la algebrización es predominante en los cursos de Matemáticas.

? Los alumnos mostraron un gran interés en la investigación cuando se utilizó la computadora como apoyo didáctico, lo cual refleja la necesidad de incorporar actividades de enseñanza y aprendizaje en los cursos curriculares utilizando esta herramienta.

? Al contar con el apoyo de la computadora, los alumnos lograron ampliar el universo de funciones, que en la etapa inicial de la investigación, estaba restringida sólo a gráficas en el intervalo de menos tres a tres.

? Prevaleció en el grupo de alumnos, el establecer teoremas factuales, de los cuales, en su gran mayoría fueron superados durante las cuatro etapas en que se aplicó la Situación Didáctica.

? El grupo de alumnos que participó en la investigación, en la etapa preliminar adquirió un manejo geométrico de las funciones, por lo cual los resultados obtenidos durante el análisis son muy importantes, porque los obstáculos que no pudieron superar son muy significativos para ser considerados dentro del plan de estudios del área de Matemáticas.

? Existen temas que generalmente el docente da por hecho que los alumnos tienen un cierto dominio sobre él, pero resulta que los alumnos carecen totalmente de esa noción, provocando que el estudiante caiga en obstáculos que le son difíciles de superar; por ejemplo: el caso de la concavidad que en el análisis a priori se contempló que el alumno si no tenía esa noción, la podía construir interpretando la forma de las gráficas y sin embargo, no fue así.

? En los programas de estudios, algunos temas se presentan de lo simple a lo complejo, pensando que ésta es la mejor forma de presentárselos a los alumnos, sin embargo, se observó en la Situación didáctica aplicada que no siempre es así, por ejemplo, varios alumnos tanto en la etapa individual, como en la grupal, determinaron que el signo de la segunda derivada, determina hacia adonde abre la parábola, sin embargo ya no pudieron aplicar esta noción a una función de grado mayor que dos.

? El grupo de alumnos mostró una soltura natural al realizar el trabajo en equipo, al parecer no les afectó la grabadora que tenían enfrente, por lo cual es importante y necesario explotar este tipo actividades de trabajo en equipo durante la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

? Generalmente los alumnos están acostumbrados a resolver los problemas en forma independiente, esto es, no aplican lo que aprenden, al analizar la Situación Didáctica, se encontraron varios casos en los cuales el alumno efectúa una interpretación correcta, pero mas adelante cuando se requería aplicarla, ya no la recordaba repitiendo en varias ocasiones el mismo método que había empleado.

? Por la forma de resolver algunos problemas de la situación, como por ejemplo: interpretar el signo de la primera derivada, se deduce que para que una noción se fije en el alumno, esta debe trabajarse en varias ocasiones, una sola vez no basta. Hay que recordar que el grupo de alumnos tiene los promedios más altos de la preparatoria y también ocurrió con ellos. Como docentes, en muchas ocasiones por considerar que un tema es fácil, no se refuerza a pesar de ser de los básicos para el curso.

? En nuestro trabajo de investigación, partimos de la hipótesis que la noción de derivada aparece en el pensamiento del alumno, sólo hasta que se desarrolla la noción de derivada sucesiva; ahora después de haber concluido esta segunda etapa de la investigación, considero que eso se logró en la etapa de institucionalización.

? El rediseñar una Situación Didáctica, generalmente arroja resultados positivos, en la primera etapa de la investigación realizada durante la Especialidad, no se logró que el alumno interpretara siquiera el significado geométrico del signo de la primera derivada, a pesar de que los alumnos con los cuales se trabajó ya habían cursado Cálculo. Ahora durante la segunda etapa de la investigación realizada durante la Maestría, después de rediseñar la Situación Didáctica, se logró totalmente interpretar la primera derivada con alumnos que no han cursado Cálculo.

? Después de concluir el trabajo de Investigación, se cumplió con el objetivo propuesto, ya que se logro que el grupo de alumnos interpretaras geométricamente las derivadas sucesivas de una func ión.

? La Situación didáctica aplicada o un rediseño de la misma, la consideró como una propuesta didáctica a implementar en el primer acercamiento a la derivada de una función en alumnos de bachillerato.

De manera complementaria a estas conclusiones deseo expresar algunas reflexiones que contrastan mis actitudes como docente durante los dieciséis años que llevo ejerciendo esta actividad, con la última etapa en la que ha influido de manera importante la Matemática Educativa en mi práctica docente.

- Considero que en esta última etapa, después de haberme incorporado a la realización de Proyectos de Investigación con la finalidad de analizar como es que el alumno construye el conocimiento, mi actitud ha cambiado dentro del aula, reflejando un mayor interés por parte de mis alumnos en aprender las Matemáticas que les presento.

- En las ocho preparatorias dependiente de la Universidad Autónoma del Estado de México, no hay ningún docente que haya realizado Investigación en Matemática Educativa, para el Nivel Medio Superior, reflejándose en los bajos porcentajes de aprovechamiento, por lo que considero necesario que a corto plazo se logren incorporar muchos docentes a este movimiento con la finalidad de aminorar el problema de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

- Después y durante el análisis de resultados, comprendí la importancia que tiene el trabajar con los alumnos Situaciones Didácticas de este tipo, por lo que seguiré trabajando al respecto para incorporarlas lo más pronto posible dentro del aula.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. 1992. Didactic Engineering. *Recherches en Didactique des Mathématiques.*

Artigue, M. 1995. La enseñanza de los procesos del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Gómez P. *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp 97-140). México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Bell, E. 1985. *Historia de las Matemáticas*. México. Fondo de Cultura Económica.

Brousseau, G. 1982. Les obstacles épistemologiques et les problémes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.

Cantoral, R. 1983. *Procesos del Cálculo y su desarrollo conceptual*. Tesis de Maestría, México, Cinvestav

Cantoral, R. 1997. Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición. *Serie: Antologías* No. 1, 1-24

Cantoral, R. 1997. Matemática Educativa. *Serie: Antologías* No. 1,81-98.

Cantoral, R. 1997. Pensamiento y lenguaje variacional. Seminario de Investigación del Área de Educación Superior. México, Cinvestav-IPN.

Cantoral, R. 1998. La aproximación socio-epistemológica a la Investigación en Matemática Educativa: El caso del Pensamiento y Lenguaje Variacional. En Farfán, R. *Resúmenes de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.*

Cantoral, R & **González, R** 1998. Diseño de situaciones didácticas de resignificación: el caso de la derivada como un organizador de las derivadas sucesivas. En Farfán, R. *Resúmenes de la XII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Carrather, T. 1981. En la vida diez, en la escuela cero. Siglo Veintiuno Editores S.A.

Chevallard, Y. 1997. *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Argentina. Aique.

Chevallard, Y. Bosh, M. y Gascón J. 1997. *Destudiar Matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona, España. Horsori.

Chimal, G.; Contreras, L. y Peña, M. 1998. *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas*. Tesina de especialidad en Didáctica de las Matemáticas. UAEH.

Contreras, L. 1999. *Análisis de textos e implicaciones didácticas en el uso del Calado en la Termodinámica*. Tesis de licenciatura. México. UAEM.

Contreras, L. 1998. *Cálculo Diferencial e Integral: Libro de texto con ejercicios programados*. México. UAEM.

Dolores C. 1996. *Una propuesta didáctica para la enseñanza de las derivadas en el bachillerato.* Tesis doctoral, Instituto superior pedagógico, Cuba.

Dreyfus, T. 1990. *Advanded Mathematical Tinking*. En Howson, A y Kahane, J. *Mathematics and Cognition. A reseach synthesis by the intemational group for the Psychology of Mathematics Education*. 113-1 34. Cambridge University Press.

Escobar, C 1989. *Enseñanza efectiva de las Matemáticas: Sugerencias didácticas*. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. 1997. *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Gálvez, G. 1994. La Didáctica de las Matemáticas. En Quaranta, M. (Comp) Didáctica de las Matemáticas. 39-50. México, Paidos.

González, R. 1999. *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una Ingeniería Didáctica de resignificación*. Tesis de maestría, México, Cinvestav.

Hitt, F. 1994. Estructurando un proyecto de Investigación. En Sánchez, E. y Santos, L. *Perspectivas en Educación Matemática*. Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.

Kuntzmann, J. 1978. ¿Adonde va la Matemática? Siglo Veintiuno Editores S.A.

Moreno, L. 1994. Matemáticas y Educación: Matemática Educativa. En Sánchez, E. y Santos, L. *Perspectivas en Educación Matemática*. Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.

Ontiveros, S. 1997. La didáctica de las matemática^ en la perspectiva sistémica. *Educación Matemática*. Vol. 9 No. 3, 18-34. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Peltier, M. 1993. Una visión general de la Didáctica de las Matemáticas en Francia. *Educación Matemática*. Vol. 5 No. 2, 4-12. Grupo Editorial Iberoamérica

Perrin, M. Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. 97- 147.

Resendiz, E & Cantoral, R. 1997. Las explicaciones de los profesores en la clase de matemáticas: La noción de variación. *Resúmenes de la XI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. México*.

Resnick, L. 1990. La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.

Sánchez, E. 1994. La noción de programas de investigación y la elaboración de proyectos de Investigación en Matemática Educativa. En Sánchez, E. y Santos, L. *Perspectivas en Educación Matemática*. Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.

Swokowski, E. 1989. Cálculo con *Geometría Analítica*. México. GrupoEditorial Iberoamérica.

ANEXO No. 1

SITUACIÓN DIDÁCTICA

Gráfica de una función

IT T CINVESTAV UAEH

Ricardo Cantoral & Rigoberto González
Lorenzo Contreras Garduño

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Presentación

La matemática educativa es una disciplina que estudia los procesos de construcción, transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar. Uno de sus objetivos es describir y explicar los fenómenos relativos en el proceso enseñanza aprendizaje, trata de entender como se va adquiriendo el conocimiento en los estudiantes mediante la aplicación de situaciones didácticas.

El presente cuestionario tiene como finalidad explorar los conceptos básicos que se tienen con respecto a la construcción e identificación de la gráfica de una función.

Está formado por doce situaciones didácticas, trata de dar tus respuestas lo más ampliamente posible, así como el procedimiento que utilizas para llegar a un resultado, si cometes errores, no los borres, sólo márcalos con una línea, ya que a nosotros nos interesa conocer todo el camino que utilizas para llegar a un resultado.

Algo muy importante que tienes que considerar, es que no te estamos evaluando, sólo queremos conocer cual es en este momento la concepción que tienes acerca de una función, porque este será nuestro punto de partida para una investigación que estamos realizando sobre la interpretación geométrica de las derivadas sucesivas de una función.

Nombre: ______________________________

Escuela: ______________________________

Grado escolar: ______________________________

Fecha: ______________________________

Hora de inicio: ______________________________

Hora de finalización: ______________________________

Gracias por tu cooperación.

PROYECTO:

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

Estudio:	**Gráfica de una función**

Problema 1	Construye la gráfica de la función cuya regla de correspondencia es $y = 2x - 1$
Respuesta:	

PROYECTO:

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

Estudio:	**Gráfica de una función**

Problema 2	Traza la gráfica de la función y = 1 - $2x$
Respuesta:	

PROYECTO:

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

Estudio:	**Gráfica de una función**

Problema 3	Después de resolver estas dos situaciones, escribe al menos cinco diferencias y semejanzas que veas en la construcción de las dos gráficas.
Respuesta:	

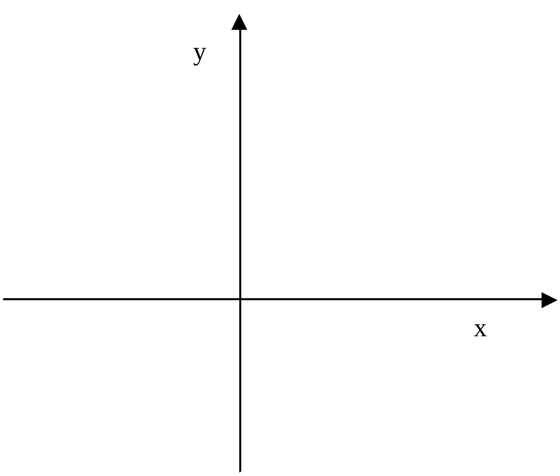
PROYECTO:

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

Estudio:	**Gráfica de una función**

Problema 4	Esboza la gráfica de la función con regla de correspondencia: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 9x + 40$. Escribe algunas características que observes de la gráfica (el mayor número posible).
Respuesta:	



PROYECTO:

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

Estudio:	**Gráfica de una función**

Problema 5	$f(10)$ es la función evaluada en x = 10 ¿Cuál es el valor de f(10) en la función $f(x) = \frac{1}{2} x^2 - 9x + 40$? Después de haber calculado este valor, que puedes agregar a la respuesta que diste en el ejercicio anterior.
Respuesta:	

PROYECTO:

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

Estudio:	**Gráfica de una función**

Problema 6	Ahora con la misma función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 9x + 40$ calcula el valor de $f(9)$ y $f(12)$ Después de haber calculado esto valores, que puedes decir con respecto a la gráfica de la función (escribe algunas características de la gráfica).
Respuesta:	

PROYECTO:

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

Estudio:	**Gráfica de una función**

Problema 7	Compara la gráfica de las funciones $y = x^3 - 8x^2 + 9x + 18$. Y $y = -x^2 + 12x + 18$ Escribe las diferencias y semejanzas que observes.
Respuesta:	

PROYECTO:

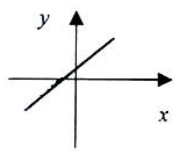
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

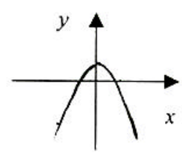
DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

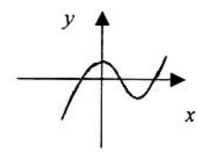
Estudio:	**Gráfica de una función**

Problema 8

Construye la gráfica de la función cuya regla de correspondencia es $y = 2x - 1$







x	*y*
-2	-3
-1	0
0	1
1	0
2	-3
3	0

x	*y*
-2	-3
-1	0
0	1
1	0
2	-3
3	0

Respuesta:

PROYECTO:

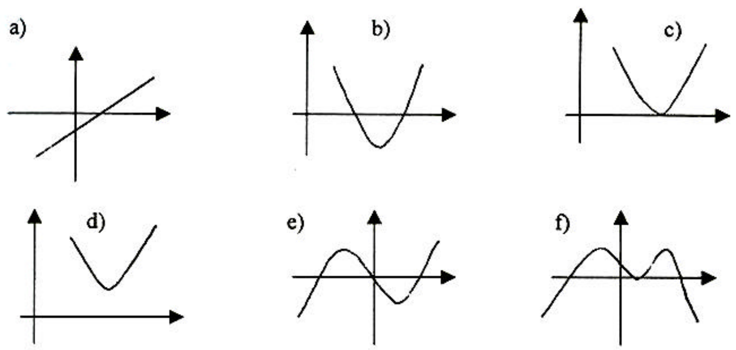
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

Estudio:	**Gráfica de una función**

Problema 9

Considerando que las gráficas siguientes corresponden a funciones polinomiales, de que grado crees que sea cada una ellas. Escribe un argumento para cada caso.



Respuesta:

PROYECTO:

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

Estudio:	**Gráfica de una función**

Problema 10	Que diferencias y semejanzas encuentras en las gráficas de los incisos b), c) y d). ¿Porqué crees que las gráficas tienen esa posición diferente?
Respuesta:	

PROYECTO:

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

Estudio:	**Gráfica de una función**

Problema 11	Escribe algunas características que observes en la gráfica del inciso f). (de ser posible más de cinco).
Respuesta:	

PROYECTO:

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

Estudio:	**Gráfica de una función**

Problema 12	La siguiente figura corresponde a la gráfica de la función $y = 4 - x^2$. Cual es el signo de la función en los siguientes intervalos: x ? (-∞, -2) x ? (-2, 0) x ? (0, 2) x ? (2, ∞) x ? (-2, 2) x ? (0, ∞) x ? (-∞, 0)
Respuesta:	

ANEXO No. 2

SITUACIÓN DIDÁCTICA

Interpretación geométrica

de las derivadas sucesivas de una función

IT T CINVESTAV UAEH

Ricardo Cantoral Uriza
Lorenzo Contreras Garduño

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

Presentación

La matemática educativa es una disciplina que estudia los procesos de construcción, transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar. Uno de sus objetivos es describir y explicar los fenómenos relativos en el proceso enseñanza aprendizaje, trata de entender como se va adquiriendo el conocimiento en los estudiantes mediante la aplicación de situaciones didácticas.

La presente situación didáctica formada por trece problemas, tiene como objetivo dar una interpretación geométrica de las derivadas sucesivas de una función.

Para el desarrollo de la situación didáctica, trata de dar tus respuestas lo más ampliamente posible, así como el procedimiento que utilizas para llegar a un resultado, si cometes errores, no los borres, sólo márcalos con una línea, ya que a nosotros nos interesa conocer todo el camino que utilizas para llegar a un resultado.

Algo muy importante que tienes que considerar, es que no te estamos evaluando, estamos realizando una investigación para analizar la forma en que se obtiene la interpretación geométrica de las derivadas sucesivas de una función.

Nombre: ____ **Edad:** __________

Escuela: ____ **Grado escolar:** _________

Fecha: _

Hora de inicio: _______________ **Hora de término:** ___________

Gracias por tu cooperación.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

Problema 1

Dadas las funciones $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$

a) Efectúa una tabulación e indica que comportamiento observas en sus ordenadas, esto es, para cualesquiera dos valores de *x*, ¿qué comportamiento se presenta en los valores de *y* ? Considera para tu análisis varias parejas de valores de *x*.

b) Realiza el trazo de las dos gráficas

c) Relaciona el comportamiento obtenido en a) con la gráfica de las funciones, ¿Qué puedes decir al respecto?

Respuesta:

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

Problema 2

a) En las tabulaciones anteriores obtén las primeras diferencias con las ordenadas.

b) Con base al problema anterior y específicamente en las gráficas, ¿qué significado le das al signo de estas primeras diferencias?

Respuesta:

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

Problema 3

a) Con las tabulaciones anteriores determina las segundas diferencias de las ordenadas.

b) ¿A qué crees que se debe que en tu tabla tengas esos resultados?

Respuesta:

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

Problema 4

Para la función $y = x^2$

a) Construye la gráfica de la función.

b) Determina las primeras diferencias de las ordenadas.

c) Interpreta en la gráfica el o los signos obtenidos de las primeras diferencias.

d) Obtén las segundas diferencias de las ordenadas.

e) Interpreta el signo de las segundas diferencias de las ordenadas apoyándote en la gráfica

Respuesta:

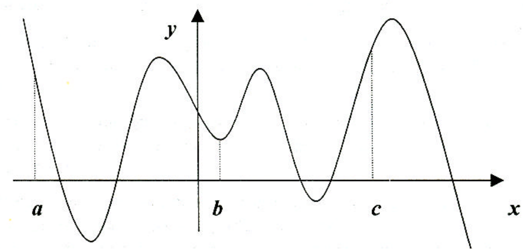
Problema 5	Apoyándote en el problema anterior, dibuja la gráfica de una función donde las segundas diferencias sean negativas, por ejemplo -3. Indica porque trazaste así ésta gráfica.
Respuesta:	

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

Problema 6

Considera la siguiente gráfica de una cierta función como la siguiente:



¿Cómo crees que sea el signo de las primeras y segundas diferencias en las puntos *a, b y c.* Escribe una justificación de tus respuestas.

Respuesta:

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

Problema 7	Dada la función $y = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ esboza la gráfica y sin efectuar operaciones: a) Establece en forma aproximada el o los intervalos en los cuales consideres que las primeras diferencias de las ordenadas son positivas y aquellos en donde sean negativas. b) Establece en forma aproximada el o los intervalos en los cuales consideres que ahora las segundas diferencias de las ordenadas son positivas y aquellos en donde sean negativas. c) Qué puedes decir de las terceras diferencias de las ordenadas ¿Cuál crees que sea su significado?, ¿Cómo lo interpretas en la gráfica?
Respuesta:	

Problema 8	Determina las primeras y segundas diferencias de las ordenadas con la función que aparece en el problema anterior. Con los resultados obtenidos, ¿ratificas o rectificas la interpretación que diste en el problema anterior? Justifica tu respuesta.
Respuesta:	

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

Problema 9	Calcula las terceras diferencias de las ordenadas y apoyándote en la gráfica, menciona la interpretación que le das al signo obtenido.
Respuesta:	

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

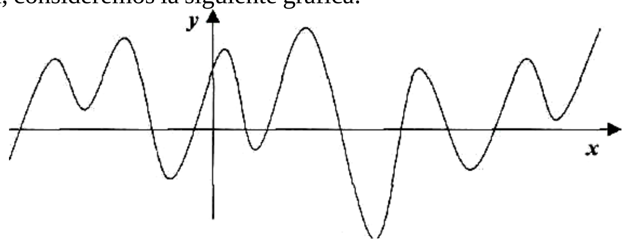
Problema 10	Dibuja una gráfica donde aparezca una parte en la cual las terceras diferencias resulten positivas y otra parte en donde sean negativas.
Respuesta:	

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

Problema 11

Para resumir la interpretación geométrica de las derivadas sucesivas de una función, consideremos la siguiente gráfica:



a) Remarca una parte de la gráfica donde la función sea positiva.

b) Remarca una parte de la gráfica donde la primera derivada de la función sea positiva, esto es, donde las primeras diferencias de las ordenadas de la función son positivas.

c) Remarca una parte de la gráfica donde la segunda derivada de la función sea positiva, esto es, donde las segundas diferencias de las ordenadas de la función son positivas.

d) Remarca una parte de la gráfica donde la tercera derivada de la función sea positiva, esto es, donde las terceras diferencias de las ordenadas de la función son positivas.

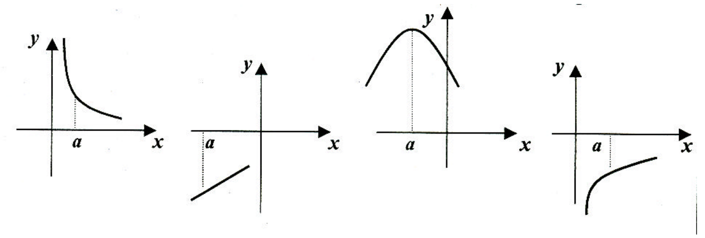
Respuesta:

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCIÓN

Problema 12

Durante toda esta situación didáctica, hemos trabajado con gráficas representadas globalmente, esto es, en todo su dominio. pero existen casos en los cuales encontramos la representación sólo de una parte de la gráfica, como se muestra a continuación, en las cuales se ha localizado un punto de abscisa *a* en la gráfica.



Indica cómo es el signo de la primera derivada, de la segunda y de la tercera derivada en el punto de abscisa *a* para cada una de las gráficas de la función.

Respuesta:

Problema 13	¿Cuál crees que fue el objetivo de esta situación didáctica? Escribe tus conclusiones finales, esto es, qué consideras tu que aprendiste después de haber realizado la situación didáctica
Respuesta:	