



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE HIDALGO



INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN TECNOLOGÍAS DE INFORMACIÓN Y SISTEMAS

MAESTRÍA EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS DESCRIPTORES NO
LINEALES CON RETARDOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN
CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

PRESENTA:

JAVIER ADRIÁN ROMERO VEGA

ASESORES:

DR. RAÚL VILLAFUERTE SEGURA

DR. VÍCTOR ESTRADA MANZO

PACHUCA HGO., MÉXICO 10 DE AGOSTO DE 2021



Mineral de la Reforma, Hgo., a 02 de junio de 2021

Número de control: ICBI-AACyE/658/2020
 Asunto: Autorización de impresión de tesis.

M. EN C. JULIO CÉSAR LEINES MEDÉCIGO
DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

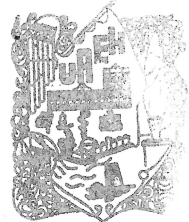
Por este conducto le comunico que el comité revisor asignado al Ing. Javier Adrián Romero Vega, alumno de la Maestría en Ciencias en Automatización y Control, le autoriza la impresión del proyecto de tesis titulado "Análisis de estabilidad de sistemas descriptores no lineales con retardos", bajo la dirección del Dr. Raúl Villafuerte Segura, y codirección del Dr. Víctor Estrada Manzo, en virtud de que se han efectuado las revisiones y correcciones pertinentes.

A continuación, se integran las firmas de conformidad de los integrantes del jurado.

Presidente:	Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz	UAEH	
Secretario:	Dr. Tonatiuh Hernández Cortés	UPP	
Vocal :	Dr. Raúl Villafuerte Segura	UAEH	
Suplente 1:	Dr. Víctor Estrada Manzo	UPP	
Suplente 2:	Dr. Jorge Said Cervantes Rojas	UAEH	

Atentamente
 "Amor. Orden y Progreso"

Dra. Liliam Rodríguez Guerrero
 Coordinadora de la Maestría en Ciencias
 en Automatización y Control
 Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
 Área Académica de Computación y Electrónica



LRG/APL

Ciudad del Conocimiento
 Carretera Pachuca-Tulancingo km 4.5 Colonia
 Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo,
 México. C.P. 42184
 Teléfono: +52 (771) 71 720 00 ext. 2250, 2251
 Fax 2109
 aacye_icbi@uaeh.edu.mx





Javier Adrián Romero Vega

Análisis de estabilidad de
sistemas descriptores no
lineales con retardos

Gracias a

CONACYT por la beca de Maestría
otorgada durante el periodo
Agosto 2019 - Julio 2021.
CVU 998399

CITIS-UAEH, por la formación
académica brindada durante el
posgrado y el apoyo para la
realización de la presente memoria.

Agradecimientos

Agradezco a CONACYT por la beca número 998399 para realizar mis estudios de maestría.

Agradezco a mis asesores de tesis, Dr. Raúl Villafuerte Segura y Dr. Víctor Estrada Manzo, por sus conocimientos invaluable que me brindaron para llevar a cabo esta investigación, el apoyo y sobre todo su paciencia y motivación para poder terminar el trabajo.

Agradezco a los miembros del jurado, Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz, Dr. Tona-tiuh Hernández Cortés y Dr. Jorge Said Cervantes Rojas por las contribuciones que hicieron al trabajo y por el tiempo que le dedicaron para revisarlo.

Agradezco a los Doctores de la Maestría en Ciencias en Automatización y Control de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo por todos los conocimientos brindados.

Agradezco a mis compañeros de generación por los momentos que compartimos a pesar de la situación que hemos vivido.

Agradezco a mi madre Ana María y mis hermanos Miguel Angel, Oscar David, Jesús Antonio, Patricia Suhey y Mario Daniel por el apoyo y aliento que me han brindado para poder concluir este trabajo.

Resumen

El estudio de sistemas no lineales ha sido un tema recurrente por la dificultad que se tiene. Para este estudio generalmente se desprecia algunas características importantes como los retardos, dado que aparecen en todos los sistemas mecánicos aun cuando casi imperceptibles. Para este trabajo se analizará y diseñara leyes de control para sistemas no lineales en forma descriptor. Una manera de obtener la forma descriptor es directamente creando una representación en espacio de estados a partir del modelado por el método Euler-Lagrange.

El análisis y diseño de control se llevarán a cabo por el método directo de Lyapunov, específicamente empleando funcionales de Lyapunov-Krasovskii. Además se emplearan la reecritura convexa del modelo no lineal, con el fin de obtener condiciones en forma de desigualdades matriciales lineales.

Para corroborar los resultados teóricos obtenidos se emplean ejemplos académicos, utilizando el software MatLab.

Abstract

The study of nonlinear systems has been a recurring theme because of the difficulty it has. For this study, some important features such as delays are generally neglected, since they appear in all mechanical systems even if almost imperceptible. For this work, control laws for nonlinear systems will be analyzed and designed in descriptor form. One way to obtain the descriptor form is to directly create a representation in state space from the modeling by the Euler-Lagrange method.

The analysis and control design will be carried out by the direct method of Lyapunov, specifically using Lyapunov-Krasovskii functionalities. In addition, convex rewriting of the non-linear model will be used in order to obtain conditions in the form of linear matrix inequalities.

To corroborate the proposed theoretical results, academic examples are used, using MatLab software.

Índice general

Agradecimientos	V
Resumen	VII
Abstract	IX
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Planteamiento del problema	3
1.3. Justificación	3
1.4. Objetivos	4
1.4.1. General	4
1.4.2. Específicos	4
1.5. Hipótesis	4
1.6. Metodología	4
2. Resultados Preliminares	5
2.1. Estabilidad de sistemas libres de retardos	5
2.1.1. Análisis de estabilidad de sistemas lineales libres de retardos	5
2.1.2. Análisis de estabilidad de sistemas no lineales libres de retardos	6
2.2. Estabilidad de sistemas con retardos	7
2.2.1. Análisis de estabilidad de sistemas lineales con retardo	7
2.2.2. Análisis de estabilidad de sistemas no lineales con retardos	12
2.3. Estabilidad de sistemas mediante representaciones convexas	14
2.3.1. Modelos convexos exactos	14
2.3.2. Análisis de estabilidad a través de su representación convexa	16
2.3.3. Diseño de controladores con LMIs	17
2.4. Estabilidad de sistemas descriptores	18
2.4.1. Análisis de estabilidad de sistemas descriptor	20
2.4.2. Diseño de controlador para sistemas descriptor	20
2.5. Estabilidad de sistemas descriptores no lineales con retardo	22
2.5.1. Análisis de estabilidad	23
2.5.2. Diseño del controlador	25

3. Resultados principales e implementación	29
3.1. Sistemas descriptor con múltiples retardos	29
3.1.1. Análisis de estabilidad de sistemas descriptores no lineales con múltiples retardos	30
3.1.2. Diseño de controlador para sistemas descriptores no lineales con múltiples retardos	33
3.2. Implementación de resultados	38
3.2.1. Comparación entre sistema en forma descriptor y sistema en forma estándar	39
3.2.2. Comparación entre dos diferentes diseños de control	43
4. Conclusiones y trabajos futuros	49
4.1. Conclusiones	49
4.2. Trabajos futuros	50
Bibliografía	51

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

Los sistemas de tipo retardado también conocidos como sistemas hereditarios o sistemas con retrasos de tiempo. Estos sistemas son descritos por ecuaciones diferenciales funcionales retardadas (EDFR), este término fue acuñado por A.D.Myshkis en [1]. En el libro [2], se estudia la estabilidad de los sistemas de tipo retardado (neutral y avanzado). La investigación de la estabilidad de estas ecuaciones están estrechamente relacionadas con el estudio de funciones analíticas que se representan por medio de cuasi-polinomios en el enfoque frecuencial. La distribución de las raíces de esos cuasi-polinomios han sido estudiados por Pontriagyn en [3], Thowsen para la estabilidad por el método de Routh-Hurwitz en [4] y Neimark desarrollado en [5], por mencionar algunos.

El uso del método directo de Lyapunov para la investigación de criterios de estabilidad de sistemas de tipo retardado ha sido aplicado por Krasovskii donde sugirió el uso de funcionales definidas sobre las trayectorias de las ecuaciones [6], el cual se usará en esta tesis. Razumikhin trabajó en otro enfoque para los problemas de estabilidad de las ecuaciones con retraso basado en una modificación del método directo de Lyapunov.

A los sistemas no lineales se les conoce como el conjunto de ecuaciones no lineales (algebraicas, diferenciales, integrales, funcionales, o alguna combinación de ellos) que describen un sistema físico o un proceso que no puede ser definido claramente con un conjunto de ecuaciones lineales [7].

La teoría de estabilidad de estos sistemas juegan un rol principal en sistemas de ingeniería, especialmente en el campo de la sistemas de control y automatización. La estabilidad de un sistema no lineal, con o sin control, es un requerimiento fundamental para la práctica. La

estabilidad significa que tanto la salida del sistema como la señal interna están dentro de los rangos permitidos por el (llamada estabilidad entrada acotada-salida acotada). Conceptualmente, existen diferentes tipos de estabilidad entre los cuales tres nociones básicas son las principales preocupaciones en dinámicas no lineales y sistemas de control: la estabilidad del sistema con respecto al punto de equilibrio, la estabilidad de la salida del sistema y la estabilidad estructural del sistema en si.

Entre las teorías que permiten el análisis de estabilidad, la teoría basada en Lyapunov es destacada por los métodos que establecen condiciones suficientes. Lyapunov publicó en [8], definiciones y criterios de estabilidad. Los resultados no se han limitado al análisis de estabilidad sino que también se ha desarrollado un campo de aplicación de estas técnicas en el diseño de sistemas de control no lineal mencionado en [9].

Convencionalmente, los sistemas lineales han dominado el campo de sistemas y control. Estos sistemas son relativamente fáciles de analizar, hoy en día existen una gran variedad de métodos para el diseño de control de dichos sistemas. Una aproximación de un sistema no lineal solo es posible dentro de un punto de equilibrio, para poder controlar los sistemas no lineales es conveniente diseñar controladores no lineales para poder manipular globalmente este tipo de sistemas [10]. Sin embargo, el desarrollo de este tipo de controles es muy complejo.

Una alternativa, es construir el sistema no lineal en un modelo convexo exacto mediante la técnica del sector no lineal, propuesto en [11]. En este tipo de modelo, es capaz de representar con exactitud o con un alto grado de exactitud un sistema no lineal, la dinámica local en diferentes regiones del espacio de estado está representada por modelos lineales. El modelo general del sistema se logra mediante la combinación de funciones conocidas como funciones de ponderación en donde se agrupan los términos no lineales mediante una combinación binaria y se construyen matrices "vértice", dependiendo del número de los términos no constantes.

Muchos procesos se modelan usando sistemas de ecuaciones diferenciales y algebraicas no lineales, mientras que las ecuaciones algebraicas consisten en correlaciones empíricas. Los sistemas descriptores (en inglés: singular systems o descriptor systems) han sido estudiados y aplicados a numerosos casos de estudio como: la forma general de las ecuaciones resultantes del modelado de sistemas de larga escala [12]. Debido a que no se había estudiado la estabilidad de sistemas descriptores no lineales con retardo hasta [13] y [14] donde obtuvieron condiciones para estabilidad y estabilización de dichos sistemas.

En el presente trabajo se propone condiciones de estabilidad y estabilización para la generalización de sistemas no lineales ahora con múltiples retardos para extender los resultados. La corroboración de las condiciones se harán en simulación.

1.2. Planteamiento del problema

Considere el siguiente modelo de un sistema descriptor no lineal con múltiples retardos de la forma:

$$\begin{aligned} E(x)\dot{x}(t) &= A(x)x(t) + \sum_{h=1}^d A_{\tau_h}(x)x(t - \tau_h) + B(x)u, \\ x(\theta) &= \phi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0], \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada, $E(x)$, $A(x)$, $B(x)$, y $A_{\tau_h}(x)$ se asumen que las funciones matriciales son suaves y acotadas; y $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m = \tau$ son los retrasos en el tiempo, $\phi \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ es la función inicial, donde $\mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ es el espacio de Banach de funciones continuas reales en los intervalos $[-\tau, 0]$ con la siguiente norma:

$$\|\phi\|_{\tau} = \max_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\phi(\theta)\|,$$

donde $\|\cdot\|$ representa la norma Euclidiana en \mathbb{R}^n . Se asume que para cada condición inicial $\phi \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, $t > 0$ existe una solución única $x(t, \phi)$ del sistema; mas aun, $x_t(\phi) = \{x(t + \theta, \phi) : \theta \in [-\tau, 0]\}$. Además, en este trabajo se considera que la inversa de $E(x)$ existe al menos en un compacto que incluye al origen [15].

Cabe mencionar que los resultados existentes para el análisis y control de sistemas no lineales con múltiples retardos de la forma (1.1) son limitados, o solo aplicados a un solo retardo. El análisis anteriormente planteado, pretende resolver este tipo de inconvenientes.

1.3. Justificación

La metodología de sectores no lineales permite reescribir de forma exacta un sistema no lineal, como lo es un sistema descriptor no lineal con retardos, como la suma convexa de sistemas lineales con retardos. Así, el análisis de estabilidad del sistema complejo se reduce al análisis de su representación convexa con retardos exacta, que combinando con el método directo de Lyapunov, podría arrojar condiciones de estabilidad y diseño en la forma de desigualdades matriciales lineales (LMIs, por sus siglas en ingles). Las condiciones de LMIs son importantes por que se pueden resolver en tiempo polinomial mediante técnicas de optimización convexa [16].

1.4. Objetivos

1.4.1. General

Analizar una clase de sistema descriptor no lineal con múltiples retardos para determinar condiciones para el diseño y sintonización de leyes de control empleando sector no lineal y funcionales de Lyapunov-Krasovskii.

1.4.2. Específicos

Para poder satisfacer el objetivo general, se deben cumplir los siguientes objetivos específicos:

- Estudiar los principios de los sistemas descriptores con retardo, así como las bases de la teoría de estabilidad de sistemas con retardo.
- Determinar representación exacta de un sistema descriptores no lineal con retardos utilizando la metodología de sector no lineal.
- Determinar condiciones suficientes bajo las cuales representación exacta a tratar de un punto de equilibrio sea estable.
- Aplicar los resultados obtenidos vía simulación para corroborar la efectividad de los resultados teóricos obtenidos.

1.5. Hipótesis

Se cree que es posible obtener condiciones de estabilidad de sistemas descriptores no lineales con múltiples retardos, mediante la técnica de sector no lineal y diseño de LMIs.

1.6. Metodología

La metodología empleada en este trabajo de investigación para la obtención de condiciones de estabilidad y estabilización de los sistemas descriptores con múltiples retardos son:

- Obtener una representación convexa de una clase de sistema descriptor con retardos mediante la metodología del sector no lineal.
- Uso de funcionales de Lyapunov-Krasovskii para determinar condiciones estabilidad y estabilización en forma de LMIs.

Capítulo 2

Resultados Preliminares

En este capítulo se presentara un resumen los los conceptos básicos que resultan relevantes para la presentación de la tesis. Estos conceptos son fundamentales para comprender la dificultad para garantizar la estabilidad de los sistemas no lineales, sistemas con retardos, sistemas no lineales con retardo, así como los modelos en forma descriptor y forma descriptor con retardo.

2.1. Estabilidad de sistemas libres de retardos

Los sistemas que se desea controlar, tienen un retraso en el tiempo, sea muy pequeño, pero existe. Para una mayor facilidad ese retraso puede ser despreciable. Simplificando el sistema lo que ha su vez conlleva a un análisis mas simple.

2.1.1. Análisis de estabilidad de sistemas lineales libres de retardos

Los sistemas lineales libres de retardos son escritos como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x_0 = x(0), \quad (2.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con punto de equilibrio $x = 0$. La tarea es demostrar que el sistema sea asintóticamente estable. Esto se puede verificar con dos técnicas mas comunes: la localización de las raíces del polinomio característico y el método directo de Lyapunov.

Teorema 2.1. [17] *El sistema (2.1) es asintóticamente estable si y solo si todos los valores propios de A tiene parte real negativa.*

Teorema 2.2. [17] *Sea el sistema (2.1), el punto de equilibrio es asintóticamente estable si y solo si dada una matriz $P > 0$, satisface la siguiente LMI*

$$A^T P + P A < 0$$

Demostración. *Se da una función de Lyapunov $V(x) = x^T P x$, por lo tanto, existe $P > 0$ para que sea candidata. Al derivar la función a lo largo de las trayectorias de (2.1) se tiene:*

$$\dot{V} < 0$$

$$\dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) < 0$$

$$(Ax(t))^T P x(t) + x^T(t) P (Ax(t)) < 0$$

$$x^T(t) (A^T P + P A) x(t) < 0$$

por lo tanto, se garantiza que derivada de la función candidata sea negativa si y solo si

$$A^T P + P A < 0.$$

2.1.2. Análisis de estabilidad de sistemas no lineales libres de retardos

La mayoría de los sistemas son de naturaleza no lineal. No obstante, es posible aproximar estos sistemas para poder considerarlos como sistemas lineales. La aplicación de técnicas no lineales permiten mejores resultados en el control del mismo. Una dificultad de estos sistemas es que existen mas de un punto de equilibrio y pueden ser inestables.

En general cuando se trabaja con sistemas dinámicos que son modelados mediante ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas y finitas. Habitualmente se utiliza notación vectorial para poder compactar así reescribir las ecuaciones en una sola ecuación diferencial vectorial de dimensión correspondiente [7]:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (2.2)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ representa los estados, $u \in \mathbb{R}^m$ son las variables de entrada con respecto al tiempo. Al hablar de estabilidad, nos referimos a que un punto de equilibrio del sistema (2.2) es estable si todas las soluciones que inicien en las cercanías del punto de equilibrio permanecen cerca del mismo, además se dice que es asintóticamente estable si todas las soluciones que inicien cerca de un punto de equilibrio, tienden al punto de equilibrio a medida que el tiempo se aproxima a infinito.

Teorema 2.3. [7] *Sea el sistema (2.2) con $u = 0$ y el origen $x = 0$ un punto de equilibrio, donde $f(\cdot) : D \subset \mathbb{R}^n$ es una función continuamente diferenciable. Sea:*

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=0},$$

entonces, el origen es exponencialmente estable si todos los valores propios de A tienen parte real negativa.

Teorema 2.4. [7] *Sea el sistema (2.2) con $u = 0$ y el origen $x = 0$ un punto de equilibrio y sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene al origen. Sea $V(\cdot) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que:*

$$V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(x) > 0 \quad \text{en} \quad D - \{0\}$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \text{en} \quad D.$$

Entonces, $x = 0$ es estable. Más aún,

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{en} \quad D - \{0\},$$

entonces $x = 0$ es asintóticamente estable.

La dificultad de analizar la estabilidad de los sistemas no lineales radica en extender esa cercanía de operación de la respuesta del sistema y garantizar la estabilidad.

2.2. Estabilidad de sistemas con retardos

Así como se mencionó anteriormente, analizar los sistemas no despreciando el retraso en el tiempo conlleva a un análisis más complejo, pero la mayoría de las veces el desempeño que se obtiene es mejor, sabiendo que se trabaja con más información del sistema.

2.2.1. Análisis de estabilidad de sistemas lineales con retardo

En general los sistemas la forma de las ecuaciones diferenciales funcional retardada (EDFR)(o ecuación diferencial funcional de tipo retardada) es:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_\tau x(t - \tau) + Bu(t), \\ \phi(\theta) &= x(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0], \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y $A, A_\tau \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Para una función $\phi \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ define la norma como

$$\|\phi\|_\tau = \max_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\phi(\theta)\|_\tau,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana en \mathbb{R}^n . Además se asume que para cada $\phi \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ y $\tau \geq 0$, (2.3). Entonces, $x_\tau(\phi) := \{x(t + \theta, \phi) : \theta \in [-\tau, 0]\} \in \mathbb{R}^n$ denota un segmento de la solución $x(t; \phi)$ y éste es el vector de estado perteneciente a un conjunto tal que $0 \in \mathcal{C}$.

Teorema 2.5 (Teorema de Razumikhin). [18] *Suponga que $\mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ en (2.3) toma valores de $\mathbb{R} \times$ (conjunto acotado de C) dentro del conjunto acotado de \mathbb{R}^n y $u, v, w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ son funciones continuas no decrecientes, $u(s)$ y $v(s)$ son positivas para $s > 0$ y $u(0) = v(0) = 0, v$ estrictamente creciente. Si existe una funcional continua $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

$$u(\|x\|) \leq V(t, x) \leq v(\|x\|), \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \text{ y } x \in \mathbb{R}^n$$

y la derivada de V a lo largo de la solución de (2.3) satisface

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -w(\|x(t)\|), \quad V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq V(t, x(t)) \quad (2.4)$$

para $\theta \in [-\tau, 0]$ entonces el sistema (2.3) es uniformemente estable.

Si, en adición, $w(s) > 0$ para $s > 0$, y entonces existe una función continua no decreciente $p(s) > s$ para $s > 0$ tal que la condición (2.4) se fortalece como:

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -w(\|x(t)\|) \text{ si } V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq p(V(t, x(t)))$$

para $\theta \in [-\tau, 0]$, entonces el sistema (2.3) es asintóticamente uniformemente estable. Si en adición $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$, entonces el sistema (2.3) es globalmente estable.

Teorema 2.6. [19] *Sea un sistema con retardo en el tiempo de la forma (2.5).*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t - \tau) \quad (2.5)$$

es exponencialmente estable si existen matrices $P > 0$, $Q > 0$ y un escalar $\beta > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + Q + 2\beta P & PA_\tau \\ A_\tau^T P & -e^{-2\beta\tau} Q \end{bmatrix} < 0 \quad (2.6)$$

entonces la solución esta acotada como

$$\|x(t, \phi)\| \leq \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} e^{-\beta t} \|\phi\|_\tau$$

donde las constantes positivas α_1 y α_2 son definidas como:

$$\alpha_1 = \lambda_{\min}(P) \quad (2.7)$$

$$\alpha_2 = \lambda_{\max}(P) + \tau \lambda_{\max}(Q) \quad (2.8)$$

Demostración. *Se considera la siguiente funcional candidata de Lyapunov-Krasovskii*

$$V(x_t) = x^T(t)Px(t) + \int_{-\tau}^0 x^T(t + \theta)e^{2\beta\theta}Qx(t + \theta)d\theta \quad (2.9)$$

donde P y Q son matrices definidas positivas.

De (2.9) se obtiene la desigualdad de la funcional

$$\alpha_1 \|x(t)\| \leq V(x_t) \leq \alpha_2 \|x_\tau\|_\tau^2 \quad (2.10)$$

La derivada temporal de (2.9) a lo largo de las trayectorias de (2.5) es:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x_t) &= 2x^T(t)P(Ax(t) + A_\tau x(t-\tau)) + x^T(t)Qx(t) \\ &\quad - x^T(t-\tau)e^{-2\beta\tau}Qx(t-\tau)d\theta \\ &\quad - 2\beta \int_{-\tau}^0 x^T(t+\theta)e^{2\beta\theta}Qx(t+\theta)d\theta \end{aligned}$$

A lo que claramente se tiene

$$\frac{d}{dt}V(x_t) + 2\beta V(x_t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} PA + A^T P + Q + 2\beta P & PA_\tau \\ A_\tau^T P & -e^{-2\beta\tau}Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}$$

La condición (2.6) implica que

$$\frac{d}{dt}V(x_t) + 2\beta V(x_t) \leq 0$$

Al resolver esta desigualdad se obtiene

$$V(x_t) \leq e^{-2\beta t}V(\phi)$$

Combinando la desigualdad por la izquierda de (2.10) se puede obtener la estimación

$$\alpha_1 \|x(t, \phi)\| \leq V(x_t(\phi)) \leq e^{-2\beta t}V(\phi) \leq \alpha_2 e^{-2\beta t} \|\phi\|_\tau^2$$

A lo que se concluye que

$$\|x(t, \phi)\| \leq \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} e^{-\beta t} \|\phi\|_\tau.$$

Teorema 2.7 (Cocientes de Rayleigh-Ritz). [20] Sea $A \in M_n$ una matriz Hermintiana, los eigenvalores de A ordenados como:

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \lambda_n = \lambda_{\max}. \quad (2.11)$$

Entonces

- Para todo $x \in \mathbb{C}^n$ se tiene que $\lambda_{\min}(A)\|x\|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \leq \lambda_{\max}(A)\|x\|^2$
- $\lambda_{\max} = \lambda_n(A) = \max_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \max_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$

$$\blacksquare \lambda_{\min} = \lambda_1(A) = \min_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \min_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$$

Demostración. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de \mathbb{C}^n adaptada a $\lambda(A)$ o sea que $Av_i = \lambda_i(A)v_i$ para todo $i = \mathbb{I}_n$. Por lo tanto, dado $x \in \mathbb{C}^n$, se tiene que

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle v_i, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, v_i \rangle|^2, \quad \langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A) |\langle x, v_i \rangle|^2 \quad (2.12)$$

Además sabemos que al ser orto normado entonces $\|x\| = 1$, tenemos que

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A) |\langle x, v_i \rangle|^2 \leq \lambda_n(A) \sum_{i=1}^n |\langle x, v_i \rangle|^2 = \lambda_n(A) \quad (2.13)$$

Análogamente se puede saber que

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A) |\langle x, v_i \rangle|^2 \geq \lambda_1(A) \quad (2.14)$$

Teorema 2.8. [21] SI H es una matriz hermitiana particionada como:

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12}^* & H_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

en donde H_{11} es no singular y H_{12}^* es el conjugado transpuesto de H_{12} , entonces:

$$\lambda(H) = \lambda(H_{11}) + \lambda(K_{22}), \quad (2.16)$$

donde K_{22} es el complemento de Schur de H_{11} dado por la formula (2.17):

$$K_{22} = H_{22} - H_{12}^* H_{11}^{-1} H_{12}. \quad (2.17)$$

Demostración. Suponemos que la matriz H es hermitiana particionada como (2.15). Sea Q una matriz particionada de la forma:

$$Q = \begin{bmatrix} I_k & -H_{11}^{-1} H_{12} \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

donde el bloque de 0 representa una matriz de $(n-k) \times k$. Entonces podemos verificar inmediatamente que

$$\hat{H} = Q^* H Q = \begin{bmatrix} H_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

es una matriz definida como (2.17), y las raíces de \hat{H} son las raíces de H_{11} y K_{22} y la igualdad se establece.

Corolario 2.1. *Bajo las condiciones del teorema (2.8), H es positiva definida si y solo si al menos la submatriz principal de H es positiva, simultáneamente con el complemento de Schur.*

Demostración. *La prueba comienza directamente desde (2.16). Así, mientras es suficiente la positividad de H encontrar un par, H_{11} y K_{22} , que son ambos positivos definidos, es una condición necesaria que el complemento de Schur de cada submatriz principal de H sea positivo definido si H es positivo definido.*

Es decir para cada submatriz que se pueda poner, por una transformación coherente, dentro de la posición de H_{22} , podemos escribir

$$H_{22} > H_{12}^* H_{11}^{-1} H_{12}, \quad (2.20)$$

en el que la relación de $H > K$ para matrices hermitianas del mismo orden significa que la matriz $H - K$ es definida positiva

Teorema 2.9 (Regla de derivación de Leibnitz). *Sean $R := [a \times b] \times [c \times d] \subset \mathbb{R}^2$ y*

- $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que existe y es continua $D_y f(x, y)$ en R .
- $\varphi, \psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ funciones tales que existen y son finitas las derivadas $\varphi'(y), \psi', \forall y \in [c, d]$

Definamos $F(y) := \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) \cdot dx, \forall y \in [c, d]$ (ver [22]). Entonces existe $F'(y), \forall y \in [c, d]$ y se verifica que

$$F'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} D_y f(x, y) dx + f(\psi(y), y) \cdot \psi'(y) + f(\varphi(y), y) \cdot \varphi'(y). \quad (2.21)$$

Demostración. *Consideremos $G : [a, b]^2 \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que*

$$G(t_1, t_2, t_3) = \int_{t_1}^{t_2} f(x, t_3) \cdot dx, \forall t_1, t_2 \in [a, b], \forall t_3 \in [c, d]. \quad (2.22)$$

En tal caso

$$F(y) = G(\varphi(y), \psi(y), y), \forall y \in [c, d]. \quad (2.23)$$

Aplicando la regla de la cadena obtenemos que existe $F'(y), \forall y \in [c, d]$, y además

$$F'(y) = D_1 G(\varphi(y), \psi(y), y) \cdot \varphi'(y) + D_2 G(\varphi(y), \psi(y), y) \cdot \psi'(y) + D_3 G(\varphi(y), \psi(y), y) \quad (2.24)$$

Podemos observa que

$$D_1G(\varphi(y), \psi(y), y) \cdot \varphi'(y) = f(\varphi(y), y) \cdot \varphi'(y) \quad (2.25)$$

$$D_2G(\varphi(y), \psi(y), y) \cdot \psi'(y) = f(\psi(y), y) \cdot \psi'(y) \quad (2.26)$$

Además se sabe que

$$D_3G(\varphi(y), \psi(y), y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} D_y f(x, y) dx \quad (2.27)$$

combinando los tres resultados anteriores se obtiene (2.21). Por lo que queda demostrado el teorema.

Notación: Un asterisco (*) se empleará para denotar términos simétricos en expresiones matriciales, así como en ecuaciones en línea:

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & (*) \\ B & C \end{bmatrix}, \quad A + A^T + B = A + (*) + B$$

Propiedad de congruencia: El "signo" de una expresión matricial se mantiene cuando se multiplica y posmultiplica por una matriz de rango pleno y su transpuesta

$$\left. \begin{array}{l} Q < 0 \\ P > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow PQP^T < 0, \quad \left. \begin{array}{l} Q > 0 \\ P > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow PQP^T > 0$$

2.2.2. Análisis de estabilidad de sistemas no lineales con retardos

En los sistemas reales siempre existirán los retrasos en el tiempo cuando la energía o un material es transmitido a través de un determinada ruta. Por lo tanto, el análisis de estabilidad y el diseño de control de los sistemas con retardo de tiempo es importante para aplicaciones prácticas de ingeniería.

Es bien sabido que la mayoría de los sistemas que se encuentran en los procesos de ingeniería son no lineales en esencia. Por ejemplo, en un sistema mecatrónico, los actuadores no pueden aumentar su potencia infinitamente y siempre existen no linealidades de saturación.

Un sistema no lineal con retardo tiene la siguiente forma

$$\dot{x} = f(x(t), x(t - \tau), u), \quad (2.28)$$

donde $f(\cdot)$ es una función no lineal. Además, la forma afín al control se representa como:

$$\dot{x} = f(x(t), x(t - \tau)) + g(x(t), x(t - \tau))u, \quad (2.29)$$

donde $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$ son funciones no lineales, así como $\tau > 0$ es el retraso del tiempo. Una forma de verificar estabilidad es construyendo un sistema de la siguiente manera:

$$\dot{x} = Ax(t) + A_d x(t - \tau) + Bu(t) + f(t, x(t - \tau)), \quad (2.30)$$

donde A , A_d y B son matrices conocidas, τ es el retraso del tiempo y $f(t, x(t - \tau))$ es el termino no lineal retrasado, que satisface la condición de Lipschitz o condición acotada de primer orden, por ejemplo

$$\|f(t, x(t - \tau))\| \leq \alpha \|x(t - \tau)\|,$$

donde $\alpha > 0$ es una constante. El sistema modelado como (2.30) que satisface la condición de Lipschitz. Tales sistemas han sido estudiado en la literatura [23]. Para obtener condiciones de estabilidad dependiente e independiente del retardo, podemos elegir una funcional candidata de Lyapunov-Krasovskii (L-K) [24].

Lo primero que se hace es elegir la funcional candidata de L-K como:

$$V(x_t) = x^T(t)Px(t) + (\epsilon_1 + \epsilon_2) \int_{t-\tau}^t x^T(\theta)x(\theta)d\theta. \quad (2.31)$$

Considerando el caso $u = 0$, y derivando la funcional a lo largo de (2.30), podemos obtener que si existe una matriz $P > 0$ y constantes $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ que satisface la siguiente desigualdad de Riccati

$$PA + A^T P + \epsilon_1^{-1} \alpha^2 PP + (\epsilon_1 + \epsilon_2)I + \epsilon_2^{-1} PA_d A_d^T P < 0, \quad (2.32)$$

esto implicara que $\dot{V} \leq 0$ (cuando $x = 0$, $\dot{V} = 0$), y significara que el sistema es estable. De forma similar, para el caso $u(t) = Kx(t)$, se obtiene si existe una matriz $P > 0$ y constantes $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ que satisfagan

$$P(A + BK) + (A + BK)^T P + \epsilon_1^{-1} \alpha^2 PP + (\epsilon_1 + \epsilon_2)I + \epsilon_2^{-1} PA_d A_d^T P < 0, \quad (2.33)$$

entonces, el control $u(t) = Kx(t)$ hace que en lazo cerrado el sistemas sea asintóticamente estable.

La mayor parte de la literatura existente considera los sistemas no lineales con retardo con ciertas estructuras y supuestos. Por ejemplo, [25] consideró el problema de control de una clase de sistema no lineal de primer orden con un retardo en el tiempo mediante el uso del control PI y un compensador de retardo, [26] consideró una clase de sistemas de retardo de tiempo no lineales afines mediante el uso de linealización exacta y el método del predictor de Smith.

2.3. Estabilidad de sistemas mediante representaciones convexas

Los sistemas anteriores ya han sido estudiados con varias técnicas, pero estas son de gran dificultad y en algunas metodologías no proporcionan un procedimiento para construirlos, como son a través del método directo de Lyapunov [7], etc. Para obtener otro método es por medio de modelos convexas lo cuales surgieron con los modelos Takagi-Sugeno (TS) [27]. En la cual se construyen matrices vértices lineales asociadas el sistema, con lo que se pueden analizar estabilidad de una manera mas simple pero a diferencia de solo tener un sistema lineal es un conjunto de sistemas lineales, que es su representación de un sistema no lineal.

2.3.1. Modelos convexas exactos

El modelado convexo exacto es una técnica capaz de representar un sistema no lineal en una suma de i modelos lineales locales interpolado por una función de pertenencia w . Así el control no lineal que se construye, es una suma convexa de los i controles lineales, lo que nos permite extender el rango de operación de un control lineal, lo que a su vez nos lleva a controlar un sistema no lineal.

Para la construcción de un modelo convexo se obtendrá a partir de la metodología del sector no lineal [11], que consiste en construir términos no constantes y acotados en sumas convexas:

$$z(\cdot) = w_0(z)z^0 + w_1(z)z^1,$$

donde z^0 y z^1 son el mínimo y máximo de la función $z(\cdot)$ dentro de un conjunto compacto Ω_x , además las funciones de ponderación se definen como:

$$w_0 = \frac{z^1 - z(\cdot)}{z^1 - z^0}, \quad w_1 = 1 - w_0,$$

lo que cumplen con la propiedad de suma convexa dentro de Ω_x , esto significa que $w_0(z) + w_1(z) = 1$ y $w_0, w_1 \in [0, 1]$.

Ejemplo 2.1. Para construir la función $z = x^2$ dentro del compacto $\Omega_x = \{x : 0 \leq x \leq 2\}$, se define el mínimo y el máximo de la función que son $z^0 = 0$ y $z^1 = 4$, por lo tanto se construye el modelo convexo como:

$$z = x^2 = \frac{4 - x^2}{4}(0) + \frac{x^2 - 0}{4}(4)$$

Se debe notar que este modelo solo es valido dentro del compacto Ω_x ya que si $x = 3$ nos da como resultado:

$$w_0 = \frac{4 - 3^2}{4} = -\frac{5}{4}, \quad w_1 = \frac{3^2 - 0}{4} = \frac{5}{4},$$

lo que viola la propiedad de suma convexa.

Al utilizar la técnica de modelo convexo exacto, las funciones de ponderación tienen algunas propiedades importantes:

$$z_1(\cdot) = w_0^1(z)z_1^0 + w_1^1(z)z_1^1 = \sum_{i_1=0}^1 w_{i_1}^1(z)z_1^{i_1}, \quad (2.34)$$

$$z_2(\cdot) = w_0^2(z)z_2^0 + w_1^2(z)z_2^1 = \sum_{i_2=0}^1 w_{i_2}^2(z)z_2^{i_2}, \quad (2.35)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= \sum_{i_1=0}^1 w_{i_1}^1(z)z_1^{i_1} + \sum_{i_2=0}^1 w_{i_2}^2(z)z_2^{i_2} = \sum_{i_1=0}^1 w_{i_1}^1(z) \sum_{i_2=0}^1 w_{i_2}^2(z)(z_1^{i_1} + z_2^{i_2}) \\ z_1 z_2 &= \left(\sum_{i_1=0}^1 w_{i_1}^1(z)z_1^{i_1} \right) \left(\sum_{i_2=0}^1 w_{i_2}^2(z)z_2^{i_2} \right) = \sum_{i_1=0}^1 w_{i_1}^1(z) \sum_{i_2=0}^1 w_{i_2}^2(z)(z_1^{i_1} z_2^{i_2}), \end{aligned} \quad (2.36)$$

en donde los términos z^1 y z^2 son elementos constantes.

Esta metodología se puede extender al caso matricial. Teniendo el sistema (2.2) y asumiendo que se puede reescribir a la forma dentro de un compacto Ω_x :

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u, \quad (2.37)$$

se debe identificar los términos no lineales de las matrices $A(x)$ y $B(x)$ y agruparlos en un vector $z(x) \in \mathbb{R}^p$, donde están acotada en Ω_x . Para cada termino del vector $z(x)$ se deben construir un par de funciones como:

$$w_0^i = \frac{z_i^1 - z_i(x)}{z_i^1 - z_i^0}, \quad w_1^i(x) = 1 - w_0^i(x) = \frac{z_i(x) + z_i^0}{z_i^1 - z_i^0}. \quad (2.38)$$

por lo tanto cada termino z_i se expresa como:

$$z_i(x) = \sum_{s_i=0}^1 w_{s_i}^i z_i^{s_i}.$$

Después se debe definir las funciones:

$$\mathbf{w}_i(x) = w_{i_1}^1(x)w_{i_2}^2(x) \cdots w_{i_p}^p(x), \quad (2.39)$$

con $r = 2^p$, $s_i \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, la combinación de máximos y mínimos que esta dado por $[i_1 i_2 \dots i_p]$, esto es una representación binaria de p -dígitos de $(i - 1)$. Estas funciones también cumplen con la propiedad de suma convexa en el compacto Ω_x .

Para cada termino de $\mathbf{w}_i(x)$ se debe calcular la matriz vértice asociada $A_i = A(x)|_{\mathbf{w}_i=1}$, $B_i = B(x)|_{\mathbf{w}_i=1}$ con $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Finalmente se obtiene la representación convexa de (2.37) la cual es:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i(z)(A_i x + B_i u), \quad (2.40)$$

Se debe notar que el número de las matrices vértices (A_i, B_i) siempre depende del número de términos no constantes que se encuentren en el sistema a modelar, esto es un inconveniente puesto que si existen muchos términos no lineales, las matrices vértices a construir serán muchas (depende por $r = 2^p$).

2.3.2. Análisis de estabilidad a través de su representación convexa

Para poder analizar los sistemas mediante su representación convexa se puede proponer una función candidata de Lyapunov:

$$V(x) = x^T(t)Px(t) \quad (2.41)$$

Teorema 2.10. [28] *El sistema (2.40) con $u = 0$ es asintóticamente estable si existe una matriz $P = P^T > 0$ tal que la siguiente LMI sea factible:*

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$$

Demostración. *Derivando la función candidata de Lyapunov (2.41) a lo largo de las trayectorias de (2.40) se tiene:*

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) < 0 \\ &= \left(\sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i(z)A_i x(t) \right)^T Px(t) + x^T(t)P \left(\sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i(z)A_i x(t) \right) < 0 \\ &= \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i(z)x^T(t) (A_i^T P + P A_i) x(t) < 0 \end{aligned}$$

debido al hecho que $\sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i(z) = 1$ y que $0 \leq \mathbf{w}_i(z) \leq 1$ entonces tenemos que las condiciones LMI son

$$A_i^T P + P A_i < 0,$$

a lo que queda demostrado el teorema.

Notación: Para las expresiones convexas se utilizará la siguiente notación abreviada:

- Sumas convexas simples: $\Upsilon_{\mathbf{w}} = \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i(x) \Upsilon_i$.
- Inversa de sumas convexas: $\Upsilon_{\mathbf{w}}^{-1} = (\sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i(x) \Upsilon_i)^{-1}$.
- Sumas convexas dobles: $\Upsilon_{\mathbf{w}\mathbf{w}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mathbf{w}_i(x) \mathbf{w}_j(x) \Upsilon_{ij}$.

Por lo tanto, el sistema (2.40) se puede escribir como:

$$\dot{x} = A_{\mathbf{w}}x + B_{\mathbf{w}}u. \quad (2.42)$$

2.3.3. Diseño de controladores con LMIs

Para el diseño de control utilizaremos un control por realimentación de estado $u = k(x)$, mediante la técnica utilizada en [29],[30], llamado control paralelo distribuido (PDC por sus siglas en ingles). En este concepto, la ley de control esta compuesta por una combinación de realimentaciones de estados utilizando las funciones \mathbf{w}_i . Por lo tanto la ley de control compartirá las mismas funciones \mathbf{w}_i .

$$u = \sum_{j=1}^r \mathbf{w}_j(x) K_j x = K_{\mathbf{w}} x, \quad (2.43)$$

Por lo tanto en lazo cerrado el sistema (2.40) bajo la ley de control (2.43) es:

$$\dot{x} = (A_{\mathbf{w}} + B_{\mathbf{w}}K_{\mathbf{w}}) x \quad (2.44)$$

Esta condición se da al analizar una doble suma $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mathbf{w}_i(z) \mathbf{w}_j(z) \Upsilon_{ij} < 0$, por lo que directamente se puede comprobar $\Upsilon_{ij} < 0$. Estos resultados resultan conservativos, por lo que existen algunos métodos para calcular estas LMIs, conocidas como relajación de sumas convexas. Algunas existentes como:

- Relajación de Tanaka [28]:

$$\Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} < 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, r\}^2 \Rightarrow \Upsilon_{\mathbf{w}\mathbf{w}} < 0. \quad (2.45)$$

- Relajación de Tuan [31]:

$$\frac{2}{r-1} \Upsilon_{ii} + \Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} < 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, r\}^2 \Rightarrow \Upsilon_{\mathbf{w}\mathbf{w}} < 0. \quad (2.46)$$

Teorema 2.11. [32] *El sistema (2.40) con la ley de control tipo PDC (2.43), es asintóticamente estable si existen matrices $X > 0$ y M_j , $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ tales que*

$$\Upsilon_{ij} = A_i X + X A_i^T + B_i M_j + M_j^T B_i^T,$$

bajo las condiciones (2.46). Más aún, las ganancias de control se calculan como $K_j = M_j X^{-1}$, $j \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Demostración. *Derivando la funcion candidata de Lyapunov (2.41) a lo largo de las trayectoras de (2.44) obtenemos:*

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} < 0 \\ &= (A_{\mathbf{w}} x + B_{\mathbf{w}} K_{\mathbf{w}} x)^T P x + x^T P (A_{\mathbf{w}} x + B_{\mathbf{w}} K_{\mathbf{w}} x) < 0 \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mathbf{w}_i(z) \mathbf{w}_j(z) x^T (A_i^T P + P A_i + K_j^T B_i^T P + P B_i K_j) x < 0 \end{aligned}$$

debido a que $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mathbf{w}_i(z) \mathbf{w}_j(z) = 1$, $0 \leq \mathbf{w}_i(z) \leq 1$ y $0 \leq \mathbf{w}_j(z) \leq 1$, tenemos las condiciones LMIs que son:

$$A_i^T P + P A_i + K_j^T B_i^T P + P B_i K_j < 0$$

Esto no es una LMI. Para poderla expresar en condiciones LMIs, pre y pos multiplicamos por una matriz $X = P^{-1}$ y agrupando los términos $M_j = K_j X$, $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ por lo que da como resultado

$$X A_i^T + A_i X + M_j B_i^T + B_i M_j < 0,$$

con esto queda demostrado.

2.4. Estabilidad de sistemas descriptores

Los sistemas descriptores, denominados también sistemas singulares, sistemas de semi-estado o sistemas diferencial-algebraicos; han sido uno de los campos principales de la investigación de la teoría de control, desde su introducción en [12], cuya forma es:

$$E(x) \dot{x} = A(x)x + B(x)u, \quad (2.47)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas; $A(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ son matrices acotadas y suaves en un compacto Ω_x , que incluye el origen. En esta investigación se trabaja cuando la matriz $E(x)$ es de rango completo dentro del

compacto Ω_x , por lo que, el sistema (2.47) puede ser descrito mediante su representación en espacio de estado estándar:

$$\dot{x} = E^{-1}(x)(A(x)x + B(x)u). \quad (2.48)$$

Para analizar el sistema (2.47) bajo una representación convexa, han existido algunos trabajos como en [33], [34], donde se aplica la metodológica del sector no lineal. Teniendo el sistema (2.47), se deben agrupar los términos no lineales de la matriz $E(x)$ en un vector $\zeta \in \mathbb{R}^q$, dentro del compacto Ω_x , por lo que se debe calcular los pesos asociados, sabiendo los máximos y mínimos de las no linealidades $\zeta_k \in [\zeta_k^0, \zeta_k^1]$, $k \in \{1, 2, \dots, q\}$ obteniendo:

$$\omega_0^k(x) = \frac{\zeta_k^1 - \zeta_k(x)}{\zeta_k^1 - \zeta_k^0}, \quad \omega_1^k(x) = 1 - \omega_0^k(x).$$

Las funciones $\omega(x)$ cumplen con la propiedad de suma convexa en Ω_x ; por lo tanto se puede construir las funciones:

$$\omega_k(\zeta) = \omega_{k_1}^1(x)\omega_{k_2}^2(x) \cdots \omega_{k_q}^q(x), \quad (2.49)$$

con $k \in \{1, 2, \dots, \rho\}$, $k_i \in \{0, 1\}$, $\rho = 2^q$, la combinación binaria de los máximos y mínimos de las no linealidades esta dada por $[k_1 k_2 \cdots k_q]$ que es la representación binaria de q -dígitos de $(k - 1)$. Estas funciones (conocidas como funciones de membresía), también cumplen la propiedad de suma convexa en Ω_x . Las matrices vértice en el lado derecho son $E_k = E(x)|_{\omega_k(\zeta)=1}$. Finalmente una representación exacta de (2.47) es

$$\sum_{k=1}^{\rho} \omega_k(\zeta) E_k \dot{x} = \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i(z) (A_i x + B_i u). \quad (2.50)$$

Por lo que bajo la notación anterior se puede escribir el sistema como:

$$E_\omega \dot{x} = A_w x + B_w u. \quad (2.51)$$

Para el análisis de estabilidad del sistema descriptor (2.47) bajo la representación convexa (2.50), se propone la construcción de un sistema aumentado como en [33], en donde se considera:

$$\dot{x} = \dot{x} \quad 0 \times \ddot{x} = A_w x + B_w u - E_\omega \dot{x},$$

donde se define un vector aumentado $\bar{x} = [x^T \quad \dot{x}^T]^T$; por lo tanto se puede re-escribir el sistema como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}}_{\dot{\bar{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ A_w & -E_\omega \end{bmatrix}}_{\bar{A}_{w\omega}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_{\bar{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ B_w \end{bmatrix}}_{\bar{B}_w} u. \quad (2.52)$$

Este nuevo sistema es conocido como *descriptor redundancy* [35], [34]. Note que el sistema anterior es singular; sin embargo, es libre de impulsos puesto que E_ω es invertible [36], [37].

2.4.1. Análisis de estabilidad de sistemas descriptor

Para el análisis de estabilidad del sistema (2.47) con $u = 0$ se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(x) = \bar{x}^T \bar{E}^T \bar{P} \bar{x}, \quad \bar{E}^T \bar{P} = \bar{P}^T \bar{E} \geq 0, \quad (2.53)$$

con la siguiente estructura:

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_1 \end{bmatrix}, \quad P_1 > 0,$$

con esta estructura se obtiene que:

$$V(x) = x^T P_1 x$$

lo cual es una función candidata para obtener condiciones de estabilidad.

Teorema 2.12. [38] *El sistema (2.47) es cuadráticamente estable si existe una matriz $P_1 = P_1^T > 0$ tal que*

$$\begin{bmatrix} P_2^T A_i + A_i^T P_2 & (*) \\ P_1 A_i - E_k^T P_2 + P_1 & -P_1 E_k - E_k^T P_1 \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad k \in \{1, 2, \dots, \rho\} \quad (2.54)$$

Demostración. *Se deriva la función candidata (2.53) a lo largo de las trayectorias de (2.52)*

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &< 0 \\ \dot{x}^T (\bar{A}_{\mathbf{w}\omega}^T \bar{P} + \bar{P}^T \bar{A}_{\mathbf{w}\omega}) \dot{x} &< 0 \\ \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{\rho} \mathbf{w}_j(z) \omega_k(\zeta) \dot{x}^T (\bar{A}_{jk}^T \bar{P} + \bar{P}^T \bar{A}_{jk}^T) \dot{x} &< 0 \end{aligned}$$

por lo que $\dot{V}(x) < 0$ si y solo si $\bar{A}_{jk}^T \bar{P} + \bar{P}^T \bar{A}_{jk}^T < 0$, a lo que expandiendo esta última desigualdad se tiene:

$$\begin{bmatrix} P_2^T A_i + A_i^T P_2 & (*) \\ P_1 A_i - E_k^T P_2 + P_1 & -P_1 E_k - E_k^T P_1 \end{bmatrix} < 0.$$

2.4.2. Diseño de controlador para sistemas descriptor

De igual forma, se pretende diseñar un control tipo PDC, considerando la siguiente ley:

$$u = k(x) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{\rho} \mathbf{w}_j(z) \omega_k(\zeta) K_{jk} x = K_{\mathbf{w}\omega} x, \quad K_{jk} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (2.55)$$

tal que el origen del sistema (2.47) en lazo cerrado bajo (2.55) sea asintóticamente estable; pero como se trabajara con la forma aumentada, también se debe reescribir la ley de control como:

$$u = k(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} K_{\mathbf{w}\omega} & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{K}_{\mathbf{w}\omega}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_{\bar{x}} \quad (2.56)$$

Teorema 2.13. [33] *El sistema (2.47) es asintóticamente estable con la ley de control tipo PDC (2.55) si existen matrices $X_1 > 0$ y X_2 tales que*

$$\begin{bmatrix} X_2 + X_2^T & (A_i X_1 + B_i M_{jk} - E_k X_2 + X_1)^T \\ A_i X_1 + B_i M_{jk} - E_k X_2 + X_1 & -E_k X_1 - X_1 E_k^T \end{bmatrix} < 0. \quad (2.57)$$

donde $P_1 = X_1^{-1}$ y $M_{jk} = K_{jk} P_1$.

Demostración. Derivando la función candidata (2.53) a lo largo de las trayectorias de (2.53), se tiene:

$$\dot{V} = \bar{x}^T ((\bar{A}_{\mathbf{w}\omega} + \bar{B}_{\mathbf{w}} \bar{K}_{\mathbf{w}\omega})^T \bar{P} + \bar{P}^T (\bar{A}_{\mathbf{w}\omega} + \bar{B}_{\mathbf{w}} \bar{K}_{\mathbf{w}\omega})) \bar{x} < 0,$$

esto se garantiza si y solo si $(\bar{A}_{\mathbf{w}\omega} + \bar{B}_{\mathbf{w}} \bar{K}_{\mathbf{w}\omega})^T \bar{P} + \bar{P}^T (\bar{A}_{\mathbf{w}\omega} + \bar{B}_{\mathbf{w}} \bar{K}_{\mathbf{w}\omega}) < 0$, pero al existir los términos $\bar{K}_{\mathbf{w}\omega}^T \bar{B}_{\mathbf{w}}^T \bar{P} + \bar{P}^T \bar{B}_{\mathbf{w}} \bar{K}_{\mathbf{w}\omega}$, que implican el producto de variables de decisión, se aplica la propiedad de congruencia pre y pos-multiplicando la desigualdad anterior por la matriz:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & X_1 \end{bmatrix}, \quad X_1 = P_1^{-1}, X_2 = -P_1^{-1} P_2 P_1^{-1}$$

y se obtiene que

$$\begin{aligned} & \bar{A}_{\mathbf{w}\omega} \bar{X} + \bar{B}_{\mathbf{w}} \bar{M}_{\mathbf{w}\omega} + \bar{X}^T \bar{A}_{\mathbf{w}\omega}^T + \bar{M}_{\mathbf{w}\omega}^T \bar{B}_{\mathbf{w}}^T < 0, \\ & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{\rho} \mathbf{w}_i(z) \mathbf{w}_j(z) \omega_k(\zeta) (\bar{A}_{ik} \bar{X} + \bar{B}_i \bar{M}_{jk} + \bar{X}^T \bar{A}_{ik}^T + \bar{M}_{jk}^T \bar{B}_i^T) < 0 \end{aligned}$$

por lo que $\dot{V}(x) < 0$ si y solo si $\bar{A}_{ik} \bar{X} + \bar{B}_i \bar{M}_{jk} + \bar{X}^T \bar{A}_{ik}^T + \bar{M}_{jk}^T \bar{B}_i^T < 0$, a lo que expandiendo esta ultima desigualdad se tiene:

$$\begin{bmatrix} X_2 + X_2^T & (A_i X_1 + B_i M_{jk} - E_k X_2 + X_1)^T \\ A_i X_1 + B_i M_{jk} - E_k X_2 + X_1 & -E_k X_1 - X_1 E_k^T \end{bmatrix} < 0.$$

2.5. Estabilidad de sistemas descriptores no lineales con retardo

Los sistemas descriptores no lineales con retardos que se trabajan son de la forma:

$$\begin{aligned} E(x)\dot{x}(t) &= A(x)x(t) + A_\tau(x)x(t - \tau) + B(x)u(t) \\ \phi(\theta) &= x(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0], \end{aligned} \quad (2.58)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control, las matrices $E(x)$, $A(x)$, $A_\tau(x)$ y $B(x)$ son matrices de dimensiones adecuadas, asumimos que son suaves y acotadas, estas podrían tener términos no constantes; $\tau \in \mathbb{R}^+$ es el retraso del tiempo, $\phi \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ es la función inicial, donde $\mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ es el espacio de Banach de funciones reales continuas en el intervalo $[-\tau, 0]$, con la siguiente norma

$$\|\phi\|_\tau = \max_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\phi(\theta)\|_\tau.$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana en \mathbb{R}^n . Además se asume que para cada $\phi \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ y $\tau \geq 0$, existe una única solución del sistema $x(t, \phi)$, además $x_t(\phi) = \{x(t+\theta, \phi) : \theta \in [-\tau, 0]\}$. Adicionalmente asumimos que la matriz $E(x)$ es invertible en Ω_x así es posible computar la forma de espacio de estado estándar con las siguientes notaciones:

$$\dot{x} = \tilde{A}(x)x(t) + \tilde{A}_\tau(x)x(t - \tau) + \tilde{B}(x)u(t), \quad (2.59)$$

con

$$\tilde{A}(x) = E^{-1}(x)A(x), \quad \tilde{A}_\tau(x) = E^{-1}(x)A_\tau(x), \quad \tilde{B}(x) = E^{-1}(x)B(x). \quad (2.60)$$

Un modelo convexo exacto es

$$\dot{x} = \tilde{A}_w(x)x(t) + \tilde{A}_{\tau w}(x)x(t - \tau) + \tilde{B}_w(x)u(t), \quad (2.61)$$

con

$$\tilde{A}_w = \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i(z)\tilde{A}_i, \quad \tilde{A}_{\tau w} = \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i(z)\tilde{A}_{\tau i}, \quad \tilde{B}_w = \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i(z)\tilde{B}_i. \quad (2.62)$$

Se puede observar que los sistemas (2.59) y (2.58) son equivalentes y su representación convexa establece estabilidad, pero, en el contexto de los modelos convexos, una cuestión depende de la cantidad y las estructuras de las matrices de vértices resultantes: en la mayoría de los casos (2.59) puede tener más términos no constantes y complejos que en (2.58).

La metodología tradicional para sistemas descriptores no lineales con retardos de la forma

$$\sum_{k=1}^{\rho} \omega_k(\zeta) E_k \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mathbf{w}(z) (A_i x(t) + A_{\tau i} x(t - \tau) + B_i u) \quad (2.63)$$

son igualmente basados en *descriptor redundancy* [33], que consisten en vectores aumentados $\bar{x}(t) = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T$ y $\bar{x}(t-\tau) = [x^T(t-\tau) \quad \dot{x}^T(t-\tau)]^T$, para reescribir (2.63) a la forma

$$\bar{E}\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_{\mathbf{w}\omega}\bar{x}(t) + \bar{A}_{\tau\mathbf{w}}\bar{x}(t-\tau) + \bar{B}_{\mathbf{w}}u, \quad (2.64)$$

con

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{\mathbf{w}\omega} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_{\mathbf{w}} & -E_{\omega} \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{\tau\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{\tau\mathbf{w}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{\mathbf{w}} \end{bmatrix}.$$

2.5.1. Análisis de estabilidad

Para el análisis de estabilidad se obtendrá una estimación exponencial para modelos no lineales de la forma (2.58) por medio de LMIs. Considerando la siguiente funcional candidata de Lyapunov-Krasovskii

$$V(x_t) = V_1 + V_2, \quad (2.65)$$

donde:

$$V_1 = \bar{x}^T(x)\bar{E}^T\bar{P}_{\mathbf{w}}\bar{x}(t), \quad V_2 = \int_{-\tau}^0 \bar{x}^T(t+\theta)\bar{E}^T\bar{Q}e^{2\alpha\theta}\bar{x}(t+\theta)d\theta,$$

con $\bar{E}^T\bar{P}_{\mathbf{w}} = \bar{P}_{\mathbf{w}}^T\bar{E} \geq 0$ y $\alpha > 0$ con estructuras

$$\bar{P}_{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_{2\mathbf{w}} & P_{3\mathbf{w}} \end{bmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_1 > 0, \quad Q_1 > 0.$$

Por la forma de las matrices \bar{E} , $\bar{P}_{\mathbf{w}}$ y \bar{Q} (2.65) la funcional candidata se puede escribir como:

$$V = x^T(t)P_1x(t) + \int_{-\tau}^0 x^T(t+\theta)Q_1e^{2\alpha\theta}x(t+\theta)d\theta,$$

así, la funcional es definida positiva y acotada por $c_1\|x(t)\|^2 \leq V(x_t) \leq c_2\|x_{\tau}\|_{\tau}^2$, con $c_1 = \lambda_{\min}(P_1)$ y $c_2 = \lambda_{\max}(P_1) + \tau\lambda_{\max}(Q_1)$.

Teorema 2.14. [13] *El origen del sistema (2.58), con $u = 0$ y una representación en su forma convexa exacta (2.63) y una forma de redundancia como (2.64), es exponencialmente estable si existen matrices $P_1 > 0$, P_{2j} , P_{3j} , $Q_1 > 0$, $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, $k \in \{1, 2, \dots, \rho\}$ y un escalar $\alpha > 0$ tal que (2.46) sostiene que*

$$\Upsilon_{ij}^k := \begin{bmatrix} P_{2j}^T A_i + A_i^T P_{2j} + Q_1 + 2\alpha P_1 & (*) & (*) \\ P_{3j}^T A_i + P_1 - E_k^T P_{2j} & -P_{3j}^T E_k - E_k^T P_{3j} & (*) \\ A_{\tau i}^T P_{2j} & A_{\tau i}^T P_{3j} & -e^{-2\alpha\tau} Q_1 \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

Más aún, la solución satisface la siguiente estimación exponencial:

$$\|x(t, \phi)\| \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} e^{-\alpha t} \|x_\tau\|_\tau$$

con $c_1 = \lambda_{\min}(P_1)$ y $c_2 = \lambda_{\max}(P_1) + \tau \lambda_{\max}(Q_1)$

Demostración. La derivada temporal de (2.65) a lo largo de las trayectorias de (2.64) está dado por $\dot{V}(x_t) = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$; donde

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \bar{x}^T(t) \bar{P}_w^T \bar{E} \dot{\bar{x}}(t) + \dot{\bar{x}}(t)^T \bar{E}^T \bar{P}_w \bar{x}(t) \\ &= \bar{x}^T(t) \bar{P}_w^T (\bar{A}_{w\omega} \bar{x}(t) + \bar{A}_{\tau w} \bar{x}(t - \tau)) + (\bar{A}_{w\omega} \bar{x}(t) + \bar{A}_{\tau w} \bar{x}(t - \tau))^T \bar{P}_w \bar{x}(t). \end{aligned}$$

Como se puede observar, \dot{V}_1 se puede reescribir en forma matricial

$$\dot{V}_1 = \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}(t - \tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{P}_w^T \bar{A}_{w\omega} + \bar{A}_{w\omega}^T \bar{P}_w & \bar{P}_w^T \bar{A}_{\tau w} \\ \bar{A}_{\tau w}^T \bar{P}_w & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}(t - \tau) \end{bmatrix},$$

mientras

$$\dot{V}_2 = \frac{d}{dt} \int_{-\tau}^0 x^T(t + \theta) Q_1 e^{2\alpha\theta} x(t + \theta) d\theta, \quad (2.67)$$

se puede trabajar con un cambio de variable $\phi = t + \theta$, $d\theta = d\phi$, tenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \frac{d}{dt} \int_{-\tau}^0 x^T(\phi) Q_1 e^{2\alpha(\phi-t)} x(\phi) d\phi \\ &= x^T(t) Q_1 x(t) - x^T(t - \tau) e^{-2\alpha\tau} Q_1 x(t - \tau) - 2\alpha \int_{-\tau}^0 x^T(t + \theta) Q_1 e^{2\alpha\theta} x(t + \theta) d\theta \end{aligned}$$

Agrupando términos

$$\dot{V}_2 = \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}(t - \tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{E}^T \bar{Q} & 0 \\ 0 & -e^{-2\alpha\tau} \bar{E}^T \bar{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}(t - \tau) \end{bmatrix} - 2\alpha \int_{-\tau}^0 \bar{x}^T(t + \theta) \bar{E}^T \bar{Q} e^{2\alpha\theta} \bar{x}(t + \theta) d\theta,$$

y tenemos

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}(t - \tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{P}_w^T \bar{A}_{w\omega} + (*) + \bar{E}^T \bar{Q} & \bar{P}_w^T \bar{A}_{\tau w} \\ \bar{A}_{\tau w}^T \bar{P}_w & -e^{-2\alpha\tau} \bar{E}^T \bar{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}(t - \tau) \end{bmatrix} \\ &\quad - 2\alpha \int_{-\tau}^0 \bar{x}^T(t + \theta) \bar{E}^T \bar{Q} e^{2\alpha\theta} \bar{x}(t + \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Ahora podemos resolverlo tomando

$$\begin{aligned} \dot{V} + 2\alpha V &= \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}(t - \tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{P}_w^T \bar{A}_{w\omega} + (*) + \bar{E}^T \bar{Q} & \bar{P}_w^T \bar{A}_{\tau w} \\ \bar{A}_{\tau w}^T \bar{P}_w & -e^{-2\alpha\tau} \bar{E}^T \bar{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}(t - \tau) \end{bmatrix} \\ &\quad + 2\alpha \bar{x}^T(x) \bar{E}^T \bar{P} \bar{x}(t) \\ \dot{V} + 2\alpha V &= \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}(t - \tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{P}_w^T \bar{A}_{w\omega} + (*) + \bar{E}^T \bar{Q} + 2\alpha \bar{E}^T \bar{P}_w & \bar{P}_w^T \bar{A}_{\tau w} \\ \bar{A}_{\tau w}^T \bar{P}_w & -e^{-2\alpha\tau} \bar{E}^T \bar{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}(t - \tau) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

por ultimo se expande las matrices:

$$\begin{aligned}\bar{P}_w^T \bar{A}_{w\omega} + \bar{A}_{w\omega}^T \bar{P}_w + \bar{E}^T \bar{Q} + 2\alpha \bar{E}^T \bar{P}_w &= \begin{bmatrix} P_{2w}^T A_w + A_w^T P_{2w} + Q_1 + 2\alpha P_1 & A_w^T P_{3w} + P_1^T - P_{2w}^T E_\omega \\ P_{3w}^T A_w + P_1 - E_\omega^T P_{2w} & -P_{3w}^T E_\omega - E_\omega^T P_{3w} \end{bmatrix} \\ \bar{P}_w^T \bar{A}_{\tau w} &= \begin{bmatrix} P_{2w}^T A_{\tau w} & 0 \\ P_{3w}^T A_{\tau w} & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{A}_{\tau w}^T \bar{P}_w &= \begin{bmatrix} A_{\tau w}^T P_{2w} & A_{\tau w}^T P_{3w} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ -e^{-2\alpha\tau} \bar{E}^T \bar{Q} &= \begin{bmatrix} -e^{-2\alpha\tau} Q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

se puede observar que una columna y una fila son ceros por lo que se puede reducir la matriz

$$\Upsilon_{w\omega} := \begin{bmatrix} P_{2w}^T A_w + A_w^T P_{2w} + Q_1 + 2\alpha P_1 & A_w^T P_{3w} + P_1^T - P_{2w}^T E_\omega & P_{2w}^T A_{\tau w} \\ P_{3w}^T A_w + P_1 - E_\omega^T P_{2w} & -P_{3w}^T E_\omega - E_\omega^T P_{3w} & P_{3w}^T A_{\tau w} \\ A_{\tau w}^T P_{2w} & A_{\tau w}^T P_{3w} & -e^{-2\alpha\tau} Q_1 \end{bmatrix} < 0.$$

Empleando la relajación (2.46) se tiene entonces que

$$\Upsilon_{ij}^k := \begin{bmatrix} P_{2j}^T A_i + A_i^T P_{2j} + Q_1 + 2\alpha P_1 & A_i^T P_{3j} + P_1^T - P_{2j}^T E_k & P_{2j}^T A_i \\ P_{3j}^T A_i + P_1 - E_k^T P_{2j} & -P_{3j}^T E_k - E_k^T P_{3j} & P_{3j}^T A_i \\ A_{\tau i}^T P_{2j} & A_{\tau i}^T P_{3j} & -e^{-2\alpha\tau} Q_1 \end{bmatrix} < 0.$$

2.5.2. Diseño del controlador

En esta sección se establece condiciones LMI para la estabilización exponencial de (2.64) con una ley de control de la forma:

$$u = K_{w\omega} x(t) + F_{w\omega} x(t - \tau) \quad (2.68)$$

definiendo $K_{w\omega} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^o \mathbf{w}_j(z(x)) \omega_k(\zeta(x)) K_{jk}$ y $F_{w\omega} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^o \mathbf{w}_j(z(x)) \omega_k(\zeta(x)) F_{jk}$. Note que (2.68) es una ley de control no lineal, desde que se incorpora las no linealidades de ambos lados de (2.58) por las funciones de membresía $\mathbf{w}_j(z(x))$ y $\omega_k(\zeta(x))$. Cuando se cierra el lazo del sistema tenemos que

$$\bar{E}(x) \dot{\bar{x}} = (\bar{A}_{w\omega} + \bar{B}_w \bar{K}_{w\omega}) \bar{x}(t) + (\bar{A}_{\tau w} + \bar{B}_w \bar{F}_{w\omega}) \bar{x}(t - \tau) \quad (2.69)$$

con $\bar{K}_{w\omega} = [K_{w\omega} \ 0]$ y $\bar{F}_{w\omega} = [F_{w\omega} \ 0]$ La funcional candidata de Lyapunov-Krasovskii con la que se trabaja es:

$$V = \bar{x}^T(t) \bar{E}^T \bar{P}_w^{-1} \bar{x}(t) + \int_{-\tau}^0 \bar{x}^T(t + \theta) \bar{E}^T \bar{Q} e^{2\alpha\theta} \bar{x}(t + \theta) d\theta, \quad (2.70)$$

con: $\bar{E}^T \bar{P}_w^{-1} = (\bar{P}_w^{-1})^T \bar{E} \geq 0$, $\bar{P}_w^{-1} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_{2w} & P_{3w} \end{bmatrix}^{-1}$, $\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P_1 > 0$, $Q_1 > 0$ y un escalar $\alpha > 0$.

Teorema 2.15. [14] *El origen del sistema (2.58), con una representación convexa exacta (2.63) y la forma (2.64), bajo la ley de control (2.68), es exponencialmente estable si existen matrices $P_1 > 0$, P_{2j} , P_{3j} , M_{jk} , N_{jk} , $R > 0$, $(i, j) \in \{1, 2, \dots, r\}^2$, $k \in \{1, 2, \dots, \rho\}$ y un escalar $\alpha > 0$ tal que (2.46) sostiene que*

$$\Upsilon_{ijk} := \begin{bmatrix} P_{2j} + P_{2j}^T + 2\alpha P_1 + R & (*) & 0 \\ P_{3j}^T + A_i P_1 + B_i M_{jk} - E_k P_{2j} & -E_k P_{3j} - P_{3j}^T E_k^T & (*) \\ 0 & N_{jk}^T B_i^T + P_1 A_{\tau i}^T & e^{-2\alpha\tau} R \end{bmatrix} < 0.$$

El control se calcula como $K_{jk} = M_{jk} P_1^{-1}$ y $F_{jk} = N_{jk} P_1^{-1}$, $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, $k \in \{1, 2, \dots, \rho\}$, adicionalmente $Q_1 = P_1^{-1} R P_1^{-1}$. Entonces la solución en lazo cerrado satisface la siguiente estimación exponencial:

$$\|x(t, \phi)\| \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} e^{-\alpha t} \|x_\tau\|_\tau$$

con $c_1 = \lambda_{\min}(P_1^{-1})$ y $c_2 = \lambda_{\max}(P_1^{-1}) + \tau \lambda_{\max}(Q_1)$

Demostración. Tomando la derivada temporal de (2.70) a lo largo de las trayectorias de (2.69), tenemos $\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$ con

$$\begin{aligned} V_1 &= \bar{x}^T (\bar{P}_w^{-1})^T \bar{E} \dot{\bar{x}}(t) + \dot{\bar{x}}^T \bar{E}^T \bar{P}_w \bar{x}(t) \\ &= \bar{x}^T (\bar{P}_w^{-1})^T ((\bar{A}_{w\omega} + \bar{B}_w \bar{K}_{w\omega}) \bar{x}(t) + (\bar{A}_{\tau w} + \bar{B}_w \bar{F}_{w\omega}) \bar{x}(t - \tau)) \\ &\quad + ((\bar{A}_{w\omega} + \bar{B}_w \bar{K}_{w\omega}) \bar{x}(t) + (\bar{A}_{\tau w} + \bar{B}_w \bar{F}_{w\omega}) \bar{x}(t - \tau))^T \bar{P}_w \bar{x}(t), \end{aligned}$$

esto se puede poner en forma matricial

$$\dot{V}_1 = \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}(t - \tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\bar{P}_w^{-1})^T (\bar{A}_{w\omega} + \bar{B}_w \bar{K}_{w\omega}) + (*) & (*) \\ (\bar{A}_{w\omega} + \bar{B}_w \bar{F}_{w\omega})^T \bar{P}_w^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}(t - \tau) \end{bmatrix}$$

y \dot{V}_2 se puede resolver de forma muy similar como en (2.67)

$$\dot{V}_2 = \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}(t - \tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{E}^T \bar{Q} & 0 \\ 0 & -e^{-2\alpha\tau} \bar{E}^T \bar{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}(t - \tau) \end{bmatrix} - 2\alpha \int_{-\tau}^0 \bar{x}^T(t + \theta) \bar{E}^T \bar{Q} e^{2\alpha\theta} \bar{x}(t + \theta) d\theta.$$

Ahora se suman \dot{V}_1 y \dot{V}_2

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}(t - \tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\bar{P}_w^{-1})^T (\bar{A}_{w\omega} + \bar{B}_w \bar{K}_{w\omega}) + (*) + \bar{E}^T \bar{Q} & (*) \\ (\bar{A}_{w\omega} + \bar{B}_w \bar{F}_{w\omega})^T \bar{P}_w^{-1} & -e^{-2\alpha\tau} \bar{E}^T \bar{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}(t - \tau) \end{bmatrix} \\ &\quad - 2\alpha \int_{-\tau}^0 \bar{x}^T(t + \theta) \bar{E}^T \bar{Q} e^{2\alpha\theta} \bar{x}(t + \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Se puede resolver, $\dot{V} + 2\alpha V$ a lo que resulta

$$\begin{aligned} \dot{V} + 2\alpha V = & \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}(t - \tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\bar{P}_{\mathbf{w}}^{-1})^T (\bar{A}_{\mathbf{w}\omega} + \bar{B}_{\mathbf{w}} \bar{K}_{\mathbf{w}\omega}) + (*) + \bar{E}^T \bar{Q} & (*) \\ (\bar{A}_{\mathbf{w}\omega} + \bar{B}_{\mathbf{w}} \bar{F}_{\mathbf{w}\omega})^T \bar{P}_{\mathbf{w}}^{-1} & -e^{-2\alpha\tau} \bar{E}^T \bar{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}(t - \tau) \end{bmatrix} \\ & + 2\alpha \bar{x}^T(t) \bar{E}^T \bar{P}_{\mathbf{w}}^{-1} \bar{x}(t). \end{aligned}$$

Entonces se debe cumplir

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} (\bar{P}_{\mathbf{w}}^{-1})^T (\bar{A}_{\mathbf{w}\omega} + \bar{B}_{\mathbf{w}} \bar{K}_{\mathbf{w}\omega}) + (*) + \bar{E}^T \bar{Q} + 2\alpha \bar{E}^T \bar{P}_{\mathbf{w}}^{-1} & (*) \\ (\bar{A}_{\mathbf{w}\omega} + \bar{B}_{\mathbf{w}} \bar{F}_{\mathbf{w}\omega})^T \bar{P}_{\mathbf{w}}^{-1} & -e^{-2\alpha\tau} \bar{E}^T \bar{Q} \end{bmatrix} < 0$$

y expandiendo la matriz se tiene

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \Upsilon_{(1,1)} & (*) & (*) & (*) \\ \Upsilon_{(2,1)} & \Upsilon_{(2,2)} & (*) & (*) \\ \Upsilon_{(3,1)} & \Upsilon_{(3,2)} & \Upsilon_{(3,3)} & (*) \\ \Upsilon_{(4,1)} & \Upsilon_{(4,2)} & \Upsilon_{(4,3)} & \Upsilon_{(4,4)} \end{bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} \Upsilon_{(1,1)} &= -(P_{3\mathbf{w}}^{-1} P_{2\mathbf{w}} P_1^{-1})^T (A_{\mathbf{w}} + B_{\mathbf{w}} K_{\mathbf{w}\omega}) + (*) + Q_1 + 2\alpha P_1^{-1} \\ \Upsilon_{(1,2)} &= (P_1^{-1})^T - (-P_{3\mathbf{w}}^{-1} P_{2\mathbf{w}} P_1^{-1})^T E_{\omega} + (A_{\mathbf{w}}^T + K_{\mathbf{w}\omega}^T B_{\mathbf{w}}^T) P_{3\mathbf{w}}^{-1} \\ \Upsilon_{(2,1)} &= (P_{3\mathbf{w}}^{-1})^T (A_{\mathbf{w}} + B_{\mathbf{w}} K_{\mathbf{w}\omega}) + P_1^{-1} + E_{\omega}^T P_{3\mathbf{w}}^{-1} P_{2\mathbf{w}} P_1^{-1} \\ \Upsilon_{(2,2)} &= -(P_{3\mathbf{w}}^{-1})^T E_{\omega} - (*) \\ \Upsilon_{(3,1)} &= -(A_{\tau}^T + F_{\mathbf{w}\omega}^T B_{\mathbf{w}}^T) P_{3\mathbf{w}}^{-1} P_{2\mathbf{w}} P_1^{-1} \\ \Upsilon_{(3,2)} &= (A_{\tau}^T + F_{\mathbf{w}\omega}^T B_{\mathbf{w}}^T) P_{3\mathbf{w}}^{-1} \\ \Upsilon_{(3,3)} &= -e^{-2\alpha\tau} Q_1 \\ \Upsilon_{(4,1)} &= \Upsilon_{(4,2)} = \Upsilon_{(4,3)} = \Upsilon_{(4,4)} = 0. \end{aligned}$$

Por lo que se reduce la matriz a la forma

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Upsilon_{(1,1)} & (*) & (*) \\ \Upsilon_{(2,1)} & \Upsilon_{(2,2)} & (*) \\ \Upsilon_{(3,1)} & \Upsilon_{(3,2)} & \Upsilon_{(3,3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix},$$

por le problema de agrupamiento de variables de decisión se requiere la propiedad de congruencia, por lo que se propone la matriz diagonal (\bar{P}^T, P_1)

$$\begin{bmatrix} P_1^T & P_{2\mathbf{w}}^T & 0 \\ 0 & P_{3\mathbf{w}}^T & 0 \\ 0 & 0 & P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Upsilon_{(1,1)} & (*) & (*) \\ \Upsilon_{(2,1)} & \Upsilon_{(2,2)} & (*) \\ \Upsilon_{(3,1)} & \Upsilon_{(3,2)} & \Upsilon_{(3,3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ P_{2\mathbf{w}} & P_{3\mathbf{w}} & 0 \\ 0 & 0 & P_1^T \end{bmatrix},$$

por lo que da como resultado:

$$\begin{bmatrix} P_1 Q_1 P_1 + 2\alpha P_1 + P_{2\mathbf{w}} + P_{2\mathbf{w}}^T & (*) & (*) \\ A_{\mathbf{w}} P_1 + B_{\mathbf{w}} K_{\mathbf{w}\omega} P_1 + P_{3\mathbf{w}}^T - E_{\omega} P_{2\mathbf{w}} & -E_{\omega} P_{3\mathbf{w}} - P_{3\mathbf{w}}^T E_{\omega}^T & (*) \\ 0 & P_1 A_{\tau}^T + P_1 F_{\mathbf{w}\omega}^T B_{\mathbf{w}}^T & -e^{-2\alpha\tau} P_1 Q_1 P_1 \end{bmatrix} < 0.$$

Aplicando unos cambios de variables $M_{\mathbf{w}\omega} = K_{\mathbf{w}\omega} P_1$, $N_{\mathbf{w}\omega} = F_{\mathbf{w}\omega} P_1$ y $R = P_1 Q_1 P_1$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} R + 2\alpha P_1 + P_{2\mathbf{w}} + P_{2\mathbf{w}}^T & (*) & (*) \\ A_{\mathbf{w}} P_1 + B_{\mathbf{w}} M_{\mathbf{w}\omega} + P_{3\mathbf{w}}^T - E_{\omega} P_{2\mathbf{w}} & -E_{\omega} P_{3\mathbf{w}} - P_{3\mathbf{w}}^T E_{\omega}^T & (*) \\ 0 & P_1 A_{\tau}^T + N_{\mathbf{w}\omega}^T B_{\mathbf{w}}^T & -e^{-2\alpha\tau} R \end{bmatrix} < 0,$$

empleando la relajación de Tuan (2.46) se obtiene

$$\begin{bmatrix} R + 2\alpha P_1 + P_{2j} + P_{2j}^T & (*) & (*) \\ A_i P_1 + B_i M_{jk} + P_{3j}^T - E_k P_{2j} & -E_k P_{3j} - P_{3j}^T E_k^T & (*) \\ 0 & P_1 A_{\tau i}^T + N_{jk}^T B_i^T & -e^{-2\alpha\tau} R \end{bmatrix} < 0.$$

Con esto se concluye el estudio de herramientas que se utilizarán para el desarrollo del tema principal de la tesis. Las ventajas de construir un sistemas no lineal con retardos a una representación convexa, así como teoremas para garantizar la estabilidad y estabilización.

Capítulo 3

Resultados principales e implementación

En este capítulo se presentan los resultados principales del presente trabajo de investigación, en el cual se aborda el problema principal, analizando el sistema (1.1) mediante las técnicas estudiadas y obteniendo condiciones de estabilidad y diseño de controladores. A partir de los resultados obtenidos se corroboran con simulaciones.

3.1. Sistemas descriptor con múltiples retardos

Teniendo el sistema (1.1), se trabaja con la metodología del sector no lineal para poder construir una representación convexa exacta, de tal forma:

$$\sum_{k=1}^{\rho} \omega_k(\zeta) E_k \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i(z) \left(A_i x(t) + \sum_{h=1}^d A_{\tau_h i} x(t - \tau_h) + B_h u \right). \quad (3.1)$$

Se utiliza la siguiente notación para reducir la escritura:

$$E_{\omega} = \sum_{k=1}^{\rho} \omega_k(\zeta) E_k, \quad A_{\mathbf{w}} = \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i(z) A_i, \quad A_{\tau_h \mathbf{w}} = \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i(z) A_{\tau_h i}, \quad B_{\mathbf{w}} = \sum_{i=1}^r \mathbf{w}_i(z) B_i.$$

Al igual que los otros sistemas descriptores que se han visto, se puede aplicar *descriptor redundancy* como en (2.52):

$$\bar{E} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_{\mathbf{w}\omega} \bar{x}(t) + \sum_{h=1}^d \bar{A}_{\tau_h \mathbf{w}} \bar{x}(t - \tau_h) + \bar{B}_{\mathbf{w}}(x) u, \quad (3.2)$$

definiendo las siguientes matrices:

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{\mathbf{w}\omega} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_{\mathbf{w}} & -E_{\omega} \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{\tau_h \mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{\tau_h \mathbf{w}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{\mathbf{w}} \end{bmatrix},$$

además de los vectores aumentados $\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & \dot{x}^T(t) \end{bmatrix}^T$, $\bar{x}(t-\tau_h) = \begin{bmatrix} x^T(t-\tau_h) & \dot{x}^T(t-\tau_h) \end{bmatrix}^T$ con $h \in \{1, 2, \dots, d\}$.

3.1.1. Análisis de estabilidad de sistemas descriptores no lineales con múltiples retardos

Para el análisis de estabilidad del sistema (1.1), con $u = 0$ se propone la siguiente funcional candidata de Lyapunov-Krasovskii

$$V(x_t) = \bar{x}^T(t) \bar{E}^T \bar{P}_w \bar{x}(t) + \sum_{h=1}^d \int_{-\tau_h}^0 \bar{x}^T(t+\theta) \bar{E}^T \bar{Q}_h e^{2\alpha\theta} \bar{x}(t+\theta) d\theta, \quad (3.3)$$

con las siguientes estructuras:

$$\bar{P}_w = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_{2w} & P_{3w} \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_h = \begin{bmatrix} Q_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{E}^T \bar{P}_w = \bar{P}_w^T \bar{E} \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad P_1 > 0, \quad Q_h > 0.$$

Teorema 3.1. *El origen del sistema (1.1) con $u = 0$ y una representación convexa (3.1) es exponencialmente estable si existen matrices $P_1 > 0$, P_{2j} , P_{3j} , $Q_h > 0$. $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, $h \in \{1, 2, \dots, d\}$ y un escalar $\alpha > 0$ tal que:*

$$\begin{bmatrix} \Psi_{(1)} & (*) & (*) & (*) & (*) \\ \Psi_{(2)} & -E_k^T P_{3j} - P_{3j}^T E_k & \dots & (*) & (*) \\ P_{2j}^T A_{\tau_1 j} & A_{\tau_1 i}^T P_{3j} & -e^{-2\alpha\tau_1} Q_1 & \dots & (*) \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & (*) \\ P_{2j}^T A_{\tau_d i} & A_{\tau_d i}^T P_{3j} & 0 & \dots & -e^{-2\alpha\tau_d} Q_d \end{bmatrix} < 0,$$

con $\Psi_{(1)} = P_{2j}^T + (*) + 2\alpha P_1 + \sum_{h=1}^d Q_h$, $\Psi_{(2)} = P_1 - E_k^T P_{2j} + P_{3j}^T A_i$, además $(i, j) \in \{1, 2, \dots, r\}^2$ y $k \in \{1, 2, \dots, \rho\}$.

Adicionalmente, la solución $x(t, \phi)$ de (1.1) satisface la siguiente estimación exponencial:

$$\|x(t, \phi)\| \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} e^{-\alpha t} \|\phi\|_{\tau},$$

con $c_1 = \lambda_{\min}(P_1)$ y $c_2 = \lambda_{\max}(P_1) + \sum_{h=1}^d \tau_h \lambda_{\max}(Q_h)$.

Demostración. *Se procede a derivar la funcional candidata*

$$\dot{V}(x_t) = \underbrace{\bar{x}^T(t) \bar{P}_w^T \bar{E} \dot{\bar{x}}(t) + \dot{\bar{x}}(t)^T \bar{E}^T \bar{P}_w \bar{x}(t)}_{V_1} + \underbrace{\sum_{h=1}^d \frac{d}{dt} \int_{-\tau_h}^0 \bar{x}^T(t+\theta) \bar{E}^T \bar{Q}_h e^{2\alpha\theta} \bar{x}(t+\theta) d\theta}_{V_2}.$$

Evaluando $\dot{V}(x_t)$ a lo largo de las trayectorias

$$V_1 = \bar{x}^T(t) \bar{P}_w^T \left(\bar{A}_{w\omega} \bar{x}(t) + \sum_{h=1}^d \bar{A}_{\tau_h w} \bar{x}(t - \tau_h) \right) + \left(\bar{A}_{w\omega} \bar{x}(t) + \sum_{h=1}^d \bar{A}_{\tau_h w} \bar{x}(t - \tau_h) \right)^T \bar{P}_w \bar{x}(t)$$

y resolviendo V_2 por la regla de Leibniz

$$V_2 = \sum_{h=1}^d \left\{ \bar{x}^T(t) \bar{E}^T \bar{Q}_h \bar{x}(t) - \bar{x}^T(t - \tau_h) e^{-2\alpha\tau_h} \bar{E}^T \bar{Q}_h \bar{x}(t - \tau_h) \dots \dots - 2\alpha \int_{-\tau_h}^0 \bar{x}^T(t + \theta) \bar{E}^T \bar{Q}_h e^{2\alpha\theta} \bar{x}(t + \theta) d\theta \right\}.$$

Por lo que $\dot{V}(x_t) + 2\alpha V(x_t)$ es

$$\dot{V}(x_t) + 2\alpha V(x_t) = \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}(t - \tau_1) \\ \vdots \\ \bar{x}(t - \tau_d) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Xi_{(1,1)} & (*) & \dots & (*) \\ \Xi_{(2,1)} & \Xi_{(2,2)} & \dots & (*) \\ \vdots & \dots & \ddots & (*) \\ \Xi_{(d+1,1)} & 0 & \dots & \Xi_{(d+1,d+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}(t - \tau_1) \\ \vdots \\ \bar{x}(t - \tau_d) \end{bmatrix},$$

$$\Xi_{(1,1)} = \bar{P}_w^T \bar{A}_{w\omega} + (*) + 2\alpha \bar{E}^T \bar{P}_w + \sum_{h=1}^d \bar{E}^T \bar{Q}_h$$

$$\Xi_{(2,1)} = \bar{A}_{\tau_1 w}^T \bar{P}_w$$

$$\Xi_{(2,2)} = -e^{-2\alpha\tau_1} \bar{E} \bar{Q}_1$$

$$\Xi_{(d+1,1)} = \bar{A}_{\tau_d w}^T \bar{P}_w$$

$$\Xi_{(d+1,d+1)} = -e^{-2\alpha\tau_d} \bar{E} \bar{Q}_d.$$

Sustituyendo las matrices de obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ x(t - \tau_1) \\ \dot{x}(t - \tau_1) \\ \vdots \\ x(t - \tau_d) \\ \dot{x}(t - \tau_d) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{(1,1)} & (*) & \dots & \dots & \dots & (*) \\ \Psi_{(2,1)} & \Psi_{(2,2)} & \dots & \dots & \dots & (*) \\ \Psi_{(3,1)} & \Psi_{(3,2)} & \Psi_{(3,3)} & \dots & \dots & (*) \\ \Psi_{(4,1)} & \Psi_{(4,2)} & \Psi_{(4,3)} & \dots & \dots & (*) \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \dots & (*) \\ \Psi_{(2m-1,1)} & \Psi_{(2m-1,2)} & \Psi_{(2m-1,3)} & \dots & \Psi_{(2m-1,2m-1)} & (*) \\ \Psi_{(2m,1)} & \Psi_{(2m,2)} & \Psi_{(2m,3)} & \dots & \dots & \Psi_{(2m,2m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ x(t - \tau_1) \\ \dot{x}(t - \tau_1) \\ \vdots \\ x(t - \tau_d) \\ \dot{x}(t - \tau_d) \end{bmatrix} < 0,$$

con los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
\Psi_{(1,1)} &= P_{2\mathbf{w}}^T + P_{2\mathbf{w}} + 2\alpha P_1 + \sum_{i=1}^d Q_i \\
\Psi_{(2,1)} &= P_1 - E_{\omega}^T P_{2\mathbf{w}} + P_{3\mathbf{w}}^T A_{\mathbf{w}} \\
\Psi_{(2,2)} &= -E_{\omega}^T P_{3\mathbf{w}} - P_{3\mathbf{w}}^T E_{\omega} \\
\Psi_{(3,1)} &= A_{\tau_1 \mathbf{w}}^T P_{2\mathbf{w}} \\
\Psi_{(3,2)} &= A_{\tau_1 \mathbf{w}}^T P_{3\mathbf{w}} \\
\Psi_{(3,3)} &= -e^{-2\alpha\tau_1} Q_1 \\
\Psi_{(4,1)} &= \Psi_{(4,2)} = \Psi_{(4,3)} = \dots = 0 \\
\Psi_{(2d-1,1)} &= A_{\tau_d \mathbf{w}}^T P_{2\mathbf{w}} \\
\Psi_{(2d-1,2)} &= A_{\tau_d \mathbf{w}}^T P_{3\mathbf{w}} \\
\Psi_{(2d-1,3)} &= 0 \\
\Psi_{(2d-1,2d-1)} &= -e^{-2\alpha\tau_d} Q_d \\
\Psi_{(2d,1)} &= \Psi_{(2d,2)} = \Psi_{(2d,3)} = \dots = \Psi_{(2d,2d)} = 0
\end{aligned}$$

Con esto se puede observar que existen filas y columnas con solo elementos nulos, por lo que se puede construir la matriz reducir a la forma:

$$\begin{bmatrix}
P_{2\mathbf{w}}^T + (*) + 2\alpha P_1 + \sum_{i=1}^d Q_i & (*) & (*) & (*) & (*) \\
P_1 - E_{\omega}^T P_{2\mathbf{w}} + P_{3\mathbf{w}}^T A_{\mathbf{w}} & -E_{\omega}^T P_{3\mathbf{w}} - P_{3\mathbf{w}}^T E_{\omega} & \dots & (*) & (*) \\
P_{2\mathbf{w}}^T A_{\tau_1 \mathbf{w}} & A_{\tau_1 \mathbf{w}}^T P_{3\mathbf{w}} & -e^{-2\alpha\tau_1} Q_1 & \dots & (*) \\
\vdots & \dots & \dots & \ddots & (*) \\
P_{2\mathbf{w}}^T A_{\tau_d \mathbf{w}} & A_{\tau_d \mathbf{w}}^T P_{3\mathbf{w}} & 0 & \dots & -e^{-2\alpha\tau_d} Q_d
\end{bmatrix} < 0.$$

Además al aplicar el esquema de relajación (2.46) se tiene:

$$\begin{bmatrix}
P_{2j}^T + (*) + 2\alpha P_1 + \sum_{h=1}^d Q_h & (*) & (*) & (*) & (*) \\
P_1 - E_k^T P_{2j} + P_{3j}^T A_i & -E_k^T P_{3j} - P_{3j}^T E_k & \dots & (*) & (*) \\
P_{2j}^T A_{\tau_1 i} & A_{\tau_1 i}^T P_{3j} & -e^{-2\alpha\tau_1} Q_1 & \dots & (*) \\
\vdots & \dots & \dots & \ddots & (*) \\
P_{2j}^T A_{\tau_d i} & A_{\tau_d i}^T P_{3j} & 0 & \dots & -e^{-2\alpha\tau_d} Q_d
\end{bmatrix} < 0.$$

3.1.2. Diseño de controlador para sistemas descriptores no lineales con múltiples retardos

En esta sección se establecerán condiciones para estabilización de (1.1), por lo tanto se dará la tarea en diseñar una ley de control tipo PDC con múltiples retardos:

$$u = K_{\mathbf{w}\omega}x(t) + \sum_{h=1}^d F_{h\mathbf{w}\omega}x(t - \tau_h), \quad (3.4)$$

con estructuras

$$K_{\mathbf{w}\omega} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{\rho} \mathbf{w}_j(z(x)) \omega_k(\zeta(x)) K_{jk}$$

$$F_{h\mathbf{w}\omega} = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{\rho} \mathbf{w}_j(z(x)) \omega_k(\zeta(x)) F_{hjk}.$$

En lazo cerrado el sistema se construye como:

$$\bar{E}\dot{\bar{x}} = (\bar{A}_{\mathbf{w}\omega} + \bar{B}_{\mathbf{w}}\bar{K}_{\mathbf{w}\omega})\bar{x}(t) + \sum_{h=1}^d (\bar{A}_{\tau_h\mathbf{w}} + \bar{B}_{\mathbf{w}}\bar{F}_{h\mathbf{w}\omega})\bar{x}(t - \tau_h), \quad (3.5)$$

con $\bar{K}_{\mathbf{w}\omega} = [K_{\mathbf{w}\omega} \ 0]$ y $\bar{F}_{h\mathbf{w}\omega} = [F_{h\mathbf{w}\omega} \ 0]$.

La funcional candidata de Lyapunov-Krasovskii que se trabajará es:

$$V(x_t) = \bar{x}^T(t) \bar{E}^T \bar{P}_{\mathbf{w}}^{-1} \bar{x}(t) + \sum_{h=1}^d \int_{-\tau_h}^0 \bar{x}^T(t + \theta) \bar{E}^T \bar{Q}_h e^{2\alpha\theta} \bar{x}(t + \theta) d\theta \quad (3.6)$$

con la siguiente estructura:

$$\bar{E}^T \bar{P}_{\mathbf{w}}^{-1} = \bar{P}_{\mathbf{w}}^{-T} \bar{E} \geq 0, \quad \bar{P}_{\mathbf{w}}^{-1} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_{2\mathbf{w}} & P_{3\mathbf{w}} \end{bmatrix}^{-1}, \quad \bar{Q}_h = \begin{bmatrix} Q_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_1 > 0, Q_h > 0, \alpha > 0.$$

Teorema 3.2. *El origen del sistema (1.1) con una representación convexa exacta (3.1), bajo la ley de control (3.4) es exponencialmente estable si existen matrices $P_1 > 0$, P_{2j} , P_{3j} , $R_h > 0$ con $h \in \{1, 2, \dots, d\}$, $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, $k \in \{1, 2, \dots, \rho\}$ y un escalar $\alpha > 0$, tal que:*

$$\begin{bmatrix} \Psi_{(1)} & (*) & (*) & (*) & (*) \\ \Psi_{(2)} & -E_k^T P_{3j} - P_{3j}^T E_k & \dots & (*) & (*) \\ 0 & P_1 A_{\tau_1 i}^T + N_{1jk}^T B_i & -e^{-2\alpha\tau_1} R_1 & \dots & (*) \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & (*) \\ 0 & P_1 A_{\tau_d i}^T + N_{djk}^T B_i & 0 & \dots & -e^{-2\alpha\tau_d} R_d \end{bmatrix} < 0,$$

con $\Psi_{(1)} = P_{2j}^T + (*) + 2\alpha P_1 + \sum_{h=1}^d R_h$, $\Psi_{(2)} = A_i P_1 + B_i M_{jk} - E_k P_{2j} + P_{3j}^T$.
 Por lo tanto, las ganancias de control se calcula como $K_{jk} = M_{jk} P_1^{-1}$ y $F_{hjk} = N_{hjk} P_1^{-1}$,
 $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, $k \in \{1, 2, \dots, \rho\}$, $h \in \{1, 2, \dots, d\}$ y $Q_h = P_1^{-1} R_h P_1^{-1}$.

La solución satisface la siguiente estimación exponencial:

$$\|x(t, \phi)\| \leq \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} e^{-\alpha t} \|\phi\|_\tau,$$

con $c_1 = \lambda_{\min}(P_1^{-1})$ y $c_2 = \lambda_{\max}(P_1^{-1}) + \sum_{h=1}^d \tau_h \lambda_{\max}(Q_h)$.

Demostración. Para la demsotracion se procede a derivar la funcional candidata

$$\dot{V}(x_\tau) = \underbrace{\dot{\bar{x}}^T(t) \bar{E}^T \bar{P}_w^{-1} \bar{x}(t) + \bar{x}^T(t) \bar{P}_w^{-T} \bar{E} \dot{\bar{x}}(t)}_{V_1} + \underbrace{\sum_{h=1}^d \frac{d}{dt} \int_{-\tau_h}^0 \bar{x}^T(t+\theta) \bar{E}^T \bar{Q}_h e^{2\alpha\theta} \bar{x}(t+\theta) d\theta}_{V_2}.$$

Evaluando V_1 a lo largo de las trayectorias de (3.5) es:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & \left((\bar{A}_{w\omega} + \bar{B}_w \bar{K}_{w\omega}) \bar{x}(t) + \sum_{h=1}^d (\bar{A}_{w\tau_h} + \bar{B}_w \bar{F}_{hw\omega}) \bar{x}(t - \tau_h) \right)^T \bar{P}_w^{-1} \bar{x}(t) \dots \\ & \dots + \bar{x}^T(t) \bar{P}_w^{-T} \left((\bar{A}_{w\omega} + \bar{B}_w \bar{K}_{w\omega}) \bar{x}(t) + \sum_{h=1}^d (\bar{A}_{w\tau_h} + \bar{B}_w \bar{F}_{hw\omega}) \bar{x}(t - \tau_h) \right), \end{aligned}$$

Además de V_2 se resuelve usando la regla de Leibniz, por lo que tenemos:

$$\begin{aligned} V_2 = & \sum_{h=1}^d \left\{ \bar{x}^T(t) \bar{E}^T \bar{Q}_h \bar{x}(t) - \bar{x}^T(t - \tau_h) e^{-2\alpha\tau_h} \bar{E}^T \bar{Q}_h \bar{x}(t - \tau_h) \right. \\ & \left. - 2\alpha \int_{-\tau_h}^0 \bar{x}^T(t+\theta) \bar{E}^T \bar{Q}_h e^{2\alpha\theta} \bar{x}(t+\theta) d\theta \right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dot{V}(x_t) + 2\alpha V(x_t)$ es:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}(t - \tau_1) \\ \vdots \\ \bar{x}(t - \tau_d) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Xi_{(1,1)} & (*) & \cdots & (*) \\ \Xi_{(2,1)} & \Xi_{(2,2)} & \cdots & (*) \\ \vdots & \cdots & \ddots & (*) \\ \Xi_{(d+1,1)} & 0 & \cdots & \Xi_{(d+1,d+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}(t - \tau_1) \\ \vdots \\ \bar{x}(t - \tau_d) \end{bmatrix},$$

con los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\Xi_{(1,1)} &= \bar{P}_{\mathbf{w}}^{-T}(\bar{A}_{\mathbf{w}\omega} + \bar{B}_{\mathbf{w}}\bar{K}_{\mathbf{w}\omega}) + (*) + 2\alpha\bar{E}^T\bar{P}_{\mathbf{w}}^{-1} + \sum_{h=1}^d \bar{E}^T\bar{Q}_h \\ \Xi_{(2,1)} &= (\bar{A}_{\tau_1\mathbf{w}} + \bar{B}_{\mathbf{w}}\bar{F}_{1\mathbf{w}\omega})^T\bar{P}_{\mathbf{w}}^{-1} \\ \Xi_{(2,2)} &= -e^{-2\alpha\tau_1}\bar{E}^T\bar{Q}_1 \\ \Xi_{(d+1,1)} &= (\bar{A}_{\tau_d\mathbf{w}} + \bar{B}_{\mathbf{w}}\bar{F}_{d\mathbf{w}\omega})^T\bar{P}_{\mathbf{w}}^{-1} \\ \Xi_{(d+1,d+1)} &= -e^{-2\alpha\tau_d}\bar{E}^T\bar{Q}_d,\end{aligned}$$

ahora sustituyendo los valores y ademas expandiendo los vectores $\bar{x}(t)$ y los retardos $\bar{x}(t-\tau_i)$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ x(t-\tau_1) \\ \dot{x}(t-\tau_1) \\ \vdots \\ x(t-\tau_d) \\ \dot{x}(t-\tau_d) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{(1,1)} & (*) & \cdots & \cdots & \cdots & (*) \\ \Psi_{(2,1)} & \Psi_{(2,2)} & \cdots & \cdots & \cdots & (*) \\ \Psi_{(3,1)} & \Psi_{(3,2)} & \Psi_{(3,3)} & \cdots & \cdots & (*) \\ \Psi_{(4,1)} & \Psi_{(4,2)} & \Psi_{(4,3)} & \cdots & \cdots & (*) \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & (*) \\ \Psi_{(2d-1,1)} & \Psi_{(2d-1,2)} & \Psi_{(2d-1,3)} & \cdots & \Psi_{(2d-1,2d-1)} & (*) \\ \Psi_{(2d,1)} & \Psi_{(2d,2)} & \Psi_{(2d,3)} & \cdots & \cdots & \Psi_{(2d,2d)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ x(t-\tau_1) \\ \dot{x}(t-\tau_1) \\ \vdots \\ x(t-\tau_d) \\ \dot{x}(t-\tau_d) \end{bmatrix} < 0$$

con los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\Psi_{(1,1)} &= -P_1^{-T}P_{2\mathbf{w}}P_{3\mathbf{w}}^{-T}(A_{\mathbf{w}} + B_{\mathbf{w}}K_{\mathbf{w}\omega}) + (*) + 2\alpha P_1^{-1} + \sum_{h=1}^d Q_h \\ \Psi_{(2,1)} &= P_{3\mathbf{w}}^{-T}(A_{\mathbf{w}} + B_{\mathbf{w}}K_{\mathbf{w}\omega}) + P_1^{-1} + E_{\omega}^T P_{3\mathbf{w}}^{-1} P_{2\mathbf{w}} P_1^{-1} \\ \Psi_{(2,2)} &= -E_{\omega}^T P_{3\mathbf{w}}^{-1} - P_{3\mathbf{w}}^{-T} E_{\omega} \\ \Psi_{(3,1)} &= -(A_{\tau_1\mathbf{w}}^T + F_{1\mathbf{w}\omega}^T B_{\mathbf{w}}^T) P_{3\mathbf{w}}^{-1} P_{2\mathbf{w}} P_1^{-1} \\ \Psi_{(3,2)} &= (A_{\tau_1\mathbf{w}}^T + F_{1\mathbf{w}\omega}^T B_{\mathbf{w}}^T) P_{3\mathbf{w}}^{-1} \\ \Psi_{(3,3)} &= -e^{-2\alpha\tau_1} Q_1 \\ \Psi_{(4,1)} &= \Psi_{(4,2)} = \Psi_{(4,3)} = \dots = 0 \\ \Psi_{(2d-1,1)} &= -(A_{\tau_d\mathbf{w}}^T + F_{d\mathbf{w}\omega}^T B_{\mathbf{w}}^T) P_{3\mathbf{w}}^{-1} P_{2\mathbf{w}} P_1^{-1} \\ \Psi_{(2d-1,2)} &= (A_{\tau_d\mathbf{w}}^T + F_{d\mathbf{w}\omega}^T B_{\mathbf{w}}^T) P_{3\mathbf{w}}^{-1} \\ \Psi_{(2d-1,3)} &= 0 \\ \Psi_{(2d-1,2d-1)} &= -e^{-2\alpha\tau_d} Q_d \\ \Psi_{(2d,1)} &= \Psi_{(2d,2)} = \Psi_{(2d,3)} = \dots = \Psi_{(2d,2d)} = 0\end{aligned}$$

Sin embargo, no se puede obtener las condiciones LMI con la desigualdad obtenida. Por lo que se utiliza la propiedad de congruencia, que pre y pos-multiplica por una matriz diagonal

de la forma $\left[\begin{array}{cc} P_1 & 0 \\ P_{2\mathbf{w}} & P_{3\mathbf{w}} \end{array} \right], \underbrace{P_1, \dots, P_1}_d$ por lo que se obtiene

$$\left[\begin{array}{ccccc} P_{2\mathbf{w}}^T + P_{2\mathbf{w}} + 2\alpha P_1 + \sum_{h=1}^d R_h & (*) & (*) & (*) & (*) \\ A_{\mathbf{w}} P_1 + B_{\mathbf{w}} M_{\mathbf{w}\omega} - E_{\omega} P_{2\mathbf{w}} + P_{3\mathbf{w}}^T & -E_{\omega} P_{3\mathbf{w}} - P_{3\mathbf{w}}^T E_{\omega}^T & \dots & (*) & (*) \\ 0 & P_1 A_{\tau_1 \mathbf{w}}^T + N_{1\mathbf{w}\omega}^T B_{\mathbf{w}}^T & -e^{-2\alpha\tau_1} R_1 & \dots & (*) \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & (*) \\ 0 & P_1 A_{\tau_d \mathbf{w}}^T + N_{d\mathbf{w}\omega}^T B_{\mathbf{w}}^T & 0 & \dots & -e^{-2\alpha\tau_d} R_d \end{array} \right] < 0,$$

definiendo los siguientes términos: $M_{\mathbf{w}\omega} = K_{\mathbf{w}\omega} P_1$ y $N_{h\mathbf{w}\omega} = F_{h\mathbf{w}\omega} P_1$, $h \in \{1, 2, \dots, d\}$. Ahora de aplica el esquema de relajación (2.46) y da como resultado:

$$\left[\begin{array}{ccccc} P_{2j}^T + P_{2j} + 2\alpha P_1 + \sum_{h=1}^d R_h & (*) & (*) & (*) & (*) \\ A_i P_1 + B_i M_{jk} - E_k P_{2j} + P_{3j}^T & -E_k P_{3j} - P_{3j}^T E_k^T & \dots & (*) & (*) \\ 0 & P_1 A_{\tau_1 i}^T + N_{1jk}^T B_i^T & -e^{-2\alpha\tau_1} R_1 & \dots & (*) \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & (*) \\ 0 & P_1 A_{\tau_d i}^T + N_{djk}^T B_i^T & 0 & \dots & -e^{-2\alpha\tau_d} R_d \end{array} \right] < 0.$$

Debido a que las ganancias que se obtienen por medio del Teorema (3.2) arrojan valores que son de gran magnitud y que provocaría una saturación en los actuadores, se han impuesto condiciones para poder restringir la señal de control que se pueden combinar con el Teorema (3.2).

Teorema 3.3. *Considere el control no lineal con múltiples retardos de la forma (3.4), por lo tanto el control satisface $\|u\| < \mu$, para cualquier $\mu > 0$, si las siguientes desigualdades se satisfagan:*

$$\begin{bmatrix} P_1 & M_{\mathbf{w}\omega}^T \\ M_{\mathbf{w}\omega} & \frac{\mu^2}{2} I \end{bmatrix} > 0, \quad (3.7)$$

$$\begin{bmatrix} e^{-2\alpha\tau_h} R_h & N_{h\mathbf{w}\omega}^T \\ N_{h\mathbf{w}\omega} & \frac{\mu^2}{2} I \end{bmatrix} > 0, \quad h \in \{1, 2, \dots, d\}, \quad (3.8)$$

$$\begin{bmatrix} \tau^{-1} & \phi^T(\theta) & \phi^T(\theta) & \dots & \phi^T(\theta) \\ \phi(\theta) & P_1 & 0 & \dots & 0 \\ \phi(\theta) & 0 & R_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \phi(\theta) & 0 & 0 & \dots & R_d \end{bmatrix} > 0, \quad \forall \theta \in [-\tau, 0]. \quad (3.9)$$

Demostración. Se puede trabajar con el hecho de que $\|u\|^2 = u^T u$ con la ley de control (3.4) por lo tanto se obtiene:

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= \left(K_{\mathbf{w}\omega} x(t) + \sum_{h=1}^d F_{h\mathbf{w}\omega} x(t - \tau_h) \right)^T \left(K_{\mathbf{w}\omega} x(t) + \sum_{h=1}^d F_{h\mathbf{w}\omega} x(t - \tau_h) \right) \\
&= x^T(t) K_{\mathbf{w}\omega}^T K_{\mathbf{w}\omega} x(t) + 2 \sum_{h=1}^d x^T(t) K_{\mathbf{w}\omega}^T F_{h\mathbf{w}\omega} x(t - \tau_h) + \sum_{h=1}^d x^T(t - \tau_h) F_{h\mathbf{w}\omega}^T F_{h\mathbf{w}\omega} x(t - \tau_h) \\
&\leq 2 \left(x^T(t) K_{\mathbf{w}\omega}^T K_{\mathbf{w}\omega} x(t) + \sum_{h=1}^d x^T(t - \tau_h) F_{h\mathbf{w}\omega}^T F_{h\mathbf{w}\omega} x(t - \tau_h) \right) \\
&\leq 2 \left(x^T(t) K_{\mathbf{w}\omega}^T K_{\mathbf{w}\omega} x(t) + \sum_{h=1}^d \int_{-\tau_h}^0 x^T(t + \theta) F_{h\mathbf{w}\omega}^T F_{h\mathbf{w}\omega} x(t + \theta) d\theta \right) \leq \mu^2,
\end{aligned}$$

por lo tanto se puede arreglar la desigualdad

$$x^T(t) K_{\mathbf{w}\omega}^T 2\mu^{-2} K_{\mathbf{w}\omega} x(t) + \sum_{h=1}^d \int_{-\tau_h}^0 x^T(t + \theta) F_{h\mathbf{w}\omega}^T 2\mu^{-2} F_{h\mathbf{w}\omega} x(t + \theta) d\theta \leq 1. \quad (3.10)$$

Ahora se considera la desigualdad en la funcional candidata (3.6)

$$\begin{aligned}
V(x_t) &= x^T(t) P_1^{-1} x(t) + \sum_{h=1}^d \int_{-\tau_h}^0 x^T(t + \theta) e^{2\alpha\theta} Q_h x(t + \theta) d\theta \\
&\leq \phi^T(0) P_1^{-1} \phi(0) + \sum_{h=1}^d \int_{-\tau_h}^0 \phi^T(\theta) e^{2\alpha\theta} Q_h \phi(\theta) d\theta \\
&\leq \phi^T(0) P_1^{-1} \phi(0) + \sum_{h=1}^d \int_{-\tau}^0 \phi^T(\theta) e^{2\alpha\theta} Q_h \phi(\theta) d\theta \leq 1,
\end{aligned} \quad (3.11)$$

Por lo que se combina las ecuaciones (3.10) y (3.11) de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
0 &< x^T(t) K_{\mathbf{w}\omega}^T 2\mu^{-2} K_{\mathbf{w}\omega} x(t) + \sum_{h=1}^d \int_{-\tau_h}^0 x^T(t + \theta) F_{h\mathbf{w}\omega}^T 2\mu^{-2} F_{h\mathbf{w}\omega} x(t + \theta) d\theta \\
&\leq x^T(t) P_1^{-1} x(t) + \sum_{h=1}^d \int_{-\tau_h}^0 x^T(t + \theta) e^{2\alpha\theta} Q_h x(t + \theta) d\theta \\
&\leq \phi^T(0) P_1^{-1} \phi(0) + \sum_{h=1}^d \int_{-\tau_h}^0 \phi^T(\theta) e^{2\alpha\theta} Q_h \phi(\theta) d\theta \\
&< \phi^T(0) P_1^{-1} \phi(0) + \sum_{h=1}^d \int_{-\tau}^0 \phi^T(\theta) (P_1^{-1} Q_h^{-1}) Q_h (Q_h^{-1} P_1^{-1}) \phi(\theta) d\theta \leq 1
\end{aligned}$$

que es semejante a trabajar con

$$x^T(t) (P_1^{-1} - K_{\mathbf{w}\omega}^T 2\mu^{-2} K_{\mathbf{w}\omega}) x(t) + \sum_{h=1}^d \int_{-\tau_h}^0 x^T(t+\theta) \left(e^{2\alpha\theta} Q_h - F_{h\mathbf{w}\omega}^T 2\mu^{-2} F_{h\mathbf{w}\omega} \right) x(t+\theta) d\theta > 0, \quad (3.12)$$

$$\int_{-\tau}^0 \left(\tau^{-1} - \phi^T(\theta) P_1^{-1} \phi(\theta) - \sum_{h=1}^d \phi^T(\theta) X_1 Q_h^{-1} X_1 \phi(\theta) \right) d\theta > 0. \quad (3.13)$$

Así, (3.12) se satisface si

$$P_1^{-1} - K_{\mathbf{w}\omega}^T 2\mu^{-2} K_{\mathbf{w}\omega} > 0, \quad \text{and} \\ e^{-2\alpha\tau_h} Q_h - F_{h\mathbf{w}\omega}^T 2\mu^{-2} F_{h\mathbf{w}\omega} > 0, \quad h \in \{1, \dots, d\}.$$

Para estas desigualdades se aplica el complemento de Schur y la propiedad de congruencia al pre y pos multiplicar con la matriz $\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, por lo que las condiciones (3.7) y (3.8) igualmente se agrupan los términos $M_{\mathbf{w}\omega} = K_{\mathbf{w}\omega} P_1^{-1}$, $N_{h\mathbf{w}\omega} = F_{h\mathbf{w}\omega} P_1^{-1}$, $R_h = P_1 Q_h P_1$, $h \in \{1, 2, \dots, d\}$. Por ultimo se vuelve a aplicar el complemento de Schur en (3.13) da como resultado

$$\begin{bmatrix} \tau^{-1} & \phi^T(\theta) & \phi^T(\theta) & \cdots & \phi^T(\theta) \\ \phi(\theta) & P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \phi(\theta) & 0 & P_1 Q_1 P_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \phi(\theta) & 0 & 0 & \cdots & P_1 Q_d P_1 \end{bmatrix} > 0, \quad \forall \theta \in [-\tau, 0],$$

ademas de agrupando los términos $R_h = P_1 Q_h P_1$, $h \in \{1, 2, \dots, d\}$, terminando así la demostración.

Con esto se obtiene las herramientas necesarias para poder analizar estabilidad para sistemas descriptores no lineales con múltiples retardos, ademas de poder construir una ley de control tipo PDC para estabilizar dichos sistemas.

3.2. Implementación de resultados

Para corroborar los resultados obtenidos, se mostraran algunos ejemplos en esta sección, los cuales se realizaron en simulación.

3.2.1. Comparación entre sistema en forma descriptor y sistema en forma estándar

Una de las ventajas de trabajar con los sistemas en forma descriptor, es tener unos resultados mas relajados. Para ello se hace una comparación para observar cual sistema tiene un mayor rango para modificar sus matrices sin perder estabilidad.

Ejemplo 3.1. *Se considera el siguiente modelo*

$$\begin{aligned} E(x)\dot{x}(t) &= A(x)x(t) + A_{\tau_1}(x)x(t - \tau_1) + A_{\tau_2}(x)x(t - \tau_2) + B(x)u(t) \\ x(\theta) &= \phi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0] \end{aligned} \quad (3.14)$$

definiendo las matrices:

$$\begin{aligned} E(x) &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 - \frac{3}{5x_2^2+5} \\ 0.08 & 0.97 \end{bmatrix}, \quad A(x) = \begin{bmatrix} -0.5 \cos x_2 - 7.5 & -1 \\ 0.38 - \frac{0.58 \sin x_1}{x_1} + a & -5.5 \end{bmatrix}, \quad B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ A_{\tau_1}(x) &= \begin{bmatrix} 9.5 + b & 14 \\ -6.6 & -10.06 + \frac{0.66 \sin x_1}{x_1} \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad A_{\tau_2}(x) = \begin{bmatrix} \cos x_2 - 4.2 & -6.2 \\ 3.6 & 5.1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ademas de los retrasos de tiempo $\tau_1 = 0.1$ y $\tau_2 = 0.3 = \tau$.

Forma descriptor: Por medio de la aproximación vía sector no lineal, se obtiene los siguientes términos no lineales: $\zeta_1 = (x_2^2 + 1)^{-1} \in [0, 1]$, $z_1 = \cos x_2 \in [-1, 1]$ y $z_2 = \frac{\sin x_1}{x_1} \in [-0.2, 1]$, las cuales se han calculado las cotas dentro de la región $\Omega_x = \mathbb{R}^2$. A partir de esto se encuentran las matrices vértices y son:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -7 & -1 \\ 0.5+a & -5.5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -7 & -1 \\ -0.2+a & -5.5 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ 0.5+a & -5.5 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -8 & -1 \\ -0.2+a & -5.5 \end{bmatrix} \\ A_{1\tau_1} &= \begin{bmatrix} 9.4+b & 14.2 \\ -6.6 & -10 \end{bmatrix}, A_{2\tau_1} = \begin{bmatrix} 9.4+b & 14.2 \\ -6.6 & -9.4 \end{bmatrix}, A_{3\tau_1} = \begin{bmatrix} 9.4+b & 14.2 \\ -6.6 & -10 \end{bmatrix}, A_{4\tau_1} = \begin{bmatrix} 9.4+b & 14.2 \\ -6.6 & -9.4 \end{bmatrix} \\ A_{1\tau_2} &= \begin{bmatrix} -5.2 & -6.2 \\ 3.6 & 5.1 \end{bmatrix}, A_{2\tau_2} = \begin{bmatrix} -5.2 & -6.2 \\ 3.6 & 5.1 \end{bmatrix}, A_{3\tau_2} = \begin{bmatrix} -3.2 & -6.2 \\ 3.6 & 5.1 \end{bmatrix}, A_{4\tau_2} = \begin{bmatrix} -3.2 & -6.2 \\ 3.6 & 5.1 \end{bmatrix} \\ E_1 &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.08 & 0.97 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.5 \\ 0.08 & 0.97 \end{bmatrix}, B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Forma estándar: El sistema (3.14) comúnmente se puede construir como la forma (3.15)

$$\dot{x} = \tilde{A}(x)x(t) + \tilde{A}(x)x(t - \tau_1) + \tilde{A}(x)x(t - \tau_2) + \tilde{B}(x)u. \quad (3.15)$$

definiendo las matrices:

$$\begin{aligned}\tilde{A}(x) &= E^{-1}(x)A(x) = \frac{x_2^2+1}{0.768x_2^2+0.816} \begin{bmatrix} 0.97 & -0.1 + \frac{3}{5x_2^2+5} \\ -0.08 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 \cos x_2 - 7.5 & -1 \\ 0.38 - \frac{0.58 \sin x_1}{x_1} + a & -5.5 \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}_{\tau_1}(x) &= E^{-1}(x)A_{\tau_1}(x) = \frac{x_2^2+1}{0.768x_2^2+0.816} \begin{bmatrix} 0.97 & -0.1 + \frac{3}{5x_2^2+5} \\ -0.08 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.5+b & 14 \\ -6.6 & -10.06 + \frac{0.66 \sin x_1}{x_1} \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}_{\tau_2}(x) &= E^{-1}(x)A_{\tau_2}(x) = \frac{x_2^2+1}{0.768x_2^2+0.816} \begin{bmatrix} 0.97 & -0.1 + \frac{3}{5x_2^2+5} \\ -0.08 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos x_2 - 4.2 & -6.2 \\ 3.6 & 5.1 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

Con esta forma se obtiene 4 términos no lineales: $z_1 = \cos x_2 \in [-1, 1]$, $z_2 = \sin x_1/x_1 \in [-0.2, 1]$, $z_3 = (x_2^2 + 1)^{-1} \in [0, 1]$, y $z_4 = (x_2^2 + 1)/(0.768x_2^2 + 0.816) \in [1.2255, 1.3021]$; sus cotas se siguen calculando en Ω_x y se obtuvieron las siguientes matrices:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1 &= \begin{bmatrix} -8.5 & -0.51 \\ 2.0 & -5.3 \end{bmatrix}, \tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} -9.0 & -0.55 \\ 2.1 & -5.6 \end{bmatrix}, \tilde{A}_3 = \begin{bmatrix} -7.5 & -4.6 \\ 2.0 & -5.3 \end{bmatrix}, \tilde{A}_4 = \begin{bmatrix} -8.0 & -4.8 \\ 2.1 & -5.6 \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}_5 &= \begin{bmatrix} -8.4 & -0.51 \\ 1.3 & -5.3 \end{bmatrix}, \tilde{A}_6 = \begin{bmatrix} -8.9 & -0.55 \\ 1.4 & -5.6 \end{bmatrix}, \tilde{A}_7 = \begin{bmatrix} -8.0 & -4.6 \\ 1.3 & -5.3 \end{bmatrix}, \tilde{A}_8 = \begin{bmatrix} -8.5 & -4.8 \\ 1.4 & -5.6 \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}_9 &= \begin{bmatrix} -9.7 & -0.51 \\ 2.1 & -5.3 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{10} = \begin{bmatrix} -10.0 & -0.55 \\ 2.2 & -5.6 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} -8.7 & -4.6 \\ 2.1 & -5.3 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{12} = \begin{bmatrix} -9.3 & -4.8 \\ 2.2 & -5.6 \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}_{13} &= \begin{bmatrix} -9.6 & -0.51 \\ 1.4 & -5.3 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{14} = \begin{bmatrix} -10.0 & -0.55 \\ 1.5 & -5.6 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{15} = \begin{bmatrix} -9.1 & -4.6 \\ 1.4 & -5.3 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{16} = \begin{bmatrix} -9.7 & -4.8 \\ 1.5 & -5.6 \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}_{1\tau_1} &= \tilde{A}_{5\tau_1} = \tilde{A}_{9\tau_1} = \tilde{A}_{13\tau_1} = \begin{bmatrix} 13.0 & 18.0 \\ -7.4 & -11.0 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{2\tau_1} = \tilde{A}_{6\tau_1} = \tilde{A}_{10\tau_1} = \tilde{A}_{14\tau_1} = \begin{bmatrix} 13.0 & 19.0 \\ -7.9 & -12.0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}_{3\tau_1} &= \tilde{A}_{7\tau_1} = \tilde{A}_{11\tau_1} = \tilde{A}_{15\tau_1} = \begin{bmatrix} 7.7 & 11.0 \\ -7.4 & -11.0 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{4\tau_1} = \tilde{A}_{8\tau_1} = \tilde{A}_{12\tau_1} = \tilde{A}_{16\tau_1} = \begin{bmatrix} 8.2 & 11.0 \\ -7.9 & -12.0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}_{1\tau_2} &= \tilde{A}_{5\tau_2} = \begin{bmatrix} -6.6 & -8.0 \\ 4.0 & 5.6 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{2\tau_2} = \tilde{A}_{6\tau_2} = \begin{bmatrix} -7.0 & -8.5 \\ 4.3 & 6.0 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{3\tau_2} = \tilde{A}_{7\tau_2} = \begin{bmatrix} -4.0 & -4.2 \\ 4.0 & 5.6 \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}_{4\tau_2} &= \tilde{A}_{8\tau_2} = \begin{bmatrix} -4.2 & -4.5 \\ 4.3 & 6.0 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{9\tau_2} = \tilde{A}_{13\tau_2} = \begin{bmatrix} -4.2 & -8.0 \\ 3.8 & 5.6 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{10\tau_2} = \tilde{A}_{14\tau_2} = \begin{bmatrix} -4.5 & -8.5 \\ 4.1 & 6.0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}_{11\tau_2} &= \tilde{A}_{15\tau_2} = \begin{bmatrix} -1.6 & -4.2 \\ 3.8 & 5.6 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{12\tau_2} = \tilde{A}_{16\tau_2} = \begin{bmatrix} -1.7 & -4.5 \\ 4.1 & 6.0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\tilde{B}_1 = \tilde{B}_5 = \tilde{B}_9 = \tilde{B}_{13} = \begin{bmatrix} -0.12 \\ 0.98 \end{bmatrix}, \tilde{B}_2 = \tilde{B}_6 = \tilde{B}_{10} = \tilde{B}_{14} = \begin{bmatrix} -0.13 \\ 1.0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_3 = \tilde{B}_7 = \tilde{B}_{11} = \tilde{B}_{15} = \begin{bmatrix} 0.61 \\ 0.98 \end{bmatrix}, \tilde{B}_4 = \tilde{B}_8 = \tilde{B}_{12} = \tilde{B}_{16} = \begin{bmatrix} 0.65 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

Con estos resultados se puede observar que utilizando la forma descriptor (3.14) con $(E_k, A_i, A_{i\tau_1}, A_{i\tau_2}, B_i)$ con $k = 1, 2, i = 1, 2, 3, 4$ nos da un total de 8 matrices vértices, mientras que en la forma estándar (3.15) $(\tilde{A}_i, \tilde{A}_{i\tau_1}, \tilde{B}_i)$ con $i = 1, \dots, 16$ nos da un total de 16 matrices vértices.

Variando los parámetros $a \in [0, 0.8]$ y $b \in [-0.2, 0.5]$ se puede crear una cuadrícula para mostrar que tan factible son los sistema (3.14) y (3.15).

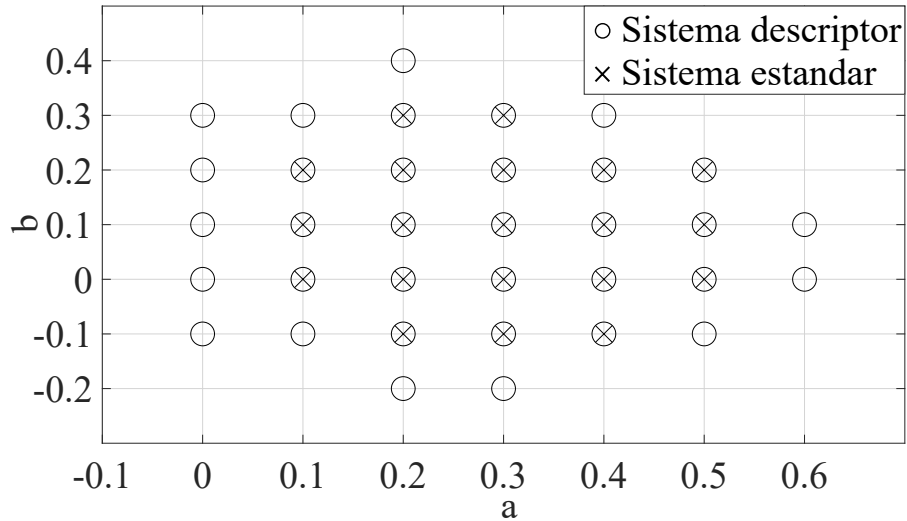


Figura 3.1: Regiones estabilizables.

En la Figura 3.1 se puede observar la importancia de mantener la estructura en forma descriptor en vez de computar el modelo en espacio de estado estándar, ya que el enfoque en forma descriptor proporciona resultados más relajados que el modelo estándar.

Por otra parte, como se puede observar en la Figura 3.1, el sistema (3.14) con $a = -2.5$ y $b = 6.2$ no converge al punto de equilibrio $(x = 0)$, con $u = 0$ y $\phi(\theta) = [-5, 5]^T$:

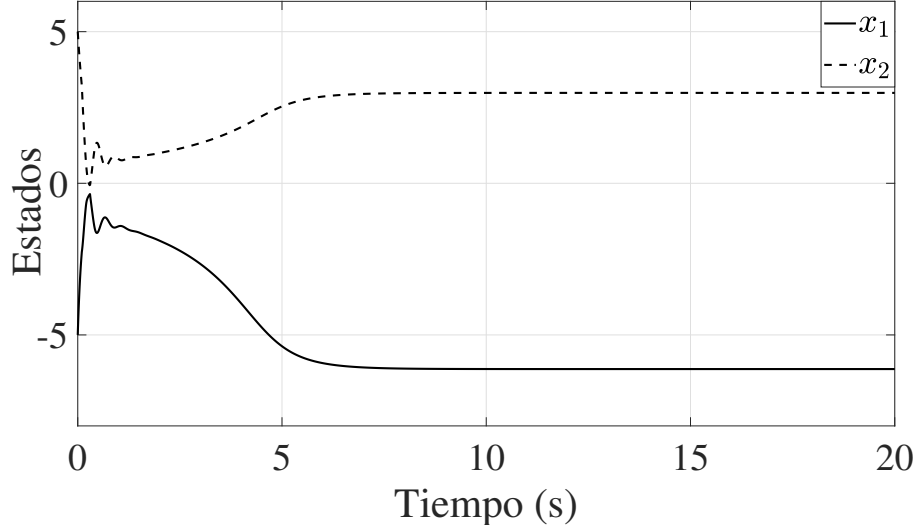


Figura 3.2: Respuesta del sistema cuando $u = 0$, $a = -2.5$ y $b = 6.2$.

Por lo tanto, para poder estabilizar el sistema (3.14) con $a = -2.5$ y $b = 6.2$, se aplica una ley de control no lineal de la forma (3.4), con la siguiente estructura:

$$u = K_{\mathbf{w}\omega}x(t) + \sum_{h=1}^2 F_{h\mathbf{w}\omega}x(t - \tau_h). \quad (3.16)$$

Bajo las condiciones del Teorema (3.2), con una tasa de decaimiento exponencial $\alpha = 0.5$ resulta factible arrojando los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} P_1^{-1} &= \begin{bmatrix} 0.20603 & 0.19458 \\ 0.19458 & 0.21717 \end{bmatrix}, & Q_1 &= \begin{bmatrix} 3.5866 & 3.3247 \\ 3.3247 & 3.1135 \end{bmatrix}, & Q_2 &= \begin{bmatrix} 1.0972 & 1.215 \\ 1.215 & 1.4539 \end{bmatrix}, \\ K_{11} &= \begin{bmatrix} -11.0453 & -13.9169 \end{bmatrix}, & F_{111} &= \begin{bmatrix} -11.7060 & -6.5843 \end{bmatrix}, & F_{211} &= \begin{bmatrix} 2.5606 & 2.2870 \end{bmatrix}, \\ K_{12} &= \begin{bmatrix} -7.3722 & -12.1755 \end{bmatrix}, & F_{112} &= \begin{bmatrix} -13.9524 & -8.5677 \end{bmatrix}, & F_{212} &= \begin{bmatrix} 3.2894 & 3.1315 \end{bmatrix}, \\ K_{21} &= \begin{bmatrix} -10.4266 & -13.6762 \end{bmatrix}, & F_{121} &= \begin{bmatrix} -10.9789 & -6.6378 \end{bmatrix}, & F_{221} &= \begin{bmatrix} 2.2735 & 1.9269 \end{bmatrix}, \\ K_{22} &= \begin{bmatrix} -6.7172 & -11.7399 \end{bmatrix}, & F_{122} &= \begin{bmatrix} -13.2816 & -8.7126 \end{bmatrix}, & F_{222} &= \begin{bmatrix} 3.0448 & 2.8193 \end{bmatrix}, \\ K_{31} &= \begin{bmatrix} -9.8536 & -13.3457 \end{bmatrix}, & F_{131} &= \begin{bmatrix} -9.7933 & -4.8426 \end{bmatrix}, & F_{231} &= \begin{bmatrix} -0.2040 & 1.5048 \end{bmatrix}, \\ K_{32} &= \begin{bmatrix} -6.7529 & -11.8054 \end{bmatrix}, & F_{132} &= \begin{bmatrix} -13.8964 & -8.4844 \end{bmatrix}, & F_{232} &= \begin{bmatrix} 0.6296 & 3.0749 \end{bmatrix}, \\ K_{41} &= \begin{bmatrix} -9.0894 & -12.9706 \end{bmatrix}, & F_{141} &= \begin{bmatrix} -9.2846 & -5.0947 \end{bmatrix}, & F_{241} &= \begin{bmatrix} -0.3599 & 1.2441 \end{bmatrix}, \\ K_{42} &= \begin{bmatrix} -5.7661 & -11.1366 \end{bmatrix}, & F_{142} &= \begin{bmatrix} -13.6875 & -9.0667 \end{bmatrix}, & F_{242} &= \begin{bmatrix} 0.5619 & 2.9637 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Con estas ganancias obtenidas, el sistema (3.14) se estabiliza al punto de equilibrio como se puede observar en la Figura 3.3.

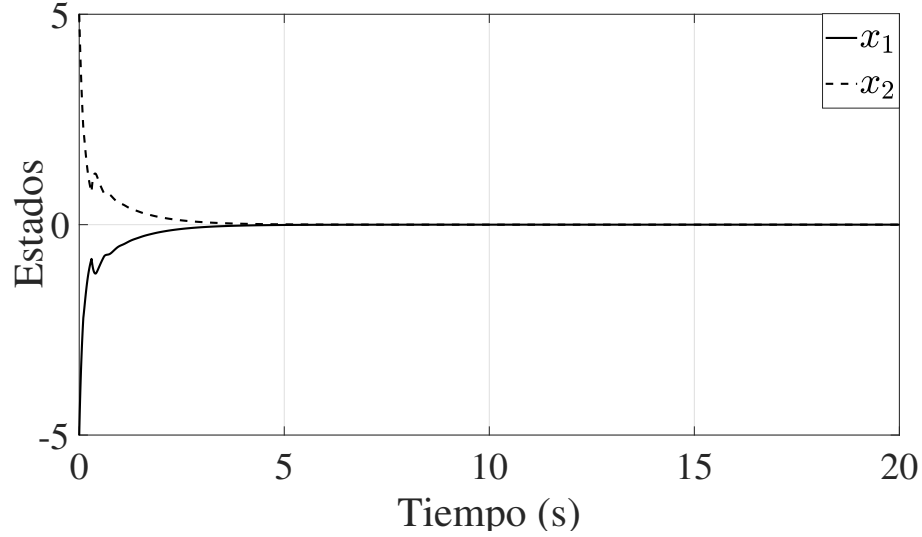


Figura 3.3: Respuesta del sistema con la ley de control (3.16).

3.2.2. Comparación entre dos diferentes diseños de control

En esta sección se diseña una simulación de dos tipos de control, uno que no lleve retardo y otro que trabaja con el. El objetivo es comparar los resultados mediante su respuesta.

Ejemplo 3.2. Se tiene el modelo de carro péndulo

$$\begin{pmatrix} (M+m) & -ml \cos \theta \\ -ml \cos \theta & (J+ml^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c\dot{x} + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ \gamma\dot{\theta} - mgl \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

con $g = 9.81$, $l = 0.304$, $m = 0.2$, $M = 1.3282$, $J = (ml^2)/3$, $c = 0.001$ y $\gamma = 0.001$. Al re-escribir el sistema en forma descriptor con el siguiente espacio de estado: $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = \theta$ y $x_4 = \dot{\theta}$ de la siguiente forma

$$E(x)\dot{x}(t) = A(x)x(t) + A_\tau(x)x(t-\tau) + Bu(t),$$

definiendo las matrices:

$$E(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5482 & 0 & -0.0669 \cos x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.0669 \cos x_3 & 0 & 0.0271 \end{bmatrix}, \quad A_\tau(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.001 & 0 & -0.0669x_4 \sin x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.6561 \sin x_3/x_3 & -0.001 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Considerando el compacto $\Omega_x = \{|x_1| \leq 2\text{m}, |x_2| \leq 3\text{m/s}, |x_3| \leq \pi/3 \text{ rad}, |x_4| \leq 4 \text{ rad/s}\}$. Con esto se obtiene las no linealidades y sus cotas que son: $\zeta_1 = \cos x_3 \in [0.5, 1]$, $z_1 = x_4 \sin x_3 \in [-0.4238, 0.4238]$ y $z_2 = \sin x_3/x_3 \in [0.827, 1]$. Obteniendo las siguientes matrices vértice:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5282 & 0 & -0.0304 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.0304 & 0 & 0.0370 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5482 & 0 & -0.0608 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.0608 & 0 & 0.0370 \end{bmatrix}, \\
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.001 & 0 & -0.0258 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & -0.4933 & -0.001 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.001 & 0 & -0.025 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.596 & -0.001 \end{bmatrix}, \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.001 & 0 & 0.0258 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.4933 & -0.001 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.001 & 0 & 0.0258 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.5964 & -0.001 \end{bmatrix}, \\
 A_{\tau_1} = A_{\tau_2} = A_{\tau_3} = A_{\tau_4} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Con las matrices resultantes se hará la comparación con dos tipos de ley de control. La primera será con un control no lineal de la forma:

$$u = K_{\mathbf{w}\omega}x(t) \quad (3.18)$$

y la segunda con un control no lineal con retardo de la forma:

$$u = K_{\mathbf{w}\omega}x(t) + F_{\mathbf{w}\omega}x(t - \tau). \quad (3.19)$$

Para el controlador (3.18) y un decaimiento exponencial de $\alpha = 0.003$ se encontró factibilidad y arrojaron los siguientes resultados

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.02024 & 0.0441 & 0.1428 & -0.0059 \\ 0.0441 & 0.1874 & 0.6166 & -0.0269 \\ 0.1428 & 0.6166 & 6.036 & 0.1574 \\ -0.0059 & -0.0269 & 0.1574 & 0.2537 \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} 0.0077 & 0.0225 & 0.1455 & 0.00005 \\ 0.02258 & 0.09603 & 0.4836 & 0.0042 \\ 0.1455 & 0.4836 & 7.879 & 0.0778 \\ 0.00005 & 0.0042 & 0.0778 & 0.1026 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \begin{bmatrix} -0.3685 & -1.71 & -8.965 & -3.468 \end{bmatrix}, & K_{12} &= \begin{bmatrix} -0.4382 & -1.979 & -8.867 & -2.879 \end{bmatrix}, \\
K_{21} &= \begin{bmatrix} -0.3567 & -1.626 & -5.913 & -3.452 \end{bmatrix}, & K_{22} &= \begin{bmatrix} -0.4368 & -1.95 & -6.884 & -2.852 \end{bmatrix}, \\
K_{31} &= \begin{bmatrix} -0.3619 & -1.668 & -8.823 & -3.516 \end{bmatrix}, & K_{32} &= \begin{bmatrix} -0.435 & -1.955 & -8.748 & -2.915 \end{bmatrix}, \\
K_{41} &= \begin{bmatrix} -0.3483 & -1.573 & -5.728 & -3.505 \end{bmatrix}, & K_{42} &= \begin{bmatrix} -0.4333 & -1.924 & -6.765 & -2.889 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, utilizando la ley de control (3.19) con una tasa de decaimiento exponencial de $\alpha = 0.003$ se encontró factibilidad y arrojó los siguientes resultados:

$$P_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0020 & 0.0062 & 0.02261 & -0.0005 \\ 0.0062 & 0.0422 & 0.1531 & -0.003 \\ 0.0226 & 0.1531 & 2.366 & 0.07454 \\ -0.0005 & -0.0030 & 0.0745 & 0.1213 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0.0003 & 0.0016 & 0.0134 & 0.0002 \\ 0.0016 & 0.0114 & 0.0789 & 0.002 \\ 0.0134 & 0.0789 & 2.284 & 0.031 \\ 0.0002 & 0.002 & 0.031 & 0.0418 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \begin{bmatrix} -0.1389 & -0.9876 & -4.926 & -2.323 \end{bmatrix}, & F_{11} &= \begin{bmatrix} -0.092 & -0.0006 & -5.691 & 0.0014 \end{bmatrix}, \\
K_{12} &= \begin{bmatrix} -0.1457 & -0.99 & -4.341 & -2.052 \end{bmatrix}, & F_{12} &= \begin{bmatrix} -0.0867 & -0.0001 & -3.54 & 0.0004 \end{bmatrix}, \\
K_{21} &= \begin{bmatrix} -0.1368 & -0.9425 & -2.012 & -2.263 \end{bmatrix}, & F_{21} &= \begin{bmatrix} -0.0932 & -0.001 & -5.956 & 0.0011 \end{bmatrix}, \\
K_{22} &= \begin{bmatrix} -0.1479 & -0.9792 & -2.502 & -2.001 \end{bmatrix}, & F_{22} &= \begin{bmatrix} -0.0870 & -0.0001 & -3.634 & 0.0004 \end{bmatrix}, \\
K_{31} &= \begin{bmatrix} -0.1394 & -0.9793 & -4.867 & -2.345 \end{bmatrix}, & F_{31} &= \begin{bmatrix} -0.0928 & -0.0008 & -5.829 & 0.0017 \end{bmatrix}, \\
K_{32} &= \begin{bmatrix} -0.1459 & -0.9801 & -4.278 & -2.078 \end{bmatrix}, & F_{32} &= \begin{bmatrix} -0.0870 & -0.0001 & -3.628 & 0.0004 \end{bmatrix}, \\
K_{41} &= \begin{bmatrix} -0.1373 & -0.9317 & -1.924 & -2.284 \end{bmatrix}, & F_{41} &= \begin{bmatrix} -0.0944 & -0.00135 & -6.136 & 0.0019 \end{bmatrix}, \\
K_{42} &= \begin{bmatrix} -0.1485 & -0.9693 & -2.432 & -2.025 \end{bmatrix}, & F_{42} &= \begin{bmatrix} -0.0873 & -0.0002 & -3.74 & 0.0005 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Para la simulación presentes en los sensores, se aplica una señal aleatoria con una variación de 0.001 y un paso de 0.001. En la siguiente gráfica se puede mostrar los resultados de las leyes de control (3.19) y (3.18).

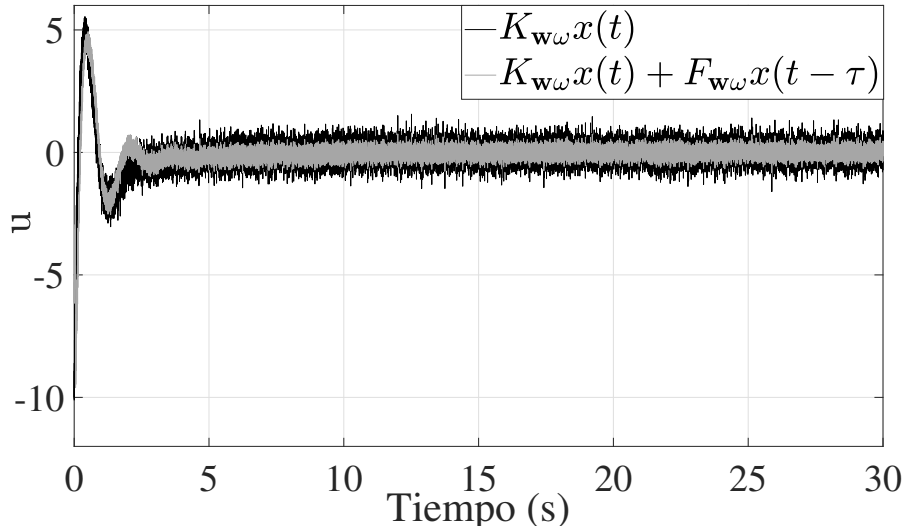


Figura 3.4: Comparación entre controles propuestos.

En las Figuras 3.5 y 3.6 se pueden observar la evolución del estado del sistema (3.17), con $\phi(\theta) = [0.5 \ 0 \ \pi/3 \ 0]^T$, $\theta \in [-0.05, 0]$, bajos las leyes de control (3.18) y (3.19).

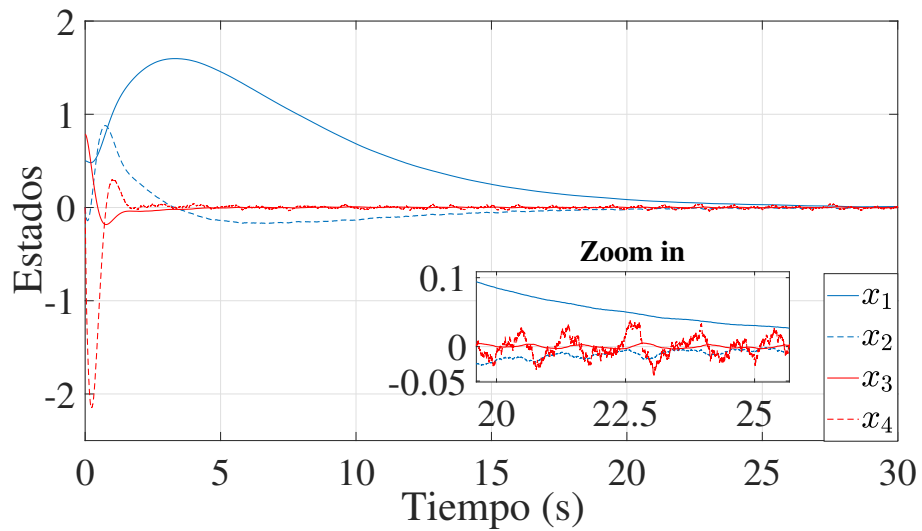


Figura 3.5: Evolucion del sistema en lazo cerrado con (3.18).

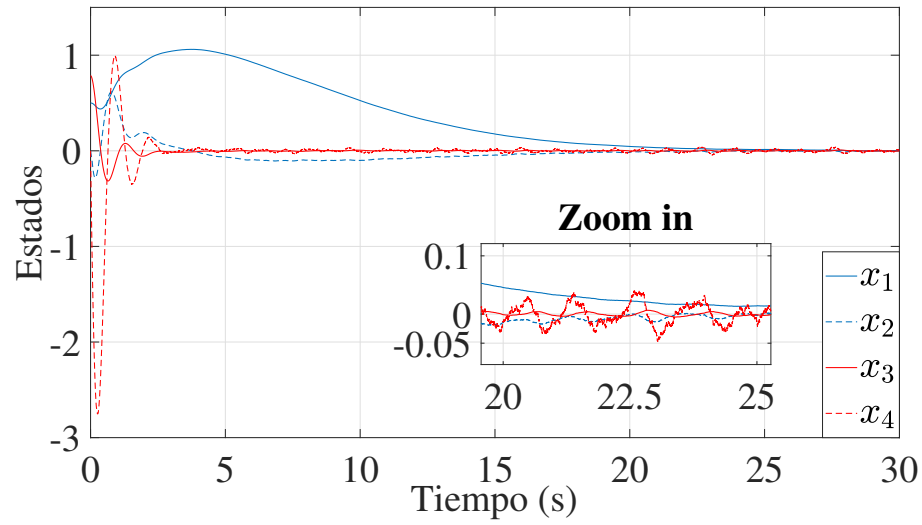


Figura 3.6: Evolucion del sistema en lazo cerrado con (3.19).

Con esto se puede observar que una ley de control de tipo (3.18) puede estabilizar el sistema (3.17), pero con la ley de control (3.19) se puede estabilizar el sistema y se puede reducir el ruido existente en la ley de control. Aun así, aumentan las oscilaciones en los estados x_2 y x_4 .

Capítulo 4

Conclusiones y trabajos futuros

En este capítulo se presentan las conclusiones obtenidas a partir de una generalización de los sistemas (1.1) obtenido en el Capítulo 3, así como la metodología para la obtención de una ley de control.

4.1. Conclusiones

A continuación se mencionan las conclusiones obtenidas.

- Se pudo extender el análisis de los sistemas descriptores no lineales con retardo a uno con múltiples retardos.
- Se verificaron los resultados obtenidos mediante simulación en MatLab 2019a.
- La ley de control con retardo tiene una respuesta mas aceptable que una que no lleve retardo.

La ventaja mas importante que ofrece estos tipos de sistemas es poder trabajar con el modelado casi directamente si lo obtenemos por medio de Euler-Lagrange, ya que se tiene mas rango para garantizar estabilidad.

Por otra parte está la desventaja es que utilizando el análisis por medio de LMIs y la herramienta *LMItoolbox*, es que cuando no le ingresas una matriz asociada al retardo siempre asumirá que es cero y por lo tanto la ley de control, asociada a ese retardo siempre arrojará valores de cero.

4.2. Trabajos futuros

Los trabajos futuros que permitirán corroborar los resultados obtenidos en las simulación, así como otros aspectos:

- Utilizar una metodología para construir una ley de control con retardo, sin conocer las matrices asociadas al retardo del sistema.
- Utilizar esta misma metodología para otra plataforma experimental que cumpla con la estructura propuesta.

Bibliografía

- [1] AD Myshkis. Linear differential equations with retarded argument, 1972.
- [2] Richard Ernest Bellman and Kenneth L Cooke. Differential-difference equations. 1963.
- [3] Lev Semionovitch Pontryagin. On the zeros of some elementary transcendental functions. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 2(1):95–110, 1955.
- [4] Arild Thowsen. The routh-hurwitz method for stability determination of linear differential-difference systems. *International Journal of Control*, 33(5):991–995, 1981.
- [5] Ju Neimark. D-subdivisions and spaces of quasi-polynomials. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 13(5):349–380, 1949.
- [6] Irina V Medvedeva and Alexey P Zhabko. Synthesis of razumikhin and lyapunov–krasovskii approaches to stability analysis of time-delay systems. *Automatica*, 51:372–377, 2015.
- [7] Hassan K Khalil and Jessy W Grizzle. *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [8] AM Lyapunov. El problema general de la estabilidad del movimiento. *Traducida del Ruso). Tesis*, 1892.
- [9] AT Fuller. Lyapunov centenary issue. *International Journal of Control*, 55(3):521–527, 1992.
- [10] Jean-Jacques E Slotine, Weiping Li, et al. *Applied nonlinear control*, volume 199. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [11] Hiroshi Ohtake, Kazuo Tanaka, and Hua O Wang. Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept. *Integrated Computer-Aided Engineering*, 10(4):333–341, 2003.
- [12] David Luenberger. Dynamic equations in descriptor form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(3):312–321, 1977.

-
- [13] Juan Carlos Arceo, Raúl Villafuerte, Victor Estrada-Manzo, and Miguel Bernal. LMI-Based Exponential Estimates for Time-Delay Nonlinear Descriptor Systems. *IFAC-PapersOnLine*, 51(10):139–144, 2018.
- [14] Juan Carlos Arceo, Raúl Villafuerte, Victor Estrada-Manzo, and Miguel Bernal. LMI-Based Controller Design for Time-Delay Nonlinear Descriptor Systems with Guaranteed Exponential Estimates. *IFAC-PapersOnLine*, 51(13):585–590, 2018.
- [15] Thierry Marie Guerra, Victor Estrada-Manzo, and Zsófia Lendek. Observer design for Takagi–Sugeno descriptor models: An LMI approach. *Automatica*, 52:154–159, 2015.
- [16] Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron, and Venkataramanan Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15. Siam, 1994.
- [17] Chi-Tsong Chen. Linear system theory and design. *International Edition*, 1999.
- [18] Keqin Gu, Jie Chen, and Vladimir L Kharitonov. *Stability of time-delay systems*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [19] Sabine Mondie and Vladimir L Kharitonov. Exponential estimates for retarded time-delay systems: An lmi approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(2):268–273, 2005.
- [20] Roger A Horn and Charles R Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge university press, 2012.
- [21] Emilie V Haynsworth. Determination of the inertia of a partitioned hermitian matrix. *Linear algebra and its applications*, 1(1):73–81, 1968.
- [22] Robert T Seeley. *Introducción a las series integrales de fourier*. Reverté, 2004.
- [23] Vimal Singh. A generalized lmi-based approach to the global asymptotic stability of delayed cellular neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 15(1):223–225, 2004.
- [24] Sabri Arik. An analysis of global asymptotic stability of delayed cellular neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 13(5):1239–1242, 2002.
- [25] Stephen KP Wong and Dale E. Seborg. Control strategy for single-input single-output non-linear systems with time delays. *International Journal of Control*, 48(6):2303–2327, 1988.
- [26] Michael A Henson and Dale E Seborg. Time delay compensation for nonlinear processes. *Industrial & engineering chemistry research*, 33(6):1493–1500, 1994.

- [27] Tomohiro Takagi and Michio Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, (1):116–132, 1985.
- [28] Hua O Wang, Kazuo Tanaka, and Michael F Griffin. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. *IEEE transactions on fuzzy systems*, 4(1):14–23, 1996.
- [29] Hua O Wang, K Tanaka, and M Griffin. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model. In *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Fuzzy Systems.*, volume 2, pages 531–538. IEEE, 1995.
- [30] M Bernal, V Estrada, and R Márquez. Diseño e implementación de sistemas de control basados en estructuras convexas y desigualdades matriciales lineales, 2019.
- [31] Hoang Duong Tuan, Pierre Apkarian, Tatsuo Narikiyo, and Yasuhiro Yamamoto. Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 9(2):324–332, 2001.
- [32] Zsófia Lendek, Thierry Marie Guerra, Robert Babuška, and Bart Schutter. *Stability analysis and nonlinear observer design using Takagi-Sugeno fuzzy models*. Springer, 2011.
- [33] Tadanari Taniguchi, Kazuo Tanaka, Kazuo Yamafuji, and Hua O Wang. Fuzzy descriptor systems: stability analysis and design via lmis. In *Proceedings of the 1999 American Control Conference (Cat. No. 99CH36251)*, volume 3, pages 1827–1831. IEEE, 1999.
- [34] Tadanari Taniguchi, Kazuo Tanaka, and Hua O Wang. Fuzzy descriptor systems and nonlinear model following control. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(4):442–452, 2000.
- [35] Hideyuki Tanaka and Toshiharu Sugie. General framework and BMI formulae for simultaneous design of structure and control systems. *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers*, 34(1):27–33, 1998.
- [36] Liyi Dai. *Singular control systems*, volume 118. Springer, 1989.
- [37] Juan Carlos Arceo, Marcelino Sánchez, Victor Estrada-Manzo, and Miguel Bernal. Convex stability analysis of nonlinear singular systems via linear matrix inequalities. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(4):1740–1745, 2018.
- [38] Kazuo Tanaka and Hua O Wang. *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons, 2004.