UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS DE BÁSICAS E INGENIERÍA

MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

TESIS

DISEÑO DE TAREA DE APRENDIZAJE QUE PROMUEVEN EL PROCESO DE MODELACIÓN EN EL CONTEXTO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Para obtener el grado de

Maestro(a) en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica

PRESENTA

Yuliana Santana Sánchez

Director (a)

Dr. Marcos Campos Nava

Codirector (a)

Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez

Comité tutorial

Dr. Cutberto Rodríguez Álvarez
Dr. Isidro Jesús González Hernández
Dr. Marcos Campos Nava
Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez

Mineral de la Reforma, Hgo., México., Agosto 2022

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
School of Engineering and Basic Sciences
Área Académica de Matemáticas y Física
Department of Physics and Mathematics

Mineral de la Reforma, Hgo., a 30 de agosto de 2022

Número de control: ICBI-AAMyF/820/2022
Asunto: Autorización de impresión de tesis.

MTRO. JULIO CÉSAR LEINES MEDÉCIGO
DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

El Comité Tutorial de la tesis titulada **"Diseño de tarea de aprendizaje que promueve el proceso de modelación en el contexto de las Ecuaciones Diferenciales"**, realizada por la sustentante **Yuliana Santana Sánchez** con número de cuenta **429605** perteneciente a la **Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica**, una vez que ha revisado, analizado y evaluado el documento recepcional de acuerdo a lo estipulado en el Artículo 110 del Reglamento de Estudios de Posgrado, tiene a bien extender la presente:

AUTORIZACIÓN DE IMPRESIÓN

Por lo que el sustentante deberá cumplir los requisitos del Reglamento de Estudios de Posgrado y con lo establecido en el proceso de grado vigente.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

El Comité Tutorial

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Dr. Marcos Campos Nava
Director

Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez
Codirector

Dr. Cutberto Rodríguez Álvarez
Miembro del comité

Dr. Isidro Jesús González Hernández
Miembro del comité

Dedicatorias

Esta tesis está dedicada a:

A Dios quien ha sido mi guía, fortaleza y su mano de fidelidad y amor han estado conmigo hasta el día de hoy.

A mis padres Florencio y Luisa quienes con su amor, paciencia y esfuerzo me han permitido llegar a cumplir hoy un sueño más, gracias por inculcar en mí el ejemplo de esfuerzo, dedicación y valentía, de no temer las adversidades porque ustedes están conmigo siempre.

A mis hermanos Eder y Erik por su cariño y apoyo incondicional, durante todo este proceso, por estar conmigo en todo momento gracias. A toda mi familia porque con su amor, consejos y palabras de aliento hicieron de mí una mejor persona y de una u otra forma me acompañan en todos mis sueños y metas.

Finalmente quiero dedicar esta tesis a todas mis amigas, por apoyarme cuando más las necesito, por extender su mano en momentos difíciles y por el amor brindado cada día, de verdad mil gracias, siempre las llevo en mi corazón.

Agradecimientos

Quiero expresar mi gratitud a Dios, quien con su bendición llena siempre mi vida y a toda mi familia por estar siempre presentes.

Mi profundo agradecimiento a mis directores de Tesis, Dr. Marcos Campos Nava y Dr. Agustín Alfredo Torres Rodríguez, su esfuerzo y dedicación. Sus conocimientos, sus orientaciones, su manera de trabajar, su persistencia, su paciencia y su motivación han sido fundamentales para mi formación como investigadora. Ellos han inculcado en mí un sentido de seriedad, responsabilidad y rigor académico sin los cuales no podría tener una formación como investigadora. A su manera, han sido capaces de ganarse mi lealtad y admiración, así como sentirme en deuda con ellos por todo lo recibido durante el periodo de tiempo que ha durado esta Tesis de Posgrado.

De igual manera mis agradecimientos a la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo y a la Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica, por confiar en mí, abrirme las puertas y permitirme realizar los estudios de posgrado, a mis profesores en especial a la Dra. Anna Tarasenko, Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez, Dr. Marcos Campos Nava, Dr. Agustín Alfredo Rodríguez Torres y Dr. José Félix Fernando Barrera Mora quienes con la enseñanza de sus valiosos conocimientos hicieron que pueda crecer día a día como maestra en matemáticas, gracias a cada uno de ustedes por su paciencia, dedicación y apoyo incondicional.

Y por último, pero no menos importante, estaré eternamente agradecida a mis compañeros de generación. El ambiente de trabajo creado es simplemente perfecto, y su visión, motivación, conocimiento, experiencia y optimismo me han ayudado en momentos muy críticos durante mi formación como maestra y en el proceso de elaboración de la tesis. Los considero como mis amigos y colegas, estoy orgullosa que ustedes también me consideren a mí, digna de poseer su amistad.

Resumen

En este trabajo se diseñó una secuencia de 3 tareas de aprendizaje matemático: Introductoria, experimental y de modelado; para coadyuvar en la comprensión de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) involucradas en el movimiento de una partícula. En la propuesta se destacan diferentes elementos del proceso de modelación matemática: el dominio real, el pseudo-concreto, el físico y el matemático (Rodríguez, 2010). Para el diseño de las tareas también se consideraron elementos de distintos referentes teóricos, como la Matemática Realista; los distintos niveles de comprensión según Zolkower Bressan, y Gallego (2004) y el tránsito entre los distintos registros de representación para la resolución de un problema real (Duval, 2006).

La estructura de las tareas incluyó un contexto experimental y el uso de la tecnología, con la finalidad de promover los procesos de descripción, observación, reflexión y análisis sobre las interacciones, experiencias, formas de expresión matemática y acciones grupales e individuales. La implementación de esta propuesta de tesis se llevó acabo en un Tecnológico del Estado de México con alumnos del octavo semestre de la carrera de Ingeniería en Nanotecnología. El tiempo de implementación de las tareas de fue tres sesiones con una duración de dos horas cada una.

El análisis de los datos se hizo desde un enfoque cualitativo donde se evidencia que los estudiantes con ayuda de un método inquisitivo guiado por la docente, lograron identificar modelos matemáticos para navegar en los diferentes niveles de la matematización, así como la transición de los 4 dominios del ciclo de modelación propuesto por Rodríguez (2010), los estudiantes analizaron un modelo semi-concreto, para transitar a un modelo físico, el cual describieron a través de una hipótesis, misma que se tuvo que transformar en un modelo matemático, teniendo así resultados que se pudieron contrastar.

Los tratamientos dentro de cada registro y, sobre todo, las conversiones entre los distintos registros de representación semiótica que ponen de manifiesto los estudiantes son parte de la diversidad de representaciones que se necesitan para plantear una situación y resolverla. Como resultado preliminar se obtuvo que los estudiantes identificaron relaciones entre la velocidad y la aceleración en el estudio de distintos movimientos de una partícula.

Abstract

In this work, a sequence of 3 mathematical learning tasks was designed: introductory, experimental and modeling; to help in the understanding of the Ordinary Differential Equations (ODE) involved in the motion of a particle. The proposal highlights different elements of the mathematical modeling process: the real, pseudo-concrete, physical and mathematical domains (Rodriguez, 2010). For the design of the tasks, elements from different theoretical references were also considered, such as Realistic Mathematics; the different levels of understanding according to Zolkower Bressan, and Gallego (2004) and the transit between the different registers of representation for the resolution of a real problem (Duval, 2006).

The structure of the tasks included an experimental context and the use of technology, with the aim of promoting the processes of description, observation, reflection and analysis of interactions, experiences, forms of mathematical expression and group and individual actions. The implementation of this thesis proposal was carried out in a Tecnológico del Estado de México with eighth semester students of Nanotechnology Engineering. The implementation time of the tasks was three sessions with a duration of two hours each.

The data analysis was done from a qualitative approach where it is evident that students with the help of an inquisitive method guided by the teacher, managed to identify mathematical models to navigate the different levels of mathematization, as well as the transition of the 4 domains of the modeling cycle proposed by Rodriguez (2010), students analyzed a semi-concrete model, to move to a physical model, which they described through a hypothesis, which had to be transformed into a mathematical model, thus having results that could be contrasted.

The treatments within each register and, above all, the conversions between the different registers of semiotic representation shown by the students are part of the diversity of representations needed to pose a situation and solve it. As a preliminary result, it was obtained that students identified relationships between velocity and acceleration in the study of different movements of a particle.

ÍNDICE

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Introducción

Las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias están consideradas como uno de los tópicos básicos en la formación de profesionales de especialidades relacionadas con la ciencia y la tecnología, tal y como se refleja en diversos currículos del nivel universitario, por ejemplo, en las licenciaturas o los grados en Matemáticas, Física, Química, Biología, Económicas, Ingenierías, etc. La razón de su importancia es porque las ecuaciones diferenciales permiten describir fenómenos de variación y por tanto resultan de utilidad para modelizar, analizar y resolver numerosos problemas que surgen en diferentes contextos.

Para ubicar al lector en el contexto actual de la modelación matemática, hay que recordar que surgió en el contexto de la Física, especialmente en Mecánica y su conexión con ideas importantes que en esta subyacen. La Física, con su componente experimental y la expresión de sus leyes en términos de modelos matemáticos, no solo promovió el impresionante desarrollo de las matemáticas, sino que debido a sus logros se convirtió en el modelo de ciencia occidental durante siglos; el método científico que ella promovió sigue siendo el utilizado en las ciencias exactas y la mayor parte de las ciencias naturales (Cervantes, 2015).

Un objetivo importante que se pretende con la modelización matemática es contribuir a la comprensión de fenómenos reales, sin embargo, al empezar a modelizar, es necesario aprender a elegir y delimitar de manera conveniente el problema de estudio, pues recordemos que los fenómenos reales relevantes son tan complejos que su estudio ha requerido distintas aproximaciones metodológicas (Creswell, 2003) y ha dado origen a las diferentes ciencias que han evolucionado durante siglos hasta alcanzar su expresión actual.

Tomando en consideración la importancia y conexión de los fenómenos reales con la modelización matemática, Korsunsky (2002) ha sugerido que los problemas matemáticos en contextos, que no se apegan a la situación real, pueden influir negativamente en la enseñanza y el aprendizaje. Él propone que los problemas matemáticos contextualizados deben ser auto-consistentes, sin que por ello, se requiera que el maestro de matemáticas sea un experto en física y que el estudiante esté enterado de temas de física que van más allá de los conocimientos inherentes al nivel escolar correspondiente. Desde este punto de vista, se considera acertada la elección del análisis del movimiento de un objeto, como un buen ejemplo para modelizar un fenómeno en el aula de clase.

1.2 Planteamiento del Problema

En libros de Ecuaciones Diferenciales (ED) cuando se abordan los modelos lineales de primer orden, como crecimiento y decaimiento, datación con carbono, ley de Newton sobre enfriamiento y calentamiento de un cuerpo, mezclas, etc. por lo general se le da al estudiante la ED que permite modelar este tipo de situaciones, presentándola como una fórmula, impidiendo la comprensión precisa del concepto como lo mencionan Nápoles et al. (2004). Pero muy poco se trabaja sobre la forma del cómo se construye esta ecuación diferencial, sobre cómo se realiza ese cambio de registro verbal al registro algebraico. Las ED es uno de los temas más apasionantes de la Matemática Aplicada que nos transporta a la modelización de problemas del entorno; en este sentido, en esta investigación entenderemos por modelización matemática, esencialmente, el traslado de un problema del mundo real a un problema matemático, resolver el problema matemático e interpretar la solución en el lenguaje del mundo real. Para Nápoles et al. (2004), en la enseñanza de las ED algunos conceptos relacionados con límite, derivación e integración son evadidos u ocultados con fórmulas o algoritmos, lo cual impide la comprensión precisa del concepto llevando al estudiante, y en ocasiones a los docentes, a concebir la fórmula como el concepto en sí mismo.

En el aprendizaje de las matemáticas, es sabido que no es suficiente conocer una serie de definiciones y procedimientos, sino que se requiere la adquisición y el desarrollo de ciertas habilidades, capacidades y destrezas para emplear los conocimientos de manera integrada para resolver problemas, reflexionar y razonar ante determinadas situaciones del ámbito matemático o de otros ámbitos como lo menciona Camacho et al. (2012). No obstante, una de las características de los cursos en matemáticas, en general, en los diferentes niveles educativos radica en la insuficiente vinculación con actividades experimentales que permitan llevar a cabo la fase de la modelación, la cual permita al estudiante articular los contenidos matemáticos con situaciones o fenómenos reales. En este sentido, se ha constatado que los métodos tradicionales de enseñanza en las aplicaciones de las EDO de primer orden en el nivel universitario, tienden a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica que acaba siendo rutinaria. Este modo de enseñar conduce a que el estudiante adquiera en algunas ocasiones un dominio algebraico, pero no conceptual: se reconocen y aplican los procedimientos a problemas prototípicos, pero no se alcanza la comprensión de la teoría que los soporta.

Para la comprensión y análisis de fenómenos que tienen que ver con las matemáticas, hoy en día el uso de las herramientas digitales es indispensable para la adquisición y reforzamiento de conceptos matemáticos. Como lo sugieren Campos y Torres (2018), en las últimas dos décadas se han realizado diversos estudios sobre el uso y las potencialidades de las herramientas digitales para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, como ejemplos de las estrategias que se han desarrollado se puede consultar el trabajo de Álvarez (2007), donde se hace una revisión de la relación tan estrecha que puede conseguirse entre las representaciones gráficas y las algebraicas haciendo uso de un sistema de geometría dinámico. Para Duval (2006) en las transformaciones de las representaciones semióticas cuando se une un enunciado con una representación visual se pueden desarrollar dos funciones, economía de memoria para tener en cuenta todos los elementos que se relacionan, o heurística para encontrar el teorema. La computadora puede facilitar la unión de este enunciado y su representación visual ya que como menciona Villarreal (2003) la computadora privilegia el pensamiento visual. En el caso de la matemática, es punto de apoyo a las nuevas tecnologías intelectuales que no rechaza lo verbal o algebraico.

En vista de lo mencionado en párrafos anteriores se ha detectado que un problema en la enseñanza de las matemáticas, específicamente en las Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales, es la escasa vinculación que los profesores de matemáticas fomentan entre problemas del contexto físico y un modelo matemático que lo represente, el cual permita al estudiante tener un mayor entendimiento conceptual y con ello un aprendizaje orientado hacia la comprensión más profunda del tópico.

1.2.1 Pregunta de Investigación y Objetivos

Con las premisas expuestas con anterioridad, es necesario diseñar tareas de aprendizaje matemático con el fin de abordar un problema relacionado a la aplicación de las EDO de primer orden, concretamente en la Cinemática, en un contexto experimental y con la inclusión de la tecnología. La pregunta de investigación que guía este trabajo es ¿Qué elementos del proceso de modelación, principios de la Matemática Realista y representaciones semióticas emergen al abordar tareas planteadas en el contexto de la Cinemática involucrando el empleo de las herramientas digitales?

Objetivo General

Identificar los elementos del proceso de modelación que emergen durante la implementación de las tareas de aprendizaje matemático en el contexto de la Cinemática, en un ambiente de experimentación y uso de tecnología, con la finalidad de favorecer el entendimiento del concepto de ecuación diferencial.

Objetivos Específicos

- Analizar las representaciones semióticas que utilizan los estudiantes durante el desarrollo de las tareas de aprendizaje.

- Identificar los principios de la Educación Matemática Realista que surgen en la implementación de las tareas de aprendizaje matemático.

- Analizar el papel que juega la experimentación, el uso de las herramientas digitales y la interacción entre estudiantes en el proceso modelación matemática.

1.3 Justificación

Dentro de la investigación en educación matemática, se ha constatado que, en general, los estudiantes que reciben una formación matemática centrada en el uso de definiciones y procedimientos matemáticos muestran dificultades a la hora de relacionar entre sí sus conocimientos matemáticos y los conceptuales. Esta problemática general se presenta en relación con distintos conceptos matemáticos, en particular, con el tratamiento de las ecuaciones diferenciales ordinarias, como muestran Camacho et al. (2007) (citado en Camacho, 2012) en un estudio realizado con un grupo de alumnos que habían recibido una enseñanza de las ecuaciones diferenciales centrada en la definición formal y el uso de métodos algebraicos de resolución. En el trabajo referido se analizó la forma en que los estudiantes utilizaron sus conocimientos matemáticos para resolver problemas y responder a cuestiones relacionadas con las EDO. Los resultados del estudio mostraron que muchos estudiantes no establecían relaciones entre los conceptos de derivada de una función y EDO, lo que les impedía comprender, reflexionar y resolver determinadas actividades. Además, aquellos estudiantes que hacían uso del concepto de derivada de una función, en muchos casos recurrían únicamente al uso de las reglas de derivación y en muy pocas ocasiones utilizaban las representaciones gráficas para explorar significados y relaciones matemáticas (Camacho et al., 2012). Los estudiantes se centraron principalmente en la búsqueda de algoritmos que les permitieran resolver los problemas, mostrando serias dificultades en aquellas actividades cuyo enunciado hacía referencia a un contexto basado en una situación real (Camacho et al. 2009, citado en Camacho, 2012).

Es importante mencionar que existe una brecha entre las competencias matemáticas que requieren desarrollar los futuros ingenieros, vinculadas fundamentalmente a la modelación y experimentación, y las competencias que se fomentan en los cursos de matemáticas en los diferentes niveles educativos. Para Hernández et al. (2016) la problemática radica en la insuficiente vinculación con actividades experimentales que permitan llevar a cabo la fase de la modelación, la cual permita al estudiante articular los contenidos matemáticos con situaciones o fenómenos reales.

Ahora bien, por la necesidad de incluir los recursos tecnológicos en los procesos de enseñanza aprendizaje de las EDO, es que permite integrar enfoques diferentes como el algebraico, simbólico y gráfico con la ayuda de un solo recurso. Es por esto que se propone un diseño de tareas de aprendizaje matemático, en donde las actividades a realizar integren diferentes enfoques como el algebraico, gráfico y lenguaje natural, con el apoyo de un software de uso libre, el cual puede ser implementado en cualquier universidad pública o por el mismo estudiante, sin generar costos adicionales. Por los motivos expresados, es necesario diseñar tareas de aprendizaje matemático que le permitan al estudiante modelar el fenómeno real a través de una EDO de primer orden y a la vez le permita realizar diferentes representaciones semióticas (Duval, 2006), logrando en el estudiante un aprendizaje y conexión del conocimiento matemático, conceptual y físico.

1.4 Estado del Arte

Diversos estudios en educación matemática han analizado el papel de la modelación dentro del aula de clases, de manera particular en una clase de ED. Por ejemplo, Acevedo (2015) trabajando con estudiantes de ingeniería implementó una estrategia didáctica centrada en la modelación matemática, para este caso, el estudiante inicia con la situación problemática real hasta un modelo matemático de ecuaciones diferenciales de primer o segundo orden que describa dicha situación. Los datos recolectados a través de las observaciones durante la experiencia evidencian que, algunos grupos de estudiantes, realizaron nuevamente la recolección de datos, ya que los valores no se ajustaban, en otros casos las ecuaciones diferenciales seleccionadas no modelaban el problema de manera confiable.

En el trabajo realizado por Hernández et al. (2016) fundamentado en dos marcos: el didáctico y el matemático, se aplicó un test con 3 problemas del modelo de mezclas. En la actividad propuesta se integraron los enfoques algebraico, gráfico y lenguaje natural, con el apoyo de hojas de trabajo y ambientes dinámicos con el software libre como GeoGebra. Se identificó que las dificultades encontradas durante la implementación de la actividad propuesta en la mayoría de casos, los estudiantes optaron por expresar la respuesta en el mismo registro en el cual está planteada la pregunta, sin coordinar explícitamente los otros. También se observó que algunos estudiantes van más allá de la representación de mono registros, gracias a las cualidades de exploración, descubrimiento y modelación que proporciona el entorno de GeoGebra.

Por otra parte, Rodríguez y Quiroz (2016) realizaron un estudio de corte cualitativo y a través del estudio de las praxeologías en el ciclo de modelación matemática, permitió que alumnos de diferentes ingenierías de una universidad privada tuvieran un acercamiento a problemas en contexto, donde es posible la utilización de las matemáticas para dar respuesta a fenómenos propios de la ingeniería, esto con un diseño específico donde se cuidaron las diversas etapas de la modelación matemática reflejadas en una secuencia de actividades que promuevan, tanto su desarrollo, como el tránsito entre ellas. Con lo anterior, el estudio concluye que la tecnología, debidamente elegida y puesta en marcha en actividades clave del proceso de modelación, puede ser un elemento importante e, incluso, indispensable para la generación de relaciones entre los diversos dominios del ciclo de modelación matemática por parte de los alumnos.

Hernández et al. (2016) realizaron una investigación de corte cuantitativo de tipo exploratorio y descriptivo utilizando un cuestionario en la recolección de información. El soporte teórico que dio sentido al estudio fue el modelo de dos etapas: traducción y solución propuesto por Mayer R. (1986). Para la resolución de problemas matemáticos, se consideró el ciclo de modelación de Borromeo (2006) y la teoría de las representaciones de Goldin y Kaput (1996). La investigación se centró específicamente en la fase de representación del modelo. Entre los principales hallazgos se destaca que cada participante hace su propia representación externa a conceptos como: sistema masa-resorte, peso, masa, punto de equilibrio, constante de elasticidad, punto de equilibrio, Ley de Hooke, fuerza amortiguadora, fuerza externa, Ley de Newton, entre otros. Se evidencian también dificultades en el tránsito del lenguaje natural al lenguaje matemático y la representación externa de cada una de los signos, símbolos o expresiones matemáticas inmersas en el problema de palabra, debido a que el estudiante tiene que construir un modelo mental de la situación real y plasmarlo en un modelo matemático.

Para Dullius (2009) el uso de estos recursos tecnológicos propicia al estudiante a interactuar con una representación del modelo científico (en este caso una ED) que describe el fenómeno de interés (aplicaciones de ED) y dispone al mismo tiempo de la oportunidad de observar, explorar y analizar el comportamiento de las ED, dando mayor importancia al aprendizaje de estas en la interpretación y aplicación más que en la solución analítica. Por lo tanto, la inclusión de nuevas tecnologías en el aula ha contribuido a mitigar muchas dificultades asociadas a los procesos de aprendizaje de los estudiantes, en particular el hecho de que los estudiantes, en la resolución de ciertos problemas, no asocien de una forma coherente los conceptos matemáticos requeridos para la resolución con los algoritmos asociados a los mismos. Lo anterior se puede deber al enfoque de una enseñanza tradicional que manejan la mayoría de los profesores de matemáticas y a la escasez en el manejo e implementación de recursos tecnológicos (De las Fuentes et al. 2010).

Las tecnologías digitales han tenido una gran influencia en la enseñanza de las diferentes áreas del conocimiento en los últimos años en los diferentes niveles educativos. Concerniente al uso de las tecnologías digitales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, Santos-Trigo, Moreno & Camacho. (2016, p. 828) plantean que: "… el uso de la tecnología digital ofrece a los docentes y estudiantes la oportunidad de ampliar y profundizar las formas de razonamiento sobre las estrategias matemáticas involucradas en la resolución de problemas" (Santos Trigo, et. al., 2016). Estos autores consideran además que representar y explorar tareas matemáticas mediadas por tecnologías digitales presenta nuevos desafíos para los docentes. En este sentido, es un campo que, pese a su rápida expansión, ofrece un sinnúmero de posibilidades novedosas de aplicación.

Lea (2016) observó que el estudiante puede hallar en una herramienta tecnológica el apoyo para potencializar el desarrollar nuevos métodos, nuevas estrategias de graficación, simulaciones, diferentes formas de visualizar una ecuación diferencial, opciones que difícilmente se desarrollan mediante las técnicas de enseñanza tradicionales. También evidenció que con el empleo de las herramientas digitales, se conformó un ambiente de aprendizaje que invitó a la reflexión, al análisis, a la actitud crítica en la solución de problemas y la toma de decisiones, sirviendo la herramienta didáctica utilizada como elemento de motivación, donde se pudo verificar que la implementación de herramientas tecnológicas permite al estudiante explorar y desarrollar nuevos métodos y estrategias en la graficación y simulación de las situaciones planteadas, para ser resueltas mediante ecuaciones diferenciales en el salón de clases. A este respecto, Vergel et al. (2015) en su investigación concluyeron que el empleo de computadoras, calculadora y algún software matemático para la enseñanza de ecuaciones diferenciales, mostró incidencias favorables en el rendimiento académico y niveles de comprensión, así como en su concepto.

En contraste Plaza (2018) señala, que los estudiantes pudieron deducir por medio de la modelación matemática el fenómeno de la Ley de Enfriamiento de Newton, así como la respetiva ecuación diferencial por medio de herramientas básicas de matemáticas, tales como el cálculo, ajuste por mínimos cuadrados, y solución de ecuaciones diferenciales por el método de separación de variables. La investigación enfatiza que es posible describir otro tipo de experiencias que junto al análisis del tipo gráfico, simbólico, etc. (análisis cualitativo y cuantitativo) pueden generar nuevo conocimiento, o permiten refutar o confirmar otros ya existentes.

Para Carmona et. al. (2017) desarrollaron una propuesta didáctica que a través de la observación, experimentación y manipulación de los elementos de aprendizaje, el alumno puede tener una compresión de la abstracción matemática (ED) vista en clase y de esta manera llegue a un aprendizaje significativo. El objetivo principal de la investigación fue verificar si con la interacción del alumno con el fenómeno físico del vaciado de tanques, éste comprende el planteamiento de la ecuación diferencial y el significado que describe dicho fenómeno. Durante el proceso de trabajo con los alumnos descubrieron que es posible despertar en el educando la curiosidad hacia la investigación mediante el uso y descubrimiento de habilidades científico-intelectuales propias de su aprendizaje formal.

Por otra parte en el trabajo de Camacho et. al. (2017) desarrolla una práctica basada en la modelización del fenómeno de capacitancia con alumnos del nivel de ingeniería, de entre 18 a 20 años de edad. En esa práctica resultan magnitudes de tiempo t contra voltaje V y corriente I, cuyas gráficas representan funciones exponenciales o logarítmicas. El objetivo del estudio es que los estudiantes sean capaces de identificarlas. Por las características de la modelización, la experimentación es sujeta del modelo praxeológico extendido propuesto por Castelan y Romo en el 2011. Los resultados de dicho estudio revelan que los estudiantes reafirmaron el conocimiento que tenían del concepto de función exponencial a través de las actividades desarrolladas con la práctica, involucrando conocimientos del curso de cálculo y física.

En los últimos años, se han dado muchas publicaciones científicas, referente a las metodologías para el aprendizaje de ecuaciones diferenciales, aplicadas en física, donde se le da el agregado de utilizar tecnología, la cual es una competencia importante en el mundo actual. Guzmán (2021) realizó una tesis doctoral titulada: Modelo didáctico para el desarrollo de competencias en ecuaciones diferenciales en estudiantes de Ingeniería en una universidad pública de Lambayeque en Chiclayo, Perú. La investigación partió con el diagnóstico de una muestra de 50 estudiantes del quinto ciclo, a quienes se les aplicó un cuestionario para medir el desarrollo de competencias en la unidad didáctica de ecuaciones diferenciales, los obtuvieron un nivel de logro deficiente, con lo que se evidenció que estos no logran desarrollar las competencias señaladas en la unidad didáctica en mención, ante esta situación este estudio planteó un modelo didáctico, que se fundamentó en teorías del aprendizaje y enfoques socio formativos, el mismo que fue validado por juicio de expertos quienes determinaron su pertinencia y aplicabilidad.

Investigaciones respecto al diseño de clases basadas en modelación matemática han evidenciado en sus resultados un mayor logro de los alumnos en el establecimiento de conexiones entre las matemáticas escolares y las situaciones de la vida cotidiana, la reducción de la ansiedad hacia la asignatura de Matemáticas, mejor disposición para aceptar orientaciones, organizar información, pensar en sus acciones, la promoción de habilidades comunicativas e intercambio de ideas, el aumento de la motivación, así como, el desarrollo de habilidades críticas y de resolución de problemas (Alsina, 2009; Aravena y Caamaño, 2007; Rodríguez y Quiroz, 2016).

Teniendo en cuenta la revisión de la literatura se identifica que en algunas investigaciones refieren el uso de modelación matemática como estrategia de enseñanza, sin embargo, en ellas no se destacan aspectos importantes que caracterizan a la modelación matemática: identificar la situación, matematizar, interpretar y confrontar el modelo con la situación. En algunas de ellas se realizaron actividades experimentales en las cuales solo se enfocan en la construcción del modelo. En otras se observó que los estudiantes tienen dificultades en la conversión de registros cuando las tareas implementadas se apoyan del uso de herramientas digitales. Con respecto a esto se identificó que el recurso digital permite una interpretación de la solución de la situación, más no hay interés en la solución analítica de la misma.

En este trabajo es que se busca diseñar tareas de aprendizaje las cuales permitan analizar en primer lugar los conocimientos de los estudiantes en el contexto de la Cinemática, para que posteriormente se aborde una aplicación de la ED, desde una perspectiva intuitiva para llegar al constructo abstracto del modelo de la aplicación, matematizar la situación y contraponer los procesos experimentales con los algoritmos, teniendo como objetivo que el estudiante sea capaz de conectar diferentes enfoques como: algebraico, simbólico, gráfico y descripciones verbales de fenómeno, con el apoyo de hojas de trabajo y herramientas digitales.

En este trabajo se busca demostrar la importancia de que un diseño adecuado de tareas de aprendizaje permitirá a los estudiantes transitar en los diferentes dominios del ciclo de modelación y desarrollar distintas habilidades. Además, de que sirva como herramienta para los futuros profesores en educación matemática para diseñar sus propias tareas de aprendizaje matemático.

2. MARCO CONCEPTUAL

2.1 Introducción

En este capítulo se hace una revisión de la literatura relacionada con las matemáticas realistas, la modelación y las representaciones semióticas, ya que en el trabajo se busca utilizar y modelar situaciones del mundo real como un medio para abordar la matemática. Para algunos investigadores entre ellos Romo (2014) las matemáticas deben verse como disciplina de servicio. Los programas que no forman matemáticos puros, no deben basar la enseñanza en el rigor y la estructura propia de las matemáticas, sino potenciarla como herramienta para resolver de manera eficaz problemas de la vida práctica.

En cuanto a la modelación, ésta es una herramienta matemática que puede permitir una comprensión profunda de algún fenómeno; también puede generar oportunidades de aprendizaje, porque el estudiante se ve inmerso en un proceso de experimentación continua. Por la trascendencia de la fase de representación en el ciclo de modelación, la investigación está centrada en analizar las representaciones semióticas en la matematización cuando se presentan problemas de una situación real.

Por otro lado, la tecnología provee medios para modelar fenómenos complejos, y para poner en juego conocimientos que pueden no ser accesibles con herramientas tradicionales. Respecto a lo antes señalado, en este capítulo se analizó las diversas maneras en que los autores vislumbran el proceso de modelación. Por otro lado, aunque a lo largo de los siglos, la matemática se desarrolló vinculada a la búsqueda de soluciones de problemas reales, mucha de la matemática escolar se enseña de manera independiente a la realidad. En las últimas décadas ha habido un movimiento para re-contextualizar la matemática escolar; de allí surge la corriente conocida como la educación matemática realista, que se presenta en la siguiente sección.

2.2 Educación Matemática Realista

El desarrollo de las matemáticas históricamente estuvo ligado a la búsqueda de soluciones a problemas de la realidad: cuando surgieron las primeras civilizaciones hace cientos de años, el objetivo al hacer matemáticas era solucionar problemas puramente prácticos, por ejemplo en la agricultura. Esta tendencia se mantuvo por muchos siglos; inclusive en el desarrollo del cálculo de Newton y Leibniz entre el siglo XVII y XVIII, fueron los grandes detonantes para que se desarrollara toda una teoría sobre las EDO. Sin embargo, hasta cierto grado, esto se ha perdido ya que mucha de la matemática actual se genera de manera abstracta, independiente de su conexión con la realidad, aún si posteriormente se encuentran aplicaciones prácticas para ella.

2.2.1 Teoría de la Educación Matemática Realista

La Educación Matemática Realista (EMR) es una teoría de la enseñanza y el aprendizaje en educación matemática que fue desarrollada en el Instituto Freudenthal en los Países Bajos. El enfoque principal de la educación matemática realista, según Van de Heuvel-Panhuizen y Drijvers (2014) es considerar que las situaciones realistas son prominentes en el proceso del aprendizaje. Cabe señalar que, aunque el término “situación realista” hace referencia a situaciones del mundo, según la escuela de EMR. En holandés, “zichrealis-eren” significa “imaginar”; o sea, una situación es realista si se presenta ante el sujeto que aprende como razonable, realizable o susceptible de ser imaginada (Zolkower et al., 2006, p. 13)

Freudenthal (1991) enfatiza la idea de matemáticas como una actividad humana; la educación matemática es organizada como un proceso de reinvención guiada, donde los estudiantes pueden tener experiencias similares a los procesos de invención matemática. Así pues, la historia de las matemáticas puede ser usada como una fuente de inspiración para el diseño de un curso. El principio de reinvención puede estar sustentado en soluciones informales. Las estrategias informales de los estudiantes se pueden interpretar como una forma anticipada de procedimientos más formales.

En la literatura sobre matemáticas realistas se habla del principio de matematización: la matematización horizontal y la vertical (Treffers, 1987). En la matematización horizontal el estudiante propone diversas herramientas matemáticas que le pueden ser de ayuda para organizar y resolver un problema situado en la vida real, ejemplos de matematización horizontal son los siguientes: identificar o describir las matemáticas específicas en un contexto general, esquematizar, formular y visualizar un problema de diferentes formas, descubrir relaciones, descubrir regularidades, reconocer aspectos comunes en diferentes problemas, transferir un problema del mundo real al mundo matemático, transferir un problema del mundo real a un problema matemático ya conocido. Por otra parte, las matemáticas verticales son el proceso de reorganización dentro de un sistema matemático en sí mismo, algunos ejemplos de matematización vertical son los siguientes: representar una relación en una fórmula, proveer regularidades, refinar y reajustar modelos, usar diferentes modelos, combinar e integrar modelos, formular un modelo matemático y generalizar. Freudenthal (1991) establece que la matematización horizontal involucra ir del mundo real al mundo de los símbolos, mientras que la matematización vertical significa moverse dentro del mundo de los símbolos, sin embargo agrega que la diferencia entre estas dos matematizaciones no sigue siendo muy clara.

2.2.2 Principios de la Matemática Realista

Actualmente, la EMR se basa en seis principios fundamentales (Alsina, 2009), como se observa en la Tabla 1:

Tabla 1. Principios de la EMR (Alsina 2009)

Principio	¿Qué es?	¿Cómo puede trabajarse?
De actividad	Las matemáticas son una actividad humana a las que todas las personas pueden acceder. La finalidad de las matemáticas es matematizar (organizar) el mundo que nos rodea, incluyendo a la propia matemática. La matematización es una actividad de búsqueda y de resolución de problemas, también es una actividad de organización de un tema.	Matematizar involucra principalmente generalizar y formalizar. Formalizar implica modelizar, simbolizar, esquematizar y definir, y generalizar conlleva reflexión.
De realidad	Las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales. Un contexto real se refiere tanto a situaciones problemáticas de la vida cotidiana y situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos.	El contexto de los problemas que se presentan a los alumnos puede ser el mundo real, pero esto no es necesariamente así. Es necesario que progresivamente se desprendan de la vida cotidiana para adquirir un carácter más general, o sea, para transformarse en modelos matemáticos
De nivel	Los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión: • Situacional: en el contexto de la situación. • Referencial: esquematización a través de modelos, descripciones, etc. • General: exploración, reflexión y generalización. • Formal: procedimientos estándares y notación convencional.	Esquematización progresiva (profesor) y reinvención guiada (aprendiz), las situaciones de la vida cotidiana son matematizadas para formar relaciones más formales y estructuras abstractas.

Continuación Tabla 1.

Principio	¿Qué es?	¿Cómo puede trabajarse?
De interacción	La enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social. La interacción entre los estudiantes con sus compañeros y los profesores pueden provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión.	La negociación explícita, la intervención, la discusión, la cooperación y la evaluación son elementos esenciales en un proceso de aprendizaje constructivo en el que los métodos informales del aprendiz son usados como una plataforma para alcanzar los formales. En esta instrucción interactiva, los estudiantes son estimulados a explicar, justificar, convenir y discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar.
De interconexión	Los bloques de contenidos matemáticos (numeración y cálculo, algebra, geometría…) no pueden ser tratados como entidades separadas	Las situaciones problemáticas deberían incluir contenidos matemáticos interrelacionados.
De reinvención guiada	Proceso de aprendizaje que permite reconstruir el conocimiento matemático formal.	Presentar situaciones problemáticas abiertas que ofrezcan una variedad de estrategias de solución. Permitir que los estudiantes muestren sus estrategias e invenciones a otros. Discutir el grado de eficacia de las estrategias usadas.

En resumen, los principios del Enfoque Realista de la Educación Matemática son los siguientes: prestar mucha atención, por parte del alumnado, a la re-invención; progresar gradualmente entre diferentes niveles de abstracción y partir de situaciones reales para desarrollar el aprendizaje matemático.

Dado que en esta investigación se propone acercar al estudiante por medio de sus experiencias y los contextos propios de su cotidianidad, se encuentra en la perspectiva realística varios elementos de gran utilidad para tal propósito como son: pedagógicas, de contenido y relacionadas con la ciencia, comprendiendo estas como la posibilidad de desarrollar, en el estudiante, la capacidad de entender el mundo de una mejor manera, promover la motivación hacia la matemática, estructurar procesos de aprendizaje en la incorporación de nuevos conceptos matemáticos y comunicar una imagen realista de las matemáticas como ciencia (Kaiser1995, citado en Kaiser y Sriraman, 2006). Desde la perspectiva de estos autores, se propone que la modelación debe ser entendida como una actividad para solucionar problemas auténticos y no como desarrollo de la teoría matemática.

2.3 Modelación Matemática

Al tratar de abordar algunos conceptos en matemáticas una de las dificultades que se puede presentar es establecer un consenso entre diferentes comunidades y escuelas con respecto a una definición que sea general y que dé respuesta a diferentes concepciones. Uno de tales conceptos es precisamente la modelación en educación matemática. A este respecto, la comunidad de Matemática Educativa ha analizado a la modelación desde seis perspectivas: realista, contextual, educacional, sociocrítica, epistemológica y cognitiva (Kaiser y Sriraman, 2006).

La modelación matemática en la enseñanza de las matemáticas se ha constituido en un campo de investigación desde hace más de 30 años. Organismos como: El ICMI (International Comission and Mathematical Instruction) tiene una sección afiliada dedicada específicamente a la modelación, el ICTMA (Internacional community of Teacher of modelling and applications), CERME (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education) incluye el grupo de trabajo Applications and modelling, el NTCM (National Council of Teachers of Mathematics), el RELME (Reunión Latinoamerica de Matemática Educativa), en la que en sus diferentes versiones uno de los temas tratados ha sido la modelación matemática.

La definición de la modelación matemática se ha ido enriqueciendo desde que Pollak (1969) puntualizó los pasos o etapas que la conformaban:

- Identificar una pregunta del mundo real que se quiere entender.
- Seleccionar objetos particulares importantes para la pregunta hecha e identificar relaciones entre ellos.
- Decidir cuáles son útiles e ignorar los que no lo son.
- Trasladar esta versión en términos matemáticos, obtener fórmulas matemáticas para esta pregunta determinada y resolver el problema.

Posteriormente, Blum y Niss (1991) completan esta acepción considerando a la modelación matemática como el proceso completo de transitar desde un problema planteado en una situación real hasta un modelo matemático. Según Bassanezi y Biembengut (1997), la mayoría de autores cuando se refieren a la modelación matemática lo hacen como "el proceso que utiliza conceptos y técnicas esencialmente matemáticas, para el análisis de situaciones reales" (p.13), entre tanto para Blum y Borromeo, (2009) "la modelación matemática es el proceso de traducción entre el mundo real y las matemáticas en ambas direcciones” (p.50).

El cumplimiento de este proceso de modelización matemática favorece a que los alumnos comprendan los conceptos y métodos matemáticos permitiendo una visión global de la matemática, a la articulación de la matemática con otras áreas del conocimiento, evitando que los estudiantes caigan en un trabajo basado en algoritmos como lo menciona Aravena y Caamaño (2007). Por lo tanto, en palabras de Reid et al. (2012), menciona que “es a través de la construcción de modelos cuando el alumno relaciona los conceptos matemáticos con la realidad y entiende la necesidad del estudio de la Matemática y su importancia en la aplicación a otras disciplinas” (p.93).

2.3.1 Modelo Matemático en el Proceso de Modelación

Una parte del proceso de modelación, se encuentra en la construcción de modelos matemáticos. Esta construcción se realiza partiendo de fenómenos o situaciones particulares centradas en algún contexto. Blum et al. (2007) llaman al conjunto de estos contextos como mundo extramatemático o mundo real que se encuentra en una esfera distinta a la de las matemáticas. Así, un modelo matemático es definido por Blum y Niss (1991) como:

> Un modelo consiste en ciertos objetos matemáticos, correspondientes a elementos básicos de la situación original o del modelo real, y de ciertas relaciones entre estos objetos, que corresponden con relaciones entre los elementos básicos. Para ser un poco más precisos, un modelo matemático puede ser visto como un triple (S, M, R), consistente en una situación problemática real S, una colección de entidades matemáticas M y una relación R entre los objetos y relaciones de S y los objetos y las relaciones de M. (p.39).

Diferentes investigadores coinciden con esta perspectiva, por ejemplo para Diéguez et al. (2003) concuerdan que un modelo matemático es una representación simplificada del objeto o proceso que se analiza teniendo en cuenta que refleja sólo algunas características que son esenciales en el fenómeno estudiado. Por otra parte, Van De Heuvel (2014) lo define como una representación de situaciones, que reflejan necesariamente aspectos fundamentales de conceptos y estructuras matemáticas relevantes para la situación problema. Para Villa (2007) es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación. Tomando como referencia estas definiciones, un modelo matemático constituye un conjunto de elementos relacionados, que cumplen una función de representar y describir mediante relaciones matemáticas algún aspecto de una situación o fenómeno que se está estudiando.

Una definición relacionada con modelos construidos mediante ecuaciones diferenciales es la que proporciona Henry (2001) donde expresa que “Un modelo es una interpretación abstracta, simplificada e idealizada de un objeto del mundo real, o de un sistema de relaciones o de un proceso evolutivo a partir de una descripción de la realidad” (p.151). Es importante mencionar que el autor distingue entre dos tipos de modelos: el primero son los modelos pseudo concretos que son aquellos donde se realizan descripciones en el lenguaje natural de los objetos que intervienen en conjunto de sus propiedades y el segundo tipo de modelo es el referente a los modelos matemáticos que son descripciones precisas que se realizan por medio de diferentes registros de representación que permite operar analíticamente o algebraicamente.

La razón de construir modelos matemáticos basados en relaciones simbólicas radica en que estos puedan ajustarse a una situación de un contexto real. En el contexto de las ecuaciones diferenciales, un modelo matemático es una representación simplificada de ciertos aspectos de un sistema real, en donde se abstrae y captura lo más importante del sistema, utilizando el lenguaje matemático y objetos como: derivadas, variables, operadores, funciones, ecuación, etc. El modelo y sus soluciones relacionan variables y parámetros que gobiernan el funcionamiento de sistemas físicos, biológicos, sociológicos, económicos, etc. y permiten efectuar predicciones sobre el comportamiento de los mismos. De este modo, los modelos no son dados a priori por el profesor, éstos son construidos por el estudiante según su modo de relacionarse con la situación. Así, cobra relevancia el proceso como tal y no sólo el resultado matemático.

2.3.2 Ciclo de Modelación

La modelación matemática, vista como proceso, implica una serie de acciones o fases que hacen que la construcción o interpretación de un modelo no se efectúe de manera instantánea en el aula de clase; esas acciones o fases se conocen en la literatura como ciclo de la modelación. En este eslabón del proceso de solución de problemas el sujeto expresa en un lenguaje matemático los elementos e interrelaciones del problema dado, aplicando los conocimientos adquiridos (Diéguez et al., 2003). Para Kaiser y Sriraman (2006) la modelación es un proceso en el cual un problema no matemático es resuelto a través de la aplicación de las matemáticas. También Villa (2007) la interpreta como una actividad que se realiza en la clase de matemáticas, más que una herramienta para construir conceptos, se convierte en una estrategia que posibilita el entendimiento de un concepto matemático inmerso en un micromundo (contexto dotado de relaciones y significados) que prepara al estudiante para ir desarrollando una actitud diferente de preguntarse y abordar los problemas de un contexto real.

Para explicar el proceso de modelación, expertos en el tema lo hacen a través de un ciclo de modelación (Czocher, 2017). Entre ellos se puede mencionar investigadores que se centran en los procesos cognitivos del estudiante, como el caso de Blum y Leiss (Borromeo, 2006). En la figura 1 se muestra este ciclo donde el alumno, como primer paso, deberá entender el problema a través de una representación mental, lo que se llama "modelo situacional" y simplificar y estructurar el problema para construir un problema real y así poder solucionarlo. El problema se traducirá a un modelo matemático, se requerirá trabajar con cálculos y ecuaciones. En esta etapa son necesarias ciertas competencias matemáticas y conocimientos sobre diferentes tipos de representaciones.

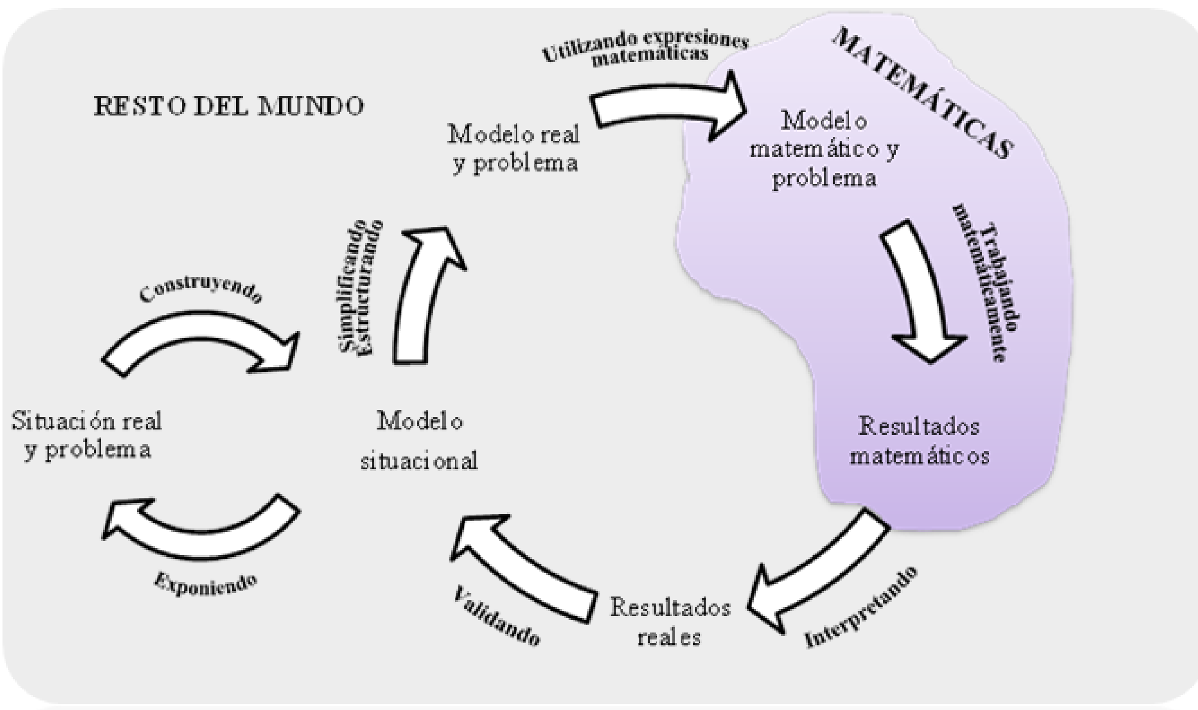


Fig. 1 Ciclo de modelación matemática de Blum y Leiss (Borromeo, 2006 p. 87)

Una vez que se soluciona el modelo matemático, el resultado se interpretará y validará con el mundo real. Si no es posible su validación, se deberá regresar a las fases anteriores para hacer adecuaciones (Borromeo 2006, 2013). Niss, Blum y Galbraith (2007) lo describen así:

> Por lo tanto, la competencia de modelado matemático significa la capacidad de identificar preguntas, variables, relaciones o suposiciones relevantes en una situación del mundo real dada, de traducirlas a lenguaje matemático e interpretar y validar la solución del problema matemático resultante en relación con la situación dada; así como la capacidad de analizar o comparar modelos dados mediante la investigación de los supuestos que se realizan, verificar las propiedades y el alcance de un modelo dado. (p.12).

Para Rodríguez y Quiroz (2016), la modelación matemática es considerada como un proceso cíclico en el cual reconocen cuatro dominios: el dominio real, el pseudo-concreto, el físico y el matemático. Las situaciones propuestas en modelación matemática parten del establecimiento de actividades que planteen un problema en el contexto real, para el posterior armado de un modelo pseudo concreto, que se traduce en uno físico y, posteriormente, en un modelo matemático. A dichas actividades les continúan la resolución del modelo matemático, tanto en términos matemáticos como en físicos y pseudo concretos, donde se promueve la crítica del modelo y, si es necesaria, su modificación. Para mostrar gráficamente el proceso de modelación matemática, se presenta en la Figura 2.

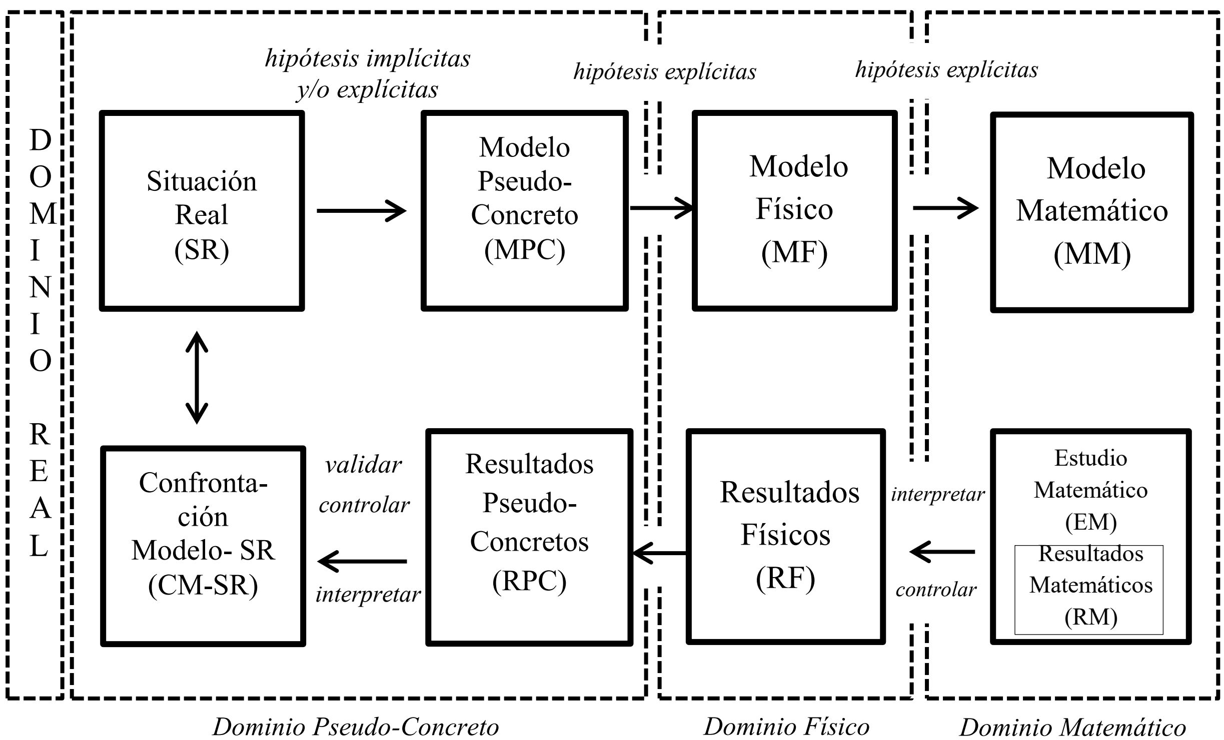


Fig. 2 Ciclo de Modelación Rodríguez (Rodríguez, 2010 p. 104)

En la concepción de modelación de Rodríguez (2010) esta relación se amplía a una relación entre los dominios real, pseudo - concreto y matemático. La autora entiende como dominio real al mundo de situaciones de la realidad que, a partir de simplificar magnitudes de interés, dan lugar a modelos pseudo - concretos. Desde este dominio pseudo - concreto se transita al modelo matemático con apoyo de hipótesis explícitas e implícitas. En el dominio matemático se estudian los modelos, dando como consecuencia resultados matemáticos, que, al interpretarlos establecen resultados pseudo - concretos. Estos, a su vez, al validarlos y confrontarlos con la realidad, dan lugar a resultados reales, como generalizaciones y predicciones, que dan cuenta de la situación real en otro nivel. De esta forma dialogan los dominios real, pseudo - concreto y matemático para Rodríguez (2010).

2.4 Modelación y Representaciones Semióticas

Otro de los fundamentos de esta investigación se basa en los registros de representación semiótica, teoría desarrollada por Raymond Duval, los cuales tienen gran incidencia en el desarrollo de los conceptos matemáticos en los estudiantes, favoreciendo el aprendizaje de éstos, especialmente en el área de las EDO. Dada la importancia de los registros semióticos o de representación en la creación de modelos matemáticos, Oviedo y Kanashiro (2012), señalan que "enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión" (p. 30).

En matemática no se usa el término de "concepto matemático" sino el de "objeto matemático", por lo que el objeto matemático por contextualizar no es un objeto real, sino más bien es abstracto, por eso existe la necesidad de que sea representado recurriendo a algunos signos. Un registro está constituido por signos como: trazos, símbolos, íconos, etc. Estos registros están asociados a una representación que puede ser de dos maneras: interna, relacionada a las imágenes mentales que un individuo puede tener de un objeto y externa, referentes a lo que éste puede percibir con los sentidos. Por consiguiente, los registros son medios de expresión y de representación tales como notaciones algebraicas, gráficas o menciones verbales caracterizados por sus respectivos sistemas semióticos.

Según Duval (1998), (citado en Oviedo y Kanashiro, 2012) un sistema semiótico puede ser registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis: la de formación, donde debe existir la presencia de una representación identificable; el tratamiento, que es la transformación de la representación dentro del mismo registro semiótico; y la conversión, que es la transformación de una representación desde un registro semiótico a otro, en donde se conserva la totalidad o arte del significado de la representación inicial.

Los problemas de modelado demanda una gran variedad de representaciones semióticas. Es posible elegir las más adecuadas para cada etapa del proceso de modelización y para la representación de resultados. En la Figura 3 se muestra el conjunto de representaciones para la resolución de un problema real (Duval, 2006).

Las diversas representaciones semióticas necesitadas para plantear el problema (sus condiciones, datos y pregunta) y resolverlo	**Tres clases de representaciones auxiliares posibles para resolver el problema**	**El problema del aprendizaje con el que se enfrenta el profesor**
FASE 1 Los problemas para aplicar los procedimientos matemáticos en los problemas de la vida real: (problemas verbales con datos, pertinentes o no)	**A.** Dibujos de una situación de la vida real	
FASE II La conversión en expresiones simbólicas que encajen con el procedimiento matemático pertinente	**B.** Bidimensional y organización semántica para discriminar lo que es relevante de lo que no lo es en expresiones verbales describiendo la situación	**¿Qué tipo de REPRESENTACIÓN AUXILIAR y para qué?**
FASE III Solución por tratamiento (La transformación de representaciones dentro del mismo registro)	**C.** La visualización matemática para comprender el procedimiento (Las líneas numéricas, los diagramas,..)	

Fig. 3 Representaciones en la solución de un problema real

El uso de las palabras es necesario para describir una situación de la vida real y para hacer una pregunta (primera columna de la Figura 3). Luego la conversión es necesaria y está intrínsecamente conectada con la discriminación de la información relevante para la elección de los objetos matemáticos a utilizar. El tratamiento depende primero de esta discriminación y de las elecciones que se hacen o no, incluso si tras diferentes procedimientos se eligen de acuerdo con el conocimiento matemático.

La ventaja educativa de los problemas de la vida real es que permiten trabajar libremente con aquellas representaciones que parezcan más accesibles que las que se usan en matemáticas (segunda columna de la Figura 3). Las representaciones auxiliares pueden ayudar al estudiante a comprender cada etapa del proceso de resolución. Pero ahí reside el punto crucial: una representación auxiliar sólo puede encajar en una de las tres fases del proceso de resolución del problema de la vida real. Las representaciones auxiliares pueden satisfacer solamente una función específica en la resolución de los problemas y esta es relativa a pensar en la conversión o el tratamiento. En torno a esto, escoger el sistema de representación semiótico adecuado, no es lo que importa para la enseñanza de las matemáticas, sino que los estudiantes sean capaces de relacionar varias maneras de representar los contenidos matemáticos (Duval, 2006).

2.5 Modelación y Tecnología

Pese a que tradicionalmente la enseñanza de la matemática se ha realizado a nivel algebraico, formal y abstracto, el auge de las herramientas tecnológicas ha posibilitado la exploración y comprobación de hipótesis, así como verificar numéricamente soluciones utilizando herramientas computacionales (Gatica & Ares, 2012). Toda representación que emplea un recurso tecnológico, sea una calculadora, una computadora o en su defecto un software se denomina una representación ejecutable debido a la forma dinámica en que representa un objeto matemático y en el sentido que permite manipular y trasformar directamente un objeto. Estas representaciones según Gómez (2000) son portadoras de la potencialidad de simular acciones cognitivas con independencia de quién sea el usuario de la calculadora, o en su defecto del recurso tecnológico empleado.

Para Villarreal (2003) la computadora privilegia el pensamiento visual, y la imagen en el caso de la matemática es punto de apoyo a las nuevas tecnologías que no rechaza lo verbal o algebraico. Siller (2011) considera que la tecnología es una herramienta de modelación, y agrega que es especialmente indispensable en:

- En trabajo experimental.
- Para visualizar procesos y resultados.
- Actividades computacionales intensivas.
- Al trabajar con grandes conjuntos de datos.

Los recursos digitales pueden usarse en distintas etapas del proceso de modelado. Si se utilizan al comienzo, una vez que el problema ha sido traducido del registro verbal al registro algebraico y se ha formulado el modelo matemático, debe hacer una conversión al lenguaje que usa la herramienta digital. A partir de este momento se pueden obtener resultados que requieren ser interpretados matemáticamente y en términos del problema.

La utilización de recursos digitales amplía las posibilidades de resolución de ciertos problemas de modelado que no podrían abordarse sin estas herramientas. Estos sistemas permiten la visualización de múltiples representaciones para los distintos objetos matemáticos y ofrece la posibilidad de realizar tratamientos y conversiones de registros.

Gracias al análisis del contenido teórico del capítulo se identificaron elementos importantes, de la modelación matemática como de la matemática realista para el diseño de las tareas de aprendizaje matemático, también los registros de representaciones que se tienen que tener en cuenta a la hora de resolver una situación real, así como la implementación adecuada de la tecnología que apoya a esta investigación. Las características específicas de las tareas de aprendizaje y los resultados de estos análisis son mostrados en el siguiente capítulo. Los referentes teóricos descritos en este capítulo también nos permitieron igualmente desarrollar el análisis de los resultados, como se verifica en la sección correspondiente.

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1 Introducción

Esta investigación está inmersa en el ámbito de la Matemática Educativa, es decir, en el campo de las interacciones donde los estudiantes se van formando gradualmente a través de sus relaciones e interacciones con otras personas, el medio, la construcción y dominio de conocimientos específicos. De esta forma, el método elegido debe permitir un acercamiento al escenario y a los sujetos a investigar, para Lester (2005) la investigación en matemática educativa ha pasado de los estudios experimentales y cuantitativos, a estudios de tipo cualitativo, pues en éstos se hace un mayor énfasis en la interpretación de los resultados. Es por esto que se presenta, a continuación, los aspectos que identifican a nivel metodológico el presente estudio, de tal forma que haya concordancia con los objetivos del estudio, tal como se esquematiza en la figura 4.

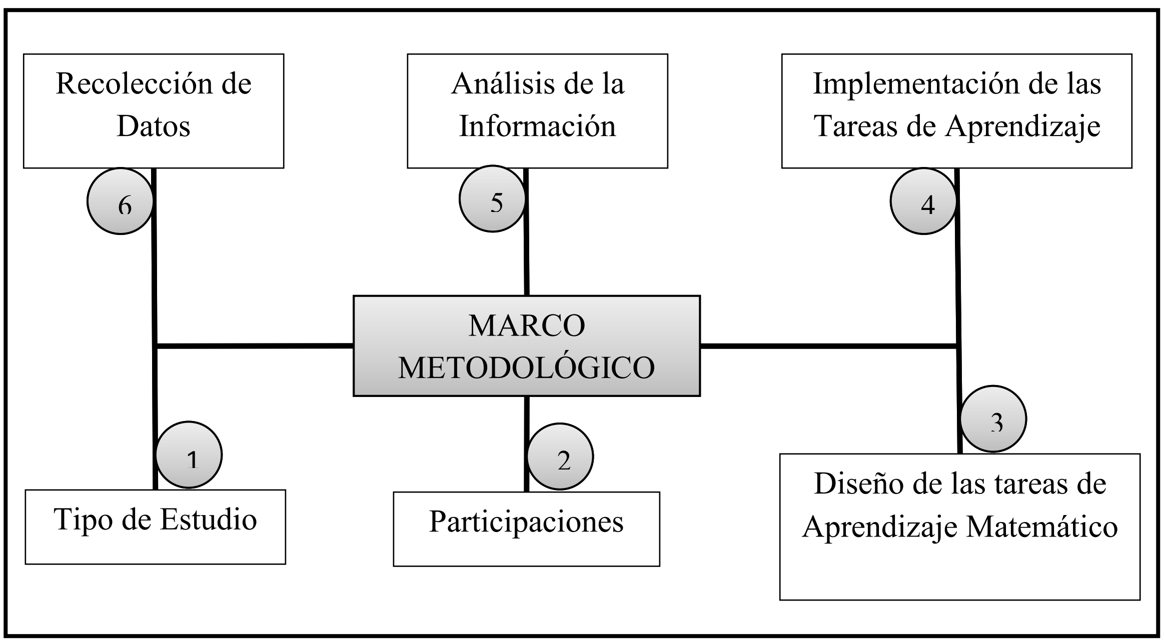


Fig. 4 Esquema del marco metodológico.

La investigación cualitativa implica una observación minuciosa en el contexto natural donde se dan esas interacciones y comportamientos. Al mismo tiempo, permite diseñar un método que posibilite la comunicación permanente de los sujetos a estudiar ya sea de manera directa o indirecta, para conocer sus percepciones y concepciones sobre algún fenómeno o acontecimiento, por lo tanto la investigación de carácter cualitativo es una opción conveniente para esta investigación. En palabras de Sampieri et al. (2003) la investigación cualitativa da profundidad a los datos, la dispersión, la riqueza interpretativa, la contextualización del ambiente o entorno, los detalles y las experiencias únicas. Aunado a Sampieri, se encontró que Creswell (2003) tiene como intención comprender de manera detallada el tema de estudio de la participación y actividades de la voz de los individuos que participan. En estas interpretaciones en una aproximación cualitativa se busca caracterizar los significados o las formas de entendimiento que los estudiantes construyen al abordar problemáticas plasmadas en situaciones reales.

En esta metodología se debe prestar particular atención a la forma en que los estudiantes responden a las preguntas que guían a la tarea; es decir, se busca identificar, qué es lo que piensan al abordar la tarea de aprendizaje, cómo interpretan la información, qué heurísticas utilizan y cómo relacionan sus recursos con el nuevo conocimiento que se genera al abordar en las tareas, en el contexto elegido. El diseño de las tareas fue centrado en el campo de la Cinemática, dado que el movimiento es uno de los fenómenos físicos más evidentes, al ser fácilmente observable. Su estudio permite entender las leyes que rigen el movimiento de los objetos desde un punto de vista geométrico. Dicha elección se sustenta por ser una temática relacionada indistintamente de la formación de los estudiantes, también es un fenómeno físico con el cual están en interacción en forma inconsciente de sus experiencias cotidianas, otro motivo de dicha elección radica en el fácil acceso y manejo de materiales para llevar a cabo la experimentación y que los estudiantes dentro de su formación tienen conocimiento de matemáticas y física, en esta línea de investigación como lo menciona Cervantes (2015) la modelización matemática vigente nació en la Física de manera particular en la Mecánica y su conexión con ideas importantes que en esta subyacen.

3.2 Participantes

En los capítulos iniciales se incluyó una revisión de la literatura, en la cual se expusieron conclusiones de algunos estudios realizados con estudiantes en formación ingenieril y las problemáticas que presentan cuando realizan actividades basadas en la modelación. En el estudio que se reporta en esta investigación, las tareas que se diseñaron fueron implementadas en una Universidad Pública estatal, ubicada en el municipio de Tecámac, Estado de México. La población elegida fueron catorce alumnos del octavo cuatrimestre de Ingeniería en Nanotecnología, cuyas edades están comprendidas entre los veintidós y veintiséis años, estarán cursando la materia de Matemáticas Aplicadas a la Ingeniería y previamente ya cursaron asignaturas como: Funciones Matemáticas, Cálculo Diferencial e Integral y Física.

El estudio se llevó a cabo en el periodo cuatrimestral Enero - Abril del 2022. La programación de las sesiones fueron de 120 minutos, se optó por este tiempo debido a que coincide con la duración de las sesiones de clase del curso. Asimismo se contó con el tiempo suficiente para que los participantes pudieran reflexionar, discutir e intercambiar ideas con la docente que implementó la tarea. Se consideró que con el fin de favorecer la interacción entre los integrantes del grupo, era conveniente llevar a cabo las actividades en ambas modalidades: grupal e individual. De forma previa a su participación en las tareas de aprendizaje se les informó que los datos obtenidos se utilizarían con la finalidad de elaborar un trabajo de tesis y que su identidad estaría resguardada mediante la utilización de seudónimos.

3.3 Diseño y Características de las Tareas

Teniendo en cuenta los antecedentes en este apartado, se abordan las principales características para el diseño de tareas de aprendizaje. Para ello, se consideran la Modelación matemática, la Educación Matemática Realista y la Teoría de las Representaciones Semióticas, como las guías fundamentales para el desarrollo de las tres etapas: diseño, implementación y análisis. Las características consideradas durante el diseño de las tareas fueron las siguientes:

- Realizar una búsqueda y selección del contexto donde Zolkower et al. (2006) afirman que “los contextos realistas cumplen un papel esencial en el aprendizaje matemático de los alumnos” (pp. 11-33). Además, Freudenthal (1991) señala que “un contexto es ese dominio de la realidad el cual, en algún proceso de aprendizaje particular, es revelado al alumno para ser matematizado” (p. 73).

- Construir modelos matemáticos, en la investigación de Zolkower et al. (2016) afirman que “los modelos en la EMR no solo son pensados como representaciones sino también como objetos de trabajo y reflexión en sí mismos, sobre los cuales se realizan acciones y operaciones y se visualizan, explican, comparan, contrastan, comprueban relaciones” (p. 4).

- Trabajar con los diferentes tipos de representación semiótica, Duval (1993) señala que cuando un estudiante tiene acceso a todas las representaciones de un objeto matemático, es capaz de identificarlas, darle un tratamiento adecuado en cada registro de representación y además hacer una articulación coherente de los diferentes registros de representación sin contradicciones, el estudiante puede acceder a ese conocimiento y apropiárselo.

- Promover el uso del software matemático (GeoGebra) y de vídeo análisis (Tracker) en este contexto Gruszycki, et al. (2014) señalan que “GeoGebra permite trabajar con diferentes registros de representación de un mismo objeto matemático a través de sus distintas vistas” (p. 2169).

- Trabajar individual y colectivamente de acuerdo con Heuvel-Panhuizen (2002) quien afirma que, “la educación debe ofrecer a los estudiantes la oportunidad de compartir sus estrategias e inventos entre sí” (p. 13).

Las características en el diseño de las tareas de aprendizaje implicaron procesos de descripción, observación, reflexión y análisis sobre las interacciones, experiencias, formas de expresión matemática y acciones grupales e individuales que influenciaron el proceso desarrollado por el grupo de estudiantes, también se estructuraron con el objetivo de responder a las interrogantes que guían esta investigación; así como, favorecer en la construcción de conexiones útiles con la finalidad de entender y dar sentido a las diversas relaciones existentes entre velocidad y aceleración de un objeto en un contexto real. Es de suma importancia que el estudiante logre establecer relaciones que le permita conjeturar, crear, solucionar y comprobar la situación planteada mediante una ecuación diferencial.

3.3.1 Implementación de la Tareas de Aprendizaje

Una vez que se han definido los aspectos metodológicos y las características de las tareas de aprendizaje, se describe su implementación con los detalles más relevantes en su ejecución. El escenario elegido para llevar acabo la implementación de las tareas de aprendizaje juega un papel importante como lo afirma Córdoba (2011) el conocimiento es socialmente construido y negociado en la práctica y por esto, es importante considerar el contexto en el que se produce el aprendizaje y el escenario natural donde se da ese aprendizaje: la clase de matemática, en este caso, la clase de Matemáticas Aplicadas a la Ingeniería se asume como un espacio en el que los estudiantes y la profesora puedan interactuar y sirva como un puente de comunicación entre uno y otros.

Esta etapa fue conducida por la investigadora, quien también era profesora del grupo en el que se llevó acabo la implementación de las tareas de aprendizaje. Por tanto, la docente investigadora tendrá un papel de suma importancia en el desarrollo de esta parte del trabajo. Zolkower, et al. (2006) señalan que los docentes deben fomentar la interacción entre estudiantes de tal manera que eso ayude a generar la participación, el debate genuino y la reflexión de éstos. En adición a esto, añaden que “el docente debe ser capaz de analizar el trabajo oral y escrito de sus alumnos, atendiendo a aquellos momentos clave donde se aprecian discontinuidades en el aprendizaje” (p. 15). Algunas de las actividades se desarrollaron en equipos, para promover la interacción entre estudiantes con sus compañeros, propio de uno de los principios de la EMR, como se expresa en el marco conceptual.

3.3.2 Tarea Introductoria

En esta tarea se busca indagar acerca de los conocimientos previos de los estudiantes en relación con los movimientos más inherentes que se pueden experimentar, el movimiento rectilíneo uniforme (MRU) y el movimiento rectilíneo uniforme acelerado (MRUA), los fenómenos de variación, objetos matemáticos involucrados, la diversidad para representar un objeto matemático y conocimientos previos de Cálculo Diferencial e Integral y la solución de una ecuación diferencial de primer orden.

El desarrollo de la tarea se llevó acabo en el salón de clases donde inicialmente se hizo una presentación de las diferentes formas que se manifiesta “El movimiento”, el objetivo fue que el estudiante recordara conocimientos previos vistos en su curso de Física, atendiendo a la premisa de haber tomado el curso a inicios de su carrera y que su aprendizaje y desempeño no fue el más fructífero por varios factores, uno de ellos recae en la enseñanza tradicional y basada en la solución de una serie de ejercicios sin detenerse a la reflexión y análisis de los mismos, en la etapa introductoria se utilizó un vídeo alojado en YouTube, el motivo de su elección es debido a que en este se cuenta con un gran contenido realista entorno a la Cinemática, se puede acceder al mismo por medio del siguiente link https://www.youtube.com/watch?v=DHqWsTF99AQ, se pretendió que en esta primera fase el estudiante pueda activar los conocimientos previos adquiridos, trabajaron de manera individual hasta la pregunta número diez de la tarea de aprendizaje (Anexo 1). Los estudiantes pusieron en juego sus experiencias y conocimientos teóricos previos, mismos que se reflexionaron, compararon y se discutieron de forma grupal teniendo como guía de la discusión a la docente investigadora, para cerrar este apartado se recurrió a la ayuda de un segundo vídeo https://www.youtube.com/watch?v=tpU7Z2r1YDk en el cual se puede observar una explicación de las variables Cinemáticas en un contexto matemático.

Finalmente el cierre de la tarea de aprendizaje se contestó de forma grupal realizando una lluvia de ideas que permitió la matematización vertical de la problemática abordada, teniendo en cuenta que para Freudenthal (1991) significa moverse dentro del mundo de los símbolos, es decir, se realizó un tratado matemático de la situación, posteriormente hubo una discusión y comunicación grupal de las reflexiones y conclusiones de la primer tarea de aprendizaje.

3.3.3 Tarea Experimental

Con esta tarea de aprendizaje (Anexo 2) se buscó que los estudiantes pudieran reafirmar su conocimiento del MRUA en forma cualitativa (observación durante y después de la experimentación) como cuantitativa (análisis de información), también se busca que el alumno pueda conjeturar que la aceleración es proporcional a la velocidad del objeto, de manera particular una desaceleración, es decir: $a = -kv$.

Las indicaciones de la actividad experimental se dieron de forma general indicando que la práctica consistió en dejar caer una canica de diferentes alturas (sugiriendo alturas de 25, 50, 75 y 100 cm por encima de la probeta) dejando en claro que cuando la canica entrara a la probeta fuera lo más limpia posible, es decir, que cuando la canica entre lo haga sin chocar con la superficie. Colocaron el celular en el soporte o tripie y se realizaron pruebas de vídeo de tal manera que se pueda visualizar en todo momento el movimiento de la canica dentro y fuera de la probeta, cómo se muestra en la figura 5. Además se les solicitó que guardaran el vídeo que cumpliera con las características antes mencionadas.

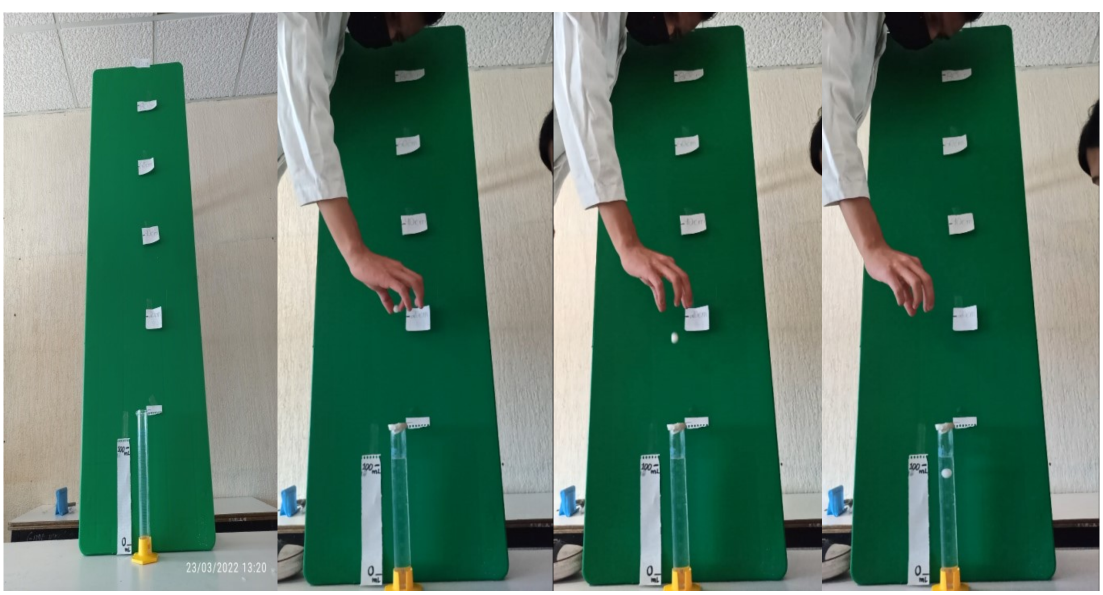


Fig. 5 Ejemplo de la práctica experimental

Después de realizar la parte experimental, se realizó una exploración acerca de los conocimientos y características que tienen la caída libre de un cuerpo. Las preguntas utilizadas fueron: ¿Qué es lo que hace que un cuerpo caiga si no es sostenido por algo?, Cuando un cuerpo está cayendo ¿De qué depende el tiempo que tarda en llegar al piso?, ¿Cuáles son las características de la velocidad y aceleración en el movimiento rectilíneo uniforme (MRU)?, ¿Cuáles son las características de la velocidad y aceleración en el movimiento rectilíneo uniforme acelerado MRUA?, Cuando se deja caer algo desde el reposo ¿Cuánto vale la velocidad inicial y su aceleración?. Algunos estudiantes participaron y expresaron su opinión misma que se discutió de forma grupal.

La siguiente fase en la implementación de la tarea consistió en que los estudiantes observaran nuevamente los videos realizados en la parte experimental y formularan hipótesis con respecto a los movimientos de la canica fuera y dentro de la probeta, se les pidió su participación de forma voluntaria compartiendo para el grupo las conjeturas que habían realizado. No se desmintió la información proporcionada por los estudiantes, ni tampoco se trató de indicar una respuesta “correcta”, ya que, el análisis de los vídeos con el software de tracker (Ver Figura 6) ofrecería oportunidades para corroborar o refutar sus conjeturas.

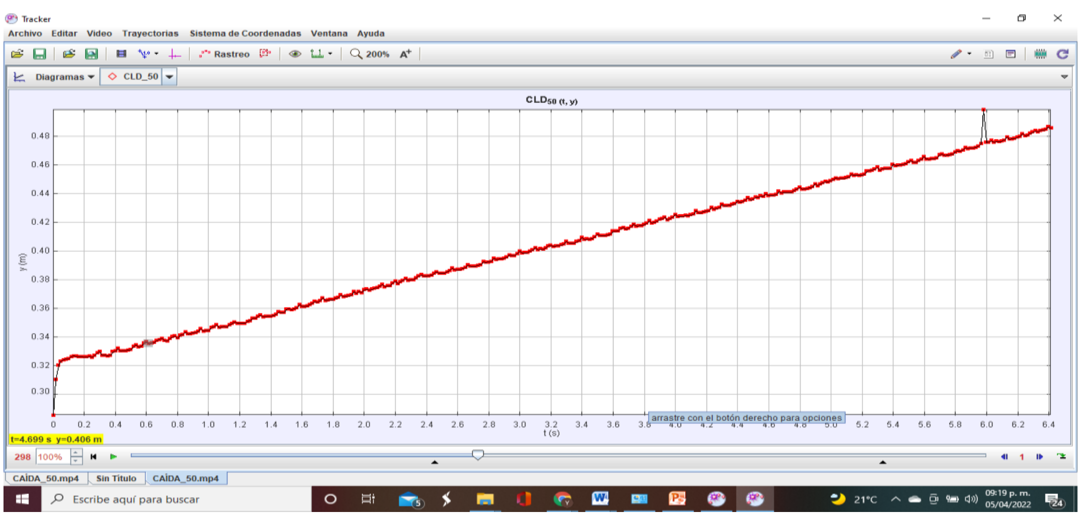


Fig. 6 Análisis de caída libre de la canica (velocidad contra el tiempo) realizado en Tracker

Con el propósito de guiar la discusión en el grupo, se les formularon preguntas, entre otras: ¿Qué tipo función describe las gráficas de la velocidad contra el tiempo en los 4 casos analizados? ¿Qué efecto realiza la glicerina sobre la velocidad de la canica? ¿Cuándo un cuerpo reduce su velocidad? explica que le pasa a su aceleración, ¿En cuál de los casos se desacelera más rápido la canica una vez que entró a la glicerina? Finalmente los estudiantes pudieron afirmar o refutar sus hipótesis planteadas inicialmente, mismas que se discutieron de forma grupal.

3.3.4 Tarea de Modelado

En esta tarea de aprendizaje (Anexo 3) se presenta el problema de un cañón en retroceso, el motivo de la elección radica en que el estudiante puede visualizar una aplicación de la hipótesis que formuló al final de la actividad experimental y pueda realizar comparaciones tanto teóricas como prácticas.

Al inicio de la implementación se les pide a los estudiantes que encuentre la velocidad y posición del pistón en retroceso en función del tiempo y realice las gráficas cinemáticas correspondientes a la velocidad y posición en GeoGebra. Para guiar la apertura de la actividad se realizó una pequeña discusión sobre los hallazgos realizados en las sesiones anteriores y pudiera establecer las ED solicitadas. En esta fase el estudiante matematiza la situación, es importante resaltar y recordar que lo importante no es encontrar el "mejor modelo" que se ajuste a la experimentación, lo importante son las interacciones que van emergiendo a medida que se desarrolla la discusión. Tal como lo menciona Buendía y Velasco (2006) (citado en Córdoba, 2011) es común comparar la nube de datos con la expresión analítica obtenida de la ecuación diferencial. El éxito de la práctica no depende de que resulte o no similares, sino de los argumentos y herramientas que se pusieron en juego durante el desarrollo de la misma. Los estudiantes contaron con más de una hora para tener sus resultados matemáticos. Se espera que hagan uso de algunos de los tópicos abordados en la clase de Matemáticas Aplicadas a la Ingeniería, de manera particular resolver una ED por el método de variables separables; no obstante, se podrán explorar otros procedimientos matemáticos.

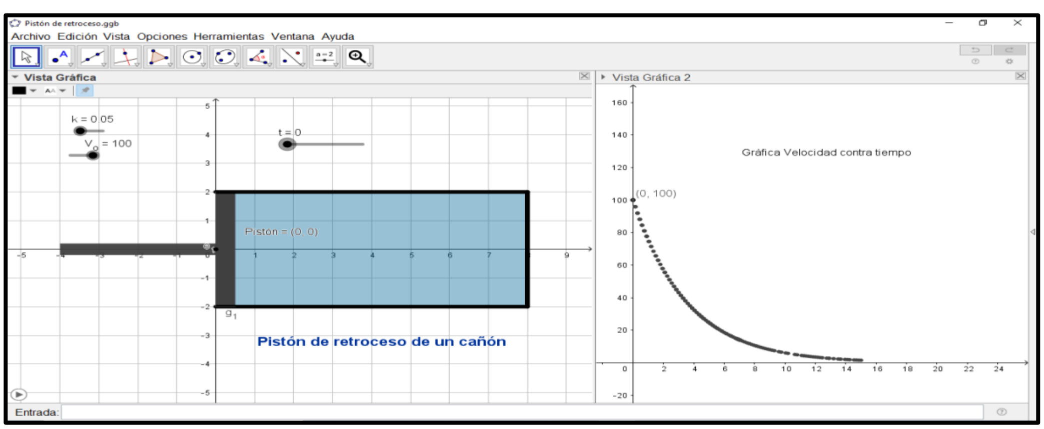


Fig. 7 Simulación del mecanismo del pistón hecha en GeoGebra

Para el cierre de la actividad se realizó una discusión grupal para que los estudiantes contrastaran sus respuestas con las de sus compañeros, de igual manera se discutió como serían las gráficas de la velocidad y posición en función del tiempo que describen la situación. Finalmente se les mostro una simulación del mecanismo del pistón realizada en GeoGebra ver Figura 7, se analizaron distintas graficas de velocidad en función del tiempo y se compararon con los resultados con las observaciones realizadas en la parte experimental.

3.4 Recolección de datos y Análisis de la Información

En este estudio la recolección de la información se hizo con diferentes medios e instrumentos en un proceso continuo. En la implementación de las tareas de aprendizaje descritas anteriormente, los estudiantes tuvieron que responder unas preguntas por escrito y consignar sus respuestas en las hojas de trabajo diseñadas para ello. Otro medio utilizado lo constituyó las grabaciones en video del grupo en general. Para la grabación de vídeo se eligió la mejor toma de tal forma que la docente y estudiantes tuvieran la facilidad de moverse durante la sesión y se pudieran visualizar cada uno de los momentos, las cuales se transcribieron posteriormente para su análisis.

Se resalta que la recolección se realizó bajo la autorización de los estudiantes, por lo que no requirió solicitar permiso formal a la institución, no obstante se informó a los directivos respecto de la implementación de las tareas y el uso de la información obtenida para la elaboración de este trabajo.

La información recolectada a partir de las interacciones que emergieron de las tareas de aprendizaje propuestas y que fueron representadas tanto en las producciones escritas como orales de los participantes, fueron analizadas de tal forma que se puedan identificar elementos que evidencien los principios de la matemática realista, las diferentes representaciones que usaron los estudiantes y los elementos que emergieron del proceso de modelación. Al hablar sobre el análisis de información en este estudio, se refiere no a la cuantificación de los datos, sino al proceso no matemático de interpretación, realizado con el propósito de descubrir conceptos y relaciones en los datos brutos.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se presenta los resultados obtenidos en cada una de las tareas de aprendizaje descritas anteriormente. Se ha considerado solo aquella información que es relevante de acuerdo al marco conceptual establecido y que ofrece elementos de análisis significativos. Este análisis se irá presentando a medida que se identifican hallazgos importantes que emerjan de las respuestas representativas de los estudiantes, se exponen algunos relatos donde se observan algunas situaciones importantes que reflejan los principios de la EMR. La transcripción completa de las grabaciones se encuentra en los Anexos 4, 5 y 6. La organización de los relatos es la siguiente, en el anexo 4 se encuentran las interacciones entre estudiantes y docente referente a la tarea de aprendizaje introductoria, en el anexo siguiente los relatos correspondientes a la tarea de aprendizaje experimental y por último la tarea de modelado, los alumnos se etiquetaron con alguna letra mayúscula del abecedario (Alumno A, Alumno J, Alumno R, etc), cuando la participación es casi grupal se etiqueto con Alumnos y aunado a esto la participación del Docente.

4.1 Análisis de Resultados desde la Matemática Realista

En este apartado se presenta el análisis de los resultados acorde a los principios de la EMR y como estos fueron emergiendo en cada una de las tareas, como se mencionó el diseño se consolidó a partir de tres tareas de aprendizaje, la presentación de resultados hará referencia a cada una de ellas.

4.1.1 Principio de Actividad

Para Freudenthal (1973) la educación matemática debe ser un proceso, donde los estudiantes autoconstruyen su propio conocimiento, enfatizando que las matemáticas son usadas en la vida real con la finalidad de matematizar. La matematización es una actividad de búsqueda y de resolución de problemas, también es una actividad de organización de un tema. Por lo tanto, en las tareas diseñadas se observa que en todo momento los estudiantes son participantes activos en la construcción de su aprendizaje matemático. En la tarea introductoria participan haciendo matemáticas cuando se les presenta la situación del salto del paracaídas de dos personas en el Estado de Morelos y el profesor solicita que realicen una predicción de la velocidad y posición, los estudiantes construyen sus respuestas a partir de su conocimiento (Ver Figura 8).

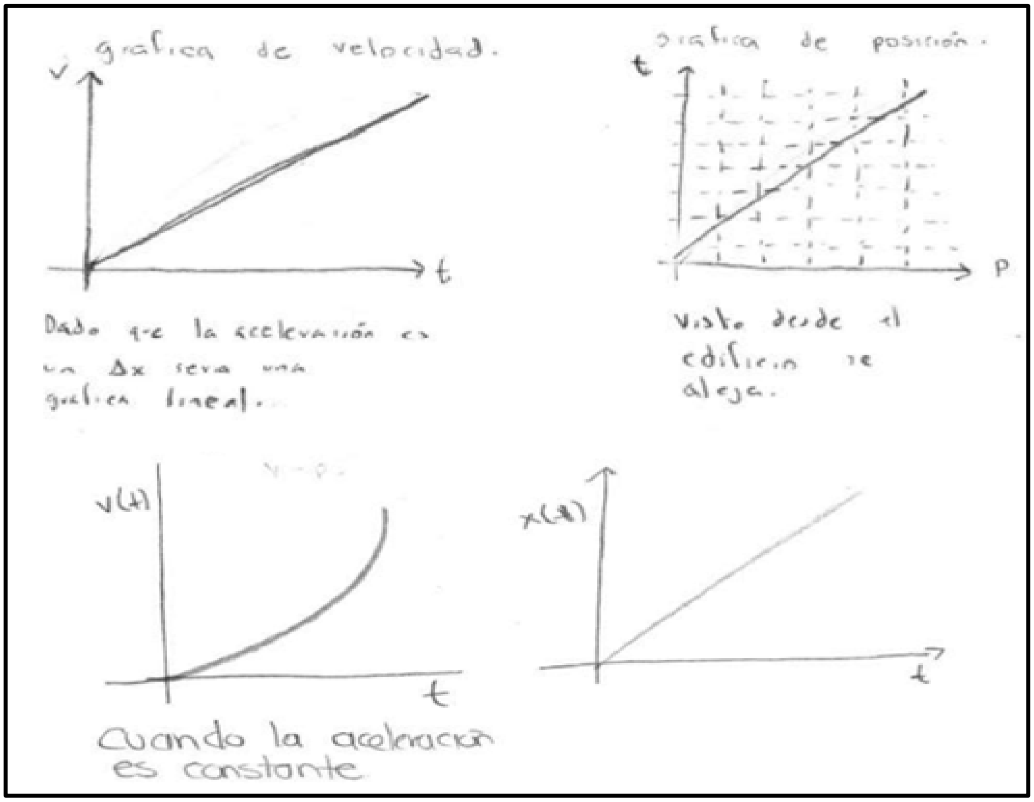


Fig. 8 Predicciones gráficas de velocidad y posición

En las gráficas se visualiza como el estudiante R construye una gráfica lineal para la velocidad teniendo en cuenta que es una variación de la posición, mientras que para la misma tiene un comportamiento lineal coincidiendo con la respuesta del alumno K la cual realiza una predicción de tipo cuadrático para la velocidad. Un segundo momento observado en el proceso de aprendizaje mismo que surge a partir de su actividad humana, donde la heterogeneidad de los estudiantes presentó un impacto positivo en el desarrollo de la actividad, el extracto es el siguiente:

> **DOCENTE:** …Y bueno que va pasando chicos conforme le vamos dando más altura a la canica que le va ocurriendo, cambio de veinte a cuarenta y ya después pasamos a sesenta, que efecto produce que la dejemos caer de mayor altura
> **ALUMNOS:** Una velocidad, una aceleración (Respuestas dadas al mismo tiempo)
> **DOCENTE:** La que.
> **ALUMNO F:** La velocidad aumenta
> **DOCENTE:** La velocidad aumenta.
> **ALUMNOS:** Si
> **DOCENTE:** Entre mayor altura que pasa.
> **ALUMNOS:** Mayor aceleración, mayor velocidad, más tiempo (Se muestra una opinión partida)
> **ALUMNO M:** La aceleración permanece constante y la velocidad aumenta.

En el dialogo se observa un momento de valor educativo dado que permite comprender y participar a los estudiantes organizando sus distintas ideas, el desarrollo de cada una actividades propició una matemática para todos, se alcanzó en diferente niveles derivado de los conocimientos de cada estudiante, se observa que los estudiantes comprenden que el utilizar matemáticas hasta cierto punto le va ayudar a resolver un problema de una situación real de la cual son participantes activos.

4.1.2 Principio de realidad

Freudenthal (1973) hacía referencia a este principio como un patrón experimental donde los estudiantes hacían uso de las actividades mentales para imaginar un contexto o situación real. Un contexto real se refiere tanto a situaciones problemáticas de la vida cotidiana y situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos, por lo tanto al implementar la tarea de aprendizaje introductoria se evidencia que los alumnos logran imaginar la situación donde se propone un caso particular de movimiento con aceleración constante. Se solicita que realicen una predicción de las gráficas de posición y velocidad, el análisis de las predicciones muestra que los alumnos en su mayoría concuerdan en que la velocidad se comporta de forma lineal y la posición se describe con una función de tipo cuadrático, en la Figura 9 se observa la predicción del alumno H.

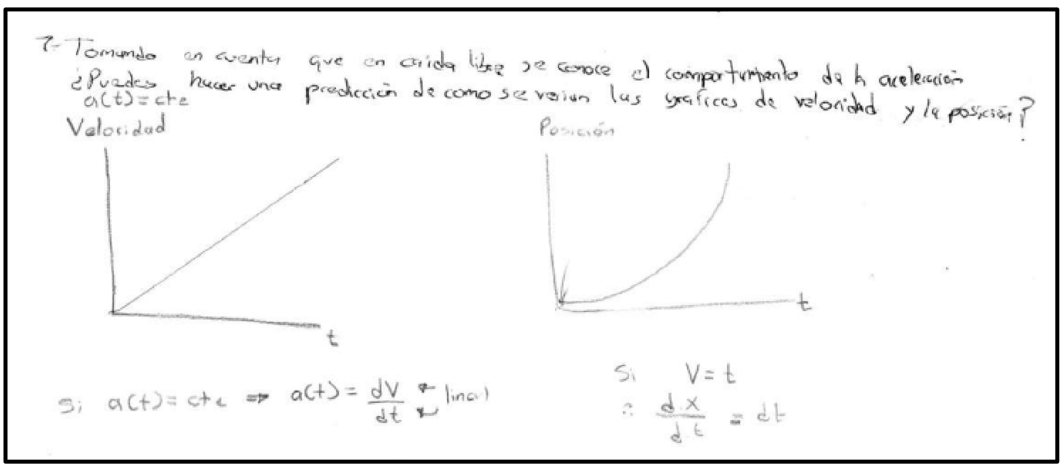


Fig. 9 Predicción de las gráficas de velocidad y posición

En este sentido, las observaciones datan como en la tarea de experimentación los estudiantes se enfrentan ante el hecho de responder las siguientes preguntas: En cuál de los casos se desacelera más rápido y lento la canica una vez que entro a la glicerina, este par de preguntas resultaron detonadoras para que pudieran hacer analogías con situaciones reales parecidas a la que se estaba analizando.

> **ALUMNO C:** Yo concuerdo un poco con H por que trato de imaginármelo un poco de otra manera, si por ejemplo fuera una tela elástica al caer lleva menos fuerza.
> **ALUMNO A:** Pero es elástica, no estás en una superficie.
> **ALUMNO C:** Si pero la tensión superficial tiene cierta elasticidad, la canica llega a la glicerina con menos velocidad entonces tiene menos fuerza para romper la tensión y logra que se frene de manera

más abrupta, bueno es lo que pienso y la del metro al llevar más velocidad rompe más fácil la tensión superficial y sigue fluyendo a una velocidad más alta que la otra.

Otra analogía con la realidad se observa en el siguiente dialogo:

ALUMNO J: Perdón yo iba a poner otro ejemplo, cuando avientas un cuerpo bueno un cuerpo no, cuando avientas algo por ejemplo al agua, el agua está aquí y lo avientas desde aquí, pues se va ir lento es decir no se frena tan rápido sin embargo si lo avientas de una altura mayor vas a frenar así luego luego (Lo explica utilizándolas manos para ejemplicar lo mencionado).
DOCENTE: Ok haber.
ALUMNO C: Justo eso pasa con los clavadistas, cuando un clavadista.
ALUMNO J: Ha pero un clavadista entra de cierta forma no va entrar así (Se refiere a que el impacto con el agua se ha de forma horizontal).
ALUMNO C: Cuando un clavadista se avienta de una menor altura se frena en menos altura ósea llega un punto en el que ya puede volver a subir en menos distancia.
ALUMNO A: Podríamos tomarlo como este ejemplo como por decir el de un coche, cuando vas en un coche y tu velocidad no es tanto no sé y se atraviesa un perro puedes frenar bien y no de golpe, pero si ya llevas cierta velocidad este todavía como que te cuesta.

A través de este par de tareas se visualiza que el contexto de las situaciones es significativa para los estudiantes y son parte de su realidad, promoviendo el uso de su sentido común y de sus estrategias informales, permitiéndoles luego avanzar por sí mismos hacia niveles de mayor formalización.

4.1.3 Principio de nivel

A través de la tarea introductoria y experimental se buscó que el estudiante logre un proceso gradual a través de la matematización horizontal, para esto se utiliza el nivel situacional, según Zolkower Bressan, y Gallego (2004) el estudiante tiene contexto de la situación, lo importante de las tareas es que se pudo evidenciar como los estudiantes lograron convertir un problema contextual en un problema matemático, basándose en la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación y la experimentación. En este proceso se traduce los problemas desde el mundo real al matemático. Los alumnos lo contextualizaron de la siguiente manera:

ALUMNO C: Yo puse que la aceleración es positiva la aceleración aumenta y cuando la aceleración es negativa la velocidad disminuye.
ALUMNO A: Yo le puse que la velocidad es proporcional a la aceleración teniendo en cuenta que si una disminuye la otra también va a disminuir de igual forma pero sin ser constantes entre sí.
ALUMNO J: Yo le puse que la aceleración se vuelve proporcional a la velocidad en el momento en el que la canica entra en contacto con la glicerina ya que al disminuir la velocidad disminuye la aceleración, es decir que se está comportando de una manera lineal con respecto a la velocidad.
ALUMNO X: Creo que coincidimos porque igual le puse que la aceleración decrece en función de la velocidad, la aceleración es directamente proporcional a la velocidad pero solo tomando en cuenta el intervalo de la glicerina
ALUMNO R: Yo puse que si la aceleración se vuelve negativa la velocidad disminuye de igual manera a la inversa por lo tanto son proporcionales.

Los estudiantes transitan de un nivel situacional a un referencial en el momento que el docente pregunta ¿Cómo expresan simbólicamente su conjetura? Se observa la descripción de la situación expresándola en un modelo matemático y utilizando los procedimientos que esquematizan el problema, pero siempre referido a la situación particular:

> **DOCENTE:** Son proporcionales y esta formulación a la que llegan de que si la aceleración es proporcional a la velocidad con la que se mueve el objeto, ¿Cómo la expresamos simbólicamente? (Escribe en el pizarrón la hipótesis)
> **ALUMNO C:** A de v es igual a n por v (Escribe en el pizarrón la expresión *"a(v)=nv"*).
> **DOCENTE:** Llegaron a esa conclusión, a ver la voy a leer, la aceleración es proporcional a la velocidad.
> **ALUMNO X:** Oiga Profa. y ene ¿Qué es?
> **ALUMNO C:** Ene "n".
> **ALUMNOS A y C:** Una constante de proporcionalidad.

El dialogo evidencia la transición entre diferentes niveles de comprensión. En la tarea de modelado (problema del pistón de modelado) se analiza sobre los procedimientos utilizados, se evidencian estrategias de reflexión, generalización, simbolización y esquematización. Después de aproximadamente hora y media, los estudiantes pusieron a prueba sus conocimientos y destrezas matemáticas que le permitirán en primera instancia establecer una ED de primer orden, dicha ecuación describe que la razón de cambio de la velocidad es proporcional a la velocidad, posteriormente para la solución el grupo de estudiantes elije el método de separación de variables poniendo en juego sus conocimientos de Calculo Integral para finalmente dar respuesta a lo solicitado (Ver Figura 10).

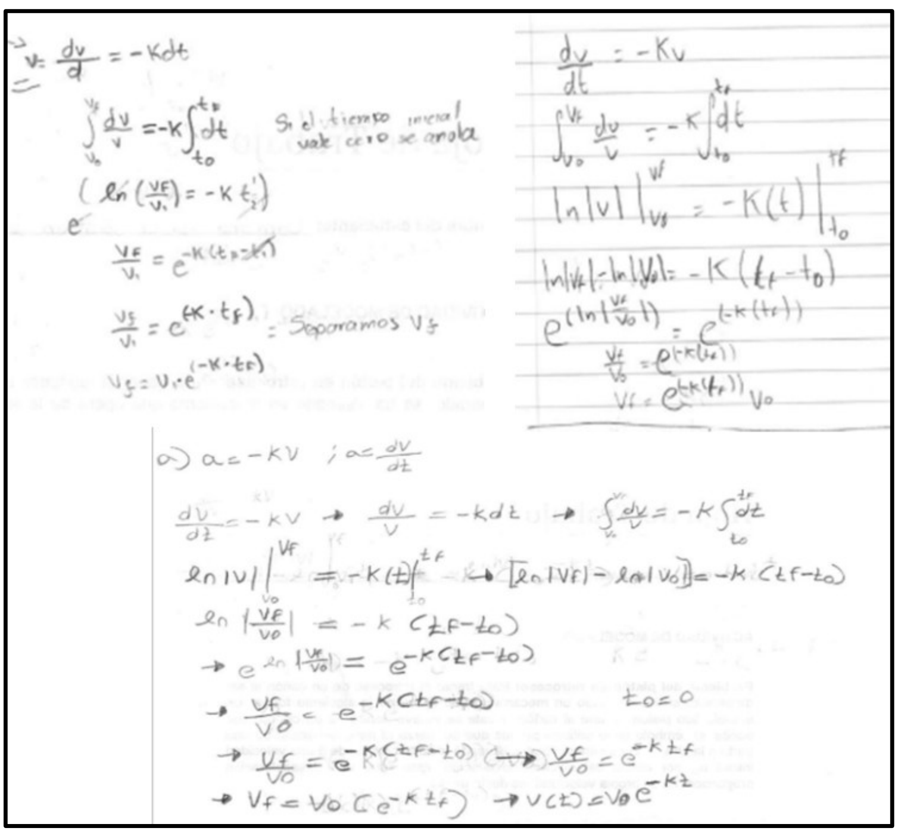


Fig. 10 Solución para determinar la velocidad en función del tiempo

Los resultados permiten visualizar cómo el grupo de estudiantes puede transitar por los diferentes niveles de formalización matemática según Zolkower, Bressan, y Gallego (2004). Acerca de este principio, Freudenthal (1973) lo describe como un proceso gradual que se da a través de la matematización horizontal y vertical para alcanzar el conocimiento requerido.

Es importante mencionar que la evolución entre niveles se da cuando la actividad en un nivel es sometida a análisis en el siguiente. Estos niveles son dinámicos y un alumno puede funcionar en diferentes niveles de comprensión para contenidos distintos o partes de un mismo contenido, en este sentido se pudieron observar dificultades en algunos estudiantes para poder dar respuesta a como determinar la posición en función del tiempo. Los resultados evidencian como la falta de interpretación de las variables influyo notablemente, se tiene una conversación con la alumna S donde se ejemplifica lo antes mencionado.

ALUMNO S: Profa. Así me quedo la igualdad para calcular la posición.
DOCENTE: ¿Quiénes son las variables ahí?
ALUMNO S: La velocidad y la posición.
DOCENTE: Entonces el tiempo siempre va hacer el mismo.
ALUMNO S: A la velocidad y el tiempo, porque el embolo es fijo.
DOCENTE: Entonces el émbolo siempre va estar en una posición fija por ejemplo a cinco centímetros, imagínate que este es el embolo al momento de ser disparado el cañón este llega con cierta velocidad y el embolo hace esto, la posición es fija.
ALUMNO S: No.
DOCENTE: A parte acuérdate que cuando se vio los diferenciales se puede distinguir quienes son las variables, entonces quienes son las variables.
ALUMNO S: El tiempo y la posición.
DOCENTE: Exacto esas son tiempo y posición vale.

También se evidencian como la falta de interpretación en las variables influyo para que no pudieran resolver la integral que está en función del tiempo $\int_{t_0}^{t} e^{-kt} dt$, en la Figura 11 se ejemplifican la falta de interpretación de las variables en el procedimiento algorítmico. Sin embargo, guardando concordancia con Julie (2018), la confrontación de ideas coopera en la superación gradual de las dificultades presentadas.

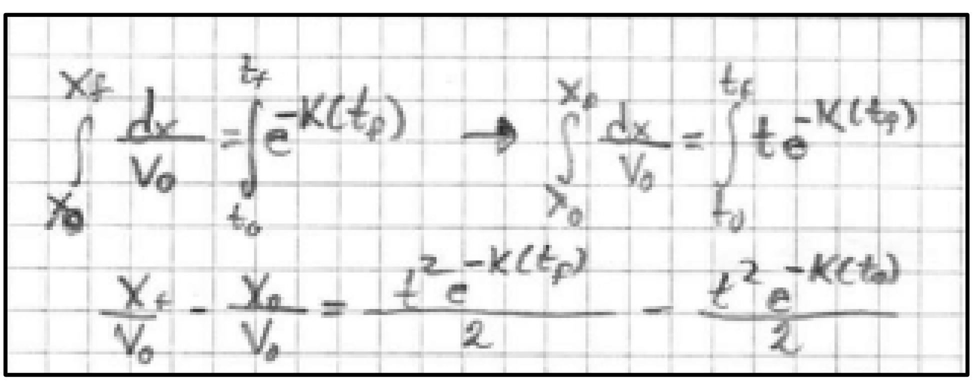
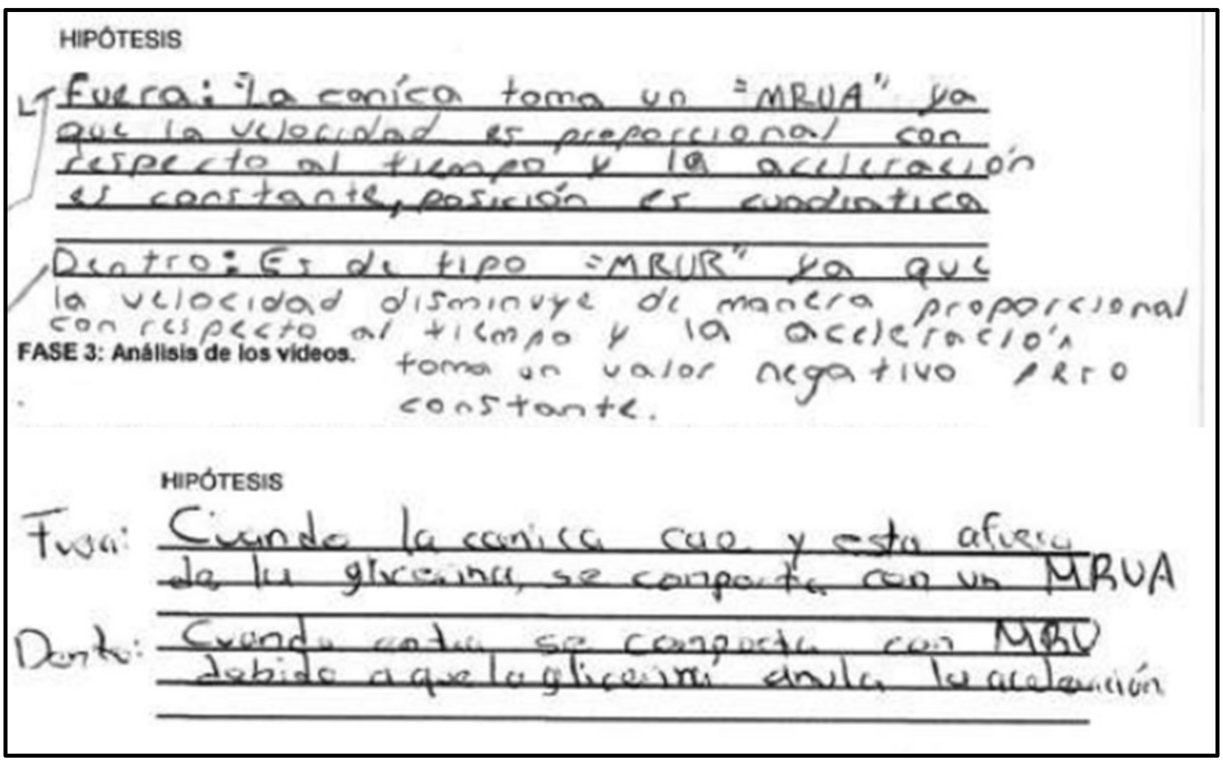


Fig. 11 Solución de la integral de la posición y tiempo.

Se ha verificado que la EMR les permite a los alumnos identificar y consolidar los modelos matemáticos para darles solución a las interrogantes planteadas, en habidas cuentas, para Pérez y Vásquez (2016), argumentan que el enfoque del proceso de aprendizaje inicia con las ideas intuitivas y evoluciona hasta un conocimiento cuantificado.

4.1.4 Principio de Reinvención Guiada

Este proceso se realiza en las aulas conjugando los roles y responsabilidades del docente y del alumno a través de una forma de interacción que Freudenthal (1991) denomina “reinvención guiada” y la entiende como “un balance sutil entre la libertad de inventar y la fuerza de guiar” en base a lo antes mencionado, la docente desempeño un papel bien definido, donde fue mediadora de las discusiones entre los alumnos y las situaciones problemáticas en juego, entre los alumnos entre sí, entre las producciones informales de los alumnos y las herramientas formales, ya institucionalizadas, de la matemática como disciplina. En la implementación de la tarea experimental su papel como guía de la actividad fue medular de tal forma que llevo a los estudiantes a reformular las hipótesis planteadas al inicio de la actividad (Ver Figura12).


HIPÓTESIS

Fuera: "La canica toma un "MRUA" ya que la velocidad es proporcional con respecto al tiempo y la aceleración es constante, posición es cuadratica

Dentro: Es de tipo "MRUR" ya que la velocidad disminuye de manera proporcional con respecto al tiempo y la aceleración toma un valor negativo pero constante.

FASE 3: Análisis de los videos.

HIPÓTESIS

Fuera: Cuando la canica cae y esta afuera de la glicerina, se comporta con un MRUA

Dentro: Cuando entra se comporta con MRU debido a que la glicerina anula la aceleración

Fig. 12 Formulación de hipótesis referente al movimiento de la canica

Los resultados revelan que las respuestas más comunes coinciden que el movimiento de la canica fuera y dentro de la probeta es MRUA indicando que la única diferencia es que dentro se tiene una desaceleración, mientras que solo algunos piensan que el movimiento es MRU. Para orientar adecuadamente este proceso la docente realizo un análisis en el software tracker correspondiente al comportamiento de la aceleración y la velocidad de la canica dentro de la probeta, los análisis discutidos con los alumnos fueron de los cuatro experimentos realizados. Se realizó un análisis cuantitativo de las variables cinemáticas de velocidad y posición, esto permitió a los estudiantes reformular las hipótesis planteadas inicialmente, el siguiente extracto evidencia algunas interacciones de reflexión entre los estudiantes y el docente:

> **DOCENTE:** En esa hipótesis nuevamente coincide que la aceleración debe de ser constante y aquí estamos observando otra cosa, con el análisis hecho hasta el momento tendrían que preguntarse si tienen que reformular la hipótesis que plantearon inicialmente, para reformularla no se complique solo observen como se está comportando la velocidad y la aceleración cuando la canica se está moviendo dentro de la probeta.
> **ALUMNO R:** MRUA
> **ALUMNO C:** No inventes
> **DOCENTE:** Ahí colóquenlo si siguen pensando que es MRUA es porque estas super…
> **ALUMNO X:** Reprobado (Un momento de risa para todos)
> **DOCENTE:** No, convencido de que se mueve con una aceleración constante de tipo constante y que la velocidad es proporcional al tiempo, porque es la característica de un movimiento acelerado (Hay desconcierto referente al cómo expresar su hipótesis porque solamente están familiarizados con MRU y MRUA)
> **ALUMNO C:** Yo analice un poquito la desaceleración en el de 100, si se desacelera más rápido si estamos bien pero bueno si lo ve, justo es un poco hay no quiero decir esa palabra pero se ve un poco proporcional porque pasa del 248 al 160 del 160 al 80 que es la mitad y de 80 a 40 que es otra vez la mitad y de ahí un valor cercano al veinte y de ahí ya cae más feo.
> **DOCENTE:** Ha ya crees que es un tipo de proporcional que te es familiar hasta cierto punto, sugiero que expresen cómo se comporta la velocidad y aceleración posiblemente no estén familiarizados (Siguen en una discusión de las ideas que cada quién tiene y se les señala en donde se reformula la hipótesis).
> **ALUMNO R:** Yo sigo creyendo que es MRUA.
> **DOCENTE:** Si me colocas MRU me estarías diciendo que la aceleración es cero y que la velocidad es la misma y si colocas MRUA me estarías diciendo que la aceleración es la misma y que la velocidad es proporcional al tiempo si no es nada de eso descríbelo con palabras, pero lo del MRU y MRUA es porque hasta cierto punto se cumplen esas condiciones
> **ALUMNO R:** Son opcionales
> **DOCENTE:** Exacto son opcionales (El alumno se sorprende y desecha la opción de estos dos movimientos)
> **ALUMNO R:** Es que yo pensé que solo podía ser cualquiera de esas dos opciones.
> **DOCENTE:** (Se escucha la inquietud de un alumno referente a qué tipo de proporcionalidad podría ser y se realiza una comentario) Creo que están acostumbrados a proporcionalidades de tipo lineal.
> **ALUMNO A:** Así es miss es que hasta cierto punto son muy específicas.

En este sentido, la docente guía intenta poner en práctica el desarrollo del aprendizaje como la invención de las matemáticas. A su vez, es la encargada de incitar a la reflexión y al debate, en efecto es quien brinda el valioso espacio de socialización; siendo la pieza fundamental en el proceso para administrar los recursos y formalizar la rigurosidad del conocimiento (Márquez-Mosquera y Olea-Isaza, 2020).

4.1.5 Principio de Interacción

Este principio hace alusión a la comunicación y cooperación de la docente investigadora y alumnos en el proceso de aprendizaje. Dada las intenciones de esta investigación, en la tarea introductoria se presenta un aprendizaje colaborativo en las preguntas 10, 11, 12 y 13 en donde se les solicita a los estudiantes contestar las preguntas con una lluvia de ideas grupales. La pregunta número 10 hace alusión a como determinar la velocidad si la aceleración es constante, la interacción inicia cuando la docente pregunta cómo obtener la velocidad si se sabe que la aceleración es la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo "$a = \frac{dv}{dt}$" los estudiantes contestan lo siguiente:

> **ALUMNOS:** Despejarla la... la, la despejar la velocidad
> **DOCENTE:** Ok despejando, ¿Cómo la despejamos?
> **ALUMNOS:** Pasaría multiplicando
> **DOCENTE:** Tendríamos que la aceleración sería multiplicada por el diferencial del t "dt" y esto sería igual al diferencial de la velocidad "dv" (Escribe en el pizarrón $adt = dv$) ¿Qué más?
> **ALUMNO C:** ¿Queremos sacar solo velocidad verdad?
> **ALUMNO M:** ¿Se puede integrar no?
> **DOCENTE:** Se podía qué...
> **ALUMNO M:** Integrar
> **DOCENTE:** Ok entonces si lo integramos en esta parte de aquí en esta parte de acá (Escribe el símbolo de integración de cada lado de la igualdad)
> **DOCENTE:** Vamos a considerar ciertos intervalos de integración esto para no mandarlo a una integral ¿Cómo se llama?
> **ALUMNO C:** Indefinida
> **DOCENTE:** Integral indefinida, esos intervalos de integración tienes que ser en la parte del tiempo, iniciemos en un cierto tiempo inicial "t_o" hasta un tiempo t y los intervalos de este parte de integración ¿Cuáles serían? (Escribe en el pizarrón)
> **ALUMNO J:** Desde una velocidad inicial "v_o" hasta una velocidad "v"
> **DOCENTE:** Ok, resultados (Escribe en el pizarrón lo mencionado por los alumnos), vayan poniéndolo, ya le avanzamos muchísimo no, todo eso va en la parte de la respuesta número once (Señala donde colocar la respuesta) Si el espacio es muy pequeño sin problema pueden utilizar el espacio de atrás de la hoja para poder resolver esta cuestión número once.

Después de que los estudiantes determinaron la velocidad, el docente preguntó si la respuesta coincidía con la predicción realizada en la pregunta número ocho, las respuestas de algunos de los alumnos fueron verídicas y otros explicaron la falla de su predicción, posteriormente se pasó a responder la pregunta número 13, algunas preguntas que ayudaron al momento de interacción fueron: Como calcular la posición si, hasta el momento se sabe cómo se comporta la velocidad ¿Cómo saber la posición del objeto? ¿Qué sabemos de la velocidad? la expresión verbal a las preguntas es la siguiente.

> **ALUMNO X:** Que es la distancia sobre el tiempo
> **DOCENTE:** Bueno pero es rapidez
> **ALUMNO C:** Es el desplazamiento sobre el tiempo
> **DOCENTE:** Pero como lo estamos variando, lo estamos viendo en cada instante
> **ALUMNO D:** Es la derivada del desplazamiento con respecto al tiempo
> **DOCENTE:** Y ¿Quién es la velocidad?

ALUMNO J: La aceleración por el tiempo
DOCENTE: Yo sé que la velocidad de toda esta caída libre es la aceleración por el tiempo más velocidad que se tenía al inicio "$v(t) = at + v_o$", entonces esto de acá como la podríamos manejar en esta información de aquí (Señala la igualdad de posición)
ALUMNOS: A por t más velocidad inicial es igual a la derivada de x con respecto a la derivada de t "$at + v_o = \frac{dx}{dt}$"
DOCENTE: ¿Creen que puedan conocer la posición del objeto?
ALUMNOS: Si

Otro momento importante de interacción se observa en la implementación de la tarea experimental en donde se observa la socialización estudiante-docente, estudiante-estudiante y estudiante-contexto. La combinación de las interacciones antes mencionadas permitió a los estudiantes reflexionar acerca de sus procesos de aprendizaje entorno al movimiento de la canica, reafirman su aprendizaje referente al MRUA y reflexionan acerca de relación existente entre aceleración y velocidad manifestando que la aceleración es proporcional a la velocidad, estas manifestaciones se pueden observar en el análisis hecho en el principio de nivel. Finalmente en la tarea de modelado no se presentó un aprendizaje colaborativo, es decir, los estudiantes comprendieron individualmente cada inciso, planteando las habilidades necesarias que se asocian a la solución de la problemática planteada.

4.1.6 Principio de Interconexión

Freudenthal (1973) hace notar este principio como la enseñanza simultánea de las hebras matemáticas, esto, para permitir una comprensión más amplia de la aplicabilidad de estos contenidos. En la tarea introductoria y de modelado se observa como los estudiantes interrelacionan diversos contenidos matemáticos (Ver Figura 13).

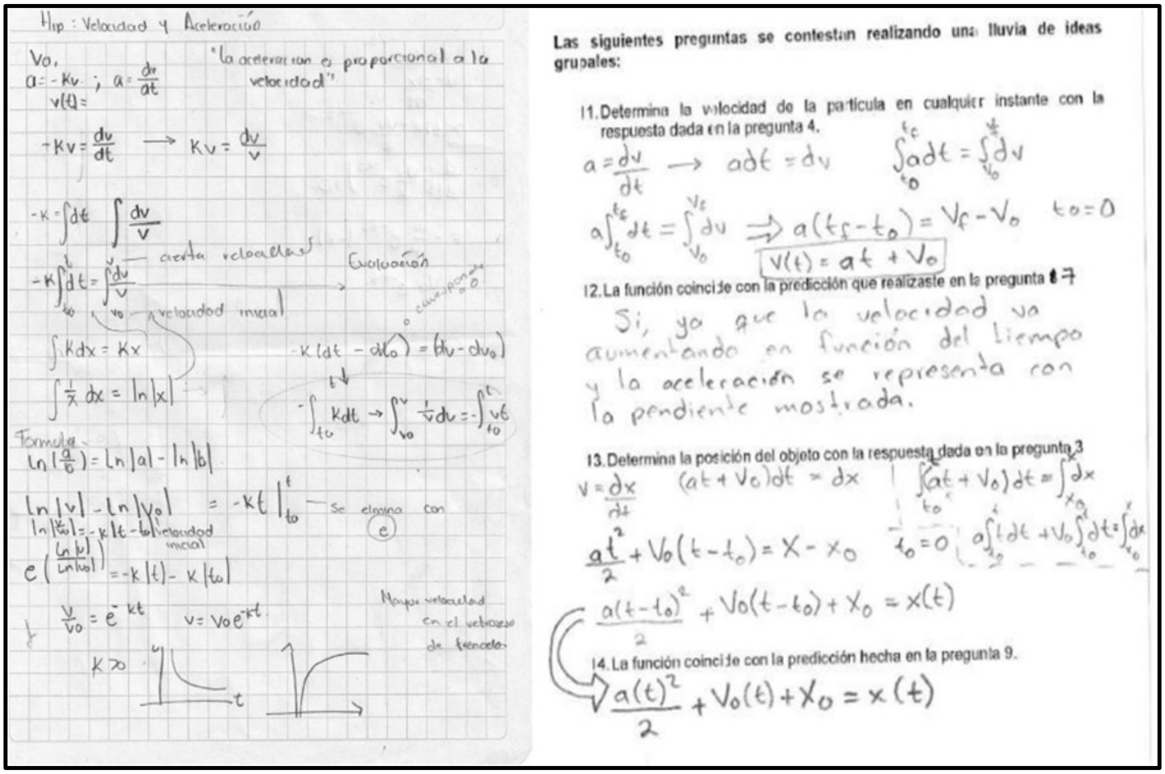


Fig. 13 Integración de contenidos matemáticos en la tarea de modelado e introductoria

En ambas tareas se observa como los estudiantes A y J logran integrar distintas ramas de las matemáticas como lo son: Algebra, Funciones Matemáticas, Calculo Diferencial e Integral y Ecuaciones Diferenciales, en esta línea (Alsina, 2009) menciona que no pueden ser tratados como entidades separadas. Sin embargo, se evidenció en algunos alumnos la falta de integración del currículo matemático, es decir presentaron dificultades al momento de resolver integrales para dar respuesta a la pregunta 13 de la actividad. Con respecto a la tarea de modelado algunos alumnos reiteran dificultades en la solución de otra integral, ambos casos coinciden que la solución de la integral permite dar respuesta de la función que describe la posición en función del tiempo (Ver Figura 14).

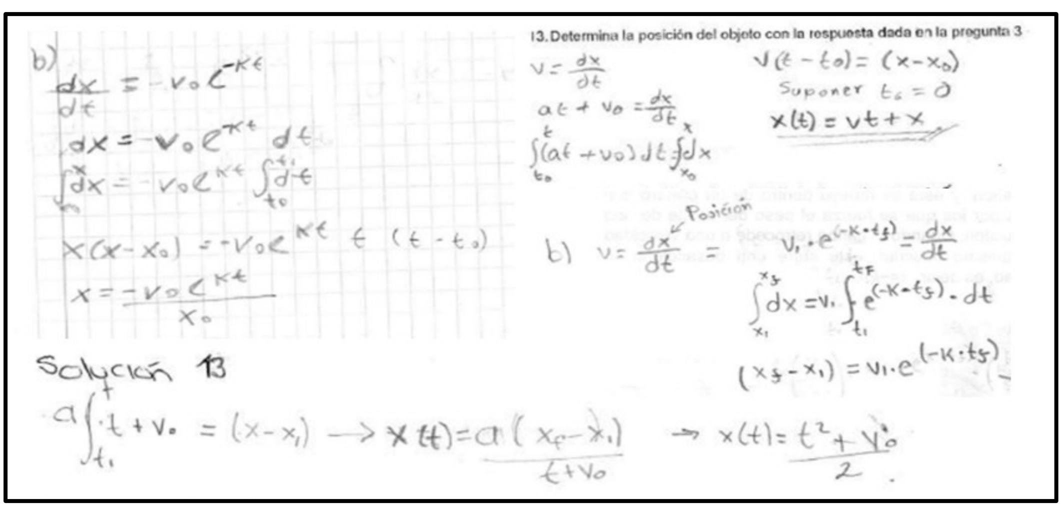


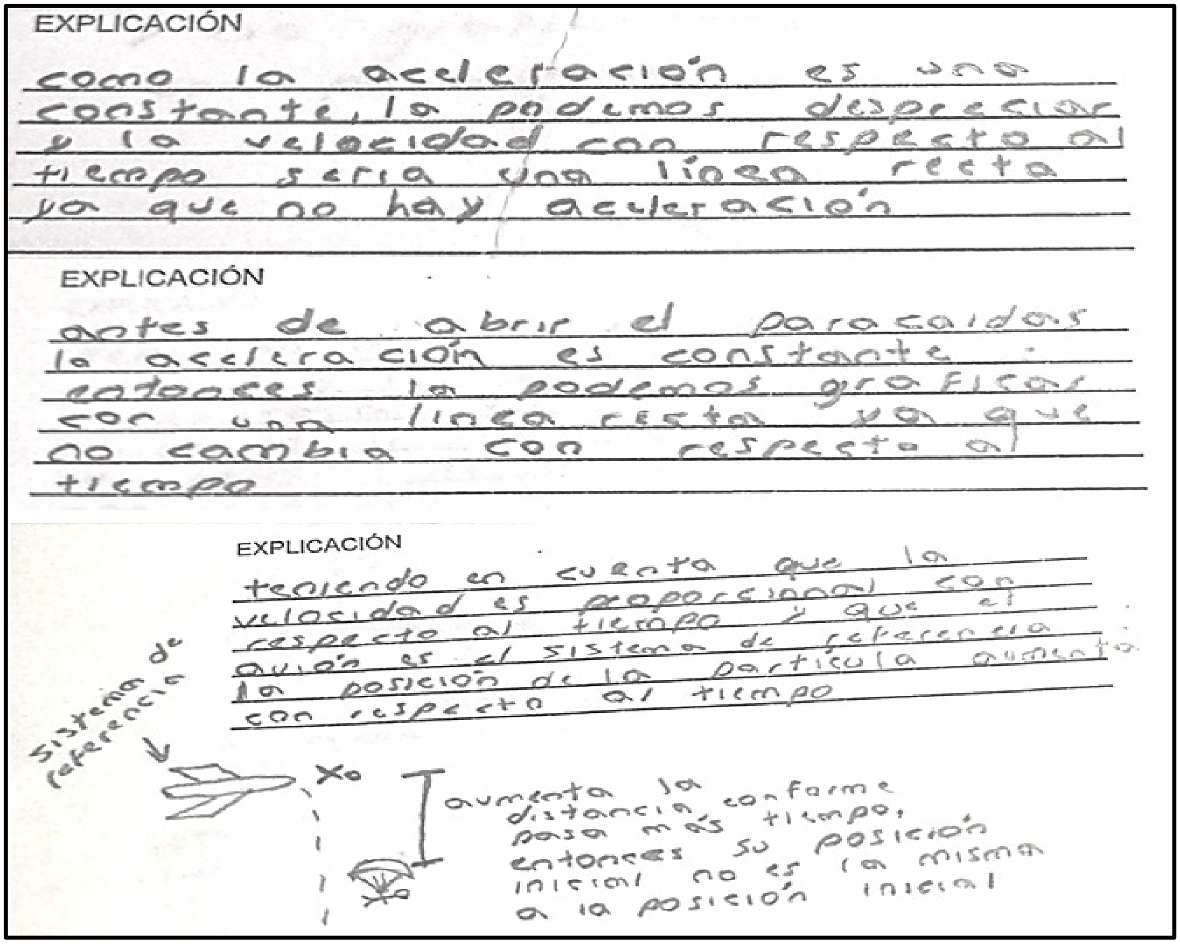
Fig. 14 Solución de las integrales con respecto al tiempo

El estudiante X (Lado izquierdo de la Figura 13) y T (Lado derecho de la Figura 13) muestran dificultades en la tarea introductoria y de modelado para determinar la posición del objeto en función del tiempo (Condiciones distintas en cada una de las tareas) mismas que se derivan de no integrar correctamente los conocimientos respecto al currículo del Calculo Integral. Cabe resaltar que el grupo de estudiantes con ayuda de la docente investigadora lograron identificar modelos matemáticos para navegar en los diferentes niveles de la matematización (situacional, referencial, general y formal). También, la construcción del conocimiento se enfocó en la interacción, dado que los estudiantes desde su máximo potencial contribuyeron al producto y fueron participantes activos en la solución de cada una de las tareas, las cuales fueron parte de su realidad.

4.2 Análisis de Resultados y las Representaciones Semióticas en el Proceso de Modelación

En este análisis se van a examinar las diferentes representaciones semióticas como el tratamiento y conversiones de las mismas, las cuales fueron emergiendo en la implementación en cada una de las tareas diseñadas, es importante hacer notar que para Duval (1998), (citado en Oviedo y Kanashiro, 2012) en la semiosis es importante que se realicen tres actividades cognitivas: Formación, tratamiento y conversión, éstas están íntimamente ligadas al conjunto de representaciones que se manifiestan para la resolución de un problema real (Duval, 2006).

En la implementación de las tareas se lleva a cabo la actividad cognitiva de formación misma que describe, los estudiantes identifican la situación, es decir, son conscientes de los escenarios a discutir en cada una de ellas. En la tarea introductoria el escenario fue el movimiento y el estudio del comportamiento de las variables cinemáticas analizando el caso particular de movimiento donde la aceleración es constante. En la tarea experimental el movimiento de la canica cuando llega con una velocidad inicial y se mueve dentro de la glicerina finalmente en la tarea de modelado el mecanismo diseñado para el retroceso de un cañón. Esta identificación concuerda con la primera fase de cuáles son las representaciones semióticas que se demandan en el modelado de una situación real, se identifica que el uso de las palabras es necesario para describir una situación de la vida real. Los resultados de la primera tarea evidencian como los alumnos, dan una explicación verbal del comportamiento de las variables cinemáticas en el salto en paracaídas, en la Figura 15 se visualizan las respuestas del alumnos X y G.


EXPLICACIÓN

como la aceleración es una constante, la podemos despreciar y la velocidad con respecto al tiempo sería una línea recta ya que no hay aceleración

EXPLICACIÓN

antes de abrir el paracaidas la aceleración es constante entonces la podemos graficar con una linea recta ya que no cambia con respecto al tiempo

EXPLICACIÓN

teniendo en cuenta que la velocidad es proporcional con respecto al tiempo y que el avión es el sistema de referencia la posición de la particula aumenta con respecto al tiempo

Fig. 15 Descripción verbal de la aceleración, velocidad y posición en el salto en paracaídas

En las hojas de trabajo de la tarea experimental se tiene registrada la evidencia de como los estudiantes describen verbalmente la situación planteada con respecto el movimiento de la canica dando en algunas de ellas características del comportamiento de la velocidad y aceleración. Un segundo momento de verbalizar una situación es al final de la tarea donde el profesor solicita a los estudiantes que describan la relación existente entre la aceleración y velocidad, el análisis de las hojas de trabajo arroja que todos los estudiantes lo describen de forma textual y posteriormente el profesor pide la participación de forma voluntaria para escuchar las conjeturas realizadas. En la tabla 2 se visualiza las descripciones verbalizadas de los alumnos K, M y F al inicio de la tarea y para la culminación de la misma se observa lo descrito por los alumnos X, N y D mismas que se transcribieron.

Tabla 2. Transcripción de las descripciones verbales del movimiento de la canica

Alumno	Transcripción
K	**Fuera:** Existe un movimiento con una aceleración constante, por tanto es MRUA. **Dentro:** La fuerza de gravedad se ve contrarrestada al caer en la superficie la velocidad se vuelve constante, por tanto es MRU.
M	**Fuera:** A mayor altura, la aceleración permanece constante, pero la velocidad cambia aumentando la velocidad. **Dentro:** Lo que se observa es que la aceleración es constante y lo mismo con la velocidad, pero siguiendo la lógica la velocidad debería ser lineal.
F	**Fuera:** El movimiento de la canica es MRUA ya que a mayor altura la velocidad incrementa y se mantiene una aceleración constante. **Dentro:** Cuando la canica está dentro de la glicerina se trata de un MRU ya que la velocidad se mantiene constante en el descenso de la probeta.
X	La aceleración decrece en función de la velocidad. La aceleración es directamente proporcional a la velocidad.
N	Cuando la velocidad va disminuyendo, la aceleración se vuelve negativa y disminuye drásticamente, y viceversa, es decir, son proporcionales.
D	La aceleración al verse afectada por la glicerina se convierte en negativa y se convierte en desaceleración por ende la velocidad se ve afectada y por esto disminuyen de forma gradual y proporcional.

Se resalta nuevamente la importancia de verbalizar una situación real, es parte significativa para los estudiantes y les permite transitar a las actividades cognitivas de tratamiento y conversión. Se realiza un análisis minucioso de las hojas de trabajo de los alumnos y las conversiones observadas dentro de cada registro fueron: verbal-simbólicos, gráfico-verbales y simbólico-grafico. En la primera tarea se les solicitó a los estudiantes que expresarán la velocidad y aceleración de una partícula se les indicó que eran libres de emplear un texto, símbolos o ambos, del grupo de estudiantes diez hicieron una conversión de lo verbal a lo simbólico y solo cuatro emplearon el registro simbólico, es importante mencionar que de los cuatro que emplearon el registro simbólico hicieron un tratamiento del mismo. El diseño de las preguntas 8, 9 y 10 hace que los estudiantes respondan a ellas en una forma gráfica para después pasar a lo verbal, la Figura 16 ejemplifica como la alumna J hace tratamiento del registro y el alumno M conversión del mismo.

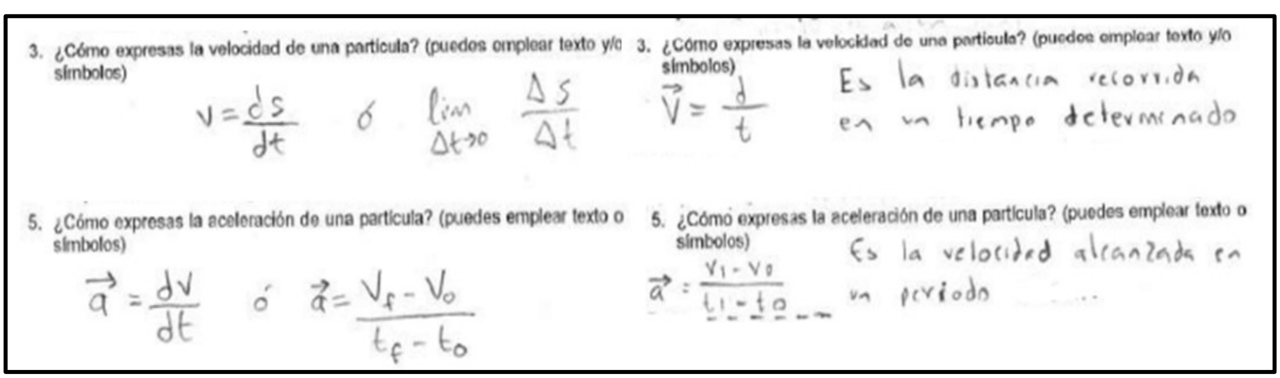


Figura 16 Tratamiento y conversión de los registros semióticos.

Otro momento de conversión del registro semiótico es en la culminación de la tarea experimental donde la investigadora docente solicita a los alumnos la hipótesis final de la actividad los alumnos formulan la hipótesis y se discute en formal grupal, posteriormente el docente engloba las ideas mencionando que los alumnos coinciden que la aceleración es directamente proporcional a la aceleración, posteriormente el docente pregunta ¿Cómo expresar simbólicamente la hipótesis? Se visualiza dos respuestas en los alumnos, la primera es con el uso de derivada $\frac{da}{dt} = -nv$ y la segunda con una relación $a = -nv$. Finalmente en la etapa de modelación los estudiantes realizan una conversión del registro simbólico al grafico en las respuestas de velocidad y posición, todos dieron respuesta asertiva con respecto a la velocidad y solo algunos lograron lo de la posición en la Figura 17 se muestran las respuesta de los alumnos H y R.

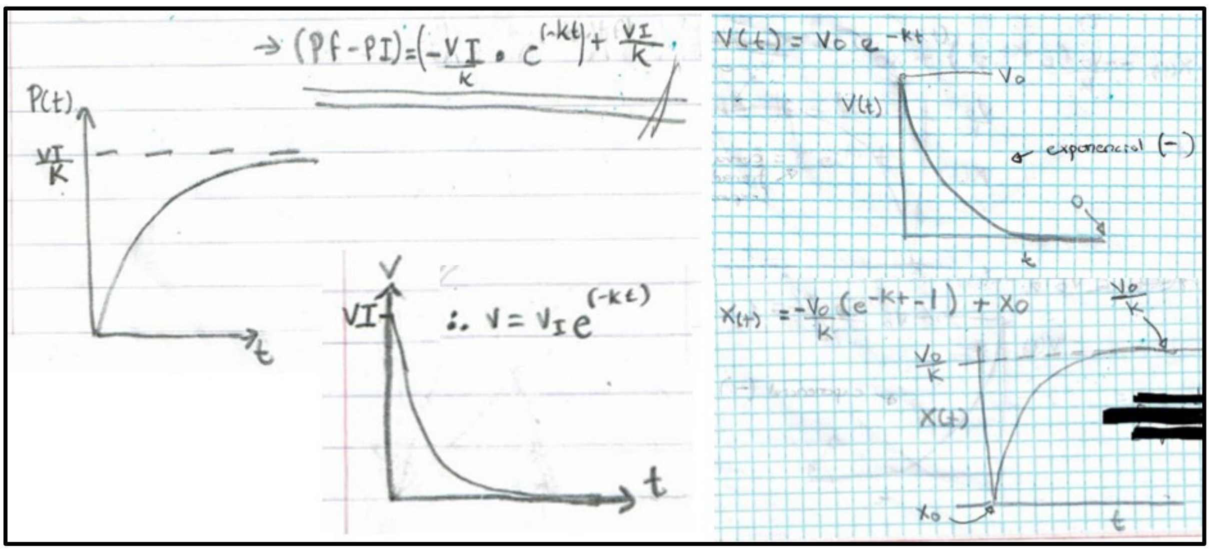


Figura 17 Conversión del registro simbólico al gráfico.

Los tratamientos dentro de cada registro y, sobre todo, las conversiones entre los distintos registros de representación semiótica ponen de manifiesto que los estudiantes son parte de la diversidad de representaciones que se necesitan para plantear una situación y resolverla. Restar importancia a la pluralidad y diversidad de registros de representación trae como consecuencia la consideración, por parte del alumno de que, todas las representaciones de un objeto matemático determinado tienen el mismo contenido.

4.3 Análisis de Resultados en el Proceso de Modelación.

Si bien hasta el momento se ha analizado como la solución de una situación real necesita de interconexión entre los distintos principios establecidos en la matemática realista y las maneras distintas en las que un objeto matemático puede ser representado sin restar importancia en su contenido. En este apartado se realizará un análisis de los elementos presentes de la modelación matemática, en la implementación de cada una de las tareas de aprendizaje matemático (Ver figura 18), teniendo en cuenta que es concebida como un proceso cíclico que vincula el dominio real con el matemático, reconociendo entre ellos dos dominios más identificados por Rodríguez (2007, 2010): el físico y el pseudo concreto.

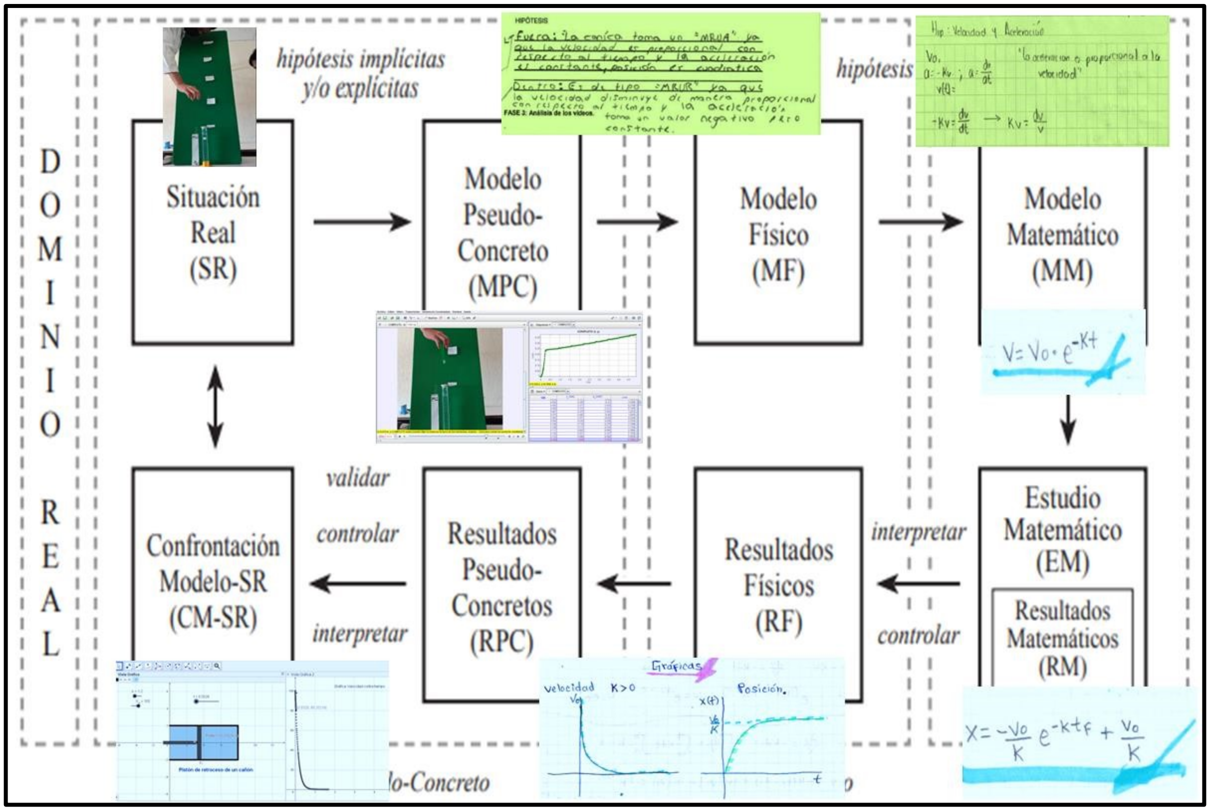


Fig. 18 Implementación de las tareas de aprendizaje matemático en el ciclo de modelación.

Para iniciar y evidenciar los elementos del proceso de modelación que fueron emergiendo conforme se presentaron las tareas, se inició con actividades que permitieron explorar los conocimientos en el contexto físico de la Cinemática. Se les planteo la situación extra-matemática la cual consistía en construir un modelo (en hipótesis) referente al movimiento de la canica en caída libre, los alumnos construyen el modelo expresándolo en palabras y se comprueba haciendo un análisis del movimiento con la ayuda del software tracker donde se analiza la información desde el registro gráfico, se realizaron graficas cinemáticas que permitieron a los alumnos corroborar el modelo que plantearon al inicio, es posible apreciar a su vez una relación recíproca donde los mismos conocimientos físicos permiten una verdadera comprensión de la actividad (Ver Figura 19).

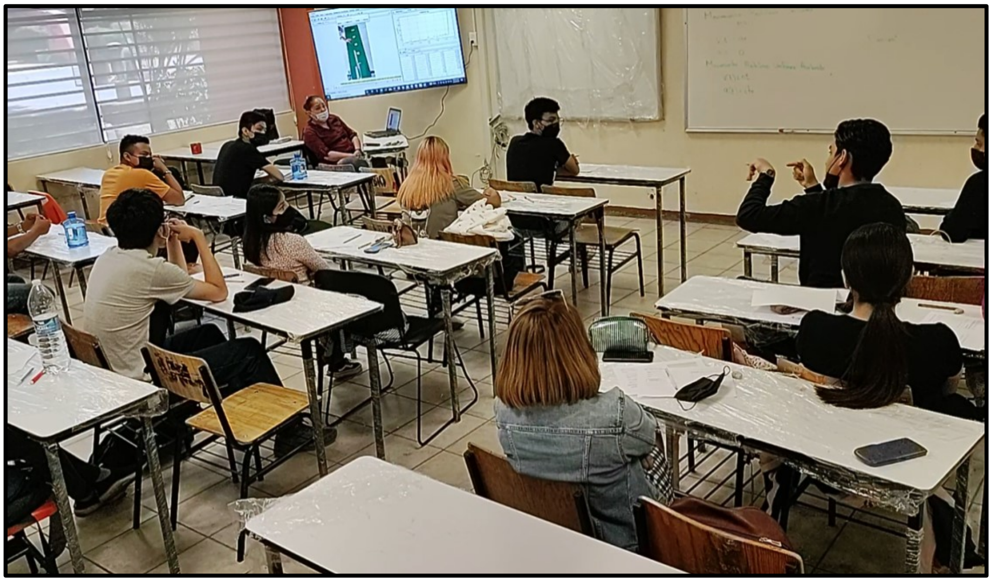


Fig. 19 Discusión grupal de las gráficas de posición, velocidad y aceleración

Posterior a esta fase exploratoria se les solicitó a los estudiantes construir otro modelo (en hipótesis) que le permitiera describir el movimiento de la canica justo en el instante que la canica llega con una velocidad inicial y hace contacto con la glicerina para que posteriormente siga su movimiento. La interacción de realizar la práctica experimental y grabarla para que posteriormente la pudiera visualizar las veces que fuera necesario, permitió que tuvieran una idea intuitiva de la situación. A continuación, se presenta la transcripción de la videograbación de una discusión activa en el grupo en la que se explica la manera en que conciben el movimiento:

> **ALUMNO R:** Yo puse que afuera se movió por MRUA ya que va con una aceleración constante y por ende su velocidad aumenta conforme el tiempo y puse que dentro igual se movió por MRUA ya que ocurre al inicio una desaceleración y luego cae con una aceleración igual aunque es mínima pero es diferente de cero.
> **DOCENTE:** En ambos tanto dentro y fuera es acelerado, ok haber otra opinión.
> **ALUMNO X:** Fuera la canica toma un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado ya que la velocidad es proporcional con respecto al tiempo y la aceleración es constante y dentro es de tipo movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado ya que la velocidad disminuye de manera proporcional con respecto al tiempo y la aceleración toma un valor negativo pero constante.
> **DOCENTE:** Negativo pero constante, ok C.
> **ALUMNO C:** Yo puse que fuera el movimiento del cuerpo es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado un MRUA debido a que tiene una aceleración constante y la velocidad con respecto al tiempo aumenta proporcionalmente y dentro yo creo que de igual manera es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado pero con la diferencia que la velocidad baja proporcionalmente y la desaceleración es constante.

Entre los principales elementos del proceso de modelación matemática que fueron promovidos están:

Situación Real (SR) → Modelo Pseudo-Concreto (MPC) → Modelo Físico (MF): El trabajo grupal promovido desde el inicio de la clase hace que los alumnos relacionen constantemente términos físicos para el entendimiento del problema. Formulan hipótesis de forma explícita (MPC) las cual le permite la creación del modelo físico, en relación a esto Rodríguez (2010) lo identifica como la etapa entre la realidad y el modelo físico. Las evidencias muestran que el modelo físico necesita modificaciones. Para seguir en esta faceta del proceso de modelación (SR → MPC → MF) en las hojas de trabajo proporcionadas, se solicita que contesten las preguntas 5, 6, 7, y 8. Los registros de sus respuestas muestran nuevamente el uso de términos físicos. Dentro de la guía proporcionada también indicaba el llenado de una (tabla (Ver Figura 20) con la ayuda del software tracker.

Con la ayuda de tracker realiza el llenado de la siguiente tabla; analizando tiempo, posición, velocidad y aceleración.

Altura de la caída libre	Tiempo (s)	Posición (m)	Velocidad (m/s)	Aceleración (m/s²)	
20cm	0.208	0.161	1.971	9.062	← Velocidad con la que llega
	0.242	0.226	1.412	-73.98	
	0.250	0.231	0.480	-67.57	
	0.258	0.234	0.346	-15.53	
20 cm	0.267	0.237	0.268	-9.118	
	0.275	0.238	0.160	-14.63	
1 metro	0.833	0.949	5.306	8.692	← Velocidad con la que llega
	0.850	1.051	3.537	-248.3	
	0.858	1.068	1.726	-166.1	
	0.867	1.079	0.925	-80.71	
1 metro	0.875	1.083	0.338	-46.45	
	0.883	1.085	0.165	-17.27	
	0.892	1.086	8.270E-2	-8.278	

Fig. 20 Ejemplo de llenado de la tabla (datos obtenidos del software tracker)

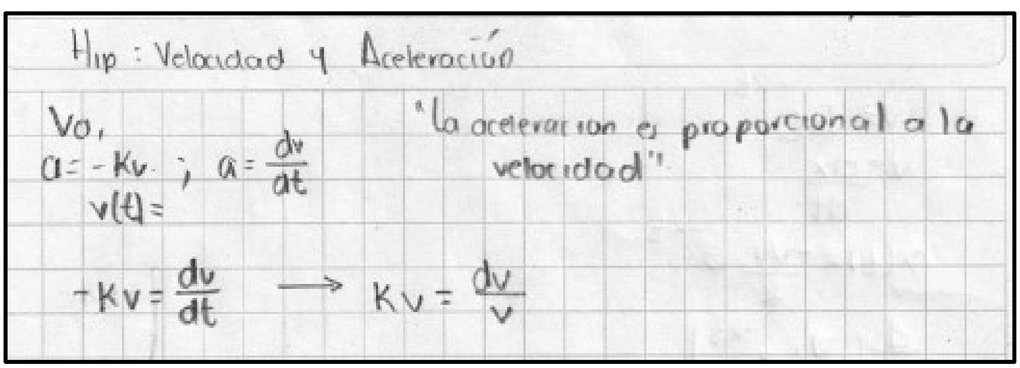
Los registros del vídeo muestra que el uso de este software en el análisis cuantitativo de la velocidad y aceleración les permite reformular su hipótesis inicial, expresando en sus hojas de trabajo que el movimiento de la canica sale del paradigma de MRU y MRUA, explicando que la velocidad y la aceleración son variables en el movimiento, es decir, no son constantes y que existe una relación entre ambas, algunas participaciones de lo antes mencionado se muestra en la transcripción siguiente:

> **ALUMNO R:** Yo puse que no es ninguna porque siento que ni la velocidad ni la aceleración es constante porque aunque son valores muy chiquitos pero varían realmente.
> **DOCENTE:** Entonces vean que con esto que menciona su compañero rompe con estos tipos de movimientos donde la aceleración es cero o es constante, dice que tanto la aceleración como la velocidad es variable, quién tiene una idea distinta a estas dos que nos compartieron.
> **ALUMNO C:** Yo tengo una fusión de esas dos.
> **ALUMNO A:** Si yo también tengo la fusión de esas dos.
> **ALUMNO C:** Que la velocidad es proporcional pero va disminuyendo y que la aceleración es variable negativa.

El estudiante sigue modificando el MPC, para finalizar la actividad se les solicita que formulen una hipótesis (Modelo) que describa la relación existente entre la aceleración y velocidad en el instante que la canica llega a la probeta llena de glicerina con una velocidad inicial. La tarea analizada permitió dar cuenta de lo que transcurrió en términos de los distintos elementos del ciclo de modelación matemática, específicamente entre la transición siguiente:

- Situación Real → Modelo Físico: El uso del software para la generación de gráficas y el análisis cuantitativo de las variables cinemáticas apoyo el esclarecimiento del fenómeno físico entre los estudiantes. Las gráficas fueron explicadas por el grupo retomando, tanto términos físicos, como algunos aspectos particulares del problema que resuelven. El uso de términos físicos que inició en la actividad anterior, continuó. Los alumnos compartieron los conocimientos que poseen respecto a velocidad y aceleración y a sus representaciones gráficas en el movimiento MRUA. Crearon nuevos conocimientos donde se refieren que la aceleración no es constante, que existe una relación estrecha entre velocidad y aceleración en una situación de frenado, logrando, así, la creación de un modelo físico, mismo que visualizaron en la parte experimental.

Durante la realización de la actividad de modelado, se estableció claramente la relación existente entre el MF establecido en la parte experimental y el Modelo Matemático (MM) que comienza a ser vislumbrado por los estudiantes en el momento que logran establecer una ED, las respuestas evidencian elementos del proceso de modelación y la transición del Modelo Físico → Modelo Matemático, Figura 21.


Hip: Velocidad y Aceleración

V_0,

$a = -Kv$; $a = \frac{dv}{dt}$

$v(t) =$

"la aceleracion es proporcional a la velocidad"

$-Kv = \frac{dv}{dt} \longrightarrow Kv = \frac{dv}{v}$

Fig. 21 Transición del MF al MM

La implementación y solución de esta tarea en el proceso de modelación matemática pudo observarse de la siguiente manera:

- Modelo Matemático → Resultados Matemáticos→ Resultados Físicos → Resultados Pseudoconcretos: Fue posible apreciar que los alumnos lograron una transición entre el Modelo Matemático y los Resultados Matemáticos, mediante la solución de las ecuaciones diferenciales obteniendo funciones que describen la velocidad y posición en función del tiempo. Además, la ecuación diferencial, sus elementos y su solución tienen un sentido tanto físico como matemático para los alumnos, la solución se discute de forma integral, se hace una reflexión en los estudiantes para ver que valores tiene que tomar la constante de proporcionalidad para tener Resultados Físicos y Pseudoconcretos de la situación. La Figura 22 ejemplifica lo elementos del proceso de modelación antes mencionados.

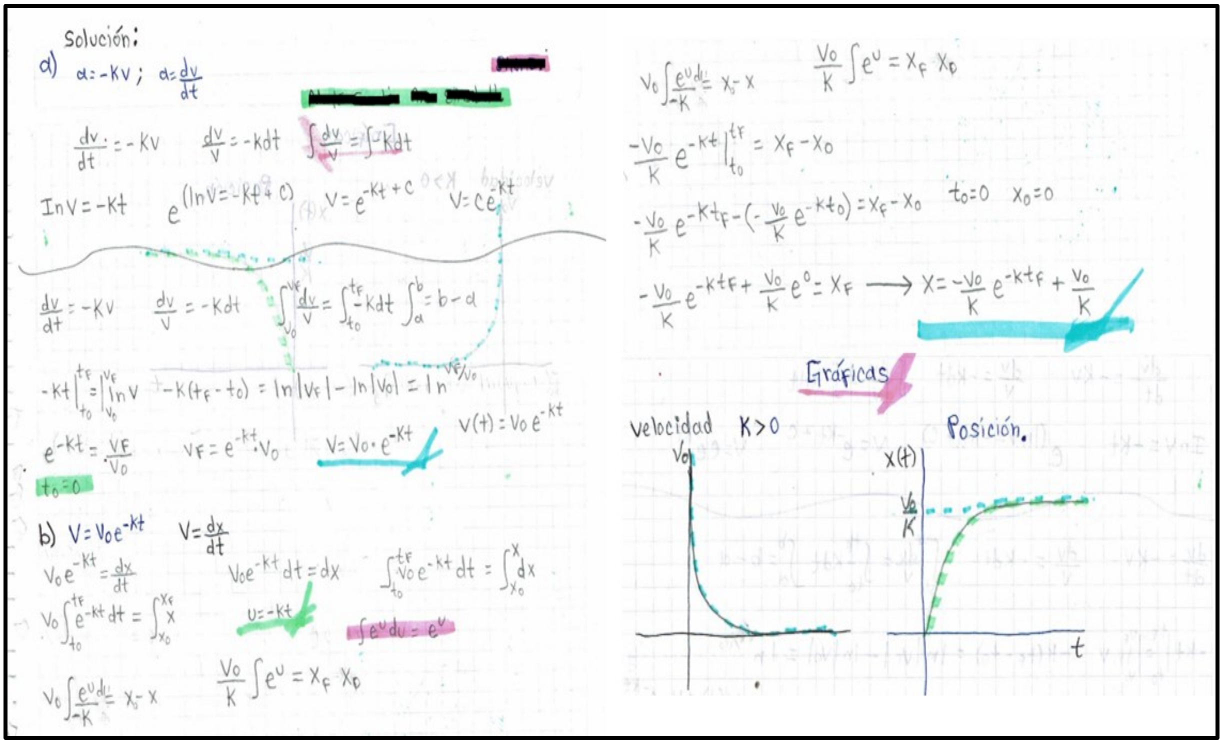


Fig. 22 Elementos del proceso de modelación del MM a RPC

A fin de provocar una reflexión más amplia de los resultados obtenidos y hacer comparaciones con la situación plasmada en la actividad experimental, se incorporó a la tarea y con el uso de la tecnología (simulación del retroceso del pistón hecha en GeoGebra) una discusión sobre los decrecimientos exponenciales de la velocidad de retroceso tomando diferentes valores iniciales de velocidad y valores distintos de la constante de proporcional. A los alumnos se les cuestiona sobre cuáles serían los valores posibles que tomaría la constante de proporcionalidad. Las respuestas se discuten en forma grupal y son plasmadas en la transcripción del video grabación. Las respuestas de los alumnos dieron cuenta que había una relación entre los valores de k para que describiera la velocidad de retroceso:

> **DOCENTE:** Ok, entonces tendrían que analizar cómo sería la exponencial cuando k es mayor que cero haber dibújenla, si mayor cero.
> **ALUMNO J:** Sería así (Dibuja la exponencial con su mano donde se observa un decrecimiento exponencial)
> **DOCENTE:** Si con el valor de la velocidad inicial que va a multiplicar a la exponencial pero si k es mayor que cero como se estaría comportando la velocidad.

ALUMNOS: Hacía abajo (La mayoría de alumnos dibujan una exponencial que decrece con su mano)
DOCENTE: Exacto decrece y si k es menor que cero como sería la exponencial.
ALUMNO A: Subiría no.
ALUMNO J: No hacia el otro lado igual casi pero hacia el otro lado (Dibuja una exponencial con su mano que es creciente desde valores negativos del tiempo) caía pero se iría al negativo.
DOCENTE: Hacía acá (Dibuja la exponencial como la alumna se lo imagina)
ALUMNO J: Aja mmm (Viendo la gráfica dibujada reflexiona sobre su respuesta)
ALUMNO C: No yo creo que iría así el otro lado.
ALUMNO A: Yo creo que subiría.
DOCENTE: Yo creo que la gráfica que propones J no tendría sentido porque estaríamos analizando cosas en función del tiempo.
ALUMNO A: Pero no habría un tiempo negativo.
DOCENTE: Entonces si k es negativo y con el signo menos del exponente que le pasa a la exponencial
ALUMNOS: Subiría.
DOCENTE: Y entonces con lo que se estuvo haciendo ¿Cuál representa la velocidad? (En el pizarrón están las dos gráficas que se dibujaron en base a si los valores de k que son mayores que cero y menores que cero) en una la velocidad disminuye y en la otra aumenta
ALUMNOS: La velocidad disminuye es esa (Indican la gráfica de la función exponencial decreciente)

Una vez que se realizó la discusión sobre los valores de la constante de proporcionalidad se procedió a utilizar la simulación hecha GeoGebra para discutir diferentes casos del retroceso del cañón, utilizando diferentes valores para la velocidad inicial y la constante de proporcionalidad del cañón (Ver figura 23).

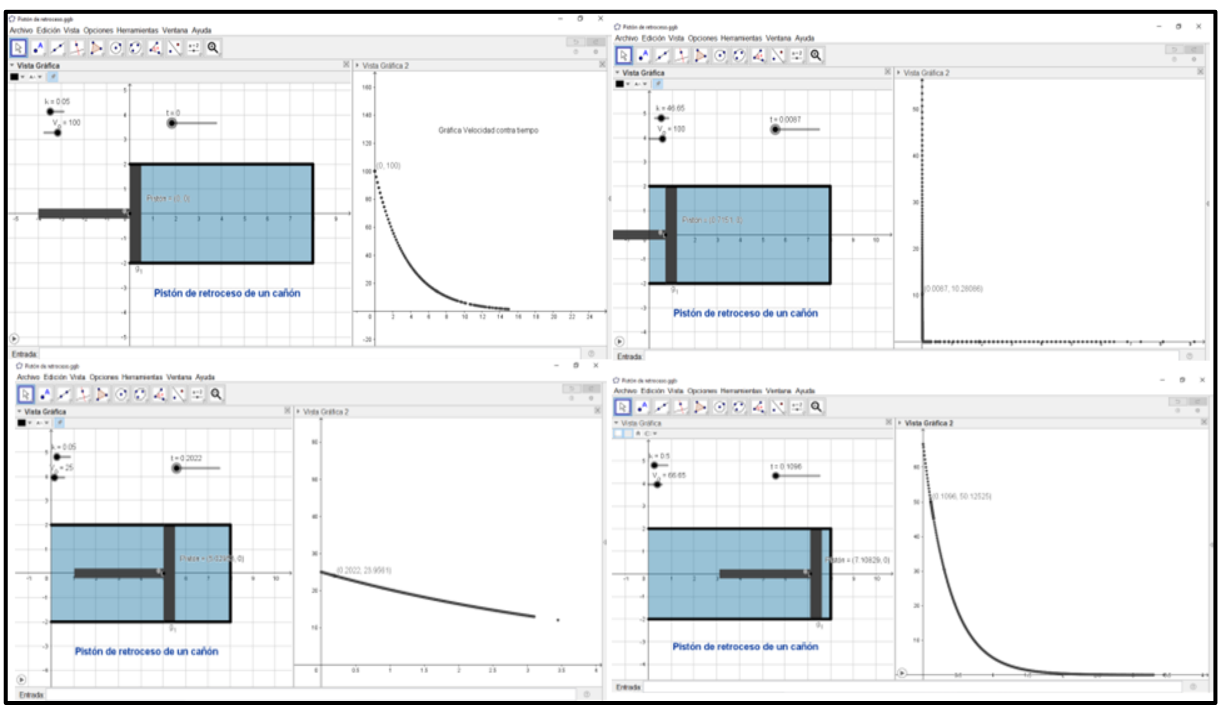


Fig. 23 Simulaciones del retroceso del cañón en GeoGebra

A través de lo registrado por los diversos instrumentos, se encuentran algunas acentuaciones particulares en ciertos elementos del proceso de modelación:

- Resultados Matemáticos → Resultados Físicos → Resultados Pseudo Concretos: El diálogo de nuevo deja ver cómo las respuestas matemáticas son validadas de acuerdo a los resultados físicos encontrados. Además, es posible apreciar que los alumnos utilizan términos físicos en las explicaciones de orden matemático. Es importante mencionar que el haber hecho uso de la tecnología apoyo a los estudiantes para realizar conexiones entre sus respuestas físicas como matemáticas y así tener herramientas para confrontar el modelo obtenido con la situación real.

Finalmente se pudo observar cómo los estudiantes pudieron transitar por los 4 dominios del ciclo de modelación propuesto por Rodríguez (2010) pues los estudiantes analizaron una situación que la transformaron a un modelo semi-concreto, para transitar a un modelo físico, el cual lo describieron a través de una hipótesis, misma que se transformó en un modelo matemático, teniendo así resultados que se pudieron contrastar con la situación real.

5. CONCLUSIONES

En este apartado se plasman las respuestas a la pregunta de investigación de este estudio. En un primer momento se enuncian los elementos y el papel que jugó la experimentación, el uso de las herramientas digitales y la interacción entre estudiantes en el proceso modelación matemática, los principios de la Matemática Realista y las diferentes representaciones semióticas que emergieron en la implementación de las tareas de aprendizaje matemático en el contexto de la Cinemática. En un segundo momento se hace una reflexión sobre los alcances e implicaciones que tuvo la investigación dentro del campo educativo, y por último se realizan recomendaciones en las que se genera la necesidad de seguir estudiando sobre este tema y futuras investigaciones.

Las conclusiones obtenidas de esta investigación responden a preguntas de investigación y objetivos derivados del problema planteado. La pregunta central va enfocada a responder ¿Cuáles fueron los elementos del proceso de modelación principios de la Matemática Realista y representaciones semióticas emergen al abordar tareas planteadas en el contexto de la Cinemática involucrando el empleo de las herramientas digitales?

Para responder a esta pregunta se retomó el análisis que se hizo en el capítulo 4 se les propuso a los estudiantes en la tarea experimental que analizaran dos movimiento de la canica: fuera y dentro de la probeta, realizando hipótesis de movimiento. Para contrastar sus conjeturas se hizo uso de una herramienta tecnológica, el software Tracker. En la tarea experimental para comprender el problema real y establecer un modelo basado en la realidad, se pudo observar que los estudiantes no mostraron dificultades para identificar que el movimiento de la canica fuera de la probeta era un MRA, las dificultades se mostraron en poder describir el movimiento de la canica dentro de la probeta. No obstante, los alumnos se cuestionaban las características de la aceleración y velocidad de dicho movimiento. En este momento se puede observar lo que Rodríguez (2010) llama el dominio pseudo concreto. Algunas heurísticas utilizadas para ayudar a los estudiantes a transitar del dominio pseudo concreto al dominio físico fue realizar las siguientes preguntas: Que efecto realiza la glicerina sobre la velocidad de la canica, cuando un cuerpo reduce su velocidad, explica que le pasa a su aceleración, en cuál de los casos se desacelera más rápido y lento la canica una vez que entró a la glicerina. Así como realizar un análisis minucioso de la velocidad y aceleración en un intervalo de tiempo que contempla el instante que la canica llega con una velocidad inicial y hace contacto con la glicerina para seguir su movimiento en la misma. Cabe resaltar que estas estrategias estaban contempladas dentro del diseño de la tarea experimental.

En la tarea de modelado se aplica un modelo matemático a partir de una situación real. Este modelo matemático se diseñó a partir de ecuaciones diferenciales, una vez que los estudiantes comprendieron el problema e identificaron la relación existente entre aceleración y velocidad se construyó el modelo considerando conocimientos físicos y matemáticos relacionados a las variables cinemáticas (velocidad y aceleración), partiendo del dominio físico donde se da la comprensión del fenómeno físico abordado en la tarea experimental, lo que Rodríguez (2010) llama dominio físico.

En el dominio matemático se estudió y se resolvió en primera instancia el modelo formulado por los estudiantes para determinar la velocidad $\frac{dv}{dt} = -kv$, se evidenciaron algunas dificultades en el momento de evaluar los límites de la integral con respecto a la velocidad, fueron disipadas con la intervención del docente. Se obtuvo un segundo modelo para determinar la posición $\frac{dx}{dt} = v_o e^{-kt}$ en el cual la mayoría de los estudiantes tuvieron dificultades en la solución de la ED, unas fueron representadas por la falta de identificación de variables y otras por la falta de conocimientos en la solución de la integral, el docente intervino como mediador del aprendizaje, logrando esclarecer algunas dudas sobre los términos matemáticos. Se interpretaron y se compararon los resultados matemáticos con la situación real. Es decir traducir el resultado matemático a la realidad, lo que Rodríguez (2010) llama dominio matemático y dominio real. En esta fase los estudiantes observaban los resultados matemáticos y lo asociaban a la situación real.

Por último, se contrastan los resultados matemáticos en términos de la situación que le dio origen al problema, con el fin de interpretar y validar los resultados se incluyó nuevamente otra herramienta tecnológica, el software GeoGebra, se interactuó con una simulación del mecanismo del pistón (aplicación de la tarea de modelado) en la cual grupalmente se pudieron analizar varios casos; se dieron valores diferentes para la velocidad inicial y se mantuvo fijo el valor de la constante de proporcionalidad, los estudiantes compararon las gráficas con la conjetura realizada acerca de la desaceleración de la canica; “la aceleración es proporcional a la velocidad del objeto”, se pudo observar a los alumnos reflexionando acerca de sus conocimientos referente a la Cinemática y a las relaciones existentes entre velocidad y aceleración, reafirmando sus conocimientos referentes al MRU y MRUA, como también creando nuevos conocimientos en donde hay movimientos que la aceleración no es constante. Estas interpretaciones se facilitaron al usar la simulación hecha en GeoGebra.

La tecnología, la experimentación y la interacción entre estudiantes jugaron un papel importante en las tareas de aprendizaje matemático, sin restar importancia a la simplicidad de la experimentación ofreció a los estudiantes estar en interacción con una situación real. El compartir ideas de forma grupal sobre el tema a estudiar no sólo favoreció la comprensión de conceptos, sino también el proceso de la construcción de la hipótesis generada para resolver el problema otorgado, y además también influyó en el desarrollo del manejo del lenguaje matemático a través de símbolos, y en la utilización del software (Tracker) como herramienta de apoyo para la construcción del modelo físico.

La inclusión de la tecnología permitió confirmar y crear conocimientos nuevos en relación a las variables cinemáticas, la herramienta tecnológica (software) brindó a los estudiantes modelos visuales (gráficas) de la situación permitiendo comparar y reafirmar sus hipótesis realizadas. También dio la oportunidad de reformular conjeturas y crear nuevos modelos (hipótesis) gracias al análisis de datos cuantitativos, mismos que permitieron construir su modelo para solucionar la problemática propuesta. En resumen, se observó que los estudiantes pudieron transitar por los diferentes dominios de ciclo de Rodríguez (2010), los elementos o habilidades de modelación matemáticas que se observaron fueron: la identificación y explicación de la situación en términos físicos, emplear el lenguaje natural para establecer relaciones matemáticas para la construcción, formulación y solución del modelo matemático, interpretación de expresiones matemáticas y gráficas para la comparación y confrontación de la situación real con la solución encontrada.

Hasta el momento se ha dado respuesta a parte de la pregunta de investigación como algunos de los objetivos planteados en la misma, referente a los principios de la MR que emergieron al implementar las tareas de aprendizaje es importante tener en cuenta que la realización de problemas situacionales dentro del salón de clase, lleva sin lugar a duda al estudiante a crear actividades de modelización, a plantear y resolver problemas, a utilizar un leguaje simbólico matemático y a crear nuevos conocimientos. La idea de concebir la matemática como actividad humana se puede dar si se le brinda al estudiante la oportunidad de realizar exploraciones en contextos reales y en situaciones que sean parte de su realidad, y puedan realizar comparaciones con realidades análogas a la que se les está presentando.

De igual manera, el problema situacional lleva al estudiante a pasar por diferentes actividades de niveles, en una continua reflexión, hasta que llega no solo a la solución del problema, sino a la generalización y formalización matemática. Para llegar a la consolidación de los objetos mentales y conceptos, el alumno interactúa con sus compañeros y docente discutiendo el grado de eficacia de sus estrategias y cuestionando las alternativas e interrelacionando todos los contenidos matemáticos (cálculo, funciones, algebra…). Esto revela los principios de niveles, de reinvención guiada, de interacción y de interconexión. Se observa que los estudiantes comprenden que el utilizar matemáticas hasta cierto punto le va ayudar a resolver un problema de una situación real de la cual son participantes activos.

Como bien se menciona en los análisis anteriores, los alumnos participantes en el instrumento de recolección de datos de esta investigación, son capaces de reconocer algunas representaciones semióticas. También, en su mayoría, son capaces de realizar conversiones entre una y otra representación semiótica, sin embargo se observó que poseen poco dominio y conocimiento de su transformación.

La descripción del proceso de modelar propuesto como referencia en este trabajo se tiene que modificar con otras actividades en el contexto de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales para discutir en la comunidad de Matemática Educativa si entre las diferentes concepciones de modelación existentes sea una opción viable que deba ser llevada al ámbito escolar.

La riqueza de la retroalimentación de una tarea sobre otra para poder desarrollar una solución apropiada a cada pregunta planteada es un resultado que en este estudio no se pudo evidenciar. Lo anterior es una característica a tener en cuenta en el diseño de futuras actividades para el aprendizaje de la modelación.

Trabajar con una población muy singular no permite generalizar si los resultados de esta investigación son factibles dentro del campo de la modelación matemática, matemática realista y representaciones semióticas. Es por ello que habría que investigar en estudios futuros y con diferentes poblaciones estudiantiles la factibilidad de este estudio. Otra limitación a considerar en esta investigación es que los estudiantes no realizaron los análisis hechos en Tracker y la simulación del retroceso del pistón en GeoGebra por falta de tiempo cómo de conocimientos en los Softwares. Finalmente, la necesidad de capacitación para los profesores respecto a la enseñanza y aprendizaje de modelación se revela como un aspecto fundamental a ser considerado en un futuro.

Como sugerencias para futuras investigaciones que se pueden desprender de los resultados encontrados para el trabajo están:

1. En el trabajo con la modelación matemática y diseño de tareas se sugiere la elección de un problema atractivo y relevante para los alumnos. Además, debe cumplir con los requisitos de ser un reto para los alumnos pero a su vez que sea factible de ser respondido de acuerdo al nivel educativo en que se trabajará.

2. Para el trabajo con la modelación, es importante tomar en cuenta que el docente ha de tomar su papel de guía y orientador para evitar en lo posible dar a los alumnos respuestas correctas o ideas de resolución específicas. Sin embargo, también es importante no dejar solos completamente a los alumnos dado que requieren gran apoyo y soporte del docente.

3. Se recomienda altamente el trabajo colaborativo como una manera de apoyar a los estudiantes al enfrentarlos a diversos puntos de vista con sus compañeros. Así mismo, queda claro que el diseño de actividades específicas que lleven a los alumnos paso a paso por el ciclo de modelación ayudará a observar claramente el desarrollo de las habilidades de modelación que se presentan en los alumnos.

4. Sería interesante observar si habilidades de modelación matemática pudieran ser factibles de desarrollar en otros grados educativos y/o con otro contenido temático diferente a las aplicaciones con ecuaciones diferenciales.

5. Es importante considerar que el docente ha de tener en cuenta el propósito que persigue para el diseño de las actividades.

6. Las actividades han de ser factibles de resolver por los alumnos y deberán estar planteadas de manera clara y sencilla con instrucciones precisas para evitar confusiones de los alumnos si se pretende que trabajen con mayor autonomía.

7. También se sugiere considerar que la selección de las herramientas tecnológicas debe ser un trabajo cuidadoso en el que el docente ha de elegir aquellos recursos que den la información claramente al alumno y de acuerdo con las características de cada actividad.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acevedo, J. (2015) La modelación en las matemáticas avanzadas para la ingeniería. *Boletín Virtual,* 14-21. Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga.

Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 119- 127). Santander: SEIEM.

Álvarez, Q, D. (2007) Tratamiento didáctico dado a los teoremas fundamentales del cálculo: un análisis de texto. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional Colombia.

Aravena, D., & Caamaño, C. (2007). Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile. Estudios Pedagógicos XXXIII (2), 7-25.

Bassanezi, R., Biembengut, M. (1997). Modelación matemática: una antigua forma de investigación, un nuevo método de enseñanza. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 32, 13-25.

Blum, W., Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? Journal of Mathematical Modelling and Application, 1(1), 45-58.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 37-68.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H., & Niss, M. (Eds.). (2007). Modelling and aplications in mathematics education. The 14th ICMI Study. New York: Springer.

Borromeo, F. (2006). Teoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. ZDM - *International Journal on Mathematics Education,* 38(2), 86-95.

Camacho, M., Pedromo, J., Santos, M. (2012). Procesos Conceptuales y Cognitivos en la Introducción de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Vía la Resolución de Problemas. *Enseñanza de las Ciencias*, 9-32.

Camacho, A., Valenzuela, V., & Caldera, M. (2017). Modelización de una actividad de la física para mejorar la enseñanza del concepto de función. *Revista de Investigación Educativa de la REDIECH,* vol.8 no.15.

Campos Nava, M., & Rodríguez Torres, A. A. (2018). Diseño de Tareas de Aprendizaje Matemático con Geogebra: Mecanismos Articulado. *Boletín Científico del Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería Pädi, Publicación Semestral Pädi No.10*, 81-86.

Carmona-Miranda, K., Flores-García, S., Ruiz-Chávez, J. O., Salazar-Álvarez, M. C., & Chávez-Pierce, J. E. (2017). Ecuaciones diferenciales en un contexto físico. *Cultura Científica Y Tecnológica*, 37, 40-50.

Cervantes L. (2015) Modelación matemática principios y aplicaciones. Textos Científicos, Fomento Editorial de la Benemérita, Universidad Autonoma de Puebla, 1-10.

Creswell, J. W., (2003). Research Design. Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches. Editorial Sage, 2a Ed.

De las Fuentes, Arcos, J., Navarro, C,. (2010). Impacto en las Competencias Matemáticas de los Estudiantes de Ecuaciones Diferenciales a Partir de una Estrategia Didáctica que Incorpora la Calculadora. *Formación Universitaria*, 33-44.

Diéguez, R., García, F., Server, P., Álvarez, I. (2003). Aplicación del enfoque holístico al estudio del proceso de solución de problemas matemáticos contextualizados en la matemática básica para la carrera de agronomía. *Revista Iberoamericana de Educación*.

Dullius, M. M. (2009). Enseñanza y aprendizaje en ED con abordaje gráfico, numérico y analítico. Burgos, España: Tesis Doctoral.

Duval, R, (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones en Matemática Educativa II, 173-201.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la RSME*, 143-168.

Freudenthall, H. (1991). Revisiting Mathematics Education. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Gatica, N., Ares, E. (2012). La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. *Revista de Educación Mediática y TIC,*, 88-107.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A Joint Perspective on the Idea of Representation in Learning and Doing Math. Teories of Mathematical Learning, 397-430.

Gómez, J. L. (2000). Nuevos Acercamientos a la Historia de la Matemática a través de la Calculadora TI-92. Granada.

Guzmán Roldan, C. M. (2021). Modelo didáctico para el desarrollo de competencias en ecuaciones diferenciales en estudiantes de Ingeniería en una universidad pública de Lambayeque. Tesis Doctoral

Gruszycki, A., Oteiza, L., Maras, P., Gruszycki, L. & Ballés, H. (2014). GeoGebra y los sistemas de representación semióticos. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 27, 2169-2176.

Henry , M. (2001). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. IREM, Université de Franche-Comté, 149-159.

Hernández, C. A., Jaimes, L. A., Chaves, R. F., (2016). Modelos de aplicación de ecuaciones diferenciales de primer orden con geogebra: actividades para resolver problemas de mezclas. *Mundo Fesc*, 7-15.

Heuvel-Panhuizen, M. (2002). Realistic mathematics education as work in progress. Common sense in mathematics education, 1-43.

Kaiser, G., Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 302-310.

Korsunsky, B. (2002) Improper Use of Physics-Related Context in High School Mathematics Problems: Implications for Learning and Teaching. School Science and Mathematics, 107-113.

Lea, O. L. (2016). TIC en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales de primer orden. *Revista LOGOS CIENCIA & TECNOLOGÍA*, 89-100.

Mayer, R. (1986). Tinking, Problem Solving, Cognition. Barcelona: (Trad. Graziella Baravella). (1a ed.). Barcelona: Ediciones Paidos. (Original publicado en 1983).

Nápoles, J.; González, A.; Genes F.; Basabilbaso, F.; Brundo J. (2004). El Enfoque Histórico Problémico en la Enseñanza de la Matemática para Ciencias Técnicas: El Caso de las Ecuaciones Diferenciales Odinarias. *Revista Acta Scientae*, 41 - 59.

Oviedo, L., Kanashiro, A. (2012). Los registros semióticos de representación matemática. *Revista Aula Universitaria*, núm. 13. pp. 29- 36.

Plaza, L. F. (2018). Modelación matemática por ecuaciones diferenciales. Caso: Ley de Enfriamiento de Newton. *IV Encuentro Internacional de Investigación en Educación Matemática*. pp. 501- 507.

Pollak, H. (1969). How can we teach applications of Mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, 2(2), 393-404.

Reid, M., Gareis, M., Hernández, A., Roldán, M. (2012). Funciones con modelización matemática. *Revista Didáctica de las Matemáticas*, vol. 81, pp. 91- 101.

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 191-210.

Rodríguez, R., Quiroz, S. (2016). El Papel de la Tecnología en el Proceso de Modelación Matemática para la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 99-124.

Romo, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. *Revista Educación Matemática.* S.E., 314-338.

Sampieri Hernández, R., Collado Fernández, C. y Lucio Baptista, P. (2003). Metodología de la investigación. México:McGraw-Hill Interamericana.

Santos, M., Moreno, L. & Camacho, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. ZDM 48 (6), p. 828.

Siller, H.-St. (2011). Modelling and Technology – Modelling in mathematics education meets new challenges. In O'Donoghue, J.; Maaß, J. (Hrsg.): Real World Problems for Secondary School Students – Case studies. Rotterdam: Sense-Publisher.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. In Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 521-525). Springer Netherlands.

Vergel, M., Martínez, J., Zafra, S. (2015). APPS en el rendimiento académico y auto concepto de estudiantes de ingeniería. *Logos Ciencia & Tecnología*, 198-208.

Villa, J. A. (2007). La Modelación como Proceso en el Aula de Matemáticas: Un Marco de Referencia y un Ejemplo. *Revista TecnoLógicas* núm. 19, pp. 63-85.

Villarreal, M. E. (2003). Pensamiento matemático, cálculo diferencial. *Educacion Matematica*, 99-122.

Zolkower, B.; Bressan, A., Gallego, F. (2006). La corriente realista de didáctica de la matemática. Experiencias de un grupo de docentes y capacitadores. *Revista de Educación Matemática de la UNL, 6*, pp. 11-30.

Zolkower, B., Bressan, A., Gallego, F. & Pérez, S. (2016). Educación Matemática Realista. Bases Teóricas.

7. ANEXOS

7.1 ANEXO 1

“Actividad Introductoria”

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo Área Académica de Matemáticas y Física
Estudiantes de la Maestría en Ciencia de las Matemáticas y su Didáctica

---

OBJETIVO

La siguiente tarea de aprendizaje tiene como objetivo obtener información acerca de las prácticas que se llevan a cabo dentro de su contexto y como estas van a aportar a la creación de ambientes matemáticos. Su carácter es **confidencial y anónimo**, la información recabada se utilizara para fines académicos exclusivamente.

El movimiento es uno de los fenómenos físicos más evidentes, al ser fácilmente observable. Su estudio nos permite entender la circulación de objetos. La Cinemática es la parte de la Física que estudia el movimiento de los cuerpos, denominados, en sentido general, como partículas. Así, se puede definir la ‘partícula’ como todo cuerpo que posee una posición, sin considerar sus dimensiones. En otras palabras, el movimiento del cuerpo tiene mucha más importancia que sus dimensiones, para estar en contexto de lo antes mencionado observa y analiza el siguiente el vídeo.
https://www.youtube.com/watch?v=DHqWsTF99AQ

Instrucciones

Responde a las preguntas que aparecen a continuación y realiza las actividades que se te indican.

1. ¿Cuáles son las variables cinemáticas que son de interés estudiar cuando se está interesado en el movimiento de una partícula?

2. ¿Qué entiendes por posición de una partícula?

3. ¿Explica verbalmente y simbólicamente la velocidad como una razón de cambio en función de la posición?

4. En la expresión matemáticamente que propones con respecto a la velocidad ¿Identifica la variable dependiente e independiente?

5. ¿Explica verbalmente y simbólicamente la aceleración como una razón de cambio en función de la velocidad?

6. En la expresión matemáticamente que propones con respecto a la aceleración ¿Identifica la variable dependiente e independiente?

Analiza el siguiente caso particular de movimiento: En la imagen 1 se puede observar el salto de paracaídas de dos personas realizado en el Estado de Morelos, México cerca del lago de Tequesquitengo, considerando que el salto es un descenso vertical, suponiendo que las dos personas juntas se consideran como una partícula y tienen aceleración constante y eliminando la oposición que ocasiona el aire en el salto, contesta la siguientes preguntas:

Imagen 1 Salto de Paracaídas

7. Realiza una representación gráfica que describa la aceleración constante de la partícula en función del tiempo.

8. ¿Cómo debe de ser la función que describa la velocidad de un objeto, teniendo en cuenta que al derivarla se obtenga una aceleración constante? (puede ser en forma verbal o con una expresión matemática)

9. ¿Cómo debe de ser la función que describa la posición de un objeto, teniendo en cuenta que se mueve con aceleración constante?
(Puede ser en forma verbal o con una expresión matemática)

Las siguientes preguntas se contestan realizando una lluvia de ideas grupales:

10. Determina la velocidad de la partícula en cualquier instante con la respuesta dada en la pregunta 4.

11. La función coincide con la predicción que realizaste en la pregunta 8

12. Determina la posición del objeto con la respuesta dada en la pregunta 3

13. La función coincide con la predicción hecha en la pregunta 9.

7.2 ANEXO 2

”Tarea Experimental”

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo Área Académica de Matemáticas y Física
Estudiantes de la Maestría en Ciencia de las Matemáticas y su Didáctica

---

Nombre del estudiante: ____

INSTRUCCIONES

Antes de iniciar la tarea experimental contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Qué es lo que hace que un cuerpo caiga si no es sostenido por algo?
2. Cuando un cuerpo está cayendo ¿De qué depende el tiempo que tarda en llegar al piso?
3. ¿Cuáles son las características de la velocidad y aceleración en el movimiento rectilíneo uniforme (MRU)?
4. ¿Cuáles son las características de la velocidad y aceleración en el movimiento rectilíneo uniforme acelerado MRUA?
5. Cuando se deja caer algo desde el reposo ¿Cuánto vale la velocidad inicial y su aceleración?

FASE 1: Experimentación

Esta fase se realiza en equipos de tres o cuatro integrantes, los elementos para la experimentación son los siguientes: Una probeta de 100 ml, 200 ml de glicerina, un flexómetro o cinta métrica, canicas de colores intensos lisas, celular para tomar un vídeo y soporte de celular o tripie. La práctica consiste en realizar cuatro experimentos la descripción de cada uno de ellos es la siguiente:

a) El primer experimento consiste en llenar la probeta hasta los 100ml con la glicerina, elige un lugar donde el color del fondo pueda contrastar con el de la probeta, la glicerina y la canica, se deja caer la canica en caída libre a una altura de 25 cm sobre la altura de la probeta, coloca las marcas de la altura. Es importante que la caída dentro de la probeta sea lo más limpia posible, es decir, que cuando la canica entre a la probeta lo haga sin chocar con la superficie de la misma. Una vez teniendo listo lo antes mencionado se coloca el celular en el soporte o tripie y se realizan pruebas de vídeo de tal manera que se pueda visualizar en todo momento la caída libre de la canica fuera de la probeta y el movimiento dentro de la probeta, finalmente se guarda el vídeo que cumpla con las características antes mencionadas.

b) En el segundo experimento se reproducen las indicaciones anteriores con la diferencia que se deja caer la canica en caída libre a una altura de 45 cm sobre la altura de la probeta.

c) En el tercer experimento se reproducen las indicaciones del primer experimento con la diferencia que se deja caer la canica en caída libre a una altura de 65 cm sobre la altura de la probeta.

d) En el cuarto experimento se reproducen las indicaciones del primer experimento con la diferencia que se deja caer la canica en caída libre a una altura de 100 cm sobre la altura de la probeta.

FASE 2: Formulación de Hipótesis de Movimiento

Observando y analizando los vídeos realizados las veces que sea necesario, formula una hipótesis con respecto a los movimientos (MRU o MRUA) de la canica fuera y dentro de la probeta.

HIPÓTESIS

FASE 3: Análisis de los vídeos.

A partir de los vídeos y con el uso de Tracker realiza un análisis de las variables: posición, velocidad y aceleración en función del tiempo y responde cada una de las siguientes preguntas:

Análisis del movimiento fuera de la probeta

1. ¿Qué tipo función describe las gráficas de la posición contra el tiempo en los 4 casos analizados?

2. ¿Qué tipo función describe las gráficas de la velocidad contra el tiempo en los 4 casos analizados?

3. ¿Qué tipo función describe las gráficas de la aceleración contra el tiempo en los 4 casos analizados?

4. Observando y analizando la caída libre de la canica fuera de la glicerina cuales de las siguientes afirmaciones son correctas:

I) La velocidad es proporcional al tiempo
II) La aceleración es variable.
III) La posición es proporcional al cuadrado del tiempo.
IV) La aceleración es constante.
V) La velocidad es proporcional al cuadrado del tiempo.

Reformula la hipótesis planteada inicialmente de ser necesario:

Análisis del movimiento dentro de la probeta

5. Que efecto realiza la glicerina sobre la velocidad de la canica.

6. Cuando un cuerpo reduce su velocidad, explica que le pasa a su aceleración

7. En cuál de los casos se desacelera más rápido la canica una vez que entró a la glicerina

8. En cuál de los casos se desacelera más lento la canica una vez que entró a la glicerina.

Con la ayuda de tracker realiza el llenado de la siguiente tabla; analizando tiempo, posición, velocidad y aceleración.

Altura de la caída libre	Tiempo (s)	Posición (m)	Velocidad (m/s)	Aceleración (m/s^2)

Reformula la hipótesis planteada inicialmente de ser necesario:

FASE4: Formulación de hipótesis de modelado

Analizando y discutiendo el movimiento de la canica formula una hipótesis en relación a la velocidad y la aceleración de la misma en el intervalo de tiempo que atraviesa la glicerina.

7.3 ANEXO 3

”Tarea de Modelado”

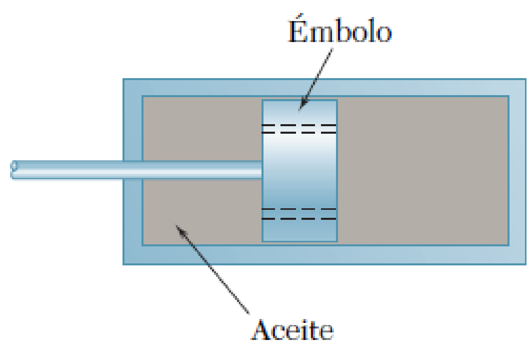
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo Área Académica de Matemáticas y Física
Estudiantes de la Maestría en Ciencia de las Matemáticas y su Didáctica

---

Nombre del estudiante: ____

ACTIVIDAD DE MODELADO

Problema del pistón en retroceso: Para frenar el retroceso de un cañón al ser disparado, se ha diseñado un mecanismo que opera de la siguiente forma: Un émbolo tipo pistón se une al cañón, y este se mueve dentro de un cilindro con aceite, el émbolo tiene orificios por los que se fuerza el paso del aceite de una parte a la otra de la cámara del pistón. Cuando el cañón retrocede a una velocidad inicial v_0, por efecto del mecanismo descrito, este sufre una desaceleración proporcional a su propia velocidad, es decir: $a = -kv$.



a) Encuentre la velocidad del retroceso en términos del tiempo.

b) Encuentre la posición del retroceso en términos del tiempo.

c) Realice las gráficas cinemáticas correspondientes a la velocidad y posición en GeoGebra.

7.4 TRANSCRIPCISIÓN DE LA SESIÓN INTRODUCTORA

DOCENTE: Vamos a iniciar, ahora si por favor denle vuelta a las hojas que les compartí, como bien les mencionaba estas actividades siguientes son actividades meramente didácticas les pido de su apoyo para poderlas llevar a cabo de acuerdo, entonces en primera instancia coloquen su nombre y lo vamos ir realizando poco a poco vale, no se adelanten si tienen alguna duda levantan la mano, si tienen un punto de vista igual levantan la mano para hacer participación de ideas y demás, me ayudas C con el inicio de la actividad por favor.
ALUMNO C: Dice, actividad introductoria (Lee lo que está al inicio de la hoja) El movimiento es uno de los fenómenos físicos más evidentes, al ser fácilmente observable en un sistema macroscópico. Su estudio nos permite entender la circulación de objetos. La Cinemática es la parte de la Física que estudia el movimiento de los cuerpos, denominados, en sentido general, como partículas. Denominemos partícula como todo cuerpo que posee una posición, sin considerar características geométricas y físicas como la forma, las dimensiones o la masa, restringiendo el estudio de los objetos en movimientos a la consideración de estos como puntos inmateriales. En otras palabras, el movimiento del cuerpo tiene mucha más importancia que sus dimensiones, para estar en contexto de lo antes mencionado observa y analiza el siguiente el vídeo.
DOCENTE: Ok gracias C, bueno vamos a ver el siguiente vídeo, tengo un par de vídeos justamente para darnos un preámbulo a lo que vamos estar realizando y en este primer vídeo pues nos hace mención de esas variables cinemáticas yo creo que nos da varios ejemplos que podemos ver en nuestra vida cotidiana, entonces este sería el primero pues vamos a observarlo. (Se reproduce el primer vídeo)
DOCENTE: Listo, pues bueno ahí este primer vídeo, el segundo lo vamos a ver terminado esta primer serie para que ustedes puedan realizar ciertas comparaciones, en este primer vídeo como parte introductoria y de lo que nos mencionó C, vamos estar inmersos en la Cinemática y en las variables que le es de interés de acuerdo.
Después de analizado el vídeo bueno observado, alguna duda o alguna pregunta referente al mismo.
ALUMNOS: No
DOCENTE: Creo que relativamente me parece bueno hay varios ejemplos que puedes ser observables dentro de, más que nada la explicación de esas variables cinemáticas dentro de un contexto físico, creo que explica bien cada una de ellas. A continuación viene estas preguntas las vamos ir resolviendo todos en conjunto hay un tiempo entre cada una de ellas, iniciemos calentando motores y demás, número uno ¿Cuáles son las variables cinemáticas que son de interés estudiar cuando se está interesado en el movimiento de una partícula? Y aquí cuidado he, no se me vayan a ir con una partícula y su mundo nanotecnológico aguas no quiero confundirlos, porque arriba hacía mención a que le voy a llamar partícula de acuerdo, no ha esa partícula y al otro concepto con el que están familiarizados, no se vayan a confundir por eso arriba (Se refiere al texto introductorio de la actividad) de todas maneras lo vuelvo a mencionar "Denominemos partícula como todo cuerpo que posee una posición, sin considerar características geométricas y físicas como la forma, las dimensiones o la masa, nos vamos a restringiendo simplemente al estudio del objetos en movimiento" a eso aquí le llamo partícula, como un punto puntual, bueno chicos póngale ahí ¿Cuáles son las variables cinemáticas que son de interés estudiar cuando se está interesado en el movimiento de una partícula?
ALUMNO X: La velocidad
DOCENTE: Ya pusieron por acá
ALUMNOS: Desplazamiento
DOCENTE: Desplazamiento
ALUMNO X: El tiempo
DOCENTE: Entonces todas esas de ahí váyanselas poniendo de acuerdo.
ALUMNO C: Inclusive yo tome en cuenta el sistema de referencia, porque se tiene que tomar en cuenta para cuando hay un desplazamiento.
DOCENTE: Entonces las variables cinemáticas que ustedes consideren son las que se van a colocar. Y segundo un poquito ahí con sus ideas y sus palabras ¿Qué entiendes por posición de una partícula?, ahí cada quién (Se da tiempo al alumno para responder a la pregunta) Ustedes me indican cuando ya podemos pasar a la siguiente, listo podemos pasar a la siguiente.
La siguiente si bien como les mencione ahí en el vídeo nos dieron como ciertas características importantes de estas variables cinemáticas y como bien me lo mencionaron, la pregunta número dos tiene que ver con una de ellas; la parte de la posición, la número tres otra variable importante tiene que ver con la velocidad. Si bien

ahí en el vídeo hicieron mención o dieron varios ejemplos de lo que tenemos que entender por velocidad, pero en ese entendimiento de velocidad aquí en esta pregunta (Se refiere a la pregunta número tres) ¿Cómo expresas la velocidad de una partícula? La pueden expresar de forma verbal, es decir, con palabras o pueden utilizar la parte de símbolos, pero aquí a esta parte me refiero que tenemos que hacer una pequeña adaptación para que pueda ir acorde a todo lo que hemos estado analizando en el curso no, nos enfocamos inicialmente a entender el objeto de

ALUMNOS: Derivada

DOCENTE: De derivada, desde ciertos puntos de vista, lo que tiene que ver con esta pregunta número tres y la número cinco es ¿Cómo pueden expresar a la velocidad de una partícula? Pero con el uso de este objeto matemático, la derivada, de acuerdo, porque discutíamos que cuando algo cambia con respecto a una variable y queremos saber algo en un instante para eso nos puede ayudar la derivada ¿Cómo expresas la velocidad de una partícula? Ha eso hago referencia aunque ahí no lo dice, entonces como lo podían expresar con la ayuda de la derivada, de acuerdo.

Y en función de cómo hayan expresado la velocidad que puede tomar un cierto objeto, aquí le denominamos partícula, pues en consecuencia viene la pregunta número cuatro, si propusieron algo en una expresión en este contexto matemático para la velocidad, es porque tuvo que haber un cambio entre dos variables y entonces de esas dos variables que ustedes manejaron, primero identificar no, ¿Cuáles fueron son variables?

ALUMNO C: Distancia y tiempo

DOCENTE: Algo así no y entonces de esas ¿Cuál es la variable que tomaría el valor de la variable dependiente? Que hemos estado viendo ese tipo de cosas y ¿Cuál variable tomaría el papel de la variable independiente? Vale.

Y en esa misma línea que estamos moldeando las variables cinemáticas en este contexto matemático, viene la número cinco, en el vídeo fue claro en que debemos de entender en esta cuestión de aceleración, la cinco nuevamente es ¿Cómo expresas la aceleración de una partícula? Pero igual empleando este concepto de derivada y la seis va en consecuencia de lo mismo pero en cuestión de ver la aceleración. (Prepara el siguiente vídeo y escribe cosas en el pizarrón)

ALUMNO M: Maestra con respecto a lo de variable dependiente lo puedo abreviar como ve punto de y ve punto i.

DOCENTE: Ha ok, si claro (Observa lo que está escrito). Esperamos un poco a que terminen sus demás compañeros. Y les digo este vídeo nos va ayudar un poquito, para que más o menos dimensionen lo que colocaron para que posteriormente nos pongamos de acuerdo y pasemos a la siguiente actividad.

Listo creo que ya todos terminaron y vamos cerrar con este vídeo de igual forma nos da una explicación de estas variables cinemáticas que serían velocidad, aceleración y posición, bueno aquí también hace cierta comparación entre desplazamiento y distancia que comúnmente son cosas que se confunden, sienten que es lo mismo, algunas que tienen que ver con matemáticas y esto de la derivada. (Se reproduce el vídeo número dos).

Ok entonces esta parte de aquí nos va ayudar un poquito en establecer lo siguiente de la actividad, algo importante a diferencia del vídeo pasado es que dan una definición de velocidad en un contexto matemático, pero respetando la cuestión física no, y a parte trata la velocidad en dos tipos, que era lo que discutíamos al inicio del curso, que hay velocidad promedio y velocidad instantánea, de acuerdo, entonces al ser una velocidad instantánea de ahí esa cuestión de utilizar límite cuando nuestro intervalo de tiempo se aproxima a cero. Recuerden que cuando se analiza un promedio hay información muy vaga, porque solo se analizan dados.

ALUMNOS: Iniciales y finales

DOCENTE: Exacto y lo que hubo entre ellas quien sabe que paso, y si se quiere hacer un mejor análisis mejor me pregunto en cada instante como se está comportando el objeto o la partícula. De ahí nos vamos a poner de acuerdo en cuestión de simbología porque la siguiente parte tiene que ver con las gráficas y el análisis de un caso muy particular. Entonces para la posición vamos a utilizar la variable x "*x(t)*" para la velocidad sin ningún problema la u ve *"v(t)"*y para la aceleración la a *"a(t)"* (Señala lo escrito en el pizarrón), en esta cuestión de estar manejando el límite cuando delta t tiende a cero lo podemos hacer más práctico no simbólicamente, estamos de acuerdo que matemáticamente se entiende que la velocidad es.

ALUMNOS: La diferencial de x con respecto al diferencial del tiempo.

DOCENTE: Es decir nos vamos a quedar con esa variación de cómo cambia la posición con respecto al tiempo, ¿Qué es la aceleración? La vamos a representar con *"a(t)"* y la podemos expresar como que.

ALUMNOS: La deferencial de la velocidad con respecto al diferencial del tiempo.

DOCENTE: Si se dan cuentan estas son las tres variables Cinemáticas que importan, pero las tres están en función del tiempo, tanto la posición, como la velocidad y como la aceleración.
La siguiente sección se analizara un caso muy particular de movimiento, eso ya no lo pudieron observar porque se quedó en la primera hoja, pero se va a quedar aquí para que lo puedan observar (Se muestra el caso en la pantalla de televisión) lo leo en voz alta “En la imagen 1 se puede observar el salto de paracaídas de dos personas realizado en el Estado de Morelos, México cerca del lago de Tequesquitengo, considerando que el salto es un descenso vertical, suponiendo que las dos personas juntas se consideran como una partícula y tiene aceleración constante y eliminando la oposición que ocasiona el aire en el salto, contesta la siguientes preguntas” Alguna duda o pregunta con la información de aquí.
ALUMNOS: No.
DOCENTE: Ahora si trabajando la hoja número dos voy hacer un pequeño cambio en la redacción de la pregunta número siete, porque siento que no fui muy clara o específica, reescribimos la numero siete por fa, se las dicto para que la puedan escribir, la pueden escribir en la parte de a tras porque van a graficar y necesitan un poco más de espacio “Tomando en cuenta que en caída libre se conoce el comportamiento de la aceleración ¿Puedes hacer una predicción de cómo se verían las gráficas de velocidad y la posición?” Y como creen ustedes que se verían gráficamente esas dos variables dado que en caída libre se conoce la aceleración.
ALUMNO X: Las graficamos
DOCENTE: Si las grafican ahí atrás y le colocan esta sería la gráfica de velocidad versus tiempo y esta sería la gráfica de posición versus tiempo.
ALUMNO X: Hacemos las tres, velocidad aceleración y posición.
DOCENTE: Las dos la de velocidad y posición, aquí lo importante es que en caída libre se conoce como se comporta la aceleración e igual de manera análoga como se comportaría la velocidad y la posición. Ustedes propongan ese cierto comportamiento de todas maneras ahorita vamos a ver (Propone una gráfica para ejemplificar lo que se solicita). Y Bueno tienen información importante acerca de la velocidad y por consecuencia información acerca de la posición (Enfatiza las expresiones escritas de aceleración y velocidad en el contexto matemático, es decir, $a = \frac{dv}{dt}$ y $v = \frac{dx}{dt}$).
Esas son sus predicciones, entonces en base a esto viene la siguiente pregunta la número ocho. Elige la representación gráfica que describa la aceleración de la partícula antes de que se abra el paracaídas. Explica tu elección, es decir de esas cuatro gráficas que propongo aceleración versus tiempo, ¿Cuál describe ese instante de la caída libre antes de abrir el paracaídas, simplemente seleccionan la que ustedes consideren y en base a eso explican el porqué de su elección del inciso (Menciona los incisos propuestos en la actividad).
ALUMNO M: Maestra este es el a y este el b.
DOCENTE: Ha perdón se movió un poco, pero es inciso a, esta es la b, esta es la c y la d de acuerdo (Le señala al alumno el orden correcto de los incisos), si quieres encierra. Creo que ahí en la impresión se movió un poquito, pero hago la aclaración en los incisos que es lo que menciono Marco (Se señala en la pantalla de la televisión el orden correcto para todos los alumnos) y su explicación tiene que ver un poco con lo que hemos estado viendo.
De manera muy análoga es para la pregunta nueve, si ustedes ya decidieron algo para la aceleración, creo que si observan la gráfica de la aceleración y analizan esto que estamos viendo en relación a las derivadas y de lo que tuvo que haber estado antes, porque al final del día la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, entonces si yo escogí una gráfica de representa la aceleración me puedo imaginar cómo fue la función que tuvo que haber estado antes y esa función representa la velocidad, de igual manera de las cuatro opciones que les estoy dando en la numero nueve, ¿Cómo tuvo que haberse comportado la velocidad? Para que yo tuviera una aceleración, que.
ALUMNOS: Constante.
DOCENTE: En esos instantes que dura la caída libre, hay cuatro opciones hay que circular la gráfica que ustedes consideren que va a representar la velocidad teniendo en cuenta ese dato muy importante que la aceleración es constante y den su explicación con lo que entienden por velocidad.
Y de manera muy análoga en lo que están haciendo su explicación va la pregunta número diez, va igual, para ser una aceleración constante la gráfica se representa así, lo que estuvo antes fue la velocidad, la velocidad se tuvo que haber comportado de esta manera que es la nueve (Se refiere al número de preguntas) y la numero diez es en consecuencia, porque la velocidad es la variación de la posición conforme va pasando el tiempo, entonces de manera muy análoga ¿Cómo se tuvo que haber comportado la posición? Para que a la hora que la derive me de esa gráfica que elegí yo que representa la velocidad. Esto que acabo de explicar es para la siguiente pregunta que es la número 10, cuál de esas opciones que les estoy dando consideran que representa

la posición conforme va pasando el tiempo, en el instante que duro la caída libre. Cuando terminen colocan la hoja número boca abajo.
SE CORTA EL VÍDEO SE GRABA CON OTRO TELEFONO Y SE HACE UNA RETROALIMENTACIÓN DE LO QUE SE HABÍA ANALIZADO.

DOCENTE: Listo, como les decía me había hecho preguntas para que igual quede grabado que si todo esto de aquí es en base a que durante el salto antes de que se habrá el paracaídas (señala pantalla de televisión) se sabe que la aceleración fue constante, entonces si fue constante fue para retomar un poquito lo visto hace un momento, ¿Cuál de esas cuatro gráficas representa ese comportamiento? Que en caída libre la aceleración haya sido constante, y si fue constante, ¡¡ha no se!! Si me dice esto representa que la aceleración es constante, ósea que conforme fue pasando el tiempo la aceleración no cambia, ¿Si están de acuerdo?
ALUMNOS: Si
DOCENTE: Si me dicen que es esta (Señala una opción en la pantalla), ha entonces esta hasta cierto punto tiene un comportamiento parabólico, pero ya para cerrar esta sección ¿Cuál de las cuatro representa una aceleración constante?
ALUMNOS: La C
DOCENTE: Circulan la respuesta, y conforme vaya pasando el tiempo la aceleración sigue siempre siendo la misma ¿Cuál fue la aceleración que experimento de manera muy particular el salto?,
ALUMNOS: ¿Qué aceleración?
DOCENTE: ¿Cuál es ese dato?
ALUMNOS: Puede ser la gravedad
DOCENTE: Pues esa no, aquí hay como más información y aquí justamente iría ese dato vale, entonces hasta ahí lo que hayan puesto y ya no hay cambios va, nada más para ir reafirmando las ideas, si tuve una aceleración constante ¿Que paso con la velocidad conforme iba pasando el tiempo?
ALUMNOS: *Va variando (Señalan una recta con inclinación) y aumentando.
DOCENTE: Fue aumentando, pero ¿De qué tipo? entonces si fue aumentando ¿Cuál de las tres es? Porque aquí las tres aumentan no.
ALUMNOS: En la esquina (Corrigen al docente y le dicen 4 en voz baja)
DOCENTE: Son cuatro cierto perdón, está (Señala la pantalla) por qué es lo que tuvo que haber sido, entonces esto ustedes ya lo pusieron, entonces fue aumentando con forme fue pasando el tiempo fue aumentando la velocidad y la posición también tuvo que ir cambiando ahí ustedes ya colocaron su explicación y demás, y entonces ¿Cuál de las cuatro representa que la posición fue cambiando?
ALUMNOS: *La a, *La de la esquina
DOCENTE: ¿Esta? (Señala la pantalla)
ALUMNOS: Sí
DOCENTE: Esta de aquí (Señala la pantalla)
ALUMNO: La c, Yo digo que la a
DOCENTE: Esta de aquí tiene un tiempo "t" igual a cero estuvo a cierta altura fue pasando el tiempo y la posición fue bajando, entonces acá creo que queda totalmente descartada no, entonces en la parte de la explicación habría un poco de diferencia
ALUMNO: Es que por ejemplo yo consideraría C porque considere como el sistema de referencia el avión, entonces si …….
DOCENTE: Perfecto entonces ahí cada quien en su explicación me daré cuenta el porqué de su elección y creo que algo muy importante que marca y depende de cómo hayan tomado su sistema de referencia de acuerdo, y como lo hayan hecho y por eso elegí la B, entonces les digo vale depende de su sistema de referencia, continuamos la dos ya está. Y vamos a la última parte de la actividad que tiene que ver con todo este contexto, pero pues lo vamos a tratar más en un contexto matemático de acuerdo.
Las siguientes preguntas si nos vamos a dar una idea, pero al final del día lo van a ir ustedes terminado, si consideraran que este espacio es muy muy chico y aquí vamos a ver porque ustedes hicieron ciertas predicciones de esas graficas de velocidad y de ¿Cómo se llama?
ALUMNOS: De posición
DOCENTE: De posición, vamos a ver si se cumplen, pero vamos a darle un tratamiento un poquito matemático simbólico de acuerdo, dice:
"Determina la velocidad de la partícula en cualquier instante con la respuesta dada en la pregunta número cuatro, bueno esas respuestas tienen que ver justamente con esto que yo mencionaba acá (señala el pizarrón), si ustedes dieron respuesta referente a la velocidad, y dieron respuestas referente a la aceleración y posición

de acuerdo, que dato importante tenemos que de todo esto que estamos analizando de la caída libre tenemos un dato súper fiable, que en caída libre lo que se sabe es ¿Que la aceleración es qué? (Escribe en el pizarrón)
ALUMNOS: Constante
DOCENTE: Es constante, le voy a poner "cte" es constante no cambia pero tu aparte sabes de algo que lo relaciona están de acuerdo, díganme esa igualdad donde yo sé que la aceleración es como cambia la velocidad conforme va pasando el tiempo, creen que puedan contestar justamente esa pregunta número once partiendo de aquí (Señala en el pizarrón la expresión escrita) esta igualdad al final del día aunque no lo vean es una de las ecuaciones diferenciales más sencillitas no, de las que hemos visto si estamos de acuerdo, partiendo de aquí justamente (Señala en el pizarrón lo escrito) de que se sabe para la pregunta número once, que nosotros sabemos que la aceleración es la variación de la velocidad conforme va pasando el tiempo (Escribe la expresión en el pizarrón) y que la aceleración es constante, ¿Creen que pueda sacar o podemos determinar la velocidad? a partir de ahí ¿Qué hacemos? que tendríamos que hacer para poder calcular la velocidad justamente de esto que se tiene aquí (Señala la expresión)
ALUMNOS: Despejarla la... la, la despejar la velocidad
DOCENTE: Ok despejando, ¿Cómo la despejamos?
ALUMNOS: Pasaría multiplicando
DOCENTE: Tendríamos que la aceleración sería multiplicada por el diferencial del t "dt" y esto sería igual al diferencial de la velocidad "dv" (Escribe en el pizarrón) ¿Qué más?
ALUMNOS: ¿Queremos sacar solo velocidad verdad?
DOCENTE: Quiero este una expresión, es decir una función que me digan con esto calculo la velocidad.
ALUMNOS: ¿Se puede integrar no?
DOCENTE: Se podía qué...
ALUMNOS: Integrar
DOCENTE: Ok entonces si lo integramos en esta parte de aquí en esta parte de acá (Escribe el símbolo de integración de cada lado de la igualdad)
ALUMOS: Si la aceleración es constante es cero
DOCENTE: Halla que (Debate entre compañeros)
ALUMNOS: No se puede sacar la aceleración y la derives y te de cero (Debate de ideas con otro compañero)
DOCENTE: Lo dicen para todos
ALUMNOS: No nada nada nada
DOCENTE: ¿Por qué?
ALUMNOS:
ALUMNA: Lo tomo como si fueran 2 ¿Cómo?
ALUMNO: Dos literales distintas, como si fueran como x sobre x se eliminan entre sí, antes de integrar
DOCENTE: Ha ya no (Escribe en el pizarrón la idea del alumno) que la d en la parte superior se elimina con la d que está en la parte inferior $\frac{dv}{dt}$.
¿Por qué tenemos que acudir a la integración?
ALUMNOS: Es que, para poder eliminar las derivadas
DOCENTE: Por la derivada no, porque tengo que ver que función estuvo antes que a la hora de derivarlo me diera algo de tipo constante, ¿Qué tuvo que haber estado algo antes para que al derivarlo sea constante?,
ALUMNOS: Una función, una derivada
DOCENTE: Aja pero ¿Qué tipo de función?
ALUMNOS: Una razón de cambio (Participación de un alumno)
DOCENTE: Tuvo que haber estado antes para que cuando lo derives te dé como resultado una constante, si quieren den ejemplos, ósea por ejemplo, yo sé que aquí que la constante es la gravedad, ¿Cuánto es?
ALUMNO: Nueve punto ocho
DOCENTE: Que tuvo que haber estado antes para que cuando la deriven me de nueve punto ocho
ALUMNOS: Nueve punto ocho equis (9.8x)
DOCENTE: Equis o en esta cuestión t, algo así, si están de acuerdo, vamos a ver si eso coincide, como estamos haciendo uso de lo que tuvo que haber estado antes de derivar es la antiderivada ¿Quién es la antiderivada?
ALUMNOS: La integral
DOCENTE: Vamos a considerar ciertos intervalos de integración esto para no mandarlo a una integral ¿Cómo se llama?
ALUMNOS: Indefinida

DOCENTE: Integral indefinida, esos intervalos de integración tienes que ser en la parte del tiempo iniciemos en cierto tiempo inicial "t_o" hasta un tiempo t y los intervalos de este parte de integración ¿Cuáles serían? (Escribe en el pizarrón?
ALUMNOS: Desde una velocidad inicial "v_o" hasta una velocidad "v"
DOCENTE: Ok, resultados (Escribe en el pizarrón lo mencionado por los alumnos), vayan poniéndolo, ya le avanzamos muchísimo no, todo eso va en la parte de la respuesta número once (Señala donde colocar la respuesta) Si el espacio es muy pequeño sin problema pueden utilizar el espacio de atrás de la hoja para poder resolver esta cuestión número once.
TIEMPO PARA LA SOLUCIÓN DE LA INTEGRAL
ALUMNOS: La solución es directa (Comentan y discuten la solución)
DOCENTE: ¿Cómo nos queda la solución de la integral del diferencial "*dt*"?
ALUMNOS:
ALUMNO: Cero por t "*0t*"
ALUMNO: Aceleración igual a t final menos t inicial, ha no "*a=(t-to)*"
ALUMNA: Aceleración por tiempo final menos tiempo inicial "*a(t-to)*"
ALUMNO: A paréntesis t final menos t inicial "*a(t-to)*"
DOCENTE: Ok t final "*t*" menos t inicial "*to*" es igual a que (Escribe en el pizarrón?
ALUMNOS: A la velocidad final menos la velocidad inicial "v-v_o"
DOCENTE: Ok a la velocidad final menos la velocidad inicial "v-v_o" entonces en esta cuestión de aquí podemos suponer que nuestro tiempo inicial fue justamente ese instante, antes de haber saltado, ¿En el tiempo igual a qué?
ALUMNOS: Cero
DOCENTE: Y si haces el tiempo igual a cero ¿Cómo nos quedaría esto que determina la velocidad en cualquier instante?, tenemos que la velocidad va estar en algo en función de t, y a que sería igual, ahí póngalo ya, la velocidad a que sería igual chicos
ALUMNOS: Aceleración por tiempo
DOCENTE: ¿Qué más? (Sugiere) mas, menos, por, entre
ALUMNOS: Mas la velocidad inicial
DOCENTE: Y no se ustedes pero esa expresión relativamente tiene que ser conocida, se porque recuerden que estamos ante un hecho físico y esto de aquí representa la velocidad de esta partícula que es igual a la aceleración por tiempo más la velocidad inicial "$v(t)=at+v_o$" y yo creo que la función esta en términos de t y si derivamos, ¿Cuánto será la derivada a por t "*at"?*
ALUMNOS: (Respuesta) a
DOCENTE: Y eso es pues es simplemente un dato ¿Cuánto sería su derivada?
ALUMNOS: (Respuesta) Cero
DOCENTE: Coincide ¿no?, esta función de velocidad (Indica en el pizarrón) justamente represente que cuestión
ALUMNOS: Una constante
DOCENTE: La parte de la aceleración, en esta parte de aquí esta es una de las fórmulas del movimiento rectilíneo acelerado "MRUA" de ahí la importancia de esta parte de la cinemática de que ustedes tengan en cuenta como se define la aceleración, como se define la velocidad y que entiendo por posición, pues se puede hacer toda esta deducción. Este resultado si coincide con esas predicciones que hicieron en la pregunta 8, colóquenle si su predicción fue cierta o falsa, me refiero a la pregunta donde dice gráfica la velocidad si sabes que la aceleración es constante, no sé qué gráfica realizaron, pero si por ejemplo si su predicción realizaron una gráfica del tiempo con respecto a la velocidad fue algo así (Gráfica algo en el pizarrón) está bien, porque justamente es esto no, la velocidad es una función de tipo.
ALUMNOS: Lineal
DOCENTE: Que conforme va pasando el tiempo va aumentando la velocidad, ¿Quién es la pendiente de esa recta?
ALUMNOS: La aceleración
DOCENTE: La aceleración entonces es una constante, esa que fue la número siete, pónganle lo que es no le cambien absolutamente nada si la predicción fue correcta, no porque yo pensé que la velocidad podría ser esto, coloquen si su predicción fue bien o no o pusieron algo de tipo parabólico.
La pregunta numero 13 dice: Como calcular la posición justamente si, hasta el momento ya sabemos cómo se comporta la velocidad estamos de acuerdo, entonces ya sé cómo se comporta la velocidad ¿Cómo le vamos

hacer para saber la posición del objeto? Y ya traíamos cosas referente a la velocidad, ¿Qué sabemos de la velocidad?
ALUMNOS: Que es la distancia sobre el tiempo
DOCENTE: Bueno pero es rapidez
ALUMNOS: Es el desplazamiento sobre el tiempo
DOCENTE: Pero como lo estamos variando, lo estamos viendo en cada instante
ALUMNOS: Es la derivada del desplazamiento con respecto al tiempo
DOCENTE: Y ¿Quién es la velocidad?
ALUMNOS: La aceleración por el tiempo
DOCENTE: Yo sé que la velocidad de toda esta caída libre es la aceleración por el tiempo más velocidad que se tenía al inicio "$v(t)=at+v_o$", entonces esto de acá como la podríamos manejar en esta información de aquí (Señala la igualdad de posición)
ALUMNOS: A por t más velocidad inicial es igual a la derivada de x con respecto a la derivada de t "$at+v_o=dx/dt$"
DOCENTE: ¿Creen que puedan conocer la posición del objeto?
ALUMNOS: Si
DOCENTE: ¿Qué le hacemos para conocer la posición?
ALUMNOS: Pasamos multiplicando el diferencial de t
DOCENTE: Ok si pasa multiplicando ¿Cómo me quedaría?
ALUMNOS: A t más la velocidad inicial por el diferencial de t es igual al diferencial de x
DOCENTE: ¿Cómo puedo saber la posición?
ALUMNOS: Integrando
DOCENTE: Integrando nuevamente, entonces nuevamente a la hora de hacer la integración vamos a poner ciertos intervalos de acuerdo, ¿Qué intervalos serían acá? (Señala la integral del tiempo)
ALUMNOS: Tiempo inicial y tiempo final
DOCENTE: Desde un tiempo inicial hasta un tiempo t y aquí (Señala la integral del posición)
ALUMNOS: Posición inicial y posición final
DOCENTE: Hay que terminarlo vale esto tiene que ver con la numero trece (Se refiere al número de la pregunta) entonces su conclusión pues igual los tenga que llevar a otra expresión muy usual que tiene que ver con este tipo de movimiento acelerado.
TIEMPO DE SOLUCIÓN PARA DETERMINAR LA POSICIÓN
Teniendo su conclusión de manera muy análoga identifiquen la función que salió aquí, la función que describe la posición del objeto y si eso coincide, esa función coincide gráficamente con la predicción que hicieron en la seis, nuevamente acá tenemos que suponer que el tiempo t inicial es cero
ALUMNO: Profa. quería saber si estoy bien.
DOCENTE: ¿Qué tipo de función es?
ALUMNO: Constante
DOCENTE: No, ¿Qué tipo de función es? O más bien ¿La posición en función de que variable esta?
ALUMNO: Tiempo
DOCENTE: Del tiempo y ¿Cómo se está comportando ahí el tiempo?
ALUMNO: De segundo grado
DOCENTE: Y tú sabes cómo se comporta una expresión de segundo grado, ¿Cómo se comporta gráficamente?
ALUMNO: Una Parábola
DOCENTE: Y tu gráfica es así
ALUMNA: Maestra ¿Cómo considero esto?
DOCENTE: La aceleración sigue siendo constante y la velocidad inicial es un dato no.
ALUMNA: Y la posición
DOCENTE: Si es caída libre se puede considerar como cero ¡Se puede! Si la velocidad es una constante
ALUMNA: Pero ósea aquí (le muestra su procedimiento)
DOCENTE: T es la variable no, la integral de la izquierda es con respecto a t porque el tiempo es la variable sale, a es constante y la velocidad inicial también es una constante sale.
ALUMNO: Estoy bien
DOCENTE: Se ve mejor
ALUMNO: Se ve mejor no, (explicación de lo que hizo)

DOCENTE: Pero más bonito no, la pregunta es, esa igualdad no responde del todo que me digas como calcular la posición, lo que tienen encontrar el algo que me digan, puede ser algo análogo (Se refiere a la posición) debe de poner es x con respecto al tiempo "*x(t)=*" la puedo sacar de esta forma y ahí ya tienen la condición vale, recuerden que no pueden modificar nada de lo que ya contestaron.
De igual manera en la número catorce chicos, la función que coincide con la predicción hecha en la pregunta número siete.
ALUMNOS: La de la posición verdad
DOCENTE: Sí la de la posición, entonces la función hasta cierto punto que sale ahí es de ¿Qué tipo?, me refiero al grado, porque esto lo podemos ver como si fuese un polinomio no, ósea aunque simbólicamente este, pero era como si tuviesen que.
ALUMNOS: a y b
DOCENTE: Mas algo no, esta variable es la t, entonces esta fue una función de tipo lineal y la posición ¿Qué tiene que salir?, algo de tipo que
ALUMNOS: Cuadrático
DOCENTE: Cuadrático
ALUMNOS: Una parábola.
DOCENTE: Entonces chequen si esto fue lo que predijeron en la número siete, si no ya saben, no le borran ni le ponen no etcétera, etcétera, etcétera y el tiempo inicial es cero. Unos minutos más y voy pasando por sus hojas.
Ok voy a terminar dando un conclusión de acuerdo de esta última parte, lo que tiene que ver con la posición, aquí en la parte de la posición se considera que esto es una suma, entonces considerando que la aceleración era constante podría salir, entonces quedaba la integral de un tiempo inicial hasta un tiempo t del diferencial del t, más la integral de un tiempo inicial hasta un tiempo final t la velocidad también es constante de un diferencial de t y esto es igual a la integral de una posición inicial hasta una posición final del diferencial de x, esta de aquí (Solución de las integrales) es aceleración por el tiempo al cuadrado entre dos más la velocidad inicial por la t y todo esto evaluado desde un tiempo inicial hasta un tiempo final y la integral de acá era x evaluada desde una posición inicial hasta una posición final y ya después era este cambio (Se refiere a evaluar las integrales) sería a aquí seguiría quedando igual por t cuadrada más la velocidad inicial por t menos cero adelantándome a todo esto porque el tiempo inicial es cero y esto a que va ser igual a la posición menos la posición inicial no, me permite reescribir la posición del objeto pues sería la aceleración por el tiempo al cuadrado entre dos más la velocidad inicial por el tiempo más la posición inicial "$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$" entonces si se dan cuenta esta de aquí es otra expresión muy utilizada cuando se resuelven problemas del movimiento uniforme acelerado, esta es la que te permite describir la velocidad y esta de acá te permite describir la posición, son dos de las muy comunes formulas cuando ven este tipo de movimientos en cinemática, finalmente y para cerrar hay que tener en claro que la aceleración es una variación de la velocidad conforme va pasando el tiempo y que la velocidad es un cambio de la posición conforme va pasando el tiempo y saber que todo lo demás tiene que ver con un poquito de tratado matemático hasta cierto punto va que va, esta primer sección se acaba les digo son tres.

7.5 TRANSCRIPCISIÓN DE LA FASE EXPERIMENTAL

DOCENTE: Ya iniciamos la grabación, vamos a continuar el día de hoy con la siguiente fase experimental, de esta parte experimental ustedes ya le avanzaron un poquito. Cada uno de ustedes en su mesa tiene el material con el que vamos estar trabajando el día de hoy, ayúdenme colocándole su nombre en lo que ustedes le colocan el nombre les recuerdo que estábamos viendo en la sesión pasada, vimos una actividad introductoria que nos puso en contexto de lo que tiene que ver con la Cinemática, que se encarga del estudiar el movimiento sin importar las causas que lo originan y lo importante de la Cinemática es que se enfoca en el estudio de tres variables la posición, la velocidad y la aceleración, estas tres en función del tiempo.
Ustedes ya le avanzaron un poco en la parte experimental, en lo que tiene que ver con la caída libre de una canica y caer dentro de un medio, específicamente la glicerina, ese día se me paso decirles que contestaran las siguientes preguntas antes de iniciar la parte experimental, pero lo vamos hacer el día de hoy, pregunta número uno contesten por favor ¿Qué es lo que hace que un cuerpo caiga si no es sostenido por algo? Y tiene que ver en el momento que ustedes tenían agarrada la canica, si no la estuviesen agarrando que es lo que hace que esa canica se caiga o cualquier objeto de forma general. Pregunta numero dos Cuando un cuerpo está cayendo ¿De qué depende el tiempo que tarda en llegar al piso? Siguiente dice ¿Cuáles son las características de la velocidad y aceleración en el movimiento rectilíneo uniforme (MRU)? Cuando me muevo de manera recta y uniforme que característica tiene la velocidad y su aceleración en función del tiempo, es decir cómo cambian conforme el tiempo sigue avanzando (Ejemplifica el movimiento caminando en el salón de manera uniforme en línea recta, para que los alumnos puedan observar). De igual manera la número cuatro es; cuáles son las características de la velocidad y aceleración en función del tiempo cuando el movimiento es rectilíneo uniforme pero acelerado, teniendo en cuenta lo que discutíamos la sesión pasada de que entendemos por aceleración y velocidad, finalmente en la pregunta número cinco cuando se deja caer algo desde el reposo, justamente en el instante que abrieran sus dedos para dejar caer la canica ¿Cuánto vale la velocidad inicial y su aceleración? Lo pueden colocar textualmente o utilizar la cuestión simbólica de los valores, como ustedes gusten lo pueden colocar.
Vamos a discutir un poquito que pensaron cada uno de ustedes antes de pasar a lo que hicieron experimentalmente, en la pregunta número ¿Qué es lo que hace que un cuerpo caiga si no es sostenido por algo? quien me ayuda
ALUMNOS: La gravedad, si según en la física clásica la gravedad (Afirma un alumno en particular)
DOCENTE: Ok gracias C, todos concuerdan o alguien piensa en algo distinto, quien me ayuda con la número dos ya cuando un cuerpo está cayendo ¿De qué depende el tiempo que tarda en llegar al piso?
ALUMNO D: Del volumen del cuerpo y la fuerza gravitacional
DOCENTE: La fuerza gravitacional, haber.
ALUMNO C: Yo le puse la masa del cuerpo, la dinámica del cuerpo y la resistencia al movimiento en el medio.
DOCENTE: Ok, quien más.
ALUMNO J: Masa del objeto, la aerodinámica, la resistencia al aire y la fuerza de atracción gravitacional.
DOCENTE: Ok.
ALUMNO X: Yo nada más le puse la masa y su aceleración, entre mayor masa mayor aceleración y viceversa.
DOCENTE: Y esa fuerza entre mayor masa mayor aceleración, ¿Cuál es esa fuerza? Que cuando multiplicamos la masa por la aceleración comúnmente como le denominamos.
ALUMNO C: La segunda Ley.
DOCENTE: Mmmmmm no
ALUMNO C: La gravedad
DOCENTE: Mmmmmm no, ¿Qué fuerza es esa?
ALUMNO N: Fuerza de equilibrio
DOCENTE: Otra vez su compañero nos dijo que entre mayor masa mayor aceleración y que cuando multiplicamos la masa por el valor de nueve punto ocho teórico que es el valor de la gravedad ¿Qué fuerza es?
ALUMNO X: Newton
ALUMNO C: De tracción

DOCENTE: Ha bueno esa es su medida, pero a esa fuerza especifica tiene un nombre y por eso cuando vamos al doctor y se hacen un chequeo médico.
ALUMNO C: Ha peso
DOCENTE: Peso no, y que comúnmente el doctor suele confundirse, tiene un peso de 77 kilogramos.
ALUMNOS: Es la masa
DOCDENTE: Entonces el peso está involucrado en esa cuestión en lo que tarda que un cuerpo caiga al piso, ahora la número tres; cómo se comporta la velocidad cuando me muevo de forma recta pero de forma uniforme.
ALUMNO J: Bueno en cuanto a la aceleración no hay aceleración y la velocidad es constante.
ALUMNO X: La aceleración vale cero y la velocidad es una constante.
DOCENTE: La velocidad es una constante, es decir que conforme valla pasando el tiempo siempre voy a ir por dar un ejemplo a un kilómetro por hora.
ALUMNO R: Aja por que no aumenta la velocidad pero tampoco disminuye, siempre es la misma.
DOCENTE: Siempre es la misma no, eso es cuando nos movemos de forma uniforme y que diferencia tiene cuando el cuerpo esta acelerado.
ALUMNO S: La velocidad es variada y la aceleración es constante.
ALUMNO X: La velocidad es proporcional al tiempo de manera lineal y la aceleración es constante.
DOCENTE: La aceleración es constante concuerdan
ALUMNOS: Si
DOCENTE: Ok y que la velocidad es proporcional al tiempo aquí lo mencionan, es decir puede variar de forma lineal y si es proporcional al tiempo esto que digo con palabras como lo podría escribir simbólicamente.
ALUMNO C: n por t *"v(t)=nt"* (Se escribe la expresión en el pizarrón)
DOCENTE: n por t que sea proporcional, la velocidad es proporcional al tiempo (Se señala lo escrito en el pizarrón).
ALUMNO D: Podría ser
DOCENTE: Cuando digo que algo es proporcional por ejemplo ahí el tiempo es proporcional y de qué grado es.
ALUMNOS: De primero
DOCENTE: Entonces ahí hay una proporcionalidad de tipo lineal, dudas o preguntas entre la diferencias entre un movimiento uniforme y a un movimiento acelerado, de ahí finalmente cuando teníamos la canica en los dedos de cuanto era la velocidad inicial
ALUMNOS: Cero
DOCENTE: Cero y si la velocidad inicial era cero de cuanto es su aceleración.
ALUMNOS: Cero
ALUMNO A: Cero, es de cero pero sin embargo tomamos el valor de la gravedad.
ALUMNO C: La aceleración siempre está ahí
DOCENTE: La aceleración está ahí no, está presente estamos de acuerdo, entonces sería ese valor respectivamente teórico de.
ALUMNOS: Nueve punto ochenta y uno
DOCENTE: Ok posteriormente a esto vamos a recordar con un par de vídeos seleccionados, voy a omitir lo que tiene que ver con el audio de los vídeos que ustedes realizaron, voy a reproducir el primero que tiene fue a una altura de veinte centímetros (Se presentan algunas fallas con la reproducción del vídeo, se soluciona el problema reproduciendo el vídeo directamente). Se van a ver los vídeos cuando la canica estuvo a veinte, cuarenta, sesenta y cien centímetros para recordar esos instantes de la experimentación, por favor observen la parte del movimiento de la canica, comúnmente ocurre hasta el último de cada vídeo, los primeros fueron los intentos y ya casi hasta el final es justamente donde se lleva la caída libre con las características que se les solicitó (Se reproducen los cuatro vídeos).
Y bueno que va pasando chicos conforme le vamos dando más altura a la canica que le va ocurriendo, cambio de veinte a cuarenta y ya después pasamos a sesenta, que efecto produce que la dejemos caer de mayor altura
ALUMNOS: Una velocidad, una aceleración (Respuestas dadas al mismo tiempo)
DOCENTE: La que.
ALUMNO F: La velocidad aumenta
DOCENTE: La velocidad aumenta.
ALUMNOS: Si
DOCENTE: Entre mayor altura que pasa.

ALUMNOS: Mayor aceleración, mayor velocidad, más tiempo (Se muestra una opinión partida)
ALUMNO M: La aceleración permanece constante.
DOCENTE: Haber vamos a observar, que a mayor altura la canica adquiere mayor velocidad, no es la misma velocidad, ya que no es la misma velocidad que tiene a los veinte centímetros encima de la probeta con la que llega a diferencia de cuando fue soltada del metro de altura, ahorita lo vamos a observar, eso fue lo que se estuvo realizando en la parte experimental.
Antes de pasar al análisis de vídeos con la ayuda de un programa que se llama tracker, ustedes que opinan referente a lo siguiente: Observando y analizando los vídeos (No solicitaron ver otra vez los vídeos) formula una hipótesis con respecto a los movimientos, ahí da como opción que a lo mejor pueda ser que el movimiento sea de manera uniforme, por eso de ahí la pregunta que se planteaba acá (Señala lo escrito con anterioridad en el pizarrón) o de manera acelerada que pueda ser, pero ustedes dentro de su experiencia de lo estuvieron observando como creen que sea el movimiento de la canica antes de que llegue a la glicerina y como es el movimiento de la canica dentro de la glicerina, por favor ahí coloquen su hipótesis, le ponen por favor fuera y arman la hipótesis y aquí específicamente dentro, como les menciono les da como opción que piensen que el movimiento pueda ser uniforme o acelerado, pero realizan esa separación para que se pueda visualizar esa separación fuera y dentro (Se aprovecha el tiempo para preparar los análisis hechos en el programa tracker) .
Ok vamos a ver R
ALUMNOR: Yo puse que afuera se movió por MRUA ya que va con una aceleración constante y por ende su velocidad aumenta conforme el tiempo y puse que dentro igual se movió por MRUA ya que ocurre al inicio una desaceleración y luego cae con una aceleración igual aunque es mínima pero es diferente de cero.
DOCENTE: En ambos tanto dentro y fuera es acelerado, ok haber otra opinión.
ALUMNO X: Fuera la canica toma un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado ya que la velocidad es proporcional con respecto al tiempo y la aceleración es constante y dentro es de tipo movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado ya que la velocidad disminuye de manera proporcional con respecto al tiempo y la aceleración toma un valor negativo pero constante.
DOCENTE: Negativo pero constante, ok C.
ALUMNO C: Yo puse que fuera el movimiento del cuerpo es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado un MRUA debido a que tiene una aceleración constante y la velocidad con respecto al tiempo aumenta proporcionalmente y dentro yo creo que de igual manera es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado pero con la diferencia que la velocidad baja proporcionalmente y la desaceleración es constante.
DOCENTE: Baja la velocidad y la aceleración sigue siendo la misma.
ALUMNO C: Es una desaceleración pero constante.
DOCENTE: Quién más, por halla (Le da la palabra a otro estudiante)
ALUMNO M: Yo afuera considero que también es un movimiento uniformemente acelerado, pero adentro bueno considero que es la misma pero me imagine como un medio distinto, digamos si la canica la pusiéramos desde arriba y cambiáramos el aire, en vez de aire a glicerina seguiría cayendo la canica con una velocidad más lenta como se puede observar puede en la probeta y el movimiento es uniformemente acelerado y tomando otro punto vista si quitáramos la mesa y la probeta fuera más larga seguiría cayendo, la velocidad quizás si aumentaría pero sería muy muy muy pequeña y por eso nosotros observamos que es una velocidad constante.
DOCENTE: Gracias, esas ideas ya están y fue en base a lo que estuvimos observando, vamos analizar en primera instancia esas ideas que plasmaron que tan alejadas o cercanas están de la realidad y para eso nos vamos ayudar un poco de un programa que se llama tracker, es un programa de análisis de variables físicas es de uso libre, los análisis ya están ya los traigo hechos pero me gustaría presentarles el programa para que lo conozcan, habían escuchado hablar de él.
ALUMNOS: No, creo que es muy nuevo.
DOCENTE: En el ámbito físico y estudios es algo de lo más nuevo y le da ese giro de 180 grados a prácticas que se realizan en el laboratorio de física, en las cuáles nosotros tenemos que estar midiendo con la ayuda de los aparatos velocidades y demás, lo que nosotros hacemos el software lo puede hacer con la ayuda de vídeos, de ahí lo que les pedía que la calidad de los vídeos fuera buena. Este vídeo ya está cargado, cuando se carga el vídeo hay cierta información importante del mismo, este vídeo tiene más de 4334 fotos desde que inicia hasta que termina, como se analiza, vamos iniciar en el fotograma 3746 se va ir cambiando de una en una y la última foto a analizar es la 4334, tiene una resolución de 120 fotos por segundo y la otra característica es cada una de las fotos va ir cambiando en un intervalo de tiempo chiquito (el intervalo de tiempo es de 0.00833 segundos), una vez que se carga le dan play y ahí nos permite observar, nada porque no se está moviendo (Se

presentaron algunos problemas con el programa al inicio, no respondía ninguno de los análisis ya hechos previamente, se hace un análisis nuevamente desde el inicio).

Vamos a ver, voy a realizarlo nuevamente le doy clic en archivo nueva pestaña y se observa la interfaz, se carga el vídeo, voy a cargar el vídeo de 100 lo voy abrir y se va a tardar un poco en lo que lo carga, como les menciono esto ya estaba hecho, en lo que termina de cargar les sigo explicando, coloco un sistema de referencia donde el origen coincide con la posición inicial de la canica se giró 180 grados para que mis posiciones o más bien para que los datos se han positivos (La dirección "x" positiva hacia lado izquierdo y la dirección "y" hacia abajo) se pueden analizar dependiendo de las variables físicas que se quieran analizar ejemplo posición, velocidad, aceleración, momento, velocidades angulares, etcétera, posteriormente a eso se necesita una marca, recordaran que en la parte experimental que colocaran marcas y que ustedes midan al altura por encima de la probeta de donde están dejando caer la altura, esa medida se le puede indicar a tracker y con eso pueda hacer el análisis de las fotos y nos dé resultados de tiempo, velocidad, aceleración, posición y demás, ahí se observa la vara de calibración se le coloca la distancia, posteriormente se da clic en la pestaña de trayectoria y le damos clic a la opción de masa puntual dado que no nos interesan sus dimensiones, en esta masa puntual le damos en la opción de una trayectoria automática y de ahí la insistencia que el vídeo sea de buena calidad, porque conforme se va pasando de foto los colores se van pixeleando, si no tiene buenos pixeles es complicado que en la siguiente fotografía se pueda analizar de acuerdo. Se aprietan las teclas control, shift, enter y se enfoca dónde está la canica, se da clic en buscar y empieza buscar el objeto, si se dan cuenta ahí está parado el objeto.

ALUMNOS: Si.

DOCENTE: Entonces está analizando y se empieza a tener datos de las variables físicas que vamos a analizar, voy a borrar estos puntos solo fue para demostrarles el manejo del software. Vamos analizar el primer vídeo mismo que ya tengo el análisis y ver su hipótesis que formularon con respecto al movimiento de la canica fuera de la probeta, vamos a ver las gráficas de las variables cinemáticas. Por ejemplo le voy a poner play a ver si ya se deja, la canica no se mueve pero los puntitos que están observando en color azul es el movimiento de la canica fuera de la probeta.

ALUMNO C: Profa. Esa gráfica es de aceleración o de velocidad.

ALUMNO X: Es de velocidad.

DOCENTE: Esta de aquí es de velocidad, vean cómo se comporta la velocidad conforme va pasando el tiempo, vamos a analizar todo lo que tiene que ver con "y", también se puede ver la posición ahí ya está pero bueno le puedo volver a poner play para que vean como se está comportando la posición hasta ahí porque estos análisis que siguen son el movimiento dentro de la probeta, de acuerdo.

Tenemos cómo se comporta la posición, como se comporta la velocidad del primer experimento y véanlo como se comporta relativamente la aceleración, esto mismo lo estamos analizando de manera cuantitativa con estos datos que tenemos aquí del lado derecho de la pantalla, la posición, velocidad y aceleración en un cierto tiempo (Observan lo que se está explicando en la pantalla del televisor). En este primer experimento coincide con lo que estábamos viendo anteriormente, con qué tipo de movimiento tiene la canica.

ALUMNOS: MRUA.

ALUMNO C: Es que aparentemente parece MRUA solo que en esta última gráfica me desconcierta.

DOCENTE: La aceleración es un poquito más ruidosa

ALUMNO C: Exacto.

DOCENTE: A diferencia de la de velocidad, ahí claramente estamos viendo lo que les comentaba que la velocidad crece de forma proporcional conforme va pasando el tiempo y es de forma lineal y la posición conforma va pasando el tiempo es de forma.

ALUMNOS: Cuadrática

DOCENTE: Será suficiente con este o tendremos que analizar un par de vídeos más.

ALUMNO C: Siempre entre mas es mejor.

DOCENTE: Ok, vamos a ver el de cuarenta lo van a poder detectar con puntos de color amarillo le doy play y observemos la posición de la canica conforme va pasando el tiempo hasta ahí, antes de que entre, ya no le voy a dar play simplemente le cambio y ahí está la velocidad, relativamente coincide con lo que se observó en el primero, le voy a cambiar para que puedan observar la gráfica de la aceleración.

ALUMNO X: Esa ya está más acostada.

ALUMNO A: ¿Esa es la de la aceleración?

DOCENTE: Exacto se ve más constante a la del pasado.

ALUMNO C: De hecho si lo pensáramos como un gráfico de dispersión y lo viéramos como puntos y si se hiciera una línea entre los puntos de dispersión igual se vería un poco más claro con menos ruido

DOCENTE: Un ajuste, tracker también realiza ajustes de datos (Se realiza una pequeña demostración del ajuste) Que ajuste me conviene realizar: algo de tipo lineal, cuadrática, cubica, exponencial o logarítmico.
ALUMNOS: Lineal
DOCENTE: El software nos manda una recta de la forma *"at+b"*, da los valores del parámetro a y b, solo como complemento a tu comentario, lo voy a cerrar. Llevamos dos vamos a analizar un tercero, vamos con este (El vídeo de la caída a los 100 centímetros) permítanme regresarlo, vamos a observar el que dice fuera ya no le voy a dar play no, justamente esta todo el movimiento y es gráfica de la posición, ¿Cómo se esperaría ver gráficamente la velocidad?
ALUMNOS: Lineal
DOCENTE: Lineal, puntitos más arriba puntitos más abajo pero si realizamos un ajuste se trazaría la mejor recta que pase por la mayoría de los puntos y vamos a ver como se observa la aceleración.
ALUMNO X: No es tan claro como los otros
DOCENTE: Exacto no es tan claro nuevamente en la cuestión de los valores, en la primer parte si (Se señala la parte inicial de la gráfica) y ya aquí se dispararon totalmente, pero bueno con estos tres vamos a la siguiente parte de su hoja de trabajo.
En la primer parte dice: ¿Qué tipo función describe las gráficas de la posición contra el tiempo en estos casos analizados? Creo que ya lo mencionaron. De manera muy análoga ¿Qué tipo función describe las gráficas de la velocidad? En estos casos que estuvimos analizando y la tercera ¿Qué tipo función describe las gráficas de la aceleración? Y en base a esto de estas cinco cuales de las siguientes afirmaciones son correctas, la número uno dice la velocidad es proporcional al tiempo, las dos la aceleración es variable, número tres que la posición es proporcional al cuadrado del tiempo, número cuatro que la aceleración es constante y cinco la velocidad es proporcional al cuadrado del tiempo, las encierran o palomean las que consideren correctas. Con esto vamos a ver cómo fueron sus hipótesis que formularon, Kate dinos la hipótesis que formulaste para la canica y su movimiento fuera de la probeta.
ALUMNO (Kate): Le había puesto que era movimiento uniformemente acelerado, pero viendo las gráficas muestra variaciones en la aceleración
DOCENTE: Y con esto he reafirmas, es decir crees que el movimiento fuera de la probeta es acelerado o tendrías que cambiar tu hipótesis planteada inicialmente.
ALUMNO (Kate): No lo sé, lo sigo analizando.
DOCENTE: Sigue analizando ok,
ALUMNO X: No yo digo que sí, he con las gráficas comprobamos que la aceleración es uniformemente acelerado, porque aunque la aceleración tenía muchos puntos se puede mostrar que si era constate si ajustamos los puntos de la gráfica, la posición estaba cuadrática y la velocidad estaba proporcional al tiempo.
ALUMNO R: Yo creo que me quedaría con lo mismo, porque siento que esas variaciones podrían ser por que como grabamos de otro ángulo y por algunas y otras razones pudo haber cambiado, pero teóricamente es constante.
DOCENTE: También podría ser que hay factores que no se pueden controlar, pero yo creo que hay dos factores cables que se observaron muy bien y son.
ALUMNOS: La velocidad
DOCENTE: Y el otro
ALUMNOS: La posición
DOCENTE: Estas dos variables cinemáticas son importantes para terminar de decidir su conclusión. Entonces en la pregunta siguiente coloquen nada más si la hipótesis que plantearon inicialmente es verídica o la tengan que reformular, todo depende de lo que cada quien puso.
ALUMNO C: Por ejemplo yo solo había tomado en cuenta la velocidad y aceleración, pero ahora puedo reformularla añadiendo la posición.
DOCENTE: Si claro, sin problema. Entonces coloquen si se reafirma la hipótesis o no. (Se va trabajando en el software para hacer el análisis del movimiento en el interior de la probeta).
Y ahora vamos a discutir un poco las siguientes preguntas antes de utilizar el programa, para que nos ayuden a ver qué pasa con el movimiento de la canica en la glicerina, la siguiente pregunta es ¿Que efecto realiza la glicerina sobre la velocidad que llevaba la canica? Coloquen su respuesta y ahorita discutimos. Listo J qué opinas.
ALUMNO T: Pienso que le ocasiona un efecto de resistencia,
DOCENTE: A la velocidad
ALUMNO T: Si a la velocidad
DOCENTE: Perro a que te refieres con que se resiste

ALUMNO T: Si que la canica frena pero no repentinamente, si se ve que frena pero que sigue con un ritmo constante.
DOCENTE: A eso te refieres con que se resiste a ok, vamos a ver por halla.
ALUMNO S: Yo le puse que disminuye la velocidad pero en este caso no es como un frenado instantáneo pero no absoluto
DOCENTE: Le reduce la velocidad lo frena pero no del todo.
ALUMNO C: Yo le puse algo así como vulgarmente se conoce lo va frenando, la velocidad se va reduciendo y la aceleración se vuelve negativa.
DOCENTE: Ahí ya nos contestó más de una cosa pero esto que nos acabas de mencionar de forma muy específica va acorde a esta en relación entre estas dos variables, pero bueno alguien opino algo distinto para hacer la aclaración, lo que se hace es que le reduce la velocidad, es decir llega con cierta velocidad y justamente en el instante que toca a la glicerina la reduce, dicen no del todo, entonces si le reduce la velocidad que le pasa a la aceleración, porque recordaran que van de la mano y son variables que estuvimos viendo desde la actividad introductoria.
ALUMNO A: Es lo mismo la aceleración también va este disminuye pero no, pero no
DOCENTE: Ahorita (Hay intervención entre otros compañeros) disminuye pero no
ALUMNO A: Pero sigue siendo constante pues pero con valores negativo, toma valores negativos pero sigue siendo constante.
DOCENTE: Toma valores pero siguen siendo valores constantes, que más.
ALUMNO R: Toma valores negativos porque lo podemos comparar con los frenos de un carro, la aceleración va aumentando y cuando frenas la aceleración se vuelve negativa.
ALUMNO A: Va descendiendo no
DOCENTE: Ahorita retomo esta idea de que va descendiendo, entonces dado que coinciden con lo que le ocurre a la aceleración, ¿Qué signo toma?
ALUMNOS: Negativo
DOCENTE: Esto que me están diciendo sería genial que se pueda observar que la aceleración se vuelve negativa.
ALUMNO X: Yo tenía como una pequeña duda porque en el instante que la canica toca la glicerina siento que por instante de tiempo toma la aceleración nuevamente el valor otra vez de la gravedad después toma la aceleración negativa por la tensión superficial de la glicerina por un momento yo vi en los vídeos que se quedaba un momento estática la canica o como pausada por así decirlo, no sé si en ese punto la aceleración tome el valor de la gravedad se haga otra vez constante negativa.
DOCENTE: Muy bien justamente vamos hacer uso del programa y de lo que se observa para ir disipando esas dudas, a esa aceleración negativa le vamos a llamar desaceleración, cuando la aceleración toma valores negativos vamos a decir que se está desacelerando la canica, esa desaceleración está siendo que la canica se frene cuando toca la glicerina pero no del todo.
ALUMNO A: Pero no es nula

DOCENTE: A lo mejor nos vamos a encontrar con valores chiquitos muy cercanos a cero por lo que mencionaban, referente a esto hay que contestar la pregunta siete y ocho, en cuál de los casos cuatro casos (Explica las alturas a las que fue soltada la canica) desacelera más rápido la canica una vez que entró a la glicerina, es decir en cual prácticamente con la velocidad con la que llego.
ALUMNO N: Se la quitó.
DOCENTE: Exacto se la quitó, la freno, hay coloquen su repuesta y en la otra en cuál de los casos se desacelera más lento, es decir, si la freno pero no del todo.
ALUMNO N: Ósea que siguió avanzando.
DOCENTE: Siguió cayendo, porque en los cuatro siguen cayendo pero en los vídeos se puede observar.
ALUMNO D: Hay unos más rápidos que otros
DOCENTE: Hay unos que prácticamente se puede observar como frena la canica a comparación de otros, a eso me refiero a las preguntas anteriores. De los que no han participado quien me dice en cual se frenó prácticamente rápido y cual lo hizo más lento.
ALUMNO H: Pues yo creo que se frenó más rápido en donde había menos altura
DOCENTE: En la de veinte centímetros
ALUMNO H: Si en la de veinte y en la de cuarenta.
DOCENTE: El piensa que en la de veinte que así como llego prácticamente se paró y tu J.
ALUMNO J: Yo considero que en el cuatro que es el más alto el de cien.

DOCENTE: Ósea más alto llego con mayor velocidad.
ALUMNO J: Aja y se frenó en seco totalmente y en el otro como no tenía tanta velocidad, no había ganado tanta velocidad no tuvo la oportunidad de desacelerarse más rápido así como entro casi casi siguió cayendo, sin embargo en el otro a mayor altura agarro mayor velocidad por lo tanto se frenó más rápido.
ALUMNO A: De hecho en los vídeos se observa como la glicerina sube, como salta porque genera el impacto y en el de veinte no el de veinte como que (Ejemplifica el movimiento con sus manos) si hubo un frenado pero no como el de un metro que levanta la glicerina.
ALUMNO C: Yo concuerdo un poco con H por que trato de imaginármelo un poco de otra manera, si por ejemplo fuera una tela elástica al caer lleva menos fuerza.
ALUMNO A: Pero es elástica, no estás en una superficie.
ALUMNO C: Si pero la tensión superficial tiene cierta elasticidad, la canica llega a la glicerina con menos velocidad entonces tiene menos fuerza para romper la tensión y logra que se frene de manera más abrupta, bueno es lo que pienso y la del metro al llevar más velocidad rompe más fácil la tensión superficial y sigue fluyendo a una velocidad más alta que la otra.
DOCENTE: Ok estamos en la cuestión que tiene que ver con los extremos, he visto que coinciden que a mayor velocidad prácticamente como entra lo frena o el caso en viceversa, vamos a escuchar a su compañero.
ALUMNO X: No sé si pero hice una analogía con la Ley de Newton la de Acción y Reacción, que toda acción tiene una reacción de la misma fuerza per con sentido contario y estoy como de acuerdo con C y H porque si traía una aceleración muy pequeña para contrarrestarlo necesita una desaceleración pequeña a comparación de un metro si la dejas caer de un metro llevaría más aceleración y la desaceleración sería más grande (En toda su argumentación se quiere referir a velocidad)
ALUMNO J: Vez ahí se está contradiciendo (Lo comenta con otra compañera)
ALUMNO (Anna): Si de hecho si se está contradiciendo
ALUMNO J: Ahí te estas contradiciendo un poco porque estás diciendo por que a mayor aceleración se frena más rápido entonces no estás de acuerdo con H, estás de acuerdo con nosotras.
ALUMNO X: Todo salió mal, todo lo dije al revés, ósea comparándolo con la Ley de Newton la de Acción-Reacción.
DOCENTE: Si esa está bien.
ALUMNO J: Perdón yo iba a poner otro ejemplo, cuando avientas un cuerpo bueno un cuerpo no, cuando avientas algo por ejemplo al agua, el agua está aquí y lo avientas desde aquí, pues se va ir lento es decir no se frena tan rápido sin embargo si lo avientas de una altura mayor vas a frenar así luego luego (Lo explica utilizándolas manos para ejemplicar lo mencionado).
DOCENTE: Ok haber.
ALUMNO C: Justo eso pasa con los clavadistas, cuando un clavadista.
ALUMNO J: Ha pero un clavadista entra de cierta forma no va entrar así (Se refiere a que el impacto con el agua se ha de forma horizontal).
ALUMNO C: Cuando un clavadista se avienta de una menor altura se frena en menos altura ósea llega un punto en el que ya puede volver a subir en menos distancia.
DOCENTE: Ha no pero ahí ya estamos metiendo cuestiones de distancia, pero recuerden que aquí estamos analizando la relación velocidad aceleración, velocidad y aceleración, si comparto tu punto de vista de la distancia, pero no estamos analizando cosas que tienen que ver con distancia, estamos en el caso de que la velocidad y la aceleración es un cambio de la velocidad conforme pasa el tiempo, creo que ahí están los puntos de vista donde los casos están intercambiados pero ahorita lo vamos a ver, a mayor altura mayor velocidad y ahorita unos están discutiendo ha pues si tengo mayor velocidad unos dicen me cuesta más trabajo frenarlo y otros dicen no freno rápido, están de acuerdo que es el par de panoramas que hay planteado y la que está aquí al no tener tanta altura la velocidad es menor, entonces están diciendo que a una velocidad menor esto cuando entra justamente a la glicerina se frena y otros dicen no si se frena pero sigue.
ALUMNO A: Podríamos tomarlo como este ejemplo como por decir el de un coche, cuando vas en un coche y tu velocidad no es tanto no sé y se atraviesa un perro puedes frenar bien y no de golpe, pero si ya llevas cierta velocidad este todavía como que te cuesta.
ALUMNO D: Es que influye mucho el medio en el que estamos, en este caso frenar el carro ya no tiene que ver densidades y esas cosas ese ejemplo es muy aparte.
ALUMNO C: Puedo plantear algo para todos.
DOCENTE: Espérame primero ella y ya después tú, que paso Ashley.
ALUMNO S: En este caso ya entra, mi pregunta es, se desacelera más rápido en función del tiempo, sería el primero.

DOCENTE: El análisis realizado es velocidad y aceleración, la canica que está aquí traía mayor velocidad entonces cuando entra a la glicerina, ¿Qué le está pasando a la aceleración? Ósea se está frenando más rápido o si frena pero le cuesta más, si me explicó

ALUMNO R: Viendo el programa de tracker entre una distancia de afuera y la de adentro había mucha distancia en la aceleración ósea había mucho espacio y encontrar en centímetros sería muy chiquito (Da una explicación un tanto diferente, queriendo sustentar su respuesta de forma cuantitativa) entonces yo considere eso para decir cual se frena más rápido.

DOCENTE: Vamos a verlo.

ALUMNO C: Pero estamos considerando que la aceleración es constante.

DOCENTE: Pero haber vamos a ver porque eso que dices que estamos pensando que la aceleración es constante es su hipótesis, antes de hacer toda esta discusión. Vamos hacer el análisis y posteriormente se van a volver a ver los vídeos, creo que las ideas están encontradas.

Vamos a ver este de aquí es el que está a veinte (Se sigue teniendo un poco de problemas en el programa en la reproducción del vídeo) si no ahorita lo cargo sin ningún análisis porque quiero que vean sus ideas que plasmaron, vamos a ver el de veinte pero fíjense ahora lo que les voy a mostrar está en color rojo, el análisis ya está hecho y vean en esta parte ya se tienen aceleraciones negativas, pero vean la velocidad con la que está llegando y como esa velocidad cambia, aguas no quiero que sean tan cerrados y digan es que casi son los mismos números porque ustedes lo mencionaron que el efecto de la glicerina le reduce la velocidad y voy a colocar la posición para ver si los datos analizados hace referencia a la misma foto o está analizando otro foto diferente, no se pierdan aquí la relación es velocidad aceleración.

Este es el primero el de veinte voy a poner el análisis es completo pero cuando empiecen a ver los puntos rojos es porque ahí ya empiezan analizar lo que pasa adentro (Se reproduce el programa para que puedan observar el movimiento de la canica) observen como se presentan las velocidades y aceleraciones, lo que comentaban es que lo que hace la glicerina lo desacelera y si lo desacelera las aceleraciones deben de ser de signo.

ALUMNOS: Negativas.

DOCENTE: Si se dan cuenta le voy a poner un pequeño pause aunque la canica sigue en movimiento, aquí tengo una velocidad muy pequeña y tiene esta aceleración y está en una posición, están de acuerdo.

ALUMNOS: Si.

DOCENTE: Me voy a saltar a la siguiente si se dan cuenta la 269 se analizaron muchas fotos en esa misma posición, pero porque analiza muchas fotos en esa misma posición, se observa como viene ese puntito rojo como que de repente iba para bajo y después lo considera arriba, de ahí esas variaciones entre que considere las aceleraciones positivas y negativas, pero experimentalmente la canica no va subir, pero sigan observando la velocidad y aceleración (Se eligieron datos de velocidad y aceleración en diferentes posiciones). Las que me estoy saltando es porque están en la misma posición si se ve.

ALUMNOS: Si

DOCENTE: Me voy a saltar a otra posición velocidad y aceleración lo observan, esto es en el primer experimento.

ALUMNO C: Profa. Podría ver la gráfica de la velocidad.

DOCENTE: De que, de la velocidad dentro

ALUMNOS: Sí, de la velocidad y aceleración

ALUMNO C: Híjole es de la posición y está en equis

ALUMNO X: Ha esa es de velocidad

DOCENTE: Velocidad (Se muestra la gráfica y se nota cierto desconcierto en los alumnos)

ALUMNO J: Es como si fuera un MRU nada más, puede poner la de la aceleración.

ALUMNO X: Es casi igual.

DOCENTE: Exacto dado que son valores muy chiquitos no es muy diferente, pero bueno aquí viendo las gráficas vayan haciendo sus conjeturas con respecto a lo que ustedes pensaron del movimiento, porque las gráficas son totalmente distintas a cuando se realizó el análisis a fuera dado que en los tres casos que se analizaron se vio sin problemas, pero les digo ahorita vamos a ver las otras y la gráfica no ayuda, aquí lo que va ayudar más es justamente observar los valores de velocidad y aceleración que les estoy poniendo vale, ese es el primero.

Vamos a ver qué pasa en el segundo recuerden voy a colocar la posición solo como referencia y lo voy a regresar (Se muestra el análisis hecho en la caída de cuarenta centímetros) ahí fíjense, aquí llega con cierta velocidad y ahí empieza, creo que esta primera parte es genial porque hace ese cambio, se observa que llega con una velocidad de 2.8 metros sobre segundo y pasa a 0.005 metros sobre segundo y esta de aquí son sus

velocidades y aceleraciones (Se muestra un conjunto de datos para que puedan comparar las diferentes velocidades y aceleraciones).
Voy nuevamente con el tercer experimento y observen otra vez las velocidades y aceleraciones y finalmente el ultimo que es el de un metro son de color verde sus velocidades y aceleraciones (Se muestra un conjunto de datos para que puedan comparar las velocidades y aceleraciones en diferentes posiciones).
Espero que este análisis cuantitativo nos permita hacer el llenado del siguiente tabla, altura de la caída 20, 40, 60 y un metro (Se señala la columna en donde se coloca la información) vean lo que vamos analizar es la velocidad con la que llega la canica y la velocidad que toma tres posiciones después, para ver si se puede observar en cual se frena más rápido y en cuál si frena pero no del todo, entonces en el de veinte voy a colocar el análisis completo para que ustedes me indiquen donde se ve el cambio antes de donde empiecen las aceleraciones negativas.
ALUMNO X: Más abajo, ese
DOCENTE: Ok ese se observa bien, entonces esa sería la velocidad, la aceleración, con la que está llegando y su posición en el tiempo.
ALUMNO J: Ese es el de veinte.
DOCENTE: Si es ese, observen bien (Llenan su tabla con la información correspondiente)
ALUMNO X: Velocidad inicial ok.
DOCENTE: Esa es la velocidad con la que llega la canica, nos saltamos esta información por la cuestión de la plastilina alrededor de la probeta.
ALUMNOS: Ahí está bien, uno arriba.
DOCENTE: Le colocan la información de tres posiciones posteriores a esta, consideran que aquí se observa el efecto de la glicerina.
ALUMNOS: Sí
ALUMNO X: Y ¿cuantos valores hacia abajo tomamos Profa? Cuatro
DOCENTE: Cuatro está bien para el llenado de la tabla, los dejo sombreados para que no se pierdan. Este es el primero que eligieron y este sería el segundo ¿Qué pueden observar? (Observan y siguen en el llenado de la tabla, murmuran y discuten el cambio de la velocidad y aceleración, tienen ciertas dudas en el llenado de la tabla y se hacen aclaraciones) Consideró importante que indiquen cual es la velocidad inicial de la canica, para que observen de forma cuantitativa el cambio.
Ahora vamos a ver el otro caso el de cien centímetros coloco la pestaña donde se hizo el análisis completo y ustedes me dicen que foto van a considerar que va hacer la velocidad inicial con la que llega la canica,.
ALUMNOS: Ahí, no, unas antes, otra, esa.
ALUMNO J: Porque la que sigue se puede confundir con la plastilina.
DOCENTE: Sombreo los datos para llenar su tabla, (Algunos puedan tener mal su llenado de tabla por no tener la precaución de copiar bien la información en la columna que le corresponde) Esos son los datos que eligieron y observen como si llega con una velocidad a mayor a diferencia del caso anterior al de veinte. (Realizan la elección para la información donde la canica ya entro a la glicerina) Si es una buena elección por que se observa el cambio drástico de la velocidad, ¿Qué numero sería este chicos?
ALUMNOS: Es cero punto cero cero ocho.
DOCENTE: Una velocidad casi nula (Discuten los cambios de velocidad y aceleración de este caso y terminan el llenado de la tabla), Ok en lo que terminan los demás de copiar H, en una comparación cuantitativa la cual se pudo observar gracias al programa, ¿Quién desacelera más rápido?
ALUMNO H: La que está a un metro.
DOCENTE: C tu opinión, ¿Quién más estaba? Así X.
ALUMNO J: Con lo que dijiste de la Ley de Newton apoyaste lo que estábamos diciendo nosotras.
DOCENTE: Qué opinas C después del llenado de la tabla, donde estuvimos analizando las velocidades y aceleraciones.
ALUMNO C: Estoy observando una desaceleración más brusca.
DOCENTE: Entonces ¿Cual se frena más rápido?
ALUMNOS: La que está a cien centímetros.
ALUMNO M: Igual tiene que ser la de un metro que frena más rápido porque si observamos los datos de tiempo la de veinte centímetros baja de 209 a 242 solo punto cinco de velocidad metros sobre segundo en cambio la de un metro 0.833 a 0.850 baja casi tres.
DOCENTE: Ha ok, entonces tú también observaste intervalos de tiempo y por eso coincides con tus compañeros que la de cien se frena más rápido, esta parte nos ayudó a determinar en cuál de los casos se frena más rápido, dime C.

ALUMNO C: Se vale reformular la siete y ocho (Se refiere al número de pregunta de la prueba).
DOCENTE: He no, pero lo que si se vale.
ALUMNO A: Es la hipótesis.
DOCENTE: Exacto y por eso me voy a quedar con esto (Señala los datos de velocidad y aceleración de los casos), pero observen bien los datos porque esto va de la mano con la hipótesis que ustedes plantearon referente al movimiento de la canica dentro de la probeta y tiene que ver en los comportamientos de velocidad y aceleración ya que la mayoría concuerda, ¿Alguien que me recuerde su hipótesis?
ALUMNO X: Que la velocidad iba disminuir proporcional al tiempo y la aceleración iba ser negativa y constante.
DOCENTE: Bien entonces de ahí mi insistencia de observar, alguien más me recuerda su hipótesis
ALUMNO J: Yo había puesto que la velocidad iba a ser constante como fuera bajando la canica y que aceleración se iba a desacelerar sin embargo no se va iba a volver nula pero tampoco constante.
DOCENTE: Entonces mencionas que la velocidad se mantiene constante, observa velocidad aquí, velocidad acá (Indica varias opciones en la pantalla del programa) este análisis ayuda en mucho para esclarecer sus ideas referente a la hipótesis planteada.
ALUMNO A: Por decir yo le puse que era un movimiento MRUA teniendo en cuenta el medio que se tenía inicialmente era aire y al entrar a la glicerina por lo que su aceleración cambia de forma negativa pero sigue siendo constante y su velocidad disminuye muy drásticamente pero existe.
DOCENTE: En esa hipótesis nuevamente coincide que la aceleración debe de ser constante y aquí estamos observando otra cosa, con el análisis hecho hasta el momento tendrían que preguntarse si tienen que reformular la hipótesis que plantearon inicialmente, para reformularla no se complique solo observen como se está comportando la velocidad y la aceleración cuando la canica se está moviendo dentro de la probeta.
ALUMNO R: MRUA
ALUMNO C: No inventes
DOCENTE: Ahí colóquenlo si siguen pensando que es MRUA es porque estas super…
ALUMNO X: Reprobado (Un momento de risa para todos)
DOCENTE: No, convencido de que se mueve con una aceleración constante de tipo constante y que la velocidad es proporcional al tiempo, porque es la característica de un movimiento acelerado (Hay desconcierto referente al como expresar su hipótesis porque solamente están familiarizados con MRU y MRUA)
ALUMNO C: Yo analice un poquito la desaceleración en el de 100, si se desacelera más rápido si estamos bien pero bueno si lo ve, justo es un poco hay no quiero decir esa palabra pero se ve un poco proporcional porque pasa del 248 al 160 del 160 al 80 que es la mitad y de 80 a 40 que es otra vez la mitad y de ahí un valor cercano al veinte y de ahí ya cae más feo.
DOCENTE: Ha ya crees que es un tipo de proporcional que te es familiar hasta cierto punto, sugiero que expresen con se comporta la velocidad y aceleración posiblemente no estén familiarizados (Siguen en una discusión de las ideas que cada quién tiene y se les señala en donde se reformula la hipótesis).
ALUMNO R: Yo sigo creyendo que es MRUA.
DOCENTE: Si me colocas MRU me estarías diciendo que la aceleración es cero y que la velocidad es la misma y si colocas MRUA me estarías diciendo que la aceleración es la misma y que la velocidad es proporcional al tiempo si no es nada de eso descríbelo con palabras, pero lo del MRU y MRUA es porque hasta cierto punto se cumplen esas condiciones
ALUMNO R: Son opcionales
DOCENTE: Exacto son opcionales (El alumno se sorprende y desecha la opción de estos dos movimientos)
ALUMNO R: Es que yo pensé que solo podía ser cualquiera de esas dos opciones.
DOCENTE: (Se escucha la inquietud de un alumno referente a qué tipo de proporcionalidad podría ser y se realiza una comentario) Creo que están acostumbrados a proporcionalidades de tipo lineal.
ALUMNO A: Así es miss que se han hasta cierto punto muy específicas.
DOCENTE: Me refiero a que sea una reducción de uno a uno o de mitad en mitad como el que tú mencionabas, pero hay diferentes tipos de proporcionalidad donde no justamente tenga que ser de tipo lineal. Listos quién me ayuda referente a su hipótesis.
ALUMNO X: Yo sigo con la idea que la velocidad disminuye proporcionalmente al tiempo y que la velocidad es negativa y yo siento que si tomamos más valores se vería constante, la aceleración.
ALUMNOS: No (exclaman la mayoría de compañeros)
DOCENTE: La aceleración sería negativa pero sigues convencido que sería constante y que la velocidad es proporcional al tiempo (Con esta última idea exclaman como tres compañeros más que concuerdan con el)

ALUMNO X: Pero va disminuyendo, ósea según yo quedaría así (Gráfica en el pizarrón una recta con pendiente negativa para indicar como quedaría la velocidad) y la de la aceleración según yo así (Gráfica en el pizarrón una recta horizontal y la coloca por debajo del eje del tiempo)
DOCENTE: Me ayudas si colocas tus graficas en la hoja y eso es lo que tú piensas y que si lo observamos en el software se vería algo de ese estilo, R.
ALUMNO R: Yo puse que no es ninguna porque siento que ni la velocidad ni la aceleración es constante porque aunque son valores muy chiquitos pero varían realmente.
DOCENTE: Entonces vean que con esto que menciona su compañero rompe con estos tipos de movimientos donde la aceleración es cero o es constante, dice que tanto la aceleración como la velocidad es variable, quién tiene una idea distinta a estas dos que nos compartieron.
ALUMNO C: Yo tengo una fusión de esas dos.
ALUMNO A: Si yo también tengo la fusión de esas dos.
ALUMNO C: Que la velocidad es proporcional pero va disminuyendo y que la aceleración es variable negativa.
DOCENTE: Quién sigue convencido de que el movimiento dentro de la probeta tiene una aceleración constante.
ALUMNOS: No.
DOCENTE: Que la aceleración dentro es constante, no, entonces como pueden ver eso rompe un poco con lo que están acostumbrados, a ver panoramas donde la aceleración es cero o donde relativamente en caída libre la aceleración hasta cierto punto se comporta de forma constante, pero hay movimientos en los que esto no ocurre donde la aceleración no es constante y de ahí la importancia de analizar y escoger justamente el medio de la glicerina.
ALUMNO A: Es que eso, es que por ejemplo nosotros la verdad ya dejamos de tomar física hace tiempo y nos quedamos como con lo que usted nos dijo y entonces apartir de eso y de la observación la glicerina tiene mucho que ver porque por ejemplo si hubiera sido agua, hubiera sido otro comportamiento muy distinto.
DOCENTE: Sería bueno analizarlo
ALUMNO A: O aceite también, creo que tiene que ver con las densidades.
DOCENTE: Exacto porque está dentro de un pensamiento o panorama donde todo se puede mover con una aceleración cero o constante, pero lo que tiene que ver con el movimiento de la canica dentro de la glicerina es diferente que no tiene aceleración ni que es constante si no que la aceleración va cambiando, es muy importante entender que no todas las cosas se mueven con aceleraciones constantes y bueno finalmente con esto vamos a la parte final de esta actividad dice analizando el movimiento de la canica formula una hipótesis en relación a la velocidad y la aceleración de la misma en el intervalo de tiempo que atraviesa la glicerina, es decir la canica llego con una cierta velocidad inicial pero en el intervalo donde hace la cuestión del frenado, que es donde se estuvieron analizando velocidades y aceleraciones, en eso va la formulación de esa hipótesis, cómo es la aceleración con respecto a la velocidad en ese instante cuando la canica llega con cierta velocidad impacta con la glicerina es decir la frena y obviamente después se empieza a mover, como es la relación entre estas dos variables, ¿Cómo es la aceleración con respecto a la velocidad que lleva la canica?
ALUMNO C: Algo así como que si la aceleración es negativa la velocidad disminuye.
DOCENTE: Algo así donde me digan, yo pienso que la aceleración es algo con respecto a la velocidad, lo que formulen se olviden un poco de que el tiempo tiene que estar involucrado, es decir en ese comportamiento de (Retoma el ejemplo del software) la velocidad aquí era 5.30 y su aceleración es positiva ahora a las velocidades que les paso.
ALUMNOS: Disminuyeron.
DOCENTE: Y qué pasa con la aceleración de ahí esa importancia de haber observado y de haber analizado los datos, como es esa relación de velocidad y aceleración (Discuten y dan ideas en voz alta con respecto a las velocidades y aceleraciones, formula cada quién su hipótesis).
ALUMNO A: Creo que ya.
DOCENTE: Esta hipótesis que formulen la vamos a modelar matemáticamente de ahí su importancia, vean que también están formulando una hipótesis donde están involucradas dos variables en las cuales no está involucrado el tiempo directamente y la que se está formulando acá es cómo se comporta la aceleración con respecto a la velocidad que lleva la canica (Observa las hipótesis de algunos alumnos).
Para hacer el cierre de la actividad vamos a discutir sus hipótesis planteadas con respecto a la aceleración y velocidad.
ALUMNO C: Yo puse que la aceleración es positiva la aceleración aumenta y cuando la aceleración es negativa la velocidad disminuye.

DOCENTE: Ok la velocidad disminuye.
ALUMNO G: Entre más velocidad hay más desaceleración ocurre y también puse que la derivada de la velocidad es la aceleración.
DOCENTE: Mmmmmm pero ahí no explicas la relación, A.
ALUMNO A: Yo le puse que la velocidad es proporcional a la aceleración teniendo en cuenta que si una disminuye la otra también va a disminuir de igual forma pero sin ser constantes entre sí.
DOCENTE: Ella nos menciona que la aceleración es proporcional a la velocidad, bien J.
ALUMNO J: Yo le puse que la aceleración se vuelve proporcional a la velocidad en el momento en el que la canica entra en contacto con la glicerina ya que al disminuir la velocidad disminuye la aceleración, es decir que se está comportando de una manera lineal con respecto a la velocidad.
DOCENTE: Una manera lineal ok ahorita vamos a ver.
ALUMNO X: Creo que coincidimos porque igual le puse que la aceleración decrece en función de la velocidad, la aceleración es directamente proporcional a la velocidad pero solo tomando en cuenta el intervalo de la glicerina
DOCENTE: La aceleración es directamente proporcional a la velocidad, creo que algunos coinciden, alguien de aquí.
ALUMNO R: Yo puse que si la aceleración se vuelve negativa la velocidad disminuye de igual manera a la inversa por lo tanto son proporcionales
DOCENTE: Son proporcionales y esta formulación a la que llegan de que si la aceleración es proporcional a la velocidad con la que se mueve el objeto, ¿Cómo la expresamos simbólicamente? (Escribe en el pizarrón la hipótesis)
ALUMNO C: A de v es igual a n por v (Escribe en el pizarrón la expresión *"a(v)=nv"*).
DOCENTE: Llegaron a esa conclusión, haber la voy a leer la aceleración es proporcional a la velocidad.
ALUMNO X: Oiga Profa. y ene ¿Qué es?
ALUMNO C: Ene.
ALUMNOS (A y C): Una constante de proporcionalidad.
DOCENTE: Alguien otra idea distinta de lo que escribió C.
ALUMNO X: Yo tengo otra pero no sé si vaya estar muy mal (Escribe su idea en el pizarrón con el uso de derivadas).
DOCENTE: Ok es importante que puedan expresar su hipótesis de que la aceleración es proporcional a la velocidad, que si llego con una velocidad muy rápida (Interrupción por una alumna)
ALUMNO D: Oye Gabo tengo algo ahí estas diciendo que la aceleración depende de la velocidad con la que vayas.
ALUMNO X: Si.
ALUMNO D: Entonces tiene que ir al revés (Discuten la expresión escrita por su compañero).
DOCENTE: Pero observen que en su hipótesis está haciendo uso de diferenciales y en la otra está escrita.
ALUMNO A: Como una linealidad.
DOCENTE: La expresión, teniendo en cuenta que me están diciendo que la aceleración es proporcional a la velocidad, recuerden que la aceleración que estamos formulando están dentro de la probeta, ¿Cómo tienen que ser? (Señala los resultados)
ALUMNOS: Negativas.
DOCENTE: Entonces a sus expresiones matemáticas les hace falta un signo.
ALUMNO C: Tener las condiciones.
DOCENTE: Mande, ¿Cómo las condiciones?
ALUMNO N: Es que ahí las aceleraciones son positivas.
DOCENTE: Exacto y las que estuvimos analizando son desaceleración.
ALUMNO N: Negativas, entonces le hace falta un signo negativo.
DOCENTE: Que le tendríamos que hacer a la idea de C, porque para el esto que está escrito describe que la aceleración es proporcional a la velocidad, pero el signo tiene que ser negativo no.
ALUMNOS: Si, hace falta un signo negativo.
DOCENTE: Y en la idea que nos compartió A esto describe lo que escribimos con palabras pero simbólicamente. Entonces coloquen de manera individual debajo la hipótesis después de que formularon su hipótesis donde la aceleración es proporcional a la velocidad con la que llega el objeto pero con signo negativo, entre mayor velocidad tenga más rápido se frena y eso se visualiza en el caso número cuatro y por eso era lo que mencionabas A que se observa como hasta la glicerina sube, estamos chicos por esta sesión es todo gracias.

7.6 TRANSCRIPCISIÓN DE LA FASE DE MODELACIÓN

DOCENTE: Ya iniciamos la grabación, vamos retomar lo que se cerró en la sesión pasada que fue la parte experimental y con esa hipótesis que ustedes formularon referente a la relación existente entre velocidad y aceleración, ustedes formularon cierta hipótesis donde hicieron mención que la aceleración es proporcional a la velocidad (Se escribe la hipótesis en el pizarrón) pero recordemos que se estuvieron analizando aceleraciones de signo negativo, ¿Qué implicaba esta relación que encontraron?
ALUMNO C: Proporcionalidad
DOCENTE: Si, pero me refiero a la velocidad con la que llegaba la canica cuando estaba a menor altura.
ALUMNO J: Ha se desacelera más lento.
ALUMNO N: A diferencia de cuando se dejaba caer a mayor altura se desaceleraba más rápido.
DOCENTE: Exacto entonces en este video está el compendio de las diferentes alturas a la que se dejó caer la canica se puede volver a observar lo que se estuvo discutiendo la sesión pasada (Se reproduce el video en cámara lenta para todos) esta es la primera, en la segunda se ve un instante donde se ve el frenado a diferencia del anterior, en el tercero ahí ya llego el cuarto lo descartamos por que toco antes de entrar y ahí en el último justo se visualiza su conclusión en donde se observa que por un instante se detiene, es decir, si llego con una velocidad más grande más rápido me freno si llego con una velocidad menor me freno más lento.
Ahí en su mesa ya está la hoja de trabajo donde se realizará una actividad de modelado pero para esto era importante que ustedes observaran la relación existente entre velocidad y aceleración que se mencionó con anterioridad, colóquenle su nombre por favor y vamos a resolver el problema del pistón en retroceso, que es un sistema muy análogo a lo que se observó en la sesión pasada; dice lo siguiente, para frenar el retroceso de un cañón al ser disparado, se ha diseñado un mecanismo que opera de la siguiente forma: Un émbolo tipo pistón se une al cañón , y este se mueve dentro de un cilindro con aceite, el émbolo tiene orificios que son estos que están aquí (Se indica en la pantalla de TV con el mouse cuales son los orificios que tiene el embolo) por los que se fuerza el paso del aceite de una parte a la otra de la cámara del pistón. Cuando el cañón retrocede a una velocidad inicial v_0, por efecto del mecanismo descrito, este sufre una desaceleración proporcional a su propia velocidad, con letras distintas a las que propusieron ustedes pero habían llegado a la misma conclusión, es decir: a=$-kv$. Este imagen es un giff que no se puede visualizar pero que justamente describe el disparo del cañón hay un retroceso entonces para desacelerar o frenar cuando ocurre ese disparo se diseñó este mecanismo (Se señala la imagen del embolo con el aceite) este de aquí es el embolo que llega con cierta velocidad inicial dado que está inmerso dentro del aceite cuando este baja dado que tiene los orificios hace que el aceite pase de esta cámara a la otra y ocurra el retroceso de frenado y sin este sistema de retroceso pues se imaginaran que pasaba a los que se encontraban atrás del cañón (Señala la imagen del giff en la pantalla de la TV), entonces el problema del pistón coincide con la hipótesis realizada con las canicas, la probeta y la glicerina, que para poderlo desacelerar es proporcional a la velocidad con la que llegue de acuerdo, ok en la parte de abajo dice inciso a encuentre la velocidad del retroceso en términos del tiempo, inciso b encuentre la posición del retroceso en términos del tiempo, es importante mencionarles que va a salir fuera del contexto de los otros tipos de movimientos (Se refiere al MRU y MRUA) porque recuerden que el movimiento aquí cuenta con la característica de que la aceleración.
ALUMNOS: No es constante
DOCENTE: Exacto no es constante, entonces al no ser constante no se puede describir de forma uniforme o acelerado y finalmente inciso c realice las gráficas cinemáticas correspondientes a la velocidad y posición en GeoGebra.
Bueno para el primero que tenemos de información y que es un compendio de todo lo que se ha estado trabajando en las últimas sesiones, por información del mecanismo se sabe que la aceleración es proporcional a la velocidad pero con signo negativo esta información es punto de partida pero por otro lado en la clase introductoria se estuvo viendo que la aceleración a que es igual.
ALUMNO X: A la velocidad sobre el tiempo.
DOCENTE: Si, pero si lo vemos desde el contexto y uso de derivadas.
ALUMNO D: Era dv sobre dt “$a = \frac{dv}{dt}$".
DOCENTE: Entonces por otro lado ustedes saben que la aceleración es igual.
ALUMNOS: A la diferencial de la velocidad con respecto al tiempo.

DOCENTE: Exacto entonces esto es lo que tenemos de información y es lo que sabemos y esto es válido para cualquier tipo de movimiento (Señala la expresión escrita en el pizarrón correspondiente a $a = \frac{dv}{dt}$) no solo para el MRU o MRUA, entonces para poder contestar el inciso a ya tienen mucha información, por un lado saben que la aceleración es esto (Indica la expresión $a = -kv$) y que por otro lado saben que es la variación de la velocidad con respecto al tiempo y tienen relaciones interesantes porque justamente en el inciso ales piden que encuentren la velocidad en función del tiempo, creo que estas relaciones las pueden conjuntar para poder contestar lo que les están solicitando, de acuerdo, esta parte es la importante por un lado saben que esto es la aceleración y ´por otro lado esto (Señala las expresiones al mismo tiempo de $\frac{dv}{dt}$ y $-kv$) y ahí aparece la velocidad para poder responder al inciso a.
ALUMNO J: Lo puedo resolver aquí (Indica la parte de atrás de la hoja de trabajo).
DOCENTE: Exacto lo pueden resolver atrás o si quieren lo pueden resolver en una hoja de su cuaderno como ustedes gusten.
ALUMNO M: Entonces lo puedo resolver aquí en la hoja.
DOCENTE: Si de todas maneras me van a proporcionar la hoja de cuerdo, aquí entran en relación lo que se estuvo haciendo tanto la parte experimental como en la parte introductoria de lo que entendemos por aceleración, a partir de esto chicos creo que ya lo pueden contestar si dentro de lo que vayan resolviendo tienen dudas levantan la mano y veo en que los puedo apoyarlos.

SE DA TIEMPO PARA QUE PUEDAN RESOLVER EL MODELO MATEMÁTICO DEL PROBLEMA DE RETROCESO DEL PISTÓN.
ALUMNO C: Profa. donde dice encuentre la velocidad de retroceso en términos del tiempo se refiere a la ecuación que se ocuparía para sacar esa velocidad (Se observa lo que está escrito en el pizarrón)
DOCENTE: Primero tendrías que plantear una ecuación que esté involucrada velocidad y tiempo.
ALUMNO C: Ya.
DOCENTE: Y después resolver esa ecuación para que puedas describir la velocidad en función del tiempo que es lo que se solicita en el inciso a, en el movimiento rectilíneo ya se sabe cómo es, pero en este no se sabe nada, pero sale de la ecuación que planteaste, pero aquí sería interesante dejar en claro los intervalos de integración que se tendrían que utilizar.
ALUMNO G: Haaaaa… serían estos, si no y también acá (Escribe los intervalos en su cuaderno).
ALUMNO F: Yo lo resolví así.
DOCENTE: ¿Cuál? (Se observa que en la libreta escribe $\frac{dv}{dt} = a$ resuelve la expresión y llega al resultado de v=at) Ha pero acá no sabe cuál es la aceleración (Señala en el cuaderno v=at) bueno aquí ¿Quién es la aceleración? Por un lado sabes esto pero ($\frac{dv}{dt} = a$) pero ¿Quién es a?
ALUMNO F: Es –k por v
DOCENTE: Ha entonces donde tendrías que colocar esa información.
ALUMNO F: Ha si, ya.
DOCENTE: Que paso
ALUMNO J: Es que lo estoy haciendo así mire.
DOCENTE: A, pero igual, aquí estarías considerando que la aceleración es.
ALUMNO J: Una constante.
DOCENTE: Y a poco se está trabajando con eso.
ALUMNO J: No
DOCENTE: Pero si sabes cómo es la aceleración
ALUMNO J: Es proporcional a la velocidad
DOCENTE: Ha entonces no puedes resolver la ecuación considerándola como una constante (Señala en su cuaderno el procedimiento de solución de resolver la ecuación diferencial $\frac{dv}{dt} = a$ considerando la aceleración como constante) porque eso no está pasando en el problema del pistón, entonces considerar la a ¿Cómo la tienes que considerar?
ALUMNO J: Ha ok
DOCENTE: (Un alumno "R" le enseña la solución) A diferencia del primero que me mostraste en esta parte de aquí es conveniente colocarle ciertos intervalos de integración no y aquí también (Se observa los intervalos que escribe) pero aquí, ¿Quién es la variable?
ALUMNO R: Es t

DOCENTE: A, entonces aquí no es correcto lo que estas poniendo (Se indican los intervalos de integración colocados en la integral con respecto a la variable t $\int_{v_o}^{v} -kdt$)
ALUMNO M: Profa. ya tengo que el diferencial de t pasa a este lado y de este lado el diferencial de v entre v y se integra de ambos lados ($\int \frac{dv}{v} = \int -kdt$)
DOCENTE: Ha ok viene el comentario que hice a tu compañero, analizando quienes serían las variables sería conveniente colocar los intervalos de integración, ósea que esta integral sus intervalos serían (Le indica la integral de $\int \frac{dv}{v}$
ALUMNO M: De 0 a 1 podría ser
DOCENTE: Mmmm no, tienen que ser intervalos generales que fue lo que se estuvo haciendo al final de la actividad introductoria. Desde una cierta velocidad que
ALUMNO M: Velocidad inicial hasta una velocidad final
DOCENTE: Exacto, entonces en la parte acá también.
Cuando lleguen a la parte de las integrales sería importante que recuerden lo que se hizo en la actividad introductoria cuando de se resolvió cuando se tenía una aceleración constante, entonces cuando llegábamos a esta parte que se colocaban.
ALUMNOS: Intervalos
DOCENTE: Intervalos de integración vale, entonces para que eso lo tengan en cuenta cuando lleguen a esta parte de las integrales.
ALUMNO G: Entonces así quedaría la evaluación de las integrales.
DOCENTE: Es incorrecta su evaluación no, ¿Cómo se evalúan las integrales? Ósea ya que resolviste la integral hay que evaluar no ¿Cómo es la evaluación?
ALUMNO G: A la evaluación es la velocidad inicial menos la velocidad final.
DOCENTE: Ya que tienes el resultado de la integral ¿Qué límite de evaluación se sustituye primero?
ALUMNO G: Ha el de velocidad final, oh ya.
DOCENTE: Eso cambia tu resultado.
ALUMNO X: No sé si voy bien.
DOCENTE: ¿Cuáles es tu ecuación? (Se observa la igualdad de $\frac{dv}{dt} = -kv$) ok ¿Quiénes son las variables?
ALUMNO X: Velocidad y tiempo.
DOCENTE: Ok entonces podrías colocar de un lado lo relacionado a la velocidad y del otro lado el tiempo.
ALUMNO J: No sé si estoy bien.
DOCENTE: Esta evaluación es incorrecta ($\ln(v - v_o) = -k(t - t_0)$), sugiero que coloque el resultado de las integrales para que lo pueda visualizar, coloque el resultado de la integrales (Escribe los resultados de las integrales) y después realice la evaluación a ver si la evaluación es la misma.
ALUMNO J: A con razón ya vi.
DOCENTE: Esta integral con respecto a quién la está resolviendo.
ALUMNO F: Con respecto a t
DOCENTE: Entonces si es con respecto a t porque sus límites de integración están con respecto a velocidades y otra cosa si ya está colocando límites integración por que el resultado tiene constaste de integración.
EN ESTA PARTE DE LA SESIÓN EMPEZARON A DISCUTIR SUS IDEAS Y ENTRE ALUMNOS SE AYUDABAN A DISERNIR LAS DUDAS QUE TENIAN REFERENTE A LA MATEMATIZACIÓN DEL PROBLEMA, SE LES VUELVE A INDICAR A LOS ALUMNOS QUE INTENTEN POR SI MISMOS RESOLVER EL MODELO MATEMÁTICO.
DOCENTE: Haber cada quien intente resolver el problema si necesitan ayuda ya les mencione que yo los puedo orientar.
ALUMNO J: Ya quedo
DOCENTE: Fue distinto no.
ALUMNO J: A la puedo tomar como cero (Se refiere a la posición inicial).
DOCENTE: Si porque ahí se puede colocar el cero con respecto al sistema de referencia y las gráficas.
ALUMNO J: No tengo GeoGebra.
DOCENTE: Bueno si no tienes GeoGebra las puedes graficar para visualizar el comportamiento de la velocidad y la posición conforme vaya pasando el tiempo.
ALUMNO J: Huy ahí es donde ya me atore.
ALUMNO H: Ya tengo la posición en función del tiempo.

DOCENTE: Es distinto no, y aquí podemos suponer que si colocamos el sistema de referencia la posición inicial tome el valor de.
ALUMNO H: Cero.
DOCENTE: Entonces aquí ya quedan las posiciones y solo faltarían las gráficas.
ALUMNO C: Podríamos suponer que la velocidad inicial sea una constante.
DOCENTE: Si, de hecho es la velocidad de retroceso.
ALUMNO D: Las evaluaciones que realice son correctas.
DOCENTE: Y las evaluaciones en la integral de t son con respecto a la velocidad o con respecto al tiempo.
ALUMNO D: Es que justo ahí tengo la duda.
DOCENTE: ¿Quién es la variable aquí?
ALUMNO D: Tiempo
DOCENTE: Y en dónde están las evaluaciones y ya está resuelta la integral, voy a ver cómo vamos, ya llevan casi una hora en encontrar el modelo.
ALUMNO J: Lo puedo colocar así.
DOCENTE: (Se observan sus gráficas y se le sugiere colocar más información) ¿Qué valor sería este?
ALUMNO J: A hay voy.
ALUMNO F: Esta bien la integral de la exponencial.
DOCENTE: ¿Quién es la u de la exponencial? En base a la fórmula que estas utilizando.
ALUMNO F: Es kt.
DOCENTE: Y su derivada la tienes
ALUMNO F: No.
DOCENTE: Entonces como le hace para tener completa la derivada y ya tener el resultado de la integral (Se observa como resuelve la integral y lo hace de forma correcta).
ALUMNO S: Profa. así me quedo la igualdad para calcular la posición.
DOCENTE: ¿Quiénes son las variables ahí?
ALUMNO S: La velocidad y la posición.
DOCENTE: Entonces el tiempo siempre va hacer el mismo.
ALUMNO S: A la velocidad y el tiempo, porque el embolo es fijo.
DOCENTE: Entonces el émbolo siempre va estar en una posición fija por ejemplo a cinco centímetros, imagínate que este es el embolo al momento de ser disparado el cañón este llega con cierta velocidad y el embolo hace esto, la posición es fija.
ALUMNO S: No.
DOCENTE: A parte acuérdate que cuando se vio los diferenciales se puede distinguir quienes son las variables, entonces quienes son las variables.
ALUMNO S: El tiempo y la posición.
DOCENTE: Exacto esas son tiempo y posición vale.
ALUMNO H: Así nada mas (Hace referencia a las gráficas que realizo de posición y velocidad).
DOCENTE: Pues sería importante por ejemplo que en esta gráfica indicaras que valor es este (Indica el inicio de la gráfica de velocidad con respecto al tiempo).
ALUMNO H: Sería la velocidad inicial.
DOCENTE: Y aquí este valor (Indica el comportamiento asintótico de la gráfica de posición con respecto al tiempo) aunque no se conozca el valor ¿Qué valor tendría que ser este?
ALUMNO H: Ha ya, si ya se cual.
DOCENTE: Ok vamos a ver y analizar el modelo matemático porque ya llevan un ratito tratando de resolver, (Se prepara la computadora y el pizarrón para realizar el análisis) considero que la mayoría ya tiene la respuesta de la velocidad. Vamos a resolver todos juntos ustedes ahí ya tienen su resultado. Para el inciso a que teníamos que por el mecanismo de frenado la aceleración era proporcional a la velocidad que llevaba pero con signo contario (Se escribe en el pizarrón $a = -kv$) porque se frena y también se sabe que la aceleración es la variación de la velocidad con respecto al tiempo (Se escribe en el pizarrón $a = \frac{dv}{dt}$). De estas dos se es la variación de la velocidad con respecto al tiempo pero también por otro lado sé que es menos k por v (Se escribe en el pizarrón la igualdad de $\frac{dv}{dt} = -kt$) ¿Quiénes son las variables?.
ALUMNOS: Velocidad y tiempo.
DOCENTE: Exacto creo que sin ningún problema se puede escribir todo lo correspondiente a la velocidad de un lado de la igualdad y con respecto al tiempo del otro lado, en esta parte dado que la velocidad está multiplicando puedo escribir la derivada de la velocidad entre la velocidad es igual a menos k por el

diferencial de t ($\frac{dv}{v} = -kdt$) y entonces para poder conocer la velocidad podemos integrar cada lado de la igualdad ¿Qué es la k?
ALUMNOS: Una constante.
DOCENTE: Entonces al ser una constante la puedo escribir fuera del símbolo de integración ($\int \frac{dv}{v} = -k \int dt$) por el análisis de variables cinemáticas sería conveniente colocar los intervalos de integración, esos intervalos de integración irían desde una cierta velocidad inicial hasta una cierta velocidad final o una velocidad v nada más y el diferencial del tiempo sería desde un tiempo inicial hasta un tiempo final de acuerdo ($\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k \int_{t_0}^{t} dt$) y entonces me pregunto ¿Cuál es la antiderivada? o ¿Que función cumple con la característica de que al derivarla nos dé como resultada la derivada de la función entre la función?.
ALUMNOS: El logaritmo.
DOCENTE: Ok entonces tendríamos el logaritmo natural de la velocidad recuerden que tenemos intervalos de integración no le sumo la constante porque se va a evaluar desde una cierta velocidad inicial hasta una velocidad final y la integral del diferencial del tiempo.
ALUMNOS: Es menos kt.
DOCENTE: Es el tiempo evaluado desde un tiempo inicial hasta un tiempo final ($\ln v_{v_0}^{v} = -kt_{t_0}^{t}$) realizando las evaluaciones nos queda que.
ALUMNOS: Logaritmo de la velocidad final menos logaritmo de la velocidad inicial ($\ln v - \ln v_0$)
DOCENTE: Y esto es igual a k que multiplica a la evaluación del tiempo, que sería
ALUMNOS: Un tiempo t menos un tiempo inicial.
DOCENTE: Como se observa una resta de logaritmos ($\ln v - \ln v_0 = -k(t - t_0)$) con el uso de las propiedades se puede escribir como.
ALUMNOS: Logaritmo natural de velocidad final entre la velocidad inicial ($\ln \frac{v}{v_0}$)
DOCENTE: Logaritmo natural de la velocidad entre la velocidad inicial y esto es igual a menos k por t menos t inicial ($\ln \frac{v}{v_0} = -k(t - t_0)$). Y no pierdo mi objetivo, el cual es una función que describa como es la velocidad de retroceso conforme va pasando el tiempo, necesito esta v (Se señala la expresión de $\ln \frac{v}{v_0} = -k(t - t_0)$) y como está asociada a la función logaritmo natural me conviene que de cada lado de la igualdad.
ALUMNOS: Se le aplique la exponencial
DOCENTE: Ok entonces aquí y aquí, dado que tenemos la exponencial del logaritmo natural nos queda que.
ALUMNOS: La velocidad entre la velocidad inicial es igual a la exponencial de menos k por t menos el tiempo inicial.
DOCENTE: Y si mi objetivo es saber la velocidad finalmente para expresar la velocidad en función de cómo va transcurriendo el tiempo, esta velocidad inicial está dividiendo entonces la puedo escribir del otro lado de la igualdad multiplicando. Entonces la velocidad en función del tiempo es igual a la velocidad inicial que multiplica a la exponencial de menos k por t menos t inicial ($v(t) = v_0 e^{-k(t-t_0)}$), ahora en esta parte de aquí se puede suponer que nuestro tiempo inicial es cuando.
ALUMNOS: Cero
DOCENTE: Es cero y que la velocidad inicial tiene que ser diferente de cero porque es la velocidad de retroceso del cañón, dado que el tiempo inicial es cero nos quedaría que la velocidad en función del tiempo es igual a la velocidad inicial que multiplica a la exponencial de menos k t ($v(t) = v_0 e^{-kt}$).
Observen el resultado y la diferencia de cómo se comporta la velocidad cuando se tiene algo que se acelera de forma constante a un media donde la aceleración no es constante de manera particular que sea proporcional a la velocidad del objeto pero con signo contrario.
Analicemos más cosas antes de pasar a una simulación del pistón, acá no tenemos más datos o condiciones cosa que no nos están dando el problema pero observando el resultado estos valores que puede tomar la constante de proporcionalidad ¿Tendrían que ser positivos o negativos?
ALUMNO S: Negativos porque van en retroceso.
ALUMNO C: A cierto.
ALUMNO A: A si.
ALUMNO X: Mmmmmm positivos.
ALUMNO D: Negativos.
ALUMNO A: Tendrían que ser positivos por que ya lleva el menos no.

ALUMNO D: Bueno si porque dice que es para frenar el retroceso, entonces si tienen que ser positivos.

DOCENTE: La velocidad es una constante estamos de acuerdo y dependiendo de cómo sea su velocidad inicial vamos a poder ver y comparar lo que vimos con las probetas, entonces podemos ver que la velocidad se comporta de forma exponencial y con cuerda con lo que vimos que a mayor velocidad me freno más rápido y justamente la exponencial puede describir eso que al inicio puede decrecer o crecer muy rápidamente y ya después va teniendo un comportamiento asintótico donde los valores ya van cambiando muy poco a poco a medida que va transcurriendo el tiempo, bueno la velocidad inicial es un valor en la simulación de GeoGebra está considerada en un rango de cero a cien tienen que ser positivas estamos, pero haber pregunta este valor k de la constante de proporcionalidad para poder observar gráficamente lo que se estuvo viendo en la parte de las probetas y en la gráfica es ¿Positivo o negativo?
ALUMNOS: Positivo, negativo (Hay opiniones encontradas unos responden positivo y otros negativo).
DOCENTE: Y que consecuencia tiene si k toma el valor de cero.
ALUMNOS: Nos queda la velocidad inicial.
DOCENTE: Ok, entonces tendrían que analizar cómo sería la exponencial cuando k es mayor que cero haber dibújenla, si mayor cero.
ALUMNO J: Sería así (Dibuja la exponencial con su mano donde se observa un decrecimiento exponencial)
DOCENTE: Si con el valor de la velocidad inicial que va a multiplicar a la exponencial pero si k es mayor que cero como se estaría comportando la velocidad.
ALUMNOS: Hacía abajo (La mayoría de alumnos dibujan una exponencial que decrece con su mano)
DOCENTE: Exacto decrece y si k es menor que cero como sería la exponencial.
ALUMNO A: Subiría no.
ALUMNO J: No hacia el otro lado igual casi pero hacia el otro lado (Dibuja una exponencial con su mano que es creciente desde valores negativos del tiempo) caía pero se iría al negativo.
DOCENTE: Hacía acá (Dibuja la exponencial como la alumna se lo imagina)
ALUMNO J: Aja mmm (Viendo la gráfica dibujada reflexiona sobre su respuesta)
ALUMNO C: No yo creo que iría así el otro lado.
ALUMNO A: Yo creo que subiría.
DOCENTE: Yo creo que la gráfica que propones J no tendría sentido porque estaríamos analizando cosas en función del tiempo.
ALUMNO A: Pero no habría un tiempo negativo.
DOCENTE: Entonces si k es negativo y con el signo menos del exponente que le pasa a la exponencial
ALUMNOS: Subiría.
DOCENTE: Y entonces con lo que se estuvo haciendo ¿Cuál representa la velocidad? (En el pizarrón están las dos gráficas que se dibujaron en base a si los valores de k que son mayores que cero y menores que cero) en una la velocidad disminuye y en la otra aumenta
ALUMNOS: La velocidad disminuye es esa (Indican la gráfica de la función exponencial decreciente)
DOCENTE: Entonces ahí es como se vería representada la velocidad ahora como se esperaría ver la gráfica si se trae una velocidad de 100 metros sobre segundo, me refiero que le va a pasar al pistón por ejemplo aquí en la simulación en GeoGebra k toma varios valores por eso la pregunta qué valores podría tomar, aquí k tiene distintos valores de acuerdo. Esto que observan aquí es la simulación del dibujo que tiene que ver con el pistón no es tan precisa por que no se le pusieron los orificios para que se observe que el aceite pasa de esta cámara a la otra no, pero si se observa la acción del embolo que trae una cierta velocidad y el embolo va a bajar de acuerdo, esto que esta acá hace justamente esa representación, aquí para colocar los valores de k se utilizó un deslizador, por eso les preguntaba que como tiene que ser positivos o negativos y ahí esta esa variación de valores ahí lo vamos a colocar en cero (El deslizador que representa los valores de k se coloca en cero) y este otro deslizador representa la velocidad inicial desde cero hasta cien y aquí la gráfica de la velocidad en función del tiempo. Vamos a ponerle una valor a la constante k de valor pequeño y una cierta velocidad diferente de cero porque si no el pistón no va a bajar, que quieren observar primero una velocidad inicial grande o pequeña para ver y comparar eso que en su momento estábamos viendo con las probetas.
ALUMNOS: Grande
DOCENTE: Ok lo voy a dejar en noventa, vamos a correrlo (Se da clic en la animación hecha en GeoGebra y observan la gráfica de la velocidad) tiene o no sentido lo que se observa.
ALUMNOS: Si
DOCENTE: Ósea aunque es la simulación a mayor velocidad ahí se está viendo en la gráfica que le pasa al pistón
ALUMNO C: Se está deteniendo.

DOCENTE: Exacto y el intervalo de tiempo es muy pequeño, ahora que va a pasar si dejamos la misma constante de proporcionalidad pero lo ponemos una velocidad más pequeña, no se ahora vamos hasta el otro extremo por ejemplo ahí en 10 lo voy a regresar desde un tiempo te igual a cero para que lo observen, ¿Cómo tendríamos que ver la exponencial?
ALUMNO A: Mas así (Se refiere a una exponencial con más curva)
ALUMNOS: Con más curva.
DOCENTE: Se va encimar un poquito pero vamos a verlo (Se da clic en la animación hecha en GeoGebra y observan la gráfica de la velocidad)
ALUMNO N: Se ve casi recta.
DOCENTE: Pero bueno aquí en la parte del pistón se observa diferencia.
ALUMNO A: No se le puede hacer zoom.
DOCENTE: Por ejemplo a lo mejor piensen que es igual pero vamos a ver en donde la pendiente de la recta tangente tiene mayor inclinación, este es el primero es cuando la velocidad inicia es de noventa y este es a diez si hiciéramos el análisis en uno de los puntos y trazáramos una recta tangente en cuál de las rectas que trace aquí por ejemplo o acá tiene mayor pendiente porque eso me va a decir cuál se está frenando más rápido
ALUMNOS: En la de noventa
DOCENTE: Están de acuerdo que si trazo una recta aquí su pendiente es mayor que en la de abajo.
ALUMNOS: Si.
DOCENTE: Entonces eso nos indica lo que estábamos observando que a mayor velocidad el objeto se frena más rápido, estamos de acuerdo chicos dudas preguntas.
ALUMNO D: Entonces es positiva.
DOCENTE: Mande.
ALUMNO D: K es positiva.
DOCENTE: Tiene que ser positiva porque si k no es positiva estaríamos diciendo que la velocidad aumenta dentro del aceita es decir baja el pistón y que en lugar de frenarse con el aceite iría más rápido.
ALUMNO S: Profa. y entonces como quedaría la posición, es que todavía no la tengo.
DOCENTE: Ok vamos a ver la posición para que puedan checar esa parte, ahí (Se apunta lo hecho en GeoGebra) solo visualizamos como se vería la velocidad, pero si la velocidad es igual a la velocidad inicial por la exponencial de menos k t ($v(t) = v_0 e^{-kt}$) y lo vamos abordar con esta idea de la antiderivada de acuerdo de que función tuvo que haber estado antes. Por una parte sé que es esto (Se indica el resultado de la velocidad) pero por otra parte sé que la velocidad es que.
ALUMNOS: La diferencial de la posición con respecto al tiempo.
DOCENTE: Exacto como varía la posición como va pasando el tiempo ($v = \frac{dx}{dt}$) estamos de acuerdo. Entonces me tendría que preguntar que función tuvo que haber estado antes para que cuando yo lo derive me dé como resultado esto ($v(t) = v_0 e^{-kt}$) porque esto es la velocidad entonces lo que tuvo que haber estado antes me va a representar.
ALUMNOS: La posición.
DOCENTE: Que función es esa para que cuando su derivada se esto.
ALUMNO C: La exponencial.
DOCENTE: Una exponencial, para empezar esa exponencial es positiva o negativa es decir tiene que ser algo distinto a esto o igual (e^{-kt}).
ALUMNOS: Tiene que ser igual.
DOCENTE: Ok pero no es suficiente porque la derivada de la exponencial es ella misma pero no tengo esto (Señala la v_0) aquí que le hace falta.
ALUMNO J: Otro menos v o otra menos velocidad inicial ($-v_0$)
DOCENTE: Otra menos velocidad inicial
ALUMNO J: Entre la k
DOCENTE: Entonces me dicen que me hace falta menos velocidad inicial y dice su compañera que tiene que ser entre k ($x(t) = -\frac{v_0}{k} e^{-kt}$), a ver si derivan les da esto ($v(t) = v_0 e^{-kt}$).
ALUMNO J: No todavía no.
DOCENTE: No ¿Por qué no? me tendría que preguntar ¿Cuánto es la derivada con respecto al tiempo? si tengo menos la velocidad inicial entre k que multiplica a la exponencial de menos k t ($\frac{d}{dt}\left(-\frac{v_0}{k} e^{-kt}\right)$), estas que son (Señala la velocidad inicial y k)
ALUMNOS: Constantes.

DOCENTE: Si son constantes las puedo poner.
ALUMNOS: Fuera de la derivada.
DOCENTE: Y quien es la derivada de esto ($\frac{d}{dt}(e^{-kt})$, la derivada de la exponencial es.
ALUMNOS: La exponencial
DOCENTE: Que más.
ALUMNO J: Mas la derivada de lo de arriba.

DOCENTE: Por la derivada del exponente y la derivada del exponente ¿Cuánto es?
ALUMNOS: Es menos k.
DOCENTE: Y si realizamos la multiplicación que nos queda ($x(t) = -\frac{v_0}{k}(-ke^{-kt})$).
ALUMNO C: Velocidad inicial por la exponencial de menos k t ($x(t) = v_0 e^{-kt}$).
DOCENTE: La velocidad inicial por la exponencial.
ALUMNO A: Pero no quedaría positivo.
ALUMNO J: Si esta positivo.
DOCENTE: Y le pasa algo si a la exponencial le sumo una cierta constante (Se refiere que si a la función de la posición se le suma una constante ($x(t) = -\frac{v_0}{k}e^{-kt} + C$).
ALUMNOS: No
DOCENTE: Pero quién esa constante, los que lograron llegar al resultado de la posición esa constante es un valor muy en particular, porque si se le suma una constante cual sea a la hora que se derive, la derivada de la constante ¿Cuánto es?
ALUMNOS: Cero
DOCENTE: Entonces nos sigue representado la velocidad que encontramos, pero esta constante de manera muy en particular es, J nos ayudas con ese valor.
ALUMNO J: Si es la velocidad inicial entre la constante.
DOCENTE: Exacto (Se escribe la función que describe la exponencial $x(t) = -\frac{v_0}{k}e^{-kt} + \frac{v_0}{k}$) si se preguntan de dónde salió esto, es justo la parte donde se atoraron en la integral de la exponencial, pero esto es constante la velocidad inicial es constante y la k también y la derivada de una constante es cero nos sigue dando la velocidad y esto describe la posición en esta parte como se visualiza el cambio de la posición, en el programa de GeoGebra no se visualiza pero aquí la podemos graficar aquí está el tiempo y aquí está la posición (Gráfica los ejes indicando el tiempo en el eje horizontal y la posición en el eje vertical) .
ALUMNO J: Y me quedo así (Indica una exponencial creciente que parte del origen)
DOCENTE: Dice que la exponencial es creciente, este número es negativo (Se refiere a la exponencial e^{-kt}) y al ser multiplicado por este (Se refiere a $= -\frac{v_0}{k}$) hace que la exponencial sea creciente más la velocidad inicial entre k y entonces conforme va pasando el tiempo la exponencial se va a acercar a un valor, que valor es este cuando el tiempo ya es grande a que valor se va aproximar.
ALUMNO J: A la velocidad final
ALUMNO H: Mmmmmm a la velocidad inicial sobre k
DOCENTE: A la velocidad inicial entre k, bueno y esta es la gráfica de la posición y su función con respecto al tiempo el análisis fue un poco distinto al hecho para la velocidad.
Agradezco su ayuda chicos y ahora si paramos la grabación.