



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE HIDALGO**



INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN TECNOLOGÍAS DE INFORMACIÓN Y SISTEMAS

MAESTRÍA EN CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL
CONTROL TOLERANTE A FALLAS CON ASIGNACIÓN DEL
CONTROL PARA SISTEMAS VARIANTES EN EL TIEMPO
USANDO MODOS DESLIZANTES INTEGRALES CONTINUOS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN
CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

QUE PRESENTA:

OZIEL HERNÁNDEZ DURÁN

DIRECTORES DE TESIS:

DR. BENJAMÍN ALFONSO ITZÁ ORTIZ

DRA. ROSALBA GALVÁN GUERRA

MINERAL DE LA REFORMA HGO., MÉXICO 29 DE OCTUBRE DE 2020

Agradecimientos

A mis padres y hermano, por todo el apoyo que me han brindado.

A la Dra. Rosalba Galván Guerra y al Dr. Juan Eduardo Velázquez Velázquez por toda su ayuda, apoyo y guía ya que me ayudo a mantenerme motivado.

A los sinodales por todos sus comentarios y observaciones, las cuales ayudaron a mejorar este trabajo.

A mis compañeros de la MCAC, por siempre estar dispuestos a ayudar, gracias por su apoyo y su amistad.

Al CONACYT por la beca que me fue otorgada y a la Maestría en Ciencias en Automatización y Control de la UAEH, por la formación académica brindada.



Mineral de la Reforma, Hgo., a 16 de septiembre de 2020

Número de control: ICBI-AACyE/1067/2020
 Asunto: Autorización de impresión de tesis.

M. EN C. JULIO CÉSAR LEINES MEDÉCIGO
DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

Por este conducto le comunico que el comité revisor asignado al Ing. Oziel Hernández Duran, alumno de la Maestría en Ciencias en Automatización y Control, autoriza la impresión del proyecto de tesis titulado "Control tolerante a fallas con asignación del control para sistemas lineales variantes en el tiempo usando modos deslizantes integrales continuos", bajo la dirección del Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz y la Dra. Rosalba Galván Guerra, en virtud de que se han efectuado las revisiones y correcciones pertinentes.

A continuación, se integran las firmas de conformidad de los integrantes del jurado.

Presidente:	Dr. Raúl Villafuerte Segura	UAEH	
Secretario:	Dr. Jesús Escamilla Roa	UPIIH	
Vocal:	Dr. Benjamín Alfonso Itzá Ortiz	UAEH	
Suplente 1:	Dr. Carlos Cuvas Castillo	UAEH	
Suplente 2:	Dra. Rosalba Galván Guerra	UPIIH	

Atentamente
 "Amor, Orden y Progreso"

 Dra. Liriam Rodríguez Guerrero
 Coordinadora de la Maestría en Ciencias en
 Automatización y Control
 Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
 Área Académica de Computación y Electrónica

LRG/APL



Ciudad del Conocimiento
 Carretera Pachuca-Tulancingo km 4.5 Colonia
 Carboneras Mineral de la Reforma, Hidalgo,
 Mexico C.P. 42184
 Teléfono: +52 (771) 71 720 00 ext. 2250, 2251
 Fax 2109
 aacye_icbi@uaeh.edu.mx

www.uaeh.edu.mx

Resumen

En este tema de tesis, se propone un algoritmo de control tolerante a fallas basado en modos deslizantes para asegurar el seguimiento de una trayectoria deseada para sistemas variantes en el tiempo aún en presencia de fallas en los actuadores. El algoritmo propuesto usa los modos deslizantes integrales continuos junto con el regulador cuadrático lineal, además de técnicas como la asignación de control y la inversión de sistema y asegura la compensación de las fallas en tiempo finito y el seguimiento de la trayectoria de manera exponencial.

Abstract

In this thesis, a fault-tolerant control algorithm based on sliding modes is proposed to ensure the tracking of a desired trajectory for time-varying systems even in the presence of faults in the actuators. The proposed algorithm uses a continuous integral sliding modes and the linear quadratic regulator, together with techniques such as control allocation and system inversion and guarantee finite time exact compensation of the faults and exponential tracking of the reference.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	VII
Abstract	VII
Índice general	IX
Índice de figuras	XI
Índice de tablas	XII
1. Introducción y estado del arte	3
1.1. Planteamiento del problema	6
1.2. Objetivo general	7
1.2.1. Objetivos específicos	7
1.3. Hipótesis	7
1.4. Contribución	7
1.5. Organización de la tesis	8
2. Marco teórico	10
2.1. Forma normal	10
2.1.1. Sistemas no lineales UEUS	10
2.1.2. Sistemas no lineales MEMS	12
2.2. Inversión de sistema caso MEMS	16
2.3. Control por linealización de trayectoria	17
2.4. Controlador RCL de horizonte finito	18
2.5. Conceptos principales del control por modos deslizantes	19
2.6. Control por MDI	19
2.6.1. Algoritmo super-twisting	21
2.7. Factorización de rango	21
2.8. Fallas	22
2.8.1. Clasificación de las fallas	22
3. Control tolerante a fallas	25
3.1. Asignación de control	26

3.2. Sistema nominal	27
3.3. Modos deslizantes integrales continuos	27
3.4. Diseño de la ley de control por MDIC	28
3.4.1. Aproximación de la matriz de fallas	29
4. Modelo Matemático del Caso de Estudio	31
4.1. Modelo no Lineal de un Avión.	31
4.2. Forma Normal del Sistema con Redundancia en los Actuadores	33
4.2.1. Asignación de Control	35
4.2.2. Forma normal	35
4.2.3. Linealización por Trayectoria	36
4.2.4. Control nominal para el sistema LVT	38
4.2.5. Control integral para el sistema LVT	38
4.2.6. Diseño del control integral	39
5. Simulaciones	41
5.1. Falla continua a pedazos	42
5.2. Falla variante en el tiempo	44
6. Conclusiones y trabajo futuro	48
6.1. Trabajo futuro	49
Bibliografía	50

Índice de figuras

3.1. Metodología propuesta.	25
5.1. Sistema nominal.	41
5.2. Variables de estado z_1 , z_2 y z_3 deseadas.	42
5.3. $\Gamma(t)$ y $\hat{\Gamma}(t)$ del caso 1.	43
5.4. Error caso 1.	43
5.5. Señal de control y superficie de deslizamiento del caso 1.	44
5.6. $\Gamma(t)$ y $\hat{\Gamma}(t)$ del caso 2.	45
5.7. Error caso 2.	45
5.8. Señal de control y superficie de deslizamiento del caso 2.	46

Índice de tablas

4.1. Parámetros.	32
--------------------------	----

Notación y símbolos

\mathbb{R} - El conjunto de los números reales.

\mathbb{C} - El conjunto de los números complejos.

$\mathbb{R}^{n \times m}$ - El conjunto de todas las matrices de $n \times m$ con elementos reales de \mathbb{R} .

$\det(A)$ - El determinante de la matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

A^T - La transpuesta de la matriz A .

$\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) := \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ - La matriz diagonal con los elementos mencionados.

$I_n := \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ - La matriz identidad del tamaño correspondiente.

A^{-1} - La matriz inversa de A .

$\text{span}\{g_1, g_2, \dots, g_k\} := \{g = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \dots + \beta_k g_k : \beta_j \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, k\}$ - El conjunto de todas las combinaciones lineales de g_1, g_2, \dots, g_k sobre \mathbb{C} .

La derivada de Lie

$$\begin{aligned} L_f h(x) &= \frac{\partial(h(x))}{\partial x} f(x), \\ L_f^k h(x) &= \frac{\partial(L_f^{k-1} h(x))}{\partial x} f(x), \\ L_g L_f h(x) &= \frac{\partial(L_f h(x))}{\partial x} g(x). \end{aligned}$$

Acrónimos

LVT: Lineal variante en el tiempo.

LIT: Lineal invariante en el tiempo.

CTF: Control tolerante a fallas.

AC: Asignación de control.

RCL: Regulador cuadrático lineal.

CMD: Control por modos deslizantes.

MDI: Modos deslizantes integrales.

MDIC: Modos deslizantes integrales continuos.

AST: Algoritmo super-twisting.

UEUS: Una entrada una salida.

MEMS: Múltiples entradas múltiples salidas.

Capítulo 1

Introducción y estado del arte

Los sistemas lineales o no lineales son vulnerables o susceptibles a fallas. En general, una falla puede ser considerada como algo que cambia el comportamiento de un sistema de tal forma que el sistema ya no puede cumplir su objetivo. Las fallas son usualmente clasificadas como: fallas en los parámetros del sistema, fallas en los sensores y fallas en los actuadores [1]. Un diseño de control de realimentación convencional para un sistema puede resultar en un desempeño insatisfactorio del sistema (incluso inestabilidad), en caso de mal funcionamiento de los sensores o actuadores. Para evitar que las fallas dañen al sistema e incluso a los humanos, las fallas deben ser localizadas tan rápido como sea posible y se deben tomar decisiones que detengan la propagación de sus efectos. El control tolerante a fallas (CTF) [2] analiza el comportamiento de la planta con el fin de identificar fallas y modificar la ley de control de tal forma que permita mantener el objetivo de control en presencia de fallas [3].

Este trabajo solo considera fallas en los actuadores. Para asegurar el objetivo de control en presencia de fallas en los actuadores, parciales o totales, se requiere que el sistema tenga redundancia en los actuadores. Esta redundancia permite reconfigurar la señal de control en los actuadores con respecto de la falla, con lo cual se puede mantener un rendimiento satisfactorio incluso si hay fallas críticas en los actuadores principales.

Para distribuir el control a lo largo de los actuadores, se utilizan los esquemas de asignación de control (AC). La AC puede ser realizada fuera de línea y en línea. En modo fuera de línea, la AC va cambiando con respecto de fallas consideradas, pero si se presenta una falla no considerada, no se podrá realizar una distribución de la señal de control de forma adecuada. Para el modo en línea, la AC va cambiando dependiendo de las fallas que se van presentando, incluso si no fueron consideradas. Este trabajo se

enfoca en AC en línea.

Existen dos problemas de control: el problema de seguimiento y el problema de regulación. El problema de seguimiento consiste en encontrar una entrada de control apropiada de tal forma que la variable controlada siga la variable de referencia. En el problema de regulación, se busca mantener la variable controlada en el punto de referencia del sistema. Este trabajo considera el problema de seguimiento.

Para aplicar técnicas de control lineal en sistemas no lineales, el primer paso es linealizar, si es posible, alrededor de un punto de operación, esta linealización solo puede predecir el comportamiento local del sistema no lineal en la vecindad de ese punto de operación [4]. Cuando se quiere resolver el problema de seguimiento de trayectoria, se puede optar por hacer una linealización por trayectoria, esta consiste en dos partes. La primer parte es la inversión de sistema o pseudo inversión de sistema, esta permite calcular la entrada de control a partir de una trayectoria deseada, este control asegura el seguimiento de la trayectoria deseada, además de que se utiliza para encontrar la dinámica del error alrededor de la trayectoria deseada. La segunda parte es linealizar la dinámica del error alrededor del origen. Cabe destacar que al hacer una linealización por trayectoria obtenemos un sistema lineal variante en el tiempo (LVT) [5].

Para la estabilización del sistema LVT se pueden utilizar diversas técnicas de control lineal como programación de ganancia (conocido en inglés como gain scheduling) o control óptimo. En particular, para sistemas LVT, el regulador cuadrático lineal (RCL) permite obtener una ley de control variante en el tiempo que optimiza un índice de desempeño específico [6].

La tolerancia a fallas no puede ser alcanzada por un control por realimentación de estado típico [1], pero está problemática se puede abordar de varias formas, como lo es el control robusto (tolerancia pasiva) [7], [8], el control adaptable (tolerancia activa) [9], detección y aislamiento de fallas y combinaciones de estos [10]. Las fallas pueden ser vistas como una perturbación, por lo que si se diseña un control en lazo cerrado robusto, los efectos de estas perturbaciones se pueden minimizar.

Una forma de hacer robusto al sistema es por medio del control por modos deslizantes (CMD). El CMD es una ley de control que proporciona el rendimiento deseado del sistema en lazo cerrado en presencia de perturbaciones/incertidumbres acopladas, Como se puede ver en [11], utilizan un control por modos deslizantes para hacer a un sistema no lineal robusto ante las fallas junto con una neurona artificial que se

encarga que el sistema siga una trayectoria deseada, y en [12] diseñan e implementan un control tolerante a fallas basado en modos deslizantes junto con una neurona difusa, para controlar un servomotor de corriente directa en presencia de perturbaciones, variaciones de parámetros y fallas en los actuadores y sensores. El problema del CMD es que la señal de control tiene castaño (señal de alta frecuencia, conocida en inglés como “chattering”), pero existen formas de atenuar el castaño, como utilizar modos deslizantes de alto orden [13]. Las metodologías basadas en modos deslizantes permiten hacer al sistema insensible a los efectos acoplados de las fallas durante la fase de deslizamiento, y permiten la detección y aislamiento de las mismas [14], [15], [16]. Si las fallas están presentes desde el tiempo inicial, debido a la fase de alcance, los modos deslizantes integrales convencionales (MDI) [17], [18] son una buena opción [19], [20], ya que los MDI es un control auxiliar que permite robustificar un sistema justo después del primer momento¹ asegurando un comportamiento nominal, por ejemplo, Halim Alwi y Christopher Edwards presentan un control tolerante a fallas basado en MDI para el modelo no lineal del movimiento longitudinal de un avión [21], para después presentar un esquema de control tolerante a fallas en los sensores, también basado en MDI [22] y en [23] se utilizan los MDI por salida y técnicas como la AC para generar un control tolerante a fallas para sistema LVT que asegura insensibilidad del sistema ante fallas totales y parciales en los actuadores en tiempo finito, bajo la suposición de que todos los estados están disponibles. Pero los MDI tienen la desventaja que producen alto nivel de castaño. Para disminuir el castaño, para sistemas de grado relativo uno, los modos deslizantes continuos basados en el algoritmo de Super-twisting (AST) [24], son una buena opción ya que generan una ley de control continua. Los modos deslizantes integrales continuos (MDIC) combinan los MDI con el AST [25], permitiendo asegurar el comportamiento nominal del sistema utilizando una señal de control continua, disminuyendo así el castaño. Sin embargo, presentan fase de alcance, por lo cual compensan las perturbaciones/incertidumbres en tiempo finito.

¹No presentan fase de alcance, por lo que compensan en teoría de forma exacta las perturbaciones/incertidumbres acopladas justo después del primer momento.

1.1. Planteamiento del problema

Considere el siguiente sistema no lineal

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t))u(t); \quad x(t_0) = x_o, \quad (1.1)$$

donde $f(t, x(t))$, $g(t, x(t))$ son campos vectoriales suaves definidos dentro de un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ es la entrada de control y $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado, el cual es completamente conocido. Por simplicidad, asuma que el sistema anterior ha sido transformado a su forma normal y linealizado alrededor de una trayectoria, por lo que la dinámica del error de seguimiento puede ser representada por el siguiente sistema LVT, el cual esta sujeto a fallas en los actuadores

$$\dot{\tilde{z}}(t) = A(t)\tilde{z}(t) + B_u(t)W(t)u(t); \quad \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}_o, \quad (1.2)$$

donde $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_u(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $W(t) = \text{diag}(w_1(t), \dots, w_m(t)) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es la matriz de fallas y $\tilde{z}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el error de seguimiento. Asuma que el rango de la matriz $B_u(t) = l < m$ para todo t , es decir se tiene redundancia en los actuadores. Por lo que la matriz $B_u(t)$ puede ser factorizada utilizando la factorización de rango [26] como

$$B_u(t) = B_\nu(t)B(t),$$

donde $B_\nu(t) \in \mathbb{R}^{n \times l}$ y $B(t) \in \mathbb{R}^{l \times m}$, ambas con rango l . Lo cual nos da una descripción alternativa del sistema anterior

$$\dot{\tilde{z}}(t) = A(t)\tilde{z}(t) + B_\nu(t)B(t)W(t)u(t).$$

La matriz $W(t)$ es una matriz de pesos asociados a los actuadores. Si $w_i(t) = 1$ para $i = 1, \dots, m$, el correspondiente i -ésimo actuador está trabajando perfectamente, mientras que si $w_i(t) = 0$ indica una falla total. Si $0 < w_i(t) < 1$, una falla parcial está presente en el i -ésimo actuador. Observe que si $w_i(t) = 0$ para todo i , el sistema pierde controlabilidad, por lo se requiere establecer las características de las fallas que el sistema puede soportar sin perder controlabilidad.

Se necesita encontrar una estrategia que lleve al sistema a una forma que no tenga redundancia en los actuadores, en donde las fallas puedan ser vistas como perturbaciones, lo cual nos permitirá diseñar una ley de control que compense los efectos de las fallas en tiempo finito y establezca de manera exponencial el error.

1.2. Objetivo general

Diseñar una estrategia de CTF para sistemas LVT usando modos deslizantes integrales continuos y un esquema de AC en línea con la finalidad de que el sistema pueda seguir una trayectoria, aún con la presencia de fallas en los actuadores.

1.2.1. Objetivos específicos

- Diseñar una ley de control nominal usando el enfoque LQR que permita asegurar que el sistema sin fallas siga una trayectoria deseada
- Diseñar asignación de control en línea para distribuir la señal del control a lo largo de los actuadores.
- Diseñar una estrategia de control para compensar las fallas en los actuadores usando un esquema de CTF basado en MDIC.

1.3. Hipótesis

Se espera que para un sistema LVT, con redundancia en los actuadores y fallas totales o parciales en los mismos, el diseño de un esquema de CTF basado en MDIC y AC en línea, permita asegurar el seguimiento de la trayectoria en tiempo finito de tal forma que el sistema con fallas se comporte como el sistema nominal en tiempo finito. Además el uso de un control continuo disminuye el castaño.

1.4. Contribución

La contribución de esta tesis es el diseño de un algoritmo de control tolerante a fallas en los actuadores, basado en modos deslizantes integrales continuos con asignación de control en línea para sistemas lineales variantes en el tiempo, con redundancia en los actuadores.

Este algoritmo se puede aplicar a sistemas no lineales si se utiliza una linealización por trayectoria, convirtiendo el problema de seguimiento en un problema de estabilización. El algoritmo diseñado asegura la compensación exacta en teoría de las fallas en los actuadores en tiempo finito y se asegura que el sistema afectado por las fallas se comporte como el sistema nominal en tiempo finito usando una señal de control

continua. La efectividad de la propuesta se muestra mediante la simulación en Matlab del movimiento longitudinal de un avión.

1.5. Organización de la tesis

En el Capítulo 2, se presenta toda la metodología necesaria para cumplir con los objetivos planteados en éste trabajo.

En el Capítulo 3, se realiza el análisis de forma general para hacer a un sistema lineal variante en el tiempo tolerante a fallas por medio de la asignación de control y el control por modos deslizantes integrales continuos.

En el Capítulo 4, se aplica el análisis realizado en el Capítulo 3 a el modelo matemático que describe el movimiento longitudinal de un avión.

En el Capítulo 5, se muestran los resultados obtenidos de las simulaciones hechas a partir de lo considerado en el Capítulo 4.

Finalmente en el Capítulo 6, se presentan las conclusiones obtenidas al realizar el trabajo.

Capítulo 2

Marco teórico

En el presente capítulo se presenta el marco teórico necesario para la realización de este documento.

2.1. Forma normal

2.1.1. Sistemas no lineales UEUS

Considere un sistema no lineal con una entrada y una salida (UEUS)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) &= h(x(t))\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde $f(x(t))$, $g(x(t))$ y $h(x(t))$ son suficientemente suaves en un dominio $D \in \mathbb{R}^n$. Este sistema tiene grado relativo r en algún punto x_p si [27]

- (i) $L_g L_f^k h(x(t)) = 0$; para todo $x(t)$ en una vecindad de x_p y para $k < r - 1$,
- (ii) $L_g L_f^{r-1} h(x_p) \neq 0$.

Observe, que el grado relativo r es igual al número de veces que se tiene que derivar la salida $y(t)$ para algún tiempo $t = t_p$ para que aparezca el valor $u(t_p)$ explícitamente. La siguiente proposición define la transformación que lleva al sistema (2.1) a su forma normal.

Proposición 2.1.1 [27]. Suponga que el sistema (2.1) tiene grado relativo r en

x_p . Entonces $r \leq n$. Asignando

$$\begin{aligned}\phi_1(x(t)) &= h(x(t)) \\ \phi_2(x(t)) &= L_f h(x(t)) \\ &\vdots \\ \phi_r(x(t)) &= L_f^{r-1} h(x(t)).\end{aligned}$$

Para realizar una transformación de coordenadas locales, si r es estrictamente menor que n , es posible encontrar $n - r$ funciones adicionales $\phi_{r+1}(x(t)), \dots, \phi_n(x(t))$ tal que

$$\Phi(x(t)) = \begin{pmatrix} \phi_1(x(t)) \\ \vdots \\ \phi_n(x(t)) \end{pmatrix}$$

sea un isomorfismo y tenga una matriz jacobiana no singular en x_p . Las funciones adicionales $\phi_{r+1}(x(t)), \dots, \phi_n(x(t))$ pueden ser elegidas arbitrariamente. Por otra parte, es posible elegir $\phi_{r+1}(x(t)), \dots, \phi_n(x(t))$ de tal forma que

$$L_g \phi(x(t)) = 0, \quad \text{para todo } r + 1 \leq i \leq n \text{ y todo } x(t) \text{ cerca de } x_p.$$

La descripción del sistema (2.1) en las coordenadas nuevas $z_i = \phi_i(x)$, $1 \leq i \leq n$ se puede encontrar como se muestra a continuación, empezando por las primeras r ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt} &= \phi_2(x(t)) = z_2(t), \\ &\vdots \\ \frac{dz_{r-1}}{dt} &= \phi_r(x(t)) = z_r(t), \\ \frac{dz_r}{dt} &= L_f^r h(x(t)) + L_g L_f^{r-1} h(x(t)) u(t).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Remplazando a $x(t)$ por su expresión en función de $z(t)$, es decir, $x(t) = \Phi^{-1}(z(t))$ y sea

$$\begin{aligned}a(z) &= L_g L_f^{r-1} h(\Phi^{-1}(z)) \\ b(z) &= L_f^r h(\Phi^{-1}(z))\end{aligned}$$

la ecuación (2.2) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt} &= z_2(t), \\ &\vdots \\ \frac{dz_{r-1}}{dt} &= z_r(t), \\ \frac{dz_r}{dt} &= b(z(t)) + a(z(t))u(t).\end{aligned}$$

Para las siguientes $n - r$ funciones adicionales, si $\phi_{r+1}(x(t)), \dots, \phi_n(x(t))$ han sido elegidos de tal forma que $L_g\phi_i(x(t)) = 0$ entonces

$$\frac{dz_i}{dt} = L_f\phi_i(x(t)).$$

Asignando

$$q_i(z) = L_f\phi_i(\Phi^{-1}(z))$$

para todo $r + 1 \leq i \leq n$, la $\frac{dz_i}{dt}$ se puede expresar como

$$\frac{dz_i}{dt} = q_i(z(t)).$$

Por lo tanto, la descripción del sistema (2.1) en las nuevas coordenadas es como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r-1}(t) &= z_r(t) \\ \dot{z}_r(t) &= b(z) + a(z)u(t) \\ \dot{z}_{r+1}(t) &= q_{r+1}(z) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n(t) &= q_n(z).\end{aligned}\tag{2.3}$$

2.1.2. Sistemas no lineales MEMS

En esta subsección se presenta como llevar a un sistema con multiples entradas y multiples salidas (MEMS) a su forma normal. Se considera el caso cuando el sistema

tiene el mismo número m de salidas y entradas. El sistema no lineal multivariable a considerar está descrito en su forma en espacio de estado por ecuaciones de la siguiente forma [27]

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t))u_i(t) \\ y_1(t) &= h_1(x(t)) \\ &\vdots \\ y_m(t) &= h_m(x(t)) \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde $f(x(t)), g_1(x(t)), \dots, g_m(x(t))$ son campos vectoriales suaves, y $h_1(x(t)), \dots, h_m(x(t))$ son funciones suaves, definidas dentro de un conjunto abierto de \mathbb{R}^n .

Un sistema no lineal multivariable de la forma de (2.4) tiene un grado relativo $\{r_1, \dots, r_m\}$ en el punto x_p si

(i)

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x(t)) = 0$$

para todo $1 \leq j \leq m$, para todo $k < r_i$, para todo $1 \leq i \leq m$, y para todo $x(t)$ en una vecindad de x_p , donde r_i indica el grado relativo asociado a la salida i ,

(ii) la matriz $m \times m$

$$\Lambda(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x(t)) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x(t)) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(x(t)) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(x(t)) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x(t)) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x(t)) \end{bmatrix}$$

es no singular en $x(t) = x_p$.

Definición. Se dice que una distribución Δ de dimensión k es involutiva si para cada base local $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ existen funciones c_{ij}^k tales que

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^r X_r; \quad 1 \leq i, j \leq k; \quad 1 \leq r \leq k.$$

Proposición 2.1.2 [27]. Suponga que el sistema (2.4) tiene un grado relativo $\{r_1, \dots, r_m\}$ en x_p , donde r_i es el grado relativo de la salida $h_i(x(t))$. Entonces

$$r_1 + \dots + r_m \leq n.$$

Siendo

$$\begin{aligned}\phi_1^i(x(t)) &= h_i(x(t)) \\ \phi_2^i(x(t)) &= L_f h_i(x(t)) \\ &\vdots \\ \phi_{r_i}^i(x(t)) &= L_f^{r_i-1} h_i(x(t))\end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq m$. Si $r = r_1 + \dots + r_m$ es estrictamente menor que n , siempre es posible encontrar $n - r$ funciones adicionales $(\phi_{r+1}(x(t)), \dots, \phi_n(x(t)))$ tal que el mapeo

$$\Phi(x(t)) = \begin{bmatrix} \phi_1^1(x(t)) \\ \vdots \\ \phi_{r_1}^1(x(t)) \\ \vdots \\ \phi_1^m(x(t)) \\ \vdots \\ \phi_{r_m}^m(x(t)) \\ \phi_{r+1}(x(t)) \\ \vdots \\ \phi_n(x(t)) \end{bmatrix}$$

tenga una matriz jacobiana no singular en x_p , por lo tanto califica como una transformación de coordenadas locales en una vecindad de x_p . El valor en x_p de estas funciones adicionales puede ser elegida arbitrariamente. Además, si la distribución

$$G = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$$

es involutiva cerca de x_p , es posible elegir $\phi_{r+1}(x(t)), \dots, \phi_n(x(t))$ de tal forma que

$$L_{g_j} \phi_i(x(t)) = 0$$

para todo $r + 1 \leq i \leq n$, para todo $1 \leq j \leq m$, y todo x alrededor de x_p .

Para obtener el primer conjunto de nuevas coordenadas, es decir, las primeras r

coordenadas, se aplica lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1^i}{dt} &= \phi_2^i(t) \\ &\vdots \\ \frac{d\phi_{r_i-1}^i}{dt} &= \phi_{r_i}^i(t) \\ \frac{d\phi_{r_i}^i}{dt} &= L_f^{r_i} h_i(x(t)) + \sum_{j=1}^m L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(x(t)) u_j(x(t)). \end{aligned}$$

Ahora asignando

$$\xi^i = \begin{pmatrix} \xi_1^i \\ \xi_2^i \\ \vdots \\ \xi_{r_i}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^i(x(t)) \\ \phi_2^i(x(t)) \\ \vdots \\ \phi_{r_i}^i(x(t)) \end{pmatrix}$$

para $1 \leq i \leq m$,

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi^1, \dots, \xi^m) \\ \eta &= \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{r+1}(x(t)) \\ \phi_{r+2}(x(t)) \\ \vdots \\ \phi_n(x(t)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} a_{ij}(\xi, \eta) &= L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(\Phi^{-1}(\xi, \eta)) && \text{para } 1 \leq i, j \leq m \\ b_i(\xi, \eta) &= L_f^{r_i} h_i(\Phi^{-1}(\xi, \eta)) && \text{para } 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las ecuaciones pueden ser reescritas como [27]

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i &= \xi_{r_i}^i \\ \dot{\xi}_{r_i}^i &= b_i(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi, \eta) u_j(x(t)) \\ y_i &= \xi_1^i \end{aligned} \tag{2.5}$$

para $1 \leq i \leq m$. Para el conjunto restante de coordenadas, si la distribución abarcada por el campo vectorial $g_1(x(t)), \dots, g_m(x(t))$ es no involutiva, se puede escribir las ecuaciones como se muestra a continuación

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta) + \sum_{i=1}^m \rho_i(\xi, \eta) u_i = q(\xi, \eta) + \rho(\xi, \eta) u. \quad (2.6)$$

Por otro lado, si la distribución es involutiva, siempre es posible elegir el conjunto de coordenadas restante $\phi_{r+1}(x(t)), \dots, \phi_n(x(t))$ de tal forma que [27]

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta)$$

Con lo cual se obtiene la forma normal del sistema no lineal (2.4).

2.2. Inversión de sistema caso MEMS

Considere el sistema en la forma (2.4) y suponga que $r = n$. Como la transformación a la forma normal se realizó de tal manera que la matriz $\Lambda(x)$ es de rango pleno y, si se tienen las trayectorias deseadas \bar{y}_i con sus respectivos grados relativos r_i es decir,

$$\begin{aligned} \bar{y}_i &= \bar{\xi}_1^i \\ \dot{\bar{\xi}}_1^i &= \bar{\xi}_2^i \\ &\vdots \\ \dot{\bar{\xi}}_{r_i-1}^i &= \bar{\xi}_{r_i}^i \\ \dot{\bar{\xi}}_{r_i}^i &= b_i(\bar{\xi}, \eta) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\bar{\xi}, \eta) \bar{u}_j(x(t)) \end{aligned}$$

entonces el control $\bar{u}(x(t))$ se puede obtener como

$$\bar{u}(x(t)) = a^{-1}(\bar{\xi}, \eta) (\dot{\bar{\xi}} - b_i(\bar{\xi}, \eta)),$$

donde

$$\bar{u}(x(t)) = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_m \end{bmatrix}; \quad a(\bar{\xi}, \eta) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}; \quad \dot{\bar{\xi}} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{\xi}}_1^1 & \dots & \dot{\bar{\xi}}_{r_i}^i \end{bmatrix}.$$

Para el caso cuando $r < n$ se considera una pseudo inversión o inversión dinámica del sistema, y además de obtener $\bar{u}(x(t))$, es necesario resolver en línea la ecuación (2.6) para encontrar las trayectorias deseadas.

2.3. Control por linealización de trayectoria

El método de control por linealización de trayectoria, usa la dinámica de la inversión del sistema, para transformar el problema de seguimiento a un problema de estabilización del error.

Considere el siguiente sistema no lineal MEMS [28],

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $u(t) \in \mathbb{R}^l$, representan el estado y la entrada respectivamente, las funciones $f(x(t))$ y $u(t)$ están acotadas, son Lipschitz y de dimensiones apropiadas. Considere el siguiente sistema de referencia

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$$

donde $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$ representan el valor de referencia del estado y la entrada del sistema, respectivamente, obtenidos mediante la inversión del sistema.

Definiendo el error de seguimiento del sistema como se ve a continuación

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= x(t) - \bar{x}(t) \\ \tilde{u}(t) &= u(t) - \bar{u}(t)\end{aligned}$$

la dinámica del error se puede escribir como

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= f(\bar{x}(t) + \tilde{x}(t), \bar{u}(t) + \tilde{u}(t)) - f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \\ &= F(\tilde{x}, \tilde{u}, \bar{x}, \bar{u})\end{aligned}\tag{2.7}$$

donde \tilde{u} y \tilde{x} , representan el error de seguimiento de la entrada y el estado, respectivamente.

Linealizando las dinámicas del error de seguimiento (2.7) a lo largo de la trayectoria de referencia, se obtiene el siguiente sistema

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \left. \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \right|_{\substack{u=\bar{u} \\ x=\bar{x}}} \tilde{x}(t) + \left. \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right|_{\substack{u=\bar{u} \\ x=\bar{x}}} \tilde{u}(t)$$

el cual se puede ver como un sistema LVT de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t)\end{aligned}$$

definiendo a

$$A(t) = \left. \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \right|_{\substack{u=\bar{u} \\ x=\hat{x}}}; \quad B(t) = \left. \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right|_{\substack{u=\bar{u} \\ x=\hat{x}}}.$$

Observe que si se asegura la estabilidad de la dinámica del error, se asegura el seguimiento de la trayectoria, convirtiendo así el problema de seguimiento en un problema de regulación.

2.4. Controlador RCL de horizonte finito

Considere el sistema [29]

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.8)$$

donde $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, y $u(t) \in \mathbb{R}^m$. Se quiere encontrar una ley de control que minimice el índice de desempeño

$$J = \frac{1}{2} \left(\int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt + x^T(t)P_1x(t) \right), \quad (2.9)$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices semidefinidas positivas simétricas para el estado en $t \in [t_0, t_f]$ y t_f respectivamente y $R \in m \times m$ es una matriz simétrica definida positiva. La ley de control que minimiza al índice de desempeño J esta definida como

$$u(t) = K(t)x(t)$$

siendo la ganancia $K(t) = -R^{-1}B^T(t)P(t)$,

donde $P(t)$ es la solución de la ecuación diferencial de Riccati:

$$-\dot{P}(t) = Q - P(t)B(t)R^{-1}B^T(t)P(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t). \quad (2.10)$$

2.5. Conceptos principales del control por modos deslizantes

Considere el siguiente sistema lineal invariante en el tiempo (LIT)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + d(t)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son continuamente diferenciables, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control y $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Considere la siguiente superficie

$$S = \{x(t) : \sigma(x(t)) = 0\} \quad (2.11)$$

Definición [13]: Un modo deslizante ideal se presenta en (2.11) si el vector de estado $x(t)$ evoluciona en el tiempo tal que $\sigma(x(t_r)) = 0$ para algún tiempo finito $t_r \in \mathbb{R}^+$ y $\sigma(x(t)) = 0$ para todo $t > t_r$.

Definición [13]: El control equivalente es la acción de control necesaria para mantener un movimiento deslizante ideal sobre la superficie (2.11).

El control equivalente usualmente no puede ser implementado, ya que depende explícitamente de la perturbación, la cual suele ser desconocida.

2.6. Control por MDI

Considere el siguiente sistema LIT [13]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \phi(t); \quad \phi(t) = B\xi(t), \quad (2.12)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada de control, y $x(0) = x_p$. La función $\phi(t)$ representa incertidumbres que afectan al sistema, debido a incertidumbres, dinámicas no modeladas, y/o perturbaciones externas, y también considere el siguiente sistema LIT nominal

$$\dot{x}_n(t) = Ax_n(t) + Bu_n(t) \quad (2.13)$$

Se quiere que el sistema (2.12) se comporte como (2.13) en tiempo finito. Con el fin de diseñar un controlador que logre esto, asuma que

- El rango de $B = m$.

- Se puede encontrar un cota superior para $\xi(t)$, es decir

$$\|\xi(t)\| \leq \xi^+.$$

Sea

$$u(t) = u_n(t) + u_I(t)$$

donde $u_n(t)$ es el control nominal diseñado para (2.13) y $u_I(t)$ es el control MDI el cual compensa a $\phi(t)$, empezando desde $t = 0$.

En este caso, definiendo la superficie de deslizamiento $\sigma(x(t))$ como

$$\sigma(x(t)) = G(x(t) - x(0)) - G \int_0^t (Ax(\tau) + Bu_o(\tau)) d\tau,$$

donde $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz de proyección diseñada tal que

$$\det(GB) \neq 0.$$

La derivada con respecto del tiempo de $\sigma(x(t))$ tiene la forma

$$\dot{\sigma}(x(t)) = GB(u_I(t) + \xi(t)).$$

El control $u_I(t)$ es tomado como

$$u_I(t) = -\rho \frac{(GB)^T \sigma(x(t))}{\|(GB)^T \sigma(x(t))\|},$$

donde $\rho > 0$. Para verificar estabilidad se propone $v(t) = \frac{1}{2} \sigma^T(x(t)) \sigma(x(t))$ como función candidata, su derivada con respecto del tiempo es

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= \sigma^T(x(t)) \dot{\sigma}(x(t)) \\ \dot{v}(t) &= \sigma^T(x(t)) GB(u_I + \gamma) \\ \dot{v}(t) &\leq \|(\sigma^T(x(t)))\| (-\rho + \|GB\| \xi^+) = -\alpha v^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\dot{v}(\sigma) \leq -\alpha v^{\frac{1}{2}}(\sigma); \quad \alpha = \rho - \|GB\| \xi^+, \quad (2.14)$$

separando variables e integrado la desigualdad (2.14) sobre el intervalo de tiempo $0 \leq \tau \leq t$, obtenemos

$$v^{\frac{1}{2}}(t) \leq -\frac{1}{2} \alpha t + v^{\frac{1}{2}}(0),$$

por lo tanto, $v(t)$ converge a cero en tiempo finito t_r que está acotado por

$$t_r \leq \frac{2v^{\frac{1}{2}}(0)}{\alpha}.$$

Si $\rho > \|GB\|\xi^+$ entonces $\dot{v}(t)$ ya es estable y se asegura que σ es llevado a cero en tiempo finito [13].

2.6.1. Algoritmo super-twisting

Considere el siguiente sistema escalar de grado relativo 1

$$\dot{s}(t) = u(t) + \delta(t). \quad (2.15)$$

El algoritmo super-twisting [30] está dado por las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} u(t) &= -k_1 \sqrt{|s(t)|} \operatorname{sign}(s(t)) + v(t), \\ \dot{v}(t) &= -k_2 \operatorname{sign}(s(t)), \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde k_1, k_2 son parámetros positivos y la perturbación $\delta(t)$ es Lipschitz, y su derivada está acotada por

$$|\dot{\delta}(t)| \leq L.$$

Teorema 1 [31]: El sistema (2.15) es estable en tiempo finito si los parámetros del sistema (2.16) satisfacen

$$k_2 > L, \quad k_1 > \sqrt{k_2 + L}.$$

2.7. Factorización de rango

Sea $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ una matriz con rango l , la matriz $B(t)$ puede ser factorizada de la forma [32]

$$B(t) = B_1(t)B_2(t)$$

donde ambas matrices $B_1(t) \in \mathbb{R}^{n \times l}$ y $B_2(t) \in \mathbb{R}^{l \times m}$ tienen rango l .

Una forma para realizar una factorización de rango es elegir $B_1(t)$ como cualquier matriz que forme una base del espacio columna de $B(t)$, y ya que cada columna de $B(t)$ puede ser expresada como una combinación lineal de las columnas de $B_1(t)$, los coeficientes de las combinaciones lineales determinan una única matriz $B_2(t)$ tal que

$$B(t) = B_1(t)B_2(t) \text{ [33].}$$

Otra forma de realizar una factorización de rango es calculando la forma escalonada reducida de la matriz $B(t)$. Esta puede ser calculada por medio de las operaciones elementales fila, que equivale a premultiplicar una matriz no singular $E(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, por lo que [26]

$$E(t)B(t) = \begin{bmatrix} Y(t) \\ O \end{bmatrix},$$

donde $Y(t) \in \mathbb{R}^{l \times m}$, y $O \in \mathbb{R}^{(n-l) \times m}$ es una matriz de ceros. Por lo tanto

$$B(t) = E^{-1}(t) \begin{bmatrix} Y(t) \\ O \end{bmatrix}.$$

Sea $E_1(t) \in \mathbb{R}^{n \times l}$ una matriz que consiste en las primeras l columnas de $E^{-1}(t)$ y $E_2(t) \in \mathbb{R}^{n \times (n-l)}$ una matriz que consiste de las $n - l$ columnas restantes de $E^{-1}(t)$. Por lo que

$$B(t) = \begin{bmatrix} E_1(t) & E_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(t) \\ O \end{bmatrix} = E_1(t)Y(t) + E_2(t)O = E_1(t)Y(t).$$

Debido a que $E(t)$ es no singular, $E^{-1}(t)$ tiene columnas linealmente independientes, y por lo tanto tiene rango por columnas completo.

2.8. Fallas

Definición [1]: Una falla en un sistema dinámico es un cambio en la estructura o parámetros del sistema de un comportamiento nominal. Ejemplos de cambios estructurales son la pérdida de un sensor, un actuador bloqueado, o la desconexión de un componente del sistema. Los cambios en los parámetros son causados por daños en el sistema, los cuales deforman al sistema.

2.8.1. Clasificación de las fallas

Las fallas usualmente se clasifican como [1]:

Fallas en los parámetros del sistema: Estas fallas cambian las características del sistema.

Fallas en los sensores: Las mediciones tomadas por el sensor tienen error.

Fallas en los actuadores: Tales fallas modifican o anulan la influencia del controlador sobre el sistema.

La tolerancia a fallas no puede ser llevada a cabo por un controlador por realimentación de estado típico, pero sí por un controlador que cambia la estructura y parámetros del control por realimentación de estado, o por un controlador que tolere los cambios en la dinámica del sistema, como por ejemplo las metodologías de control como [1]:

Control Robusto: Un controlador es diseñado de tal forma que tolere cambios en la dinámica del sistema. La tolerancia a fallas se logra sin la necesidad de cambiar los parámetros del controlador, por lo tanto es llamada tolerancia a fallas pasiva. Sin embargo, la teoría de control ha demostrado que los controladores robustos pueden tratar cambios en el comportamiento del sistema que fueron causados por las fallas. Además, el controlador robusto trabaja de forma subóptima para el sistema nominal, debido a que sus parámetros son fijados para mantener un equilibrio entre rendimiento y robustez.

Control Adaptable: Los parámetros del controlador se adaptan a los cambios de los parámetros del sistema. Si estos cambios son producidos por alguna falla, el control adaptable provee tolerancia a fallas activa. Sin embargo, la teoría del control adaptable muestra que este principio es particularmente eficiente solo para plantas que son descritas por modelos lineales con parámetros que varían lentamente. Estas restricciones usualmente no son cumplidas por los sistemas bajo el efecto de fallas, los cuales típicamente tienen un comportamiento no lineal con cambios repentinos en los parámetros.

Control por modos deslizantes: El control por modos deslizantes puede ser utilizado para ver las fallas como una perturbación, usualmente al usar modos deslizantes se obtiene una tolerancia a fallas pasiva, pero se puede combinar con otros controles que le ayuden a cambiar sus parámetros dependiendo de la gravedad de la falla, logrando una tolerancia a fallas activa.

Capítulo 3

Control tolerante a fallas

En este trabajo nuestro objetivo es lograr el seguimiento de trayectoria en presencia de fallas en los actuadores. Para lograr este objetivo se propone el siguiente esquema

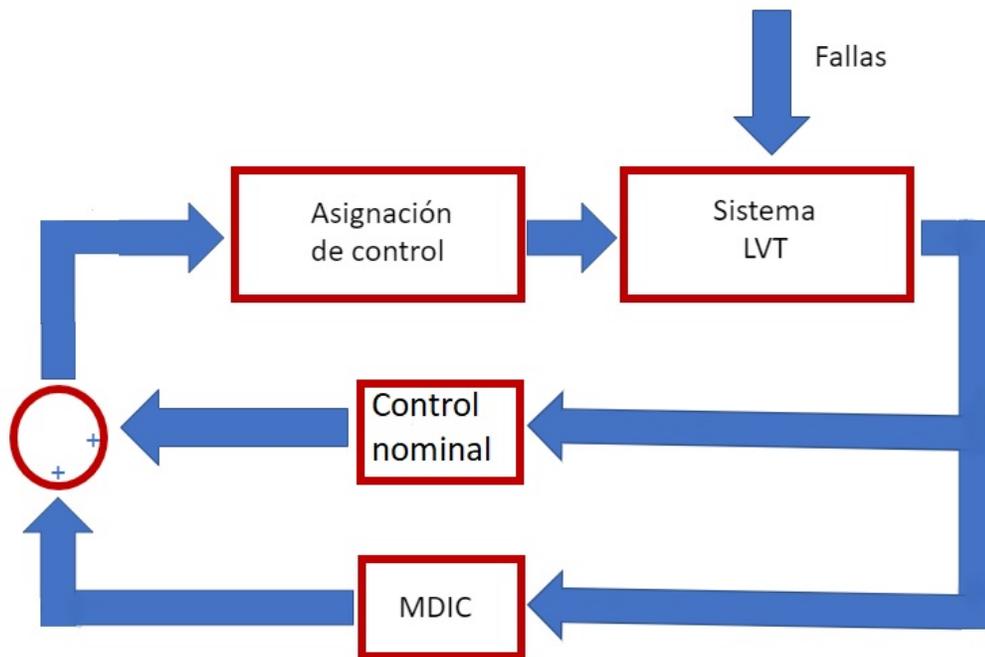


Figura 3.1: Metodología propuesta.

A continuación se diseña cada una de las partes del algoritmo propuesto.

3.1. Asignación de control

Recordando el sistema (1.1) como se ve en el Capítulo 1, sección 1.1, es un sistema LVT sujeto a fallas en los actuadores el cual está en su forma normal y tiene redundancia en los actuadores

$$\dot{\tilde{z}}(t) = A(t)\tilde{z}(t) + B_\nu(t)B(t)W(t)u(t), \quad (3.1)$$

y asuma lo siguiente,

1. El sistema es controlable.
2. La matriz $B_\nu(t)$ es una función que se puede derivar al menos una vez. Además, tanto $B_\nu(t)$ como $\dot{B}_\nu(t)$ están acotadas y son conocidas.

Debido a que el sistema (3.1) tiene redundancia en los actuadores, se necesita una forma de distribuir la señal de control, a lo largo de los actuadores. Una estrategia para lograr esto, es por medio de la asignación de control la cual nos permite calcular la entrada de control $u(t)$. Para realizar la asignación de control se debe asumir que (3.1) es un sistema ideal, es decir $W(t) = I_m$. Con lo cual obtenemos el siguiente sistema

$$\dot{\tilde{z}}(t) = A(t)\tilde{z}(t) + B_\nu(t)B(t)u(t), \quad (3.2)$$

sea $\tilde{v}(t) = B(t)u(t)$, entonces $u(t)$ puede ser reconstruido resolviendo el problema de minimización

$$\begin{aligned} & \min u^T(t)u(t), \\ & \text{sujeto a } B(t)u(t) = \tilde{v}(t), \end{aligned}$$

donde la solución de este problema es [34]

$$u(t) = B^+(t)\tilde{v}(t),$$

siendo $B^+(t) = B^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}$.

Ahora que ya se ha calculado el control $u(t)$ se reescribe el sistema (3.2) y se pueden considerar las fallas en los actuadores como se muestra a continuación

$$\dot{\tilde{z}}(t) = A(t)\tilde{z}(t) + B_\nu(t)B(t)W(t)B^+(t)\tilde{v}(t). \quad (3.3)$$

El conjunto de las posibles fallas en los actuadores esta definido como

$$\mathbf{W} = \{W(t) = \text{diag}(w_1(t), w_2(t), \dots, w_m(t)) \mid \det(\Gamma(t)) \neq 0 \ \& \ \|W(t)\| \geq w_{min} > 0\},$$

donde

$$\Gamma(t) = B(t)W(t)B^+(t).$$

Debido a que $l < m$ el $\det(\Gamma(t)) \neq 0$ incluso si $m - l$ actuadores tienen una falla total. Si más de $m - l$ actuadores fallan totalmente, no se puede asegurar la estabilidad del sistema [35].

3.2. Sistema nominal

En el caso de que el sistema este libre de fallas, es decir $W(t) = I$, el sistema (3.3) se reduce a

$$\dot{\tilde{z}}_n(t) = A(t)\tilde{z}_n(t) + B_\nu(t)\nu_n(t). \quad (3.4)$$

Este sistema nominal libre de fallas es el que se usa para diseñar el control nominal. Por lo que, asuma que el par $(A(t), B_\nu(t))$ es controlable, por lo tanto es posible diseñar una ley de control por realimentación de estado $\nu_n(t) = -K(t)\tilde{z}_n(t)$, tal que el sistema en lazo cerrado es exponencialmente estable. Para este trabajo el control nominal que se va a utilizar, es un controlador RCL introducido en el Capítulo 2 sección 2.4.

3.3. Modos deslizantes integrales continuos

Para compensar los efectos de las fallas en los actuadores, se define una superficie de deslizamiento integral variante en el tiempo

$$s(\tilde{z}(t)) = G(t)(\tilde{z}(t) - \tilde{z}(t_0)) - \int_{t_0}^t (G(\tau)(A(\tau)\tilde{z}(\tau) + B_\nu(\tau)\nu_n(\tau)) + \dot{G}(\tau)(\tilde{z}(\tau) - \tilde{z}(t_0)))d\tau, \quad (3.5)$$

donde $\tilde{z}(t_0) = \tilde{z}_o$ y $G(t)$ es una matriz de diseñada tal que $\det(G(t)B_\nu(t)) \neq 0$.

La derivada de la superficie de deslizamiento a lo largo de las trayectorias del sistema (3.3) esta dada por

$$\dot{s}(\tilde{z}(t)) = G(t)B_\nu(t)\Gamma(t)\tilde{\nu}(t) - G(t)B_\nu(t)\nu_n.$$

Asuma que $\tilde{\nu}(t) = \nu_n(t) + \nu_I(t)$ y $G(t) = B_\nu^+(t)$, por lo tanto

$$\dot{s}(\tilde{z}(t)) = \Gamma(t)\nu_I(t) + (\Gamma(t) - I_l)\nu_n(t), \quad (3.6)$$

el control equivalente (ν_{eq}) que mantienen las trayectorias de (3.3) en la superficie, es

$$\nu_{eq}(t) = -(\Gamma(t))^{-1}(\Gamma(t) - I_l)\nu_n(t).$$

Durante el modo deslizante el sistema (3.3) toma la forma de

$$\dot{\tilde{z}}(t) = A(t)\tilde{z}(t) + B_\nu(t)\nu_n(t), \quad (3.7)$$

observe que en el modo deslizante el sistema (3.7) es equivalente a (3.4).

3.4. Diseño de la ley de control por MDIC

El controlador es diseñado de tal forma, que el sistema (3.3) en el modo deslizante llegue y se mantenga en la superficie. Por lo tanto, el controlador propuesto tiene la forma siguiente

$$\nu_I(t) = \underbrace{(\hat{\Gamma}(t))^{-1} \left(-k_1 [s(\tilde{z}(t))]^{\frac{1}{2}} - k_2 \int_{t_0}^t [s(\tilde{z}(\tau))]^0 d\tau \right)}_{\nu_b(t)}, \quad (3.8)$$

donde $\hat{\Gamma}(t) \approx \Gamma(t)$ y se menciona como calcularla en la siguiente subsección, k_1 , k_2 son constantes, y la función $[s(\tilde{z}(t))]^q$ está definida como

$$[s(\tilde{z}(t))]^q = \begin{bmatrix} |s_1(\tilde{z}(t))|^q \text{sign}(s_1(\tilde{z}(t))) \\ \vdots \\ |s_l(\tilde{z}(t))|^q \text{sign}(s_l(\tilde{z}(t))) \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto la ecuación (3.6) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \dot{s}(\tilde{z}(t)) &= -k_1 [s(\tilde{z}(t))]^{\frac{1}{2}} + \Omega(t) \\ \dot{\Omega}(t) &= -k_2 [s(\tilde{z}(\tau))]^0 + \dot{\bar{W}}(t), \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde $\bar{W}(t) = (\Gamma(t) - I_l)\nu_n(t)$, sabemos que la matriz $\Gamma(t)$ y su derivada están acotadas, la acción de control $\nu_n(t)$ fue construida de tal forma que estabiliza un sistema nominal,

por lo que también está acotada al igual que su derivada, por lo tanto la derivada de la perturbación $\bar{W}(t)$ también está acotada, es decir $\|\dot{\bar{W}}(t)\| \leq L$.

De acuerdo al desarrollo constructivo anterior, se puede ver que el sistema (3.9) cumple con el Teorema 1 del Capítulo 2, subsección 2.6.1, por lo que la estabilidad se puede asegurar y se puede concluir que la superficie de deslizamiento $s(\tilde{z}(t))$ converge a cero en tiempo finito y por lo tanto el sistema (3.3) en el modo deslizante se va a comportar como (3.4).

3.4.1. Aproximación de la matriz de fallas

El controlador propuesto (3.8) utiliza a $\Gamma(t)$, por lo que es necesario aproximarla de tal forma que $\hat{\Gamma}(t) \approx \Gamma(t)$. Considere el sistema no lineal (1.1) propuesto en el Capítulo 1, sección 1.1, por simplicidad, asuma que el sistema (1.1) ha sido transformado a su forma normal y está sujeto a fallas en los actuadores, por lo que se puede representar como

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= f(z(t), t) + B_\nu(t)B(t)W(t)B^+(t)\tilde{\nu}(t), \\ \dot{z}(t) &= f(z(t), t) + B_\nu(t)\Gamma(t)\tilde{\nu}(t),\end{aligned}$$

donde $\tilde{\nu}(t) = \nu_n(t) + \nu_I(t)$. Ya que el estado $z(t)$ es completamente conocido, por medio de un diferenciador de Levant [36] se puede calcular a $\dot{z}(t)$ en tiempo finito. Para obtener a $\hat{\Gamma}(t)$ se define el siguiente residuo, $r = \dot{z}(t) - \dot{z}_n(t)$, donde $\dot{z}_n(t)$ es el sistema nominal, con lo cual

$$r = B_\nu(t)\Gamma(t)(\nu_I(t) + \nu_n(t)) - B_\nu(t)\nu_n(t). \quad (3.10)$$

Como se puede ver, el control ν_I depende de la inversa de $\hat{\Gamma}(t)$, por lo cual, considerando que $\nu_I(t)$ es una señal continua se aproxima su valor de la forma $\nu_I(t) = \hat{\Gamma}^{-1}(t)\nu_b(t)$ con $\hat{\Gamma}(t) = \Gamma(t - \Delta t)$, por lo tanto

$$\Gamma(t) = (B_\nu^+(t)r + \nu_n(t))(\hat{\Gamma}^{-1}(t)\nu_b(t) + \nu_n(t))^{-1}.$$

Observe que no se sabe con exactitud el valor de la falla en cada actuador, por la forma que tiene $\Gamma(t)$, al intentar calcular el valor de las fallas w_i ; $i = 1, \dots, m$, se obtiene un sistema de ecuaciones que tiene mas ecuaciones que incógnitas, por lo que no siempre es posible encontrar una solución única.

Capítulo 4

Modelo Matemático del Caso de Estudio

En esta sección, se presenta el modelo matemático de un avión considerando solo el movimiento longitudinal, el cual será el caso de estudio, es decir, se aplicará la teoría presentada en el Capítulo anterior.

4.1. Modelo no Lineal de un Avión.

Las ecuaciones que describen el movimiento longitudinal de un avión son [37]

$$\dot{V}_t = \frac{1}{m}(-D + T_n \cos(\alpha + \sigma_t) - mg \sin(\gamma)) \quad (4.1)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{mV_t}(-L - T_n \sin(\alpha + \sigma_t) + mg \cos(\gamma)) + q \quad (4.2)$$

$$\dot{\theta} = q \quad (4.3)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{I_y}(M + T_n l_{tz} \cos(\sigma_t)) \quad (4.4)$$

donde V_t , α , θ , q , γ representan la velocidad verdadera, ángulo de ataque, ángulo de cabeceo, velocidad de cabeceo y ángulo de trayectoria de vuelo, respectivamente. La fuerza de arrastre, la fuerza de levantamiento y los momentos en cabeceo (D , L , M) pueden ser escritos como

$$D = \bar{q}SC_D(x, \delta), \quad (4.5)$$

$$L = \bar{q}SC_L(x, \delta), \quad (4.6)$$

$$M = \bar{q}S\bar{c}C_m(x, \delta). \quad (4.7)$$

Los coeficientes de la fuerza de arrastre, la fuerza de levantamiento y el momento en cabeceo $C_D(x, \delta)$, $C_L(x, \delta)$ y $C_m(x, \delta)$ son funciones del estado y de la superficie de control (elevador y estabilizador horizontal), los cuales son usualmente obtenidos mediante túneles de viento y pruebas de vuelo reales.

Variable	Descripción
m	Masa del avión
g	Gravedad
I_y	Momento de inercia del cuerpo
T_n	Empuje total del motor
l_{tz}	Distancia desde la línea central del motor a la línea de referencia del fuselaje
σ_t	Ángulo de inclinación del motor
$\bar{q} = \frac{1}{2}\rho V_t^2$	Presión dinámica
S	Área del ala
\bar{c}	Distancia entre el borde delantero y trasero del ala
ρ	Densidad del aire

Tabla 4.1: Parámetros.

Con la finalidad de describir las dinámicas longitudinales del avión de una forma más simple, se hacen las siguientes aproximaciones:

- Se asume que V_t permanece estable, es decir, los cambios en la velocidad son pequeños y por lo tanto $\dot{V}_{tas} \approx 0$.
- Como es mencionado en la literatura de dinámicas de vuelo [38], la superficie de control actúa principalmente en el momento en cabeceo, y los efectos en el arrastre y levantamiento son mínimos, por lo tanto pueden ser ignorados.
- En (4.2) $\dot{\alpha}$ puede ser remplazado por $\dot{\gamma}$ para remover la dependencia de la variable de estado q , con $\gamma = \theta - \alpha$ y $\dot{\gamma} = \dot{\theta} - \dot{\alpha}$.

Los otros parámetros en (4.1)-(4.7) se muestran en la Tabla 4.1. Usando estas aproximaciones junto con (4.5)-(4.7), las dinámicas longitudinales en (4.1)-(4.4) pueden ser reescritas como

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{mV_t}(\bar{q}SC_L(x) + T_n \sin(\alpha + \sigma_t) - mg \cos(\gamma)), \quad (4.8)$$

$$\dot{\theta} = q, \quad (4.9)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{I_y}(\bar{q}S\bar{c}C_m(x, \delta) + T_n l_{tz} \cos(\sigma_t)). \quad (4.10)$$

Note que la señal de control solo afecta la dinámica del cabeceo (4.10). Como se describe en la literatura de dinámicas de vuelo [38], el coeficiente del momento de cabeceo puede ser escrito en detalle en función del estado y la superficie de control, específicamente como

$$C_m(x, \delta) = C_m(x) + \frac{dC_m}{d\delta_e} \delta_e + \frac{dC_m}{d\delta_{ih}} \delta_{ih}$$

donde δ_e es el elevador, δ_{ih} es el estabilizador horizontal y los coeficientes aerodinámicos $C_L(x)$, $C_m(x)$ son [39]

$$\begin{aligned} C_L(x) &= C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_q} q; & C_{L_0}, C_{L_\alpha}, C_{L_q} &\in \mathbb{R}, \\ C_m(x) &= C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_q} q; & C_{m_0}, C_{m_\alpha}, C_{m_q} &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por lo tanto las ecuaciones (4.8)-(4.10) pueden ser escritas como [40]

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{mV_t} (\bar{q} S C_L(x) + T_n \sin(\alpha + \sigma_t) - mg \cos(\gamma)) \\ q \\ \frac{1}{I_y} (\bar{q} S \bar{c} C_m(x) + T n l_{tz} \cos(\sigma_t)) \end{bmatrix}}_{f(x(t))} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{I_y} \bar{q} S \bar{c} \frac{dC_m}{d\delta_e} & \frac{1}{I_y} \bar{q} S \bar{c} \frac{dC_m}{d\delta_{ih}} \end{bmatrix}}_{\underbrace{B_0(x(t)) \quad B_s(x(t))}_{g(x(t))}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_{ih} \end{bmatrix}}_{u(t)} \quad (4.11)$$

4.2. Forma Normal del Sistema con Redundancia en los Actuadores

Para realizar la linealización por trayectoria y así obtener un sistema LVT, se requiere de un modelo de referencia o deseado y para obtener este modelo se transforma al sistema (4.11) en su forma normal como se muestra en [27], ya que al tener al sistema (4.11) en esta forma hace que encontrar la ley de control $u(t)$ sea más sencillo. Tomando como salida del sistema a

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}; \quad y_1(t) = \theta = h_1(x(t)); \quad y_2(t) = q = h_2(x(t)),$$

$$\begin{aligned}
L_{B_0}h_1(x(t)) &= 0, \\
L_{B_0}L_f h_1(x(t)) &= \frac{1}{I_y}\bar{q}S\bar{c}\frac{dC_m}{d\delta_e} \neq 0, \\
L_{B_s}h_1(x(t)) &= 0, \\
L_{B_s}L_f h_1(x(t)) &= \frac{1}{I_y}\bar{q}S\bar{c}\frac{dC_m}{d\delta_{ih}} \neq 0,
\end{aligned}$$

por lo que $r_1 = 2$ para $h_1(x(t))$ con respecto de $B_0(x(t))$ y $B_s(x(t))$.

$$\begin{aligned}
L_{B_0}h_2(x(t)) &= \frac{\partial h_2(x(t))}{\partial x}B_0(x(t)) = \frac{1}{I_y}\bar{q}S\bar{c}\frac{dC_m}{d\delta_e} \neq 0 \\
L_{B_s}h_2(x(t)) &= \frac{\partial h_2(x(t))}{\partial x}B_s(x(t)) = \frac{1}{I_y}\bar{q}S\bar{c}\frac{dC_m}{d\delta_{ih}} \neq 0
\end{aligned}$$

por lo tanto $r_2 = 1$ para $h_2(x(t))$ con respecto de $B_0(x(t))$ y $B_s(x(t))$.

Calculando la matriz $\Lambda(x(t))$ como se ve en el Capítulo 2, subsección 2.1.2

$$\Lambda(x(t)) = \begin{bmatrix} L_{B_0}L_f h_1(x(t)) & L_{B_s}L_f h_1(x(t)) \\ L_{B_0}h_2(x(t)) & L_{B_s}h_2(x(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_y}\bar{q}S\bar{c}\frac{dC_m}{d\delta_e} & \frac{1}{I_y}\bar{q}S\bar{c}\frac{dC_m}{d\delta_{ih}} \\ \frac{1}{I_y}\bar{q}S\bar{c}\frac{dC_m}{d\delta_e} & \frac{1}{I_y}\bar{q}S\bar{c}\frac{dC_m}{d\delta_{ih}} \end{bmatrix}.$$

Observe que bajo estas suposiciones el $\det(\Lambda(x(t))) = 0$ para todo t , por lo tanto es una matriz singular. Entonces el sistema con redundancia en actuadores (4.11) no puede ser llevado a la forma normal. Para eliminar la redundancia en los actuadores, es necesario reescribir el sistema y encontrar la señal de control total que es aplicada al sistema en cada canal de control, por lo que es necesario realizar primero la asignación del control.

Con el fin de simplificar el análisis se reescribe al sistema (4.11) en forma generalizada como se ve a continuación [40]

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x(t)) \\ f_2(x(t)) \end{bmatrix} + g(x(t))u(t) \quad (4.12)$$

con

$$g(x(t)) = \begin{bmatrix} B_0(x(t)) & B_s(x(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{21}(x(t)) & B_{22}(x(t)) \end{bmatrix},$$

donde el subvector de estado $x_1(t) \in \mathbb{R}^2$ y corresponde a γ y θ , mientras que $x_2(t) \in \mathbb{R}$ y corresponde a q . Las matrices de distribución de entrada $B_0(x(t)) \in \mathbb{R}^3$ y $B_s(x(t)) \in \mathbb{R}^3$ corresponden al elevador y al estabilizador horizontal, respectivamente. Por último, las matrices $B_{21}(x(t)) \in \mathbb{R}$ y $B_{22}(x(t)) \in \mathbb{R}$ están asociadas con la contribución del control.

4.2.1. Asignación de Control

Considere el sistema (4.12), factorizando la matriz $g(x)$ como se muestra a continuación

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x(t)) \\ f_2(x(t)) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ B_{21}(x(t)) \end{bmatrix}}_{B_u(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & B_2^s(x(t)) \end{bmatrix}}_{B(t)} u(t)$$

con

$$B_2^s(x(t)) = B_{22}(x(t))/B_{21}(x(t)),$$

cabe resaltar que la variable $B_{21}(x(t))$ nunca es cero, ya que está conformada por parámetros constantes del sistema.

Definiendo

$$\nu(t) = \begin{bmatrix} 1 & B_2^s(x(t)) \end{bmatrix} u(t)$$

podemos llegar a una descripción alternativa del sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x(t)) \\ f_2(x(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_{21}(x(t)) \end{bmatrix} \nu(t) \quad (4.13)$$

donde $\nu(t) \in \mathbb{R}$ puede ser interpretado como una entrada de control virtual que contiene el esfuerzo de control total producido por los actuadores.

4.2.2. Forma normal

Ahora se va a transformar al sistema (4.13) a su forma normal. Tomando como salida a

$$y(t) = \theta = h(x(t)),$$

$$\begin{aligned} L_g h(x(t)) &= \frac{\partial h(x(t))}{\partial x} g(x(t)) = 0, \\ L_g L_f h(x(t)) &= \frac{\partial L_f h(x(t))}{\partial x} g(x(t)) = \frac{1}{I_y} \bar{q} S \bar{c} \frac{dC_m}{d\delta_e} \neq 0, \end{aligned}$$

por lo tanto $h(x(t))$ tiene un grado relativo $r = 2$ con respecto de $g(x(t))$. Sea

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \phi_1(x(t)) = h(x(t)) = \theta, \\ z_2(t) &= \phi_2(x(t)) = L_f h(x(t)) = q, \end{aligned}$$

tenemos que buscar a $\phi_3(x(t))$ tal que

$$\frac{\partial \phi_3(x(t))}{\partial x} g(x(t)) = 0,$$

eligiendo $\phi_3(x(t)) = \gamma$ satisfacemos la condición anterior por lo tanto

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \phi_1(x(t)) = \theta, \\ z_2(t) &= \phi_2(x(t)) = q, \\ z_3(t) &= \phi_3(x(t)) = \gamma. \end{aligned}$$

Con lo que obtenemos una matriz $\Phi(x(t))$

$$\Phi(x(t)) = \begin{bmatrix} \theta \\ q \\ \gamma \end{bmatrix},$$

la cual tiene una matriz jacobiana

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

no singular para todo x_p . Por lo tanto la matriz $\Phi(x(t))$ califica como una transformación en coordenadas locales en una vecindad de x_p .

En las nuevas coordenadas el sistema está descrito por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) &= \frac{1}{I_y} (\bar{q} S \bar{c} C_m(x) + T_n \iota_{tz} \cos(\sigma_t)) + \frac{1}{I_y} (\bar{q} S \bar{c} \frac{dC_m}{d\delta_e}) \nu(t), \\ \dot{z}_3(t) &= \frac{1}{mV_t} (\bar{q} S C_L(x) + T_n \sin(z_1(t) - z_3(t) + \sigma_t) - mg \cos(z_3(t))). \end{aligned} \tag{4.14}$$

4.2.3. Linealización por Trayectoria

Ahora que tenemos al sistema (4.13) en su forma normal (4.14) se puede obtener al control virtual $\nu(t)$ usando la inversión de sistema (ver Capítulo 2, sección 2.2), para esto, se propone como trayectoria de referencia a

$$\bar{z}_1(t) = H \sin(t) \Rightarrow \dot{\bar{z}}_1(t) = \bar{z}_2(t) = H \cos(t) \Rightarrow \dot{\bar{z}}_2 = -H \sin(t); \quad H \in \mathbb{R},$$

por lo tanto

$$-H \sin(t) = \frac{1}{I_y} (\bar{q} S \bar{c} C_m(x) + T_n l_{tz} \cos(\sigma_t)) + \frac{1}{I_y} (\bar{q} S \bar{c} \frac{dC_m}{d\delta_e}) \bar{\nu}(t)$$

con lo cual obtenemos el siguiente control virtual que asegura el seguimiento de la trayectoria de referencia

$$\bar{\nu}(t) = - \frac{H \sin(t) + \frac{1}{I_y} (\bar{q} S \bar{c} C_m(x) + T_n l_{tz} \cos(\sigma_t))}{\frac{1}{I_y} \bar{q} S \bar{c} \frac{dC_m}{d\delta_e}} \quad (4.15)$$

representando al sistema (4.14) en su forma matricial como se muestra a continuación

$$\dot{z}(t) = f(z(t)) + g(z(t))\nu(t). \quad (4.16)$$

Sustituyendo el control virtual (4.15) en (4.16) obtenemos el siguiente sistema de referencia

$$\dot{\bar{z}}(t) = f(\bar{z}(t)) + g(\bar{z}(t))\bar{\nu}(t). \quad (4.17)$$

Definiendo el error de seguimiento como

$$\begin{aligned} \tilde{z}(t) &= z(t) - \bar{z}(t) \\ \nu_n(t) &= \nu(t) - \bar{\nu}(t) \end{aligned}$$

la dinámica del error se puede escribir como

$$\dot{\tilde{z}}(t) = f(\bar{z}(t) + \tilde{z}(t)) + g(\bar{\nu}(t) + \nu_n(t)) - f(\bar{z}(t)) - g(\bar{z}(t))\bar{\nu}(t) \quad (4.18)$$

Linealizando las dinámicas del error de seguimiento (4.18) a lo largo de la trayectoria de referencia,

$$\dot{\tilde{z}}(t) = \left. \frac{\partial}{\partial z} f(z, \nu) \right|_{\substack{z=\bar{z} \\ \nu=\bar{\nu}}} \tilde{z}(t) + \left. \frac{\partial}{\partial \nu} g(z, \nu) \right|_{\substack{z=\bar{z} \\ \nu=\bar{\nu}}} \nu_n(t),$$

por lo que se obtiene el siguiente sistema LVT

$$\dot{\tilde{z}}(t) = A(t)\tilde{z}(t) + B_\nu \nu_n(t) \quad (4.19)$$

donde

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\bar{q} S C_{L\alpha}}{mV_t} + \frac{\frac{1}{I_y} \bar{q} S \bar{c} C_{m\alpha}}{T_n \cos(\bar{z}_1(t) - \bar{z}_3(t) + \sigma_t)} & \frac{\frac{1}{I_y} \bar{q} S \bar{c} C_{m\alpha}}{mV_t} & -\frac{\frac{1}{I_y} \bar{q} S \bar{c} C_{m\alpha}}{mV_t} \\ \frac{\bar{q} S C_{L\alpha}}{mV_t} & \frac{\bar{q} S C_{Lq}}{mV_t} & \frac{mg \sin(\bar{z}_3(t))}{mV_t} - \frac{T_n \cos(\bar{z}_1(t) - \bar{z}_3(t) + \sigma_t)}{mV_t} \end{bmatrix},$$

$$B_\nu = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I_y} \bar{q} S \bar{c} \frac{dC_m}{d\delta_e} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4.2.4. Control nominal para el sistema LVT

Como se mencionó anteriormente, para estabilizar al sistema LVT (4.19) se va a utilizar un control RCL. Como se sabe, para obtener la ganancia $K(t)$ de este controlador, se tiene que calcular el valor de la variable $P(t)$ resolviendo la ecuación diferencial de Riccati, pero es muy difícil resolver una ecuación diferencial con términos variables en el tiempo de forma analítica [41], y es aún más complicado si estos términos son matrices, por lo que para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales se suelen emplear métodos numéricos [42]. Para este trabajo se va a utilizar un método conocido como Integración hacia atrás (IA)[43].

Considere el sistema (2.7) descrito en la sección 2.4, con índice de desempeño (2.8). La IA es un método numérico para resolver (2.9). Particionando t en N partes, entonces sea $N_t = t(i+1) - t(i)$ en el cual $1 \leq i \leq N-1$, la solución de (2.9) es

$$\begin{aligned} P(i-1) = & P(i) + (P(i)A(i) + A^T P(i) - P(i)B(i)R^{-1}B^T(i)P(i) + Q)N_t \\ & + (\dot{P}(i)A(i) + P(i)\dot{A}(i) + \dot{A}^T(i)P(i) + A^T(i)\dot{P}(i) - \dot{P}(i)B(i)R^{-1}B^T(i)P(i) \\ & - P(i)\dot{B}(i)R^{-1}B^T(i)P(i) - P(i)B(i)R^{-1}\dot{B}^T(i)P(i) \\ & - P(i)B(i)R^{-1}B^T(i)\dot{P}(i))N_t^2/2 + O(t^3), \end{aligned}$$

donde $P(i)$ provee una ganancia óptima aproximada. Con lo cual obtenemos el control nominal $(\nu_n(t))$ para estabilizar al sistema (4.19).

4.2.5. Control integral para el sistema LVT

Para la realización del control integral, considere el sistema (4.19) pero sujeto a fallas en los actuadores como se muestra a continuación

$$\dot{\tilde{z}}(t) = A(t)\tilde{z}(t) + B_\nu BW(t)B^+ \tilde{\nu}(t). \quad (4.20)$$

Para compensar las fallas de los actuadores, se define la siguiente superficie de deslizamiento

$$s(\tilde{z}(t)) = G(\tilde{z}(t) - \tilde{z}(t_0)) - \int_{t_0}^t (G(A(\tau)\tilde{z}(\tau) + B_\nu \nu_n) + \dot{G}(\tilde{z}(\tau) - \tilde{z}(t_0)))d\tau. \quad (4.21)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el Capítulo 3, sección 3.3 pero asumiendo que $\Gamma(t) = BW(t)B^+$, $G = B_\nu^+$ y $\tilde{\nu}(t) = \nu_n(t) + \nu_I(t)$, se obtiene que la derivada de la superficie de deslizamiento a lo largo de las trayectorias del sistema (4.20) es

$$\dot{s}(\tilde{z}(t)) = \Gamma(t)\nu_I(t) + (\Gamma(t) - I_I)\nu_n(t), \quad (4.22)$$

y por lo tanto el control equivalente es

$$\nu_{eq}(t) = (\Gamma(t))^{-1}(\Gamma(t) - I_l)\nu(t)$$

.

Durante el modo deslizante el sistema (4.20) toma la forma de

$$\dot{\tilde{z}}(t) = A(t)\tilde{z}(t) + B_\nu\nu_n(t).$$

4.2.6. Diseño del control integral

Utilizando el controlador (3.8) propuesto en el Capítulo 3, sección 3.4, es decir

$$\nu_I(t) = (\hat{\Gamma}(t))^{-1}(-k_1[s(\tilde{z}(t))]^{\frac{1}{2}} - k_2 \int_{t_0}^t [s(\tilde{z}(\tau))]^0 d\tau),$$

por lo que (4.22) puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{s}(\tilde{z}(t)) &= -k_1[s(\tilde{z}(t))]^{\frac{1}{2}} + \Omega(t) \\ \dot{\Omega}(t) &= -k_2[s(\tilde{z}(\tau))]^0 + \dot{W}(t), \end{aligned}$$

y proponiendo las constantes k_1 y k_2 como en [31], es decir

$$k_1 = 1.5\sqrt{L}, \quad k_2 = 1.1L, \quad \text{con } L = 3,$$

satisfacemos el Teorema 1, con lo cual podemos asegurar que la superficie de deslizamiento converge a cero en tiempo finito y que el sistema sujeto a fallas en los actuadores (4.20) se va a comportar como el sistema nominal (4.19).

Capítulo 5

Simulaciones

En el presente capítulo se muestran los resultados obtenidos de las simulaciones hechas del caso de estudio con el programa Matlab.

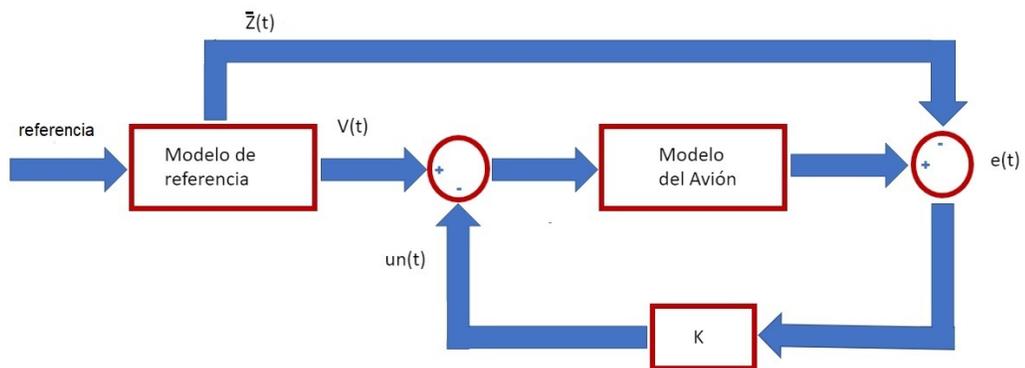


Figura 5.1: Sistema nominal.

En la Figura 5.1 se muestra como se construyó el sistema nominal, al introducir el control virtual $\nu(t)$ (4.15) en el modelo de referencia, del cual obtenemos el siguiente comportamiento en las variables de estado, es decir, la trayectoria que se desea seguir.

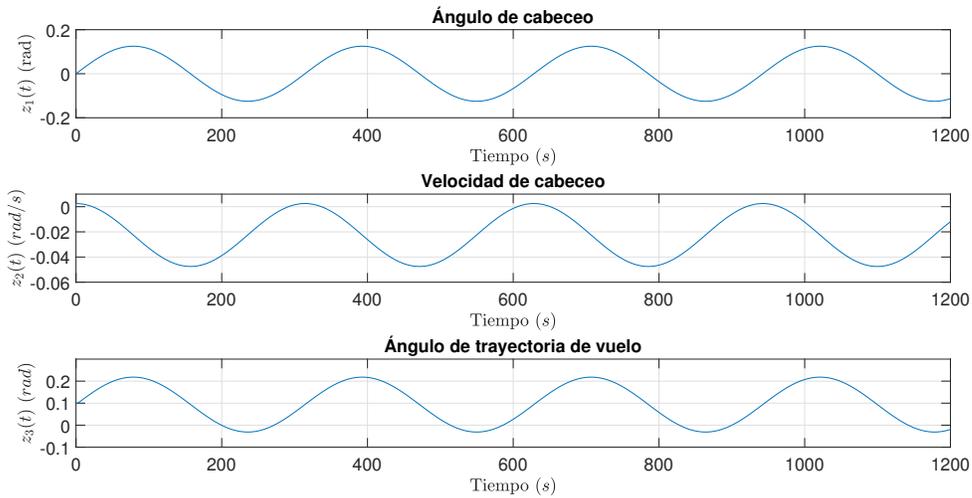


Figura 5.2: Variables de estado z_1 , z_2 y z_3 deseadas.

Las simulaciones fueron hechas tomando en cuenta que el avión se encuentra a 6100 m sobre el nivel del mar y con una velocidad de 0.8 mach (velocidad del sonido). En las siguientes subsecciones, se van a analizar 2 casos:

- En el primer caso, se inicia la simulación tomando en cuenta que no hay fallas en los actuadores, para después de un tiempo introducir una falla parcial en el elevador horizontal, la cual al pasar el tiempo se convertirá en una falla total, y finalmente se agregará una falla parcial en el elevador. Las fallas se introducen de esta forma para observar como la señal de control se adapta a cada falla con el fin de asegurar que el sistema siga la trayectoria deseada aún en presencia de las fallas.
- En el segundo caso, se simula una falla variante en el tiempo en el estabilizador horizontal.

5.1. Falla continua a pedazos

Para esta simulación, al inicio ni el elevador ni el estabilizador horizontal tienen fallas, después de 300s se introduce una falla parcial del 50% en el estabilizador horizontal, a partir del segundo 600, la falla parcial del estabilizador horizontal se

convierte en una falla total. Finalmente, después de 900s se agrega una falla parcial al elevador del 70%.

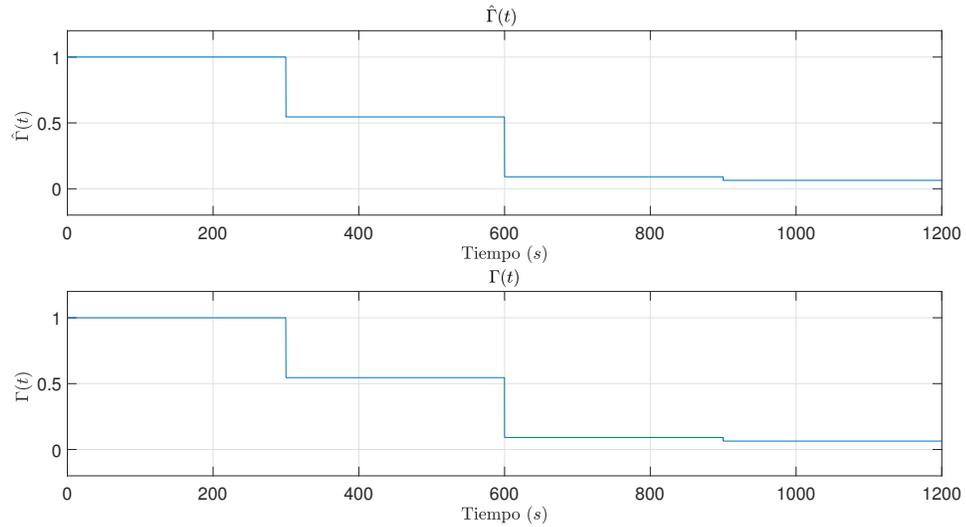


Figura 5.3: $\Gamma(t)$ y $\hat{\Gamma}(t)$ del caso 1.

En la Figura 5.3 podemos observar que la aproximación de $\Gamma(t)$ fue lograda en tiempo real, es decir, desde el primer momento se sabe el valor de $\Gamma(t)$.

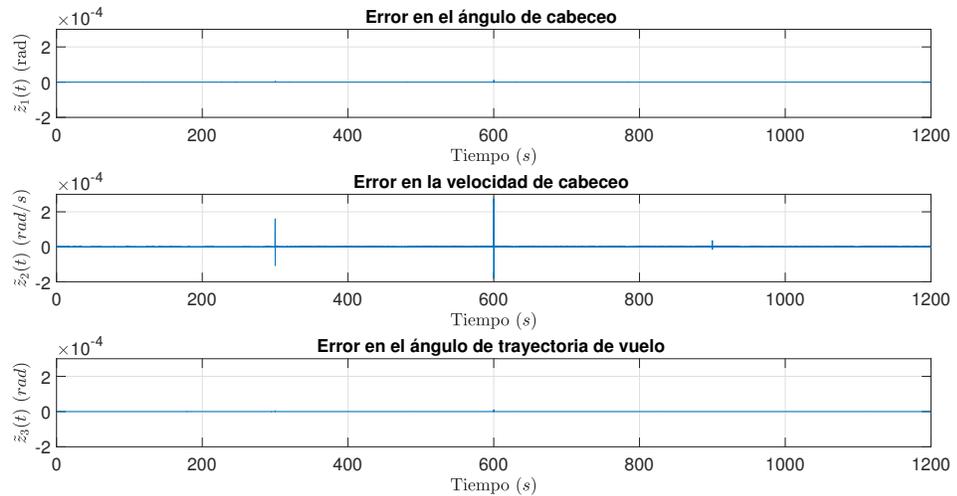


Figura 5.4: Error caso 1.

En la Figura 5.4 se puede notar que el error es cero en las tres variables de estado,

debido a la forma de la falla, si se hace un aumento, se puede observar que hay unos picos en la variable de estado $z_2(t)$, pero al ser tan pequeños se puede decir que está en cero.

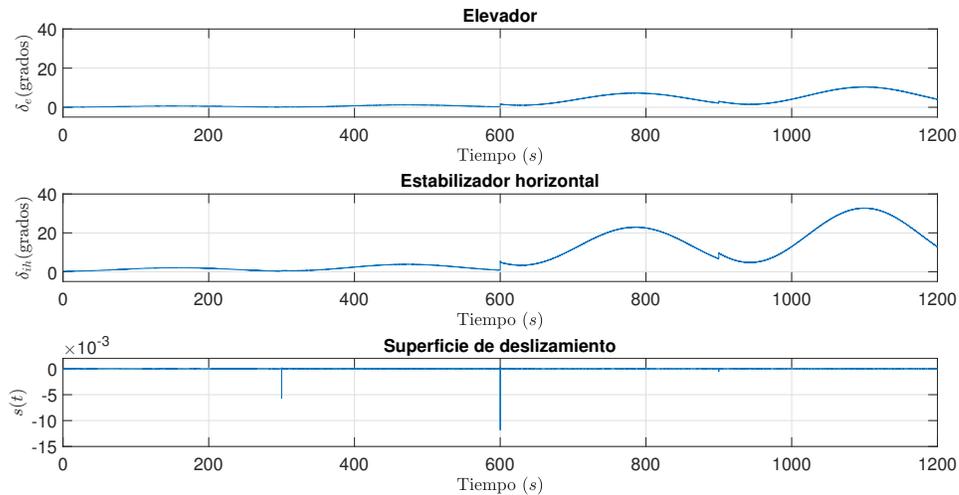


Figura 5.5: Señal de control y superficie de deslizamiento del caso 1.

En la Figura 5.5 se muestra la señal de control conformada por el RCL y el MDIC, el cual se introduce en el elevador y en el estabilizador horizontal, respectivamente. Observe como aumenta la señal de control en los segundos donde se introduce la falla. La superficie de deslizamiento se mantiene en cero, pero como era de esperarse, en los segundos donde se introduce la falla la superficie deja de ser cero, para después volver a converger en tiempo finito.

5.2. Falla variante en el tiempo

Para esta simulación se tiene una falla variante en el tiempo en el estabilizador horizontal, la cual es $\frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{21}t) + 0.5$, donde t es el tiempo de simulación.

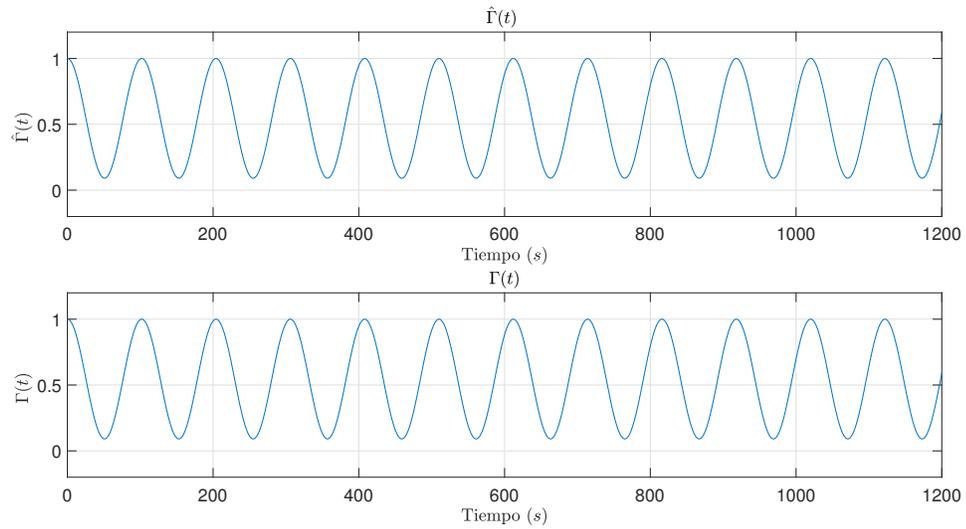


Figura 5.6: $\Gamma(t)$ y $\hat{\Gamma}(t)$ del caso 2.

En la Figura 5.6 se puede ver que entre $\Gamma(t)$ y su aproximación $\hat{\Gamma}(t)$ el error es cero.

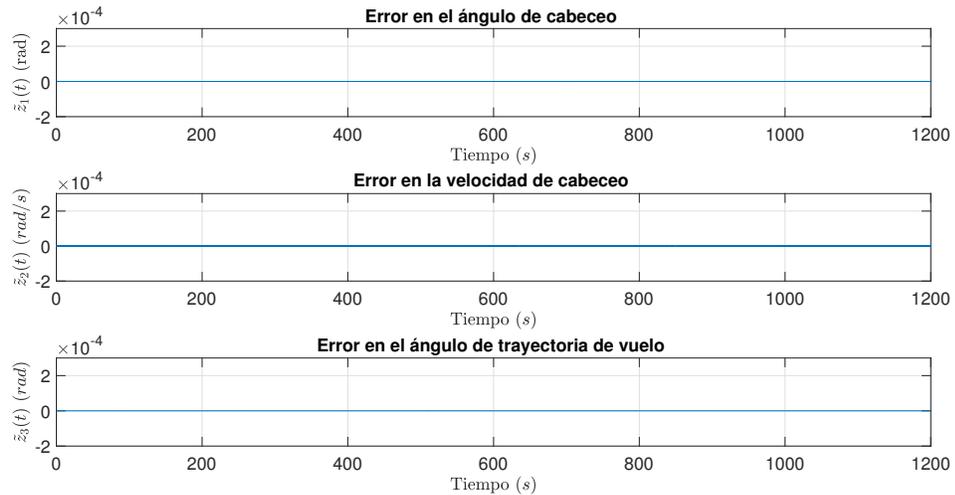


Figura 5.7: Error caso 2.

Como se puede ver en la Figura 5.7, el error es cero en las tres variables de estado, por lo que se puede concluir que se tiene un buen seguimiento de la trayectoria deseada.

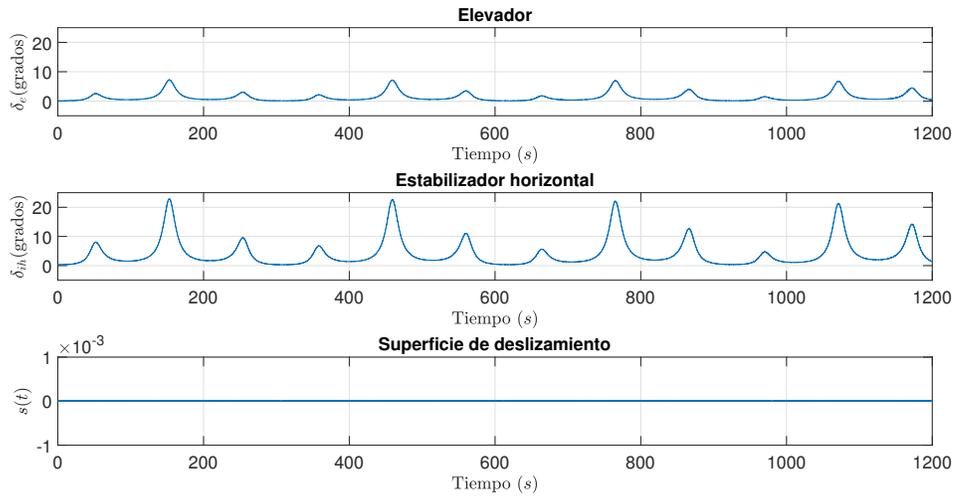


Figura 5.8: Señal de control y superficie de deslizamiento del caso 2.

Como se ve en la Figura 5.8, la señal de control del elevador y el estabilizador horizontal tienen varios picos, esto se debe a que en esos momentos la falla en el elevador horizontal están cerca de cero, es decir, en ese momento la falla es total, esta falla también genera esa oscilación alrededor de cero de la superficie de deslizamiento.

Los resultados de las simulaciones han mostrado que incluso con la presencia de fallas en los actuadores en los dos casos se asegura el seguimiento de la trayectoria de manera exponencial al compensar los efectos de las fallas en tiempo finito.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

La forma normal permite representar a un sistema de una forma en la que es más fácil aplicar una inversión de sistema, aunque, como se observó en el Capítulo 4, no siempre es posible representar un sistema en esta forma, por lo cual se tiene que optar por realizar diferentes transformaciones que nos entreguen un sistema más simple antes de poder llevarlo a su forma normal. La inversión de sistema permite encontrar la señal de control que asegura el seguimiento de una trayectoria de referencia, y una vez que se tiene ese control, se puede hacer una linealización por trayectoria, la cual nos entrega un sistema LVT y transforma el problema de seguimiento a un problema de regulación, por lo que si se estabiliza al sistema LVT, se resuelve el problema de seguimiento.

Además, como se mencionó en el Capítulo 3, sección 3.4, el controlador propuesto necesita conocer explícitamente a $\Gamma(t)$, y como se puede observar en los 2 casos del Capítulo 5, $\Gamma(t)$ fue aproximado de forma satisfactoria, aunque por la forma en que fue aproximada $\Gamma(t)$, no se puede saber exactamente el valor de la falla en cada actuador como fue mencionado en el Capítulo 3, subsección 3.4.1.

Finalmente el trabajo principal de esta tesis consistió en el análisis y desarrollo hecho en el Capítulo 3 y Capítulo 4, ya que se presentó un nuevo esquema para sistemas lineales variantes en el tiempo. El esquema propuesto utiliza el RCL para la estabilización del sistema nominal y cuando en este se presentan las fallas en los actuadores, el modo deslizante se activa, reconstruyendo en tiempo finito las fallas, volviendo al sistema robusto. Mientras la asignación de control se encarga de distribuir la señal de control, asegurando que el sistema con fallas se comporte como el sistema nominal en tiempo finito.

6.1. Trabajo futuro

- Diseñar el algoritmo de tal forma que se aplique directamente en sistemas no lineales.
- Encontrar otra forma de reconstruir las fallas, ya que el método empleado en este trabajo no se puede saber el valor explícito de las fallas.
- Diseñar el esquema de tolerancia a fallas por salida.

Bibliografía

- [1] M. Blanke, M. Kinnaert, J. Lunze, M. Staroswiecki, and J. Schröder, *Diagnosis and fault-tolerant control*. Springer, 2006, vol. 2.
- [2] J. S. Eterno, J. L. Weiss, D. P. Looze, and A. Willsky, “Design issues for fault tolerant-restructurable aircraft control,” in *1985 24th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, 1985, pp. 900–905.
- [3] M. Luzar, M. Witczak, V. Puig Cayuela, and F. Nejjari Akhi-Elarab, “Development of a fault-tolerant control with matlab and its application to the twin-rotor system,” in *7th Workshop on Advanced Control and Diagnosis*, 2009, pp. 1–8.
- [4] H. K. Khalil, *Nonlinear control*. Pearson New York, 2015.
- [5] B. Zhu and W. Huo, “Trajectory linearization control for a quadrotor helicopter,” in *IEEE ICCA 2010*. IEEE, 2010, pp. 34–39.
- [6] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear optimal control systems*. Wiley-interscience New York, 1972, vol. 1.
- [7] R. F. Stengel, “Intelligent failure-tolerant control,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 11, no. 4, pp. 14–23, 1991.
- [8] R. Patton, “Robustness issues in fault-tolerant control,” in *IEE Colloquium on Fault Diagnosis and Control System Reconfiguration*. IET, 1993, pp. 1–1.
- [9] A. Bondavalli, J. Stankovic, and L. Strigini, “Adaptable fault tolerance for real-time systems,” in *Responsive Computer Systems: Steps Toward Fault-Tolerant Real-Time Systems*. Springer, 1995, pp. 187–208.
- [10] R. J. Patton, “Fault-tolerant control: the 1997 situation,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 30, no. 18, pp. 1029–1051, 1997.

-
- [11] G. G. Yen and L.-W. Ho, "Fault tolerant control: An intelligent sliding mode control strategy," in *Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No. 00CH36334)*, vol. 6. IEEE, 2000, pp. 4204–4208.
- [12] R. Anita, B. Viswanathan, and B. Umamaheswari, "Implementation of neuro fuzzy fault tolerant sliding mode controller for a dc servo motor," *IETE Technical Review*, vol. 18, no. 5, pp. 415–420, 2001.
- [13] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, and A. Levant, *Sliding mode control and observation*. Springer, 2014.
- [14] R. J. Patton, J. Baillieul, and T. Samad, "Fault-tolerant control." 2015.
- [15] L.-Y. Hao, J. H. Park, and D. Ye, "Integral sliding mode fault-tolerant control for uncertain linear systems over networks with signals quantization," *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, vol. 28, no. 9, pp. 2088–2100, 2017.
- [16] H. Alwi and C. Edwards, "Fault tolerant control using sliding modes with on-line control allocation," in *Fault tolerant flight control*. Springer, 2010, pp. 247–272.
- [17] F. J. Bejarano, L. Fridman, and A. Poznyak, "Output integral sliding mode control based on algebraic hierarchical observer," *International Journal of Control*, vol. 80, no. 3, pp. 443–453, 2007.
- [18] M. T. Hamayun, C. Edwards, and H. Alwi, "Design and analysis of an integral sliding mode fault-tolerant control scheme," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 7, pp. 1783–1789, 2012.
- [19] M. T. Hamayun, H. Alwi, and C. Edwards, "An lpv fault tolerant control scheme using integral sliding modes," in *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE, 2012, pp. 1840–1845.
- [20] V. Utkin and J. Shi, "Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions," in *Proceedings of 35th IEEE conference on decision and control*, vol. 4. IEEE, 1996, pp. 4591–4596.
- [21] H. Alwi and C. Edwards, "Fault tolerant control of a civil aircraft using a sliding mode based scheme," in *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, 2005, pp. 1011–1016.

-
- [22] —, “Robust sensor fault estimation for tolerant control of a civil aircraft using sliding modes,” in *2006 American Control Conference*. IEEE, 2006, pp. 6–6.
- [23] R. Galván-Guerra, X. Liu, S. Laghrouche, L. Fridman, and M. Wack, “Fault-tolerant control with control allocation for linear time varying systems: an output integral sliding mode approach,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 11, no. 2, pp. 245–253, 2016.
- [24] Q. Hu and B. Xiao, “Adaptive fault tolerant control using integral sliding mode strategy with application to flexible spacecraft,” *International Journal of Systems Science*, vol. 44, no. 12, pp. 2273–2286, 2013.
- [25] H. Ríos, S. Kamal, L. M. Fridman, and A. Zolghadri, “Fault tolerant control allocation via continuous integral sliding-modes: a hosm-observer approach,” *Automatica*, vol. 51, pp. 318–325, 2015.
- [26] S. Banerjee and A. Roy, *Linear algebra and matrix analysis for statistics*. Crc Press, 2014.
- [27] A. Isidori, *Nonlinear control systems*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [28] S. Xingling and W. Honglun, “Trajectory linearization control based output tracking method for nonlinear uncertain system using linear extended state observer,” *Asian Journal of Control*, vol. 18, no. 1, pp. 316–327, 2016.
- [29] D. E. Kirk, *Optimal control theory: an introduction*. Courier Corporation, 2004.
- [30] A. Levant, “Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control,” *International journal of control*, vol. 58, no. 6, pp. 1247–1263, 1993.
- [31] R. Seeber and M. Horn, “Stability proof for a well-established super-twisting parameter setting,” *Automatica*, vol. 84, pp. 241–243, 2017.
- [32] R. Cantó, B. Ricarte, and A. M. Urbano, “Factorización de rango completo y aplicaciones.”
- [33] R. Piziak and P. Odell, “Full rank factorization of matrices,” *Mathematics magazine*, vol. 72, no. 3, pp. 193–201, 1999.
- [34] O. HäRkegåRd and S. T. Glad, “Resolving actuator redundancy—optimal control vs. control allocation,” *Automatica*, vol. 41, no. 1, pp. 137–144, 2005.

-
- [35] M. T. Hamayun, C. Edwards, and H. Alwi, “Design and analysis of an integral sliding mode fault-tolerant control scheme,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 7, pp. 1783–1789, 2011.
- [36] A. Levant, “Robust exact differentiation via sliding mode technique,” *automatica*, vol. 34, no. 3, pp. 379–384, 1998.
- [37] O. Härkegård, “Backstepping and control allocation with applications to flight control,” Ph.D. dissertation, Linköpings universitet, 2003.
- [38] B. Etkin and L. D. Reid, *Dynamics of flight*. Wiley New York, 1959, vol. 2.
- [39] T. O. Mohammed, X. J. Wu, and D. C. Li, “Nonlinear simulation of aircraft longitudinal flight dynamics,” in *Applied Mechanics and Materials*, vol. 444. Trans Tech Publ, 2014, pp. 753–758.
- [40] H. Alwi, C. Edwards, and M. T. Hamayun, “Nonlinear integral sliding mode fault tolerant longitudinal aircraft control,” in *2011 IEEE International Conference on Control Applications (CCA)*. IEEE, 2011, pp. 970–975.
- [41] A. Jeffrey and D. Zwillinger, *Table of integrals, series, and products*. Elsevier, 2007.
- [42] C. Kenney and R. Leipnik, “Numerical integration of the differential matrix riccati equation,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 30, no. 10, pp. 962–970, 1985.
- [43] S. Rafee Nekoo and M. Irani Rahaghi, “Recursive approximate solution to time-varying matrix differential riccati equation: linear and nonlinear systems,” *International Journal of Systems Science*, vol. 49, no. 13, pp. 2797–2807, 2018.