



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE HIDALGO**



INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN TECNOLOGÍAS DE INFORMACIÓN Y SISTEMAS

MAESTRÍA EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

**REGULACIÓN DE UN PÉNDULO FLEXIBLE SOBRE UN CARRO: DISEÑO DE
CONTROL ROBUSTO Y RESULTADOS EXPERIMENTALES.**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRÍA EN
CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL**

PRESENTA:

ING. SUSAN ISABEL GUARNEROS DOMINGUEZ

DIRECTORES DE TESIS:

DR. JESÚS PATRICIO ORDAZ OLIVER

DR. CARLOS CUVAS CASTILLO

PACHUCA HGO., MÉXICO 28 DE OCTUBRE DEL 2019



ING. Susan Isabel Guarneros
Dominguez

Regulación de un péndulo
flexible sobre un carro:
Diseño de control robusto y
resultados experimentales.

Agradecimientos

Esta tesis esta dedicada a mi familia quienes con su amor y paciencia me han apoyado a lo largo de este proceso para lograr cumplir un sueño más. Gracias al ejemplo y guía que me han brindado toda mi vida es que he logrado llegar hasta este momento.

También quiero agradecer a mi novio por estar conmigo desde el inicio de esta etapa de mi vida y siempre estar apoyándome y asesorándome en todo momento, es muy especial que sigan presente en el cierre de la misma, y ojala sigas acompañándome en los caminos que me esperan.

Por ultimo quiero agradecer a los docentes de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo por haber compartido sus conocimientos a lo largo de esta etapa, pero especialmente quiero agradecer a mis asesores por no dejarme rendirme y guiarme con paciencia siempre con amabilidad y rectitud.

Resumen

En el presente trabajo de tesis, se busca estabilizar el mecanismo del péndulo flexible sobre un carro, el cual puede ser representado como una clase de sistema lineal de segundo orden con retardos y con dinámicas inciertas.

Para poder emular el comportamiento del péndulo flexible, se hará una modificación sobre el sistema péndulo doble que se encuentra en el laboratorio.

La propuesta del algoritmo de control consta de dos partes:

- Mediante modos deslizantes, se diseñará una superficie de deslizamiento que garantice la convergencia de las trayectorias sobre la superficie en tiempo finito.
- Una vez alcanzada la superficie de deslizamiento el segundo objetivo es estabilizar las dinámicas del sistema mediante una re-alimentación de estado implementando el análisis de D-particiones.

Abstract

In the present thesis work, we seek to stabilize the mechanism of the flexible pendulum on a car, which can be represented as a kind of second order linear system with delays and with uncertain dynamics.

In order to emulate the behavior of the flexible pendulum, a modification will be made on the double pendulum system found in the laboratory.

The proposal of the control algorithm consists of two parts:

- By means of sliding modes, a sliding surface will be designed, which guarantees the convergence of the trajectories on the surface in finite time.
- Once the sliding surface has been reached, the second objective is to stabilize the dynamics of the system by means of a re-feeding of the state by implementing the analysis of D-partitions.

Índice de Notación

- m_c es la masa del carro del péndulo (kg).
- m_{p1} es la masa del péndulo 1 (kg).
- m_{p2} es la masa del péndulo 2 (kg).
- l_{p1} es la longitud media del péndulo 1 (m).
- l_{p2} es la longitud media del péndulo 2 (m).
- I_{p1} es el momento de inercia del péndulo 1 (kgm^2).
- I_{p2} es el momento de inercia del péndulo 2 (kgm^2).
- g es la constante de gravedad ($\frac{m}{s^2}$).
- κ es la constante de elasticidad ($\frac{N}{m}$).
- b es el coeficiente de amortiguamiento.
- x_c es la posición del carro en x (m).
- \dot{x}_c es la velocidad del carro (m/seg).
- θ_{p1} es la posición del péndulo 1 (rad).
- θ_{p2} es la posición del péndulo 2 (rad).
- $\dot{\theta}_{p1}$ es velocidad del péndulo 1 (rad/seg).
- $\dot{\theta}_{p2}$ es velocidad del péndulo 2 (rad/seg).
- φ es el vector de regresión.
- $\hat{\theta}$ es la matriz de parámetros estimados.

ACRONIMOS

- **SMC** Sliding Mode Control. (Control por modos deslizantes)
- **VSC** Variable Structure Controller. (Control por estructura variable)
- **DAC** Digital Analog Converter. (Convertidor de señal digital a analógica)
- **PWM** Pulse Width Modulation. (Modulación por ancho de pulso)
- **CAD** Computer aided design. (Diseño asistido por computadora)

Índice general

Resumen	III
Acronimos	VI
Índice general	VII
Índice de figuras	IX
1. Introducción	3
1.1. Antecedentes	3
1.2. Planteamiento del problema	6
1.3. Objetivos	7
1.3.1. Objetivo general	7
1.3.2. Objetivos específicos	7
1.4. Justificación	8
1.5. Hipótesis	8
2. Sistema péndulo simple invertido sobre el carro	9
2.1. Introducción	9
2.2. Modelado y análisis	9
2.2.1. Puntos de equilibrio	14
2.2.2. Controlabilidad del sistema	16
2.2.3. Control lineal para el sistema péndulo invertido sobre el carro.	17
2.2.4. Identificación de parámetros del péndulo invertido sobre el carro.	19
2.2.5. Control por modos deslizantes dinámicos para el sistema péndulo invertido sobre el carro.	22
2.3. Conclusiones del capítulo	24
3. Sistema péndulo flexible sobre el carro	25
3.1. Introducción	25
3.2. Control lineal para el péndulo doble invertido con resorte sobre un carro	26
3.3. Identificación del retardo (experimental)	27
3.4. Mínimos cuadrados Recursivo para identificar al sistema péndulo flexible (Experimental)	28

3.5. Control por modos deslizantes dinámicos al sistema péndulo doble invertido con resorte sobre el carro.	33
3.6. D-particiones para el sistema péndulo flexible.	36
3.6.1. Estrategia de control	39
3.7. Conclusiones capítulo 3.	42
Bibliografía	43
A. Preliminares	46
A.1. Sistemas con retardos.	46
A.1.1. Matriz fundamental.	47
A.1.2. Fórmula de Cauchy.	47
A.1.3. Tipos de Sistemas con retardo.	47
A.2. D-particiones.	49
A.2.1. Propiedades del cuasipolinomio.	50
A.2.2. Metodología para D-particiones.	50
A.3. Modos Deslizantes.	51
A.3.1. Perturbaciones.	51
A.3.2. Modos deslizantes dinámicos.	52
A.4. Identificación de parámetros.	55
A.4.1. Mínimos cuadrados	55
A.4.2. Forma Recursiva.	57
B. Sistema péndulo doble invertido sobre el carro	59
B.1. Modelo dinámico del sistema péndulo doble invertido sobre el carro.	59
B.2. Control por realimentación de estado al sistema péndulo doble invertido sobre el carro.	69
B.2.1. Identificación de parámetros por mínimos cuadrados recursivos para el péndulo doble invertido sobre el carro.	70
B.2.2. Control por modos deslizantes deslizantes para el sistema péndulo doble invertido sobre el carro.	72
C. Sistema péndulo doble invertido sobre el carro con resorte	74
C.1. Modelo dinámico del sistema péndulo doble invertido sobre el carro con resorte	74
D. Diseño de piezas para emular el efecto de flexibilidad.	78

Índice de figuras

1.1. Ejemplo de un control por modos deslizantes.	4
1.2. Efecto chattering sobre el control.	5
2.1. Sistema péndulo invertido	10
2.2. Dinámica del péndulo sobre el carro.	18
2.3. Comportamiento de las variables del péndulo invertido.	18
2.4. Parámetros estimados para el péndulo simple.	20
2.5. Control por modos deslizantes dinámicos para la planta real del sistema del péndulo invertido sobre el carro.	23
2.6. Comportamiento de las variables del péndulo invertido.	23
2.7. Sigma.	24
3.1. Dinámica de la planta real con un control lineal.	26
3.2. Dinámica de cada variable de estado de la planta real con un control lineal.	27
3.3. Análisis de la posición del péndulo 1 y péndulo 2.	28
3.4. Barra flexible.	28
3.5. Transformación de R^3 a R^2	29
3.6. Parámetros estimados del péndulo flexible.	32
3.7. Control por modos deslizantes para el péndulo doble invertido sobre el carro con resorte.	34
3.8. Variables de estado del sistema péndulo doble invertido sobre el carro con resorte ante un control por modos deslizantes.	34
3.9. Dinámica del péndulo flexible ante un control por modos deslizantes dinámicos.	35
3.10. Variables de estado del sistema péndulo flexible ante un control por modos deslizantes.	35
3.11. Mapa de parámetros K_{01} vs K_{02}	38
B.1. Diagrama del péndulo doble invertido sobre el carro	59
B.2. Sistema no lineal con un control por realimentación, con condiciones iniciales cercanas al punto de equilibrio.	69

B.3. Parámetros estimados de sistema (B.26).	71
B.4. Sistema (B.26) con control por modos deslizantes dinámicos.	73
C.1. Sistema masa-resorte-amortiguador.	75
C.2. Diagrama del sistema péndulo doble invertido con resorte sobre el carro.	75
D.1. Dibujo de las piezas para el péndulo flexible.	79
D.2. Ensamble final de la estructura para el péndulo flexible.	80
D.3. Vista isométrica del sistema.	81

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo de tesis se presenta un sistema retardado no lineal con perturbaciones, el cual es controlado mediante dos estrategias de control con el fin de llevarlo hasta su punto de equilibrio inestable.

Para el desarrollo de este trabajo fue necesario modelar matemáticamente el sistema desde su configuración mas simple hasta llegar a la etapa final. A su vez se implementó la identificación de parámetros con el fin de conocer aquellos valores que conforman las matrices del sistema. Para ese punto es posible implementar las estrategias de control propuestas, con el fin no solo de estabilizar el sistema, sino también de atenuar las perturbaciones.

Asimismo, en este capítulo se explican los objetivos por los cuales se desarrolló esta tesis, se plantean los problemas a resolver y la justificación, así como los fundamentos principales para llevar acabo el trabajo.

Al final se incluye el diseño del prototipo que servirá para emular el sistema del péndulo flexible, los experimentos que se llevaron a cabo y lo que se espera realizar en el futuro.

1.1. Antecedentes

Los sistemas con retardo son aquellos, cuya evolución del sistema requiere de información pasada; dada su naturaleza en el control, puede existir un retraso entre la aplicación de la entrada y la respuesta que tiene la planta [1]. Los sistemas con retardo pueden presentar

ciertos problemas, como por ejemplo las oscilaciones, las cuales en algunos casos conducen a la inestabilidad de la planta y complican el poder controlarlo.

Por otra parte uno de los problemas más comunes en teoría de sistemas, es la presencia de perturbaciones externas, que pueden resultar en respuestas no deseadas. Estas se pueden definir como una señal que tiende a afectar adversamente el valor de la salida de un sistema. [1].

Una herramienta para reducir los efectos de las perturbaciones, es el control por modos deslizantes, este se encarga de adicionar robustez al sistema respecto a perturbaciones externas. La idea básica consiste en llevar las trayectorias del sistema sobre una superficie conocida como variedad de deslizamiento, la cual representa una relación entre las variables que describen el comportamiento del sistema. Así el comportamiento dinámico del sistema en estas condiciones queda determinado por las ecuaciones que definen esta superficie en el espacio de estado, lo cual hace al estado teóricamente insensible a variaciones en los parámetros de la planta y a las perturbaciones externas [3].

El diseño de esta estrategia de control se realiza en dos pasos:

- Generar la superficie de deslizamiento.
- Diseñar un control u dependiente de la superficie de deslizamiento, que se encargue de dirigir las trayectorias dinámicas del sistema hacia una referencia en un tiempo finito [2].

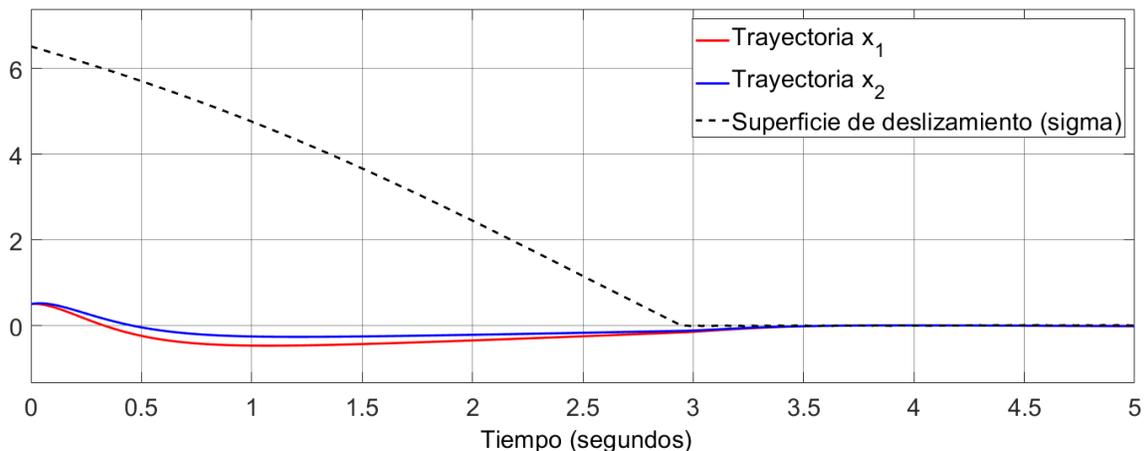


Figura 1.1: Ejemplo de un control por modos deslizantes.

Esto se puede ejemplificar en la Figura 1.1, cuando se tiene un sistema de la forma:

$$\dot{x} = f(x, t)$$

$$x(0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x, t) \in \mathbb{R}^n.$$

La estrategia de control mediante una superficie de deslizamiento σ representada por la línea punteada (Figura 1.1) que pasa por el origen, hace que las trayectorias del sistema se deslicen sobre ésta, y mediante un control u (Figura 1.2) asegurar la convergencia de dichas trayectorias.

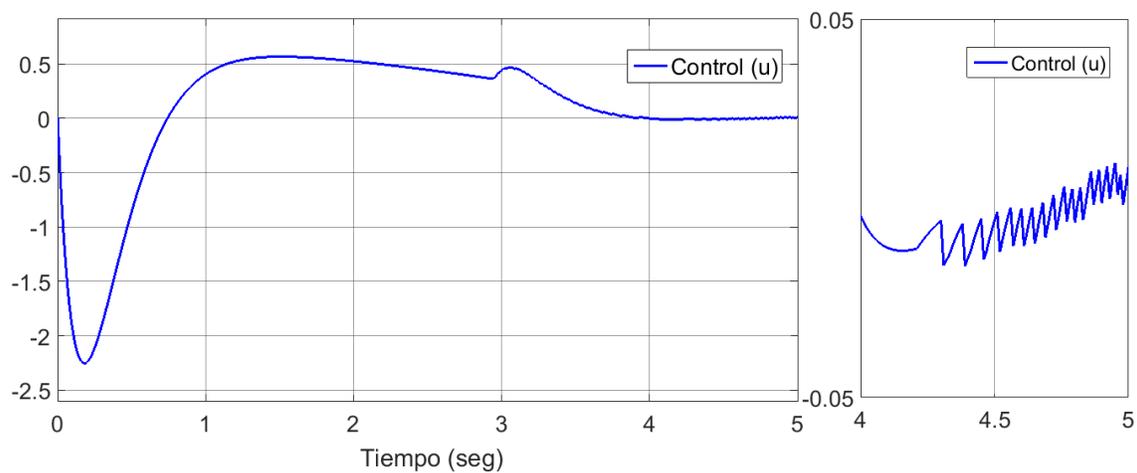


Figura 1.2: Efecto chattering sobre el control.

En la Figura 1.2 se puede observar el efecto chattering (término del inglés que significa oscilación) sobre el control como consecuencia de esta estrategia de control. Dicho efecto se describe como señales oscilantes de frecuencia y amplitud finita, que aparecen al implementar esta estrategia de control debido a la rápida conmutación en la acción de control excitando las características dinámicas sin modelar del lazo de control.

Cuando se habla de dinámica sin modelar, se puede referir a sensores y actuadores que no se toman en cuenta para el modelado del proceso debido a que estos son significativamente más rápidos que la dinámica principal del sistema [7]. Si no se tiene un adecuado manejo del chattering en el proceso de diseño, se pueden tener consecuencias como el el desgaste en los actuadores [8].

1.2. Planteamiento del problema

El problema que se plantea, es controlar un sistema de segundo orden no lineal en el cual se considerarán perturbaciones y un retardo de la forma:

$$\ddot{y}(t) = A_1\dot{y}(t) + A_2y(t) + B_1\dot{y}(t-h) + B_2y(t-h) + Bu + \dots + \xi(y(t), y(t-h), t), \quad (1.1)$$

$$y(\theta) = \varphi(\theta), \text{ con } \theta \in [-h, 0]$$

,

$$\dot{y}(\theta) = \dot{\varphi}(\theta), \text{ con } \theta \in [-h, 0].$$

Donde:

- $y \in \mathbb{R}^p$, es la variable de salida en el tiempo.
- $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^p$,
- $h > 0$, es un retardo constante en el tiempo.
- y_t , define la información mínima para construir la solución $y(t; \varphi; t_0)$.
- $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control.
- ξ contiene dinámicas inciertas y/o perturbaciones externas bajo el supuesto que las perturbaciones son acotadas por $\|\xi\| \leq \delta$.

Las perturbaciones y/o incertidumbres asociadas a la dinámica del sistema, son uno de los problemas de control más comunes en la estabilización de sistemas.

Este problema puede ser atacado desde diferentes perspectivas de control: desde el enfoque de control robusto mediante el segundo método de Lyapunov, modos deslizantes, redes neuronales, control difuso, control adaptable, entre otros.

Sin embargo, el problema se torna más complejo cuando los retardos estén presentes en las dinámicas del sistema [6].

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Conjuntar dos estrategias de control, una de estructura variable y otra lineal con el fin de estabilizar una clase de sistemas no lineales con retardo y perturbaciones acotadas.

1.3.2. Objetivos específicos

- Estudiar los conceptos de control por modos deslizantes, para conocer los fundamentos necesarios.
- Estudiar las bases de teoría de control de sistemas con retardo.
- Estabilizar un sistema no lineal con perturbaciones acopladas mediante modos deslizantes dinámicos.
- Estabilizar un sistema con retardos mediante una retroalimentación de estado, donde las ganancias sean encontradas mediante el método de D-particiones.
- Ajustar la estructura del péndulo sobre el carro, para emular el efecto de flexibilidad.
- Obtener una aproximación del modelo del sistema.
- Realizar un bosquejo de estabilidad para un sistema no lineal con retardo y perturbaciones acopladas.
- Evaluar la estrategia de control sobre el sistema carro-péndulo flexible.

1.4. Justificación

Los sistemas pendulares flexibles son muy comunes en la industria, sin embargo al momento de estudiarlos, el modelo usa una aproximación lineal para representar la dinámica flexible. Estrictamente, dicha dinámica debería ser representada por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, y su representación en una ecuación diferencial ordinaria con retardo puede ser obtenida mediante una transformación [4]. Por ello el estudiar el diseño de controles para esta clase de sistemas es uno de los problemas que actualmente se abordan, más aún cuando el sistema presenta dinámicas inciertas o perturbaciones externas.

1.5. Hipótesis

Se diseñará un control mediante modos deslizantes el cual lleve al sistema a una configuración específica. Es decir el SMC (Control por modos deslizantes) se encargará de transformar al sistema retardado no lineal con perturbaciones (3.2), a uno lineal con retardo de la forma general, mediante la transformación de D'Alembert [4]

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}_0 x(t) + \tilde{A}_1 x(t - h) \quad (1.2)$$

$$x(\Theta) = \varphi(\Theta), \quad x_t := x(t + \Theta), \quad \text{con } \Theta \in [-h, 0],$$

$$\tilde{A}_0 = A_0 + BK_0, \quad \tilde{A}_1 = A_1 + BK_1,$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad \tilde{A}_0, \tilde{A}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^n, \quad K_0, K_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n}.$$

Para poder llegar a la ecuación (1.2) se propone realizar una aproximación mediante el método de identificación de parámetros del modelo péndulo flexible sobre el carro, y así obtener los valores de los parámetros A_0 y A_1 .

También para la ecuación (1.2) se busca analizar la estabilidad asintótica mediante el método de D-particiones, para poder obtener las fronteras de estabilidad en el plano de parámetros y dividirlo en regiones de estabilidad e inestabilidad y encontrar las ganancias K_0, K_1 [9].

Capítulo 2

Sistema péndulo simple invertido sobre el carro

2.1. Introducción

Para llegar al análisis del péndulo flexible sobre el carro, fue necesario comenzar con el estudio del sistema más simple, es por ello que en este capítulo se estudia el sistema del péndulo simple invertido sobre el carro. Al cual primero se describirá mediante un diagrama que represente sus componentes, características y la manera en la que se hace la lectura de sus variables, para posteriormente llevar a acabo el modelado del sistema.

Una vez que se conoce la forma matricial del sistema, se implementaron los conocimientos descritos en el Apéndice A sobre la identificación de parámetros mediante mínimos cuadrados recursivos con el fin de obtener aquellos que se aproximen a los reales, para posteriormente poder implementar un control por modos deslizantes dinámicos.

2.2. Modelado y análisis

El sistema (Figura 2.1) consta de una barra de aluminio sobre un carro de la compañía Quanser [5]. El ángulo del péndulo se obtiene mediante la lectura de un encoder incremental. Mientras que la lectura del ángulo del segundo péndulo se obtiene a través de un Arduino MEGA el cual adquiere y acondiciona la señal digital de un encoder óptico. A la salida la tarjeta Arduino genera una señal PWM (Modulación por ancho de pulso), la cual se puede definir como un tipo de señal de voltaje utilizada para enviar información

o para modificar la cantidad de energía que se envía a una carga, dicha señal es enviada a un DAC (Convertidor de señal digital a analógica) el cual se encarga de generar una señal analógica comprendida entre 0 y 5 volts [15].

Según la posición del carro y los ángulos de los péndulos, el control calculado es un voltaje que se aplica al motor del carro, con la finalidad de generar un movimiento hacia adelante y hacia atrás para equilibrar al par de péndulos y mantenerlos en posición vertical [5].

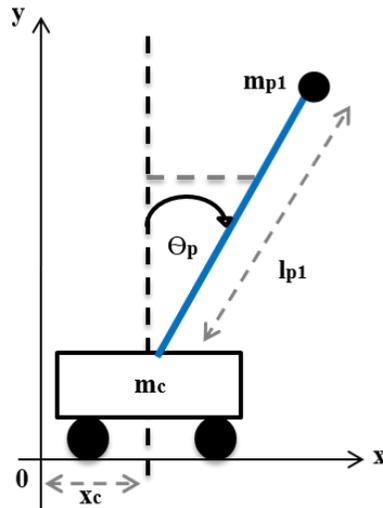


Figura 2.1: Sistema péndulo invertido

El modelo matemático de un sistema dinámico se define como el conjunto de ecuaciones diferenciales que representan la dinámica del sistema.

Los parámetros obtenidos de la página web de la compañía se muestran continuación.

Parámetro	Nombre	Valor	Unidad
m_c	Masa del carro	0.52	kg
m_{p1}	Masa péndulo 1	0.23	kg
l_{p1}	Longitud media del péndulo 1	0.3302	m
g	Constante de gravedad	9.81	m/seg^2

Tabla 2.1: Tabla de parámetros del sistema péndulo simple.

Considerando la figura anterior (2.1) se definen las coordenadas (x, y) del centro de gravedad del carro y del péndulo como:

$$\begin{aligned} \text{Posición en (x,y) del carro} &= (x_c, y_c), \\ \text{Posición en (x,y) del péndulo} &= (x_p, y_p), \end{aligned}$$

- Posición del carro:

$$x_c = x_c,$$

$$y_c = 0.$$

- Posición del péndulo:

$$x_p = x_c + l_{p1} \text{sen}(\theta_{p1}),$$

$$y_p = l_{p1} \text{cos}(\theta_{p1}).$$

La energía potencial total (V_T) es solo analizada en el péndulo:

$$V_T = mgh$$

$$V_T = m_{p1}gl \text{cos}(\theta_{p1}).$$

La energía cinética total (T_T) esta compuesta por la suma de la energía cinética de traslación del péndulo (T_{pt}), la energía cinética de rotación del péndulo (T_{pr}) y la energía cinética del carro (T_c),

$$T_T = T_c + T_{pt} + T_{pr}.$$

Se obtiene la energía cinética traslacional de los péndulos, mediante la siguiente ecuación:

$$T_{pt} = \frac{1}{2}m_p1v^2,$$

la velocidad en sus componentes x e y ,

$$v^2 = [\dot{x}_p, \dot{y}_p] \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{bmatrix} = \dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2,$$

si se sustituye v^2 en T_{pt} ;

$$T_{pt} = \frac{1}{2}m_{p1}(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2).$$

Para obtener la velocidad es necesario obtener la derivada de \dot{x}_p , \dot{y}_p :

$$\dot{x}_{p1} = \dot{x}_c + l_{p1}\dot{\theta}_{p1}\cos(\theta_{p1}),$$

$$\dot{y}_{p1} = -l_{p1}\dot{\theta}_{p1}\sen(\theta_{p1}).$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones anteriores,

$$\dot{x}_{p1}^2 = \dot{x}_c^2 + 2\dot{x}_cl_{p1}\dot{\theta}_{p1}\cos(\theta_{p1}) + l_{p1}^2\dot{\theta}_{p1}^2\cos^2(\theta_{p1}),$$

$$\dot{y}_{p1}^2 = l_{p1}^2\dot{\theta}_{p1}^2\sen^2(\theta_{p1}).$$

La energía cinética traslacional del péndulo es:

$$T_{pt} = \frac{1}{2}m_{p1}(\dot{x}_c^2 + 2\dot{x}_cl_{p1}\dot{\theta}_{p1}\cos(\theta_{p1}) + l_{p1}^2\dot{\theta}_{p1}^2).$$

Los marcos inerciales del péndulo es la ecuación siguiente:

$$T_{pr} = \frac{1}{2}I_p\dot{\theta}_{p1}^2.$$

La energía cinética de traslación del carro (T_c) está definida por:

$$T_c = \frac{1}{2}m_c\dot{x}_c^2.$$

Por lo tanto para obtener la energía cinética total se debe sustituir T_{pt}, T_{pr}, T_c , en T_T ,

$$T_T = \frac{1}{2}m_{p1}(\dot{x}_c^2 + 2\dot{x}_cl_{p1}\dot{\theta}_{p1}\cos(\theta_{p1}) + l_{p1}^2\dot{\theta}_{p1}^2) + \frac{1}{2}I_p\dot{\theta}_{p1}^2 + \frac{1}{2}m_c\dot{x}_c^2.$$

Mediante T_T , V_T es posible obtener el Lagrangiano del sistema. [10]

$$L = T_T - V_T,$$

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}_c^2(m_c + m_{p1}) + m_{p1}l_{p1}\dot{x}_c\dot{\theta}_{p1}\cos(\theta_{p1}) + \frac{1}{2}\dot{\theta}_{p1}^2(m_{p1}l_{p1}^2 + I_p) - m_{p1}gl\cos(\theta_{p1}).$$

La ecuación de Euler-Lagrange [10],

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} &= F_{ext}, \\ q &= x_c, \theta_{p1}, \\ \dot{q} &= \dot{x}_c, \dot{\theta}_{p1}.\end{aligned}$$

Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden en la que q es la variable dependiente y t la independiente.

Es necesario aplicar la fórmula de Euler-Lagrange con respecto a x_c :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_c} = F_{1ext}.$$

Para ello se debe derivar a L con respecto a \dot{x}_c ,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} = \dot{x}_c(m_c + m_{p1}) + l_{p1}m_{p1}\dot{\theta}_{p1}\cos(\theta_{p1}),$$

después, la ecuación obtenida se deriva con respecto al tiempo,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} \right) = \ddot{x}_c(m_{p1} + m_c) + l_{p1}m_{p1} \left(\ddot{\theta}_{p1}\cos(\theta_{p1}) - \theta_{p1}^2\text{sen}(\theta_{p1}) \right) = \tau,$$

para $\frac{\partial L}{\partial x_c}$ se deriva a L con respecto a x_c

$$\frac{\partial L}{\partial x_c} = 0.$$

Euler-Lagrange con respecto a x_c

$$\ddot{x}_c(m_{p1} + m_c) + l_{p1}m_{p1} \left(\ddot{\theta}_{p1}\cos(\theta_{p1}) - \theta_{p1}^2\text{sen}(\theta_{p1}) \right) = \tau. \quad (2.1)$$

Aplicando Euler-Lagrange con respecto a θ_{p1} :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{p1}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{p1}} = F_{2ext},$$

se deriva a L con respecto a $\dot{\theta}_{p1}$

$$m_{p1}l_{p1}\dot{x}_c\cos(\theta_{p1}) + \dot{\theta}_{p1}(m_{p1}l_{p1}^2 + I_p) = 0,$$

después se deriva $\frac{\partial L}{\partial \theta_{p1}}$ respecto a t ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{p1}} \right) = m_{p1}l_{p1} \{ \ddot{x}_c\cos(\theta_{p1}) - \dot{x}_c\text{sen}(\theta_{p1})\dot{\theta}_{p1} \} + \ddot{\theta}_{p1} \{ m_{p1}l_{p1}^2 + I_p \},$$

para $\frac{\partial L}{\partial \theta_{p1}}$ se deriva a L con respecto a θ_{p1}

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_{p1}} = -m_{p1}l_{p1}\dot{x}_c\dot{\theta}_{p1}\text{sen}(\theta_{p1}) + m_{p1}gl_{p1}\text{sen}(\theta_{p1}),$$

Por lo tanto,

$$m_{p1}l_{p1}\ddot{x}_c\cos(\theta_{p1}) + \ddot{\theta}_{p1}(m_{p1}l_{p1}^2 + I_p) - m_{p1}gl_{p1}\text{sen}(\theta_{p1}) = 0. \quad (2.2)$$

Gracias a las ecuaciones (2.2) y (2.1) es posible obtener la representación matricial de las dinámicas del sistema, dado el modelo dinámico de un robot [12]:

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(q, \dot{q}) = 0, \quad (2.3)$$

donde:

- $D(q)$ representa a las fuerzas inerciales debidas a las aceleraciones.
- $C(q, \dot{q})$ representa a los pares de Coriolis.
- $G(q)$ son los pares gravitatorios asociados a la masa.
- $F(q, \dot{q})$ es el vector de entradas.

Por lo tanto se puede representar el sistema de la siguiente forma:

$$D(q)\ddot{q} = \begin{bmatrix} m_{p1} + m_c & l_{p1}m_{p1}\cos(\theta_{p1}) \\ l_{p1}m_{p1}\cos(\theta_{p1}) & l_{p1}^2m_{p1} + I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{\theta}_{p1} \end{bmatrix},$$

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & -l_{p1}m_{p1}\dot{\theta}_{p1}\text{sen}(\theta_{p1}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{\theta}_{p1} \end{bmatrix},$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_{p1}gl_{p1}\text{sen}(\theta_{p1}) \end{bmatrix},$$

$$F(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix},$$

2.2.1. Puntos de equilibrio

Considerando un sistema de la forma $\dot{x} = f(x, u)$ con $u^* = 0$ se dice que x^* es un punto de equilibrio si el sistema tiene condicion inicial $x_0 = x^*$, entonces la solución a lo largo del tiempo $x(t, x_0) = x^*$ [1].

Las técnicas de análisis y control lineales son bien conocidas, por ello es conveniente al

analizar un sistema no lineal, comenzar linealizando el sistema alrededor de un punto de equilibrio y estudiar el sistema lineal resultante.

Se puede representar el sistema péndulo doble invertido sobre el carro de la forma $\dot{x}(t) = f(x, u)$ si se despeja $\ddot{x}_c, \ddot{\theta}_1$ de (2.3) y efectuando un cambio de variable,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_c \rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x}_c, \\ x_2 &= \dot{x}_c \rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{x}_c, \\ x_3 &= \theta_1 \rightarrow \dot{x}_3 = \dot{\theta}_1, \\ x_4 &= \dot{\theta}_1 \rightarrow \dot{x}_4 = \ddot{\theta}_1, \end{aligned}$$

expandiendo el lado derecho del sistema no lineal en series de Taylor alrededor de los puntos de equilibrio, se obtiene [22]

$$\bar{\dot{x}} = \bar{f}(x^*, u^*) = \bar{f}(x^*, u^*) + \left[\frac{\partial \bar{f}(x, u)}{\partial x} \quad \frac{\partial \bar{f}(x, u)}{\partial u} \right]_{(x, u)=(x^*, u^*)} \begin{bmatrix} x - x^* \\ u - u^* \end{bmatrix} + o(\cdot)$$

siendo

$$\frac{\partial \bar{f}(x, u)}{\partial x} \Big|_{(x, u)=(x^*, u^*)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x, u)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x, u)}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(x, u)=(x^*, u^*)} = A, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \bar{f}(x, u)}{\partial u} \Big|_{(x, u)=(x^*, u^*)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x, u)}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x, u)}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{(x, u)=(x^*, u^*)} = B, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{x} &= A(x - x^*) + B(u - u^*), \\ \text{si } x^* &= 0 \quad u^* = 0, \\ \dot{x} &\approx Ax + Bu, \end{aligned}$$

si $\bar{\dot{x}} = 0$, para que x_2, x_4 sea 0, entonces x_1^*, x_3^* , deben ser igual a c , siendo $c = \text{constante}$, por lo tanto para que $\ddot{x}_c, \ddot{\theta}_1$ sean 0,

$$\begin{aligned} x_3^* &= \pm\pi \\ u^* &= 0 \end{aligned}$$

entonces la representación espacio estado linealizada queda de la siguiente manera:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.6)$$

$$u_0 = u(0),$$

$$x_0 = x(0),$$

$$x \in \mathbb{R}^4, \quad A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad B \in \mathbb{R}^4, \quad u \in \mathbb{R},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_p g}{m_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(m_p + m_c)g}{m_c l_p} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_c} \\ 0 \\ -\frac{1}{l_p m_c} \end{bmatrix} u$$

Donde:

- x_1 = Posición del carro.
- x_2 = Velocidad del carro.
- x_3 = Posición del péndulo.
- x_4 = Velocidad del péndulo.

2.2.2. Controlabilidad del sistema

La controlabilidad es la propiedad que indica si el comportamiento de un sistema puede ser controlado por medio de sus entradas. Si se considera un sistema como el (2.6):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$x_0(t) = x(0)$$

Definición 2.2.2.1 La ecuación de estados (2.6) o el par (A, B) , se dice controlable si para cualquier estado inicial $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ y cualquier estado final $x(1) \in \mathbb{R}^n$ existe una entrada que transfiera x_0 a x_1 en tiempo finito. En otro caso se dice no controlable.

Un sistema es controlable si la matriz de controlabilidad C es de rango completo, es decir, el rango de C es igual a n ; el número de estados C se construye de la siguiente manera:

$$C = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B], \quad C \in \mathbb{R}^{n \times np}.$$

Para el sistema (2.6) se sustituyeron los valores de los parámetros obtenidos de Quanser, por lo que las matrices A y B quedaron de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.3390 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 42.8499 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.9231 \\ 0 \\ -5.8240 \end{bmatrix},$$

y su matriz de controlabilidad es la siguiente:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1.9231 & 0 & 25.2705 \\ 1.9231 & 0 & 25.2705 & 0 \\ 0 & -5.8240 & 0 & -249.5568 \\ -5.8240 & 0 & -249.5568 & 0 \end{bmatrix},$$

la cual tiene un rango igual a 4, por lo que el par (A,B) es controlable, aclarado este punto, es posible seguir con la siguiente sección del capítulo, en la cual se busca controlar al sistema mediante una estrategia de control.

2.2.3. Control lineal para el sistema péndulo invertido sobre el carro.

Conociendo la representación en espacio estado (2.6) del péndulo invertido sobre el carro, es posible diseñar un control que se encargue de llevar al péndulo a su punto de equilibrio inestable.

Para ello se propone aplicar un control por realimentación de estado en donde $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ es un vector de ganancias [19]. Proponiendo u como $-Kx$ se obtiene el siguiente sistema en lazo cerrado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - BK)x(t), \\ x_0 &= x(0), \end{aligned}$$

cuyo polinomio característico es:

$$\det[sI - A + BK].$$

Mediante la asignación de polos es posible determinar las ganancias K , tal que los polos del sistema en lazo cerrado tengan ciertos valores. [19]

El polinomio característico deseado propuesto es el siguiente:

$$\Delta(\lambda) = s^4 + 75.19s^3 + 526.91s^2 + 1489.5s + 1575.1^4.$$

Si el polinomio característico del sistema se iguala al deseado se obtienen las siguientes ganancias:

$$K = [-27.5681 \quad -26.0701 \quad -106.9325 \quad -21.5188]. \quad (2.7)$$

En la siguiente Figura (2.2) se observa el comportamiento de la planta cuando se aplica el control u propuesto, durante un tiempo $t = 50$ seg.

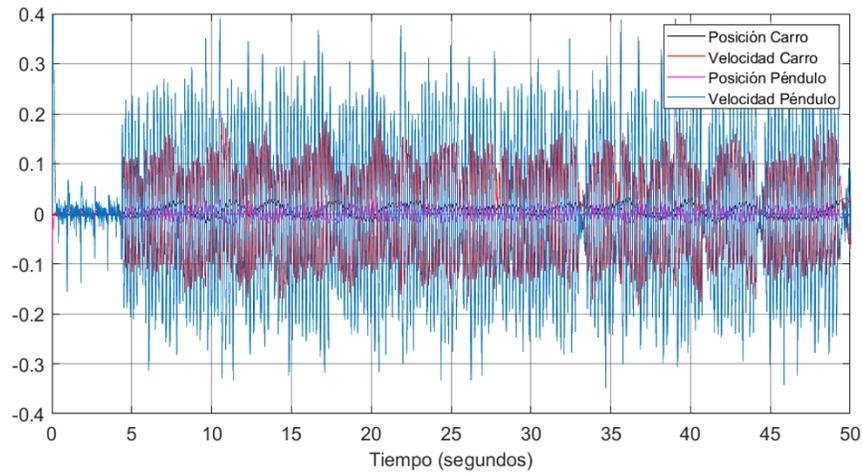


Figura 2.2: Dinámica del péndulo sobre el carro.

En la siguiente figura se aprecia individualmente como las variables del sistema se encuentran alrededor de punto de equilibrio. También se observa que el porcentaje de error de las variables de estado respecto a la referencia es de 0.52 por ciento

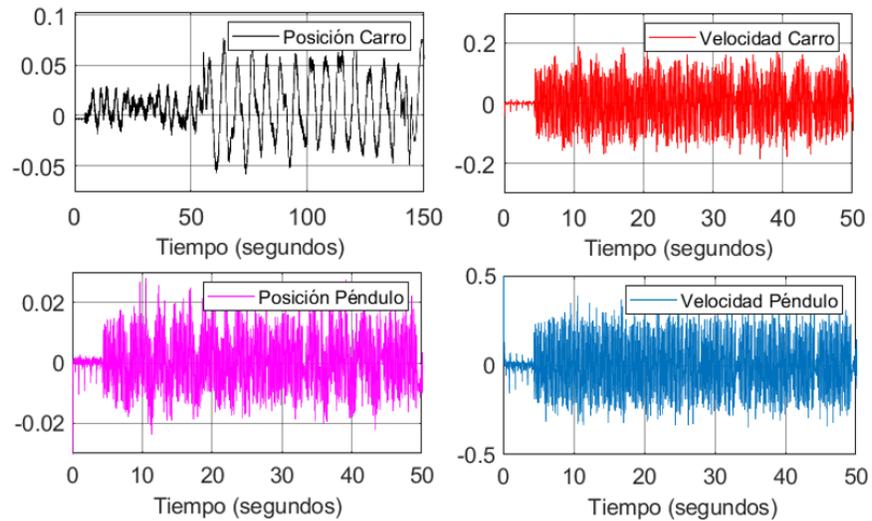


Figura 2.3: Comportamiento de las variables del péndulo invertido.

2.2.4. Identificación de parámetros del péndulo invertido sobre el carro.

De acuerdo a lo visto en el apéndice A.4 es posible identificar los parámetros de un sistema cuando estos son desconocidos [29].

Como ya se ha mencionado en el Apéndice la identificación puede ser en línea o bien procesar las medidas previamente guardadas. Para este caso, se implementó una identificación por mínimos cuadrados en línea mediante la simulación en el software Matlab. El principio del método de mínimos cuadrados consiste en buscar los parámetros desconocidos de tal forma que la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores observados y calculados multiplicados por un número que mide el grado de precisión será un mínimo.

Para poder obtener una solución analítica los valores calculados deben ser funciones lineales de los parámetros desconocidos [29].

Sea el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu, \\ x_0 &= x(0),\end{aligned}\tag{2.8}$$

donde:

- $x \in \mathbb{R}^4$ es el vector de estados;
- $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $B \in \mathbb{R}^4$, son las matrices constantes;
- $u \in \mathbb{R}$ es una señal de entrada.

En la forma del regresor:

$$\begin{aligned}Z(t) &= \Theta\varphi, \\ \Theta &= [A, B], \quad \varphi = \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}. \\ \Theta &\in \mathbb{R}^{4 \times 5}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^5,\end{aligned}$$

En el Apéndice A.4.2 se encuentra el desarrollo para llegar a las ecuaciones que rigen el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos, las cuales son:

$$\begin{aligned}e(t) &= Z(t) - \hat{\Theta}\varphi, \\ \dot{P} &= -P \{ \varphi\varphi^T + \nu(t) \} P,\end{aligned}$$

$$\dot{\hat{\Theta}} = -P\varphi e.$$

Siendo:

$$e \in \mathbb{R}^4, Z \in \mathbb{R}^4, P \in \mathbb{R}^{5 \times 5}, \nu(t) \in \mathbb{R}^4,$$

Con esas ecuaciones fue posible hallar los parámetros estimados del sistema. Se realizó el experimento en línea con el sistema en lazo cerrado, utilizando las ganancias anteriores (2.7). Se añadió un vector con las siguientes funciones de excitación persistente, sobre las dinámicas del carro,

$$\nu = \begin{bmatrix} 0.03\text{sen}(5t) \\ 0.15\text{cos}(5t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se propuso la siguiente matriz Θ con parámetros distintos a los propuestos por la empresa Quanser, pero sí con la misma relación de tamaño en los valores.

$$\begin{bmatrix} 0.01 & 0.9 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.02 & 0.5 & -2 & 0.009 & 2 \\ 0.002 & 0.05 & 0.02 & 1.0000 & 0.6 \\ 0.09 & 0.2 & 70 & 0.006 & -4 \end{bmatrix}$$

Los parámetros obtenidos después de 50 segundos se muestran en la siguiente Figura 2.4.

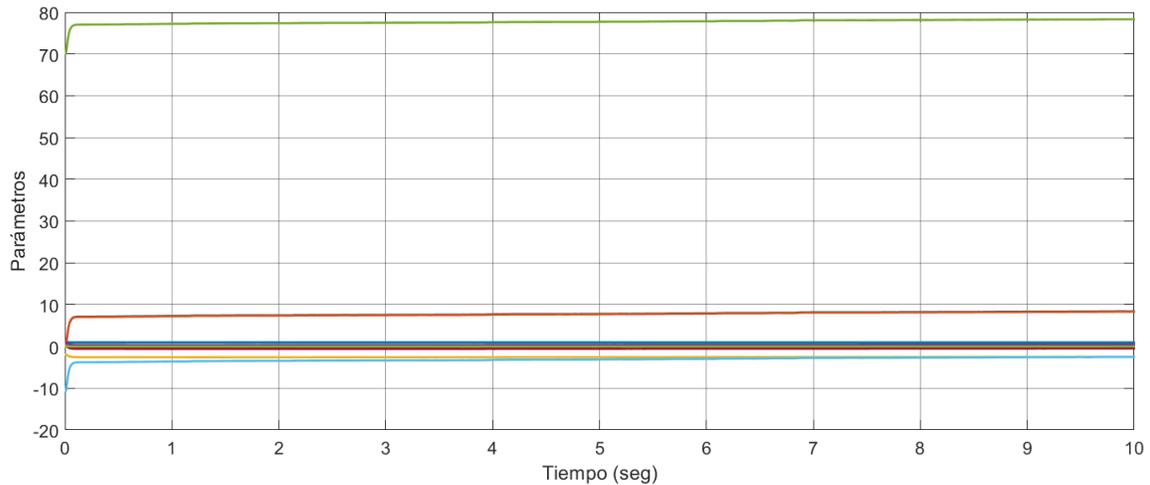


Figura 2.4: Parámetros estimados para el péndulo simple.

Estos fueron los valores estimados obtenidos,

$$\hat{\Theta} = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.9899 & -0.01014 & -0.01014 & -0.01014 \\ -0.4 & -0.4 & -2.4 & -0.4083 & 0.49 \\ -0.1121 & -0.103 & -0.103 & 0.8879 & -0.022 \\ 9.461 & 9.371 & 79.37 & 9.371 & -1.453 \end{bmatrix}$$

Las raíces del sistema con estos parámetros se encuentran del lado izquierdo del mapa, por lo tanto se puede decir que los parámetros estimados son correctos.

$$\lambda_1 = -1.8251 + 6.9448i$$

$$\lambda_2 = -1.8251 - 6.9448i$$

$$\lambda_3 = -7.2516 + 0.0000i$$

$$\lambda_4 = -1.3647 + 0.0000i$$

2.2.5. Control por modos deslizantes dinámicos para el sistema péndulo invertido sobre el carro.

De acuerdo a lo aprendido en el apéndice A.3.2 cuando un sistema como el que se ha estudiado en este capítulo, es perturbado, toma la siguiente forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \xi(t),$$

$$x_0 = x(0), \quad \xi \in \mathbb{R}^6.$$

Para poder aplicar un control por modos deslizantes es importante garantizar la estabilidad del sistema mediante un control de tipo lineal, como es el caso de la retroalimentación, por lo que se volieron a utilizar las ganancias ya calculadas.

$$K = [-27.5681 \quad -26.0701 \quad -106.9325 \quad -21.5188],$$

Para este experimento las perturbaciones , se consideraron acotadas.

Como se indico en el A.3.2 para aplicar este tipo de control, es necesario proponer una superficie de deslizamiento σ , la cual dependa de las dinámicas del sistema. La superficie propuesta fue:

$$\sigma = Kx(t) + u(t).$$

Si la derivada respecto al tiempo del control u , bajo el conocimiento de la matriz de ganancias K es

$$\dot{u} = -K[Ax(t) + Bu(t)] - \rho \text{sign}(\sigma),$$

$$u(0) = u_0,$$

entonces:

$$\sigma \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^4, \quad K \in \mathbb{R}^{1 \times 4}, \quad A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad B \in \mathbb{R}^4, \quad \rho \in \mathbb{R}$$

Como se menciono en dicho apéndice, después de un tiempo $t = tr$, donde $tr = \frac{\sqrt{V(\sigma(t))}}{\alpha} + t_0$, σ sera igual a cero.

Después de tener en claro la parte teorica, se llevo a acabo el experimento en la planta real, en le cual ρ tuvo un valor igual -120 . Después de 50 segundos, se obtuvieron los siguientes resultados:

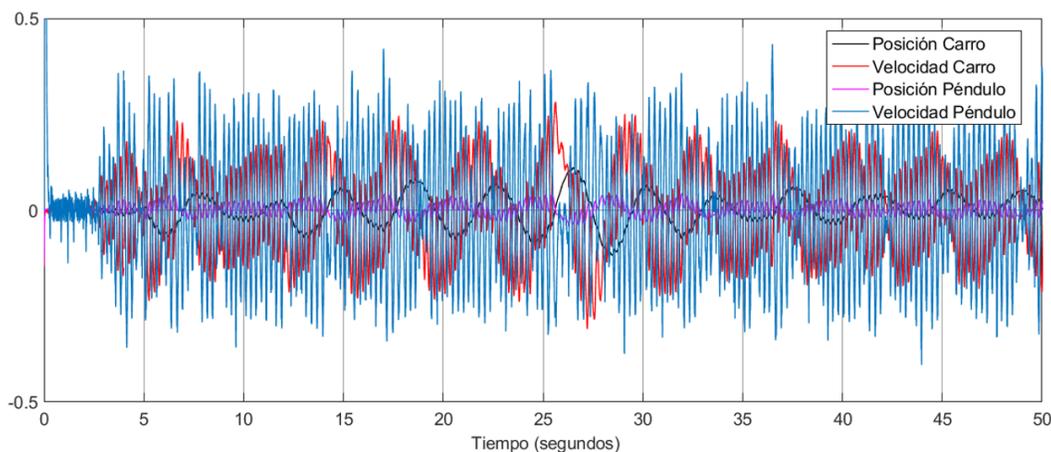


Figura 2.5: Control por modos deslizantes dinámicos para la planta real del sistema del péndulo invertido sobre el carro.

La siguiente figura presenta el comportamiento de las variables de estado del sistema individualmente.

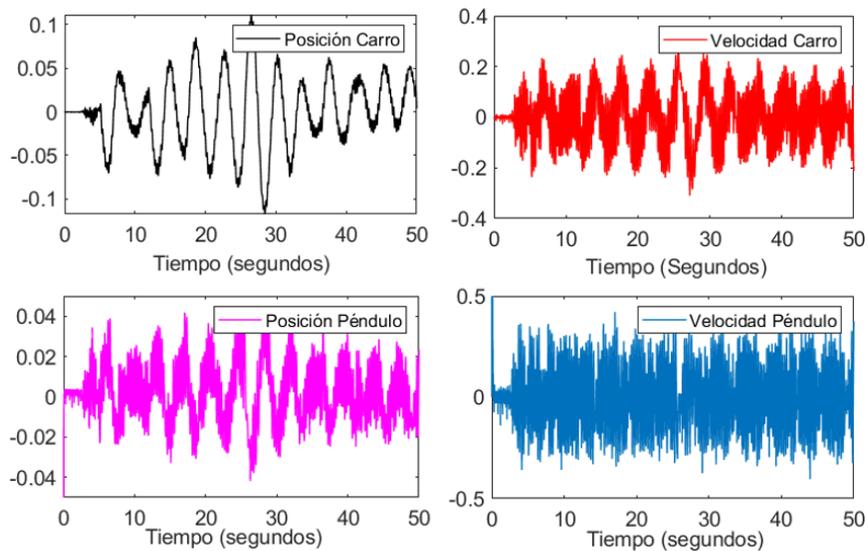


Figura 2.6: Comportamiento de las variables del péndulo invertido.

Como se ha dicho, σ después de un tiempo tr , tiende a oscilar alrededor del punto de referencia (Figura 2.7).

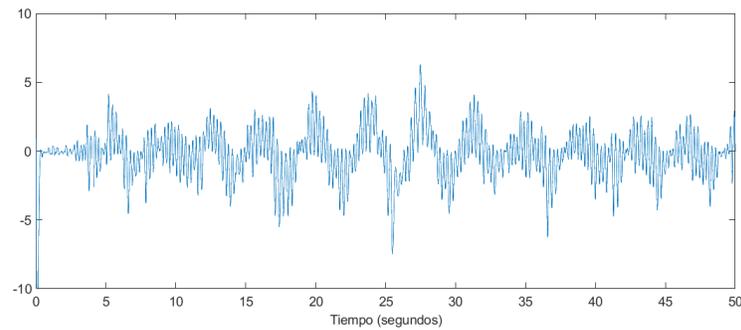


Figura 2.7: Sigma.

2.3. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se trabajó con el caso más simple, el cual es el péndulo invertido sobre el carro, esta configuración permitió poner en práctica todo lo visto en los apéndices, pero también sirvió para conocer cómo trabaja la planta real, como capturar los datos de las variables de estado, como mandar correctamente la señal de control, etc.

El trabajo con este sistema fue el primer paso para llegar hasta el péndulo flexible.

Capítulo 3

Sistema péndulo flexible sobre el carro

3.1. Introducción

En este capítulo se continúa con el sistema péndulo flexible, para llegar a este sistema fue necesario trabajar con el péndulo doble invertido con resorte (Apéndice C), el cual emula la flexibilidad entre el primer péndulo con el segundo.

En esta parte se conocerán los parámetros que rigen al sistema del péndulo flexible, y como mediante la identificación de parámetros se puede pasar de un modelo de ciertas dimensiones y características a otro.

Una vez que se han hallado los parámetros del sistema final, en este mismo capítulo, se explicaran por separado las dos estrategias que son el objetivo de esta tesis, una vez hecho esto, se podrá observar como implementandolas se consigue no solo controlar un sistema con retardo, si no también uno que cuente con perturbaciones.

3.2. Control lineal para el péndulo doble invertido con resorte sobre un carro

Gracias a que se conoce la representación matricial del sistema C.3 visto en el Apéndice C, es posible proponer una estrategia de control, como lo es una re-alimentación de estado, mediante la asignación de polos, es así que se iguala el polinomio característico al deseado:

$$\Delta(\lambda) = s^6 + 17351.18132s^5 + 1360650s^4 + 10277781.24s^3 + 33130882.36s^2 + 47196083.82s + 19650986,$$

por lo que se obtienen las siguientes ganancias,

$$K = [-27.568, -25.4, -102.11, -18.407, -50.583, -10.618],$$

Ya que se calcularon las ganancias se efectuó aplicó la estrategia de control lineal a la planta real, durante 50 segundos.

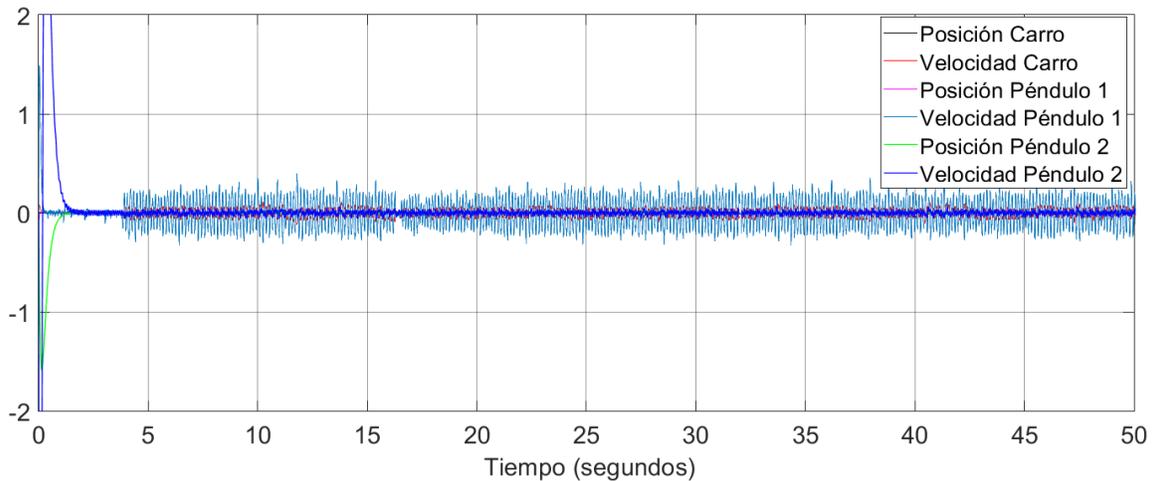


Figura 3.1: Dinámica de la planta real con un control lineal.

En la siguiente figura se puede observar el comportamiento individual de las dinámicas del sistema.

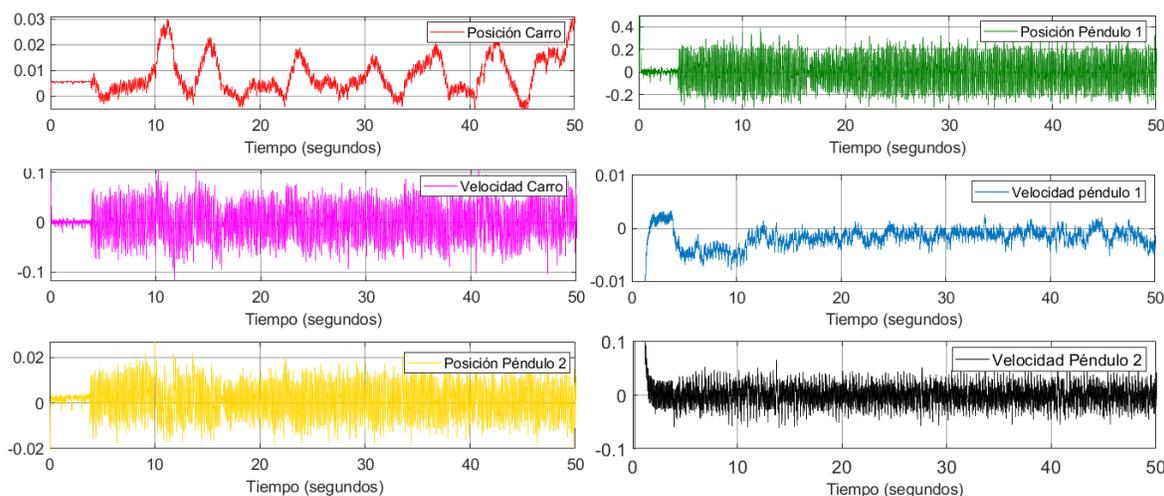


Figura 3.2: Dinámica de cada variable de estado de la planta real con un control lineal.

Se puede ver en las figuras que la planta real logra ser controlada gracias a la estrategia de control propuesta. La diferencia visible entre el comportamiento en la simulación y en la planta real, es el hecho que las variables de estado de la planta real se mantienen oscilando alrededor del punto de equilibrio inestable.

3.3. Identificación del retardo (experimental)

Para poder llevar a cabo una correcta simulación del comportamiento del péndulo flexible, fue necesario realizar experimentos sobre la planta real.

La función del resorte es generar un desfase en cuanto al tiempo de respuesta entre el primer y segundo péndulo, pero es necesario conocer le tiempo de dicho desfase, es por ello que mientras la planta real se mantenía en funcionamiento, siendo controlada por las ganancias previamente calculadas, se tomaron los datos de las posiciones de ambos péndulos para después ser analizadas.

En la gráfica obtenida se buscaron los desfases mas visibles, por ejemplo en la Figura 3.3 entre el tiempo $t=[45,50]$ se alcanza a observar varios momentos en los que retardo es visible.

Este proceso se llevo a acabo en una señal de 100 segundo, hasta que se llego a la conclusión que el mayor retardo posible del sistema era igual a $h = 0.6$.

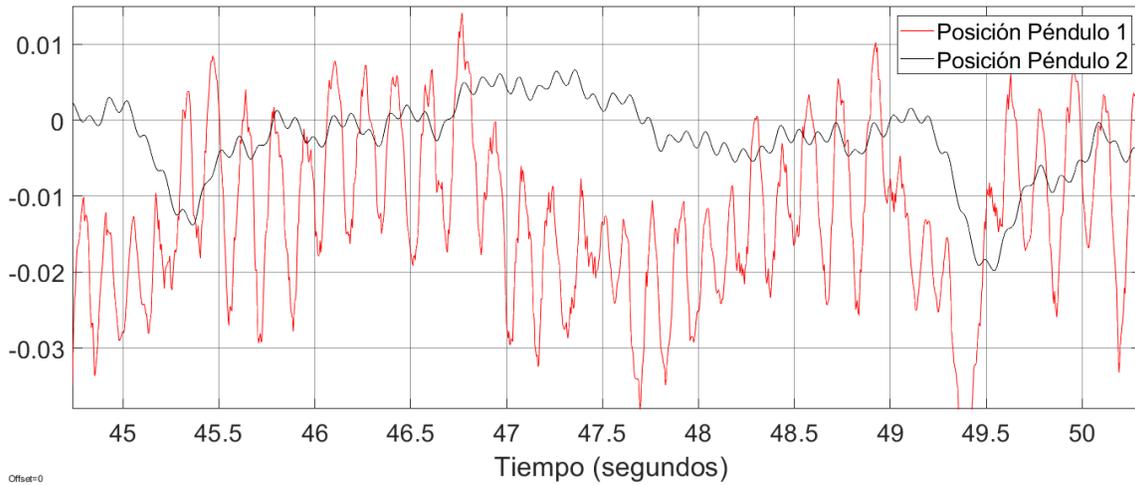


Figura 3.3: Análisis de la posición del péndulo 1 y péndulo 2.

3.4. Mínimos cuadrados Recursivo para identificar al sistema péndulo flexible (Experimental)

No es fácil estimar un modelo como el de un péndulo flexible, para ello es necesario efectuar una transformación al sistema antecesor (péndulo doble con resorte), ya que debido al resorte, el comportamiento de este sistema puede llegar a aproximarse al de un flexible.

Por ejemplo, una barra flexible se puede modelar si se divide su estructura en n barras con resorte, así para conocer la dinámica de dicha barra, será necesario conocer la dinámica de cada sub-barra con sus respectivo retardo (Figura 3.4).

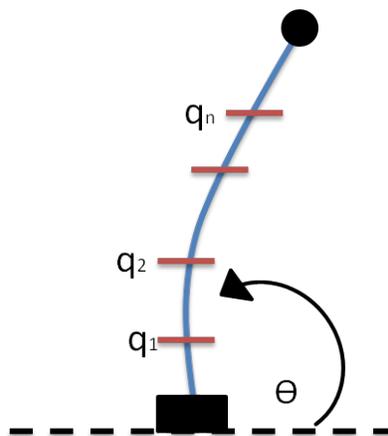


Figura 3.4: Barra flexible.

$$\Theta = q_1(t - h_1) + q_2(t - h_2) + \dots + q_n(t - h_n).$$

El doble péndulo invertido sobre el carro, cuenta con dos sub-barras, por lo tanto para conocer el modelo es necesario efectuar la siguiente transformación (Figura 3.5):

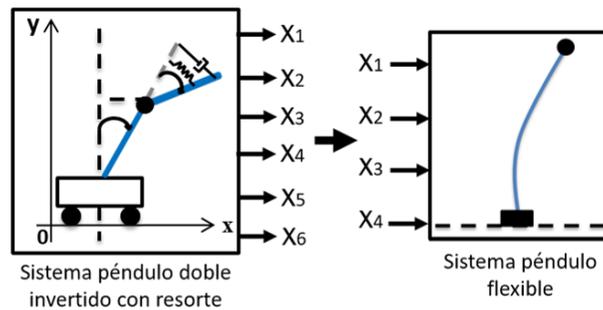


Figura 3.5: Transformación de R^3 a R^2 .

Siendo estas las variables de estado del sistema (C.3),

x_1 = Posición carro,

x_2 = Velocidad carro,

x_3 = Posición Péndulo 1,

x_4 = Velocidad Péndulo 1,

x_5 = Posición Péndulo 2,

x_6 = Velocidad Péndulo 2

Y estas las variables del sistema péndulo flexible,

x_1 = Posición carro (péndulo flexible),

x_2 = Velocidad carro (péndulo flexible),

x_3 = Posición Péndulo flexible,

x_4 = Velocidad Péndulo flexible

La figura 3.5 intenta explicar como las 6 variables de un sistema, pueden representar el estado del péndulo flexible.

Es necesario mencionar que la forma que corresponde al modelo lineal del péndulo doble invertido con resorte sobre el carro es la siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad (3.1)$$

$$u_0 = u(0), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0),$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^6, \quad u \in \mathbb{R},$$

Mediante una identificación de parámetros se espera que el modelo del péndulo flexible tenga la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{y}(t-h) + \mathbf{B}u + \xi(t), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{x}(\theta) = \varphi(\theta), \quad \text{con } \theta \in [-h, 0]$$

$$\dot{\mathbf{x}}(\theta) = \dot{\varphi}(\theta), \quad \text{con } \theta \in [-h, 0].$$

Donde:

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, es la variable de salida en el tiempo.
- $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^4$,
- $h > 0$, es un retardo constante en el tiempo.
- \mathbf{y}_t , define la información mínima para construir la solución $\mathbf{y}(t; \varphi; t_0)$.
- $u \in \mathbb{R}$ es la entrada de control.
- ξ contiene dinámicas inciertas y/o perturbaciones externas bajo el supuesto que las perturbaciones son acotadas por $\|\xi\| \leq \delta$.

Como se ha mencionado el modelo del péndulo flexible depende del sistema (3.1), por lo que la ecuación (3.2) puede representarse de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}_0 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} (t) + \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} (t-h) + \mathbf{B}u + \xi(t).$$

La identificación de parámetros se realizó en línea mientras el sistema (3.1) era controlado mediante una realimentación de estados con las siguientes ganancias

$$K_1 = -27.5681,$$

$$K_2 = -25.3998,$$

$$K_3 = -102.1079,$$

$$K_4 = -18.4066,$$

$$K_5 = -50.583,$$

$$K_6 = -10.6178.$$

Es claro que para obtener el modelo del péndulo flexible son necesarias las variables de estado del sistema doble con resorte, tomando en cuenta el retardo existente en las variables de estado que corresponden al segundo péndulo el cual tiene el resorte.

Para llegar a la aproximación de la estructura de las matrices A_0 , A_1 y B , fue necesario implementar una transformación de D'Alembert [4].

Recordando el algoritmo de mínimos cuadráticos, la ecuación anterior se puede representar de la forma:

$$[A_0, A_1, B] \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t-h) \\ u(t) \end{bmatrix} = \Theta^T \varphi, \quad (3.3)$$

$$y(t), y(t-h) \in \mathbb{R}^4, \quad u \in \mathbb{R},$$

$$A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad B \in \mathbb{R}^4,$$

$$\Theta^T \in \mathbb{R}^{4 \times 9}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^9, \quad h = 0.6 \text{ seg.}$$

Con la forma (3.3) se puede implementar el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo, el cual se rige por las siguientes ecuaciones:

$$e = Z - \hat{\Theta} \varphi, \quad Z = \dot{y},$$

$$\dot{P} = -P \{ \varphi \varphi^T + \nu \} P,$$

$$\dot{\hat{\Theta}} = -P \varphi e.$$

$$e \in \mathbb{R}^4, \quad Z \in \mathbb{R}^4, \quad P \in \mathbb{R}^{5 \times 5}, \quad \nu(t) \in \mathbb{R}^4$$

Con la forma (3.3) se puede implementar el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo el cual se describe en el Apéndice A.4

El experimento que se realizó con la planta real, consistió en identificar los parámetros en línea, mientras el sistema del péndulo doble con resorte era controlado mediante las ganancias ya utilizadas.

$$K = [-27.568, -25.4, -102.11, -18.407, -50.583, -10.618],$$

El siguiente vector contiene las funciones de excitación persistente,

$$\nu(t) = \begin{bmatrix} 0.025\text{sen}(t) \\ 0.025\text{cos}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Después de un tiempo de 100 segundos se encontraron los parámetros que corresponden al modelo del péndulo flexible,

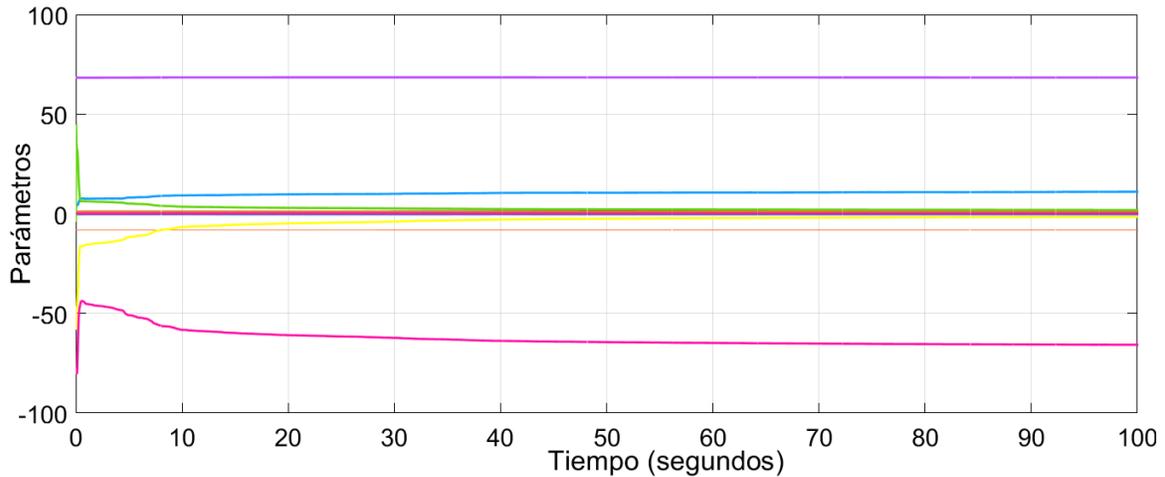


Figura 3.6: Parámetros estimados del péndulo flexible.

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.007 & 0.99 & -0.0037 & -0.0074 \\ -6.14 & -5.528 & 5.067 & -6.142 \\ 0.801 & 0.7209 & 0.4005 & 1.801 \\ -6.954 & -6.259 & 63.05 & -6.954 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.0074 & -0.0037 & -0.0074 & -0.0081 \\ -6.142 & -3.071 & -5.841 & -6.321 \\ 0.801 & 0.4005 & 0.801 & 1.881 \\ -6.954 & -3.477 & -65.78 & -182.3 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.007414 \\ -1.116 \\ 0.801 \\ 11.68 \end{bmatrix},$$

3.5. Control por modos deslizantes dinámicos al sistema péndulo doble invertido con resorte sobre el carro.

De acuerdo con lo aprendido en el Apéndice A.3, es posible atenuar las perturbaciones al momento de controlar una planta, es por ello que para el sistema C.3 con la siguiente forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu + \xi(t)$$

$$x_0 = x(o)$$

$$\dot{x}, x \in \mathbb{R}^6, A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, B \in \mathbb{R}^6, u \in \mathbb{R}$$

De acuerdo a los conceptos del Apéndice mencionado, es necesario proponer una superficie de deslizamiento $\sigma = Kx(t) + u(t)$, la cual depende de las dinámicas del sistema.

Si la derivada respecto al tiempo de la acción de control u , conociendo las ganancias K es tal que:

$$\dot{u} = -K[Ax(t) + Bu(t)] - \rho \text{sign}(\sigma),$$

$$u(0) = u_0,$$

$$\sigma \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^6, K \in \mathbb{R}^{1 \times 6}, A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, B \in \mathbb{R}^6, \rho \in \mathbb{R}$$

Después de un tiempo $t = tr$, donde $tr = \frac{\sqrt{V(\sigma(t))}}{\alpha} + t_0$, σ será igual a cero.

Una vez que se tiene claro las ecuaciones, llevó a cabo el experimento sobre la planta real, durante 50 segundos.

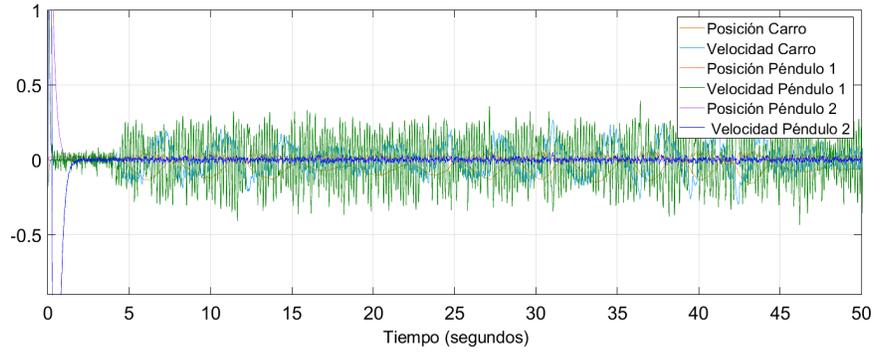


Figura 3.7: Control por modos deslizantes para el péndulo doble invertido sobre el carro con resorte.

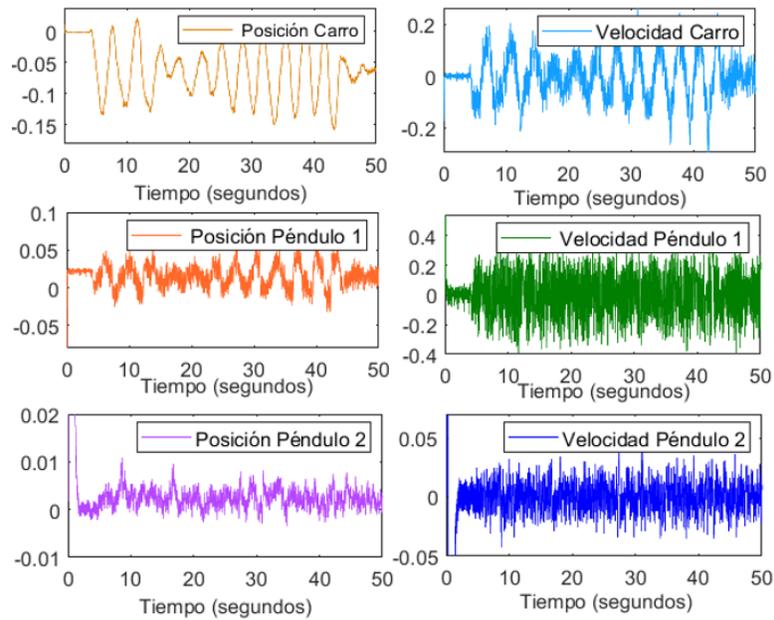


Figura 3.8: Variables de estado del sistema péndulo doble invertido sobre el carro con resorte ante un control por modos deslizantes.

Se concluyó que mediante este control, y ante alguna perturbación externa, el péndulo se mantuvo todo el tiempo en su punto de equilibrio inestable, ya que también el tiempo de respuesta del carro era mejor en comparación al control lineal.

Después del experimento anterior se almacenaron los datos de las variables de estado $x \in \mathbb{R}^6$, así como el control $u(t)$, con estas variables y conociendo las matrices A_0 , A_1 y B que corresponden al péndulo flexible, es posible conocer la dinámica del péndulo flexible.

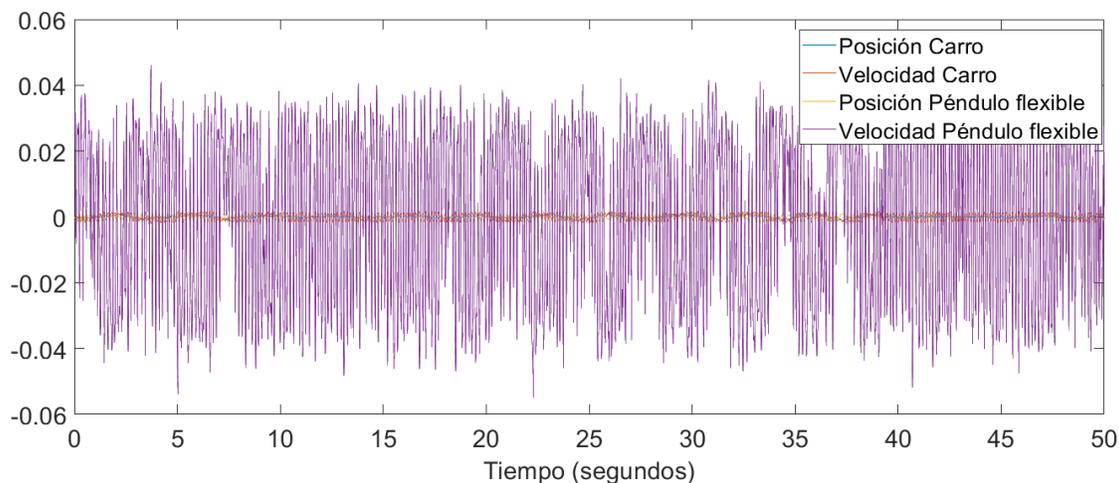


Figura 3.9: Dinámica del péndulo flexible ante un control por modos deslizantes dinámicos.

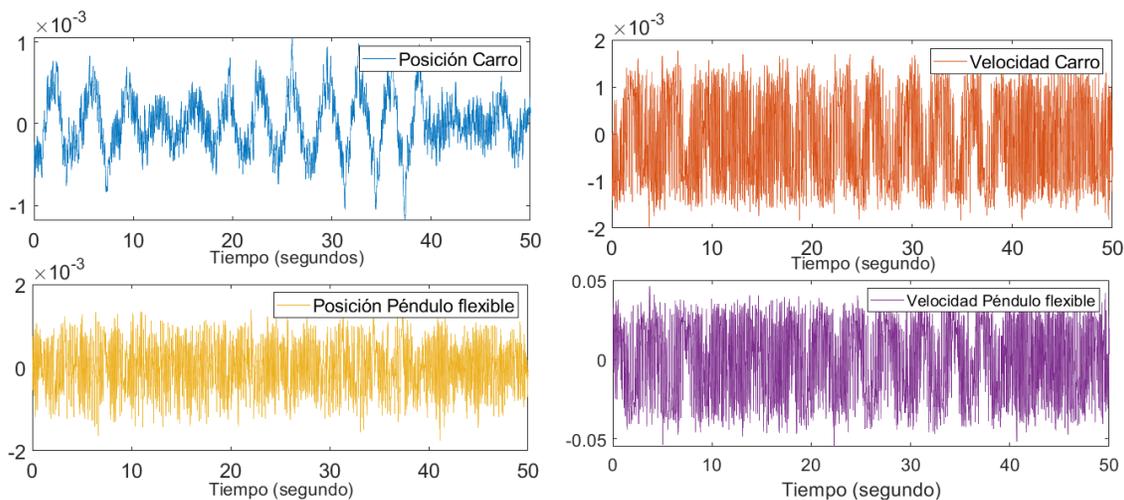


Figura 3.10: Variables de estado del sistema péndulo flexible ante un control por modos deslizantes.

Las figuras anteriores corresponden al comportamiento de las variables de estado del péndulo flexible ($y(t)$). se puede observar que estas se mantiene oscilando alrededor del punto de equilibrio inestable.

3.6. D-particiones para el sistema péndulo flexible.

Se sabe que el sistema del péndulo flexible tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_t x(t-h) + Bu(t), \\ x_0 &= x(0), \quad x(\theta) = \varphi(\theta), \quad x_t := x(t+\theta) \quad \text{con } \theta \in [-h, 0], \\ x(t) &\in \mathbb{R}^4, \quad A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad B \in \mathbb{R}^4, \quad u \in \mathbb{R}, \quad h > 0, \quad h = 0.0001\end{aligned}$$

Si se propone un control $u = K_0x(t) + K_1x(t-h)$, en el cual $K_0, K_1 \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$.

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_t x(t-h) + B(K_0x(t) + K_1x(t-h)), \quad (3.4)$$

es necesario calcular el quasipolinomio característico del sistema,

$$\Delta(s) = |s\mathbf{I}_n - (A_0 + BK_0) - (A_1 + BK_1)e^{-sh},$$

Sea $K_0 = [K_{01}, K_{02}, -90.1079, -8.4066]$, $K_1 = [-17.5681, -15.4, -40.5830, -0.6178]$, Para obtener las D - Particiones del sistema con los parámetros K_{01} contra K_{02} es necesario analizar los siguientes casos:

- Caso $s = 0$:

$$K_{01} = 26.81, \quad (3.5)$$

- Caso $s = j \omega$.

Si $e^{j\omega h}$ se representa en la forma de Euler, y se separa en dos ecuaciones, real e imaginaria.

$$K_{01} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6 + \Delta_7}{\Pi_1} \quad (3.6)$$

Substituyendo K_{01} en la ecuación R y despejando K_{12} ,

$$\Delta_8 = (0.062(2.3e^{56}\omega - 1.0e^{56}\text{sen}(5.0h\omega) + 1.9e^{56}\text{sen}(3.0h\omega) + 9.6e^{55}\text{sen}(h\omega)),$$

$$\begin{aligned}
\Delta_9 &= 1.5e^{56}\text{sen}(2.0h\omega) - 4.2e^{55}\text{sen}(4.0h\omega) - 6.5e^{55}\omega^2\text{cos}(2.0h\omega) + 2.0e^{55}\omega^2\text{cos}(4.0h\omega), \\
\Delta_{10} &= -1.6e^{57}\omega^3\text{cos}(2.0h\omega) - 8.7e^{55}\omega^4\text{cos}(2.0h\omega) + 1.3e^{56}\omega^2\text{sen}(2.0h\omega) + 6.4e^{55}\omega^2\text{sen}(4.0h\omega), \\
\Delta_{11} &= 1.2e^{55}\omega^3\text{sen}(2.0h\omega) - 8.7e^{55}\omega^4\text{sen}(2.0h\omega) + 6.9e^{54}\omega^2\text{cos}(3.0h\omega) - 1.8e^{56}\omega^3\text{cos}(3.0h\omega), \\
\Delta_{12} &= 2.6e^{57}\omega^2\text{sen}(3.0h\omega) + 8.0e^{55}\omega^3\text{sen}(3.0h\omega) - 3.1e^{56}\omega\text{cos}(h\omega) - 6.4e^{54}\omega\text{sen}(h\omega), \\
\Delta_{13} &= -1.3e^{57}\omega\text{cos}(2.0h\omega) + 1.0e^{57}\omega\text{cos}(4.0h\omega) + 6.8e^{53}\omega\text{sen}(2.0h\omega) - 3.4e^{53}\omega\text{sen}(4.0h\omega), \\
\Delta_{14} &= 4.2e^{54}\omega\text{cos}(5.0h\omega) + 4.5e^{55}\omega^2 + 7.8e^{54}\omega^3 + 8.7e^{55}\omega^4 - 5.1e^{52}\omega^5 + 1.6e^{50}\omega^6, \\
\Delta_{15} &= -6.9e^{54}\omega^2\text{cos}(h\omega) + 1.1e^{56}\omega^3\text{cos}(h\omega) - 3.8e^{51}\omega^4\text{cos}(h\omega) + 9.8e^{53}\omega^5\text{cos}(h\omega), \\
\Delta_{16} &= 2.7e^{56}\omega\text{cos}(3.0h\omega) - 2.0e^{57}\omega^2\text{sen}(h\omega) - 2.2e^{56}\omega^3\text{sen}(h\omega) + 1.9e^{53}\omega^4\text{sen}(h\omega), \\
\Delta_{17} &= -8.4e^{53}\omega\text{sen}(5.0h\omega) - 1.0e^{54}\omega^5\text{sen}(h\omega) + 3.5e^{54}\omega\text{sen}(3.0h\omega),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_2 &= (1.9e^{53}\omega^2\text{cos}(4.0h\omega) - 6.5e^{53}\omega^2\text{cos}(2.0h\omega) - 2.9e^{52}\omega + 1.0e^{52}\omega^3\text{cos}(2.0h\omega)), \\
\Pi_3 &= -8.4e^{51}\omega^4\text{cos}(2.0h\omega) - 1.8e^{53}\omega^2\text{sen}(2.0h\omega) + 6.9e^{53}\omega^2\text{sen}(4.0h\omega) + 5.7e^{50}\omega^3\text{sen}(2.0h\omega), \\
\Pi_4 &= -1.3e^{52}\omega^4\text{sen}(2.0h\omega) - 5.0e^{52}\omega^2\text{cos}(3.0h\omega) - 1.1e^{54}\omega^3\text{cos}(3.0h\omega) + 2.5e^{53}\omega^2\text{sen}(3.0h\omega), \\
\Pi_5 &= 3.7e^{53}\omega^3\text{sen}(3.0h\omega) - 5.9e^{52}\omega\text{cos}(h\omega) - 1.6e^{53}\omega\text{sen}(h\omega) - 1.0e^{53}\omega\text{cos}(2.0h\omega), \\
\Pi_6 &= 7.6e^{52}\omega\text{cos}(4.0h\omega) + 1.7e^{52}\omega\text{sen}(2.0h\omega) - 8.4e^{51}\omega\text{sen}(4.0h\omega) + 1.1e^{53}\omega\text{cos}(5.0h\omega), \\
\Pi_7 &= 4.6e^{53}\omega^2 + 4.1e^{51}\omega^3 + 8.4e^{51}\omega^4 - 5.0e^{52}\omega^2\text{cos}(h\omega) - 3.7e^{53}\omega^3\text{cos}(h\omega), \\
\Pi_8 &= 4.8e49\omega^5\text{cos}(h\omega) - 2.1e^{52}\omega\text{sen}(5.0h\omega) - 1.0e^{53}\omega\text{cos}(3.0h\omega) + 5.1e^{52}\omega^2\text{sen}(h\omega), \\
\Pi_9 &= -1.1e^{54}\omega^3\text{sen}(h\omega) + 4.0e49\omega^4\text{sen}(h\omega) - 4.8e49\omega^5\text{sen}(h\omega) + 8.8e^{52}\omega\text{sen}(3.0h\omega),
\end{aligned}$$

$$K_{02} = \frac{\Delta_9 + \Delta_{10} + \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{15} + \Delta_{16}}{\Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 + \Pi_5 + \Pi_6 + \Pi_7 + \Pi_8 + \Pi_9}. \quad (3.7)$$

Se obtienen las ecuaciones para K_{01} y K_{02} , con las cuales se gráfica el mapa de parámetros.

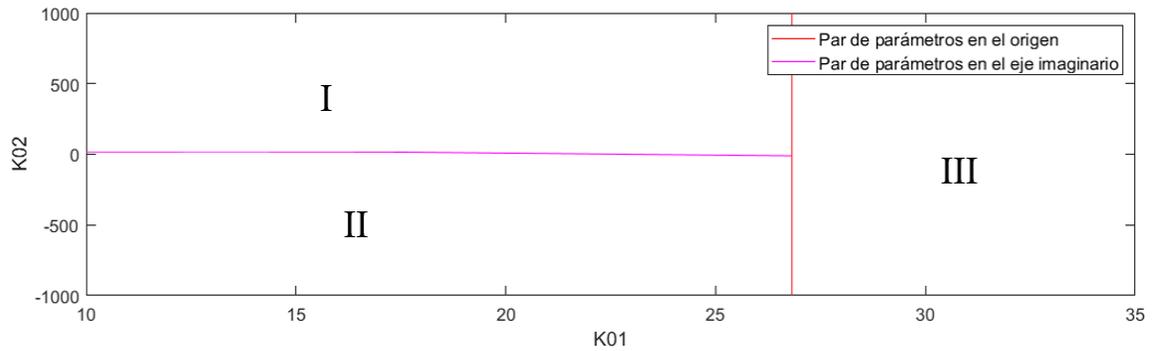


Figura 3.11: Mapa de parámetros K_{01} vs K_{02} .

El mapa de parámetros que se muestra divide en cuatro zonas, para encontrar el par de ganancias que hacen estable al sistema, para comprobar la zona con los parámetros necesarios, se hicieron 4 pruebas, teniendo como resultado que la zona con parámetros estables es la zona 4, para demostrarlo se graficaron los polos del sistema en lazo cerrado con $K_{11} = -30$, $K_{12} = -20$, dichos polos se localizaron del lado izquierdo por lo que se concluyó que las ganancias a utilizar en los siguientes experimentos serían $K_0 = [-30, -20, -90.1079, -8.4066]$, $K_1 = [-17.5681, -15.4, -40.5830, -0.6178]$

3.6.1. Estrategia de control

El sistema final péndulo flexible se puede representar como se muestra a continuación, agregando una perturbación.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t-h) + Bu(t) + \xi(t), \\ x_0 &= x(0), \quad x(\theta) = \varphi(\theta), \quad x_t := x(t+\theta) \text{ con } \theta \in [-h, 0], \\ x(t) &\in \mathbb{R}^4, \quad A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad B \in \mathbb{R}^4, \quad u \in \mathbb{R}, \quad h = 0.6,\end{aligned}$$

$\xi(t)$ contiene dinámicas inciertas y/o perturbaciones externas bajo el supuesto de que las perturbaciones son acotadas por $\|\varepsilon\| \leq \delta < \infty$.

Para poder implementar un control por modos deslizantes que se encargue de atenuar las perturbaciones es necesario proponer una superficie de deslizamiento σ la cual dependa del estado del sistema, se espera que el error de seguimiento se haga cero en un tiempo finito.

$$\begin{aligned}\sigma &= Kx + u, \\ K &\in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^m.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Cuando las trayectorias evolucionen sobre la superficie de deslizamiento, se puede decir que el sistema se encuentra en modo deslizante. Cuando esto ocurre un sistema puede tener cualquier comportamiento dinámico como tender hacia un punto de equilibrio dentro de la superficie de deslizamiento o seguir una trayectoria que lo lleve a abandonar la región de deslizamiento [16].

Se desea comprobar que σ es asintóticamente estable, así que se propone una función de energía:

$$\begin{aligned}V(\sigma) &= \sigma^T \sigma, \\ \therefore V(\sigma) &> 0,\end{aligned}\tag{3.9}$$

la función propuesta es definida positiva, si se analiza su dinámica se obtiene la siguiente ecuación:

$$\dot{V}(\sigma) = \sigma^T \dot{\sigma} + \dot{\sigma}^T \sigma = 2\sigma^T \dot{\sigma},$$

es necesario conocer $\dot{\sigma}$,

$$\dot{\sigma} = K\dot{x} + \dot{u} = K[A_0x(t) + A_1x(t-h) + Bu(t) + \xi(t)] + \dot{u}.$$

Se puede suponer que \dot{u} contrarresta el estado si se propone de la siguiente manera,

$$\dot{u} = -KA_0x(t) - KA_1x(t-h) - KBu(t) + u_2(t).$$

Si la ecuación anterior se sustituye en $\dot{\sigma}$

$$\dot{\sigma} = K\xi(t) + u_2(t),$$

sustituyendo $\dot{\sigma}$ en $\dot{V}(\sigma)$,

$$\dot{V}(\sigma) = 2\sigma^T [K\xi(t) + u_2(t)].$$

Se puede proponer $u_2(t) = -\rho \text{sign}(\sigma)$, $\rho \in \mathbb{R}^{m \times m}$, con la finalidad de atenuar los efectos de la perturbación, la cual como ya se menciono acotada y desconocida.

$$\dot{V}(\sigma) = 2\sigma^T [K\xi(t) - \rho \text{sign}(\sigma)],$$

$$\dot{V}(\sigma) = 2\sigma^T K\xi(t) - 2\sigma^T \rho \text{sign}(\sigma).$$

Si $2\sigma^T K\xi(t) \leq |2\sigma^T K\xi(t)|$

$$\dot{V}(\sigma) \leq 2|\sigma^T K\xi(t)| - 2\sigma^T \rho \text{sign}(\sigma).$$

Si se aplica la traza al segundo elemento de la diferencia,

$$\dot{V}(\sigma) \leq 2|\sigma^T K\xi(t)| - 2\text{tr}(\sigma^T \rho \text{sign}(\sigma)),$$

De acuerdo a la propiedad de la traza [30]:

- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$,
- $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$,

$$\dot{V}(\sigma) \leq 2|\sigma^T K\xi(t)| - 2\text{tr}(\rho \text{sign}(\sigma)\sigma^T).$$

Si:

$$\text{sign}(\sigma) = \frac{\sigma}{(\sigma^T \sigma)^{\frac{1}{2}}},$$

entonces el $\text{sign}(\sigma)\sigma^T$

$$\text{sign}(\sigma)\sigma^T = \frac{\sigma\sigma^T}{(\sigma^T \sigma)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\text{sign}(\sigma)\sigma^T = \sigma\sigma^T(\sigma^T \sigma)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\text{sign}(\sigma)\sigma^T = (\sigma^T \sigma)^{\frac{1}{2}},$$

si $|\sigma| = (\sigma^T \sigma)^{\frac{1}{2}}$,

$$\text{sign}(\sigma)\sigma^T = |\sigma|.$$

$$\dot{V}(\sigma) \leq 2|\sigma^T K\xi(t)| - 2\text{tr}(\rho) |\sigma|.$$

Si se define $\delta = tr(\rho)$

$$\dot{V}(\sigma) \leq 2|\sigma^T K \xi(t)| - 2\delta|\sigma|,$$

$$\dot{V}(\sigma) \leq 2|\sigma||K \xi(t)| - 2\delta|\sigma|,$$

$\xi(t)$ es una perturbación o dinámica no modelada desconocida y acotada,

$$\|\xi(t)\| \leq \delta_1,$$

$$\dot{V}(\sigma) \leq 2|\sigma|K\delta_1 - 2\delta|\sigma|,$$

$$\dot{V}(\sigma) \leq -2[\delta - K\delta_1]|\sigma|.$$

Es necesario garantizar que $\delta > K\delta_1$ para que $\dot{V}(\sigma) < 0$, lo cual significaría que tiene un comportamiento descendiente. Otro aspecto a analizar es que $V(\sigma)$ tienda a cero en un tiempo tr . Recordando que $|\sigma| = (\sigma^T \sigma)^{\frac{1}{2}}$.

Sustituyendo $\delta - K\delta_1$ por α ,

$$\dot{V}(\sigma) \leq -2\alpha [(\sigma^T \sigma)^{\frac{1}{2}}],$$

$$\frac{d}{dt}V(\sigma) \leq -2\alpha [(\sigma^T \sigma)^{\frac{1}{2}}].$$

Recordando $V(\sigma)$ de (A.8)

$$V(\sigma) = (\sigma^T \sigma)$$

$$\frac{d}{dt}V(\sigma) \leq -2\alpha [V(\sigma)^{\frac{1}{2}}].$$

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{V(\sigma)}} dV(\sigma) \leq -2\alpha \int_{t_0}^t dt.$$

Si se la solución a las ecuaciones:

$$2\sqrt{V(\sigma)}|_{t_0}^t \leq -2\alpha t|_{t_0}^t,$$

$$2\sqrt{V(\sigma(t))} - 2\sqrt{V(\sigma_0)} \leq -2\alpha(t - t_0),$$

$$\sqrt{V(\sigma(t))} \leq \sqrt{V(\sigma_0)} - \alpha(t - t_0).$$

Si $V(\sigma_0) = 0$,

$$\sqrt{V(\sigma(t))} \leq -\alpha(t - t_0),$$

despejando t_r de la ecuación anterior,

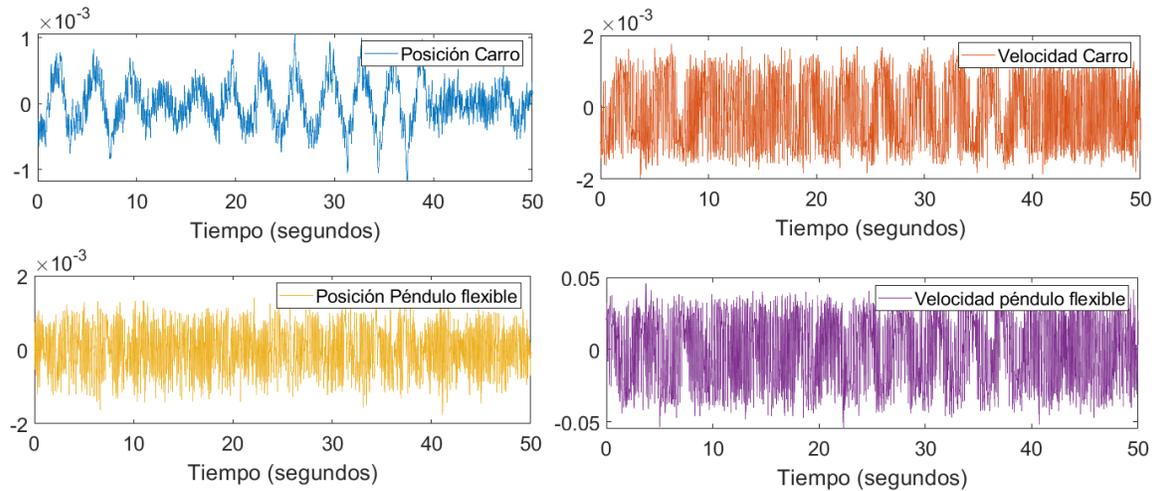
$$tr = \frac{\sqrt{V(\sigma(t))}}{\alpha} + t_0.$$

Por lo tanto σ va a tender a cero en un tiempo tr cuando $t \geq tr$.

Una vez que se obtuvieron mediante el análisis por D-particiones, las ganancias K que estabilizan al sistema y mediante un control por modos deslizantes se analizó al sistema cuando presenta una perturbación acotada.

Aplicando las ecuaciones anteriores σ y \dot{u} y las ganancias obtenidas mediante D-particiones, fue posible llevar la prueba al laboratorio y aplicarlo al péndulo flexible real.

A continuación se presenta el comportamiento del péndulo flexible:



3.7. Conclusiones capítulo 3.

En este punto del trabajo, ya se logró encontrar los parámetros que componen el modelos matemático del péndulo flexible, y para ellos fue necesario el análisis del péndulo doble invertido sobre el carro con resorte.

Una vez que se tuvo conocimiento de estos parámetros, fue posible implementar las estrategias de control. Se puede concluir que el trabajo conjunto de ambas estrategias tiene un comportamiento satisfactorio del sistema, ya que por un lado se encuentran las ganancias K que garantizan la estabilidad del sistema, y a su vez se atenúan las perturbaciones acotadas que pudieran provocar inestabilidad en el sistema.

Bibliografía

- [1] Benitez, A. (2010). *Visual servoing robusto lineal para un sistema subactuado* (Tesis de Maestría). Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Hidalgo.
- [2] Minorsky, N. (1922). *Directional stability of automatically steered bodies*.
- [3] Ruiz Gasca, M. A. (2012). *Comparación de un Controlador Clásico y un Controlador Discontinuo en un Sistema Sobreactuado* (Tesis de Licenciatura). Universidad Nacional Autónoma de México, México.
- [4] Trujillo, J. F. (2016). *Aproximación numérica de ecuaciones diferenciales con retardo por el método de transformación diferencial aplicado a modelos biológicos* (Tesis de Maestría). Universidad tecnológica de Pereira.
- [5] Quanser (2019). *Quanser*. [En línea]. <https://www.quanser.com>.
- [6] Hoyos, J. and Buitrago, D. (2004). *Control adaptativo con red neuronal de elman y modos deslizantes*. Universidad Tecnológica de Pereira.
- [7] Escorza Córdor, J., and Baldeón Osorio, J. R. (2005). *Automatización de un Hexacóptero para despegue, aterrizaje y vuelo en un camino cerrado*.
- [8] S. Moosavian, A. Takhmar and M. Alghooneh. (2007). *Regulated Sliding Mode Control of a Biped Robot*.
- [9] Cuvas C. and Mondié S. (2016). *Necessary Stability Conditions for Delay Systems with Multiple Pointwise and Distributed Delays*. IEEE Trans. Autom. Contr., 61(7), 1987-1994.
- [10] Romero Rodríguez, G., Sanchez, P., Reyes Cortés, F., Michua, A., Calderón Flores, B., Cid, J., Morales Timal, G. (2009). *Modelado, Control y Simulación de un Sistema Péndulo Invertido Sobre Base Móvil*.

-
- [11] Domingo, B. (1999) *Control en modo deslizante aplicado a la generación de señal en convertidores conmutados DC/DC* (Tesis Doctoral). Universidad Politécnica de Catalunya.
- [12] Galarce Acevedo, P. (2015). *Control de trayectoria de robots manipuladores móviles utilizando realimentación linealizante* (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica de Chile.
- [13] C. Cuvas , S. Mondié and G. Ochoa. (2015) *Distributed delay systems with truncated gamma distribution: instability regions*.
- [14] H. Khalil. (2014) *Nonlinear Control*. Pearson.
- [15] A. Lizcano, J. Rodríguez, and A. García. (2011). *Minimización de la distorsión armónica de una modulación PWM con algoritmos genéticos*.
- [16] F. Naranjo. (1991). *Sistemas de Control de Estructura Variable con Modo de Deslizamiento*.
- [17] Evangelista, C. A. (2012). *Control de sistemas no lineales por modos deslizantes de segundo orden. Aplicación a la conversión de energía eólica*. Argentina. Prentice Hall.
- [18] Sala Piqueras, A., García Gil, P. J., and González Sorribes, A.(2012). *Controladores digitales basados en predictor para sistemas con retardos variables en el tiempo*(Tesis Doctoral).
- [19] Villota Cerna, E. (2009). *Control moderno y óptimo*. Universidad Nacional de Ingeniería.
- [20] Callejas Guerrero, V. (2005). *Control adaptable para robots manipuladores*(Tesis de Maestría). Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Hidalgo.
- [21] Neimark, J. (1949). *D-subdivisions and spaces of quasi-polynomials*
- [22] Camacho Ríos, A. (2012). *Cálculo Diferencial*. Ediciones Díaz de Santos.
- [23] W. Ardila Urueña, J. A. Chaves Osorio and E. Quintero. (2009). *Simulación de un sistema masa resorte amortiguador con circuitos electrónicos* Universidad Tecnológica de Pereira.

-
- [24] V. L. Kharitonov. *Time delay systems Lyapunov Functionals and Matrices*. Birkhäuser.
- [25] V. Utkin. (1978). *Sliding Modes and their Applications in Variable Structure Systems*. MIR Publishers.
- [26] Pérez, M. M. (2004). *Control predictivo por modos deslizantes*. Universidad de Sevilla.
- [27] E. Muñoz and C. A. Gaviria. *Control PID Multivariable y Modos Deslizantes de un Robot SCARA*. Universidad del Cauca.
- [28] N. M. Fonseca. (2014). *Estimación simultánea de estados y parámetros en CSTR continuo utilizando modos deslizantes*. México. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente.
- [29] Rodríguez Rubio, F., and López Sánchez, M. J. (1996). *Control adaptativo y robusto*. Universidad de Sevilla.
- [30] Hurtado Cruz, E. R. *Trazas, Adjuntas y Ortogonalidad*. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [31] Soderstrom, T. S., Stoica G. (1989). *System Identification* Prentice Hall.
- [32] Poznyak A. S. (2009). *Advanced mathematical tools for automatic control engineers*.
- [33] Reyes F. (2011). *Robótica - control de robots manipuladores*.

Apéndice A

Preliminares

Para el desarrollo de este trabajo se emplearon las siguientes metodologías.

A.1. Sistemas con retardos.

El comportamiento de la mayoría de los sistemas reales, ante señales externas, no ocurre inmediatamente, por lo que suponer que el estado siguiente no depende de los estados pasados, puede no ser suficiente para conocer el comportamiento del sistema. La forma de resolver este problema es incluir en el modelo matemático información de los estados pasados. A estos se les conoce como sistemas con retardos, de los cuales la evolución futura de sus variables de estado depende no solamente del valor actual, sino de los valores pasados dentro de una cierta ventana temporal [18].

En esta sección se considerará una clase de sistemas lineales con retardo, ya que este tipo de sistemas con retardo ayuda a la comprensión de los conceptos básicos, y crea una base para el estudio de casos mas generales.

Sea un sistema con retardo de la forma [24],

$$\dot{x} = A_0x(t) + A_1x(t - h), t \geq 0. \tag{A.1}$$

Donde $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $h > 0$ es un retardo. $\varphi[-h, 0] \rightarrow R^n$ es una condición inicial. Suponemos que la condición pertenece al espacio, $PC([-h, 0], R^n)$. Sea $x(t, \varphi)$ la solución de (A.1) con condiciones iniciales:

$$x(\theta, \varphi) = \varphi(\theta), \theta \in [-h, 0],$$

y $x_t(\varphi)$ es la solución en $[t - h, t]$

$$x_t(\varphi) : \theta \rightarrow x(t + \theta, \varphi), \theta \in [-h, 0].$$

Para los elementos en el espacio $PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ usamos la norma uniforme [21]

$$\|\varphi\|_h = \sup \|\varphi\|, \theta \in [-h, 0]$$

.

A.1.1. Matriz fundamental.

Definición A.1.1.1 Se dice que la matriz $K(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es matriz fundamental del sistema (A.1), si satisface [24]:

$$\frac{d}{dt}K(t) = K(t)A_0(t) + K(t-h)A_1, t \geq 0, \quad (\text{A.2})$$

$K(t) = 0_{n \times n}$ para $t < 0$, $K(0) = I$ donde I es la matriz identidad.

A.1.2. Fórmula de Cauchy.

Teorema A.1.2.1 Dada una función inicial $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, se cumple la siguiente igualdad [24]

$$x(t, \varphi) = K(t)\varphi(0) + \int_{-h}^0 K(t - \theta - h)A_1\varphi(\theta)d\theta, t \geq 0 \quad (\text{A.3})$$

A.1.3. Tipos de Sistemas con retardo.

- Sistemas de tipo retardado y con retardo puntual discreto: Cuando el retardo afecta al estado en valores puntuales de tiempo:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h). \quad (\text{A.4})$$

- Sistemas de tipo retardado con retardo distribuido: Este tipo de retardo no tiene un valor puntual, sino que su valor se encuentra repartido dentro de una ventana temporal

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1 \int_{-h}^0 x(t-\theta)d\theta.$$

- Sistemas tipo neutral con retardo puntual discreto: Este tipo de sistemas, además de necesitar valores puntuales del pasado para conocer las trayectorias futuras, cuenta con un retardo en la diferencial.

$$\dot{x}(t) + d\dot{x}(t-h) = A_0x(t) + a_1b(t-h). \quad (\text{A.5})$$

La diferencia entre estos sistemas está en la información necesaria de las condiciones iniciales para conocer las variables futuras.

A.2. D-particiones.

Las D-particiones son fronteras que dividen un mapa de parámetros en regiones de estabilidad e inestabilidad. Los parámetros que se encuentran sobre estas fronteras, hacen que un sistema tenga algunos polos sobre el eje imaginario y que ante alguna variación el sistema pueda pasar de estable a inestable o viceversa. La estabilidad de las zonas no se puede determinar a simple vista, para ello es necesario tomar un punto de alguna zona y mediante otro método observar en donde se encuentran sus polos, si el sistema es estable o inestable con estos parámetros, cualquier otro punto de la misma zona tendrá el mismo resultado, esto debido a la propiedad de continuidad las raíces con respecto a los parámetros [13].

Para trazar un mapa de parámetros, es necesario conocer el cuasipolinomio característico del sistema mediante la transformada de Laplace con condiciones iniciales igual a cero.

Definición A.2.0.1 *Un número complejo s_0 es un eigenvalor del sistema (A.4) si es una raíz de la función característica [21],*

$$f(s) = \det(sI - A_0 - A_1e^{-sh}),$$

el conjunto $\Lambda = \{s / f(s) = 0\}$.

Teorema A.2.0.1 *El sistema (A.4) es exponencialmente estable si y solo si el espectro del sistema se encuentra en el semiplano izquierdo del plano complejo [21],*

$$\operatorname{Re}(s_0) < 0, \quad s_0 \in \Lambda.$$

Definición A.2.0.1 *Un número complejo s_0 es un eigenvalor del sistema (A.5) si es una raíz de la función característica [21],*

$$f(s) = \det(sI - dse^{-sh} - A_0 - A_1e^{-sh}),$$

el conjunto $\Lambda = \{s / f(s) = 0\}$.

Teorema A.2.0.1 *El sistema (A.5) es exponencialmente estable si y solo si existe $\varepsilon > 0$ tal que el espectro del sistema se encuentra en el semiplano izquierdo del plano complejo [21],*

$$\operatorname{Re}(s) = -\varepsilon, \quad \operatorname{Re}(s_0) < -\varepsilon, \quad s_0.$$

A.2.1. Propiedades del cuasipolinomio.

- Son funciones analíticas, tienen un número infinito de raíces, lo cual complica sustancialmente su análisis.
- Estos sistemas son exponencialmente estables con decaimiento exponencial σ , si y solo si todas sus raíces están ubicadas a la izquierda de la lineal vertical de $-\sigma$, $\sigma > 0$.
- Sus raíces se desplazan de manera continua ante variaciones del retardo o de los parámetros del sistema. Así mismo las transiciones de estabilidad a inestabilidad y viceversa ocurren en el eje imaginario [21].

A.2.2. Metodología para D-particiones.

1. Obtener el cuasipolinomio característico del sistema mediante la transformada de Laplace con condiciones iniciales igual a cero.
2. Establecer dos parámetros a variar, el resto son fijos.
3. Evaluar el cuasipolinomio en $s = 0$ para el caso en el que algunos los polos estén sobre el centro del plano complejo.
4. Obtener una expresión para los parámetros uno y dos.
5. Evaluar el cuasipolinomio en $s = j\omega$, para algunos polos sobre el eje imaginario.
6. Dividir la expresión anterior en parte real e imaginaria, ambas expresiones igualarlas a cero.
7. Variar ω para obtener las soluciones para los parámetros uno y dos.

A.3. Modos Deslizantes.

El estudio de los sistemas de control por modos deslizantes ha sido de mucho interés en la comunidad científica durante las últimas dos décadas debido a su buen comportamiento ante incertidumbres acopladas y no acopladas, y el rechazo de perturbaciones externas [25].

El control por modos deslizantes SMC es un tipo particular de control por estructura. Los sistemas de VSC (Control por estructura variable) se caracterizan por estar descritos a través de dos o más leyes de control y una regla de decisión. La regla de decisión se denomina función de conmutación. Su entrada es alguna medida del comportamiento del sistema en el instante actual y su salida es la ley de control que debería aplicarse en ese instante de tiempo [26].

En los modos deslizantes, los sistemas VSC se diseñan para conducir y restringir el estado del sistema a permanecer en un entorno de la función de conmutación llamada superficie deslizante. Cuando se satisfacen ciertas condiciones, el estado se desliza sobre esta superficie, permaneciendo insensible a un tipo particular de incertidumbres o perturbaciones externas, lo es la característica principal para su aplicación en los sistemas de control [16].

Para mantener el régimen de deslizamiento ideal, la señal de control debe ser capaz de conmutar con una frecuencia infinita entre valores positivos a negativos, esto produce un efecto indeseado denominado chattering, así que las trayectorias oscilan alrededor de la superficie de deslizamiento [17].

La metodología de diseño de un controlador por modos deslizantes, implica primero establecer la dinámica de la superficie de deslizamiento, verificar la estabilidad y la existencia del modo deslizante diseñando una ley de control que garantice un régimen de deslizamiento. Una vez que el sistema es atrapado en la superficie, la dinámica del sistema en lazo cerrado es determinada sólo por la superficie de deslizamiento. El control que se diseña permite que las dinámicas del sistema permanezcan en dicha superficie [27].

A.3.1. Perturbaciones.

Son señales que tienden a afectar negativamente el valor de la salida de un sistema. Se pueden clasificar por el origen de esta señal, es decir si la perturbación se genera dentro

del sistema se denomina interna, en tanto que una perturbación externa se produce fuera del sistema, y se considera una entrada. Estas incertidumbres se pueden deber a errores de modelaje, falta de información sobre el sistema a modelar, errores de medición o las características de los sensores empleados [28].

A.3.2. Modos deslizantes dinámicos.

Para una mejor comprensión de las ideas básicas y características de ésta técnica de control, a continuación se presenta el desarrollo de modos deslizantes dinámicos para el siguiente sistema.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \xi(t), \quad (\text{A.6})$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad x_0 = x(0),$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$\xi(t)$ contiene dinámicas inciertas y/o perturbaciones externas bajo el supuesto de que las perturbaciones son acotadas por $\|\varepsilon\| \leq \delta < \infty$.

Es necesario proponer una superficie de deslizamiento σ la cual dependa del estado del sistema, se espera que el error de seguimiento se haga cero en un tiempo finito.

$$\sigma = Kx + u, \quad (\text{A.7})$$

$$K \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^m.$$

Se espera que las trayectorias evolucionen sobre la superficie de deslizamiento, en ese instante se puede decir que el sistema se encuentra en modo deslizante. Cuando esto ocurre un sistema puede tener cualquier comportamiento dinámico como tender hacia un punto de equilibrio dentro de la superficie de deslizamiento o seguir una trayectoria que lo lleve a abandonar la región de deslizamiento [16].

Se desea comprobar que σ es asintóticamente estable, así que se propone una función de energía:

$$V(\sigma) = \sigma^T \sigma, \quad (\text{A.8})$$

$$\therefore V(\sigma) > 0,$$

se puede observar que la función propuesta es definida positiva, si se analiza su dinámica:

$$\dot{V}(\sigma) = \sigma^T \dot{\sigma} + \dot{\sigma}^T \sigma = 2\sigma^T \dot{\sigma},$$

es necesario conocer $\dot{\sigma}$,

$$\dot{\sigma} = K\dot{x} + \dot{u} = K[Ax(t) + Bu(t) + \xi(t)] + \dot{u},$$

se puede suponer que,

$$\dot{u} = -KAx(t) - KBu(t) + u_2(t).$$

Si la ecuación anterior se sustituye en $\dot{\sigma}$

$$\dot{\sigma} = K\xi(t) + u_2(t),$$

sustituyendo en $\dot{V}(\sigma)$,

$$\dot{V}(\sigma) = 2\sigma^T[K\xi(t) + u_2(t)].$$

Se puede proponer $u_2(t) = -\rho \text{sign}(\sigma)$, $\rho \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$$\dot{V}(\sigma) = 2\sigma^T[K\xi(t) - \rho \text{sign}(\sigma)],$$

$$\dot{V}(\sigma) = 2\sigma^T K\xi(t) - 2\sigma^T \rho \text{sign}(\sigma),$$

como $2\sigma^T K\xi(t) \leq |2\sigma^T K\xi(t)|$,

$$\dot{V}(\sigma) \leq 2|\sigma^T K\xi(t)| - 2\sigma^T \rho \text{sign}(\sigma).$$

De acuerdo a la propiedad de la traza [30]:

- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$,
- $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$,

$$\dot{V}(\sigma) \leq 2|\sigma^T K\xi(t)| - 2\text{tr}(\sigma^T \rho \text{sign}(\sigma)),$$

$$\dot{V}(\sigma) \leq 2|\sigma^T K\xi(t)| - 2\text{tr}(\rho \text{sign}(\sigma)\sigma^T),$$

como:

$$\text{sign}(\sigma) = \frac{\sigma}{(\sigma^T \sigma)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\text{sign}(\sigma)\sigma^T = |\sigma|.$$

$$\dot{V}(\sigma) \leq 2|\sigma^T K\xi(t)| - 2\text{tr}(\rho) |\sigma|,$$

si $\delta = \text{tr}(\rho)$

$$\dot{V}(\sigma) \leq 2|\sigma^T K\xi(t)| - 2\delta |\sigma|,$$

$$\dot{V}(\sigma) \leq 2|\sigma| |K\xi(t)| - 2\delta |\sigma|,$$

$\xi(t)$ es una perturbación o dinámica no modelada desconocida y acotada,

$$\|\xi(t)\| \leq \delta_1,$$

$$\dot{V}(\sigma) \leq 2|\sigma|K\delta_1 - 2\delta|\sigma|,$$

$$\dot{V}(\sigma) \leq -2[\delta - K\delta_1]|\sigma|,$$

es necesario garantizar que $\delta > K\delta_1$ para que $\dot{V}(\sigma) < 0$, lo cual significaría que tiene un comportamiento descendente.

También se espera que $V(\sigma)$ tienda a cero en un tiempo tr ,

$$|\sigma| = (\sigma^T \sigma)^{\frac{1}{2}},$$

si $\alpha = \delta - K\delta_1$,

$$\dot{V}(\sigma) \leq -2\alpha \left[(\sigma^T \sigma)^{\frac{1}{2}} \right] |\sigma|,$$

$$\frac{d}{dt}V(\sigma) \leq -2\alpha \left[(\sigma^T \sigma)^{\frac{1}{2}} \right] |\sigma|,$$

recordando $V(\sigma)$ de (A.8)

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{V(\sigma)}} dV(\sigma) \leq -2\alpha \int_{t_0}^{\infty} dt,$$

$$2\sqrt{V(\sigma)}|_{t_0}^t \leq -2\alpha t|_{t_0}^t,$$

$$2\sqrt{V(\sigma(t))} - 2\sqrt{V(\sigma_0)} \leq -2\alpha(t - t_0),$$

$$\sqrt{V(\sigma(t))} \leq \sqrt{V(\sigma_0)} - \alpha(t - t_0),$$

por lo tanto σ tiende a cero en un tiempo tr , $t \geq tr$. Si $V(\sigma_0) = 0$,

$$\sqrt{V(\sigma(t))} \leq -\alpha(t - t_0),$$

$$tr = \frac{\sqrt{V(\sigma(t))}}{\alpha} + t_0.$$

A.4. Identificación de parámetros.

La identificación de sistemas tiene diversos significados en la literatura científica. La más usada es la que define la identificación o modelo de un sistema como el proceso de determinar un conjunto de ecuaciones diferenciales o en diferencias, o los parámetros de tales ecuaciones, que describen un proceso físico de acuerdo a un determinado criterio [29].

La identificación de parámetros para diferentes clases de sistemas dinámicos ha sido ampliamente estudiado durante las últimas tres décadas. Básicamente, se consideran los sistemas dinámicos cuya dinámica depende linealmente de los parámetros desconocidos [32].

Desde el punto de vista de procesamiento, la identificación puede ser hecha en línea con el proceso o bien las medidas efectuadas son guardadas en un archivo y posteriormente procesadas. Por otro lado, si la identificación en línea se hace cada periodo de muestreo, se tiene lo que se llama identificación en tiempo real, por lo que se utiliza la versión recursiva de los algoritmos [29].

La identificación de un sistema comprende las siguientes tareas:

- Estudio experimental (Adquisición de datos).
- Formulación de un criterio.
- Seleccionar la estructura del modelo.
- Estimación de los parámetros.
- Validación del modelo obtenido.

A.4.1. Mínimos cuadrados

El principio del método de mínimos cuadrados consiste en buscar los parámetros desconocidos de tal forma que la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores observados y calculados multiplicados por un número que mide el grado de precisión será un mínimo.

Para poder obtener una solución analítica los valores calculados deben ser funciones lineales de los parámetros desconocidos [29].

Sea el sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu, \tag{A.9}$$

$$x_0 = x(0),$$

donde:

- $x \in \mathbb{R}^N$ es el vector de estados;
- $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $B \in \mathbb{R}^{N \times M}$, son las matrices constantes;
- $u \in \mathbb{R}^P$ es una señal de entrada.

En la forma del regresor:

$$\begin{aligned} Z(t) &= \Theta \varphi, \\ \Theta &\in \mathbb{R}^{N \times (N+M)}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^{N+M}, \\ \Theta &= [A, B], \quad \varphi = \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La diferencia entre la salida real y su predicción es el error residual:

$$e(t) = Z(t) - \hat{\Theta} \varphi, \tag{A.10}$$

$$e \in \mathbb{R}^N,$$

siendo $\hat{\Theta}$ los parámetros estimados. El método de mínimos cuadrados consiste en minimizar el cuadrado del error [29]:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_0^\infty e(t)^T e(t) dt, \\ \mathcal{J} &= \int_0^\infty (Z(t) - \hat{\Theta} \varphi)^T (Z(t) - \hat{\Theta} \varphi) dt, \\ \mathcal{J} &= \int_0^\infty (Z^T(t)Z(t) - Z(t)^T \hat{\Theta} \varphi - \varphi^T \hat{\Theta}^T Z(t) + \varphi^T \hat{\Theta}^T \hat{\Theta} \varphi) dt, \\ \mathcal{J} &= \int_0^\infty (Z^T(t)Z(t) - 2Z(t)^T \hat{\Theta} \varphi + \varphi^T \hat{\Theta}^T \hat{\Theta} \varphi) dt. \end{aligned}$$

El mínimo será el valor de $\hat{\Theta}$ que hace la derivada cero:

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \hat{\Theta}} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \hat{\Theta}} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \hat{\Theta}} \left[Z^T(t)Z(t) - 2Z(t)^T \hat{\Theta} \varphi + \varphi^T \hat{\Theta}^T \hat{\Theta} \varphi \right] dt,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \hat{\Theta}} &= \int_0^\infty (-2Z(t)\varphi^T + 2\hat{\Theta}\varphi\varphi^T)\partial t, \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \hat{\Theta}} &= -2 \int_0^\infty Z(t)\varphi^T \partial t + 2\hat{\Theta} \int_0^\infty \varphi\varphi^T \partial t,\end{aligned}$$

resolviendo se llega a la ecuación de

$$\hat{\Theta} = \int_0^\infty \varphi^T Z(t)\partial t \left[\int_0^\infty \varphi\varphi^T \partial t \right]^{-1} \quad (\text{A.11})$$

A.4.2. Forma Recursiva.

La forma recursiva aprovecha parte de los cálculos realizados en un paso para el siguiente, por lo que el cálculo de los parámetros en un instante se realiza como:

$$\hat{\Theta}_{N+1} = \hat{\Theta}_N + \text{corrección}$$

Si el sistema esta variando, se suelen ponderar las medidas que se van tomando, dándole mas peso a las mas recientes . La solución conduce a los siguientes pasos [29]

1. Seleccionar los valores iniciales de P y $\hat{\Theta}$.
2. Obtener los valores de $x(t)$ y $u(t)$.
3. Formar el vector regresor φ
4. Calcular el error residual: $e(t+1) = \dot{x}(y+1) - \hat{\Theta}(t)\varphi(t+1)$.
5. Calcular P .
6. Calcular los nuevos parámetros estimados $\hat{\Theta}$.
7. Volver al paso 2.

De la ecuación (A.11) definimos P^{-1} ,

$$\begin{aligned}P^{-1} &= \int_0^\infty \varphi\varphi^T \partial t, \\ P &= \left(\int_0^\infty \varphi\varphi^T \partial t \right)^{-1}, \\ P &\in \mathbb{R}^{(N+M) \times (N+M)}.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\frac{d}{dt}P^{-1} = \varphi\varphi^T,$$

por otra parte

$$\begin{aligned} PP^{-1} &= 0_{(N+M)\times(M+N)}, \\ \frac{d}{dt}PP^{-1} &= P\frac{d}{dt}P^{-1} + \frac{d}{dt}PP^{-1} = 0, \\ \frac{d}{dt}PP^{-1} &= P\dot{P}^{-1} + \dot{P}P^{-1} = 0, \end{aligned}$$

obtenemos \dot{P} :

$$\dot{P} = -PP^{-1}\dot{P},$$

substituyendo \dot{P}^{-1}

$$\dot{P} = -P\{\varphi\varphi^T\}P, \quad (\text{A.12})$$

substituyendo P en (A.11)

$$\hat{\Theta} = P \int_0^t \varphi Z \partial t, \quad (\text{A.13})$$

dinámica de $\hat{\Theta}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\Theta} &= \frac{d}{dt} \left[P \int_0^t \varphi Z \partial t \right], \\ \dot{\hat{\Theta}} &= \dot{P} \int_0^t \varphi Z \partial t + P\varphi Z, \end{aligned}$$

substituyo \dot{P}

$$\dot{\hat{\Theta}} = -P \left[\frac{d}{dt}P^{-1} \right] P \int_0^t \varphi Z \partial t + P\varphi Z,$$

si conozco \dot{P}^{-1}

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\Theta}} &= -P\varphi\varphi^T P \int_0^t \varphi Z \partial t + P\varphi Z, \\ \dot{\hat{\Theta}} &= -P\varphi \left[\varphi^T P \int_0^t \varphi Z \partial t - Z \right]. \end{aligned}$$

Recordando (A.13)

$$\dot{\hat{\Theta}} = -P\varphi \left[\varphi^T \hat{\Theta} - Z \right],$$

utilizando la ecuación del error (A.10):

$$\dot{\hat{\Theta}} = -P\varphi e. \quad (\text{A.14})$$

En consecuencia el algoritmo de mínimos cuadrados se describe con las ecuaciones (A.10), (A.12), (A.14).

Apéndice B

Sistema péndulo doble invertido sobre el carro

B.1. Modelo dinámico del sistema péndulo doble invertido sobre el carro.

Para poder llegar a analizar y conocer el ultimo sistema, es necesario analizar un sistema pendular con dos barras, el cual se puede observar en la siguiente Figura B.1, Consta de

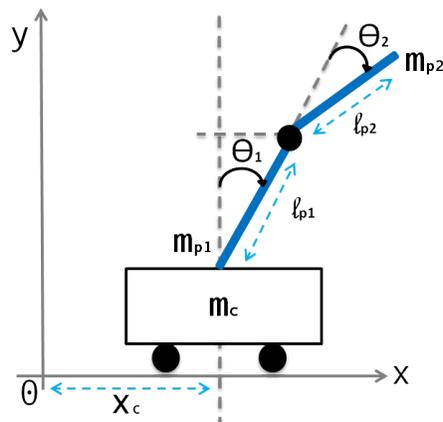


Figura B.1: Diagrama del péndulo doble invertido sobre el carro

dos barras de aluminio mecanizadas con precisión sobre un carro de la compañía Quanser [5]. El ángulo del primer péndulo se detecta mediante la lectura de un encoder incremental, mientras que la lectura del ángulo del segundo péndulo se obtiene a través de un Arduino MEGA el cual adquiere y acondiciona la señal digital de un encoder óptico. A la salida

la tarjeta Arduino genera una señal PWM (Modulación por ancho de pulso), la cual se puede definir como un tipo de señal de voltaje utilizada para enviar información o para modificar la cantidad de energía que se envía a una carga, dicha señal es enviada a un DAC (Convertidor de señal digital a analógica) el cual se encarga de generar una señal analógica comprendida entre 0 y 5 volts [15].

Según la posición del carro y los ángulos de los péndulos, el control calculado es un voltaje que se aplica al motor del carro, con la finalidad de generar un moviendo hacia adelante y hacia atrás para equilibrar al par de péndulos y mantenerlos en posición vertical [5].

Los parámetros del sistema son los siguientes, los cuales fueron obtenidos de la pagina oficial de Quanser [5].

Parámetro	Nombre	Valor	Unidad
m_c	Masa del carro	0.14	kg
m_1	Masa péndulo 1	0.097	kg
m_2	Masa péndulo 2	0.127	kg
l_1	Longitud media del péndulo 1	0.10	m
l_2	Longitud media del péndulo 2	0.1685	m
I_{p1}	Momento de inercia péndulo 1	0.0015	kgm^2
I_{p2}	Momento de inercia péndulo 2	0.0013	kgm^2
g	Constante de gravedad	9.81	m/seg^2

Tabla B.1: Tabla de parámetros del sistema.

Para conocer este modelo se siguieron los mismos pasos del péndulo mas simple. Se definieron las coordenadas (x, y) del centro de gravedad de las barras de los péndulos como $(x_{p1}, y_{p1}), (x_{p2}, y_{p2})$.

- Péndulo 1:

$$x_{p1} = x_c + l_1 \text{sen}(\theta_{p1}), \quad (\text{B.1})$$

$$y_{p1} = l_1 \text{cos}(\theta_{p1}). \quad (\text{B.2})$$

- Péndulo 2:

$$x_{p2} = x_{p1} + l_2 \text{sen}(\theta_{p1} + \theta_{p2}), \quad (\text{B.3})$$

$$y_{p2} = y_{p1} + l_2 \text{cos}(\theta_{p1} + \theta_{p2}). \quad (\text{B.4})$$

La energía potencial total (V_T), la cual es solo provista por los péndulos:

$$V_T = mgh.$$

- Péndulo 1:

$$V_{p1} = m_{p1}gl_1\cos(\theta_{p1}). \quad (\text{B.5})$$

- Péndulo 2:

$$V_{p2} = m_{p2}g(y_{p1} + l_2\cos(\theta_{p1} + \theta_{p2})). \quad (\text{B.6})$$

$$V_T = m_{p1}gl_1\cos(\theta_{p1}) + m_{p2}g(y_{p1} + l_2\cos(\theta_{p1} + \theta_{p2})) \quad (\text{B.7})$$

La energía cinética total (T_T) esta compuesta por la suma de la energía cinética de traslación de los péndulos (T_{p1t}, T_{p2t}), la energía cinética de rotación del péndulo (T_{p1r}, T_{p2r}), y la energía cinética del carro (T_c),

$$T_T = T_c + T_{p1t} + T_{p2t} + T_{p1r} + T_{p2r}. \quad (\text{B.8})$$

Se obtiene la energía cinética traslacional de los péndulos (T_{p1t}, T_{p2t}), mediante:

$$T_{pt} = \frac{1}{2}m_p v^2, \quad (\text{B.9})$$

la velocidad en sus componentes x e y ,

$$v^2 = \dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2, \quad (\text{B.10})$$

sustituir v^2 en (B.9);

$$T_{pt} = \frac{1}{2}m_p (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2). \quad (\text{B.11})$$

Se derivan (B.1), (B.3), (B.2), (B.4):

- Péndulo 1:

$$\dot{x}_{p1} = \dot{x}_c + l_1\dot{\theta}_{p1}\cos(\theta_{p1}),$$

$$\dot{y}_{p1} = -l_1\dot{\theta}_{p1}\sen(\theta_{p1}).$$

- Péndulo 2:

$$\dot{x}_{p2} = \dot{x}_c + l_1\dot{\theta}_{p1}\cos(\theta_{p1}) + (\dot{\theta}_{p1} + \dot{\theta}_{p2})l_2\cos(\theta_{p1} + \theta_{p2}),$$

$$\dot{y}_{p2} = -l_1\dot{\theta}_{p1}\sen(\theta_{p1}) - l_2(\dot{\theta}_{p1} + \dot{\theta}_{p2})\sen(\theta_{p1} + \theta_{p2}).$$

Si se sustituyen los valores de $(\dot{x}_{p1}, \dot{y}_{p1}, \dot{x}_{p2}, \dot{y}_{p2})$ en (B.10) se pueden obtener las velocidades de los péndulos,

- Péndulo 1:

$$v_1^2 = \dot{x}_c^2 + 2\dot{x}_c l_1 \dot{\theta}_{p1} \cos(\theta_{p1}) + l_1^2 \dot{\theta}_{p1}^2.$$

- Péndulo 2:

$$\begin{aligned} v_2^2 = & \dot{x}_c^2 + l_1^2 \dot{\theta}_{p1}^2 + 2l_1 \dot{\theta}_{p1} \dot{x}_c \cos(\theta_{p1}) - 2l_2 \dot{x}_c (\dot{\theta}_{p1} + \dot{\theta}_{p2}) \cos(\theta_{p1} + \theta_{p2}) \dots \\ & \dots + l_2^2 \dot{\theta}_{p1}^2 + 2\dot{\theta}_{p1} \dot{\theta}_{p2} l_2^2 + l_2^2 \dot{\theta}_{p2}^2 + 2l_1 l_2 (\dot{\theta}_{p1} + \dot{\theta}_{p2}) \dot{\theta}_{p1} \cos(\theta_{p2}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la energía cinética traslacional de los péndulos son:

- Péndulo 1:

$$T_{p1t} = \frac{1}{2} m_{p1} \{ \dot{x}_c^2 + 2\dot{x}_c l_1 \dot{\theta}_{p1} \cos(\theta_{p1}) + l_1^2 \dot{\theta}_{p1}^2 \}. \quad (\text{B.12})$$

- Péndulo 2:

$$\begin{aligned} T_{p2t} = & \frac{1}{2} m_{p2} \{ \dot{x}_c^2 + l_1^2 \dot{\theta}_{p1}^2 + 2l_1 \dot{\theta}_{p1} \dot{x}_c \cos(\theta_{p1}) + 2l_2 \dot{x}_c (\dot{\theta}_{p1} + \dot{\theta}_{p2}) \cos(\theta_{p1} + \theta_{p2}) \} + \\ & \frac{1}{2} m_{p2} \{ l_2^2 \dot{\theta}_{p1}^2 + 2\dot{\theta}_{p1} \dot{\theta}_{p2} l_2^2 + l_2^2 \dot{\theta}_{p2}^2 + 2l_1 l_2 (\dot{\theta}_{p1} + \dot{\theta}_{p2}) \dot{\theta}_{p1} \cos(\theta_{p2}) \}. \quad (\text{B.13}) \end{aligned}$$

Los marcos inerciales de los péndulos:

- Péndulo 1:

$$T_{p1r} = \frac{1}{2} I_{p1} \dot{\theta}_{p1}^2. \quad (\text{B.14})$$

- Péndulo 2:

$$T_{p2r} = \frac{1}{2} I_{p2} \dot{\theta}_{p2}^2. \quad (\text{B.15})$$

La energía cinética de traslación del carro (T_c) está definida por:

$$T_c = \frac{1}{2} m_c \dot{x}_c^2. \quad (\text{B.16})$$

Por lo tanto para obtener la energía cinética total se debe sustituir (B.12) (B.13) (B.14), (B.15), (B.16) en (B.8),

$$\begin{aligned}
 T_T = & \frac{1}{2}m_{p1}\{\dot{x}_c^2 - 2\dot{x}_cl_1\dot{\theta}_{p1}\cos(\theta_{p1}) + l_1^2\dot{\theta}_{p1}^2\} + \frac{1}{2}m_{p2}\{\dot{x}_c^2 + l_1^2\dot{\theta}_{p1}^2 + 2l_1\dot{\theta}_{p1}\dot{x}_c\cos(\theta_{p1})\} \\
 & + \frac{1}{2}m_{p2}\{2l_2\dot{x}_c(\dot{\theta}_{p1} + \dot{\theta}_{p2})\cos(\theta_{p1} + \theta_{p2})\} + \frac{1}{2}m_{p2}\{l_2^2\dot{\theta}_{p1}^2 + l_2^2\dot{\theta}_{p2}^2\} \\
 & + \frac{1}{2}m_{p2}\{2l_1l_2(\dot{\theta}_{p1} + \dot{\theta}_{p2})\dot{\theta}_{p1}\cos(\theta_{p2})\} + \frac{1}{2}I_{p2}\dot{\theta}_{p2}^2 + \frac{1}{2}I_{p2}\dot{\theta}_{p2}^2 + \frac{1}{2}m_c\dot{x}_c^2.
 \end{aligned}$$

Mediante T_T , V_Y es posible obtener el Lagrangiano [10]

$$L = T_T - V_T$$

$$\begin{aligned}
 L = & \dot{x}_c^2(m_c + m_{p1} + m_{p2}) + \frac{1}{2}l_1^2\dot{\theta}_{p1}^2(m_{p1} + m_{p2}) + \frac{1}{2}m_{p2}l_2^2(\dot{\theta}_{p1}^2 + \dot{\theta}_{p2}^2) + m_{p2}l_2^2\dot{\theta}_{p1}\dot{\theta}_{p2} + \\
 & m_{p2}l_1l_2(\dot{\theta}_{p1} + \dot{\theta}_{p2})\dot{\theta}_{p1}\cos(\theta_{p2}) + l_2m_{p2}\dot{x}_c(\dot{\theta}_{p1} + \dot{\theta}_{p2})\cos(\theta_{p1} + \theta_{p2}) + l_1\dot{\theta}_{p1}\dot{x}_c(m_{p1} + \\
 & m_{p2})\cos(\theta_{p1}) + \frac{1}{2}(I_{p1}\dot{\theta}_{p1}^2 + I_{p2}\dot{\theta}_{p2}^2) - m_{p1}gl_1\cos(\theta_{p1}) - m_{p2}g(l_1\cos(\theta_{p1}) + l_2\cos(\theta_{p1} + \theta_{p2}))
 \end{aligned}$$

La ecuación de Euler-Lagrange [10],

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_{ext}, \quad (\text{B.17})$$

$$q = x_c, t_1, t_2,$$

se trata de una ecuación diferencial de segundo orden en la que q es la variable dependiente y t la independiente.

Es necesario aplicar la fórmula de Euler-Lagrange con respecto a x_c :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_c} = F_{1ext}. \quad (\text{B.18})$$

Para ello se debe derivar a L con respecto a \dot{x}_c ,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} = \dot{x}_c(m_c + c_{p1} + m_{p2}) - l_2m_{p2}(\dot{\theta}_{p1} + \dot{\theta}_{p2})\cos(\theta_{p1} + \theta_{p2}), \quad (\text{B.19})$$

después, la ecuación (B.19) se deriva con respecto a t ,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c}\right) = & \ddot{x}_c(m_{p1} + m_{p2} + m_c) + l_2m_{p2}(\ddot{\theta}_{p1} + \ddot{\theta}_{p2})\cos(\theta_{p1} + \theta_{p2}) + l_2m_{p2}(\dot{\theta}_{p1} + \dot{\theta}_{p2})^2 \\
 & \text{sen}(\theta_{p1} + \theta_{p2}) + l_1\ddot{\theta}_{p1}(m_{p1} + m_{p2})\cos(\theta_{p1}) + l_1\dot{\theta}_{p1}^2(m_{p1} + m_{p2})\text{sen}(\theta_{p1}) = \tau
 \end{aligned}$$

para $\frac{\partial L}{\partial x_c}$ se deriva a L con respecto a x_c

$$\frac{\partial L}{\partial x_c} = 0,$$

se sustituye $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c}\right)$, $\frac{\partial L}{\partial x_c}$ en (B.17),

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_c(m_{p1} + m_{p2} + m_c) + l_2 m_{p2} \left(\ddot{\theta}_{p1} + \ddot{\theta}_{p2} \right) \cos(\theta_{p1} + \theta_{p2}) + l_2 m_{p2} \left(\dot{\theta}_{p1} + \dot{\theta}_{p2} \right)^2 \\ & \text{sen}(\theta_{p1} + \theta_{p2}) + l_1 \ddot{\theta}_{p1} (m_{p1} + m_{p2}) \cos(\theta_{p1}) + l_1 \dot{\theta}_{p1}^2 (m_{p1} + m_{p2}) \text{sen}(\theta_{p1}) = \tau. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Aplicando la fórmula de Euler-Lagrange con respecto a θ_{p1} :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{p1}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{p1}} = F_{2ext}, \quad (\text{B.21})$$

se deriva a L con respecto a $\dot{\theta}_{p1}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{p1}} &= l_1^2 \dot{\theta}_{p1} (m_{p1} + m_{p2}) + l_2^2 m_{p2} \left(\dot{\theta}_{p1} + \dot{\theta}_{p2} \right) - l_2 m_{p2} \dot{x}_c \cos(\theta_{p1} + \theta_{p2}) + \\ & 2m_{p2} l_1 l_2 \dot{\theta}_{p1} \cos(\theta_{p2}) - l_1 \dot{x}_c (m_{p1} + m_{p2}) \cos(\theta_{p1}) + l_1 l_2 m_{p2} \dot{\theta}_{p2} \cos(\theta_{p2}) + I_{p1} \dot{\theta}_{p1}, \end{aligned}$$

después se deriva $\frac{\partial L}{\partial \theta_{p1}}$ respecto a t ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{p1}} \right) &= l_1^2 \ddot{\theta}_{p1} (m_{p1} + m_{p2}) + l_2^2 m_{p2} \left(\ddot{\theta}_{p1} + \ddot{\theta}_{p2} \right) - l_2 m_{p2} \ddot{x}_c \cos(\theta_{p1} + \theta_{p2}) \\ &+ l_2 m_{p2} \dot{x}_c \left(\dot{\theta}_{p1} + \dot{\theta}_{p2} \right) \text{sen}(\theta_{p1} + \theta_{p2}) + 2m_{p2} l_1 l_2 \ddot{\theta}_{p1} \cos(\theta_{p2}) - 2m_{p2} l_1 l_2 \dot{\theta}_{p1} \dot{\theta}_{p2} \text{sen}(\theta_{p2}) \\ &- l_1 \ddot{x}_c (m_{p1} + m_{p2}) \cos(\theta_{p1}) + l_1 \dot{x}_c \dot{\theta}_{p1} (m_{p1} + m_{p2}) \text{sen}(\theta_{p1}) + l_1 l_2 m_{p2} \ddot{\theta}_{p2} \cos(\theta_{p2}) \\ &- l_1 l_2 m_{p2} \dot{\theta}_{p2}^2 \text{sen}(\theta_{p2}) + I_{p1} \ddot{\theta}_{p1}, \end{aligned}$$

para $\frac{\partial L}{\partial \theta_{p1}}$ se deriva a L con respecto a θ_{p1}

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_{p1}} &= l_2 m_{p2} \dot{x}_c \left(\dot{\theta}_{p1} + \dot{\theta}_{p2} \right) \text{sen}(\theta_{p1} + \theta_{p2}) + l_1 \dot{\theta}_{p1} \dot{x}_c (m_{p1} + m_{p2}) \text{sen}(\theta_{p1}) + \\ & m_{p1} g l_1 \text{sen}(\theta_{p1}) + m_{p2} g (l_1 \text{sen}(\theta_{p1}) + l_2 \text{sen}(\theta_{p1} + \theta_{p2})), \end{aligned}$$

se sustituye $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{p1}}\right)$, $\frac{\partial L}{\partial \theta_{p1}}$ en (B.17),

$$\begin{aligned} & l_1 \ddot{\theta}_{p1} (m_{p1} + m_{p2}) + l_2^2 m_{p2} (\ddot{\theta}_{p1} + \ddot{\theta}_{p2}) + l_2 m_{p2} \ddot{x}_c \cos(\theta_{p1} + \theta_{p2}) + \\ & 2m_{p2} l_1 l_2 \left(\ddot{\theta}_{p1} \cos(\theta_{p2}) - \dot{\theta}_{p1} \dot{\theta}_{p2} \text{sen}(\theta_{p2}) \right) + l_1 \ddot{x}_c (m_{p1} + m_{p2}) \cos(\theta_{p1}) \\ &+ l_1 l_2 m_{p2} \ddot{\theta}_{p2} \cos(\theta_{p2}) - l_1 l_2 m_{p2} \dot{\theta}_{p2}^2 \text{sen}(\theta_{p2}) + I_{p1} \ddot{\theta}_{p1} - m_{p1} g l_1 \text{sen}(\theta_{p1}) - \\ & m_{p2} g (l_1 \text{sen}(\theta_{p1}) + l_2 \text{sen}(\theta_{p1} + \theta_{p2})) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Aplicando la fórmula de Euler-Lagrange con respecto a θ_{p2} :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{p2}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{p2}} = F_{3ext}, \quad (\text{B.23})$$

se deriva a L con respecto a θ_{p2}

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_{p2}} = m_{p2} l_2^2 \left(\dot{\theta}_{p1} + \dot{\theta}_{p2} \right) + m_{p2} l_1 l_2 \dot{\theta}_{p1} \cos(\theta_{p2}) + l_2 m_{p2} x_c \cos(\dot{\theta}_{p1} + \theta_{p2}) + I_{p2} \dot{\theta}_{p2},$$

se deriva $\frac{\partial L}{\partial \theta_{p2}}$ respecto a t ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_{p2}} \right) &= m_{p2} l_2^2 \left(\ddot{\theta}_{p1} + \ddot{\theta}_{p2} \right) + m_{p2} l_1 l_2 \ddot{\theta}_{p1} \cos(\theta_{p2}) - m_{p2} l_1 l_2 \dot{\theta}_{p1} \dot{\theta}_{p2} \text{sen}(\theta_{p2}) + \\ &\quad l_2 m_{p2} \ddot{x}_c \cos(\theta_{p1} + \theta_{p2}) + l_2 m_{p2} \dot{x}_c \left(\dot{\theta}_{p1} + \dot{\theta}_{p2} \right) \text{sen}(\theta_{p1} + \theta_{p2}) + I_{p2} \ddot{\theta}_{p2} \end{aligned}$$

para $\frac{\partial L}{\partial \theta_{p2}}$ se deriva a L con respecto a θ_{p2}

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_{p2}} &= l_2 m_{p2} \dot{x}_c \left(\dot{\theta}_{p1} + \dot{\theta}_{p2} \right) \text{sen}(\theta_{p1} + \theta_{p2}) - m_{p2} l_1 l_2 \left(\dot{\theta}_{p1} + \dot{\theta}_{p2} \right) \dot{\theta}_{p1} \text{sen}(\theta_{p2}) + \\ &\quad m_{p2} g l_2 \text{sen}(\theta_{p1} + \theta_{p2}), \end{aligned}$$

se sustituye $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_{p2}} \right)$, $\frac{\partial L}{\partial \theta_{p2}}$ en (B.17),

$$\begin{aligned} m_{p2} l_1 l_2 \dot{\theta}_{p1}^2 \text{sen}(\theta_{p2}) + m_{p2} l_2^2 \left(\ddot{\theta}_{p1} + \ddot{\theta}_{p2} \right) + m_{p2} l_1 l_2 \ddot{\theta}_{p1} \cos(\theta_{p2}) + l_2 m_{p2} \ddot{x}_c \cos(\theta_{p1} + \theta_{p2}) \\ - m_{p2} g l_2 \text{sen}(\theta_{p1} + \theta_{p2}) + I_{p2} \ddot{\theta}_{p2} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

En este punto es posible obtener la representación matricial de las dinámicas del sistema, dado el modelo dinámico de un robot [12]:

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + F(q, \dot{q}) = 0, \quad (\text{B.25})$$

donde

- $D(q)$ representa a las fuerzas inerciales debidas a las aceleraciones.
- $C(q, \dot{q})$ representa a los pares de Coriolis.
- $G(q)$ son los pares gravitatorios asociados a la masa.

- $F(q, \dot{q})$ es el vector de entradas.

Por lo tanto se puede representar el sistema de la forma (B.25):

$$D(q)\ddot{q} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{\theta}_{p1} \\ \ddot{\theta}_{p2} \end{bmatrix},$$

con

- $D_{11} = m_{p1} + m_{p2} + m_c,$
- $D_{12} = l_2 m_{p2} \cos(\theta_{p1} + \theta_{p2}) + l_1 (m_{p1} + m_{p2}) \cos(\theta_{p1}),$
- $D_{13} = l_2 m_{p2} \cos(\theta_{p1} + \theta_{p2}),$
- $D_{21} = l_2 m_{p2} \cos(\theta_{p1} + \theta_{p2}) + l_1 (m_{p1} + m_{p2}) \cos(\theta_{p1}),$
- $D_{22} = l_1^2 (m_{p1} + m_{p2}) + l_2^2 m_{p2} + 2m_{p2} l_1 l_2 \cos(\theta_{p2}) + I_{p1},$
- $D_{23} = l_2^2 m_{p2} + l_1 l_2 m_{p2} \cos(\theta_{p2}),$
- $D_{31} = l_2 m_{p2} \cos(\theta_{p1} + \theta_{p2}),$
- $D_{32} = l_2^2 m_{p2} + m_{p2} l_1 l_2 \cos(\theta_{p2}),$
- $D_{33} = m_{p2} l_2^2 I_{p2},$

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{\theta}_{p1} \\ \dot{\theta}_{p2} \end{bmatrix},$$

- $C_{11} = 0,$
- $C_{12} = l_2 m_{p2} \dot{\theta}_{p1} \text{sen}(\theta_{p1} + \theta_{p2}) + l_1 \dot{\theta}_{p1} (m_{p1} + m_{p2}) \text{sen}(\theta_{p1}) + 2l_2 m_{p2} \dot{\theta}_{p2} \text{sen}(\theta_{p1} + \theta_{p2}),$
- $C_{13} = l_2 m_{p2} \dot{\theta}_{p2} \text{sen}(\theta_{p1} + \theta_{p2}),$
- $C_{21} = 0,$
- $C_{22} = -2m_{p2} l_1 l_2 \dot{\theta}_{p2} \text{sen}(\theta_{p2}),$
- $C_{23} = -l_1 l_2 m_{p2} \dot{\theta}_{p2} \text{sen}(\theta_{p2}),$
- $C_{31} = 0,$

- $C_{32} = m_{p2}l_1l_2\dot{\theta}_{p1}\text{sen}(\theta_{p2}),$
- $C_{33} = 0,$

$$G(q) = \begin{bmatrix} G_{11} \\ G_{21} \\ G_{31} \end{bmatrix},$$

- $G_{11} = 0,$
- $G_{21} = -m_{p1}gl_1\text{sen}(\theta_{p1}) - m_{p2}g(l_1\text{sen}(\theta_{p1}) + l_2\text{sen}(\theta_{p1} + \theta_{p2})),$
- $G_{31} = -m_{p2}gl_2\text{sen}(\theta_{p1} + \theta_{p2}),$

$$F(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ F_{31} \end{bmatrix},$$

- $F_{11} = \tau,$
- $F_{21} = 0,$
- $F_{31} = 0.$

Mediante un proceso de linealización es posible obtener la matriz A y B, por lo que la representación espacio estado queda de la siguiente manera:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{g(m_{p1}+m_{p2})}{m_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g(m_c+m_{p1}+m_{p2})}{l_1m_c} & 0 & -\frac{gm_{p2}}{l_1m_{p1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{g(m_c+m_{p1}+m_{p2})}{l_1m_c} & 0 & \frac{g(l_1m_{p1}+l_1m_{p2}+l_1m_{p2})}{l_1l_2m_{p1}} & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_c} \\ 0 \\ -\frac{1}{l_1m_c} \\ 0 \\ -\frac{1}{l_1m_c} \end{bmatrix}}_B u \quad (\text{B.26})$$

Recordando la definición de controlabilidad (2.2.2), cuando al sistema anterior (B.26) se le sustituyen los parámetros por aquellos que aparecen en la página de Quanser, la

matriz de controlabilidad es la siguiente:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1.5152 & 0 & 50.446 & 0 & 149.04 \\ 1.5152 & 0 & 50.446 & 0 & 149.04 & 0 \\ 0 & -15.152 & 0 & -44.763 & 0 & 250011 \\ -15.152 & 0 & -44.763 & 0 & 250011 & 0 \\ 0 & -15.152 & 0 & -1992.3 & 0 & -517866 \\ -15.152 & 0 & -1992.3 & 0 & -517866 & 0 \end{bmatrix},$$

de esta matriz C el rango es igual a 6, por lo que el par $[A,B]$ es controlable y se puede llevar a cabo la siguiente sección.

B.2. Control por realimentación de estado al sistema péndulo doble invertido sobre el carro.

Conociendo el sistema (B.26), es posible aplicar un control por realimentación $u = -Kx$, donde $K \in \mathbb{R}^n$. Este control redirige a la entrada una cierta proporción de la salida, esto modificaría al sistema de la manera:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t),$$

$$x_0 = x(0),$$

es necesario determinar las ganancias K de la realimentación de estado, tal que los polos del sistema en lazo cerrado tengan ciertos valores deseados. Los valores propios del sistema de lazo cerrado son las raíces de polinomio característico, la cual se iguala a la deseada [19],

$$\Delta(\lambda) = s^6 + 12s^5 + 60s^4 + 160s^3 + 240s^2 + 192s + 64,$$

para este caso las ganancias K son,

$$K = [-27.568 \quad -25.759 \quad -102.54 \quad -18.77 \quad -46.686 \quad 8.7483].$$

En la siguiente Figura B.4 se presenta el comportamiento del sistema no lineal cuando se aplica una realimentación por asignación de polos con $\bar{x}_0 = [0, 0, 0.001, 0, 0, 0]$.

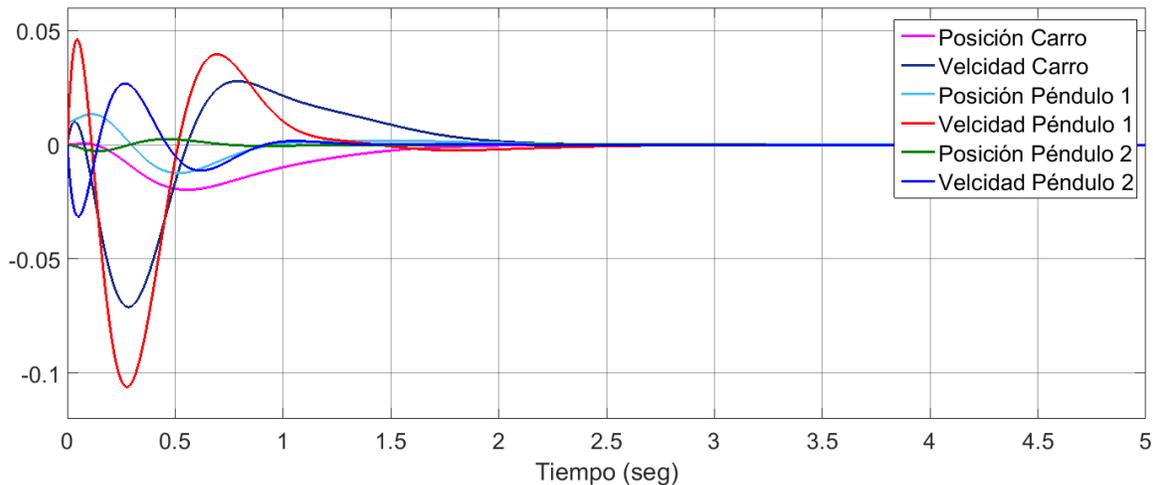


Figura B.2: Sistema no lineal con un control por realimentación, con condiciones iniciales cercanas al punto de equilibrio.

Las ganancias propuestas son correctas, ya que en un tiempo menor a 2 segundos las variables de estado convergen al punto de referencia.

B.2.1. Identificación de parámetros por mínimos cuadrados recursivos para el péndulo doble invertido sobre el carro.

La ecuación (B.26) se puede representar de la forma:

$$\dot{x} = [A, B] \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \Theta\varphi, \quad (\text{B.27})$$

$$A, \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, B \in \mathbb{R}^6, u \in \mathbb{R}, \Theta \in \mathbb{R}^{6 \times 7}, \varphi \in \mathbb{R}^7$$

Con la forma (B.27) se puede implementar el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo, el cual se describe como:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\Theta}} &= -P\varphi e, \\ \dot{P} &= -P\varphi\varphi^T P, \\ e(t) &= Z(t) - \hat{\Theta}\varphi, \end{aligned}$$

$$\hat{\Theta} \in \mathbb{R}^{7 \times 6}, P \in \mathbb{R}^{7 \times 7}, e \in \mathbb{R}^{1 \times 6}, Z \in \mathbb{R}^{1 \times 6}.$$

Este método fue aplicado a la planta real, a la cual se le añadió una función de excitación persistente a las variables de estado que afectan al carro (posición y velocidad), ya que así se garantiza que todo el tiempo el método de identificación recibe información, dicha función es igual a:

$$\delta = \begin{bmatrix} 0.05\text{sen}(0.5t) \\ 0.025\text{cos}(0.5t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A continuación se presenta una figura B.3 con las señales de los parámetros obtenidos después de un tiempo de 120 segundos. En dicha gráfica podemos observar como los 42 parámetros que componen al sistema después de un tiempo aproximado a 40 segundos convergen a un valor definido.

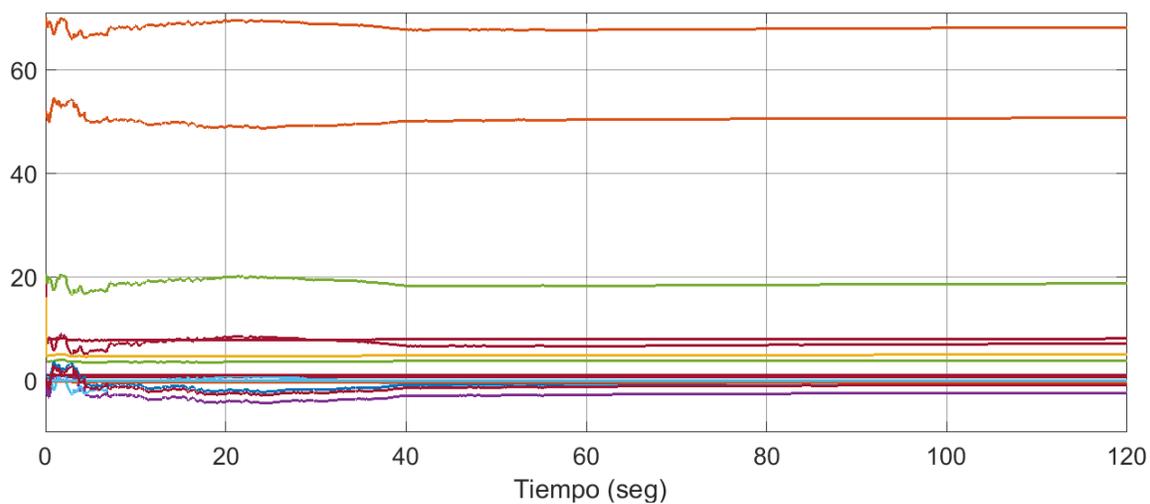


Figura B.3: Parámetros estimados de sistema (B.26).

Al finalizar la prueba se obtuvieron las siguientes matrices,

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 1.022 & 0.4 & 0.3 & 0.65 & 0.6 \\ -0.55 & 0.4 & 8.137 & -0.025 & 3.811 & 0.01 \\ 0.55 & 0.022 & -0.025 & 0.998 & 0.002 & 0.025 \\ 0.1 & 1.022 & 68.35 & 0.002 & 7.28 & -0.035 \\ -0.55 & 0.4 & 0.0025 & 0.6 & 0.04 & 1.05 \\ 0.025 & -0.055 & -2.215 & 0.025 & 50.84 & 0.065 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 5.026 \\ -0.0035 \\ 18.895 \\ 0.0025 \\ -10.578 \end{bmatrix},$$

B.2.2. Control por modos deslizantes deslizantes para el sistema péndulo doble invertido sobre el carro.

Si el sistema (B.26) ahora con sus matrices A y B conocidas, es perturbado entonces toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \xi(t), \\ x_0 &= x(0), \quad \xi \in \mathbb{R}^6.\end{aligned}$$

En este caso las ganancias K ya fueron previamente calculadas y comprobado que garantizan la estabilidad del sistema, por lo que se volverán a utilizar para este caso,

$$K = [-27.568 \quad -25.759 \quad -102.54 \quad -18.77 \quad -46.686 \quad 8.7483].$$

Ahora es necesario aplicar un control por modos deslizantes, para estabilizar al sistema ante presencia de perturbaciones, para esta simulación la perturbación propuesta fue:

$$\xi = \begin{bmatrix} 0.1\text{sen}(0.05t) \\ 0.005\text{cos}(0.05t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como lo indica el Apéndice A.3, para aplicar este tipo de control, es necesario proponer una superficie de deslizamiento σ , la cual dependa de las dinámicas del sistema. La superficie propuesta es:

$$\sigma = Kx(t) + u(t).$$

Si la derivada respecto al tiempo de la acción de control u , bajo el conocimiento de la matriz de ganancias K es tal que:

$$\dot{u} = -K[Ax(t) + Bu(t)] - \rho \text{sign}(\sigma),$$

$$u(0) = u_0,$$

con:

$$\sigma \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^6, \quad K \in \mathbb{R}^{1 \times 6}, \quad A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \quad B \in \mathbb{R}^6, \quad \rho \in \mathbb{R}$$

Una vez que se entiende la parte teorica, es posible llevar a cabo la simulación.

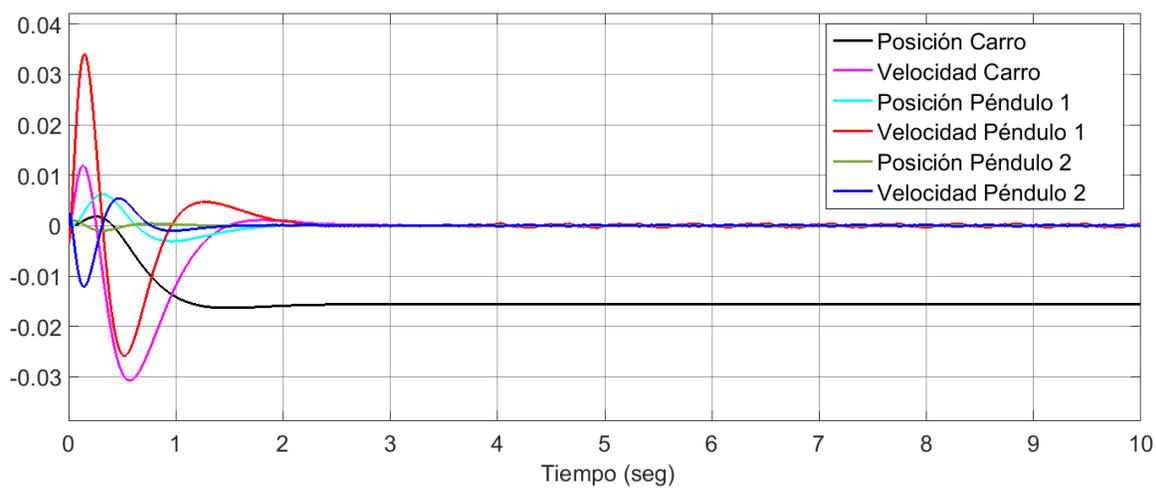


Figura B.4: Sistema (B.26) con control por modos deslizantes dinámicos.

Se puede mencionar que aunque el ambos péndulos después de un tiempo de 2 segundos aproximadamente, logran mantenerse estables, el carro llega a un punto por muy cercano al cero, pero sin llegar a el. Se puede suponer que esto es debido a que las perturbaciones se encuentran actuando sobre las variables del carro y es por ello que no alcanza a llegar a cero.

Apéndice C

Sistema péndulo doble invertido sobre el carro con resorte

C.1. Modelo dinámico del sistema péndulo doble invertido sobre el carro con resorte

Para poder obtener una estimación del modelo del péndulo flexible sobre el carro, primero se debe hacer un análisis sobre el péndulo doble invertido con resorte, ya que a partir de este, más adelante se podrá llevar a cabo la estimación de dicho modelo.

Se conoce la representación matricial de las dinámicas del sistema péndulo doble invertido sobre el carro, dado el modelo dinámico de un robot. La finalidad es representar al sistema con resorte de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_0(x) + A_1(x)B(x)u, \\ x(0) &= 0,\end{aligned}$$

siendo A_0 la matriz que representa los parámetros de los dos péndulos y A_1 la matriz para los parámetros del resorte que se ha integrado. Es importante mencionar que del sistema anteriormente estudiado en el Apéndice B la matriz A_0 es idéntica en ambos sistemas

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{g(m_{p1}+m_{p2})}{m_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g(m_c+m_{p1}+m_{p2})}{l_1 m_c} & 0 & -\frac{g m_{p2}}{l_1 m_{p1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{g(m_c+m_{p1}+m_{p2})}{l_1 m_c} & 0 & \frac{g(l_1 m_{p1}+l_1 m_{p2}+l_1 m_{p2})}{l_1 l_2 m_{p1}} & 0 \end{bmatrix}$$

Masa - resorte - amortiguador.

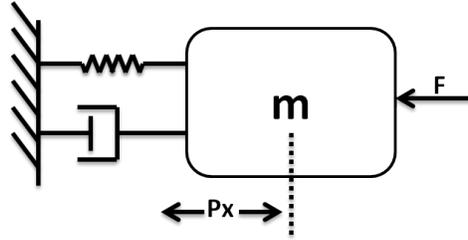


Figura C.1: Sistema masa-resorte-amortiguador.

La ecuación diferencial que corresponde al sistema anterior (Figura C.1) es la siguiente [23]

$$m\ddot{P}_x = -kP_x - b\dot{P}_x + F. \quad (C.1)$$

El sistema de péndulo doble invertido sobre el carro cuenta en su segundo péndulo con un comportamiento semejante al del masa-resorte-amortiguador. Así que sufre una modificación en su estructura original, (Figura (C.2)). Dicha nueva configuración se explica a detalle en el Apéndice D.

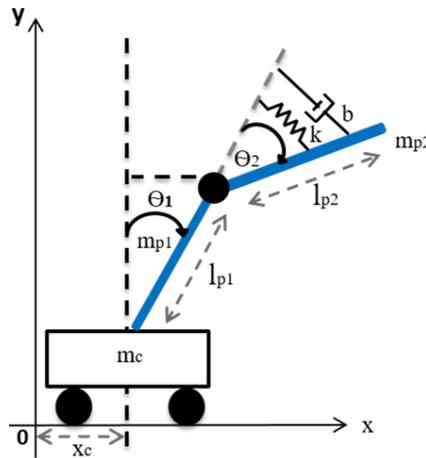


Figura C.2: Diagrama del sistema péndulo doble invertido con resorte sobre el carro.

Siendo considerado Px como el ángulo θ_2 :

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{k}{mp_2}\theta_2 - \frac{b}{mp_2}\dot{\theta}_2.$$

El sistema puede ser representado de la siguiente forma:

$$\dot{x} = A_0(x) + A_1(x) + B(x)u, \quad (C.2)$$

$$A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^n.$$

La matriz A_1 quedaría de la siguiente forma:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{l_1 m_c} & -\frac{b}{l_1 m_c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k(m_c(l_1 + l_2) + l_2 m_{p1})}{l_1^2 l_2 m_c m_{p1}} & \frac{b(m_c(l_1 + l_2) + l_2 m_{p1})}{l_1^2 l_2 m_c m_{p1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_1(6, 5) & A_1(6, 6) \end{bmatrix}$$

$$A_1(6, 5) = -\frac{k(l_1^2 m_c(m_{p1} + m_{p2}) + m_{p2}(l_2^2 m_c + m_{p1} + 2l_1 l_2 m_c))}{l_1^2 l_2^2 m_c m_{p1} m_{p2}}$$

$$A_1(6, 6) = -\frac{b(l_1^2 m_c m_{p1} + l_1^2 m_c m_{p2} + l_2^2 m_c m_{p2} + l_2^2 m_{p1} m_{p2} + 2.0 l_1 l_2 m_c m_{p2})}{l_1^2 l_2^2 m_c m_{p1} m_{p2}}$$

Ya que las matrices A_0 y A_1 tienen la misma dimensión pueden ser sumadas, teniendo como resultado el siguiente sistema:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}(2, 3) & 0 & \mathbf{A}(2, 5) & \mathbf{A}(2, 6) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}(4, 3) & 0 & \mathbf{A}(4, 5) & \mathbf{A}(4, 6) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}(6, 3) & 0 & \mathbf{A}(6, 5) & \mathbf{A}(6, 6) \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{m_c} \\ 0 \\ -\frac{1}{l_1 m_c} \\ 0 \\ \frac{1}{l_1 m_c} \end{bmatrix} u, \quad (\text{C.3})$$

siendo

$$\mathbf{A}(2, 3) = -\frac{g(m_{p1} + m_{p2})}{m_c},$$

$$\mathbf{A}(2, 5) = -\frac{k}{l_1 m_{p2} m_c},$$

$$\mathbf{A}(2, 6) = -\frac{b}{l_1 m_{p2} m_c},$$

$$\mathbf{A}(4, 3) = \frac{g(m_c + m_{p1} + m_{p2})}{l_1 m_c},$$

$$\mathbf{A}(4, 5) = \frac{k(m_c(l_1 + l_2) + l_2 m_{p1}) - g l_1 l_2 m_c m_{p2}^2}{l_1^2 l_2 m_c m_{p1} m_{p2}}$$

$$\mathbf{A}(4, 6) = \frac{b(l_1 m_c + l_2 m_c + l_2 m_{p1})}{l_1^2 l_2 m_c m_{p1} m_{p2}},$$

$$\mathbf{A}(6, 3) = -\frac{g(m_c + m_{p1} + m_{p2})}{l_1 m_c},$$

$$\mathbf{A}(6, 5) = \frac{g m_{p2}^2 (l_1 + l_2) + g l_1 m_{p1} m_{p2} - 2k}{l_1 l_2 m_{p1} m_{p2}} - k \left(\frac{m_{p1} + m_c}{l_1^2 m_{p2} m_{p1} m_c} + \frac{m_{p1} + m_{p2}}{l_2^2 m_{p1} m_{p2}^2} \right),$$

$$\mathbf{A}(6, 6) = -b \left(\frac{m_c + m_{p1}}{l_1^2 m_c m_{p1} m_{p2}} + \frac{m_{p1} + m_{p2}}{l_2^2 m_{p1} m_{p2}^2} + \frac{2}{l_1 l_2 m_{p1}} \right),$$

donde los estados del sistema son:

- x_1 = Posición del carro,
- x_2 = Velocidad del carro,
- x_3 = Posición del péndulo 1,
- x_4 = Velocidad del péndulo 1,
- x_5 = Posición del péndulo 2,
- x_6 = Velocidad del péndulo 2.

Apéndice D

Diseño de piezas para emular el efecto de flexibilidad.

Como ya se a mencionado anteriormente, a partir de un sistema péndulo doble invertido sobre el carro se plantea emular el comportamiento de un péndulo flexible.

Un péndulo flexible puede representarse como n número de péndulos con un coeficiente de elasticidad unidos entre si, teniendo como resultado un número n de dinámicas para dicho sistema. En este caso el número de péndulos con el que se trabaja es 2.

Para emular la flexibilidad, en el segundo péndulo se incorporarán dos resortes, teniendo también como resultado un retardo en las dinámicas del segundo péndulo respecto al control aplicado sobre el carro.

Para poder colocar los resortes fue necesario elaborar dos bases, una superior y otra inferior, las cuales se encargarán de unir el segundo péndulo a los resortes y a su vez a la unión que existe entre ambos péndulos, esto con la finalidad de que el segundo péndulo a pesar recibir alguna fuerza externa siempre se mantenga vertical respecto al primero péndulo, ya que este es el comportamiento que tienen los péndulos flexibles.

A continuación se presenta en la siguiente Figura [D.1](#) un dibujo de las piezas y el ensamblaje de lo anteriormente mencionado, así como las medidas.

- La pieza 1, es una escuadra de aluminio, el material se escogió debido a que se necesitaba que fuera duro, pero a su vez ligero, para no afectar los parámetros del

sistema. Son las escuadras las que conectan los resortes con la base del segundo péndulo.

- La pieza 3, es una base superior circular de Nylamind, este material se caracteriza por ser ligero y maleable. Esta pieza conecta el punto medio del péndulo con los resortes.

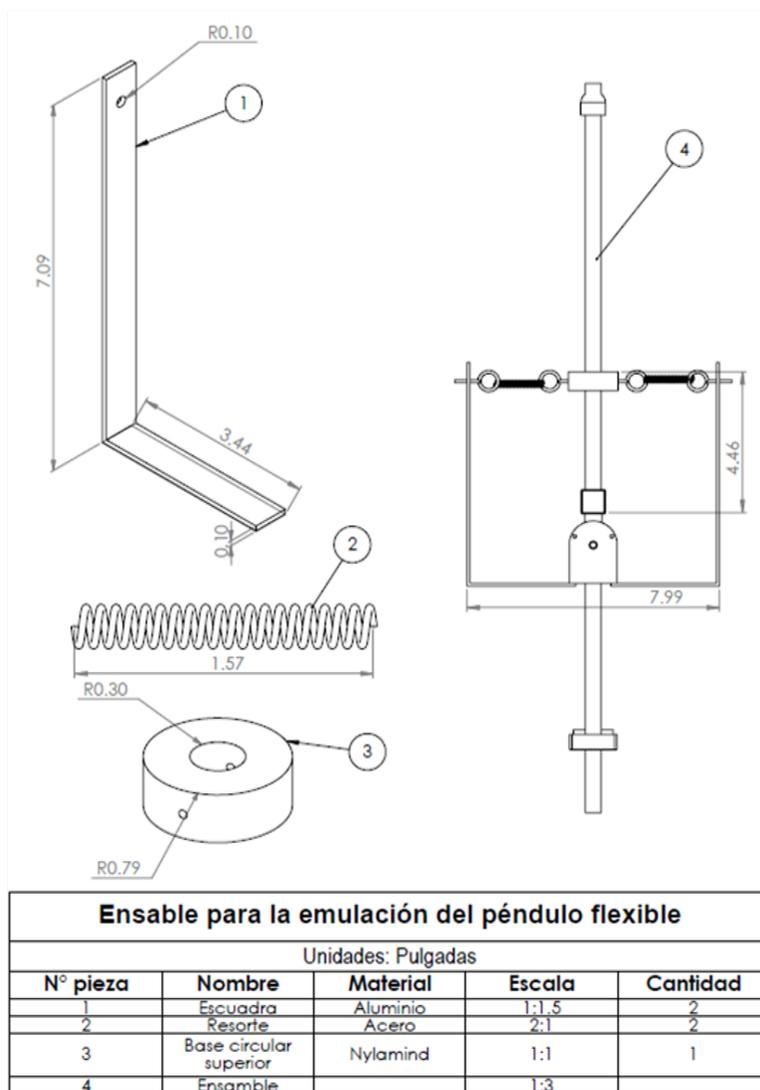


Figura D.1: Dibujo de las piezas para el péndulo flexible.

En la Figura D.2 se presenta el CAD (Diseño asistido por computadora) hecho en SolidWorks, el ensamble final, así como en la Figura D.3 una vista isométrica del nuevo sistema. Mediante este nuevo sistema, es posible aproximarse al modelo matemático de un péndulo flexible.

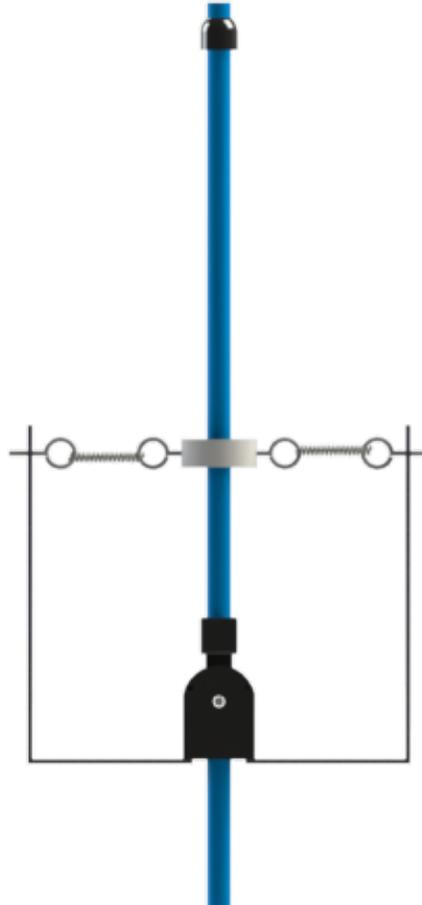


Figura D.2: Ensamble final de la estructura para el péndulo flexible.



Figura D.3: Vista isométrica del sistema.