



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE HIDALGO



INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN TECNOLOGÍAS DE INFORMACIÓN Y SISTEMAS

MAESTRÍA EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

ANÁLISIS DE BIFURCACIONES EN SISTEMAS CON RETARDO APLICADO A
SISTEMAS FINANCIEROS Y BIOTECNOLÓGICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN
CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

PRESENTA:

EDUARDO ALVARADO SANTOS

ASESOR:

DR. RAÚL VILLAFUERTE SEGURA

DR. BENJAMÍN A. ITZÁ ORTIZ

PACHUCA HGO., MÉXICO 20 DE SEPTIEMBRE DE 2019



Eduardo Alvarado Santos

Análisis de bifurcaciones en
sistemas con retardo aplicado
a sistemas financieros y
biotecnológicos

*El presente trabajo, fruto del esfuerzo de dos años,
está dedicado a mis padres Eduardo y M. Estela,
a mi pareja Marivel, a mi hermano Ricardo y
a mis familiares y amigos quienes con su amor,
paciencia y comprensión, me han dado los medios
para concluir de manera exitosa todos mis proyectos.
Por todo eso y mucho más, gracias.*

Gracias a

CONACYT por la beca de Maestría
otorgada durante el periodo
Agosto 2017 - Junio 2019, con CVU
851349

CITIS-UAEH, por la formación
académica brindada durante el
posgrado y el apoyo para la
realización de la presente memoria.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias al apoyo y asesoramiento de múltiples personas a las que siempre estaré agradecido.

A mis directores de tesis, Dr. Raúl Villafuerte Segura y Dr. Benjamín A. Itzá Ortiz, quienes con la enseñanza de sus valiosos conocimientos hicieron que pueda crecer día a día como profesional, gracias por paciencia, dedicación apoyo incondicional y amistad.

Al Dr. Pablo A. López Pérez, por su ayuda en la interpretación del modelo del bioreactor, así como por brindarnos los datos experimentales para validar nuestro modelo.

Al cuerpo académico de la maestría, por su apoyo y confianza, quienes con mucha paciencia me ayudaron en mi formación académica.

A mis padres, por todo el apoyo, comprensión y cariño, quienes en todo momento han estado apoyándome e impulsándome a ser cada día mejor, gracias por inculcar en mi el ejemplo de esfuerzo y valentía, de no temer a las adversidades porque Dios esta siempre con migo. Es un orgullo y un privilegio ser su hijo, son los mejores padres.

A Mari, quien siempre me brinda su apoyo, comprensión y cariño, gracias por todo, te amo.

A mi hermano por se un gran amigo y compañero por siempre ayudarme y apoyarme en todo momento te quiero bro.

A mis compañeros Benjamín, Rodrigo, Omar y J. Carlos, por su aliento y ayuda en todo momento.

Finalmente quiero agradecer a todos mis amigos y familiares por todo su apoyo comprensión y cariño durante todo este tiempo.

Resumen

Es bien sabido que los retardos aparecen frecuentemente en aplicaciones de la vida real, por lo cual, el obtener condiciones de estabilidad sobre esta clase de sistemas es de suma importancia. Actualmente, existen diversos métodos que permiten determinar condiciones de estabilidad para sistemas con retardos, tanto en el marco frecuencia como en el marco temporal. Sin embargo, los métodos temporales suelen proporcionar condiciones conservadoras, en contraste a los métodos frecuenciales. No obstante, los métodos frecuenciales dificultan el análisis cuando el sistema es de orden relativamente grande, mayor a tres; y/o el sistema es no lineal. En el presente trabajo de investigación se propone un estudio analítico mediante el empleo de bifurcaciones de Hopf para determinar parámetros críticos en una clase de sistemas no lineales con retardos que coadyuven a establecer condiciones de estabilidad y ciclos límite cuando los métodos geométricos son limitados o complejos. Además, este análisis conlleva a la obtención de condiciones de estabilidad dependientes e independientes del retardo para esta clase de sistemas. Para fines ilustrativos de los resultados teóricos propuesto aquí, se ejemplifica la implementación sobre dos sistemas no lineales de interés: un sistema financiero conocido como duopolio de Cournot de orden 4 y en un sistema biológico denominado bioreactor de orden fraccionario.

Abstract

In this manuscript an analysis to determine parametric conditions of the bifurcations of a class non-linear time-delay systems is presented. This analysis also allows to determine delay-dependent and delay-independent stability conditions. Which appear frequently in applications on real life, therefore, obtaining stability conditions of this class of systems is very important. At present, there are methods that allow to determine the stability in this class of systems, both in the frame of the frequency and in the time frame. However, the temporary framework usually provide conservative conditions, in contrast to the methods of the frequency framework. Nevertheless, the frequency methods make analysis difficult when the system is of a large order. In this research work, an analytical study is proposed through the use of Hopf bifurcations, to determine critical parameters of time delay system such that to establish stability conditions when the geometric methods are limited or complex. The theoretical results are implemented on a financial system known as Cournot duopoly of fourth-order and a fractional-order biological system for illustrative purposes.

Acronimos

ED: Ecuaciones Diferenciales.

EDO: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

EDF: Ecuaciones Diferenciales Funcionales.

EDFR: Ecuaciones Diferenciales Funcionales Retardadas.

EDFN: Ecuaciones Diferenciales Funcionales Neutrales.

EC: Ecuación Característica.

SLIT: Sistema Lineal Invariante en el Tiempo.

BSN: Bifurcación Silla-Nodo.

BT: Bifurcación Tridente.

BH: Bifurcación de Hopf.

BHSC: Bifurcación de Hopf Subcrítica.

BHSP: Bifurcación de Hopf Supercrítica.

Índice general

Agradecimientos	V
Resumen	VII
Abstract	IX
Índice general	XIII
Índice de figuras	XV
Índice de tablas	XVII
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Planteamiento del problema	5
1.3. Justificación	5
1.4. Objetivos	6
1.4.1. Objetivo general	6
1.4.2. Objetivos específicos	6
1.5. Hipótesis	6
1.6. Metodología	7
1.7. Organización de la tesis	8
2. Resultados Preliminares	9
2.1. Sistemas con retardo	9
2.1.1. Ecuaciones Diferenciales Funcionales	10
2.1.2. Clasificación de Sistemas con Retardos	11
2.2. Estabilidad	13
2.3. Método de D-particiones	14
2.4. Bifurcaciones	15
2.4.1. Bifurcación Silla-Nodo	16
2.4.2. Bifurcación tridente	20
2.4.3. Bifurcación de Hopf	23
3. Análisis de estabilidad y puntos de bifurcación	27
3.1. Algoritmo para encontrar puntos de bifurcación	30

3.2. Duopolio de Cournot	31
3.2.1. Modelo matemático	31
3.2.2. Análisis	36
3.3. Bioreactor	41
3.3.1. Modelo matemático	43
3.3.2. Análisis	44
4. Simulaciones y resultados experimentales	47
4.1. Duopolio de Cournot	47
4.1.1. Estabilidad dependiente del retardo	47
4.1.2. Estabilidad independiente del retardo	52
4.2. Biorreactor	56
4.2.1. Estabilidad dependiente del retardo	56
4.2.2. Resultados experimentales	60
5. Conclusiones y trabajo futuro	61
5.1. Conclusiones	61
5.2. Trabajo futuro	63
Bibliografía	65
A. Ejemplo canónico de la bifurcación de Hopf	71
B. Términos de $P(\omega)$	79

Índice de figuras

2.1.	Variación del parámetro r del sistema $\dot{x} = r - x^2$, [1].	18
2.2.	Vectores de campo para la variación de r , [1].	18
2.3.	Campos vectoriales r vs x	19
2.4.	Diagrama de bifurcaciones.	20
2.5.	Diagrama de bifurcación (tipo tridente)	23
3.1.	gráfica $f(\mu) = \mu^2 - 6\mu + 1$	39
3.2.	Esquema de un Bioreactor	43
4.1.	Ubicación de las raíces de $P(\omega)$	48
4.2.	Ubicación de las raíces de $q(\lambda, \tau)$	49
4.3.	Respuesta del sistema lineal.	50
4.4.	Respuesta del sistema no lineal.	50
4.5.	Órbitas periódicas.	51
4.6.	Ubicación de las raíces de $P(\omega)$	52
4.7.	Ubicación de las raíces de $q(\lambda, \tau)$	54
4.8.	Respuesta del sistema lineal.	55
4.9.	Respuesta del sistema no lineal.	55
4.10.	Ubicación de las raíces de $q(\lambda, \tau)$	57
4.11.	Respuesta del sistema no lineal.	57
4.12.	Diagrama de fase $\tau = 0$	58
4.13.	Diagrama de fase $\tau = 2$	59
4.14.	Diagrama de fase $\tau^* = 3.6666$	59
4.15.	Aproximación de resultados experimentales.	60
A.1.	Bifurcación de Hopf subcrítica en el espacio (x, y, μ)	74
A.2.	Diagrama de una bifurcación de Hopf subcrítica	75
A.3.	Bifurcación de Hopf supercrítica en el espacio (x, y, μ)	75
A.4.	Diagrama de una bifurcación supercrítica de Hopf	75
A.5.	Origen estable. No hay ciclo límite	76
A.6.	Origen estable. No existe ciclo límite	77

A.7. Origen inestable. Existe ciclo límite estable	77
A.8. Origen estable. Existe ciclo límite inestable	78

Índice de tablas

3.1. Minimización de los parámetros a_i 41

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se dan a conocer los antecedentes acerca de la teoría empleada en el presente trabajo de investigación, así como el estado del arte. Además, se establece el planteamiento del problema, la justificación, los objetivos, la hipótesis, los alcances y las limitaciones de la investigación.

1.1. Antecedentes

La teoría de bifurcaciones es un campo matemático centrado en el estudio de los cambios en la estructura cualitativa o topológica del comportamiento de un conjunto de ecuaciones, la cual tiene importancia práctica en ingeniería [1], física [1], química [2], economía [25], biología [2], entre otros. Una bifurcación se da cuando ocurre una pequeña variación en los valores de los parámetros de un sistema no lineal que causa un cambio cualitativo o topológico, los parámetros que cambia son conocidos como parámetros de bifurcación. En algunos sistemas dinámicos, cuando se produce una bifurcación, consecuentemente ocurre la aparición de caos, o viceversa, el caos es la denominación popular de la rama de las matemáticas que trata ciertos tipos de comportamientos impredecibles de los sistemas dinámicos.

La teoría de bifurcaciones estudia el comportamiento de familias de soluciones de ecuaciones diferenciales. Las bifurcaciones pueden producirse tanto en sistemas continuos o discretos, el concepto de bifurcación fue introducido por primera vez por el francés Jules Henri Poincaré en 1885, [3]. Posteriormente el matemático austríaco Eberhard Hopf en 1942 brinda las condiciones necesarias para la aparición de bifurcaciones con más de dos parámetros de bifurcación, [4]. Desde entonces, una gran cantidad de literatura sobre generalizaciones y problemas relacionados se han desarrollado. Así como la clasificación de los tipos de bifurcación, dentro de lo cuales se pueden mencionar: la bifurcación de silla-nodo, la bifurcación tridente y la bifurcación de Hopf [5]. El

presente trabajo se centra en el estudio bifurcaciones en una clase de sistemas no lineales con retardo.

La bifurcación de Hopf se presenta cuando se varía el parámetro de bifurcación, esto produce un cambio en la estabilidad del punto crítico estudiado, esencialmente con este tipo de bifurcación se produce la aparición de ciclos límite en las cercanías del punto de equilibrio del sistema. Las bifurcaciones de Hopf (también conocidas como bifurcación de Poicaré - Andronov - Hopf) son objeto de estudio en múltiples áreas. Existe una gran cantidad de literatura que aborda este tema atacando problemas y generando muchos más, sin embargo es poco lo que se ha investigado sobre bifurcaciones de Hopf en sistemas con retardos.

Los sistemas con retardos, pertenecen a la clase de ecuaciones diferenciales funcionales (EDF) que son de dimensión infinita. Los cuales aparecen en sistemas que tienen tiempos de procesamiento considerables (procesamiento del control o tratamiento de señales), retardos en el transporte de variables, retardos en las mediciones o intrínsecos del sistema. Los retardos aparecen en sistemas como: columnas de destilación [6], procesos de secado de papel [7], plantas de reciclado [8], procesos termicos [9], sistemas teleoperados [10], sistemas financieros [11], sistemas biológicos [12], entre otros.

En 1978, Tsoi desarrolló la teoría del sistema algebraico de ecuaciones diferenciales con retardo, [13]. En 1996, Watanabe et al. publicaron un artículo en el cual se proponen algunos criterios para aplicar un control robusto en sistemas con retardo y una aplicación del retrado, [14]. En 1997, Niculescu et al. desarrollaron condiciones para garantizar la estabilidad y estabilidad robusta de los sistemas con retardo, [15]. En 1997, Loiseau et al. proponen técnicas para relizar el análisis en sistemas con reardos, [16]. Actualmente existen una gran cantidad de bibliografía dedicadas a este campo de investigación entre las cuales, el lector puede consultar trabajos como [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24].

El análisis de bifurcaciones en sistemas con retados es un tema poco explorado, sin embargo existe bibliografía aplicada a economía [25], finanzas [26], biología [2], entre otros. Dicho análisis se enfoca en mostrar como una ecuación pierde o gana estabilidad al variar el retardo (parámetro de bifurcación), por lo cual la bifurcación de Hopf ocurre cuando el retardo, toma un valor crítico [27].

Un gran número de temas en economía teórica se formalizan matemáticamente como sistemas dinámicos (no lineales) y ecuaciones diferenciales. Ejemplos notables de esta clase de problemas son los modelos de desequilibrio de los ciclos económicos, los modelos evolutivos de los mercados financieros, modelos que se centran en el estudio del comportamiento dinámico de las empresas en los mercados mundiales.

Los modelos dinámicos de duopolio han estado recibiendo una atención creciente en los últimos años, ya que el comportamiento de dichos modelos tiene un papel relevante, ya sea por las

consecuencias económicas en el marco estratégico o por las propiedades dinámicas de los sistemas que describen sus evoluciones. Razón por la cual, en el presente trabajo, se propone la aplicación la teoría desarrollada sobre un modelo dinámico conocido como duopolio de Cournot.

El análisis de este tipo de modelos provenientes de la teoría de juegos, consiste en la caracterización del comportamiento del sistema cuando los jugadores tienen el mismo conocimiento del mercado y toman sus decisiones siguiendo la misma regla (heurística). Solo para citar algunas, Puu [28] estudió la dinámica de dos empresas competidoras con función de la demanda y el costo de producción unitario constante en un duopolio de Cournot, donde cada empresa toma su decisión de producción basada en la mejor función de respuesta, además tiene un conocimiento perfecto de la demanda del mercado y asumen que el otro jugador no cambia sus decisiones de producción. Mostró que la teoría del duopolio de Cournot es capaz de producir dinámicas caóticas. Bischi y Naimzada en [29] consideraron un juego dinámico de duopolio de Cournot, caracterizado por firmas limitadamente racionales con respecto a la demanda del mercado, donde el mecanismo de ajuste se basa en el pseudo gradiente de las funciones de ganancia, es decir, cada jugador decide si aumentará ó disminuirá su producción futura si obtiene beneficios marginales positivos. Con este tipo de mecanismo de ajuste local, los dos competidores no están obligados a poseer un conocimiento completo de las funciones de demanda y costo del mercado. Bischi y Kopel en [30] analizan un juego de duopolio de Cournot de tiempo discreto no lineal, donde los jugadores tienen expectativas de adaptación y el comportamiento a largo plazo se caracteriza por la estabilidad múltiple; en tal contexto, el proceso dinámico se vuelve dependiente de la trayectoria, es decir, qué equilibrio se elige a largo plazo depende de las creencias iniciales de los jugadores.

En sistemas biológicos (bioreactores) existe una gran cantidad de problemáticas que generan una gran necesidad de minimizar el costo de operación y maximizar la producción en este tipo de sistemas. En las últimas décadas se ha generado una gran cantidad de literatura sobre análisis de sistemas utilizados para modelar la dinámica de bioreactores en la producción de sustancias bioquímicas derivadas de organismos [33].

Debido a que estos sistemas exhiben un comportamiento no-lineal a causa de su complejidad y a su interacción con el medio ambiente (perturbaciones), sin contar con la aparición de multiplicidades en estados estacionarios y las bifurcaciones, que afectan los rendimientos de producción, el control de bioreactores se ha convertido en una tarea un tanto complicada.

La producción de etanol a base de sustratos y biomasa ha sido una pieza central en la generación de biocombustibles, sin embargo este proceso no se salva de los problemas antes mencionados.

Las oscilaciones en la concentración de biomasa, sustrato y producto (etanol) es un fenómeno común que se observa en los cultivos [31], Este comportamiento espontáneo se presenta, incluso, cuando las condiciones en la alimentación y los parámetros físicos como temperatura, velocidad

de agitación, y pH, entre otros, se mantienen constantes [32].

Durante el comportamiento oscilatorio se distinguen períodos de tiempo en los cuales hay una disminución en la productividad del etanol y se presenta una alta cantidad de sustrato residual. Esto indica una pérdida de sustrato, que es inaceptable para las fermentaciones continuas a escala industrial debido al alto gasto que representa el costo del sustrato en la producción global de etanol [33]. Por ello, se ha considerado importante investigar los factores que causan dicho fenómeno, con el fin de sugerir estrategias para eliminarlo o controlarlo, o determinar si ofrece algún beneficio. En contraste durante últimos años el comportamiento oscilatorio, ha llevado a generar estrategias nuevas de diseño de control para lograr o mantener las células, sustratos y concentraciones de productos a niveles deseados.

Por ello la importancia de saber cuando ocurren este tipo de comportamientos oscilatorios, con fin de prevenir algún comportamiento no deseado o de ser posible utilizar dicho comportamiento a favor para la estabilización del bioreactor.

1.2. Planteamiento del problema

El estudio de bifurcaciones en sistemas con retardos es un tema poco explorado, por esa razón el presente trabajo se enfoca a analizar un sistema no lineal con un retardo en la entrada del tipo

$$\dot{x}(t) = F(x(t))x(t) + G(x(t))x(t - \tau), \quad (1.1)$$

$$\phi(\theta) = x(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0],$$

donde $F(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ es una función matricial tal que $F(x(t))x(t)$ es un campo vectorial Lipschitz, $G(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ es una función matricial, $0 < \tau \in \mathbb{R}^+$ es el retardo, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema y $\phi \in \mathbb{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ es la función inicial o condición inicial, donde $\mathbb{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ es el espacio de Banach de funciones continuas en el intervalo $[-\tau, 0]$, con la norma siguiente

$$\|\phi\|_{\tau} := \max_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\phi(\theta)\|_2.$$

Empleando la metodología de bifurcaciones de Hopf y bajo la variación de valores críticos del retardo se quieren contestar las preguntas siguientes, ¿El retardo puede ser visto como un parámetro crítico para la aparición de ciclos límite en sistemas de la forma (1.1)? ¿Qué condiciones se pueden establecer para que un sistema del tipo (1.1) pierda o gane estabilidad?

1.3. Justificación

En muchos sistemas de la vida real aparecen los retardos, sin embargo son pocos los resultados que garantizan la estabilidad ante la presencia de estos, el análisis de bifurcaciones de Hopf nos servirá para establecer valores bajo variaciones paramétricas para determinar estabilidad o inestabilidad y como consecuencia directa el diseño y la sintonización de leyes de control. A este tipo de leyes se les denominada controladores de oscilaciones alrededor de la bifurcación.

1.4. Objetivos

A continuación se postulan tanto el objetivo general como los objetivos específicos para dar solución del problema planteado.

1.4.1. Objetivo general

Analizar una clase de sistemas no lineales con retardos empleando criterios para determinar valores críticos en los parámetros del sistema con el fin de obtener ciclos límite, bifurcación de Hopf y condiciones de estabilidad dependientes e independientes del retardo.

1.4.2. Objetivos específicos

- Realizar una búsqueda bibliográfica de los antecedentes sobre sistemas con retardo y bifurcaciones de Hopf, mediante el empleo de bases de datos electrónicas y literatura aceptada por la comunidad científica internacional para construir el estado del arte, alcances y aportaciones del presente trabajo.
- Realizar la recopilación de conceptos y definiciones, mediante el estudio y síntesis de información relacionadas con el tópico a estudiar empleando la bibliografía anteriormente encontrada para hacer el desarrollo del marco teórico.
- Determinar criterios para la existencia de valores críticos de estabilidad para sistemas no lineales con retardos empleando conceptos de estabilidad alrededor de un punto de operación en el marco frecuencial.
- Obtener condiciones paramétricas de estabilidad dependiente e independiente del retardo para sistemas no lineales con retardos mediante la variación de retardo.
- Ejemplificar los resultados obtenidos en el sistema financiero conocido como duopolo de Cournot y en un sistema biológico de orden fraccionario para determinar la efectividad y diversidad de los resultados postulados.

1.5. Hipótesis

El empleo de bifurcaciones de Hopf ayudarán a obtener condiciones paramétricas para determinar algunos criterios de estabilidad dependiente e independiente del retardo en sistemas no lineales con retardos.

1.6. Metodología

Con el propósito de establecer el estatus de la presente investigación, se realizó una búsqueda bibliográfica detallada sobre los antecedentes acerca de los sistemas con retardo [34] y bifurcaciones de Hopf [35], mediante el empleo de fuentes aceptadas por la comunidad científica .

Para el analizar de estabilidad de sistemas con retardo se emplea el concepto de Hurwhitz, mientras que para la obtención de valores críticos de los parámetros del sistema se utiliza el método de D-particiones.

Una vez realizado este análisis se buscarán criterios mediante la implementación de la teoría de bifurcaciones para poder encontrar los puntos críticos, ciclos límite y bifurcaciones de Hopf.

Se aplicará la teoría desarrollada al duopolio de Cournot y a un bioreactor, esto con el fin de validar e ilustrar la diversidad de los resultados teóricos. Mediante la simulación de dichos sistemas se obtendrán de manera gráfica la respuesta del sistema y se observará como afecta el retardo a la estabilidad del sistema, se obtendrán los diagramas de fase y podremos observar cuando aparecen las órbitas periódicas. Para esto se empleará Software de análisis matemático como son Matlab y Maple.

1.7. Organización de la tesis

A lo largo de la investigación se abordarán diversos temas para la conclusión del trabajo. Dentro de lo planeado se considera lo siguiente.

En Capítulo 1 se da una breve introducción sobre el tema a tratar en esta trabajo de investigación, en el cual se presentan los antecedentes en el estado del arte, el planteamiento del problema, la justificación, los objetivos, la hipótesis, la metodología y la organización de este trabajo.

En Capítulo 2 se presentan los resultados preliminares en el cual se dan las definiciones y teorías utilizadas para el desarrollo de esta investigación como son: la definición de los sistemas con retardo y su clasificación, del mismo modo se presenta una breve introducción sobre bifurcaciones así como la clasificación de estas, entre las cuales se presentan las siguientes: la bifurcación silla-nodo, la bifurcación tridente y la bifurcación de Hopf. En cada una de estas secciones se presenta la definición formal de cada bifurcación y su teorema, además se da un pequeño ejemplo de cada teorema.

En el Capítulo 3 se establece un algoritmo para encontrar los puntos críticos en los cuales ocurre una bifurcación, también se definen los modelos dinámicos del duopolio de Cournot y el de un sistema biológico los cuales son ocupados para realizar el análisis que propone el algoritmo planteado en la primera sección de este capítulo, también se muestran los resultados principales los cuales estarán dados por los resultados obtenidos a lo largo de esta investigación como pueden ser criterios y condiciones para la existencia de valores críticos de estabilidad.

El Capítulo 4 muestra la aplicación de los resultados, esto será mediante simulaciones de sistemas con retardos en la entrada, con dichos resultados se corroborará que todo el planteamiento teórico es correcto y que existen los ciclos límite en los puntos críticos que se propusieron teóricamente.

Finalmente en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones y los trabajos futuros. Por último, se muestra la bibliografía utilizada durante este trabajo de investigación.

Capítulo 2

Resultados Preliminares

2.1. Sistemas con retardo

En esta sección se establece una definición formal y su clasificación en base a la naturaleza y origen del retardo. Bien conocido es que la respuesta de un sistema dinámico se puede caracterizar mediante ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de la siguiente forma

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (2.1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa las variables de estado del sistema. Por tanto, mediante el modelo del sistema la evolución futura de las variables de estado a partir de cierto instante t_0 (conocido como tiempo inicial) se puede determinar a partir del valor actual del estado $x(t_0)$.

No obstante, el comportamiento de ciertos sistemas dinámicos no pueden ser modelados a partir de EDO. Concretamente, existen ciertos sistemas en los que la evolución futura de las variables de estado no solamente depende del valor actual del estado $x(t_0)$ sino de los valores pasados dentro de una cierta ventana temporal $x(\theta)$, $t_0 - \tau \leq \theta \leq t_0$, $\tau > 0$. Este tipo de sistemas son conocidos en la literatura como sistemas hereditarios o sistemas con retardo [34].

2.1.1. Ecuaciones Diferenciales Funcionales

Definición 2.1 [36] Las ecuaciones diferenciales funcionales (EDF) se distinguen básicamente de las ecuaciones diferenciales ordinarias en que al menos uno de los argumentos de la ecuación no depende directamente del tiempo t , sino a través de una cierta función $g(t)$ de modo que

$$\dot{x}(t) = f(t, x(g(t))). \quad (2.2)$$

El comportamiento de los sistemas con retardos temporales se pueden describir a partir de EDF [37]. Es fácil ver, por tanto, que siempre que el retardo sea constante, la función $g(t)$ es lineal en t con pendiente 1. Por ejemplo, para un cierto sistema con retardo τ , la dinámica viene gobernada por

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t - \tau)), \quad (2.3)$$

donde la condición inicial del estado $x(t)$ en cualquier instante de tiempo arbitrario se define a partir de la evolución del estado en la ventana temporal $t - \tau \leq t < t$ como

$$x(t + \theta) = \phi(\theta); \quad -\tau \leq \theta \leq 0, \quad (2.4)$$

condición a partir de la cual se puede obtener la evolución futura del estado desde el instante t , siempre que la parte derecha de la ecuación (2.4) sea continua en todos sus argumentos, y Lipschitz (cumple con los principios de existencia y unicidad), de forma análoga a las EDO con las condiciones iniciales definidas en un instante puntual.

Clasificación EDF de sistemas con retardos

En términos generales, la ecuación diferencial funcional de un sistema con retardos puede escribirse como

$$x^m(t) = f(t, x^{(m_1)}(t - \tau_1(t)), x^{(m_2)}(t), \dots, x^{(m_k)}(t - \tau_k(t))). \quad (2.5)$$

Dependiendo de si el argumento con mayor grado en la derivada contiene o no retardos cabe distinguir los siguientes casos

- Ecuaciones diferenciales funcionales retardadas (EDFR): Cuando el término de mayor grado en la derivada (m) se sitúa en el término libre de retardo ($m > \max(m_1, m_2, \dots, m_k)$)
- Ecuaciones diferenciales funcionales neutrales (EDFN): Cuando el término de mayor grado en la derivada se sitúa en el término con retardo de modo que ($m = \max(m_1, m_2, \dots, m_k)$).

Existencia, unicidad y resolución de EDF: Análogamente al caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, resulta fundamental probar la existencia de una solución que, además, sea

unívoca. En [34] (Teorema 1.2) se prueba que en términos generales las ecuaciones diferenciales funcionales tienen solución única. Para el caso particular de la ecuación diferencial retardada (EDFR), con retardo constante, en [38] se propone un método denominado paso-a-paso. El siguiente ejemplo ilustra este método

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t - \tau) \\ x(t + \theta) &= K \in \mathbb{R}; \\ -\tau &\leq \theta \leq 0. \end{aligned}$$

Tal y como se ha visto, en este tipo de ecuaciones la solución de $x(t)$ es única a partir de la condición inicial definida en la ventana histórica $[t - \tau, t]$. De ello, sobre el ejemplo se desprende que el valor de $x(t)$ entre $0 \leq t \leq \tau$ es $x(t) = K - Kt$, solución que satisface la ecuación en este intervalo. En general, el procedimiento se repite en cada uno de los intervalos definidos de forma análoga obteniendo la solución:

$$x(t) = \begin{cases} K - Kt, & 0 \leq t \leq \tau; \\ (K - K\frac{\tau^2}{2}) - Kt + K\frac{t^2}{2}, & \tau \leq t \leq 2\tau; \\ \dots & \dots \end{cases}$$

2.1.2. Clasificación de Sistemas con Retardos

Según el argumento de mayor grado en su derivada:

- Sistemas Retardados [24] Cuando la dinámica del sistema se puede modelar a partir de una EDFR.
- Sistemas Neutrales [39] Cuando la dinámica del sistema se puede modelar a partir de una EDFN.

Según el número de retardos:

- Sistemas con retardo único [40]: Sistemas en los que solamente aparece un único retardo diferente:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \tag{2.6}$$

- Sistema con múltiples retardos [40]: Sistemas en los que aparece más de un retardo

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m)). \quad (2.7)$$

En el caso particular de que todos los retardos $\tau_i(t), 1 \leq i \leq m$ sean múltiplos enteros de un cierto retardo base τ , se denomina retraso conmensurado (commensurate delays)

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - d_1\tau), \dots, x(t - d_m\tau), \quad (2.8)$$

$$d_i \in \mathbb{N}+, 1 \leq i \leq m.$$

Según el tipo de retardo:

- Retardo puntual [40]: Cuando el retardo afecta al estado en valores puntuales de tiempo. Cualquiera de los casos expuestos anteriormente son retardos puntuales.
- Retardo distribuido [40]: Este tipo de retardo no tiene un valor puntual sino que su valor se encuentra repartido dentro de una ventana temporal:

$$\dot{x}(t) = f \left(t, g \left(x \left(\int_0^{-\tau} x(t + \theta) d\theta \right) \right) \right) \quad (2.9)$$

Según la ubicación del retardo:

- Retardos en la entrada: Tiene lugar cuando existe un retardo entre el instante de generación de la acción de control y el instante en que ésta se aplica a la planta. Ejemplos típicos se dan en sistemas en los que existe transporte de materia o energía o en sistemas de control distribuidos donde el controlador y el actuador se encuentran físicamente separados.
- Retardos en la salida: Tiene lugar cuando existe un retardo entre el instante en que el sensor mide la salida y el instante de cálculo de la acción de control. Ejemplos típicos se dan en sistemas en los que existe transporte de materia o energía o en sistemas de control distribuidos donde el sensor y el controlador se encuentran físicamente separados.
- Retardos en el estado: Afecta al estado interno del proceso. Por ejemplo, los sistemas físicos en los que existen lazos cerrados internos en los que hay recirculación de materia/energía con el correspondiente retardo interno de propagación.

En el presente trabajo, se analizarán sistemas del tipo (2.2) de la forma siguiente.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = G(\vec{x}, \vec{x}_\tau), \quad (2.10)$$

donde $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $\vec{x}_\tau(t) = (x_1(t - \tau), x_2(t - \tau), \dots, x_n(t - \tau))$, $G(\vec{x}, \vec{x}_\tau) = (g_1(\vec{x}, \vec{x}_\tau), g_2(\vec{x}, \vec{x}_\tau), \dots, g_n(\vec{x}, \vec{x}_\tau))$.

2.2. Estabilidad

La estabilidad es una propiedad básica para cualquier sistema de control diseñado para satisfacer unas especificaciones deseadas. Esto es, todo sistema de control, aparte de otras características, ha de ser siempre estable por lo que el estudio de la estabilidad constituye una parte importante tanto del diseño como del análisis de los sistemas de control.

La estabilidad de los sistemas se puede estudiar desde dos enfoques diferentes: la estabilidad absoluta y la estabilidad relativa. La estabilidad absoluta es de naturaleza cualitativa. Se trata de responder simplemente sí o no a la pregunta de si el sistema es estable. Mientras que la estabilidad relativa, es de naturaleza cuantitativa, se trata de averiguar en qué grado el sistema es estable. Aunque esta última es más difícil de resolver que la primera, su solución da, evidentemente, más información sobre el sistema y es un puente entre la información dada por el estudio de la estabilidad absoluta y la dada por el estudio de la respuesta temporal total del sistema. El estudio de la estabilidad relativa de un sistema de control supone muchas veces su análisis en profundidad, y con ello obtener información no solo de su estabilidad sino del comportamiento temporal del mismo ante diversas señales de entrada.

A finales de 1800, A. Hurwitz y J. Routh publicaron un método para el análisis de la estabilidad de sistemas a partir de su ecuación característica (EC), el método puede ser estudiado en [41].

Considere un sistema lineal con retardos e invariante en el tiempo (SLIT) de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) \quad (2.11)$$

es estable si ante una entrada acotada responde con una salida acotada. La estabilidad de un sistema (2.11) es determinada por la ubicación de las raíces en el plano complejo de su correspondiente EC,

$$Q(s) = \det\{A + e^{-\lambda\tau}B - \lambda I\} = 0, \quad (2.12)$$

donde I es la matriz identidad de dimensiones adecuadas y $\det\{\}$ es el determinante.

Definición 2.2 *Un sistema de la forma (2.11) es estable si y sólo si todas las raíces de (2.12) se encuentran del lado izquierdo del plano complejo.*

Estabilidad Un sistema es estable si y sólo si todas las raíces de (2.12) se encuentran del lado izquierdo del plano complejo.

Inestabilidad Para que un sistema sea inestable basta con que exista alguno cambio de signo en alguno de los términos de (2.12).

Estabilidad Marginal Si alguna raíz se ubica en el eje imaginario, se obtiene un sistema con estabilidad marginal, es decir, un sistema que se halla en el límite entre la estabilidad y la inestabilidad.

Si se quiere saber si un sistema es estable o no, basta con analizar las raíces de la ecuación característica.

2.3. Método de D-particiones

Las D-particiones son fronteras que dividen un mapa de parámetros en regiones de estabilidad e inestabilidad. Los parámetros que se encuentran sobre estas fronteras, hacen que un sistema tenga algunos polos sobre el eje imaginario y que ante alguna variación el sistema pueda pasar de estable a inestable o viceversa. La estabilidad de las zonas no se puede determinar a simple vista, para ello es necesario tomar un punto de alguna zona y mediante otro método observar en donde se encuentran sus polos, si el sistema es estable o inestable con estos parámetros, cualquier otro punto de la misma zona tendrá el mismo resultado, esto debido a la propiedad de continuidad las raíces con respecto a los parámetros. Para trazar un mapa de parámetros, es necesario conocer el cuasi-polinomio característico del sistema mediante la transformada de Laplace con condiciones iniciales igual a cero [42].

Algoritmo del método de D-particiones, [42].

- Obtener la EC del sistema lineal por analizar y elegir los parámetros a_1 y a_2 de la EC para los cuales se desea obtener valores críticos de estabilidad,

$$Q(\lambda, a_1, a_2) = 0. \quad (2.13)$$

- Determinar candidatos a ventanas de cruce de la EC (2.13) sobre el eje imaginario, para lo cual se evalúa $\lambda = 0$ y $\lambda = \pm i\omega$ en la EC y se obtienen ecuaciones paramétricas a partir de la sintetización de a_1 y a_2 de las expresiones $Q(0, a_1, a_2) = 0$, $\text{Re}\{Q(i\omega, a_1, a_2)\} = 0$ y $\text{Im}\{Q(i\omega, a_1, a_2)\} = 0$. Aquí, $\text{Re}\{Q\}$ y $\text{Im}\{Q\}$ son las parte real y la parte imaginaria de Q , respectivamente.
- La ventanas de cruce son puntos sobre el eje imaginario donde las raíces de (2.13) pueden cruzar del semi-plano izquierdo complejo al semi-plano derecho complejo, y viceversa.

- Determinar conjuntos D_1 y D_2 bajo los cuales las raíces de (2.13) cruzan del semi-plano izquierdo al semi-plano derecho complejo o viceversa, cuando $a_1 \in D_1$ y $a_2 \in D_2$.

2.4. Bifurcaciones

La teoría de bifurcaciones presenta un conjunto de técnicas para ecuaciones diferenciales no lineales. En este contexto ¿Qué es exactamente lo que se quiere decir con bifurcación? La bifurcación indica un cambio en las condiciones de funcionamiento que tiene un sistema no lineal cuando un parámetro es variado. El parámetro que cambia es conocido como parámetro de bifurcación. Un sistema dinámico no lineal puede presentar varios parámetros de bifurcación. En 1997 Loiseau et al, proponen técnicas para realizar el análisis en sistemas con retardos, [16]. Actualmente existen una gran cantidad de referencias dedicadas a este campo de investigación por ejemplo los trabajos [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24].

En esta sección, se analizan bifurcaciones locales de sistemas dinámicos continuos, en otras palabras son bifurcaciones que tienen lugar entorno a un punto fijo. Considere el siguiente sistema dinámico

$$\dot{x} = f(x, \mu), x \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^p, \quad (2.14)$$

donde f es una función de clase C^n en un conjunto abierto $G \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

El punto fijo (x_0, μ_0) es la solución trivial $f(x_0, \mu_0) = (0, 0)$, para no perder generalidad, tomando esto en cuenta nos podemos hacer las siguientes preguntas:

1. ¿El punto fijo es estable o inestable?
2. ¿Cómo se afecta la estabilidad del sistema cuando variamos el parámetro μ ?

La primera pregunta se resuelve obteniendo la matriz jacobiana $D_x f(x_0, \mu_0)$ del sistema en el punto fijo. Así, si el punto fijo es hiperbólico, es decir, no hay autovalores con parte real nula, entonces la estabilidad del punto (x_0, μ_0) viene dada por la ecuación lineal

$$\dot{\xi} = D_x f(x^*, \mu_0)\xi, \xi \in \mathbb{R}^n$$

Además si el punto fijo es hiperbólico, entonces el sistema es estrictamente estable en ese punto fijo. Con lo que variando ligeramente el parámetro μ , no cambia la naturaleza de la estabilidad del punto fijo.

Esto se puede aclarar un poco mas de las siguiente forma:

Sabemos que $f(x_0, \mu_0) = 0$, y que $D_x f(x_0, \mu_0)$ no tiene autovalores sobre el eje real, por que la matriz $D_x f(x_0, \mu_0)$ es invertible, luego por el teorema de la función implícita existe una única función $x(\mu)$, tal que $f(x(\mu), \mu) = 0$ para μ suficientemente cercano a μ_0 , con $x(\mu_0) = x_0$. Ahora bien por la continuidad de los autovalores con respecto a los parámetros, para μ suficientemente cercanos a μ_0 , la matriz jacobiana $D_x f(x_0, \mu_0)$ no tiene valores sobre el eje imaginario, con lo que para μ suficientemente cercanos a μ_0 , el punto fijo hiperbólico (x_0, μ_0) de (2.14) persiste y el tipo de estabilidad no cambia.

El problema surge cuando el punto fijo (x_0, μ_0) no es hiperbólico ya que en este caso para μ muy cercano a μ_0 (y para x cercanos a x_0), pueden ocurrir nuevos comportamientos. Así, puede ocurrir que los punto fijos desaparezcan, o que puedan obtenerse comportamientos periódicos, cuasiperiódicos o caóticos.

Las bifurcaciones surgen cuando la parte real de las raíces del sistema es nula . A continuación se establecen algunos conceptos sobre bifurcaciones y sus clasificación de manera mas detallada y precisa.

2.4.1. Bifurcación Silla-Nodo

Teorema de la bifurcación Silla-Nodo (BSN)

Definición 2.3 [43] *Una BSN es una bifurcación local o global de una ecuación diferencial ordinaria en la que dos puntos fijos (o equilibrios, o críticos) de un sistema dinámico chocan y se aniquilan entre ellos mismos. La frase bifurcación silla-nodo se utiliza con frecuencia en referencia a sistemas dinámicos continuos. En los sistemas discretos, la misma bifurcación tiene el nombre bifurcación de fold. Bifurcaciones silla-nodo son la forma genérica que el número de soluciones de equilibrio de un sistema dinámicos cambia cuando algún parámetro es variado.*

La BSN se puede considerar como el tipo de bifurcación más simple, en la cual hay un proceso de creación y destrucción de puntos fijos, si partimos de un sistema en cual no hay puntos fijos, a medida que variamos el parámetro pasamos de no tener ningún punto fijo a la aparición de dos, uno estable y otro inestable, o viceversa pasamos de tener dos puntos fijos a la desaparición de los mismos.

Para estudiar esta bifurcación comenzaremos con el siguiente sistema dinámico,

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu - x^2, x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \quad (2.15)$$

como se puede comprobar fácilmente se verifican las propiedades:

$$f(0, 0) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

Además, el conjunto de puntos fijos de (2.15) viene dado por $\mu - x^2 = 0$, que representa una parábola en el plano fase.

Por tanto, si $\mu < 0$ no hay puntos fijos, si $\mu = 0$ hay un sólo punto fijo y si $\mu > 0$ hay dos puntos fijos $x_1 = \sqrt{\mu}$ inestable y $x_2 = -\sqrt{\mu}$ estable. A medida que variamos el parámetro μ de un valor negativo hacia un valor positivo, observamos como se produce una creación de puntos fijos, siendo el valor de $\mu = 0$ el valor en el cual se produce el cambio. Entonces, existe una bifurcación fold o Silla-Nodo.

Una manera geométrica de apreciar una BSN esta dado por siguiente el sistema de primer orden:

$$\dot{x} = \mu - x^2,$$

haciendo el cambio de variable $\mu = r$ tenemos.

$$\dot{x} = r - x^2,$$

donde r es un parámetro que puede ser negativo, positivo o cero. Cuando r es negativo existen dos puntos fijos, uno estable y otro inestable. En este ejemplo ocurre una BSN en $r = 0$, ya que los campos vectoriales para $r < 0$ y $r > 0$ son cualitativamente diferentes.

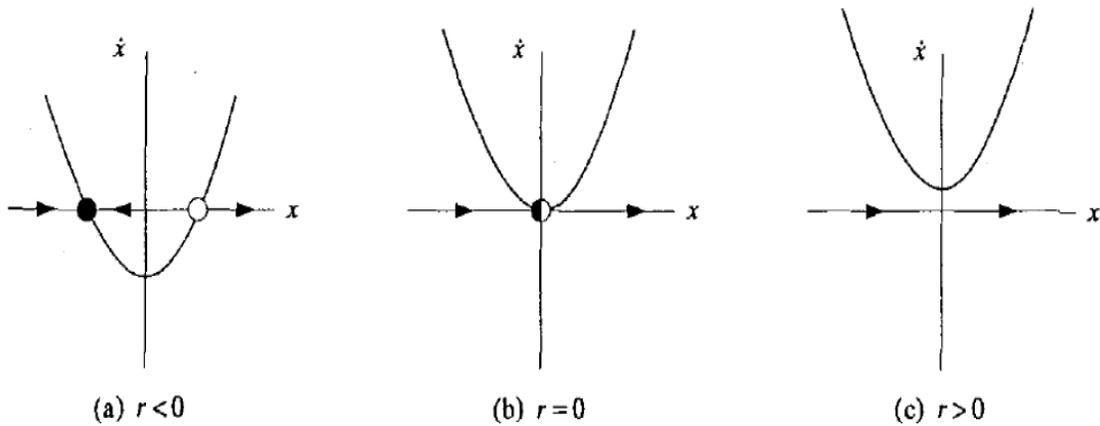


Figura 2.1: Variación del parámetro r del sistema $\dot{x} = r - x^2$, [1].

Caso 1 Cuando r se aproxima a cero (0) desde abajo, la parábola se mueve hacia arriba y los 2 puntos fijos se mueven el uno hacia el otro, Figura 2.1 a.

Caso 2 Cuando los puntos fijos se unen en cero se forma un punto de bifurcación $x^* = 0$, Figura 2.1 b.

Caso 3 Este tipo de punto es extremadamente delicado pues se desvanece tan pronto $r > 0$ ahora no existe ningún punto fijo Figura 2.1 c.

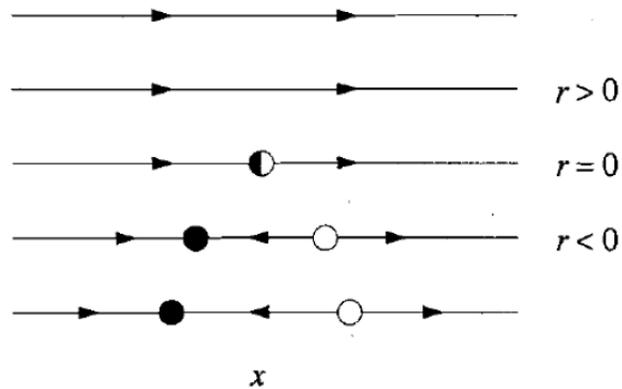


Figura 2.2: Vectores de campo para la variación de r , [1].

Otra forma de representar la bifurcación ocurrida, es mostrando los vectores de campo para diferentes valores discretos de r , Figura 2.2.

En la Figura 2.3 se muestra una pila de campos vectoriales continuos y la curva $r = -x^2$, es decir, cuando $x' = 0$ la cual da los puntos fijos para diferentes valores de r . La línea continua distingue los puntos fijos estables, y la línea punteada los puntos fijos inestables.

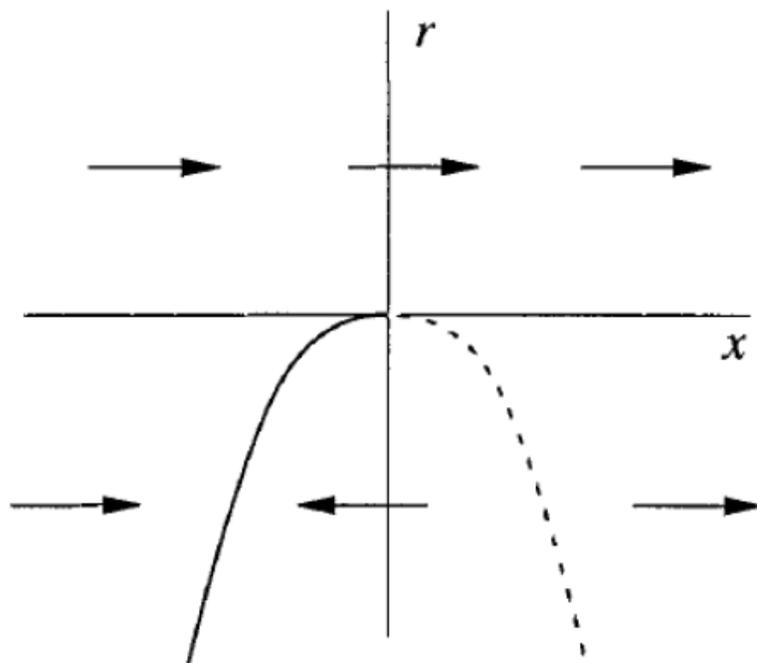


Figura 2.3: Campos vectoriales r vs x .

Sin embargo, la forma más común de describir la bifurcación es invertir los ejes de la Figura 2.3. La razón es que r desempeña el papel de una variable independiente, y así debe ser trazada horizontalmente. El inconveniente es que ahora el eje " x " tiene que ser trazado verticalmente, lo que parece extraño a primera vista. Las flechas son a veces incluidas en el cuadro, pero no siempre.

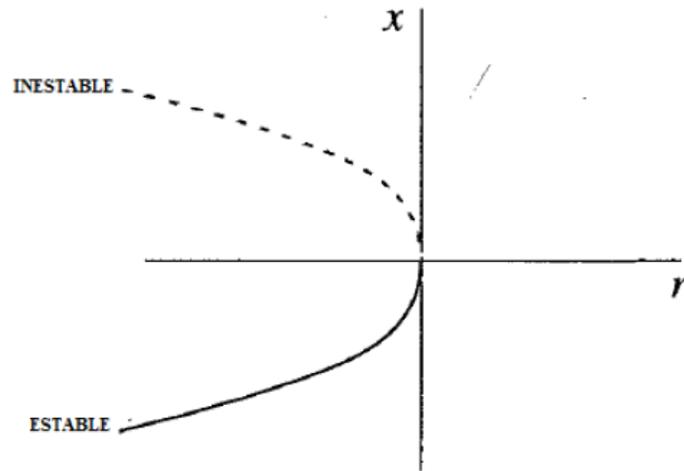


Figura 2.4: Diagrama de bifurcaciones.

A la Figura 2.4 se le conoce como el diagrama de bifurcación. La terminología de la teoría de las bifurcaciones presenta varias redacciones por diferentes autores, así es como en la literatura se encuentra que la BSN es a veces llamada una doble bifurcación (porque la curva de la Figura 2.4 tiene un pliegue en ella) o un punto de inflexión bifurcación (porque el punto $(x, t) = (0, 0)$ es un "punto de inflexión."). El nombre deriva de una bifurcación completamente análoga, en un contexto de mayor dimensión, tales como los campos de vectores en el plano, donde los puntos fijos son más conocidos como sillas de montar y los nodos pueden colisionar y desaparecer. La forma de hallar una BSN radica en encontrar el parámetro r de bifurcación cuando el sistema tiene $\dot{x} = 0$ y para determinar su estabilidad lineal, se calcula su derivada.

2.4.2. Bifurcación tridente

Teorema de la bifurcación tridente (BT)

Definición 2.4 [44] *En matemáticas, una BT (en inglés pitchfork) es un tipo de bifurcación local de una ecuación diferencial de un sistema dinámico. Las BT pueden ser supercríticas o subcríticas.*

Las BT se producen en sistemas con simetría. Es decir, que esta bifurcación está relacionada a simetría del sistema. Por ejemplo, en sistemas que tienen una simetría espacial entre puntos fijos, izquierdo y derecho, estos tienden a aparecer y desaparecer en pares simétricos.

Teorema 2.1 [45] *Considere una ecuación diferencial ordinaria de la forma*

$$\dot{x} = f(x, \mu), x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \quad (2.16)$$

supongamos que f es una función de clase C^3 (continuamente diferenciable) y tal que se verifiquen las condiciones:

$$(a1) = f(0, 0) = 0,$$

$$(a2) = \frac{f(0, 0)}{\partial x} = 0,$$

(a1) y (a2) son para un punto fijo no hiperbólico si

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mu}(0, 0) = 0 & \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0, 0) \neq 0 & \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0, \end{aligned}$$

entonces en $(0, 0)$ hay una BT. Además bajo estas condiciones el sistema es topológicamente equivalente a uno de los sistemas

$$\dot{x} = \mu x \pm x^3,$$

que no son más que las formas normales para este tipo de bifurcación.

Este tipo de bifurcación se clasifica en dos categorías, bifurcación pitchfork supercrítica y bifurcación pitchfork subcrítica. En el primer caso el sistema dinámico de referencia es:

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^3 = 0, x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \quad (2.17)$$

si $\mu < 0$ existe un único punto fijo $(x, \mu) = (0, 0)$ estable, sin embargo para $\mu > 0$, $(x, \mu) = (0, 0)$ pasa a ser un punto fijo inestable y además aparecen dos nuevos puntos fijos simétricos respecto del origen que serán estables. Para el caso de la bifurcación subcrítica se toma el mismo sistema de referencia. Si $\mu < 0$, existen tres puntos fijos $(0, 0)$ inestable y dos puntos simétricos estables. si $\mu > 0$, el punto $(0, 0)$ pasa a ser estable y los otros puntos fijos desaparecen.

Para el sistema (2.17) los puntos de equilibrio son

$$\begin{aligned} x_{e0} &= 0, \\ x_{e1} &= \sqrt{\mu}, \\ x_{e2} &= -\sqrt{\mu}, \end{aligned}$$

si $\mu < 0$, solo x_{e0} tiene sentido físico.

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{x_e, \mu_e} = -3x_e^2 + \mu_e,$$

como es función de una sola variable también es equivalente al valor propio

$$\lambda = -3x_e^2 + \mu_e,$$

entonces, si $\lambda < 0$ el sistema es estable.

Si $\lambda < 0$ la única solución es $x_{e0} = 0$ y entonces $\lambda = \mu_e$, por lo que es estable. Por el contrario si $\lambda > 0$ hay tres soluciones reales

i) Inestable

$$\begin{aligned} x_{e0} &= 0, \\ \lambda &= -3x_{e0}^2 + \mu_e = \mu_e, \end{aligned}$$

ii) Estable

$$\begin{aligned} x_{e1} &= \sqrt{\mu}, \\ \lambda &= -3x_{e1}^2 + \mu_e = -2\mu_e, \end{aligned}$$

iii) Estable

$$\begin{aligned} x_{e2} &= -\sqrt{\mu}, \\ \lambda &= -3x_{e2}^2 + \mu_e = -2\mu_e, \end{aligned}$$

De acuerdo con lo propuesto anteriormente como $\mu < 0$ se presenta una bifurcación subcrítica la cual nos dice que el origen es inestable y aparecen dos puntos que son simétricos y además son estables.

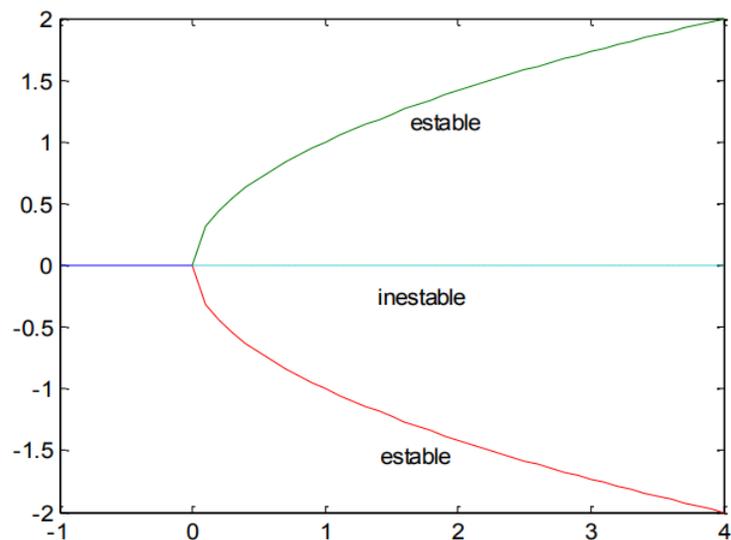


Figura 2.5: Diagrama de bifurcación (tipo tridente)

En la figura 2.5 se observa un diagrama de bifurcación en el cual aparecen 2 trayectorias simétricas estables y una es inestable por lo cual podemos decir que esta es una BT del tipo subcrítica.

Las bifurcaciones anteriores son las más estudiadas en sistemas dinámicos. Note que estas se caracterizan por la aparición o desaparición de puntos fijos al variar el parámetro de bifurcación el cual puede también cambiar la estabilidad del sistema, sin embargo a continuación vamos a tratar otro tipo de bifurcación en la cual hacen aparición las órbitas periódicas, este fenómeno es de interés en la aplicación de sistemas dinámicos, debido a que las órbitas periódicas suelen modelar mejor las dinámicas de un sistema.

2.4.3. Bifurcación de Hopf

Teorema de la bifurcación de Hopf (BH)

Definición 2.5 [35] *La BH, es un tipo de bifurcación que presentan algunos sistemas, de tal manera que al variar el valor del parámetro de bifurcación del sistema, este sufre un cambio en la estabilidad del punto crítico estudiado, dando origen o desapareciendo una órbita periódica.*

La característica esencial de la BH es que, para valores del parámetro cercanos al valor de bifurcación, se produce la aparición de un ciclo límite del sistema en las cercanías del estado de equilibrio. Existen dos casos diferentes, de propiedades y consecuencias prácticas muy distintas:

- **Bifurcación de Hopf subcrítica (BHSC):** *Es un ciclo límite (que será inestable), puede coexistir con el punto de equilibrio estable, antes de que el parámetro alcance el valor de bifurca-*

ción y supone en la práctica una limitación del dominio de atracción del punto de equilibrio.

• **Bifurcación de Hopf supercrítica (BHSP):** El ciclo límite (que será estable), puede surgir una vez que se ha traspasado el valor de bifurcación. En este supuesto el ciclo constituye un atractor que mitiga la inestabilidad del punto de equilibrio.

Teorema 2.2 [35] *Sea un sistema*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.18)$$

tiene un equilibrio en $x = \theta \forall |\alpha|$ suficientemente pequeño, con autovalores

$$\lambda_{1,2} = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha), \quad (2.19)$$

con $\mu(0) = 0, \omega(0) = \omega_0 > 0$, y supongamos que se verifican las siguientes condiciones:

(B1) $l_1(0) \neq 0$, donde l_1 es el primer coeficiente de Lyapunov

(B2) $\mu(0) \neq 0$.

Entonces la ecuación (2.18) es topológicamente equivalente a:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + s(y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

donde $s = \text{signo}(l_1(0))$.

La ecuación (2.20) se denomina forma normal de Hopf.

Considere el sistema parametrizado

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (2.21)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $\mu \in \mathbb{R}$. Supongamos que existe (x_0, μ_0) tal que

$$(H1) \quad f(x_0, \mu_0) = 0,$$

$$(H2) \quad D_x f(x_0, \mu_0),$$

(H2) posee un único par de valores propios en el eje imaginario y el resto están fuera de él.

$$(H3) \quad \frac{d}{d\mu}(\mathbb{R}(\lambda(\mu))|_{\mu = \mu_0} = d \neq 0,$$

donde $\lambda(\mu)$ es una valor propio de $D_x f(x_0, \mu_0)$.

Entonces, existe una única variedad central tridimensional que pasa por $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

La dinámica sobre la variedad central está dada por

$$\dot{r} = (d\mu + l_1 r^2)r,$$

$$\dot{\theta} = \omega + c\mu + br^2.$$

Si $l_1 \neq 0$ entonces existe una superficie de órbitas periódicas en la variedad central, las cuales tienen tangencia cuadrática con el eigenespacio generado por $\lambda(\mu_0), \bar{\lambda}(\mu_0)$. Si $l_1 < 0$ las órbitas periódicas son estables (caso supercrítico), mientras que si $l_1 > 0$ son inestables (caso subcrítico). El coeficiente l_1 se define como el primer coeficiente de Lyapunov. Existe una fórmula para calcular el primer coeficiente de Lyapunov, la cual está dada para sistemas en el plano.

Considere el siguiente sistema en el plano:

$$Z_1' = -\omega_0 Z_2 + F_1(Z_1, Z_2),$$

$$Z_2' = \omega_0 Z_1 + F_2(Z_1, Z_2),$$

El primer coeficiente de Lyapunov está dado por la fórmula

$$l_1 = \frac{1}{16\omega_0}(R_1 + \omega_0 R_2),$$

donde

$$R_1 = (F_{1z_1z_2}(F_{1z_1z_1} + F_{1z_2z_2}) - F_{2z_1z_2}(F_{2z_1z_1} + F_{2z_2z_2}) - F_{1z_1z_1}F_{2z_1z_1} + F_{1z_2z_2}F_{2z_2z_2})|_{z_0},$$

$$R_2 = (F_{1z_1z_1z_1} + F_{1z_1z_2z_2} + F_{2z_2z_1z_1} + F_{2z_2z_2z_2})|_{z_0},$$

La BHSP, se presenta cuando $l_1 < 0$. Se caracteriza por el nacimiento o desvanecimiento de una órbita periódica atractora, al momento de variar el parámetro de bifurcación alrededor de μ_0 .

La SHHSC, se presenta cuando $l_1 > 0$. Se caracteriza por el nacimiento o desvanecimiento de una órbita periódica repulsora, al momento de variar el parámetro de bifurcación alrededor de μ_0 .

Otro tipo de BH que se presenta es la bifurcación de Hopf degenerada, la cual se presenta cuando $l_1 = 0$. Se caracteriza por la presencia de un centro de órbitas periódicas, justo cuando el parámetro de bifurcación es igual a μ_0 .

Capítulo 3

Análisis de estabilidad y puntos de bifurcación

En este capítulo, se presenta la metodología para realizar el análisis de bifurcaciones para sistemas con retardo.

Vamos a trabajar con una clase de sistemas con retardo de la forma (2.10), ya definida anteriormente en el Capítulo 2.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = G(\vec{x}, \vec{x}_\tau),$$

Un punto de equilibrio $\vec{x}^*(t) = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ es aquel que satisface $G(\vec{x}^*, \vec{x}_\tau^*) = G(\vec{x}^*, \vec{x}^*) = 0$.

Proposición 3.1 [25] *linealización del sistema (2.10) en un punto de equilibrio es*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + B\vec{x}_\tau. \quad (3.1)$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} D_{1g_1} & D_{2g_1} & \dots & D_{ng_1} \\ D_{1g_2} & D_{2g_2} & \dots & D_{ng_2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ D_{1g_n} & D_{2g_n} & \dots & D_{ng_n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} D_{n+1g_1} & D_{n+2g_1} & \dots & D_{2ng_1} \\ D_{n+1g_2} & D_{n+2g_2} & \dots & D_{2ng_2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ D_{n+1g_n} & D_{n+2g_n} & \dots & D_{2ng_n} \end{pmatrix}$$

y las derivadas parciales se evalúan en el punto de equilibrio dado. La ecuación característica (EC) correspondiente está dado por la fórmula

$$Q(\lambda) = \det(A + e^{-\lambda\tau}B - \lambda I) = 0.$$

En el presente trabajo se realiza un análisis sobre la EC, cuya forma es un cuasi-polinomios con la estructura siguiente

$$Q(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda) - e^{-\lambda\tau}q_1(\lambda)q_2(\lambda). \quad (3.2)$$

Es bien sabido que la estabilidad de un sistema está gobernada por la posición de las raíces de su EC, en el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz se establece que un sistema es estable si y sólo si todos sus polos se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo.

Para sistemas libres de retardo de orden n se obtiene una EC de orden n con n raíces y la estabilidad del sistema esta dada por la posición de sus raíces. Mientras que, para un sistema con retardos de orden n , el número de raíces es infinito, la estabilidad del sistema es gobernada únicamente por la posición de sus raíces dominantes (son las que se encuentran más a la derecha del plano complejo).

Como ya se ha mencionado anteriormente en este trabajo se pretende encontrar un tipo de bifurcación mediante el uso del retardo τ como parametro de bifurcación. Con este análisis se pueden dar condiciones para determinar la estabilidad de un sistema y para encontrar ciclos limite.

El método de D-particiones es una herramienta importante para realizar el análisis de estabilidad en un sistema con retardo, el cual trabaja con el cuasi-polinomio característico del sistema y mediante variaciones paramétricas nos dice cuando las raíces dominantes del sistema se encuentran sobre el eje imaginario.

Teniendo esto en mente comenzamos con el análisis de $Q(\lambda)$

$$Q(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda) - e^{-\lambda\tau}q_1(\lambda)q_2(\lambda).$$

mediante el uso del método de D-particiones, se hace el cambio de variable $\lambda = i\omega$

$$Q(i\omega) = p_1(i\omega)p_2(i\omega) - e^{-i\omega\tau}q_1(i\omega)q_2(i\omega).$$

Ahora definimos

$$\Phi = \text{Re}\{p_1(i\omega)p_2(i\omega)\},$$

$$\theta = \text{Im}\{p_1(i\omega)p_2(i\omega)\},$$

$$\gamma = \text{Re}\{q_1(i\omega)q_2(i\omega)\},$$

$$\varsigma = \text{Im}\{q_1(i\omega)q_2(i\omega)\},$$

entonces

$$Q(i\omega) = \Phi + \theta - e^{-i\omega\tau}(\gamma + \varsigma),$$

se hace uso de la fórmula de Euler $e^{i\lambda\tau} = \cos(\lambda\tau) + i\sin(\lambda\tau)$

$$\begin{aligned} Q(i\omega) &= \Phi + \theta - (\cos(\lambda\tau) + i\sin(\lambda\tau))(\gamma + \varsigma), \\ &= \Phi + \theta - \cos(\lambda\tau)\gamma - \cos(\lambda\tau)\varsigma i + \sin(\lambda\tau)\gamma i + \sin(\lambda\tau)\varsigma, \end{aligned}$$

separamos la parte real y la parte imaginaria

$$\begin{aligned} Re &= \Phi - \cos(\lambda\tau)\gamma + \sin(\lambda\tau)\varsigma = 0, \\ Im &= \Theta - \cos(\lambda\tau)\varsigma + \sin(\lambda\tau)\gamma = 0, \end{aligned}$$

y obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \Phi - \cos(\lambda\tau)\gamma + \sin(\lambda\tau)\varsigma &= 0, \\ \Theta - \cos(\lambda\tau)\varsigma + \sin(\lambda\tau)\gamma &= 0, \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} \cos(\lambda\tau) &= -\left(\frac{\gamma\Phi - \varsigma\Theta}{\gamma^2 - \varsigma^2}\right), \\ \sin(\lambda\tau) &= \left(\frac{-\varsigma\Phi + \gamma\Theta}{\gamma^2 - \varsigma^2}\right). \end{aligned}$$

Ahora, usando $\sin^2(\omega\tau) + \cos^2(\omega\tau) = 1$, lo anterior es cierto si

$$\begin{aligned} P(\omega) &= N_1^2 + N_2^2 - Q^2 \\ &= a_n\omega^n + a_{n-1}\omega^{n-1} + \dots + a_1\omega + a_0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

con

$$\begin{aligned} N_1 &= \gamma\Phi - \varsigma\Theta \\ N_2 &= -\varsigma\Phi + \gamma\Theta \\ Q &= \gamma^2 - \varsigma^2 \end{aligned}$$

Teorema 3.1 [46] *Sea f una función real continua en el intervalo $[a, b]$. Si $f(a) < f(b)$ y c es un número tal que $f(a) < c < f(b)$, entonces existe un punto x en (a, b) tal que $f(x) = c$.*

Teorema 3.2 [46] Sea f una función real continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ con $f(a)$ y $f(b)$ de signos contrarios. Entonces existe al menos un punto c del intervalo abierto (a, b) con $f(c) = 0$.

Proposición 3.2 Un polinomio de la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ tiene al menos una raíz real positiva si y sólo si $a_n > 0$ y $a_0 < 0$.

Proposición 3.3 El cuasi-polinomio (3.2) tiene raíces dominantes en $\lambda_0 = \pm i\omega_0$, si hay una solución del polinomio $P(\omega)$, más aun esto ocurre cuando el retardo tiene un valor en

$$\tau_0 = \frac{1}{\omega_0} \tan^{-1} \left(\frac{N_2(\omega_0)}{N_1(\omega_0)} \right) + \frac{n\pi}{\omega_0}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.4)$$

Proposición 3.4 Si (3.3) tiene algún cambio de signo en sus términos $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$, existe una raíz real positiva ω_0 solución de $P(\omega)$, entonces existe una bifurcación de Hopf en el estado estacionario.

3.1. Algoritmo para encontrar puntos de bifurcación

El objetivo de esta sección es ilustrar paso a paso el algoritmo con el cual se pueden encontrar los puntos críticos de τ visto como parámetro de bifurcación, para una clase de sistemas del tipo (2.10).

- Obtener la ecuación característica del sistema.
- Evaluar el polinomio característico en $\lambda = i\omega$.
- Dividir la expresión anterior en parte real y parte imaginaria.
- Obtener un polinomio $P(\omega)$ de la forma (3.3) y observar si existe un cambio de signo entre el termino de mayor orden y el termino independiente.
- Si existe algún cambio de signo es posible encontrar un valor de τ_0 con la fórmula propuesta en la Proposición 3.3 en donde aparece una bifurcación de Hopf

3.2. Duopolio de Cournot

3.2.1. Modelo matemático

Modelo estático de duopolio de Cournot con evasión de impuestos

El modelo de duopolio de Cournot es un ejemplo clásico en teoría de juegos [47], [48]. En el que dos empresas ingresan al mercado con un producto de consumo homogéneo. Las empresas no cooperan, en consecuencia la decisión de salida de cada empresa afecta el precio del bien. Además, las empresas compiten en cantidades y eligen las cantidades simultáneamente. El primer estudio de un duopolio se debe a Antoine Augustin Cournot, quien en 1838 propuso que las empresas ajustan sus niveles de producción de tal forma que cada una de ellas maximiza sus beneficios tomando la producción de la empresa rival dada. A una pareja (x_1, x_2) de niveles de producción que satisface estas condiciones se le llama un equilibrio de Cournot. En este caso, la primera empresa maximiza sus beneficios produciendo x_1 unidades al considerar que la segunda empresa produce x_2 unidades. De igual forma, la segunda empresa maximiza sus beneficios produciendo x_2 unidades al considerar que la primera empresa produce x_1 unidades.

Comenzamos por denotar por $x_i \geq 0$ al nivel de producción de la firma i , $i = 1, 2$. La función de demanda inversa, denotada por p , determina el precio del producto en el mercado dependiendo de la cantidad del producto que se introduce al mercado. La función p se asume dos veces diferenciable y estrictamente decreciente, y como además satisface la ley de la oferta y la demanda, existen números no negativos a y b , uno de ellos o ambos pueden ser infinito, tales que

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = 0 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow 0} p(x) = b.$$

La cantidad a puede interpretarse como aquella cantidad de productos en el mercado a partir de la cual el precio se desploma a cero, mientras que la cantidad b puede interpretarse como el precio que llega a alcanzar un producto cuando tiende a desaparecer del mercado. Supondremos también que para $i = 1, 2$, la función de demanda inversa satisface

$$p'(x_1 + x_2) + x_i p''(x_1 + x_2) \leq 0, \quad (3.5)$$

pues esta ecuación tiene una interpretación económica importante sobre las producciones de las empresas en el duopolio [49], [50]. Puesto que la función de demanda inversa es estrictamente decreciente, también es verdad que $p'(x) < 0$. Junto con la suposición (3.5) obtenemos

$$2p'(x_1 + x_2) + x_i p''(x_1 + x_2) < 0. \quad (3.6)$$

El costo para producir x_i productos para la empresa i se denotará por $C_i(x_i)$, que se asume dos veces diferenciable, estrictamente creciente, convexa y satisface $C_i(0) = 0$. Las entradas de la empresa i están dadas por lo tanto por la fórmula $x_i p(x_1 + x_2)$ y sobre esta cantidad es sobre la cual se calcula el impuesto a pagar. Sin embargo, la empresa i elige declarar que sus entradas fueron por la cantidad z_i , de modo que $z_i \leq x_i p(x_1 + x_2)$. Note que se permite que z_i sea una cantidad negativa, lo que significaría que la empresa i le reporta pérdidas al gobierno.

Vamos a suponer que el gobierno impone un impuesto $0 < \sigma < 1$ sobre la cantidad declarada y que con probabilidad $0 < q_i < 1$ el gobierno sorprende a la empresa i evadiendo impuestos. En caso de detectar que la empresa i incurrió en evasión fiscal, el gobierno procede a cobrar una penalidad sobre la cantidad $x_i p(x_1 + x_2) - z_i$ evadida al fisco. Denotaremos por F a esta función de penalidad y la supondremos positiva, diferenciable, estrictamente creciente y estrictamente convexa. Además, se supondrá que $F(0) = 0$, de modo que quien haga una declaración honesta no tenga por que pagar sanción alguna.

La función $P_i = P_i(x_1, x_2, z_1, z_2)$ de beneficio de la empresa i ($i = 1, 2$), consiste en la suma de dos términos.

El primer término consiste en multiplicar la probabilidad $1 - q_i$ de no ser detectado evadiendo impuestos por la ganancia esperada, donde por ganancia esperada se entiende el resultado de sustraer a las entradas $x_i p(x_1 + x_2)$ de la empresa i el costo $C_i(x_i)$ y la cantidad a pagar de impuestos σz_i .

El segundo término está dado por el producto de la probabilidad q_i de que la empresa i sea descubierta evadiendo impuestos multiplicada por la ganancia resultante, la cual se calcula sustrayendo de las entradas $x_i p(x_1 + x_2)$ de la empresa i el impuesto $\sigma x_i p(x_1 + x_2)$ que honestamente se debe pagar, el costo de producción $C_i(x_i)$ y la multa $F(x_i p(x_1 + x_2) - z_i)$ sobre la cantidad de impuesto evadida. Luego, la función de beneficio para la empresa i está dada por la fórmula:

$$\begin{aligned}
 P_i &= (x_1, x_2, z_1, z_2) = (1 - q_i)(x_i p(x_1 + x_2) - C_i(x_i) - \sigma z_i) \\
 &\quad + q_i((1 - \sigma)x_i p(x_1 + x_2) - C_i(x_i) - F(x_i p(x_1 + x_2) - z_i)) \\
 &= (1 - q_i \sigma)x_i p(x_1 + x_2) - q_i F(x_i p(x_1 + x_2) - z_i) \\
 &\quad - (1 - q_i)\sigma z_i - C_i(x_i).
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Un equilibrio en el sistema del duopolio de Cournot con evasión de impuestos consiste en una pareja de niveles de producción (x_1, x_2) y una pareja de montos a declarar (z_1, z_2) de tal forma que la empresa i maximiza sus beneficios produciendo x_i unidades y declarando un monto z_i al considerar que la empresa i produce x_i unidades y declara un monto z_i . El problema de encontrar

un equilibrio de Cournot con evasión de impuestos se reduce a la solución de ciertas ecuaciones como se establece a continuación. Cabe mencionar que la siguiente proposición se demuestra en [49] para el caso general en que se tengan $n \geq 2$ firmas compitiendo en el mercado (oligopolio), sin embargo, en dicho artículo los autores suponen que las funciones de costo son de manera particular de la forma $C_i(x_i) = cx_i$ con $c > 0$ constante, cosa que nosotros no necesitamos. También mencionamos que la siguiente proposición aparece sin demostración en [51][Proposición 1], sin embargo, la autora omite suponer la desigualdad (3.5) aunque los ejemplos presentados en dicho artículo sí la satisfacen.

Proposición 3.5 *Los valores óptimos de x_1 , x_2 , z_1 y z_2 del problema del duopolio de Cournot planteado arriba se obtienen al solucionar el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_i}{\partial x_i} &= (1 - q_i\sigma - q_i F'(x_i p(x_1 + x_2) - z_i)) \\ &\quad (p(x_1 + x_2) + x_i p'(x_1 + x_2)) - C'_i(x_i) = 0, \\ \frac{\partial P_i}{\partial z_i} &= -(1 - q_i)\sigma + q_i F'(x_i p(x_1 + x_2) - z_i) = 0, \\ &\quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Consideraremos la función de penalización como $F(x) = \frac{1}{2}s\sigma x^2$, $s \geq 1$ y la función costo definida como $C_i(x_i) = c_i x_i$, $c_i > 0$, $i = 1, 2$.

Modelo dinámico del duopolio de Cournot con evasión de impuestos y tiempo de retardo

El modelo dinámico describe la variación en el tiempo de salida $x_i(t)$, $i = 1, 2$ teniendo en cuenta los beneficios marginales $\frac{\partial P_i}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$. Suponga que cada empresa ajusta sus ingresos declarados $z_i(t)$, $i = 1, 2$ proporcionalmente a los beneficios marginales $\frac{\partial P_i}{\partial z_i}$, $i = 1, 2$. El modelo

dinámico esta dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= k_1 \frac{\partial P_1}{\partial x_1} = k_1 \left([1 - q_1 \sigma - q_1 F'(x_1(t)p(x_1(t) + x_2(t)) - z_1(t)] \right. \\
&\quad \left. [p(x_1(t) + x_2(t)) + x_1(t)p'(x_1(t) + x_2(t))] - C_1(x_1(t)) \right), \\
\dot{x}_2(t) &= k_2 \frac{\partial P_2}{\partial x_2} = k_2 \left([1 - q_2 \sigma - q_2 F'(x_2(t)p(x_1(t) + x_2(t)) - z_2(t)] \right. \\
&\quad \left. [p(x_1(t) + x_2(t)) + x_2(t)p'(x_1(t) + x_2(t))] - C_2(x_2(t)) \right), \\
\dot{z}_1(t) &= k_3 \frac{\partial P_1}{\partial z_1} = k_3 \left(-(1 - q_1)\sigma + q_1 F'(x_1(t)p(x_1(t) + x_2(t)) - z_1(t) \right), \\
\dot{z}_2(t) &= k_4 \frac{\partial P_2}{\partial z_2} = k_4 \left(-(1 - q_2)\sigma + q_2 F'(x_2(t)p(x_1(t) + x_2(t)) - z_2(t) \right).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Consideramos el modelo (3.9) donde introducimos el retardo de tiempo τ . Suponemos que la primera empresa es el líder y la segunda empresa es el seguidor. El seguidor conoce la cantidad de la empresa líder, $x_1(t - \tau)$, que entró en el mercado en el momento $t - \tau$, $\tau > 0$.

El sistema diferencial que describe este modelo viene dado por:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= k_1 \frac{\partial P_1}{\partial x_1} = k_1 \left([1 - q_1 \sigma - q_1 F'(x_1(t)p(x_1(t) + x_2(t)) - z_1(t)] \right. \\
&\quad \left. [p(x_1(t) + x_2(t)) + x_1(t)p'(x_1(t) + x_2(t))] - C_1(x_1(t)) \right), \\
\dot{x}_2(t) &= k_2 \frac{\partial P_2}{\partial x_2} = k_2 \left([1 - q_2 \sigma - q_2 F'(x_2(t)p(x_1(t - \tau) + x_2(t)) - z_2(t)] \right. \\
&\quad \left. [p(x_1(t - \tau) + x_2(t)) + x_2(t)p'(x_1(t - \tau) + x_2(t))] - C_2(x_2(t)) \right), \\
\dot{z}_1(t) &= k_3 \frac{\partial P_1}{\partial z_1} = k_3 \left(-(1 - q_1)\sigma + q_1 F'(x_1(t)p(x_1(t) + x_2(t)) - z_1(t) \right), \\
\dot{z}_2(t) &= k_4 \frac{\partial P_2}{\partial z_2} = k_4 \left(-(1 - q_2)\sigma + q_2 F'(x_2(t)p(x_1(t - \tau) + x_2(t)) - z_2(t) \right).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Observe que el modelo no lineal anterior es de la forma (2.10), donde

$$G(\vec{x}, \vec{x}_\tau) = \left(k_1 \frac{\partial P_1(\vec{x}, \vec{x}_\tau)}{\partial x_1}, k_2 \frac{\partial P_2(\vec{x}, \vec{x}_\tau)}{\partial x_2}, k_3 \frac{\partial P_1(\vec{x}, \vec{x}_\tau)}{\partial z_1}, k_4 \frac{\partial P_2(\vec{x}, \vec{x}_\tau)}{\partial z_2} \right)^T. \tag{3.11}$$

Proposición 3.6 Si $(x_1^*, x_2^*, z_1^*, z_2^*)$ son los valores óptimos del problema del duopolio de Cournot estático planteado en la sección anterior, entonces la función $\vec{x}^*(t) = (x_1^*, x_2^*, z_1^*, z_2^*)$ es un punto de equilibrio del sistema de duopolio de Cournot dinámico con tiempo de retardo (2.10).

Proposición 3.7 *La linealización del sistema (2.10) en el punto de equilibrio dado por los valores óptimos del problema del duopolio de Cournot estático esta dado por (3.27) donde*

$$A = \begin{pmatrix} k_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_1^2} & k_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_2 \partial x_1} & k_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z_1 \partial x_1} & 0 \\ 0 & k_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_2^2} & 0 & k_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial z_2 \partial x_2} \\ k_3 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_1 \partial z_1} & k_3 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_2 \partial z_1} & k_3 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z_1^2} & 0 \\ 0 & k_4 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_2 \partial z_2} & 0 & k_4 \frac{\partial^2 P_2}{\partial z_2^2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_1 \tau \partial x_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_4 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_1 \tau \partial z_2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

y tiene como polinomio característico al polinomio que se obtiene de la matriz C_τ .

$$C_\tau = \begin{pmatrix} k_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_1^2} & k_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_2 \partial x_1} & k_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z_1 \partial x_1} & 0 \\ e^{-\lambda \tau} k_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_1 \tau \partial x_2} & k_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_2^2} & 0 & k_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial z_2 \partial x_2} \\ k_3 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_1 \partial z_1} & k_3 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_2 \partial z_1} & k_3 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z_1^2} & 0 \\ e^{-\lambda \tau} k_4 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_1 \tau \partial z_2} & k_4 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_2 \partial z_2} & 0 & k_4 \frac{\partial^2 P_2}{\partial z_2^2} \end{pmatrix}$$

donde las derivadas parciales están evaluadas en el punto de equilibrio.

Mas aún, el polinomio característico de C_τ puede escribirse como

$$q(\lambda, \tau) = p_1(\lambda)p_2(\lambda) - e^{-\lambda \tau}(a\lambda - b)(c\lambda - d) = 0, \quad (3.13)$$

donde $p_i(\lambda)$ es el polinomio característico de la submatriz de C_τ que consiste de sus renglones y columnas i y $i + 2$, $\mathbf{a} = C_{\tau 12}$, $\mathbf{c} = C_{012}$, \mathbf{b} es el determinante de la submatriz de C_τ que consiste de sus renglones 1 y 3 y sus columnas 2 y 3, y \mathbf{d} es $e^{\lambda \tau}$ mutiplicado por el determinante de la submatriz de C_τ que consiste de sus renglones 2 y 4 y columnas 1 y 4.

donde $p_1(\lambda) = \lambda^2 - \alpha_1 \lambda + \alpha_0$, $p_2(\lambda) = \lambda^2 - \beta_1 \lambda + \beta_0$, con

$$\alpha_1 = \left(k_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_1^2} + k_3 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z_1^2} \right), \quad \alpha_0 = \left(k_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_1^2} k_3 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z_1^2} \right) - \left(k_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z_1 \partial x_1} k_3 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_1 \partial z_1} \right),$$

$$\beta_1 = \left(k_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_2^2} + k_4 \frac{\partial^2 P_2}{\partial z_2^2} \right), \quad \beta_0 = \left(k_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_2^2} k_4 \frac{\partial^2 P_2}{\partial z_2^2} \right) - \left(k_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial z_2 \partial x_2} k_4 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_2 \partial z_2} \right),$$

$$a = k_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_2 \partial x_1}, \quad b = \left(k_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_2 \partial x_1} k_3 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z_1^2} \right) - \left(k_3 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x_2 \partial z_1} k_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z_1 \partial x_1} \right),$$

$$c = k_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad d = \left(k_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_1 \partial x_2} k_4 \frac{\partial^2 P_2}{\partial z_2^2} \right) - \left(k_4 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x_1 \partial z_2} k_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial z_2 \partial x_2} \right).$$

3.2.2. Análisis

Análisis de estabilidad del modelo del duopolio de Cournot

A continuación, se estudia la estabilidad del cuasi-polinomio (3.13) en el espacio frecuencial, mediante el método de D-particiones [52].

Considere el cambio de la variable $\lambda = i\omega$ en el cuasi-polinomio (3.13)

$$\begin{aligned} q(i\omega, \tau) &= p_1(i\omega)p_2(i\omega) - e^{-i\omega\tau}(a\lambda - b)(c\lambda - d) \\ &= p_1(i\omega)p_2(i\omega) - (\cos(\omega\tau) - \sin(\omega\tau))(a\lambda - b)(c\lambda - d) = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

observe que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{q(i\omega, \tau)\} &= \Phi + (ac\omega^2 - db)\cos(\omega\tau) + (ad\omega + bc\omega)\sin(\omega\tau), \\ \operatorname{Im}\{q(i\omega, \tau)\} &= \Theta + (db - ac\omega^2)\sin(\omega\tau) + (ad\omega + bc\omega)\cos(\omega\tau), \\ \Phi &= \omega^4 + (-\alpha_1\beta_1 - \alpha_0 - \beta_0)\omega^2 + \alpha_0\beta_0, \\ \Theta &= -\omega^3\alpha_1 - \omega^3\beta_1 + \omega\alpha_0\beta_1 + \omega\alpha_1\beta_0. \end{aligned}$$

cuando $\Phi = \operatorname{Re}\{p_1(i\omega)p_2(i\omega)\}$ y $\Theta = \operatorname{Im}\{p_1(i\omega)p_2(i\omega)\}$. Claramente, $q(i\omega, \tau) = 0$ si $\operatorname{Re}\{q(i\omega, \tau)\} = 0$ y $\operatorname{Im}\{q(i\omega, \tau)\} = 0$. En otras palabras, $q(i\omega, \tau) = 0$ si

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (ac\omega^2 - db) & (ad\omega + bc\omega) \\ (ad\omega + bc\omega) & (db - ac\omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau) \\ \sin(\omega\tau) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\Phi \\ -\Theta \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau) \\ \sin(\omega\tau) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (ac\omega^2 - db) & (ad\omega + bc\omega) \\ (ad\omega + bc\omega) & (db - ac\omega^2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\Phi \\ -\Theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} \cos(\omega\tau) &= \frac{-\Phi(ac\omega^2 - bd) - \Theta\omega(ad + bc)}{a^2c^2\omega^4 + a^2d^2\omega^2 + b^2c^2\omega^2 + b^2d^2} \\ \sin(\omega\tau) &= \frac{-\Phi\omega(ad + bc) + \Theta(ac\omega^2 - bd)}{a^2c^2\omega^4 + a^2d^2\omega^2 + b^2c^2\omega^2 + b^2d^2} \end{aligned}$$

Ahora, usando $\sin^2(\omega\tau) + \cos^2(\omega\tau) = 1$, lo anterior es cierto si

$$\begin{aligned} P(\omega) &= N_1^2 + N_2^2 - Q^2 \\ &= a_{12}\omega^{12} + a_{10}\omega^{10} + a_8\omega^8 + a_6\omega^6 + a_4\omega^4 + a_2\omega^2 + a_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

con

$$\begin{aligned} N_1 &= -\Phi(ac\omega^2 - bd) - \Theta\omega(ad + bc) \\ N_2 &= -\Phi\omega(ad + bc) + \Theta(ac\omega^2 - bd) \\ Q &= a^2c^2\omega^4 + a^2d^2\omega^2 + b^2c^2\omega^2 + b^2d^2 \end{aligned}$$

además,

$$\begin{aligned}
 a_{12} &= a^2 c^2, \\
 a_{10} &= ((\alpha_1^2 + \beta_1^2 - 2(\alpha_0 + \beta_0)) c^2 + d^2) a^2 + b^2 c^2 \\
 a_8 &= (\alpha_1^2 + \beta_1^2 - 2(\alpha_0 + \beta_0)) (a^2 d^2 + b^2 c^2) \\
 &\quad + (\alpha_0^2 + \beta_0^2 + (-\alpha_1^2 + 2\alpha_0)(-\beta_1^2 + 2\beta_0)) a^2 c^2 + b^2 d^2 - a^4 c^4 \\
 a_6 &= (a^2 d^2 + b^2 c^2) (\alpha_0^2 + \beta_0^2 + (-\alpha_1^2 + 2\alpha_0)(-\beta_1^2 + 2\beta_0)) \\
 &\quad - 2b^2 c^4 a^2 + (\alpha_0^2 \beta_1^2 + \alpha_1^2 \beta_0^2 - 2(\alpha_0^2 \beta_0 + \alpha_0 \beta_0^2)) c^2 a^2 \\
 &\quad + (\alpha_1^2 + \beta_1^2 - 2(\alpha_0 + \beta_0)) b^2 d^2 - 2a^4 c^2 d^2 \\
 a_4 &= (-4b^2 d^2 + \alpha_0^2 \beta_0^2) c^2 a^2 + (\alpha_1^2 \beta_1^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2 - 2(\beta_1^2 - 2\beta_0)\alpha_0 - 2\alpha_1^2 \beta_0) d^2 b^2 \\
 &\quad + (\alpha_0^2 \beta_1^2 + \alpha_1^2 \beta_0^2 - 2(\alpha_0^2 \beta_0 + \alpha_0 \beta_0^2)) (a^2 d^2 + b^2 c^2) - a^4 d^4 - b^4 c^4 \\
 a_2 &= (-2b^4 c^2 + (\alpha_0^2 \beta_1^2 + \alpha_1^2 \beta_0^2 - 2(\alpha_0^2 \beta_0 + \alpha_0 \beta_0^2)) b^2 + \alpha_0^2 \beta_0^2 a^2) d^2 \\
 &\quad + \alpha_0^2 \beta_0^2 b^2 c^2 - 2a^2 b^2 d^4 \\
 a_0 &= \alpha_0^2 \beta_0^2 b^2 d^2 - b^4 d^4.
 \end{aligned}$$

Definición 3.1 Sea $p(x) = \frac{1}{x}$, $C_1(x_1) = c_1 x_1$ y $C_2(x_2) = \mu c_1 x_2$, donde μ se define como la tasa de costo marginal.

Proposición 3.8 [25] La solución del sistema (3.8) satisface las relaciones:

$$\begin{aligned}
 p(x_1 + x_2) + x_i p'(x_1 + x_2) &= \frac{c_i}{1 - \sigma}, \\
 z_i &= x_i p(x_1 + x_2) - \frac{1 - q_i}{q_i s},
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

De la Proposición 3.8 obtenemos la siguiente proposición

Proposición 3.9 si $p(x) = \frac{1}{x}$ y $C_i(x) = c_i x$, la solución del sistema (3.16) esta dada por:

$$\begin{aligned}
 x_1^* &= \frac{c_2(1 - \sigma)}{(c_1 + c_2)^2} & x_2^* &= \frac{c_1(1 - \sigma)}{(c_1 + c_2)^2}, \\
 z_1^* &= \frac{c_2}{c_1 + c_2} - \frac{1 - q_1}{q_1 s} & z_2^* &= \frac{c_1}{c_1 + c_2} - \frac{1 - q_2}{q_2 s}.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Proposición 3.10 El punto de equilibrio del modelo no lineal de duopolio de Cournot (3.10), cuando $C_1(x_1) = c_1 x_1$ y $C_2(x_2) = \mu c_1 x_2$, es

$$\begin{aligned}
 x_1^* &= \frac{\mu c_1 (1 - \sigma)}{(c_1 + \mu c_1)^2}, & x_2^* &= \frac{c_1 (1 - \sigma)}{(c_1 + \mu c_1)^2}, \\
 z_1^* &= \frac{\mu c_1}{c_1 + \mu c_1} - \frac{1 - q_1}{s q_1}, & z_2^* &= \frac{c_1}{c_1 + \mu c_1} - \frac{1 - q_2}{s q_2}.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Estabilidad dependiente del retardo

Aquí, se realiza un análisis de estabilidad del modelo de duopolio de Cournot cuando las funciones de costo satisfacen la Proposición 3.10.

Teorema 3.3 *Considere el modelo lineal de duopolio de Cournot (3.27) y su correspondiente cuasi-polinomio (3.13). La estabilidad del sistema será dependiente del retardo si las funciones de costo son*

$$C_1(x_1) = c_1 x_1 \quad y \quad C_2(x_2) = \mu c_1 x_2.$$

En otras palabras, si el polinomio es estable (inestable) para $\tau = 0$, entonces el polinomio es inestable (estable) para todos $\tau > \tau^$, esto se debe a que en este caso si existe un $\omega_0 \in \mathbb{R}$ tal que $P(\omega_0) = 0$ y ocurre al menos un cambio de signo entre las constantes $a_{12} := a_{12}(\tau)$, $a_{10} := a_{10}(\tau)$, ..., $a_0 := a_0(\tau)$, más aun, de acuerdo a la Proposición 2.4 podemos obtener un τ_0 en el que las raíces dominantes del el cuasi-polinomio (3.14) se encuentran sobre el eje imaginario, $\lambda_0 = \pm i\omega_0$.*

En este caso particular tenemos un $P(\omega)$ de la siguiente forma

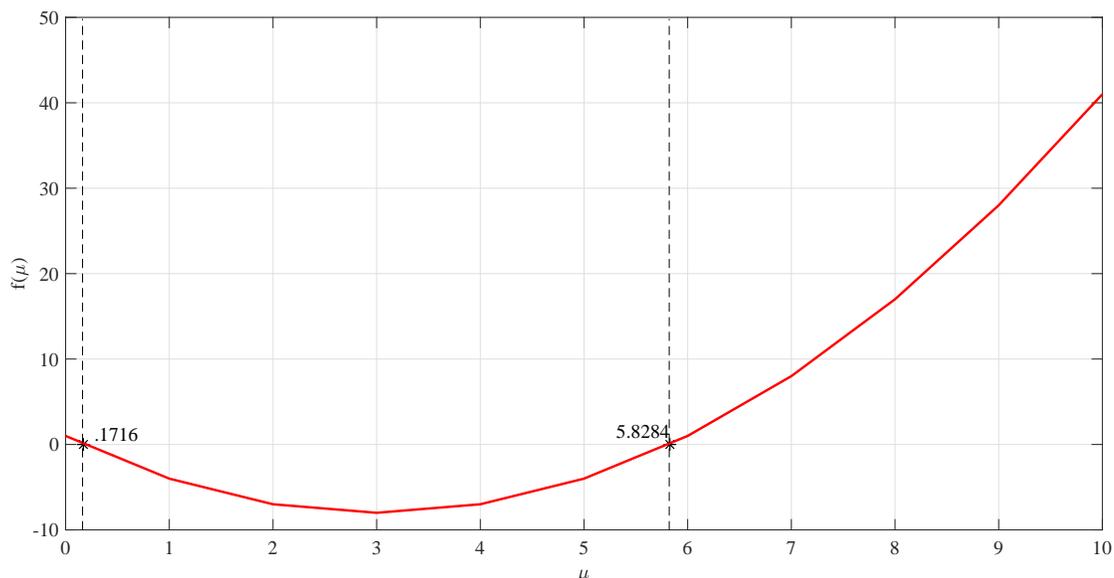
$$P(\omega) = a_{12}\omega^{12} + a_{10}\omega^{10} + a_8\omega^8 + a_6\omega^6 + a_4\omega^4 + a_2\omega^2 + a_0, \quad (3.19)$$

donde

$$a_{12} = \frac{k_1^2 c_1^8 (-\mu q_1 s \sigma + \mu^2 \sigma - \mu^2 - \sigma + 1)^2 k_2^2 (\mu q_2 s \sigma + \mu^2 \sigma - \mu^2 - \sigma + 1)^2}{(-1 + \sigma)^8}$$

$$a_0 = -\frac{k_1^4 c_1^{16} s^8 q_1^4 k_3^4 \sigma^8 (\mu - 1)^4 (\mu + 1)^{10} k_2^4 q_2^4 k_4^4 (\mu^2 - 6\mu + 1)}{(-1 + \sigma)^8}$$

en este caso particular es evidente observar que a_{12} es positivo por que todos los términos están elevados por un exponencial par, mientras que para a_0 se observa que si el término $(\mu^2 - 6\mu + 1)$ es positivo, $a_0 < 0$ entonces podemos decir que existe al menos un cambio en el término a_0 , esto ocurre cuando $\mu \in (0, 3 - 2\sqrt{2})$ o $\mu \in (3 + 2\sqrt{2}, \infty)$


 Figura 3.1: gráfica $f(\mu) = \mu^2 - 6\mu + 1$.

De acuerdo a la Proposición 3.2 $a_{12} > 0$ y $a_0 < 0$, cumpliendo estas condiciones entonces podemos asegurar que $P(\omega)$ tiene una raíz real positiva sin darle importancia a los términos $(a_{10}, a_8, a_6, a_4, a_2)$. Más aún, según la Proposición 3.3 podremos encontrar un τ_0 en el cual ocurre un bifurcación de Hopf, con este τ_0 podemos hacer que el sistema pierda o gane estabilidad.

Estabilidad independiente del retardo

A continuación, se realiza un análisis de estabilidad del modelo de duopolio de Cournot cuando las funciones de costo cumplen con $c_2 = c_1 \in \mathbb{R}^+$.

Proposición 3.11 *El punto de equilibrio del modelo no lineal de duopolio de Cournot (3.10), cuando $C_1(x_1) = c_1 x_1$ y $C_2(x_2) = c_2 x_2$, es*

$$x_1^* = \frac{1 - \sigma}{4c_1} = x_2^* \quad z_1^* = \frac{1}{2} - \frac{1 - q}{qs} = z_2^* \quad (3.20)$$

con $c_2 := c_1$ y $q_1 = q = q_2$.

Teorema 3.4 *Considere el modelo lineal de duopolio de Cournot (3.27) y su correspondiente cuasi-polinomio (3.13). La estabilidad del sistema será independiente del retardo si las funciones de costo son*

$$C_1(x_1) = c_1 x_1 \quad y \quad C_2(x_2) = c_1 x_2.$$

En otras palabras, si el polinomio es estable (inestable) para $\tau = 0$, entonces el polinomio permanecerá estable (inestable) para todos $\tau > 0$.

Es bien sabido que la estabilidad (inestabilidad) del modelo lineal duopolio de Cournot (3.27) depende de la ubicación de las raíces del polinomio en el plano complejo. Supongamos que el sistema (3.27) es estable para $\tau = 0$, es decir, todas las raíces de (3.13) se encuentran en la mitad izquierda del plano complejo. Tomando τ como parámetro y el movimiento continuo de las raíces bajo la variación de τ . El cuasi polinomio (3.13) pierde estabilidad si algunas de sus raíces cruzan a la mitad derecha del plano complejo. Claramente, lo anterior ocurre cuando las raíces cruzan el eje imaginario, $\lambda_0 = \pm i\omega_0$. Por lo tanto, hay una solución de $\omega_0 \in \mathbb{R}$ del polinomio $P(\omega_0)$ dado en (3.15). En otras palabras, existe un $\omega_0 \in \mathbb{R}$ tal que $P(\omega_0) = 0$, si ocurre al menos un cambio de signo entre las constantes $a_{12} := a_{12}(\tau)$, $a_{10} := a_{10}(\tau)$, ..., $a_0 := a_0(\tau)$.

En este caso particular tenemos un $P(\omega)$ de la siguiente forma

$$P(\omega) = a_{12}\omega^{12} + a_{10}\omega^{10} + a_8\omega^8 + a_6\omega^6 + a_4\omega^4, \quad (3.21)$$

donde

$$\begin{aligned} a_{12} &= \frac{k_1^4 c_1^8 q_1^4 s^4 \sigma^4}{(-1 + \sigma)^8} \\ a_{10} &= \left(2 \frac{q_1^4 \sigma^4 s^4 (q_1 s \sigma - 4 \sigma + 4)^2 c_1^{12}}{(-1 + \sigma)^{12}} + 4 \frac{s^6 \sigma^6 q_1^6 c_1^{10}}{(-1 + \sigma)^{10}} + 2 \frac{s^6 \sigma^6 q_1^6 c_1^8}{(-1 + \sigma)^8} \right) k_1^6 \\ a_8 &= \left(\left(-16 \frac{s^7 \sigma^7 q_1^7}{(-1 + \sigma)^{15}} + 96 \frac{s^6 \sigma^6 q_1^6}{(-1 + \sigma)^{14}} - 256 \frac{q_1^5 s^5 \sigma^5}{(-1 + \sigma)^{13}} + 256 \frac{q_1^4 \sigma^4 s^4}{(-1 + \sigma)^{12}} \right) c_1^{16} \right. \\ &\quad \left. + 4 \frac{\sigma^6 s^6 q_1^6 (q_1 s \sigma - 4 \sigma + 4)^2 c_1^{14}}{(-1 + \sigma)^{14}} + 4 \frac{s^8 \sigma^8 q_1^8 c_1^{10}}{(-1 + \sigma)^{10}} + \frac{s^8 \sigma^8 q_1^8 c_1^8}{(-1 + \sigma)^8} \right. \\ &\quad \left. + \left(6 \frac{s^8 \sigma^8 q_1^8}{(-1 + \sigma)^{12}} - 16 \frac{s^7 \sigma^7 q_1^7}{(-1 + \sigma)^{11}} + 64 \frac{s^6 \sigma^6 q_1^6}{(-1 + \sigma)^{10}} \right) c_1^{12} \right) k_1^8 \\ a_6 &= 32 \frac{q_1^6 \sigma^6 s^6 (4 + (q_1 s - 4) \sigma)^2 k_1^{10} c_1^{16}}{(-1 + \sigma)^{14}} + 64 \frac{s^8 k_1^{10} \sigma^8 q_1^8 c_1^{14}}{(-1 + \sigma)^{12}} + 32 \frac{s^8 \sigma^8 q_1^8 k_1^{10} c_1^{12}}{(-1 + \sigma)^{10}} \\ a_4 &= 256 \frac{k_1^{12} c_1^{16} q_1^8 s^8 \sigma^8}{(-1 + \sigma)^{12}}. \end{aligned}$$

Es evidente notar que los términos a_{12} y a_4 siempre van a ser positivos puesto que están elevados a potencias pares, para los términos (a_{10} , a_8 , a_6) se calculó el mínimo. En la siguiente

tabla se puede observar que el mínimo de cada término es 0 por lo cual no existe ningún cambio de signo entre estos términos.

a_i	a_{10}	a_8	a_6	a_4	a_2
Min	0	0	0	0	0
μ	0.17	3.72	0.48	2.99	3
c_1	0	43693	31889.2	49734.3	50000
k_1	0	0	0	0	50000
k_2	0	72553.2	10947.7	49388.4	50000
k_3	50000	88383.8	13228.7	48492.4	50000
k_4	50000	36467.5	0	48746.1	50000
q_1	0	0.68	0.13	0.49	0.50
q_2	0	0.33	0.15	0.49	0.50
s	1	49881.6	10915.3	49318.5	50000.5
σ	0	0.51	0.16	0.33	0

Tabla 3.1: Minimización de los parámetros a_i .

Mediante el uso del software Maple se realizó la minimización de los parámetros a_i que se muestran en la Tabla 3.1, con esto se asegura que el mínimo de cada uno de estos elementos es positivo y no existe ningún cambio de signo.

En otras palabras no existe un ω_0 y en consecuencia la estabilidad del sistema es independiente del retardo.

3.3. Bioreactor

Los logros de la biología moderna revelaron numerosos hechos sobre la estructura y los tipos de regulación de muchos bioprocesos. Esto hizo posible construir modelos matemáticos computacionales que permiten la formalización del conocimiento sobre objetos biológicos complejos [53]. El grado de especificación de los modelos puede ser diferente dependiendo del objetivo del modelado. Si la modelación se dirige al control, por ejemplo, se desea un aumento de la eficiencia en la producción de un proceso biotecnológico, y luego a menudo es suficiente considerar los bloques individuales como componentes y examinar los estados estacionarios de un sistema [54].

El control de los bioprocesos es una tarea delicada debido a al menos tres razones:

1. La complejidad del proceso, la no linealidad y la no estacionariedad, que hacen que el modelado y la estimación de parámetros sean particularmente difíciles.
2. La escasez de mediciones en línea de las concentraciones de los componentes (sustratos esenciales, biomasa y productos de interés).
3. Además, casi todos estos sistemas son sistemas no lineales: dado el gran número de interacciones en tales sistemas, algunos están vinculados a no lineales. Dado esto, y la gran cantidad de entidades (y, por lo tanto, los grados de libertad), es casi seguro que tales sistemas muestren un comportamiento caótico en una amplia gama de condiciones.

Los sistemas complejos pueden mostrar aproximadamente cuatro tipos de comportamiento:

- (i) estado estable
- (ii) periódico
- (iii) complejo
- (iv) altamente caótico.

El estado estacionario es el más simple: el sistema está congelado en un estado particular. Aunque puede haber algunas oscilaciones iniciales, estas se extinguen y el sistema se establece en su estado final [55].

Un sistema dinámico es un sistema simple que puede caracterizarse por

- a) un conjunto de parámetros cuyos valores definen su estado en un momento dado [56].
- b) un conjunto de reglas especificadas matemáticamente que definen el cambio de estado del sistema. Estas reglas generalmente se especifican como ecuaciones diferenciales, que definen la tasa de cambio de cada uno de los parámetros que describen el sistema, en función del estado actual del sistema. Esta definición es muy amplia, y muchos sistemas en biología, medicina, economía y ciencias sociales pueden describirse y estudiarse como sistemas dinámicos [57].

El crecimiento de bacterias, ya sea de una sola especie, cultivos mixtos o ecosistemas completos, se puede describir en términos de sistemas dinámicos. La característica clave de la dinámica de estos sistemas es que muestran bucles autocatalíticos o inhibitorios: se necesita la presencia de una bacteria para hacer más de ese tipo de bacteria (obviamente) [58]. El comportamiento oscilatorio, ha llevado a generar estrategias nuevas de diseño del control para lograr o mantener las células, sustratos y concentraciones de productos a un nivel deseado [59]. En este sentido, un parámetro poco estudiado en estos modelos cinéticos que representan la disminución o aumento de cada una de estas variable de estado (sustrato S , biomasa X , producto P) es el efecto del tiempo de retardo sobre las dinámicas, lo anterior permitirá indicar ya sea en el tiempo de

muestreo operacional o el tiempo en el cual el bioreactor puede tener un punto de bifurcación que afecte al desempeño del bioreactor.

3.3.1. Modelo matemático

Un bioreactor es un recipiente o sistema que mantiene un ambiente biológicamente activo. En algunos casos, un bioreactor es un recipiente en el que se lleva a cabo un proceso químico que involucra organismos o sustancias bioquímicamente activas derivadas de dichos organismos. Este proceso puede ser aeróbico o anaerobio [60]. En términos generales, un bioreactor busca mantener ciertas condiciones ambientales propicias (pH, temperatura, concentración de oxígeno, etc.) al organismo o sustancia química que se cultiva. El diseño de los bioreactores es una tarea de ingeniería relativamente compleja y difícil. Los micro organismos o células son capaces de realizar su función deseada con gran eficiencia bajo condiciones óptimas. Las condiciones ambientales de un bioreactor tales como flujo de gases (por ejemplo, oxígeno, nitrógeno, dióxido de carbono, etc.), temperatura, pH, oxígeno disuelto y velocidad de agitación o circulación, deben ser cuidadosamente monitoreadas y controladas [61].

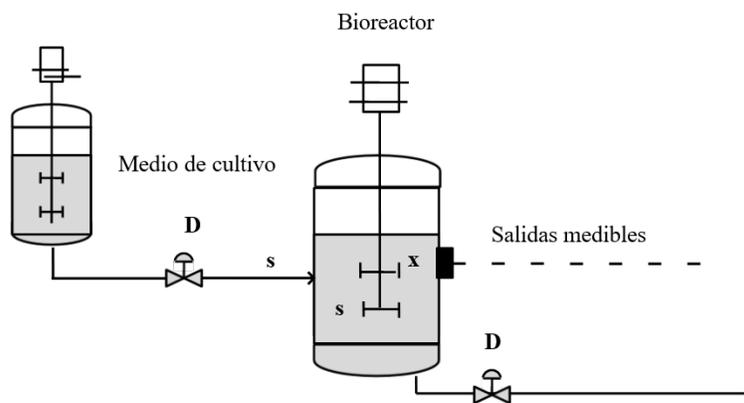


Figura 3.2: Esquema de un Bioreactor

Para nuestro caso de estudio vamos a trabajar con un reactor similar al de la Figura 3.2, donde s está denotado por el sustrato, x es la biomasa, el sistema tiene un comportamiento parecido al sistema presa vs. depredador puesto que (s) es el alimento de (x) el cual es un organismo que ingiere el sustrato y lo convierte en un gas, a este modelo se le ingresa un flujo constante de sustrato denotado por $D \geq 0$.

El modelo presa vs. depredador [62], es un modelo ya muy conocido y estudiado, el cual esta

denotado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(-c + dy), \\ \dot{y} &= y(a - bx).\end{aligned}\tag{3.22}$$

Donde:

- a = tasa de crecimiento de las presas en ausencia de los cazadores.
- b = éxito en la caza, que hace disminuir la población de las presas.
- c = tasa de disminución de los depredadores en ausencia de las presas.
- d = éxito en la caza del depredador, que aumenta la población de los cazadores.

Después de varias simulaciones por computadora se propone el siguiente modelo de biomasa vs. sustrato

$$\begin{aligned}\dot{s} &= D(s_0 - s(t)) + (a - bx(t - \tau)^\alpha) s(t)^\beta \\ \dot{x} &= Dx(t) + (-a + bs(t)^\beta) x(t)^\alpha\end{aligned}\tag{3.23}$$

Esté modelo esta inspirado en el sistema (3.22) y esta conformado por 2 partes fundamentales, la primera son las entradas y las salidas ($D(s_0 - s(t))$ y Dx) y la segunda es la parte de reacción la cual es básicamente el modelo (3.22) con la diferencia que a este modelo se le agregan los exponentes fraccionarios a las variables de estado.

3.3.2. Análisis

$$\begin{aligned}\dot{s} &= D(s_0 - s(t)) + (a - bx(t - \tau)^\alpha) s(t)^\beta \\ \dot{x} &= Dx(t) + (-a + bs(t)^\beta) x(t)^\alpha\end{aligned}\tag{3.24}$$

Proposición 3.12 *los puntos de equilibrio de x, s del sistema del bioreactor planteado arriba son:*

De la ecuación número dos del sistema (3.24) despejamos a x

$$\begin{aligned}Dx(t) + (-a + bs(t)^\beta) x(t)^\alpha &= 0, \\ Dx^{1-\alpha} \alpha &= a - bs^\beta, \\ x^* &= \left(\frac{a - bs^\beta}{D}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Para obtener s^* sustituimos el valor de x^* en la primera ecuación del sistema (3.24)

$$s^* = D(s_0 - s(t)) + \left(a - b \left(\frac{a - bs^\beta}{D} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) s(t)^\beta \quad (3.26)$$

cabe mencionar que esta solución se tiene que hacer de forma numérica.

De acuerdo con la Proposición 3.1 la linealización del sistema es de la forma siguiente

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + B\vec{x}_\tau. \quad (3.27)$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} -D + \frac{as^\beta\beta}{s} - \frac{bs^\beta\beta x^\alpha}{s} & 0 \\ \frac{bs^\beta\beta x^\alpha}{s} & D - \frac{ax^\alpha\alpha}{x} + \frac{bs^\beta x^\alpha\alpha}{x} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bx^\alpha\alpha s^\beta}{x} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico tiene la forma siguiente

$$q(\lambda, \tau) = \lambda^2 - \Upsilon \lambda + \gamma e^{-\lambda\tau} - \kappa.$$

Con

$$\begin{aligned} \Upsilon &= \frac{x^\alpha s^\beta \alpha bs - x^\alpha s^\beta b\beta x - x^\alpha a\alpha s + s^\beta a\beta x}{sx}, \\ \gamma &= \frac{b^2 (s^\beta)^2 (x^\alpha)^2 \alpha \beta}{sx}, \\ \kappa &= \frac{(\alpha (-bs^\beta + a) x^\alpha - Dx) (-b\beta s^\beta x^\alpha + a\beta s^\beta - Ds)}{sx}. \end{aligned}$$

Considere el cambio de variable $\lambda = i\omega$ en el cuasi-polinomio (3.3.2)

$$\begin{aligned} q(\lambda, \tau) &= \lambda^2 - \Upsilon \lambda + \gamma e^{-\lambda\tau} - \kappa \\ &= -\omega^2 - i\Upsilon \omega + \gamma (\cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)) - \kappa, \end{aligned} \quad (3.28)$$

observe que

$$\begin{aligned} Re\{q(i\omega, \tau)\} &= -\omega^2 + \gamma \cos(\omega\tau) - \kappa, \\ Im\{q(i\omega, \tau)\} &= -\Upsilon \omega - \gamma \sin(\omega\tau), \end{aligned}$$

Claramente, $q(i\omega, \tau) = 0$ si $Re\{q(i\omega, \tau)\} = 0$ y $Im\{q(i\omega, \tau)\} = 0$. En otras palabras, $q(i\omega, \tau) = 0$ si

$$\begin{aligned}\sin(\omega\tau) &= -\frac{\Upsilon\omega}{\gamma}, \\ \cos(\omega\tau) &= \frac{\omega^2 + \kappa}{\gamma}.\end{aligned}$$

Ahora, usando $\sin^2(\omega\tau) + \cos^2(\omega\tau) = 1$, lo anterior es cierto si

$$\begin{aligned}P(\omega) &= \sin^2(\omega\tau) + \cos^2(\omega\tau) - 1 \\ &= \frac{\omega^4}{\gamma^2} + 2\frac{\kappa\omega^2}{\gamma^2} + \frac{\kappa^2}{\gamma^2} + \frac{\Upsilon^2\omega^2}{\gamma^2} - 1\end{aligned}\tag{3.29}$$

En ecuación (3.29) $a_4 > 0$ y $a_0 < 0$ y de acuerdo con la Proposición 3.3 existe al menos una bifurcación de Hopf la cual está determinada por

$$\tau_0 = \frac{1}{\omega_0} \tan^{-1} \left(\frac{-\frac{\Upsilon\omega_0}{\gamma}}{\frac{\omega_0^2 + \kappa}{\gamma}} \right) + \frac{n\pi}{\omega_0}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\tag{3.30}$$

Capítulo 4

Simulaciones y resultados experimentales

En este Capitulo se presentan las simulaciones de los resultados mostrados en el Capitulo 3, en la primera sección me muestran los resultado aplicados al sistema del duopolio de Cournot para esto presentamos dos simulaciones, la primer simulación nos muestra como la estabilidad del sistema es independiente del retardo y en una segunda simulación mostramos como el retardo afecta la estabilidad del sistema, en la segunda sección se presentan los resultados aplicados al Bioreactor así como la aproximación de nuestro modelo propuesto en el capitulo tres con algunos resultados experimentes.

4.1. Duopolio de Cournot

4.1.1. Estabilidad dependiente del retardo

En esta sección se presenta la simulación de los resultados obtenidos en la subsección 3.2 en la cual se toma un valor de $c_1 = 0.1$ y $c_2 = kc_1$ con $k = 10$ el valor de $\sigma = 0.1$, $s = 40$, $q_{1,2} = 0.5$ y $k_{1,2,3,4} = 1$. El punto de equilibrio se encuentra situado en $x_1^* = 0.7438016529$, $x_2^* = 0.07438016529$, $z_1^* = .8840909091$ y $z_2^* = 0.06590909091$

Con el siguiente polinomio $P(\omega)$,

$$P(\omega) = 1.320278407\omega^{12} + 68.00683814\omega^{10} + 782.0090231\omega^8 + 3347.588382\omega^6 + 5413.212055\omega^4 + 2042.205808\omega^2 - 414.9355445, \quad (4.1)$$

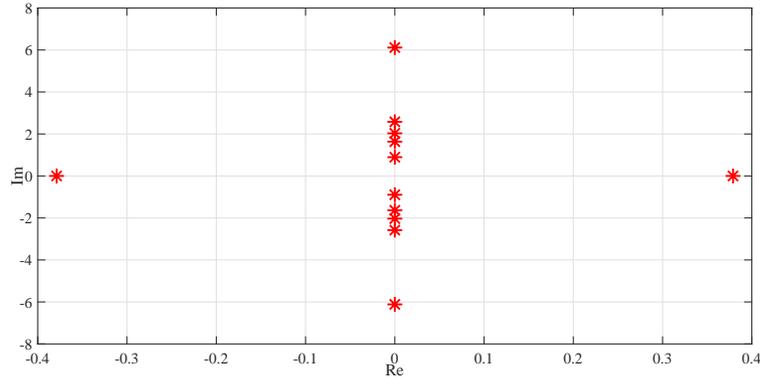


Figura 4.1: Ubicación de las raíces de $P(\omega)$.

como se puede observar en la Figura 4.1 el polinomio $P(\omega)$ tiene una raíz real positiva en $\omega_0 = 0.3788$ y según con (3.4), podemos encontrar un τ_0 en el cual se encuentren las raíces sobre el eje imaginario .

$$\tau_0 = \frac{1}{0.3788} \tan^{-1} \frac{.9685670338}{-.2487526894} + \frac{n\pi}{0.3788}; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \tau_0 = 4.809451549. \quad (4.2)$$

El sistema no lineal tiene la forma siguiente,

$$\begin{aligned} x_1' &= 0.95 (x_1(t) + x_2(t))^{-1} - 0.95 \frac{x_1(t)}{(x_1(t) + x_2(t))^2} - 0.10 \\ &\quad + 2 \frac{x_2((z_1(t) - 1.0)x_1(t) + z_1(t)x_2(t))}{(x_1(t) + x_2(t))^3} \\ x_2' &= 0.95 (x_1(t - \tau) + x_2(t))^{-1} - 0.95 \frac{x_2(t)}{(x_1(t - \tau) + x_2(t))^2} - 1 \\ &\quad + 2 \frac{x_1(t - \tau)(z_2 t x_1(t - \tau) + (z_2(t) - 1.0)x_2(t))}{(x_1(t - \tau) + x_2(t))^3} \\ z_1' &= -0.05 + 2 \frac{x_1(t)}{x_1(t) + x_2(t)} - 2 z_1(t) \\ z_2' &= -0.05 + 2 \frac{x_2(t)}{x_1(t - \tau) + x_2(t)} - 2 z_2(t). \end{aligned} \quad (4.3)$$

El sistema lineal es el siguiente

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.2691358003 x_1(t) + 1.346913582 x_2(t) + 0.22 z_1(t) \\ x_2 &= -0.8530864187 x_1(t - \tau) - 4.913580245 x_2(t) + 2.2 z_2(t) \\ z_1 &= 0.22 x_1(t) - 2.22 x_2(t) - 2 z_1(t) \\ z_2 &= -0.22 x_1(t - \tau) + 2.2 x_2(t) - 2 z_2(t). \end{aligned} \quad (4.4)$$

El polinomio característico es el siguiente

$$q(\lambda, \tau) = \lambda^4 + 9.182716045 \lambda^3 + \left(21.06563021 + 1.149033684 e^{-\lambda \tau} \right) \lambda^2 + \left(14.47352532 + 4.840000001 e^{-\lambda \tau} \right) \lambda + 2.390123434 + 4.840000002 e^{-\lambda \tau}. \quad (4.5)$$

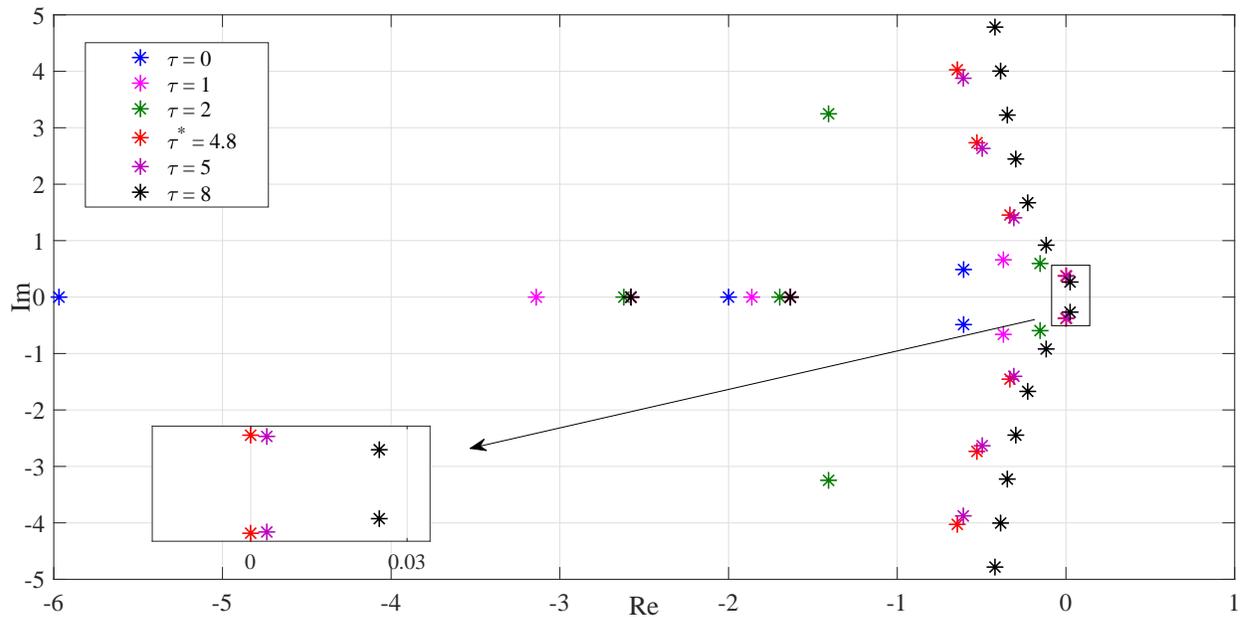


Figura 4.2: Ubicación de las raíces de $q(\lambda, \tau)$.

En la Figura 4.2 se puede apreciar el movimiento de las raíces de cuasi-polinomio $q(\lambda, \tau)$, de color rojo se observa que las raíces dominantes se encuentran sobre el eje imaginario cuando τ se evalúa en el punto crítico $\tau^* = 4.8$ y como es que al variar el valor de τ el sistema pierde o gana estabilidad.

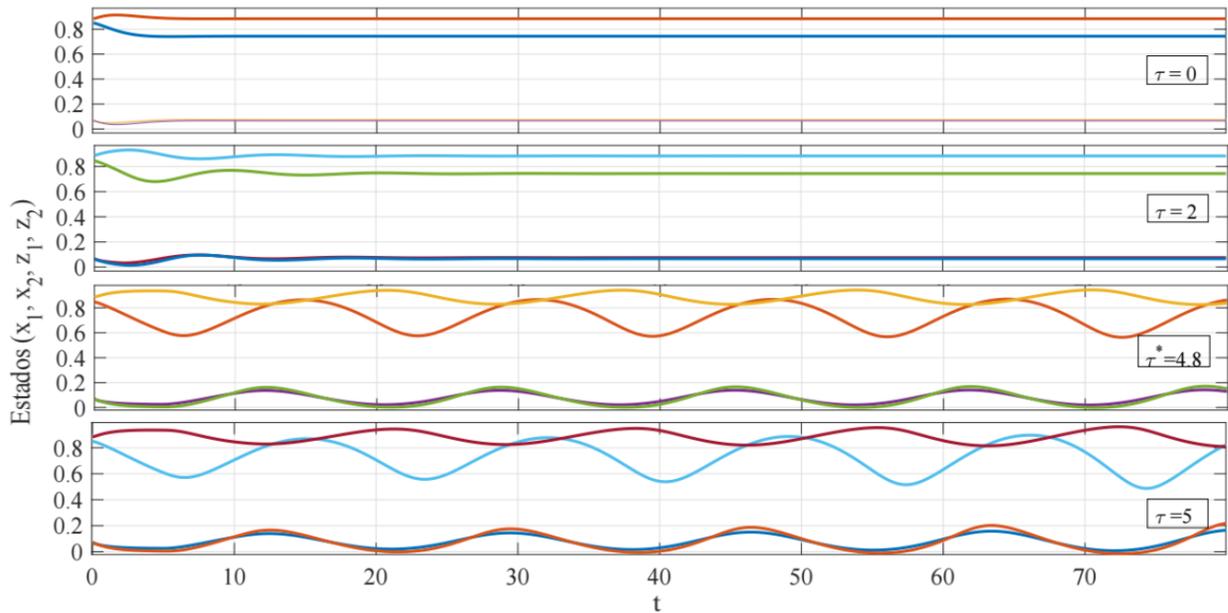


Figura 4.3: Respuesta del sistema lineal.

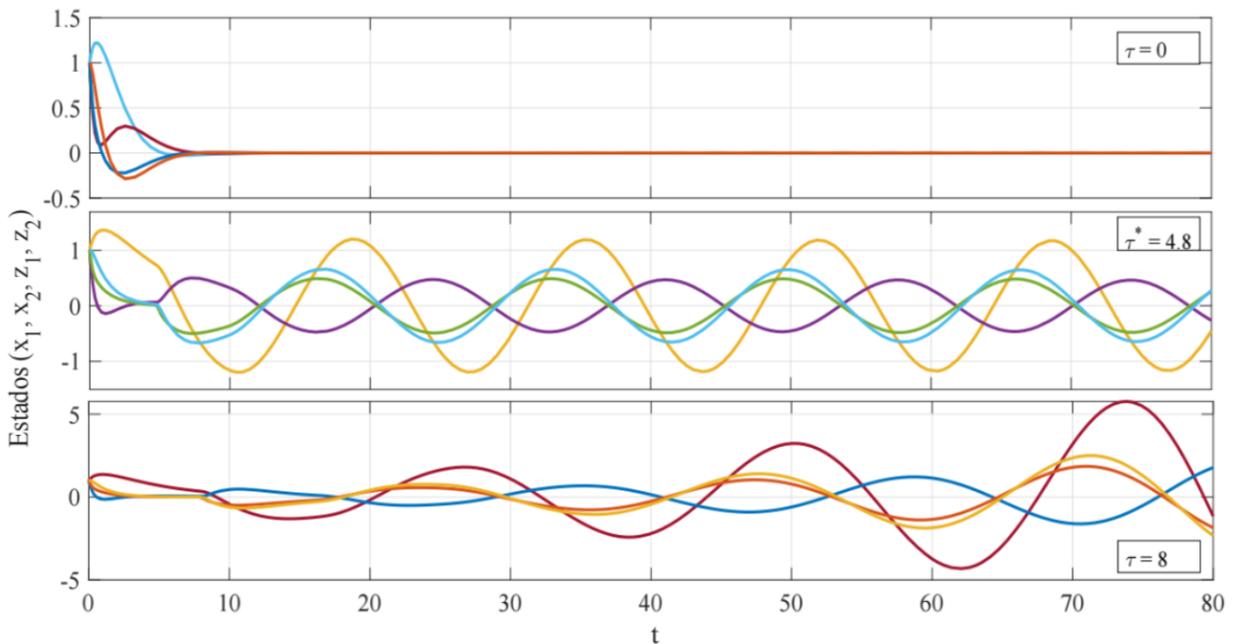


Figura 4.4: Respuesta del sistema no lineal.

En las Figuras 4.3 y 4.4 se observa el comportamiento del sistema lineal y no lineal respectivamente es evidente notar que para ambos casos cuando $\tau = 0$ el sistema es estable, cuando se evalúa a $\tau = \tau^*$ es sistema es marginalmente estable, esto se debe a que las raíces dominantes

del sistema se encuentran sobre el eje imaginario del plano complejo, pero para cualquier valor de $\tau > \tau^*$ es sistema es inestable y se observa como la respuesta del sistema tiende a alejarse de los puntos de equilibrio.

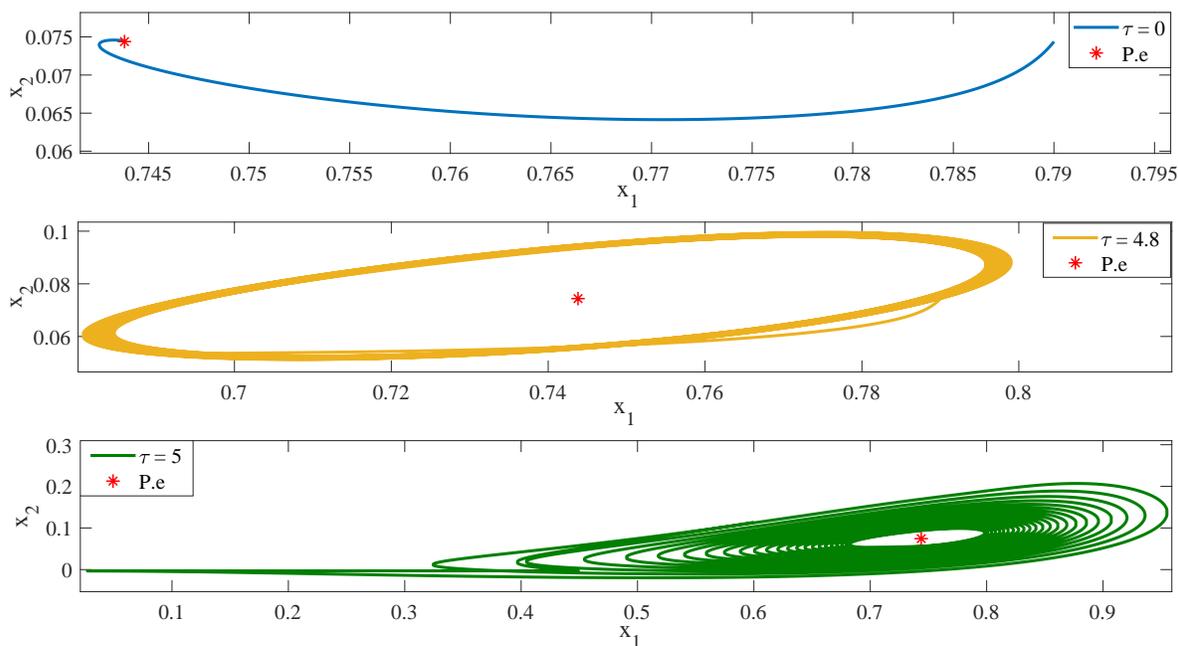


Figura 4.5: Órbitas periódicas.

En la Figura 4.9 se observa que cuando $\tau = 0$ el sistema converge al punto de equilibrio, cuando el valor de $\tau \in [0, 4.85]$ aparece una órbita atractora alrededor del punto de equilibrio, si el valor de $\tau = 4.85$ aparece una órbita periódica alrededor del punto de equilibrio y para valores de $\tau \in [4.85, \infty)$ surge una órbita que será un repulsor.

4.1.2. Estabilidad independiente del retardo

En esta sección se presenta la simulación del apartado 3.1 en la cual se toma un valor de $c_{1,2} = 1$ el valor de $\sigma = .1$, $s = 40$, $q_{1,2} = .5$ y $k_{1,2,3,4} = 1$ el punto de equilibrio se encuentra situado en $x_{1,2}^* = .225$ y $z_{1,2}^* = 0.475$.

Con el siguiente polinomio $P(\omega)$,

$$P(\omega) = 37.16891691 \omega^{12} + 4584.721602 \omega^{10} + 145871.4478 \omega^8 + 362249.6093 \omega^6 + 232043.7190 \omega^4, \quad (4.6)$$

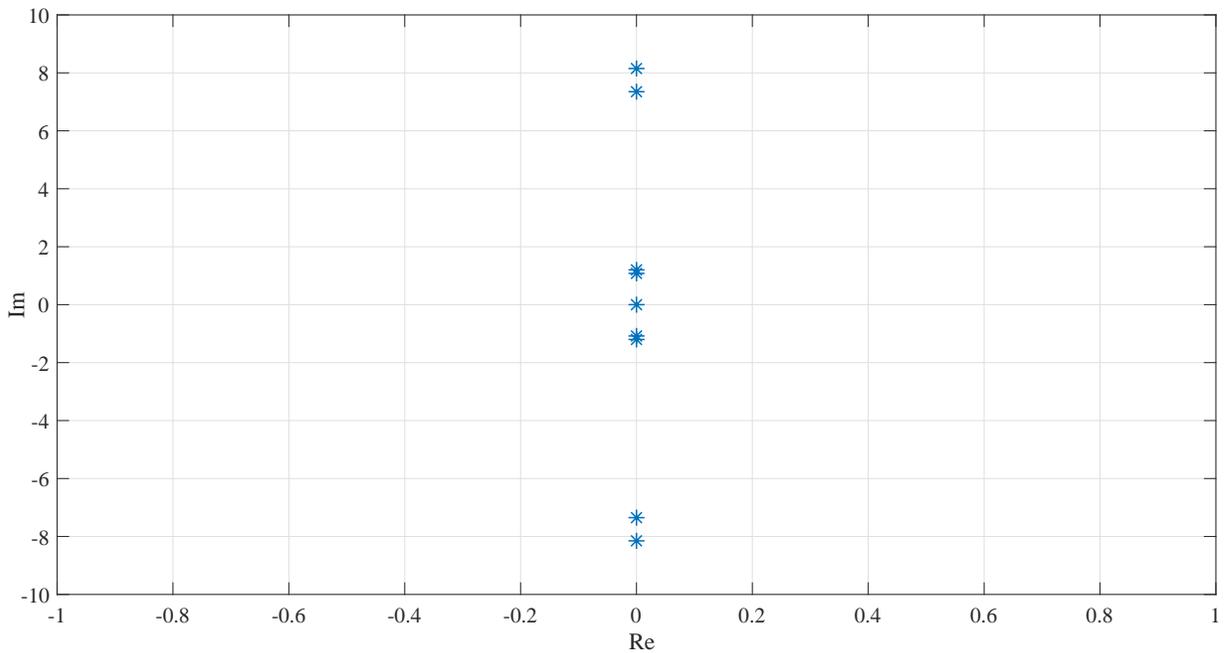


Figura 4.6: Ubicación de las raíces de $P(\omega)$

como se puede apreciar en la Figura 4.6 el polinomio $P(\omega)$ no tiene ninguna raíz real positiva, esto indica que no existe ningún cambio de signo en el polinomio y siguiendo lo que dice el Teorema 3.1, al no existir una $\omega_0 \in \mathbb{R}^+$ en esta caso la estabilidad del sistema es independiente del retardo.

El sistema no lineal tiene la forma siguiente,

$$\begin{aligned}
x_1' &= 0.95 (x_1(t) + x_2(t))^{-1} - 0.95 \frac{x_1(t)}{(x_1(t) + x_2(t))^2} - 1.0 \\
&\quad + 2.0 \frac{((z_1(t) - 1.0) x_1(t) + z_1(t) x_2(t)) x_2(t)}{(x_1(t) + x_2(t))^3}, \\
x_2' &= 0.95 (x_1(t - \tau) + x_2(t))^{-1} - 0.95 \frac{x_2(t)}{(x_1(t - \tau) + x_2(t))^2} - 1.0 \\
&\quad + 2.0 \frac{(z_2(t) x_1(t - \tau) + (z_2(t) - 1.0) x_2(t)) x_1(t - \tau)}{(x_1(t - \tau) + x_2(t))^3}, \\
z_1' &= -0.05 + 2.0 \frac{x_1(t)}{x_1(t) + x_2(t)} - 2.0 z_1(t), \\
z_2' &= -0.05 + 2.0 \frac{x_2(t)}{x_1(t - \tau) + x_2(t)} - 2.0 z_2(t).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Y de acuerdo con la proposición 2.1 el sistema lineal esta dado por

$$\begin{aligned}
x_1 &= -6.91358024 x_1(t) + 2.469135801 x_2(t) + 2.2 z_1(t) \\
x_2 &= 2.469135801 x_1(t - \tau) - 6.913580248 x_2(t) + 2.2 z_2(t) \\
z_1 &= 2.2 x_1(t) - 2.2 x_2(t) - 2 z_1(t) \\
z_2 &= -2.2 x_1(t - \tau) + 2.2 x_2(t) - 2 z_2(t).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

El polinomio característico esta dado por

$$\begin{aligned}
q(\lambda, \tau) &= \lambda^4 + 17.82716050 \lambda^3 + \left(97.22969064 - 6.096631604 e^{-\lambda \tau}\right) \lambda^2 \\
&\quad + \left(158.4636490 + 0.000000009876543204 e^{-\lambda \tau}\right) \lambda + 79.01234581 - 4.0 \times 10^{-18} e^{-\lambda \tau}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

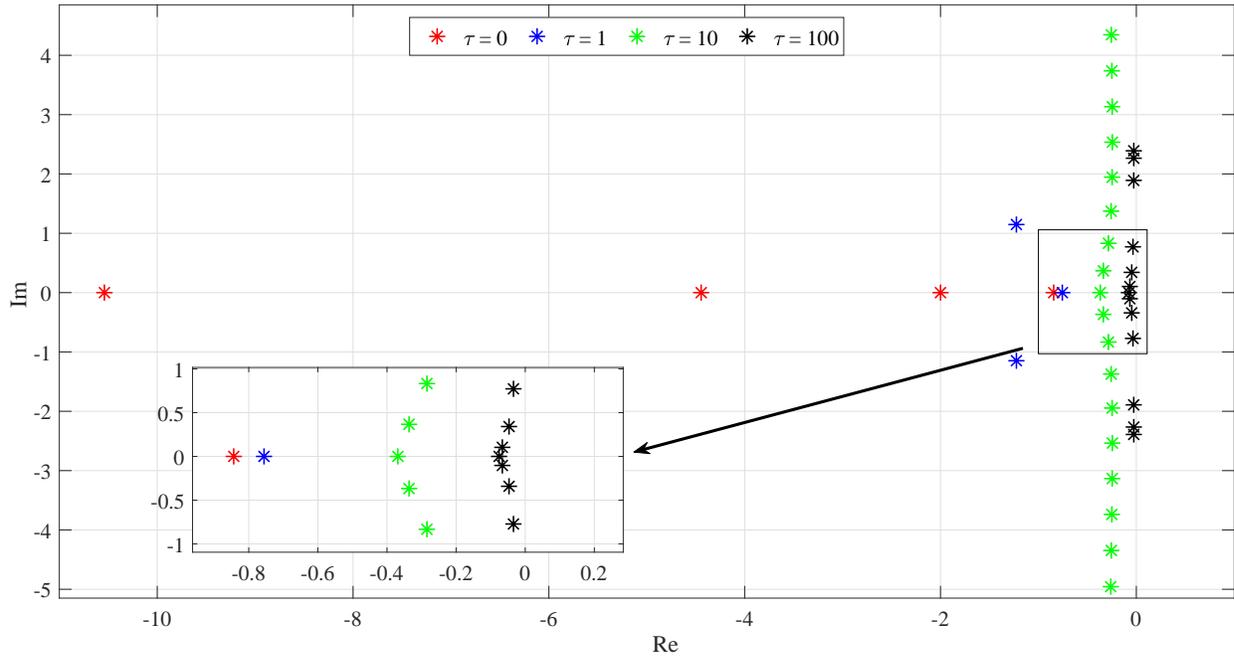


Figura 4.7: Ubicación de las raíces de $q(\lambda, \tau)$.

Como se muestra en la Figura 4.7 a medida que el retardo va aumentando las raíces de polinomio característico se aproximan cada vez más al eje imaginario, cabe destacar que en este caso las raíces nunca cruzan el eje, por lo cual es correcto argumentar que la estabilidad del sistema no depende del retardo.

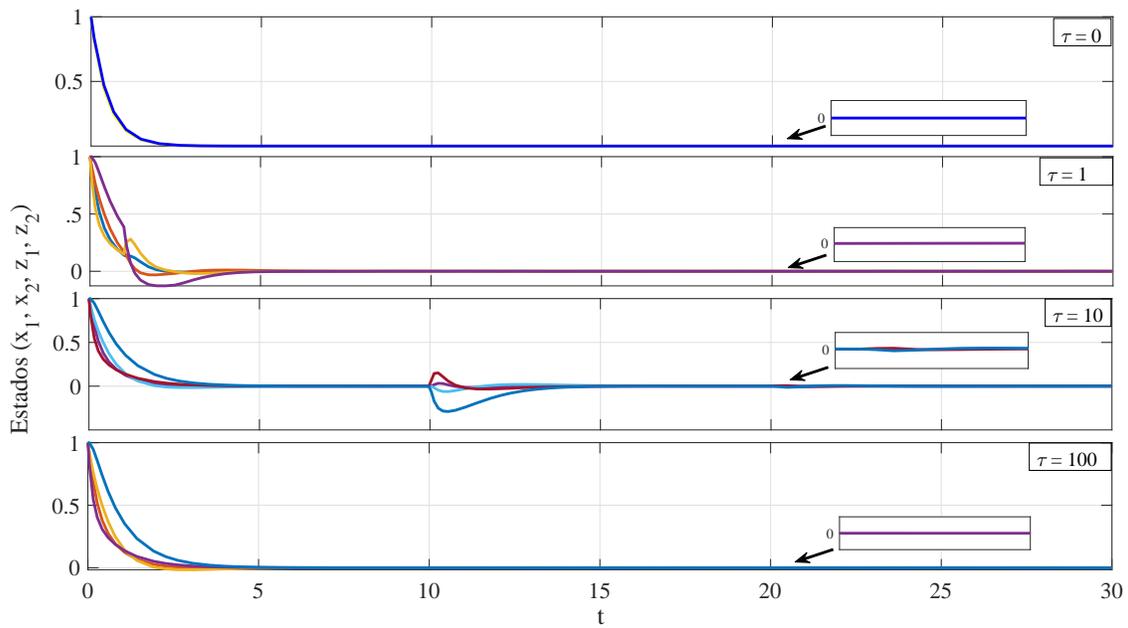


Figura 4.8: Respuesta del sistema lineal.

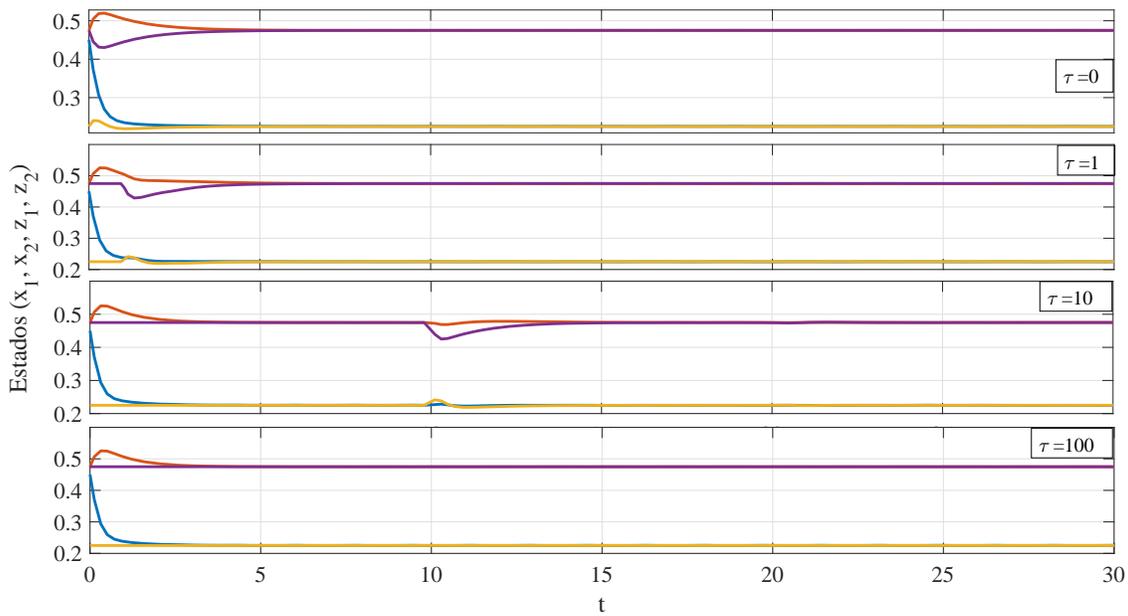


Figura 4.9: Respuesta del sistema no lineal.

En las Figuras 4.8 y 4.9 se muestra claramente como la influencia del retardo es despreciable en la estabilidad del sistema.

4.2. Biorreactor

4.2.1. Estabilidad dependiente del retardo

En esta sección se presenta la simulación del apartado 3.2 en el cual se toman los valores de $a = .45$, $b = .31$, $\alpha = .95$, $\beta = .5$, $s_0 = 10$, $D = .12$ y $x^* = 4.7993$, $s^* = 1.06695$.

Con el siguiente polinomio $P(\omega)$

$$28.51315184\omega^4 + 9.20089222\omega^2 - .9996688048 \quad (4.10)$$

$P(\omega)$ tiene una raíz real positiva en $\omega_0 = 0.292956175588761$ y según con (3.4), podemos encontrar un τ_0 en el cual se encuentran las raíces sobre el eje imaginario.

$$\tau_0 = \frac{1}{0.292956175588761} \tan^{-1} \frac{0.8791876797}{0.4764756278} + \frac{n\pi}{0.292956175588761}; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.11)$$

El sistema no lineal tiene la forma siguiente,

$$\begin{aligned} \dot{s} &= 1.20 - 0.12s + 0.45s^{0.5} - 0.31(x(t-\tau))^{0.95}s^{0.5}, \\ \dot{x} &= 0.12x - 0.45x^{0.95} + 0.31s^{0.5}x^{0.95}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

El sistema lineal es el siguiente

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -0.12 + 0.225(s(t))^{-0.5} - 0.155(s(t))^{-0.5}(x(t))^{0.95} - 0.2945(s(t))^{0.5}(x(t-\tau))^{-0.05}, \\ \dot{x} &= \left(-0.4275 + 0.2945(s(t))^{0.5}\right)(x(t))^{-0.05} + 0.155(s(t))^{-0.5}(x(t))^{0.95} + 0.12. \end{aligned} \quad (4.13)$$

El polinomio característico es el siguiente

$$\lambda^2 + 0.5620258906\lambda + 0.1872739568e^{-\lambda\tau} - 0.003408155329 \quad (4.14)$$

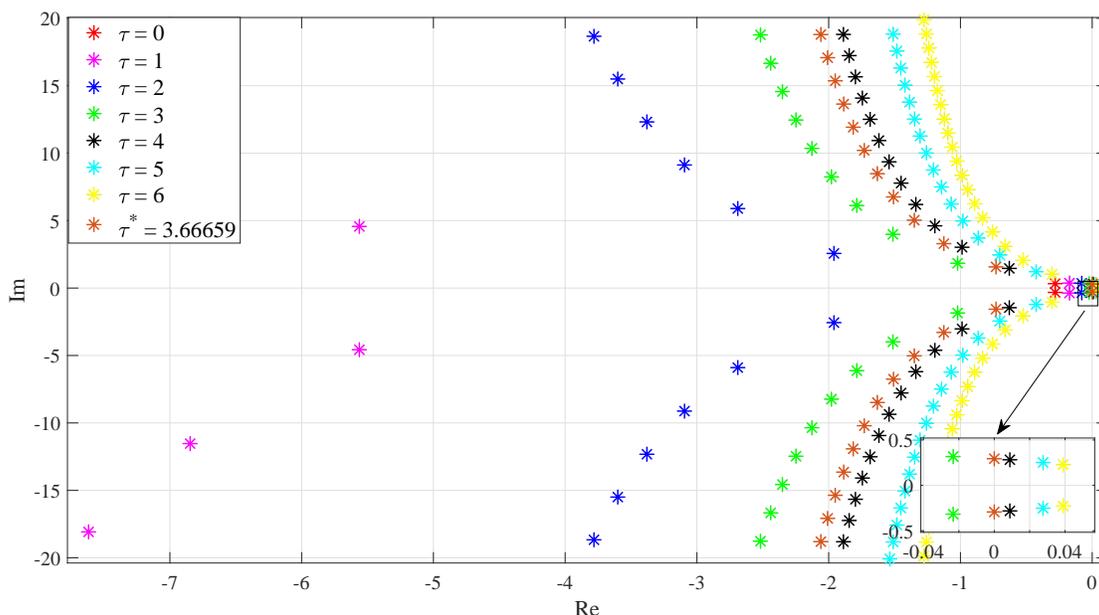


Figura 4.10: Ubicación de las raíces de $q(\lambda, \tau)$.

En la Figura 4.10 se observa el movimiento de las raíces cuando el retardo es variado, existe un punto crítico en $\tau^* = 3.666$.

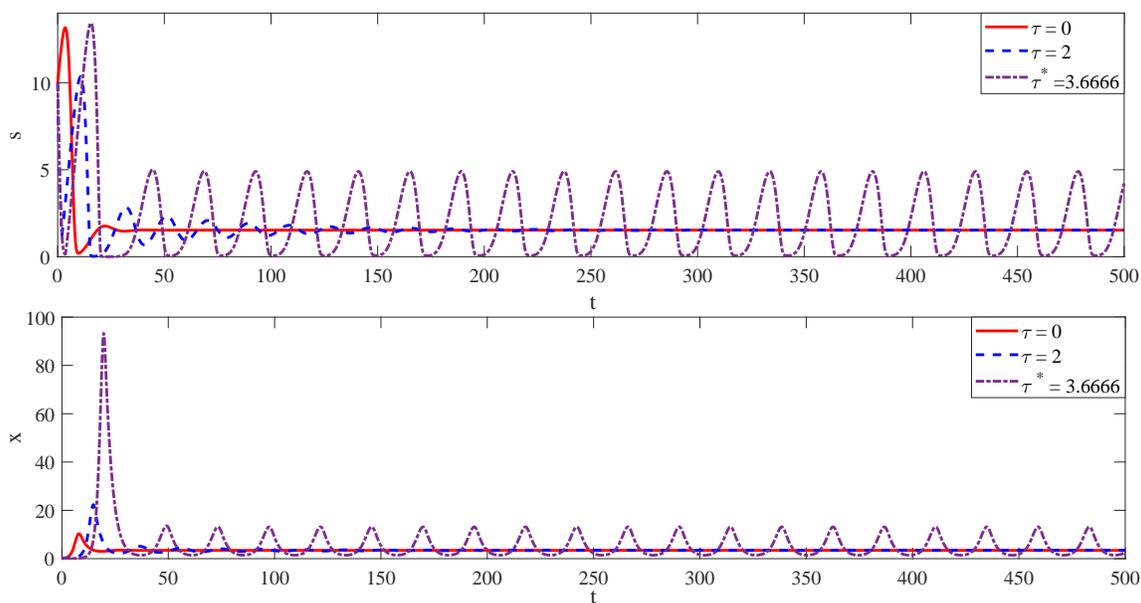


Figura 4.11: Respuesta del sistema no lineal.

La Figura 4.11 muestra el comportamiento de las dinámicas del sistema, se observa de color rojo el comportamiento del sistema libre de retardo el cual es asintóticamente estable, cuando se

le agrega el retardo al modelo se generan oscilaciones en el sistema en la gráfica anterior están denotadas por una línea azul punteada, este sistema tiene un punto crítico en $\tau^* = 3.666$ y como se muestra en la figura el sistema es marginalmente estable,

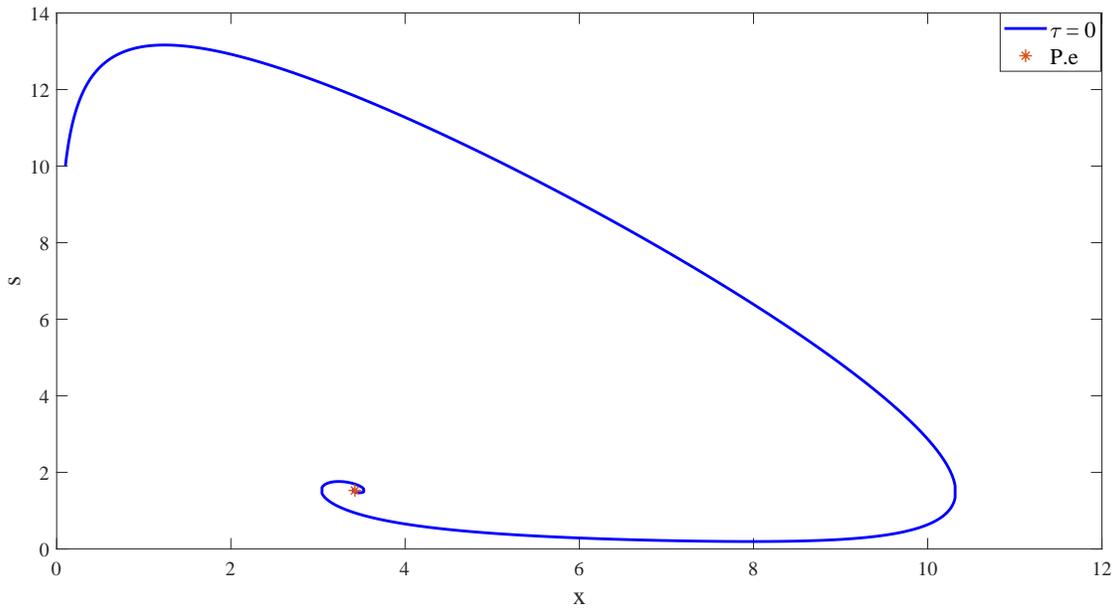


Figura 4.12: Diagrama de fase $\tau = 0$.

En la Figura 4.12 se muestra el diagrama de fase del sistema libre de retardo, en el cual se observa como el sistema converge al punto de equilibrio.

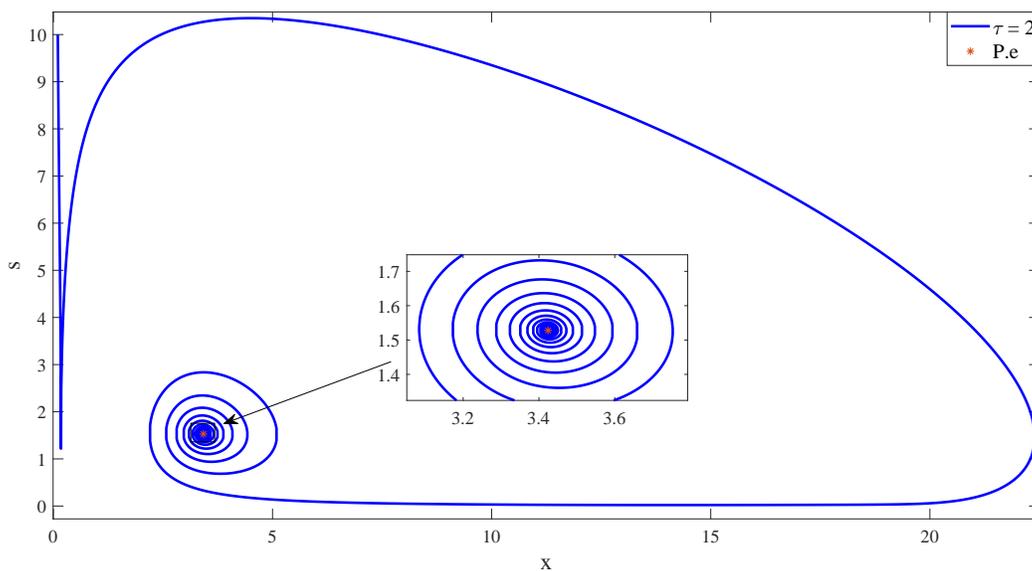


Figura 4.13: Diagrama de fase $\tau = 2$.

En la Figura 4.13 se observa el efecto del retardo sobre el sistema, la presencia de este genera oscilaciones pero aun así el sistema converge a su punto de equilibrio

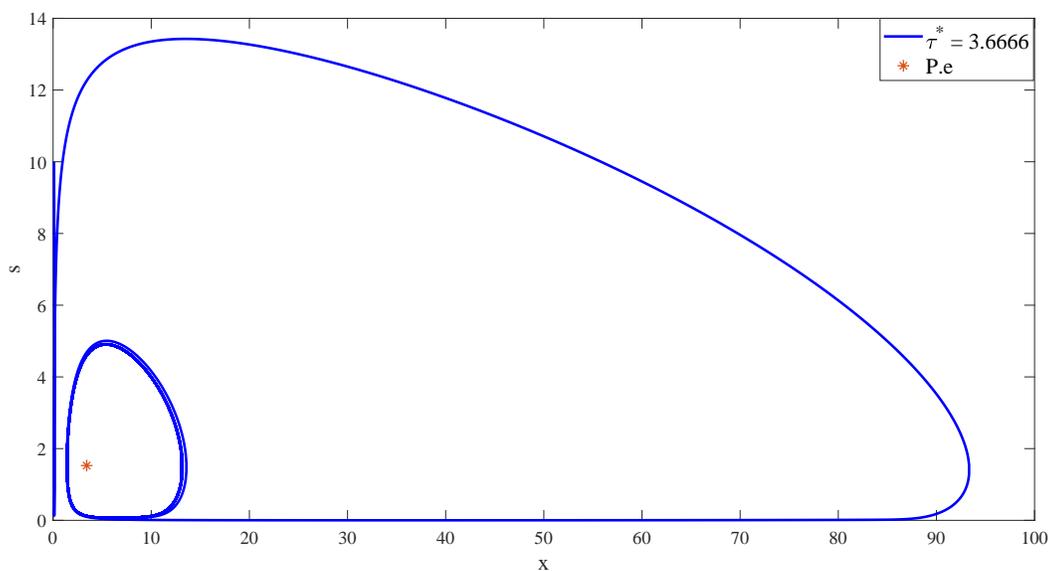


Figura 4.14: Diagrama de fase $\tau^* = 3.6666$.

En la Figura 4.14 se aprecia el ciclo límite alrededor del punto de equilibrio cuando el valor de $\tau = \tau^*$, en este punto es donde se puede hacer que el sistema sea estable o inestable, sólo se necesita variar infinitesimalmente el valor de τ .

4.2.2. Resultados experimentales

En esta sección se presentan algunos resultados obtenidos resultantes de la comparación de algunos datos experimentales otorgados por el Dr. Pablo A. López Pérez de la Escuela Superior de Apan, con nuestro modelo (3.23) propuesto para el sistema del Biorreactor.

$$\begin{aligned}\dot{s} &= D(s_0 - s(t)) + (a - bx(t - \tau)^\alpha) s(t)^\beta \\ \dot{x} &= Dx(t) + (-a + bs(t)^\beta) x(t)^\alpha\end{aligned}$$

La sintonización de parámetros del modelo anterior se realizó de manera experimental y los valores que hicieron que el modelo se aproximara más a los datos experimentales son $a = .45$, $b = .31$, $\alpha = .95$, $\beta = .5$, $s_0 = 10$, $D = .12$

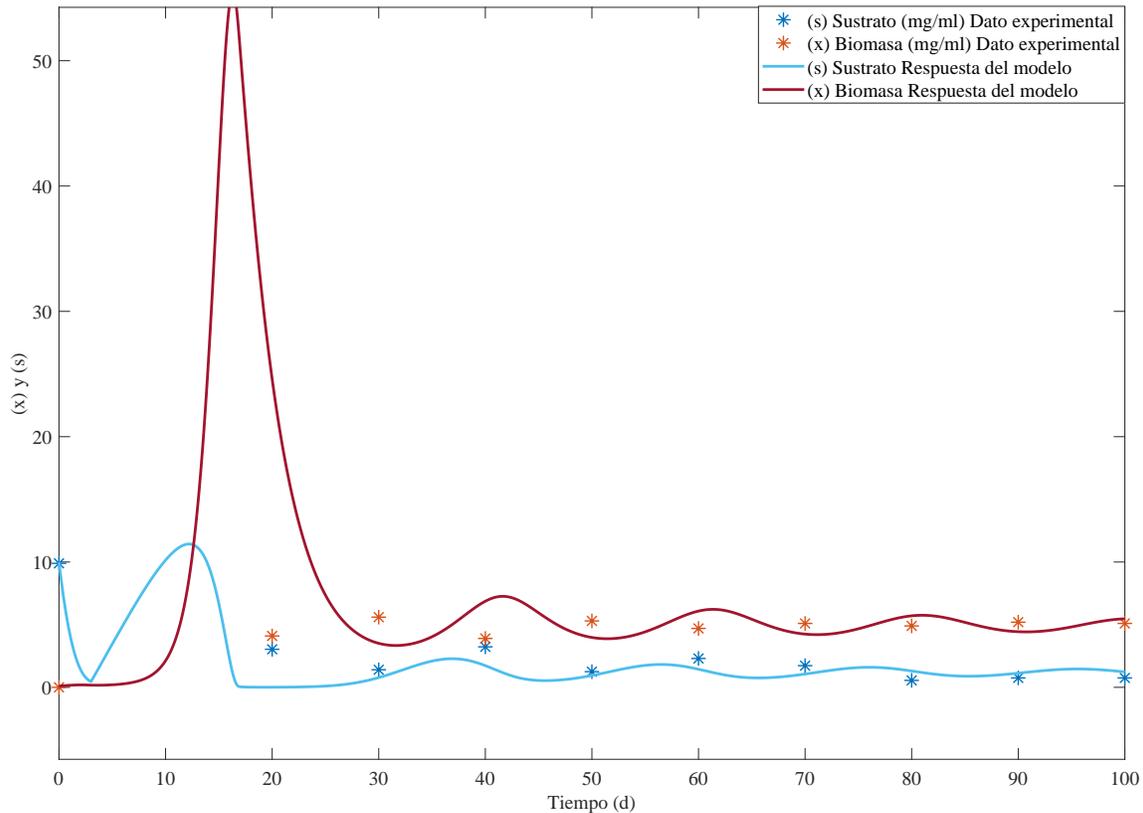


Figura 4.15: Aproximación de resultados experimentales.

En la Figura 4.15 se puede observar que el modelo propuesto tiende a aproximarse a los datos experimentales.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

5.1. Conclusiones

A lo largo de este trabajo de investigación, se trabajó con dos modelos dinámicos muy interesantes los cuales fueron el modelo dinámico del duopolio de Cournot y un modelo dinámico de un bioreactor propuesto por nosotros. El sistema del duopolio de Cournot fue un modelo muy interesante de analizar, el sistema inicialmente es asintóticamente estable pero al variar ciertos parámetros como son los costos, el impuesto ISR o la probabilidad de evasión fiscal podemos afectar la estabilidad del sistema, un claro ejemplo es al jugar con los costos c_1 y c_2 el sistema muestra una independencia o dependencia del retardo para la estabilidad del sistema, cuando $c_2 = kc_1$ y $k \in [3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}]$ la estabilidad del sistema es independiente del retardo, caso contrario cuando $k \in (5.8284, \infty)$ la estabilidad de sistema es dependiente del retardo.

El modelo del bioreactor también fue un caso interesante y muy útil para ejemplificar el algoritmo para la obtención de los puntos de bifurcación, sin embargo el mérito de este trabajo también fue que dicho modelo fue propuesto y sintonizado durante el desarrollo de este trabajo, se válido el modelo gracias a la comparación de la respuesta del sistema y datos experimentales. Se determino que el tiempo de retardo es un parámetro que permite generar puntos de bifurcación en modelos dinámicos de bioreactores, lo anterior, esta basado en que actualmente los puntos de bifurcación encontrados en este tipo de modelos son basados en la tasa de dilución o en algún parámetro, la magnitud de este valor se puede considerar para el diseño de una ley de control robusta a este tipo de perturbaciones.

Es importante recordar que es necesario que el polinomio $P(\omega)$ tenga al menos una raíz real positiva para que exista una dependencia del retardo en la estabilidad del sistema, si esta raíz

existe entonces podemos encontrar el valor crítico de τ en el cual aparece una bifurcación de Hopf.

Hasta ahora se ha desarrollado la metodología para obtener el valor crítico de τ pero aún no se tienen resultados para determinar el tipo de bifurcación que aparece ya sea subcrítica o supercrítica.

5.2. Trabajo futuro

Como ya se ha mencionado podemos obtener el valor crítico en el cual ocurre una bifurcación de Hopf pero aun no se ha obtenido un resultado para determinar si será un ciclo límite estable o inestable, para determinar el tipo de ciclo limite que aparece es necesario calcular el primer coeficiente de Lyapunov, es por eso que estos meses se trabajará en la metodología para obtener este valor y poder así estudiar más a fondo la estabilidad de esta clase de sistemas.

Bibliografía

- [1] Morris W Hirsch, Stephen Smale, and Robert L Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press, 2012.
- [2] Gregor F Fussmann, Stephen P Ellner, Kyle W Shertzer, and Nelson G Hairston Jr. Crossing the hopf bifurcation in a live predator-prey system. *Science*, 290(5495):1358–1360, 2000.
- [3] Henri Poincaré. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *Acta mathematica*, 7(1):259–380, 1885.
- [4] Eberhard Hopf. Abzweigung einer periodischen lösung von einer stationären lösung eines differentialsystems. *Ber. Math.-Phys. Kl Sächs. Akad. Wiss. Leipzig*, 94:1–22, 1942.
- [5] Tian Ma and Shouhong Wang. *Bifurcation theory and applications*, volume 53. World Scientific, 2005.
- [6] Arturo González Sánchez and David Romero Romero. Control de una columna de destilación binaria utilizando agentes inteligentes. *Científica*, 12(3), 2008.
- [7] Antonio Flores and Ciencias Quimicas. Control de procesos con retardo, 2012.
- [8] R Bárcena and M de la Sen. Control digital de plantas de primer orden con retardo temporal mediante dispositivos froh. *Actas del Seminario Anual de Automática, Electrónica Industrial e Instrumentación, SAAEI'02*, 1:157–160.
- [9] Emil Hernández-Arroyo, Jorge Luis Díaz-Rodríguez, and Omar Pinzón-Ardila. Estudio del comportamiento de un control mpc [control predictivo basado en el modelo] comparado con un control pid en una planta de temperatura. *Facultad de Ingeniería*, 23(37), 2014.
- [10] Alexander Cerón Correa. Sistemas robóticos teleoperados. *Ciencia e Ingeniería Neogranadina*, (15):62–69, 2005.
- [11] Wei-Ching Chen. Dynamics and control of a financial system with time-delayed feedbacks. *Chaos, Solitons & Fractals*, 37(4):1198–1207, 2008.

-
- [12] SA Gourley, JW-H So, and JH Wu. Nonlocality of reaction-diffusion equations induced by delay: biological modeling and nonlinear dynamics. *Journal of Mathematical Sciences*, 124(4):5119–5153, 2004.
- [13] AC Tsoi and MJ Gregson. Recent advances in the algebraic system theory of delay differential equations. *Recent theoretical developments in control*, pages 67–127, 1978.
- [14] K Watanabe, E Nobuyama, and A Kojima. Recent advances in control of time delay systems—a tutorial review. In *Decision and Control, 1996., Proceedings of the 35th IEEE Conference on*, volume 2, pages 2083–2089. IEEE, 1996.
- [15] Silviu-Iulian Niculescu, Erik I Verriest, Luc Dugard, and Jean-Michel Dion. Stability and robust stability of time-delay systems: A guided tour. In *Stability and control of time-delay systems*, pages 1–71. Springer, 1998.
- [16] JJ Loiseau and R Rabah. Analysis and control of time-delay systems. *European Journal of Automatic Systems*, 31(6), 1997.
- [17] G Conte and AM Perdon. Systems over rings: geometric theory and applications. *IFAC Proceedings Volumes*, 31(19):175–186, 1998.
- [18] Emilia Fridman and Uri Shaked. Delay-dependent stability and h_∞ control: constant and time-varying delays. *International journal of control*, 76(1):48–60, 2003.
- [19] Dan Ivănescu, Silviu-Iulian Niculescu, Luc Dugard, Jean-Michel Dion, and Erik I Verriest. On delay-dependent stability for linear neutral systems. *Automatica*, 39(2):255–261, 2003.
- [20] VB Kolmanovskii, S-I Niculescu, and Keqin Gu. Delay effects on stability: A survey. In *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*, volume 2, pages 1993–1998. IEEE, 1999.
- [21] Leonid Mirkin and Gilead Tadmor. H_∞ control of system with i/o delay: a review of some problem-oriented methods. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 19(1_and_2):185–199, 2002.
- [22] Andrzej W Olbrot. Finite spectrum property and predictors. *IFAC Proceedings Volumes*, 31(19):203–212, 1998.
- [23] Jean-Pierre Richard. Some trends and tools for the study of time delay systems. In *Proceedings of CESA98 IMACS/IEEE Multi conference*, pages 27–43, 1998.
- [24] Jean-Pierre Richard. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *automatica*, 39(10):1667–1694, 2003.

- [25] Yaneli M. Benjamín A. Itzá. Modelos de duopolio de cournot con evasión de impuestos. *Miselánea Matemática*, 55:45–63, 2012.
- [26] Ma Jun-hai and Chen Yu-shu. Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system (ii). *Applied Mathematics and Mechanics*, 22(12):1375–1382, 2001.
- [27] Eric José Ávila Vales Noé Chan Ch, Gerardo Emilio García Almeida. Análisis de estabilidad y bifurcación de hopf para una ecuación logística con retardo mediante métodos perturbativos. *Acta mathematica*, 2014.
- [28] Tönu Puu. Chaos in duopoly pricing. *Chaos, solitons, and fractals*, 1(6):573–581, 1991.
- [29] Gian Italo Bischi and Ahmad Naimzada. Global analysis of a dynamic duopoly game with bounded rationality. In *Advances in dynamic games and applications*, pages 361–385. Springer, 2000.
- [30] Gian Italo Bischi and Michael Kopel. Equilibrium selection in a nonlinear duopoly game with adaptive expectations. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 46(1):73–100, 2001.
- [31] Álvaro Uribe Vélez. Estabilidad de biorreactores continuos de tanque agitado para producción de etanol: Revisión bibliográfica. *DISEÑO INTEGRAL DE BIORREACTORES CONTINUOS DE TANQUE AGITADO APLICADOS A PROCESOS DE FERMENTACIÓN*, page 8, 2010.
- [32] Pratap R Patnaik. Oscillatory metabolism of *saccharomyces cerevisiae*: an overview of mechanisms and models. *Biotechnology advances*, 21(3):183–192, 2003.
- [33] Lynda J Bruce and Andrew J Daugulis. Solvent selection strategies for extractive biocatalysis. *Biotechnology Progress*, 7(2):116–124, 1991.
- [34] Keqin Gu, Jie Chen, and Vladimir L Kharitonov. *Stability of time-delay systems*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [35] Jerrold E Marsden and Marjorie McCracken. *The Hopf bifurcation and its applications*, volume 19. Springer Science & Business Media, 2012.
- [36] Hal L Smith. *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*, volume 57. Springer New York, 2011.
- [37] Jack K Hale and Sjoerd M Verduyn Lunel. Introduction. In *Introduction to Functional Differential Equations*, pages 1–10. Springer, 1993.

-
- [38] VK Barwell. Special stability problems for functional differential equations. *BIT Numerical Mathematics*, 15(2):130–135, 1975.
- [39] Vladimir Borisovich Kolmanovskii and Valerij Romanovič Nosov. *Stability of functional differential equations*, volume 180. Elsevier, 1986.
- [40] Keqin Gu, Vladimir L Kharitonov, and Jie Chen. Introduction to time-delay systems. In *Stability of Time-Delay Systems*, pages 1–28. Springer, 2003.
- [41] Katsuhiko Ogata and Guillermo Lopez Portillo Sanchez. *Dinámica de sistemas*. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1987.
- [42] Luc Dugard and Erik I Verriest. *Stability and control of time-delay systems*, volume 228. Springer, 1998.
- [43] Steven H Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Hachette UK, 2014.
- [44] Carlos Fernández Pérez, Francisco José Vázquez Hernández, and José Manuel Vegas Montaner. *Ecuaciones diferenciales y en diferencias: sistemas dinámicos*. Editorial Paraninfo, 2003.
- [45] Eric W Weisstein. Bifurcation. 2003.
- [46] Carlos Bosch. El teorema de bolzano, o un teorema que no debe pasar inadvertido. *Educación Matemática*, 5(03):6–19, 1993.
- [47] Robert Gibbons. *Un primer curso de teoría de juegos*. Antoni Bosch Editor, 1993.
- [48] Martin J Osborne et al. *An introduction to game theory*, volume 3. Oxford university press New York, 2004.
- [49] Laszlo Goerke and Marco Runkel. Tax evasion and competition. *Scottish Journal of Political Economy*, 58(5):711–736, 2011.
- [50] John N Tsitsiklis and Yunjian Xu. Efficiency loss in a cournot oligopoly with convex market demand. *Journal of Mathematical Economics*, 53:46–58, 2014.
- [51] M Neamtu. Deterministic and stochastic cournot duopoly games with tax evasion. *WSEAS Transactions on Mathematics*, 9(8):618–627, 2010.
- [52] Ju Neimark. D-subdivisions and spaces of quasi-polynomials. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 13(5):349–380, 1949.

-
- [53] Ezio Bartocci and Pietro Lió. Computational modeling, formal analysis, and tools for systems biology. *PLoS computational biology*, 12(1):e1004591, 2016.
- [54] National Research Council et al. *Putting biotechnology to work: bioprocess engineering*. National Academies Press, 1992.
- [55] Peter Wellstead. Control opportunities in systems biology. *IFAC Proceedings Volumes*, 40(5):1–18, 2007.
- [56] Saleh Mohseni, Ahmad Reza Vali, and Valiollah Babaeipour. Designing appropriate schemes for the control of fed-batch cultivation of recombinant e. coli. 2006.
- [57] Lena de Maré and Per Hagander. Parameter estimation of a model describing the oxygen dynamics in a fed-batch e. coli cultivation. *Biotechnology Letters*, 27(14):983–990, 2006.
- [58] Henning Schmidt and Elling W Jacobsen. Identifying feedback mechanisms behind complex cell behavior. *IEEE Control Systems Magazine*, 24(4):91–102, 2004.
- [59] Eduardo D Sontag. Molecular systems biology and control. *European journal of control*, 11(4-5):396–435, 2005.
- [60] Klaas Van't Riet and Johannes Tramper. *Basic bioreactor design*. CRC Press, 1991.
- [61] Timothy G Townsend. *Landfill bioreactor design & operation*. Routledge, 2018.
- [62] SJ Mason, RR Hill, L Mönch, O Rose, T Jefferson, JW Fowler, and Charles E Knadler. Models of a predator-prey relationship in a closed habitat.

Apéndice A

Ejemplo canónico de la bifurcación de Hopf

Vamos a estudiar en detalle un ejemplo de sistema diferencial plano dependiente de un parámetro que presenta una bifurcación de Hopf. Consideremos el sistema dinámico bidimensional.

$$\dot{x} = f(x, y) = \mu x - \omega_0 y + (ax - by)(x^2 + y^2) \quad (\text{A.1})$$

$$\dot{y} = g(x, y) = \omega_0 x + \mu y + (bx + ay)(x^2 + y^2)$$

Donde la prima indica derivada respecto al tiempo, se supone que a , b y ω_0 son tres valores reales fijos y que μ es un parámetro real. Se supone además que $\omega_0 > 0$.

Para buscar los puntos de equilibrio que presenta este sistema, igualamos a cero las ecuaciones de nuestro sistema bidimensional A.1, obteniendo un punto de equilibrio en el origen del plano. Para estudiar la estabilidad de este punto de equilibrio, debemos hallar los autovalores de este sistema. Por lo tanto, calculamos la matriz jacobiana de nuestro sistema.

$$\Delta(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu + 3ax^2 + ay^2 - 2byx & -\omega_0 + 2axy - bx^2 - 3by^2 \\ \omega_0 + 3bx^2 + by^2 + 2ayx & \mu + abxy + ax^2 + 3ay^2 \end{bmatrix}$$

Si particularizamos esta matriz para el punto de equilibrio, se obtiene

$$\Delta(0, 0) = \begin{bmatrix} \mu & -\omega_0 \\ \omega_0 & \mu \end{bmatrix}$$

y ahora ya podemos calcular los autovalores, resolviendo la ecuación

$$\begin{bmatrix} \mu - \lambda & -\omega_0 \\ \omega_0 & \mu - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Enseguida vemos que los valores propios son el par de números complejos conjugados $\mu \pm i\omega_0$, de manera que puede asegurarse que el origen es un punto de equilibrio estable si el parámetro μ es negativo, e inestable si el parámetro μ es positivo. Obviamente, el valor $\mu = 0$ corresponde a una situación de bifurcación. La estabilidad del origen en este caso se estudiará posteriormente.

Vamos a comprobar que además de este punto de equilibrio el sistema presenta, para determinados valores del parámetro μ , un ciclo límite, que de hecho es un círculo centrado en el origen. Introduciendo la función compleja

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\text{A.2})$$

es inmediato escribir que

$$\begin{aligned} \bar{z} &= x - iy \\ |z|^2 &= z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Esta variable satisface la ecuación diferencial

$$\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y} = \mu x - \omega_0 y + (ax + by)(x^2 + y^2) + i[\omega_0 x + \mu y + (bx + ay)(x^2 + y^2)] = \mu(x + ib) + i\omega_0(x + iy) + (x^2 + y^2)[(ax - by) + i(bx + ay)]$$

y por lo tanto podemos reescribir el sistema A.1 en la forma

$$\dot{z} = \mu z + i\omega_0 z + (a + bi)z |z|^2$$

Hemos comprobado así que el sistema se puede escribir, fácilmente, en la forma

$$z' = (\mu + i\omega_0)z + (a + ib)z|z|^2. \quad (\text{A.3})$$

Si usamos la forma polar

$$z(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)} \quad (\text{A.4})$$

se tiene que

$$z'(t) = \rho'(t)e^{i\theta(t)} + \rho(t)e^{i\theta(t)}i\theta'(t) \quad (\text{A.5})$$

Sustituyendo la ecuación (A.4) en la ecuación (A.3) obtenemos:

$$z'(t) = (\mu + i\omega_0)\rho(t)e^{i\theta(t)} + (a + ib)\rho(t)^3e^{i\theta(t)} \quad (\text{A.6})$$

e igualando las ecuaciones (A.5) y la (A.6) obtenemos:

$$\begin{aligned}\rho'(t)e^{i\theta(t)} + \rho(t)e^{i\theta(t)}i\theta'(t) &= (\mu + i\omega_0)\rho(t)^{i\theta(t)}e^{ie(t)} + (a + ib)\rho(t)^3e^{i\theta(t)} \\ \rho'(t) + \rho(t)i\theta'(t) &= (\mu + i\omega_0)\rho(t)^{i\theta(t)} + (a + ib)\rho(t)^3\end{aligned}$$

Si identificamos por separado la parte real y la imaginaria, resultan las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= \mu\rho + a\rho^3 \text{ (evolución del radio polar),} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega_\theta + b\rho^2 \text{ (evolución del ángulo polar).}\end{aligned}$$

La primera ecuación (que evidentemente sólo tendrá sentido para $\rho > 0$) no depende del ángulo polar, por lo tanto está desacoplada y puede estudiarse por separado.

Para encontrar los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial del radio polar, debemos igualar dicha ecuación a cero. De esta manera llegamos

$$\mu\rho + a\rho^3 = 0 \iff \rho(\mu + a\rho^2) = 0$$

y obtenemos claramente un punto de equilibrio en $\rho = 0$ para cualquier valor de μ , que se corresponde con el punto de equilibrio existente en el origen del sistema original. Además, la ecuación presenta en ciertos casos un segundo punto de equilibrio, que viene dada por la solución positiva de la ecuación

$$\mu + a\rho^2 = 0$$

en el supuesto de que esta ecuación tenga raíces positivas. Despejando, esta solución viene dada por

$$\rho(\mu) = \sqrt{\frac{-\mu}{a}},$$

y existe como solución real cuando el radicando es positivo, es decir, cuando el producto $a\mu$ es negativo.

La existencia de este punto de equilibrio $\rho(\mu)$ para el radio polar supone que en el sistema original existe un círculo estacionario centrado en el origen, cuyo radio es este valor de equilibrio $\rho(\mu)$. Esta órbita del sistema plano será estable o inestable según que el punto de equilibrio de la ecuación diferencial del radio polar sea estable o inestable. Para analizar la estabilidad del ciclo límite de radio $\rho(\mu)$, bastará analizar el signo de la derivada, que viene dada por

$$\frac{d}{d\rho}(\mu\rho + a\rho^3)\Big|_{\rho=\sqrt{\frac{-\mu}{a}}} = \mu + 3a\left(-\frac{\mu}{a}\right) = -2\mu.$$

Se obtiene así que el punto de equilibrio, y por tanto el ciclo límite asociado, es estable cuando $\mu > 0$ e inestable cuando $\mu < 0$.

Las Figuras 2.1 a 2.4 representan los diagramas de bifurcación en función del signo de la constante a . El caso $a > 0$ corresponde a una bifurcación subcrítica (el ciclo límite existe sólo si $\mu < 0$ y es inestable) y el caso $a < 0$ a una supercrítica (ahora el ciclo límite existe cuando $\mu > 0$ y es estable).

Si representamos el ciclo límite en el espacio (x, y, μ) para cada valor del parámetro μ , obtenemos la familia de ciclos límite que forman una superficie parabólica, como podemos apreciar en las Figuras 2.1 y 2.3 de la siguiente página. Esta misma representación la podemos hacer sobre el plano ρ, μ ,

obteniendo para valores de $a > 0$ la Figura 2.2, donde la línea de círculos en blanco representa la variación con μ del radio de la órbita inestable en la bifurcación subcrítica, y para valores de $a < 0$ la Figura 2.4, donde la línea de círculos negros representa la variación con μ del radio del ciclo límite estable en la bifurcación supercrítica.

Las ecuaciones diferenciales del sistema en coordenadas polares se pueden integrar con relativa facilidad, obteniéndose con ello las soluciones del sistema explícitamente. Para simplificar la exposición supondremos que $b = 0$ y $\omega_0 = 1$, lo que supone prácticamente que $\theta = t$. El caso general se trata de modo idéntico.

Si la condición inicial es $\rho(0) = \rho_0 > 0$, separando variables e integrando se tiene

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\mu\rho + a\rho^3} = \int_0^t dt.$$

Para realizar el cálculo, obtenemos la descomposición del integrando del primer miembro en fracciones simples, lo que conduce a la igualdad

$$\frac{1}{\mu\rho + a\rho^3} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{a\rho}{\mu + a\rho^2} \right).$$

Utilizando esta expresión, se tiene

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\mu\rho + a\rho^3} = \frac{1}{\mu} \left[\log \rho - \frac{1}{2} \log |\mu + a\rho^2| \right]_{\rho_0}^{\rho} = \frac{1}{\mu} \left[\log \frac{\rho}{|\mu + a\rho^2|^{\frac{1}{2}}} \right]_{\rho_0}^{\rho}$$

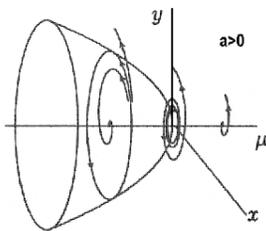


Figura A.1: Bifurcación de Hopf subcrítica en el espacio (x, y, μ)

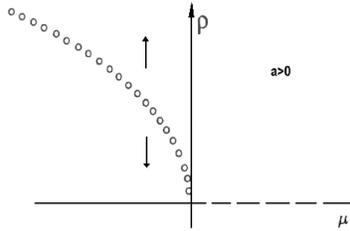


Figura A.2: Diagrama de una bifurcación de Hopf subcrítica

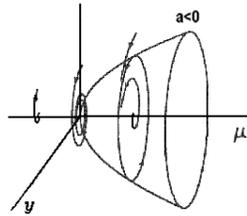


Figura A.3: Bifurcación de Hopf supercrítica en el espacio (x, y, μ)

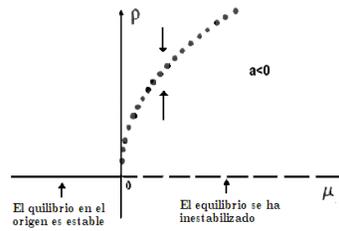


Figura A.4: Diagrama de una bifurcación supercrítica de Hopf

y obtenemos entonces

$$\frac{1}{\mu} \left[\log \frac{\rho}{|\mu + a\rho^2|^{\frac{1}{2}}} \right]_{\rho_0}^{\rho} = t,$$

de donde se deduce que la dependencia de ρ y t viene establecida por la ecuación

$$\frac{\rho^2}{|\mu + a\rho^2|} = \frac{\rho_0^2}{|\mu + a\rho_0^2|} e^{2\mu t}$$

Para analizar las soluciones, es conveniente distinguir dos casos, determinados por el signo del producto $a\mu$:

Caso 1 $a\mu > 0$

En este caso el signo de μ coincide con el de a y, como ya hemos comentado anteriormente, no existe ciclo límite. Haciendo $\frac{\mu}{a} = r^2$, la relación entre ρ y t se puede escribir claramente como

$$\frac{\rho^2}{\mu + a\rho^2} = \frac{\rho_0^2}{\mu + a\rho_0^2} e^{2\mu t}$$

despejando ρ se deduce la expresión de su dependencia explícita de t , que es como sigue

$$\rho = \frac{\rho_0 e^{\mu t}}{\sqrt{1 + \frac{\rho_0^2}{r^2} (1 - e^{2\mu t})}}.$$

Las soluciones presentan entonces un comportamiento radicalmente diferente según que el parámetro μ sea negativo o positivo.

En el primer caso, es decir, si $\mu < 0$, es claro que el radicando del denominador es siempre positivo, por lo que la solución está definida en todo el intervalo $[0, +\infty)$: Además, se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = 0$$

es decir, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable cuyo dominio de atracción es todo el plano. La Figura 2.5 presenta el aspecto de una trayectoria en este caso.

En cambio, cuando $\mu > 0$ el radicando sólo tiene sentido en el intervalo $[0, t_\infty]$, siendo

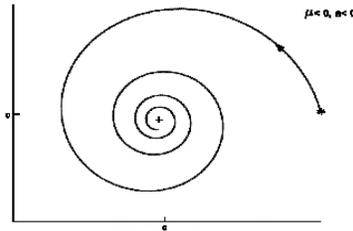


Figura A.5: Origen estable. No hay ciclo límite

$$t_\infty = \frac{1}{2\mu} \log \mu \left(1 + \frac{r^2}{\rho_0^2} \right),$$

y además se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = \infty$$

por lo tanto la solución se hace no acotada en un tiempo finito. Esta situación indica que el origen es un punto de equilibrio inestable. La Figura 2.6 representa una trayectoria típica del sistema en este supuesto.

Caso 2 $a\mu < 0$

En este supuesto, los signos de μ y a son diferentes y, como antes apuntamos, existe un ciclo límite. Poniendo $\frac{\mu}{a} = -r^2$, el ciclo límite es un círculo centrado en el origen de radio r . La relación entre ρ y t se escribe en la forma

$$\frac{\rho^2}{|\rho^2+r^2|} = \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2-r^2} e^{2\mu t}.$$

Dado que la ecuación presenta un punto de equilibrio en $\rho = r$, es claro que si $\rho_0 > r$ se cumplirá que $\rho > r$ para todo $t > 0$. Alternativamente, si

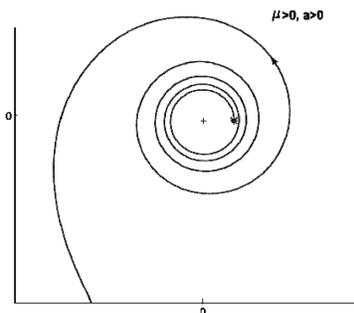


Figura A.6: Origen estable. No existe ciclo límite

$\rho_0 < r$ también será $\rho < r$ para todo $t > 0$. Con esta observación, se deduce que la anterior relación entre ρ y t se puede escribir en la forma

$$\frac{\rho^2}{\rho^2-r^2} = \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2-r^2} e^{2\mu t}$$

puesto que las diferencias $\rho^2 - r^2$, y $\rho_0^2 - r^2$ tienen en todo caso el mismo signo. Despejando en esa ecuación el valor de ρ , se obtiene la fórmula

$$\rho = \frac{\rho_0 e^{\mu t}}{\sqrt{1 + \frac{\rho_0^2}{r^2} (e^{2\mu t} - 1)}}$$

De nuevo, el comportamiento de la solución es diferente según que el valor del parámetro μ sea positivo o negativo. Si $\mu > 0$, es claro que el radicando del denominador es siempre positivo, cualquiera que sea el valor de $\rho \neq r$ además, es fácil comprobar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = r$$

En el sistema original, esto viene a decir que el origen del sistema es un punto de equilibrio inestable, el cual se encuentra rodeado por una órbita

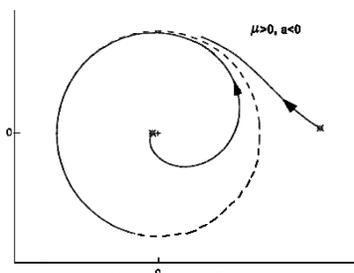


Figura A.7: Origen inestable. Existe ciclo límite estable

cerrada aislada (ciclo límite), que es única y estable. El ciclo límite es un círculo de radio $\rho(\mu) = r$ cuyo dominio de atracción es todo el plano, salvo el origen que es un punto de equilibrio inestable. Todas las órbitas que empiezan fuera o dentro del ciclo límite, excluyendo el origen, tienden a este ciclo cuando $t \rightarrow \infty$. Este cambio de comportamiento al inestabilizarse el origen y llegar a una oscilación autosostenida es el típico en una bifurcación de Hopf supercrítica. La Figura 2.5 presenta un par de trayectorias del sistema, una que comienza dentro del círculo límite y la otra en su exterior.

En el supuesto de que $\mu < 0$ es necesario distinguir los dos casos $\rho_0 < r$ y $\rho_0 > r$, es decir, que el punto inicial esté situado dentro o fuera del ciclo límite. Si $\rho_0 > r$, es claro que el radicando del denominador siempre toma valores positivos, con lo que la solución existe para todo $t > 0$ y además se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = 0$$

En cambio si $\rho_0 < r$ la solución sólo existe mientras

$$t \leq \frac{1}{2\mu} \log \left(1 - \frac{r^2}{\rho_0^2} \right)$$

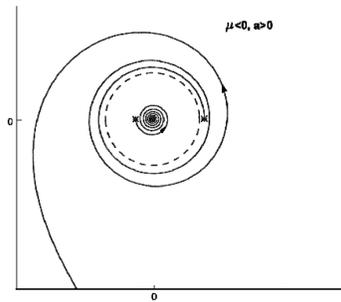


Figura A.8: Origen estable. Existe ciclo límite inestable

Además se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = +\infty$$

Esta situación se corresponde con el hecho de que el origen es un punto de equilibrio estable cuyo dominio de atracción es el círculo centrado en él mismo de radio r , y que este círculo es un ciclo límite inestable. La Figura 2.8 adjunta representa dos soluciones de este caso.

Apéndice B

Términos de $P(\omega)$

En esta apéndice se muestran de manera explícita todos los términos de $P(\omega)$ de la sección (3.2).

$$P(\omega) = a_{12}\omega^{12} + a_{10}\omega^{10} + a_8\omega^8 + a_6\omega^6 + a_4\omega^4 + a_2\omega^2 + a_0$$

$$a_{12} = \frac{k_1^2 ((-k q_1 s + k^2 - 1) \sigma - k^2 + 1)^2 k_2^2 ((k q_2 s + k^2 - 1) \sigma - k^2 + 1)^2 c_1^8}{(-1 + \sigma)^8}$$

$$a_{10} = -\frac{\delta_1 + \delta_2 (\delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \delta_6 - \delta_7 + \delta_8)}{(-1 + \sigma)^{15}}$$

donde

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \left((k^2 - kq_1 s - 1)^2 (\sigma^2 - 2(k-1)(k+1)\sigma) + (k-1)^2 (k+1)^2 \right) \\ &\quad \left(s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 (\sigma^4 - 2\sigma^3 + \sigma^2) \right) c_1^8, \\ \delta_2 &= \left((k^2 - kq_1 s - 1)^2 (\sigma^2 - 2(k-1)(k+1)\sigma) + (k-1)^2 (k+1)^2 \right) k_1^2 k_2^2 \\ &\quad \left((k^2 + kq_2 s - 1)^2 (\sigma^2 - 2(k-1)(k+1)\sigma) + (k-1)^2 (k+1)^2 \right) c_1^8, \\ \delta_3 &= -s^2 \left((k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (\sigma^9 - 7\sigma^8 + 21\sigma^7) + 2(k^2 k_2 k_4 q_2^2 + k_1 k_3 q_1^2) c_1^2 \right), \\ \delta_4 &= s^2 \left(10(k^2 k_2 k_4 q_2^2 + k_1 k_3 q_1^2) (\sigma^6 - 2) c_1^2 - (k^4 k_2^2 q_2^2 + k_1^2 q_1^2) c_1^4 \right. \\ &\quad \left. + 35(k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (\sigma^6 - \sigma^5) \right) \\ &\quad + 4(k+1) \left((k^3 k_2^2 q_2 + k_1^2 q_1) s - (k+1)(k^2 k_2^2 + k_1^2) \right) c_1^4, \\ \delta_5 &= s^2 \left(20(k^2 k_2 k_4 q_2^2 + k_1 k_3 q_1^2) c_1^2 + 21(k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) \right. \\ &\quad \left. + 3(k^4 k_2^2 q_2^2 + k_1^2 q_1^2) c_1^4 \right) \sigma^4 \\ &\quad - 4(k+1) \left(4(k^3 k_2^2 q_2 + k_1^2 q_1) s - 5(k+1)(k^2 k_2^2 + k_1^2) \right) c_1^4 \sigma^4, \\ \delta_6 &= \left(-10s^2 (k^2 k_2 k_4 q_2^2 + k_1 k_3 q_1^2) c_1^2 - 7s^2 (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) \right. \\ &\quad \left. + \left((-3k^4 k_2^2 q_2^2 - 3k_1^2 q_1^2) s^2 + 24(k+1)(k^3 k_2^2 q_2 + k_1^2 q_1) s \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 40(k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2) \right) c_1^4 \right) \sigma^3, \\ \delta_7 &= \left(-2s^2 (k^2 k_2 k_4 q_2^2 + k_1 k_3 q_1^2) c_1^2 - s^2 (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) \right. \\ &\quad \left. + \left((-k^4 k_2^2 q_2^2 - k_1^2 q_1^2) s^2 + 16(k+1)(k^3 k_2^2 q_2 + k_1^2 q_1) s \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 40(k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2) \right) c_1^4 \right) \sigma^2, \\ \delta_8 &= 4c_1^4 (k+1) \left((k^3 k_2^2 q_2 + k_1^2 q_1) s - 5(k+1)(k^2 k_2^2 + k_1^2) \right) \sigma \\ &\quad + 4c_1^4 (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2). \end{aligned}$$

$$a_8 = -\frac{\psi_1 + \psi_2(\psi_3 + \psi_4 - \psi_5) + \psi_6(\psi_7 + \psi_8 + \psi_9 + \psi_{10}(\psi_{11} + \psi_{12}))}{(-1 + \sigma)^{15}}$$

donde

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \left(s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^4 - 2 s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^3 + s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^2 \right) c_1^8 \\ &\quad \left(s^2 k_3^2 q_1^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^4 - 2 s^2 k_3^2 q_1^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^3 + s^2 k_3^2 q_1^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^2 \right) k_1^2 k_2^2 \\ &\quad (-\sigma^7 + 7\sigma^6 - 21\sigma^5 + 35\sigma^4 - 35\sigma^3 + 21\sigma^2 - 7\sigma + 1) \\ \psi_2 &= \left(s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^4 - 2 s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^3 + s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^2 \right) c_1^8 \\ &\quad \left((-k q_1 s + k^2 - 1)^2 \sigma^2 - 2(k-1)(k+1)(-k q_1 s + k^2 - 1)\sigma + (k-1)^2 (k+1)^2 \right) \\ &\quad + \left((k q_2 s + k^2 - 1)^2 \sigma^2 - 2(k-1)(k+1)(k q_2 s + k^2 - 1)\sigma + (k-1)^2 (k+1)^2 \right) c_1^8 \\ &\quad \left(s^2 k_3^2 q_1^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^4 - 2 s^2 k_3^2 q_1^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^3 + s^2 k_3^2 q_1^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^2 \right) k_1^2 k_2^2 \\ \psi_3 &= -4 \left(\frac{1}{4} k_3^2 q_1^2 + \frac{1}{4} k_4^2 q_2^2 \right) s^2 \sigma^9 + 20 \left(\frac{7 k_3^2 q_1^2}{20} + \frac{7 k_4^2 q_2^2}{20} \right) s^2 \sigma^8 \\ &\quad - 2 s^2 \left((k^2 k_2 k_4 q_2^2 + k_1 k_3 q_1^2) c_1^2 + \frac{21}{2} k_3^2 q_1^2 + \frac{21}{2} k_4^2 q_2^2 \right) \sigma^7 \\ &\quad + 10 s^2 \left((k^2 k_2 k_4 q_2^2 + k_1 k_3 q_1^2) c_1^2 + \frac{7}{2} k_3^2 q_1^2 + \frac{7}{2} k_4^2 q_2^2 \right) \sigma^6 \\ &\quad + \left((-k^4 k_2^2 q_2^2 - k_1^2 q_1^2) s^2 + 4(k+1)(k^3 k_2^2 q_2 + k_1^2 q_1) s - 4(k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2) \right) c_1^4 \\ &\quad - 20 s^2 (k^2 k_2 k_4 q_2^2 + k_1 k_3 q_1^2) c_1^2 - 35 s^2 (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) \sigma^5 \\ \psi_4 &= \left((3 k^4 k_2^2 q_2^2 + 3 k_1^2 q_1^2) s^2 - 16(k+1)(k^3 k_2^2 q_2 + k_1^2 q_1) s + 20(k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2) \right) c_1^4 \\ &\quad + 20 s^2 (k^2 k_2 k_4 q_2^2 + k_1 k_3 q_1^2) c_1^2 + 21 s^2 (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) \sigma^4 \\ &\quad + \left((-3 k^4 k_2^2 q_2^2 - 3 k_1^2 q_1^2) s^2 + 24(k+1)(k^3 k_2^2 q_2 + k_1^2 q_1) s - 40(k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2) \right) c_1^4 \\ &\quad - 10 s^2 (k^2 k_2 k_4 q_2^2 + k_1 k_3 q_1^2) c_1^2 - 7 s^2 (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) \sigma^3 \\ \psi_5 &= 3 \left(\left(-\frac{1}{3} k^4 k_2^2 q_2^2 - \frac{1}{3} k_1^2 q_1^2 \right) s^2 + \frac{16}{3} (k+1)(k^3 k_2^2 q_2 + k_1^2 q_1) s - \frac{40(k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2)}{3} \right) c_1^4 \\ &\quad - \frac{2}{3} s^2 (k^2 k_2 k_4 q_2^2 + k_1 k_3 q_1^2) c_1^2 - \frac{1}{3} s^2 (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) \sigma^2 + 4 c_1^4 (k+1) \\ &\quad \left((k^3 k_2^2 q_2 + k_1^2 q_1) s - 5(k+1)(k^2 k_2^2 + k_1^2) \right) \sigma + 4 c_1^4 (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2) \\ \psi_6 &= \left((k q_2 s + k^2 - 1)^2 \sigma^2 - 2(k-1)(k+1)(k q_2 s + k^2 - 1)\sigma + (k-1)^2 (k+1)^2 \right) c_1^8 \\ &\quad \left((-k q_1 s + k^2 - 1)^2 \sigma^2 - 2(k-1)(k+1)(-k q_1 s + k^2 - 1)\sigma + (k-1)^2 (k+1)^2 \right) k_1^2 k_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_7 = & -\sigma^{11} s^4 k_3^2 k_4^2 q_1^2 q_2^2 + 7\sigma^{10} s^4 k_3^2 k_4^2 q_1^2 q_2^2 - 2k_4 \left((k^2 k_2 k_3 + k_1 k_4) c_1^2 + \frac{21}{2} k_4 k_3 \right) q_2^2 s^4 k_3 q_1^2 \sigma^9 \\
& + 10k_4 q_2^2 s^4 k_3 \left((k^2 k_2 k_3 + k_1 k_4) c_1^2 + \frac{7}{2} k_4 k_3 \right) q_1^2 \sigma^8 \\
& - s^2 ((q_1^2 q_2^2 (k^4 k_2^2 k_3^2 + 4k^2 k_1 k_2 k_3 k_4 + k_1^2 k_4^2) s^2 - 4q_1 q_2 (k+1) (k^3 k_2^2 k_3^2 q_1 + k_1^2 k_4^2 q_2) s \\
& + 4(k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2)) c_1^4 + 20q_1^2 q_2^2 k_4 k_3 s^2 (k^2 k_2 k_3 + k_1 k_4) c_1^2 \\
& + 35q_1^2 q_2^2 s^2 k_4^2 k_3^2) \sigma^7 \\
\psi_8 = & 3s^2 ((q_1^2 q_2^2 (k^4 k_2^2 k_3^2 + 4k^2 k_1 k_2 k_3 k_4 + k_1^2 k_4^2) s^2 - \frac{16}{3} q_1 q_2 (k+1) (k^3 k_2^2 k_3^2 q_1 + k_1^2 k_4^2 q_2) s \\
& + \frac{(20k_3^2 q_1^2 + 20k_4^2 q_2^2) (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2)}{3}) c_1^4 + \frac{20q_1^2 q_2^2 k_4 k_3 s^2 (k^2 k_2 k_3 + k_1 k_4) c_1^2}{3} \\
& + 7q_1^2 q_2^2 s^2 k_4^2 k_3^2) \sigma^6 - 2s^2 ((q_1^2 q_2^2 (k^2 k_2 k_3 + k_1 k_4) s^2 - 4q_1 q_2 (k+1) (k k_2 k_3 q_1 + k_1 k_4 q_2) s \\
& + 4(k+1)^2 (k_1 k_4 q_2^2 + k_2 k_3 q_1^2)) k_1 k_2 k^2 c_1^6 + (\frac{3}{2} q_1^2 q_2^2 (k^4 k_2^2 k_3^2 + 4k^2 k_1 k_2 k_3 k_4 + k_1^2 k_4^2) s^2 \\
& - 12q_1 q_2 (k+1) (k^3 k_2^2 k_3^2 q_1 + k_1^2 k_4^2 q_2) s + 20(k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2)) c_1^4 \\
& + 5q_1^2 q_2^2 k_4 k_3 s^2 (k^2 k_2 k_3 + k_1 k_4) c_1^2 + \frac{7}{2} q_1^2 q_2^2 s^2 k_4^2 k_3^2) \sigma^5 \\
\psi_9 = & 2(k^2 k_1 k_2 (q_1^2 q_2^2 (k^2 k_2 k_3 + k_1 k_4) s^2 - 8q_1 q_2 (k+1) (k k_2 k_3 q_1 + k_1 k_4 q_2) s \\
& + 12(k+1)^2 (k_1 k_4 q_2^2 + k_2 k_3 q_1^2)) c_1^6 + (\frac{1}{2} q_1^2 q_2^2 (k^4 k_2^2 k_3^2 + 4k^2 k_1 k_2 k_3 k_4 + k_1^2 k_4^2) s^2 \\
& - 8q_1 q_2 (k+1) (k^3 k_2^2 k_3^2 q_1 + k_1^2 k_4^2 q_2) s + 20(k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2)) c_1^4 \\
& + q_1^2 q_2^2 k_4 k_3 s^2 (k^2 k_2 k_3 + k_1 k_4) c_1^2 + \frac{1}{2} q_1^2 q_2^2 s^2 k_4^2 k_3^2) s^2 \sigma^4 \\
\psi_{10} = & c_1^4 ((-k(q_1 + q_2) s + (k+1)^2) k_1^2 (k+1) (-2k^2 q_1 q_2 s^2 - ((q_1 - 3q_2) k - 3q_1 + q_2) (k+1) k s \\
& + (k^2 - 6k + 1) (k+1)^2) k_2^2 c_1^4 + 8k_1 s^2 k_2 k^2 (q_1 q_2 (k k_2 k_3 q_1 + k_1 k_4 q_2) s - 3(k_1 k_4 q_2^2 + k_2 k_3 q_1^2) \\
& (k+1)) c_1^2 + 4s^2 (q_1 q_2 (k^3 k_2^2 k_3^2 q_1 + k_1^2 k_4^2 q_2) s - 5(k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k+1) (k^2 k_2^2 + k_1^2))) (k+1) \sigma^3 \\
& - 3c_1^4 (k+1)^2 \\
\psi_{11} = & ((\frac{1}{3} ((q_1^2 - 4q_1 q_2 - 3q_2^2) k - 3q_1^2 - 4q_1 q_2 + q_2^2) k^2 s^2 \\
& - \frac{4}{3} (k+1) k ((q_1 - q_2) k^2 + (-4q_1 - 4q_2) k - q_1 + q_2) s + (k^2 - 6k + 1) (k+1)^3) k_1^2 (k+1) k_2^2 c_1^4 \\
& - \frac{8}{3} k_1 s^2 k_2 k^2 (k_1 k_4 q_2^2 + k_2 k_3 q_1^2) c_1^2 - \frac{4}{4} s^2 (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k^2 k_2^2 + k_1^2)) \sigma^2 \\
\psi_{12} = & 3c_1^8 k_1^2 \left(-\frac{2}{3} k ((q_1 - q_2) k^2 + (-4q_1 - 4q_2) k - q_1 + q_2) s + (k^2 - 6k + 1) (k+1)^2 \right) (k+1)^4 k_2^2 \sigma \\
& - c_1^8 k_1^2 k_2^2 (k^2 - 6k + 1) (k+1)^6
\end{aligned}$$

$$a_6 = -\frac{1}{(-1 + \sigma)^{15}} (\chi_1 (\chi_2 + \chi_3 - \chi_4) + (\chi_5 + \chi_6) k_1^2 (k_2 (\chi_7 + \chi_8 - \chi_9 + \chi_{10} + \chi_{11} - \chi_{12} + \chi_{13}))^2 + \chi_{14} (\chi_{15} + \chi_{16} (\chi_{17}) \chi_{18} (\chi_{19}) \chi_{20} - \chi_{21}))$$

$$\chi_1 = \left(s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^4 - 2 s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^3 + s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^2 \right) c_1^8$$

$$\left(s^2 k_3^2 q_1^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^4 - 2 s^2 k_3^2 q_1^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^3 + s^2 k_3^2 q_1^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^2 \right) k_1^2 k_2^2$$

$$\chi_2 = -4 \left(\frac{1}{4} k_3^2 q_1^2 + \frac{1}{4} k_4^2 q_2^2 \right) s^2 \sigma^9 + 20 \left(\frac{7 k_3^2 q_1^2}{20} + \frac{7 k_4^2 q_2^2}{20} \right) s^2 \sigma^8$$

$$- 2 s^2 \left((k^2 k_2 k_4 q_2^2 + k_1 k_3 q_1^2) c_1^2 + \frac{21}{2} k_3^2 q_1^2 + \frac{21}{2} k_4^2 q_2^2 \right) \sigma^7$$

$$+ 10 s^2 \left((k^2 k_2 k_4 q_2^2 + k_1 k_3 q_1^2) c_1^2 + \frac{7}{2} k_3^2 q_1^2 + \frac{7}{2} k_4^2 q_2^2 \right) \sigma^6$$

$$+ \left((-k^4 k_2^2 q_2^2 - k_1^2 q_1^2) s^2 + 4 (k+1) (k^3 k_2^2 q_2 + k_1^2 q_1) s - 4 (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2) \right) c_1^4$$

$$- 20 s^2 (k^2 k_2 k_4 q_2^2 + k_1 k_3 q_1^2) c_1^2 - 35 s^2 (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) \sigma^5$$

$$\chi_3 = \left((3 k^4 k_2^2 q_2^2 + 3 k_1^2 q_1^2) s^2 - 16 (k+1) (k^3 k_2^2 q_2 + k_1^2 q_1) s + 20 (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2) \right) c_1^4$$

$$+ 20 s^2 (k^2 k_2 k_4 q_2^2 + k_1 k_3 q_1^2) c_1^2 + 21 s^2 (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2)$$

$$\sigma^4 + \left((-3 k^4 k_2^2 q_2^2 - 3 k_1^2 q_1^2) s^2 + 24 (k+1) (k^3 k_2^2 q_2 + k_1^2 q_1) s - 40 (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2) \right) c_1^4$$

$$- 10 s^2 (k^2 k_2 k_4 q_2^2 + k_1 k_3 q_1^2) c_1^2 - 7 s^2 (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) \sigma^3$$

$$\chi_4 = 3 \left(\left(-\frac{1}{3} k^4 k_2^2 q_2^2 - \frac{1}{3} k_1^2 q_1^2 \right) s^2 + \frac{16}{3} (k+1) (k^3 k_2^2 q_2 + k_1^2 q_1) s - \frac{40 (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2)}{3} \right) c_1^4$$

$$- \frac{2}{3} s^2 (k^2 k_2 k_4 q_2^2 + k_1 k_3 q_1^2) c_1^2 - \frac{1}{3} s^2 (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) \sigma^2$$

$$+ 4 c_1^4 (k+1) \left((k^3 k_2^2 q_2 + k_1^2 q_1) s - 5 (k+1) (k^2 k_2^2 + k_1^2) \right) \sigma + 4 c_1^4 (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2)$$

$$\chi_5 = \left(s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^4 - 2 s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^3 + s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^2 \right) c_1^8$$

$$\left((-k q_1 s + k^2 - 1)^2 \sigma^2 - 2 (k-1) (k+1) (-k q_1 s + k^2 - 1) \sigma + (k-1)^2 (k+1)^2 \right)$$

$$\chi_6 = k_3^2 s^2 \sigma^2 q_1^2 c_1^8 (-1 + \sigma)^2 \left((k q_2 s + k^2 - 1) \sigma - k^2 + 1 \right)^2 (k-1)^2 (k+1)^2$$

$$\chi_7 = -s^2 \left(\left(s^2 (k^4 k_2^2 k_3^2 + 4 k^2 k_1 k_2 k_3 k_4 + k_1^2 k_4^2) q_2^2 - 4 k^3 s k_2^2 k_3^2 (k+1) q_2 + 4 k_3^2 (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2) \right) q_1^2 \right.$$

$$\left. - 4 s k_1^2 k_4^2 q_2^2 (k+1) q_1 + 4 k_4^2 q_2^2 (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2) \right) c_1^4 + 2 s^2 k_3 k_4 q_1^2 q_2^2 (\sigma^2 - 5 \sigma + 10)$$

$$(k^2 k_2 k_3 + k_1 k_4) c_1^2 + q_1^2 q_2^2 s^2 k_4^2 k_3^2 (\sigma^4 - 7 \sigma^3 + 21 \sigma^2 - 35 \sigma + 35) \sigma^7$$

$$\begin{aligned}
\chi_8 &= 3s^2((q_1^2 q_2^2 (k^4 k_2^2 k_3^2 + 4k^2 k_1 k_2 k_3 k_4 + k_1^2 k_4^2) s^2 - \frac{16}{3} q_1 q_2 (k+1) (k^3 k_2^2 k_3^2 q_1 + k_1^2 k_4^2 q_2) s \\
&\quad + \frac{(20 k_3^2 q_1^2 + 20 k_4^2 q_2^2) (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2)}{3}) c_1^4 + \frac{20 q_1^2 q_2^2 k_4 k_3 s^2 (k^2 k_2 k_3 + k_1 k_4) c_1^2}{3} \\
&\quad + 7 q_1^2 q_2^2 s^2 k_4^2 k_3^2) \sigma^6 \\
\chi_9 &= 2s^2((q_1^2 q_2^2 (k^2 k_2 k_3 + k_1 k_4) s^2 - 4 q_1 q_2 (k+1) (k k_2 k_3 q_1 + k_1 k_4 q_2) s + 4 (k+1)^2 (k_1 k_4 q_2^2 + k_2 k_3 q_1^2)) \\
&\quad k_1 k_2 k^2 c_1^6 + (\frac{3}{2} q_1^2 q_2^2 (k^4 k_2^2 k_3^2 + 4k^2 k_1 k_2 k_3 k_4 + k_1^2 k_4^2) s^2 - 12 q_1 q_2 (k+1) (k^3 k_2^2 k_3^2 q_1 + k_1^2 k_4^2 q_2) \\
&\quad s + 20 (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2)) c_1^4 + 5 q_1^2 q_2^2 k_4 k_3 s^2 (k^2 k_2 k_3 + k_1 k_4) c_1^2 \\
&\quad + \frac{7}{2} q_1^2 q_2^2 s^2 k_4^2 k_3^2) \sigma^5 \\
\chi_{10} &= 2(k^2 k_1 k_2 (q_1^2 q_2^2 (k^2 k_2 k_3 + k_1 k_4) s^2 - 8 q_1 q_2 (k+1) (k k_2 k_3 q_1 + k_1 k_4 q_2) s \\
&\quad + 12 (k+1)^2 (k_1 k_4 q_2^2 + k_2 k_3 q_1^2)) c_1^6 + (\frac{1}{2} q_1^2 q_2^2 (k^4 k_2^2 k_3^2 + 4k^2 k_1 k_2 k_3 k_4 + k_1^2 k_4^2) s^2 \\
&\quad - 8 q_1 q_2 (k+1) (k^3 k_2^2 k_3^2 q_1 + k_1^2 k_4^2 q_2) s + 20 (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2)) c_1^4 \\
&\quad + q_1^2 q_2^2 k_4 k_3 s^2 (k^2 k_2 k_3 + k_1 k_4) c_1^2 + \frac{1}{2} q_1^2 q_2^2 s^2 k_4^2 k_3^2) s^2 \sigma^4 \\
\chi_{11} &= c_1^4((-k(q_1 + q_2) s + (k+1)^2) k_1^2 (k+1) (-2k^2 q_1 q_2 s^2 - ((q_1 - 3q_2)k - 3q_1 + q_2) (k+1) k s \\
&\quad + (k^2 - 6k + 1) (k+1)^2) k_2^2 c_1^4 + 8 k_1 s^2 k_2 k^2 (q_1 q_2 (k k_2 k_3 q_1 + k_1 k_4 q_2) s \\
&\quad - 3 (k_1 k_4 q_2^2 + k_2 k_3 q_1^2) (k+1) c_1^2 + 4 s^2 (q_1 q_2 (k^3 k_2^2 k_3^2 q_1 + k_1^2 k_4^2 q_2) s \\
&\quad - 5 (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k+1) (k^2 k_2^2 + k_1^2))) (k+1) \sigma^3 \\
\chi_{12} &= 3 c_1^4 (k+1)^2 ((\frac{1}{3} ((q_1^2 - 4 q_1 q_2 - 3 q_2^2) k - 3 q_1^2 - 4 q_1 q_2 + q_2^2) k^2 s^2 \\
&\quad - \frac{4}{3} (k+1) k ((q_1 - q_2) k^2 + (-4 q_1 - 4 q_2) k - q_1 + q_2) s + (k^2 - 6k + 1) (k+1)^3) k_1^2 (k+1) k_2^2 c_1^4 \\
&\quad - \frac{8}{3} k_1 s^2 k_2 k^2 (k_1 k_4 q_2^2 + k_2 k_3 q_1^2) c_1^2 - \frac{4}{3} s^2 (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k^2 k_2^2 + k_1^2)) \sigma^2 \\
\chi_{13} &= 3 c_1^8 k_1^2 \left(-\frac{2}{3} k ((q_1 - q_2) k^2 + (-4 q_1 - 4 q_2) k - q_1 + q_2) s + (k^2 - 6k + 1) (k+1)^2 \right) (k+1)^4 k_2^2 \sigma \\
&\quad - c_1^8 k_1^2 k_2^2 (k^2 - 6k + 1) (k+1)^6 \\
\chi_{14} &= \left((k q_2 s + k^2 - 1)^2 \sigma^2 - 2 (k-1) (k+1) (k q_2 s + k^2 - 1) \sigma + (k-1)^2 (k+1)^2 \right) c_1^8 \\
&\quad \left((-k q_1 s + k^2 - 1)^2 \sigma^2 - 2 (k-1) (k+1) (-k q_1 s + k^2 - 1) \sigma + (k-1)^2 (k+1)^2 \right) k_1^2 k_2^2 \\
\chi_{15} &= -4 s^4 c_1^4 k_3^2 k_4^2 q_1^2 q_2^2 (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2) \sigma^9 + 20 s^4 c_1^4 k_3^2 k_4^2 q_1^2 q_2^2 (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2) \sigma^8 \\
&\quad - 8 k_4 c_1^4 q_2^2 s^4 (k+1)^2 k_3 q_1^2 ((k_1 k_3 + k_2 k_4) k^2 k_1 k_2 c_1^2 + 5 (k^2 k_2^2 + k_1^2) k_3 k_4) \sigma^7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \chi_{16} &= 24 \left((k_1 k_3 + k_2 k_4) k^2 k_1 k_2 c_1^2 + \frac{5}{3} (k^2 k_2^2 + k_1^2) k_3 k_4 \right) k_4 c_1^4 q_2^2 s^4 (k+1)^2 k_3 q_1^2 \sigma^6 + c_1^4 \\
 \chi_{17} &= (-3 q_2^2 k^2 q_1^2 \left(\left(k_3^2 - \frac{1}{3} k_4^2 \right) k - \frac{1}{3} k_3^2 + k_4^2 \right) s^2 + 2 q_2 (k+1) \\
 &\quad \left((k_3^2 q_1 - k_4^2 q_2) k^2 + (4 k_3^2 q_1 + 4 k_4^2 q_2) k - k_3^2 q_1 + k_4^2 q_2 \right) k q_1 s \\
 &\quad + (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k^2 - 6 k + 1) (k+1)^3 k_1^2 (k+1) k_2^2 c_1^4 \\
 &\quad - 24 k^2 s^2 k_1 k_2 k_3 k_4 q_1^2 q_2^2 (k_1 k_3 + k_2 k_4) c_1^2 - 20 q_1^2 q_2^2 s^2 k_4^2 k_3^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2) \\
 \chi_{18} &= s^2 (k+1)^2 \sigma^5 - 3 c_1^4 \\
 \chi_{19} &= (-q_2^2 k^2 q_1^2 \left(\left(k_3^2 - \frac{1}{3} k_4^2 \right) k - \frac{1}{3} k_3^2 + k_4^2 \right) s^2 \\
 &\quad + \frac{4}{3} q_2 (k+1) \left((k_3^2 q_1 - k_4^2 q_2) k^2 + (4 k_3^2 q_1 + 4 k_4^2 q_2) k - k_3^2 q_1 + k_4^2 q_2 \right) k q_1 s \\
 &\quad + (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k^2 - 6 k + 1) (k+1)^3 k_1^2 (k+1) k_2^2 c_1^4 \\
 &\quad - \frac{8}{3} k^2 s^2 k_1 k_2 k_3 k_4 q_1^2 q_2^2 (k_1 k_3 + k_2 k_4) c_1^2 - \frac{4}{3} q_1^2 q_2^2 s^2 k_4^2 k_3^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2) \\
 \chi_{20} &= s^2 (k+1)^2 \sigma^4 + 3 \left(\frac{2}{3} q_2 \left((k_3^2 q_1 - k_4^2 q_2) k^2 + (4 k_3^2 q_1 + 4 k_4^2 q_2) k - k_3^2 q_1 + k_4^2 q_2 \right) k q_1 s \right. \\
 &\quad \left. + (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k^2 - 6 k + 1) (k+1)^2 \right) c_1^8 k_1^2 s^2 (k+1)^4 k_2^2 \sigma^3 \\
 \chi_{21} &= s^2 c_1^8 k_1^2 k_2^2 (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k^2 - 6 k + 1) (k+1)^6 \sigma^2
 \end{aligned}$$

$$a_4 = -\frac{1}{(-1 + \sigma)^{15}} (\phi_1 (\phi_2 + \phi_3 - \phi_4 + \phi_5 + \phi_6 - \phi_7 + \phi_8) (\phi_9 + \phi_{10}) \\ k_1^2 k_2^2 (\phi_{11} + \phi_{12} + (c_1 (\phi_{13} \phi_{14}))^4 - \phi_{15} + \phi_{16}) + \phi_{17} k_1^2 (k_2 (\phi_{18}))^2)$$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= (s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^4 - 2 s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^3 + s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^2) c_1^8 \\ &\quad (s^2 k_3^2 q_1^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^4 - 2 s^2 k_3^2 q_1^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^3 + s^2 k_3^2 q_1^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^2) k_1^2 k_2^2 \\ \phi_2 &= -\sigma^{11} s^4 k_3^2 k_4^2 q_1^2 q_2^2 + 7 \sigma^{10} s^4 k_3^2 k_4^2 q_1^2 q_2^2 - 2 k_4 \left((k^2 k_2 k_3 + k_1 k_4) c_1^2 + \frac{21}{2} k_4 k_3 \right) q_2^2 s^4 k_3 q_1^2 \sigma^9 \\ &\quad + 10 k_4 q_2^2 s^4 k_3 \left((k^2 k_2 k_3 + k_1 k_4) c_1^2 + \frac{7}{2} k_4 k_3 \right) q_1^2 \sigma^8 - s^2 \\ &\quad ((q_1^2 q_2^2 (k^4 k_2^2 k_3^2 + 4 k^2 k_1 k_2 k_3 k_4 + k_1^2 k_4^2) s^2 - 4 q_1 q_2 (k+1) (k^3 k_2^2 k_3^2 q_1 + k_1^2 k_4^2 q_2) s \\ &\quad + 4 (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2)) c_1^4 + 20 q_1^2 q_2^2 k_4 k_3 s^2 (k^2 k_2 k_3 + k_1 k_4) c_1^2 \\ &\quad + 35 q_1^2 q_2^2 s^2 k_4^2 k_3^2) \sigma^7 \\ \phi_3 &= 3 s^2 ((q_1^2 q_2^2 (k^4 k_2^2 k_3^2 + 4 k^2 k_1 k_2 k_3 k_4 + k_1^2 k_4^2) s^2 - \frac{16}{3} q_1 q_2 (k+1) (k^3 k_2^2 k_3^2 q_1 + k_1^2 k_4^2 q_2) s \\ &\quad + \frac{(20 k_3^2 q_1^2 + 20 k_4^2 q_2^2) (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2)}{3}) c_1^4 + \frac{20 q_1^2 q_2^2 k_4 k_3 s^2 (k^2 k_2 k_3 + k_1 k_4) c_1^2}{3} \\ &\quad + 7 q_1^2 q_2^2 s^2 k_4^2 k_3^2) \sigma^6 \\ \phi_4 &= 2 s^2 ((q_1^2 q_2^2 (k^2 k_2 k_3 + k_1 k_4) s^2 - 4 q_1 q_2 (k+1) (k k_2 k_3 q_1 + k_1 k_4 q_2) s + 4 (k+1)^2 (k_1 k_4 q_2^2 + k_2 k_3 q_1^2)) \\ &\quad k_1 k_2 k^2 c_1^6 + (\frac{3}{2} q_1^2 q_2^2 (k^4 k_2^2 k_3^2 + 4 k^2 k_1 k_2 k_3 k_4 + k_1^2 k_4^2) s^2 - 12 q_1 q_2 (k+1) (k^3 k_2^2 k_3^2 q_1 + k_1^2 k_4^2 q_2) s \\ &\quad + 20 (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2)) c_1^4 + 5 q_1^2 q_2^2 k_4 k_3 s^2 (k^2 k_2 k_3 + k_1 k_4) c_1^2 \\ &\quad + \frac{7}{2} q_1^2 q_2^2 s^2 k_4^2 k_3^2) \sigma^5 \\ \phi_5 &= 2 (k^2 k_1 k_2 (q_1^2 q_2^2 (k^2 k_2 k_3 + k_1 k_4) s^2 - 8 q_1 q_2 (k+1) (k k_2 k_3 q_1 + k_1 k_4 q_2) s \\ &\quad + 12 (k+1)^2 (k_1 k_4 q_2^2 + k_2 k_3 q_1^2)) c_1^6 + (\frac{1}{2} q_1^2 q_2^2 (k^4 k_2^2 k_3^2 + 4 k^2 k_1 k_2 k_3 k_4 + k_1^2 k_4^2) s^2 \\ &\quad - 8 q_1 q_2 (k+1) (k^3 k_2^2 k_3^2 q_1 + k_1^2 k_4^2 q_2) s + 20 (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2)) c_1^4 \\ &\quad + q_1^2 q_2^2 k_4 k_3 s^2 (k^2 k_2 k_3 + k_1 k_4) c_1^2 + \frac{1}{2} q_1^2 q_2^2 s^2 k_4^2 k_3^2) s^2 \sigma^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \phi_6 &= c_1^4 \left((-k(q_1 + q_2)s + (k+1)^2) k_1^2 (k+1) (-2k^2 q_1 q_2 s^2 - ((q_1 - 3q_2)k - 3q_1 + q_2)(k+1)ks \right. \\
 &\quad + (k^2 - 6k + 1)(k+1)^2 k_2^2 c_1^4 + 8k_1 s^2 k_2 k^2 (q_1 q_2 (k k_2 k_3 q_1 + k_1 k_4 q_2) s \\
 &\quad - 3(k_1 k_4 q_2^2 + k_2 k_3 q_1^2)(k+1) c_1^2 + 4s^2 (q_1 q_2 (k^3 k_2^2 k_3^2 q_1 + k_1^2 k_4^2 q_2) s \\
 &\quad \left. - 5(k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2)(k+1)(k^2 k_2^2 + k_1^2)) \right) (k+1) \sigma^3 \\
 \phi_7 &= 3c_1^4 (k+1)^2 \left(\left(\frac{1}{3} \left((q_1^2 - 4q_1 q_2 - 3q_2^2)k - 3q_1^2 - 4q_1 q_2 + q_2^2 \right) k^2 s^2 \right. \right. \\
 &\quad - \frac{4}{3} (k+1)k \left((q_1 - q_2)k^2 + (-4q_1 - 4q_2)k - q_1 + q_2 \right) s + (k^2 - 6k + 1)(k+1)^3 k_1^2 (k+1) k_2^2 c_1^4 \\
 &\quad \left. - \frac{8}{3} k_1 s^2 k_2 k^2 (k_1 k_4 q_2^2 + k_2 k_3 q_1^2) c_1^2 - \frac{4}{3} s^2 (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k^2 k_2^2 + k_1^2) \right) \sigma^2 \\
 \phi_8 &= 3c_1^8 k_1^2 \left(-\frac{2}{3} k \left((q_1 - q_2)k^2 + (-4q_1 - 4q_2)k - q_1 + q_2 \right) s + (k^2 - 6k + 1)(k+1)^2 \right) (k+1)^4 k_2^2 \sigma \\
 &\quad - c_1^8 k_1^2 k_2^2 (k^2 - 6k + 1)(k+1)^6 \\
 \phi_9 &= \left(s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^4 - 2s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^3 + s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^2 \right) c_1^8 \\
 &\quad \left((-kq_1 s + k^2 - 1)^2 \sigma^2 - 2(k-1)(k+1)(-kq_1 s + k^2 - 1) \sigma + (k-1)^2 (k+1)^2 \right) \\
 \phi_{10} &= \left((kq_2 s + k^2 - 1)^2 \sigma^2 - 2(k-1)(k+1)(kq_2 s + k^2 - 1) \sigma + (k-1)^2 (k+1)^2 \right) c_1^8 \\
 &\quad \left(s^2 k_3^2 q_1^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^4 - 2s^2 k_3^2 q_1^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^3 + s^2 k_3^2 q_1^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^2 \right) \\
 \phi_{11} &= -4s^4 c_1^4 k_3^2 k_4^2 q_1^2 q_2^2 (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2) \sigma^9 + 20s^4 c_1^4 k_3^2 k_4^2 q_1^2 q_2^2 (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2) \sigma^8 \\
 &\quad - 8k_4 c_1^4 q_2^2 s^4 (k+1)^2 k_3 q_1^2 \left((k_1 k_3 + k_2 k_4) k^2 k_1 k_2 c_1^2 + 5(k^2 k_2^2 + k_1^2) k_3 k_4 \right) \sigma^7 \\
 \phi_{12} &= 24 \left((k_1 k_3 + k_2 k_4) k^2 k_1 k_2 c_1^2 + \frac{5}{3} (k^2 k_2^2 + k_1^2) k_3 k_4 \right) k_4 c_1^4 q_2^2 s^4 (k+1)^2 k_3 q_1^2 \sigma^6 \\
 \phi_{13} &= -3q_2^2 k^2 q_1^2 \left(\left(k_3^2 - \frac{1}{3} k_4^2 \right) k - \frac{1}{3} k_3^2 + k_4^2 \right) s^2 \\
 &\quad + 2q_2 (k+1) \left((k_3^2 q_1 - k_4^2 q_2) k^2 + (4k_3^2 q_1 + 4k_4^2 q_2) k - k_3^2 q_1 + k_4^2 q_2 \right) k q_1 s \\
 &\quad + (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k^2 - 6k + 1) (k+1)^3 \\
 \phi_{14} &= c_1^4 (k_1^2 (k+1) k_2^2 c_1^4 - 24k^2 s^2 k_1 k_2 k_3 k_4 q_1^2 q_2^2 (k_1 k_3 + k_2 k_4) c_1^2 - 20q_1^2 q_2^2 s^2 k_4^2 k_3^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2)) s^2 \\
 &\quad (k+1)^2 \sigma^5 \\
 \phi_{15} &= 3c_1^4 \left((-q_2^2 k^2 q_1^2 \left(\left(k_3^2 - \frac{1}{3} k_4^2 \right) k - \frac{1}{3} k_3^2 + k_4^2 \right) s^2 \right. \\
 &\quad + \frac{4}{3} q_2 (k+1) \left((k_3^2 q_1 - k_4^2 q_2) k^2 + (4k_3^2 q_1 + 4k_4^2 q_2) k - k_3^2 q_1 + k_4^2 q_2 \right) k q_1 s \\
 &\quad + (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k^2 - 6k + 1) (k+1)^3 k_1^2 (k+1) k_2^2 c_1^4 \\
 &\quad \left. - \frac{8}{3} k^2 s^2 k_1 k_2 k_3 k_4 q_1^2 q_2^2 (k_1 k_3 + k_2 k_4) c_1^2 - \frac{4}{3} q_1^2 q_2^2 s^2 k_4^2 k_3^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2) \right) s^2 (k+1)^2 \sigma^4 \\
 \phi_{16} &= 3 \left(\frac{2}{3} q_2 \left((k_3^2 q_1 - k_4^2 q_2) k^2 + (4k_3^2 q_1 + 4k_4^2 q_2) k - k_3^2 q_1 + k_4^2 q_2 \right) k q_1 s \right. \\
 &\quad + (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k^2 - 6k + 1) (k+1)^2 c_1^8 k_1^2 s^2 (k+1)^4 k_2^2 \sigma^3 \\
 &\quad \left. - s^2 c_1^8 k_1^2 k_2^2 (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k^2 - 6k + 1) (k+1)^6 \sigma^2 \right) \\
 \phi_{17} &= \left((kq_2 s + k^2 - 1)^2 \sigma^2 - 2(k-1)(k+1)(kq_2 s + k^2 - 1) \sigma + (k-1)^2 (k+1)^2 \right) c_1^8 \\
 &\quad \left((-kq_1 s + k^2 - 1)^2 \sigma^2 - 2(k-1)(k+1)(-kq_1 s + k^2 - 1) \sigma + (k-1)^2 (k+1)^2 \right) \\
 \phi_{18} &= s^4 c_1^8 k_1^2 k_2^2 k_3^2 k_4^2 q_1^2 q_2^2 (k^2 - 6k + 1) (k+1)^6 \sigma^7 - 3s^4 c_1^8 k_1^2 k_2^2 k_3^2 k_4^2 q_1^2 q_2^2 (k^2 - 6k + 1) (k+1)^6 \sigma^6 \\
 &\quad + 3s^4 c_1^8 k_1^2 k_2^2 k_3^2 k_4^2 q_1^2 q_2^2 (k^2 - 6k + 1) (k+1)^6 \sigma^5 - s^4 c_1^8 k_1^2 k_2^2 k_3^2 k_4^2 q_1^2 q_2^2 (k^2 - 6k + 1) (k+1)^6 \sigma^4
 \end{aligned}$$

$$a_2 = -\frac{\rho_1 (c_1^4 \rho_3 \rho_4 \rho_5 \rho_6 \rho_7 \rho_8 + \rho_2) + (\rho_9 + \rho_{10}) k_1^2 k_2^2 \rho_{11}}{(-1 + \sigma)^{15}}$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \left(s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^4 - 2 s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^3 + s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^2 \right) c_1^8 \\ &\quad \left(s^2 k_3^2 q_1^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^4 - 2 s^2 k_3^2 q_1^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^3 + s^2 k_3^2 q_1^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^2 \right) k_1^2 k_2^2 \\ \rho_2 &= -4 s^4 c_1^4 k_3^2 k_4^2 q_1^2 q_2^2 (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2) \sigma^9 + 20 s^4 c_1^4 k_3^2 k_4^2 q_1^2 q_2^2 (k+1)^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2) \sigma^8 \\ &\quad - 8 k_4 c_1^4 q_2^2 s^4 (k+1)^2 k_3 q_1^2 ((k_1 k_3 + k_2 k_4) k^2 k_1 k_2 c_1^2 + 5 (k^2 k_2^2 + k_1^2) k_3 k_4) \sigma^7 \\ &\quad + 24 \left((k_1 k_3 + k_2 k_4) k^2 k_1 k_2 c_1^2 + \frac{5}{3} (k^2 k_2^2 + k_1^2) k_3 k_4 \right) k_4 c_1^4 q_2^2 s^4 (k+1)^2 k_3 q_1^2 \sigma^6 \\ \rho_3 &= -3 q_2^2 k^2 q_1^2 \left(\left(k_3^2 - \frac{1}{3} k_4^2 \right) k - \frac{1}{3} k_3^2 + k_4^2 \right) s^2 + 2 q_2 (k+1) ((k_3^2 q_1 - k_4^2 q_2) k^2 \\ &\quad + (4 k_3^2 q_1 + 4 k_4^2 q_2) k - k_3^2 q_1 + k_4^2 q_2) k q_1 s + (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k^2 - 6k + 1) (k+1)^3 \\ \rho_4 &= k_1^2 (k+1) k_2^2 c_1^4 - 24 k^2 s^2 k_1 k_2 k_3 k_4 q_1^2 q_2^2 (k_1 k_3 + k_2 k_4) c_1^2 - 20 q_1^2 q_2^2 s^2 k_4^2 k_3^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2) \\ \rho_5 &= s^2 (k+1)^2 \sigma^5 - 3 c_1^4 \\ \rho_6 &= -q_2^2 k^2 q_1^2 \left(\left(k_3^2 - \frac{1}{3} k_4^2 \right) k - \frac{1}{3} k_3^2 + k_4^2 \right) s^2 + \frac{4}{3} q_2 (k+1) ((k_3^2 q_1 - k_4^2 q_2) k^2 \\ &\quad + (4 k_3^2 q_1 + 4 k_4^2 q_2) k - k_3^2 q_1 + k_4^2 q_2) k q_1 s + (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k^2 - 6k + 1) (k+1)^3 \\ \rho_7 &= k_1^2 (k+1) k_2^2 c_1^4 - \frac{8}{3} k^2 s^2 k_1 k_2 k_3 k_4 q_1^2 q_2^2 (k_1 k_3 + k_2 k_4) c_1^2 - \frac{4}{3} q_1^2 q_2^2 s^2 k_4^2 k_3^2 (k^2 k_2^2 + k_1^2) \\ \rho_8 &= 3 \left(\frac{2}{3} q_2 ((k_3^2 q_1 - k_4^2 q_2) k^2 + (4 k_3^2 q_1 + 4 k_4^2 q_2) k - k_3^2 q_1 + k_4^2 q_2) k q_1 s \right. \\ &\quad \left. + (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k^2 - 6k + 1) (k+1)^2 \right) c_1^8 k_1^2 s^2 (k+1)^4 k_2^2 \sigma^3 \\ &\quad - s^2 c_1^8 k_1^2 k_2^2 (k_3^2 q_1^2 + k_4^2 q_2^2) (k^2 - 6k + 1) (k+1)^6 \sigma^2 \\ \rho_9 &= \left(s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^4 - 2 s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^3 + s^2 k_4^2 q_2^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^2 \right) c_1^8 \\ &\quad \left((-k q_1 s + k^2 - 1)^2 \sigma^2 - 2 (k-1) (k+1) (-k q_1 s + k^2 - 1) \sigma + (k-1)^2 (k+1)^2 \right) \\ \rho_{10} &= \left((k q_2 s + k^2 - 1)^2 \sigma^2 - 2 (k-1) (k+1) (k q_2 s + k^2 - 1) \sigma + (k-1)^2 (k+1)^2 \right) c_1^8 \\ &\quad \left(s^2 k_3^2 q_1^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^4 - 2 s^2 k_3^2 q_1^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^3 + s^2 k_3^2 q_1^2 (k-1)^2 (k+1)^2 \sigma^2 \right) \\ \rho_{11} &= s^4 c_1^8 k_1^2 k_2^2 k_3^2 k_4^2 q_1^2 q_2^2 (k^2 - 6k + 1) (k+1)^6 \sigma^7 - 3 s^4 c_1^8 k_1^2 k_2^2 k_3^2 k_4^2 q_1^2 q_2^2 (k^2 - 6k + 1) (k+1)^6 \sigma^6 \\ &\quad + 3 s^4 c_1^8 k_1^2 k_2^2 k_3^2 k_4^2 q_1^2 q_2^2 (k^2 - 6k + 1) (k+1)^6 \sigma^5 - s^4 c_1^8 k_1^2 k_2^2 k_3^2 k_4^2 q_1^2 q_2^2 (k^2 - 6k + 1) (k+1)^6 \sigma^4 \\ a_0 &= -\frac{k_1^4 c_1^{16} s^8 q_1^4 k_3^4 \sigma^8 k_2^4 q_2^4 k_4^4 (k-1)^4 (k+1)^{10} (k^2 - 6k + 1)}{(-1 + \sigma)^8} \end{aligned}$$