



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
DEL ESTADO DE HIDALGO



INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN TECNOLOGÍAS DE INFORMACIÓN Y SISTEMAS

---

MAESTRÍA EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

DISEÑO DE UN CONTROLADOR ROBUSTO ADAPTABLE: REGULACIÓN DE  
TEMPERATURA DE UN PROTOTIPO INTERCAMBIADOR DE CALOR.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN  
CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

PRESENTA:

ING. OMAR LÓPEZ ARIAS

DIRECTORES DE TESIS:

DR. CARLOS CUVAS CASTILLO

DR. JESÚS PATRICIO ORDAZ OLIVER

PACHUCA HGO., MÉXICO 3 DE OCTUBRE DE 2019





Ing. Omar López Arias

Diseño de un controlador  
robusto adaptable: regulación  
de temperatura de un  
prototipo intercambiador de  
calor.



Gracias a

**CONACYT** por la beca de Maestría  
otorgada durante el periodo  
Agosto 2017 - Junio 2019, con CVU  
850822

**CITIS-UAEH**, por la guía formación  
académica brindada durante el  
posgrado y el apoyo para la  
realización de la presente memoria.



# Agradecimientos

La presente tesis se la dedico a mis padres que con su esfuerzo me brindaron el mejor regalo que podría recibir, una buena educación tanto académica como cívica y gracias a ellos me fue posible concluir con mis estudios de grado y ahora con uno de posgrado. De igual manera mis profundos agradecimientos al personal que conforma la Maestría en ciencias en automatización y control por su docencia y guía en estos dos años en especial a mis directores de tesis, quien con su dirección, conocimiento, enseñanza y colaboración me permitió el desarrollo de este trabajo. Finalmente quiero expresar mi gratitud a todos mis amigos y compañeros del área académica de computación y electrónica que me ayudaron de una manera desinteresada y lograron crear un ambiente de trabajo ameno.



# Notación

- $x$  Representación del estado del sistema.
- $u$  Representación de la entrada del sistema.
- $A$  Parámetro escalar asociado a la dinámica del sistema.
- $B$  Parámetro escalar asociado a la entrada del sistema.
- $\mathbf{A}$  Matriz de parámetros asociados a la dinámica del sistema.
- $\mathbf{B}$  Matriz de parámetros asociados a la entrada del sistema.
- $\hat{\mathbf{A}}$  Matriz estimada de  $\mathbf{A}$ .
- $\hat{\mathbf{B}}$  Matriz estimada de  $\mathbf{B}$ .
- $\tilde{\mathbf{A}}$  Error de estimación de  $\mathbf{A}$ .
- $\tilde{\mathbf{B}}$  Error de estimación de  $\mathbf{B}$ .
- $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  Matriz de error de estimación.
- $\varphi$  Vector de regresión.
- $\mathbf{I}_n$  Matriz identidad de tamaño  $n$ .



# Resumen

Distintos sistemas térmicos tienen una aplicación relevante en la gran mayoría de actividades industriales, tal es el caso de un tipo particular de sistemas térmicos conocidos como intercambiadores de calor los cuales son un tipo de radiador diseñado para transferir calor entre dos fluidos, o entre la superficie de un sólido y un fluido en movimiento. Tienen una gran importancia en la industria debido a su uso en distintos procesos tales como refrigeración, calefacción, procesos químicos y en generación de energía eléctrica. Es muy conocido que los controladores PID son los más comunes en la industria por su buen desempeño, pero a veces no son la mejor opción bajo ciertos criterios, por ejemplo, cuando los sistemas presentan parámetros variantes en el tiempo, cuando la dinámica del sistema se aleja del punto de operación debido a incertidumbres no consideradas del proceso. Con la finalidad de lograr el mejor desempeño del proceso, garantizando la funcionalidad de este, se propone un diseño de control moderno con características de robustez y adaptabilidad para sistemas que presentan dinámicas inciertas. Para el caso particular de una planta prototipo diseñada y construida en base a un intercambiador de calor donde se desea regular la temperatura de un fluido (Agua destilada) mediante la transferencia de calor entre una resistencia térmica y un conducto metálico en forma de espiral donde circula el fluido, la cual mediante el controlador propuesto se ha logrado la convergencia de la señal de salida del proceso a una referencia deseada.



# Abstract

Different thermal systems have a relevant application in the vast majority of industrial activities, such is the case of a particular type of thermal system known as heat exchangers which are a type of radiator designed to transfer heat between two fluids, or between the surface of a solid and a moving fluid. These have a great importance in the industry due to their use in different processes such as refrigeration, heating, chemical processes and in electric power generation. It is well known that PID controllers are the most common in the industry because of their good performance although sometimes these are not the best option under certain criteria, for example when the system has time-varying parameters, when the system dynamics moves away from point of operation due to uncertainty not considered on the process. To achieve the best performance of the process and to guarantee its functionality, a modern control with robustness and adaptability characteristics is proposed, for systems that have uncertain dynamics. For the particular case of a prototype plant designed and built based on a heat exchanger where it is desired to regulate the temperature of a fluid (distilled water) by transferring heat between a thermal resistance and a spiral-shaped metal conduit, which through the proposed controller has converged the output signal of the process to a desired reference.



# Acrónimos

- **UUA** Uniformemente últimamente acotada.
- **PID** Control proporcional integral y derivativo.
- **PI** Control proporcional integral.
- **P** Control proporcional.
- **STR** Reguladores autoajustables
- **MRAC** Reguladores por modelo de referencia
- **PWM** Modulación por ancho de pulso
- **C.A.** Corriente alterna
- **V.C.A.** Voltaje de corriente alterna
- **C.D.** Corriente directa
- **V.C.D.** Voltaje de corriente directa
- **LMI's** Desigualdades lineales matriciales
- **M.C.R.** Mínimos cuadrados recursivos



# Índice general

Agradecimientos . . . . .	V
Notacion . . . . .	VII
Resumen . . . . .	IX
Abstract . . . . .	XI
Acronimos . . . . .	XIII
Índice general . . . . .	XV
Índice de figuras . . . . .	XVII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	3
1.3. Justificación . . . . .	4
1.4. Objetivos . . . . .	5
1.4.1. Objetivo general . . . . .	5
1.4.2. Objetivos específicos . . . . .	5
1.5. Hipótesis . . . . .	5
1.6. Metodología . . . . .	5
1.7. Organización de la tesis . . . . .	6
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>7</b>
2.1. Preliminares . . . . .	7
2.2. Identificación de sistemas . . . . .	11
2.2.1. Método de Mínimos Cuadrados Recursivos . . . . .	11
2.3. Discusión del capítulo . . . . .	13
<b>3. Diseño de Control robusto-adaptable</b>	<b>15</b>
3.1. Representación del sistema de control . . . . .	15
3.2. Diseño de la ley de control P y PI robusto . . . . .	16
3.3. Diseño de la ley de control P y PI adaptable . . . . .	21
3.4. Discusión del capítulo . . . . .	28

---

<b>4. Resultados experimentales</b>	<b>29</b>
4.1. Control P y PI robusto . . . . .	29
4.2. Control P y PI robusto adaptable . . . . .	33
4.3. Discusión del capítulo . . . . .	36
<b>5. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>37</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	37
5.2. Trabajo futuro . . . . .	38
<b>Bibliografía</b>	<b>39</b>
<b>A. Plataforma experimental e Identificación</b>	<b>42</b>
A.1. Identificación por mínimos cuadrados . . . . .	47
<b>B. Herramientas adicionales</b>	<b>51</b>
<b>C. Código Matlab de la parte experimental</b>	<b>53</b>
C.1. Control P robusto . . . . .	53

# Índice de figuras

1.1. Respuesta en la salida del sistema térmico . . . . .	4
4.1. Estado del sistema P robusto. . . . .	30
4.2. Señal de control P robusto. . . . .	30
4.3. Estado del sistema PI robusto. . . . .	31
4.4. Señal de control PI robusto. . . . .	32
4.5. Estado del sistema P robusto adaptable. . . . .	33
4.6. Parámetros del sistema. . . . .	33
4.7. Señal de control P robusto adaptable. . . . .	34
4.8. Estado del sistema PI robusto adaptable. . . . .	35
4.9. Señal de control PI robusto adaptable. . . . .	35
A.1. Diseño en SolidWorks . . . . .	42
A.2. Principales secciones de la planta térmica . . . . .	43
A.3. Módulo MAX6675 para termopar tipo K . . . . .	44
A.4. Dimmer por flanco de cruce por cero . . . . .	45
A.5. Arduino Uno . . . . .	45
A.6. Planta prototipo . . . . .	46
A.7. Diagrama esquemático . . . . .	47
A.8. Señal de entrada para la identificación . . . . .	48
A.9. Estado de la planta experimental . . . . .	48
A.10. Parámetros identificados . . . . .	49
A.11. Simulación del sistema identificado . . . . .	50



# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se da a conocer la motivación que impulso este trabajo de investigación y los principales antecedentes referentes a la teoría necesaria para la obtención del controlador. También, se establece el estado del arte, además, se da a conocer el planteamiento del problema, la justificación, los objetivos, la hipótesis, los alcances y las limitaciones de la investigación.

### 1.1. Antecedentes

La mayor parte de sistema térmicos tienen aplicación en casi todas las actividades industriales, ya que un proceso común, es la transferencia de calor de un lugar a otro, o bien de un fluido a otro, en una gran cantidad de sistemas industriales es por ello que su eficiencia debe ser la mejor en cuanto al consumo energético y bajo las condiciones del proceso requeridas [1]. Los intercambiadores de calor son los dispositivos que permiten realizar dicha tarea por lo tanto hay que tener un entendimiento básico de estos, para esto hay que conocer los principales componentes mecánicos, así también es necesario saber cómo estos funcionan y operan de una forma adecuada. Un intercambiador de calor es básicamente un radiador diseñado para transferir calor entre dos fluidos, o entre la superficie de un sólido y un fluido en movimiento [2], mediante una de tres formas de transferencia de calor descritas como: transferencia de calor convectiva del fluido hacia la pared interna del tubo, transferencia de calor conductiva a través de la pared del tubo o transferencia de calor convectiva desde la pared externa del tubo hacia el fluido exterior [3]. Son elementos esenciales en la industria por su uso en sistema de calefacción, refrigeración, procesamientos químicos y en la generación de energía eléctrica además de su uso cotidiano en aires acondicionados, refrigeradores en automóviles etc [4]. Existen diferentes

tipos de intercambiadores de calor en función del flujo: flujo paralelo; contra flujo; flujo cruzado. También se clasifican con base en su construcción, entre los mas comunes son los conocidos como los de carcasa y tubos, están compuestos por tubos cilíndricos montados dentro de una carcasa también cilíndrica con el eje de los tubos paralelos al eje de la carcasa, un fluido circula por dentro de los tubos y el otro por el exterior o como se menciona anteriormente puede tratarse de una superficie solida. Son el tipo de intercambiadores de calor más usado en la industria [5].

Se sabe que los controladores PID son los mas comunes en la industria por su buen desempeño, pero a veces no son la mejor opción bajo ciertos criterios, por ejemplo cuando los sistema presentan parámetros variantes en el tiempo o cuando la dinámica del sistema se aleja del punto de operación debido a incertidumbres no consideradas del proceso. Aquí tienen un papel relevante las técnicas de control modernas, debido a que, la eficiencia de un sistema puede verse mejorada mediante una ley de control con ciertas características que favorecen al proceso del sistema. Tal es el caso de la teoría de control conocida como control robusto desde el año 1980. En control robusto, se busca aproximar el modelo por uno lineal de coeficientes constantes, asumiendo que se incurrirá en un error de modelado. Este error es considerado como una incertidumbre del modelo frente a la planta física, estas incertidumbres se modelan y acotan para cada problema en el proceso de diseño del controlador [6]. El primer paso en el diseño de una ley de control es la obtención de un modelo matemático de la planta a controlar, en ciertos casos el modelo puede ser lineal o no lineal y además de alto orden lo que complica demasiado el proceso de diseño, dando como resultado controladores de alto orden. Por este motivo se busca obtener un modelo lo más simple posible, pero que contenga todas las dinámicas físicas que presenta el sistema [6]. Otra forma de obtener un modelo que represente al sistema estudiado es por medio de una identificación de parámetros, la cual es la determinación experimental del comportamiento temporal de un proceso o sistema donde se usan señales medidas y se determina el comportamiento temporal dentro de una clase de modelos [7], el cual fue aplicado en la planta experimental bajo el método de mínimos cuadrados recursivos.

El control adaptativo es un tipo especial de control el cual consiste en adaptar los parámetros variables de un proceso a fin de mantener un funcionamiento adecuado de un sistema, en 1960 se presentan avances en teoría de control como descripción de espacio de estado, teoría de la estabilidad y programación dinámica los avances en control adaptativo tienden hacia los conceptos de aprendizaje y ciencia computacionales. Por otra parte los progresos en microelectrónica han estimulado el desarrollo del control adaptativo, hoy en día la mayoría de los controles permiten el ajuste de parámetros de alguna manera siendo un tema de investigación de amplio interés. Los sistemas de control con realimentación

lineal ordinaria son la base sobre la cual se desarrollan los sistemas de control adaptativo. Este sistema de control es apropiado para sistemas que sean variantes en el tiempo aunque dentro de esta categoría podrían colocarse los PID auto ajustables, el concepto es mucho más amplio ya que suelen incorporar técnicas de identificación de parámetros por mínimos cuadrados u otras técnicas propias del sistema resultante.

Las estructuras de control adaptativas que han tenido mayor impacto técnico son:

- Sistemas Auto-Ajustables (STR).
- Sistemas Adaptativos con Modelo de Referencia (MRAC).

El concepto de regulador autoajustable fue propuesto inicialmente por Kalman, utilizando un método de identificación de mínimos cuadrados recursivos [8] también, Åström y Wittenmark en [9] consideraban el problema en un entorno estocástico. La técnica de los sistemas autoajustables se basa en que si se dispone de un método válido de diseño de reguladores que parte del conocimiento del modelo del proceso, para realizar un control que se adapte a los cambios en el proceso basta con acoplar ese método de diseño de reguladores con un procedimiento de identificación en línea. Para ello se supone, evidentemente, que existe una separación entre las tareas de identificación y control. Se dispondrá de un calculador que en paralelo al control se encarga de calcular los valores óptimos de los coeficientes del regulador. Este calculador consiste en un estimador recursivo de los parámetros del sistema o proceso controlado. Los resultados del estimador servirán para calcular los valores óptimos de los coeficientes del regulador. El principal inconveniente de esta aproximación es que la estabilidad no llega a asegurarse en el caso general. Los sistemas adaptativos con modelo de referencia (MRAC) fueron propuestos por los investigadores del M.I.T. Whitaker, Narmon y Kezer al estudiar los servomecanismos con ganancia variable, se basan en un concepto muy simple: se desea que el comportamiento del proceso sea idéntico al de un modelo que se da como referencia. Si existe diferencia entre las salidas del proceso y del modelo un mecanismo de adaptación intenta minimizarla con el ajuste de los parámetros del regulador, o añadiendo una variación en la acción sobre el sistema físico [10].

## 1.2. Planteamiento del problema

Se cuenta con un sistema térmico una planta prototipo la cual cuenta con un controlador PI de la forma:  $u = k_p e + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau$  donde  $k_p \in \mathbb{R}$ ,  $k_i \in \mathbb{R}$  y  $e$  será el error de medición entre la salida real y la deseada. Este controlador define la problemática de este

sistema, es que en la presencia de algunos factores desconocidos tales como dinámicas inciertas, perturbaciones externas, se presentan oscilaciones frecuentes en la temperatura del fluido ocasionando un aumento en el tiempo de estabilización del sistema, lo que se traduce en pérdidas de la eficiencia del sistema debido al controlador PI utilizado. Por ello, este trabajo de tesis propone la incorporación de una metodología de control robusto adaptable, que reduzca los efectos antes expuestos.

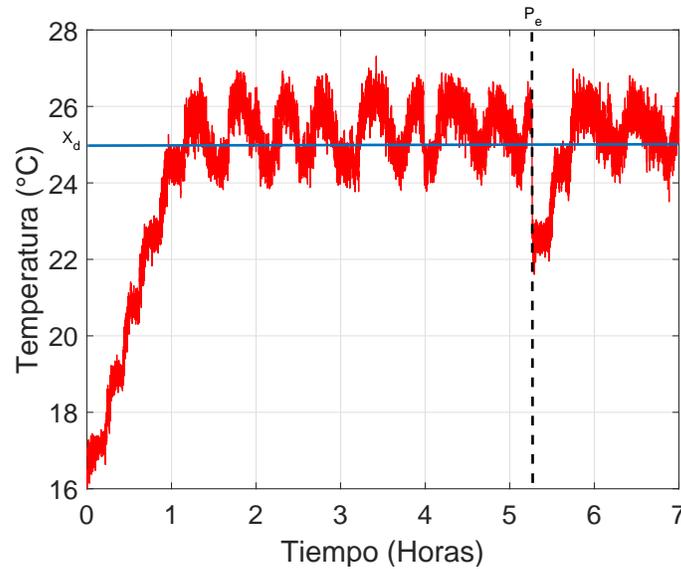


Figura 1.1: Respuesta en la salida del sistema térmico

En la Figura 1.1 se observa una representación de la salida del sistema térmico con un controlador PI, el cual se pretende corregir mediante la aplicación del controlador robusto adaptable.

### 1.3. Justificación

La importancia de este trabajo radica en la solución de un problema de control de un proceso en tiempo real. Por ello, se propone como solución el desarrollo de un algoritmo de control con las características de robustez y adaptación, para la estabilización de un proceso térmico. Adicionalmente, este trabajo aportará información relevante al campo de ingeniería de control utilizado hasta el momento en este tipo de sistemas térmicos.

## 1.4. Objetivos

### 1.4.1. Objetivo general

Estabilizar un sistema térmico mediante un control P y PI robusto adaptable para mejorar el desempeño de la respuesta en la salida del sistema.

### 1.4.2. Objetivos específicos

- Diseñar y construir una planta piloto de control de temperatura tipo intercambiador de calor mediante el estudio de la teoría existente de estos sistema térmicos para su posterior implementación del control propuesto.
- Identificar los parámetros de la planta considerando un modelo por aproximación polinomial mediante mínimos cuadrados para su posterior ley de control.
- Desarrollar estrategias de control robusto y adaptable para su implementación en el sistema no lineal.
- Realizar pruebas experimentales de las leyes de control en la planta piloto utilizando una consigna deseada en el control propuesto.
- Realizar un estudio comparativo entre los controladores robustos y adaptables sobre el estado, la entrada y las salidas de la planta piloto.

## 1.5. Hipótesis

Debido a que la planta térmica es un prototipo experimental sera posible controlarla de una manera similar a un intercambiador de calor existente tipo carcasa y tubo, si esto es posible, el control propuesto tendrá un mejor desempeño en comparación con el control PI ya que este aporta robustez a un sistema cuando su dinámica se encuentra en estado estacionario.

## 1.6. Metodología

Con el propósito de establecer el estatus de la presente investigación se realiza la búsqueda de la información pertinente a los sistema térmicos específicamente intercambiadores de calor para el diseño y construcción de la planta prototipo.

El estudio de técnicas de control adaptable para cuando los sistemas presentan una dinámica variante en el tiempo, en este caso en sus parámetros. Con lo cual se comienza con el diseño del controlador robusto a las incertidumbres del sistema presentadas como variaciones de los parámetros y perturbaciones externas y posteriormente agregar la característica de adaptabilidad en los casos del controlador proporcional y proporcional integral. A continuación, se concluye con un tipo particular de estabilidad para cuando los sistemas presentan perturbaciones no desvanecientes. Finalmente, mediante la aplicación de los controladores diseñados en la planta prototipo se observará el comportamiento de la trayectoria del sistema en su estado transitorio y en el estado estacionario ante una misma perturbación externa aplicada a la planta.

## 1.7. Organización de la tesis

Este trabajo de tesis está compuesto de 4 capítulos, el Capítulo 1 se presentan los trabajos de investigación previos el planteamiento del problema, la justificación del problema, los objetivos, la hipótesis y la metodología.

En el Capítulo 2 se presenta el marco teórico, las bases donde se sustenta cualquier propuesta de desarrollo de un trabajo, donde se describen teoremas, lemas, definiciones, así como otras herramientas necesarias.

Dentro del Capítulo 3 se desarrolla el diseño del control, se muestran los controles previos que ayudaron a desarrollar el control propuesto un PI robusto adaptable, como primera parte se diseña un control P y PI robusto para el sistema no lineal, seguido del control P adaptable robusto para finalizar en el PI robusto adaptable.

En el Capítulo 4 se describen los resultados experimentales en la planta térmica y se abordan las conclusiones. Por último en el Apéndice A se presenta la plataforma experimental su diseño basado en un intercambiador de calor tipo carcasa y tubo, su construcción e instrumentación y una descripción de cada elemento que la compone además de la identificación realizada por mínimos cuadrados recursivos y en el Apéndice B se muestran los programas de Matlab desarrollados para la sintonización del control.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

### 2.1. Preliminares

A continuación, se muestran las herramientas matemáticas más importantes que se utilizan en el presente trabajo.

Se estudian sistemas dinámicos modelados por un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas entre si de la forma compacta siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u + \xi_p(t), \\ y &= h(x),\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $x(t_0) = x_0 \forall t \geq t_0$ .

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}, \quad h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p,$$

con  $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas de control y  $\xi_p(t) \subset \mathbb{R}^n$  es el término de perturbaciones externas al sistema. También, vamos a considerar  $y$  como la salida del sistema, por ejemplo variables físicamente medibles y se busca la estabilización de la salida en un valor deseado.

#### **Teorema 2.1** *Existencia y unicidad [11]*

*Sea  $f$  continua a tramos en  $t$  que satisface la condición de Lipschitz*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|, \quad \forall x, y \in B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \leq r\} \forall t \geq t_0.$$

*Entonces existe un  $\delta > 0$  tal que*

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0,$$

tiene una única solución.

**Definición 2.1 Derivada de Lie o direccional [12]**

Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . La derivada de Lie de  $V$  con respecto de  $f$  a lo largo de  $f$ , está dada por  $L_f V$  esta definida por

$$L_f V(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x).$$

Ésta es la noción familiar de la derivada de  $V$  a lo largo de la trayectoria del sistema autónomo de la forma  $\dot{x} = f(x)$ .

**Definición 2.2 Punto de equilibrio [11]**

Un punto  $x = x^*$  en espacio de estados es un punto de equilibrio del sistema  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ , con  $u = u^*$ , si tiene la propiedad de que la condición inicial del estado  $x^*$ , permanece en  $x^*$  para todo tiempo  $t$ , es decir,  $x^*$  es punto de equilibrio del sistema  $\dot{x} = f(x^*) + g(x^*)u^*$ .

**Lema 2.1 Desigualdad de Gronwall-Bellman [11]**

Sea  $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  no negativa continua. Si una función  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  satisface

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \mu(s)y(s)ds,$$

con  $a \leq t \leq b$  dentro del mismo intervalo

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \lambda(s)\mu(s)e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau} ds,$$

en particular, si  $\lambda(t) = \lambda$  es una constante, entonces

$$y(t) \leq \lambda e^{\int_a^t \mu(\tau)d\tau},$$

si, además  $\mu(t) = \mu \geq 0$  es una constante, entonces

$$y(t) \leq \lambda e^{\mu(t-a)}.$$

**Lema 2.2 Lema de Barbalat [11]**

Si  $f(t)$  es uniformemente continua, tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \|f(\tau)\|d\tau$  existe y es finito. Entonces

$$f(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty.$$

**Corolario** Si  $G, \dot{G} \in L_\infty$ , además  $G(t) \in L_p$ , para  $p = [1, \infty)$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0$ .

**Lema 2.3 Lema de comparación [11]**

Considere la ecuación diferencial escalar

$$\dot{u} = L(u), \quad u = u(t), \quad u(t_0) = u_0,$$

donde  $L(u)$  es continua en  $t$  y localmente Lipschitz en  $u$ , para todo  $t \geq 0$  y toda  $u \in J \subset \mathbb{R}$ . Sea  $[t_0, T)$  ( $T$  puede ser infinito) el intervalo máximo de la existencia de la solución  $u$ , y suponga  $u \in J$  para todo  $t \in [t_0, T)$ . Sea  $v = v(t)$  una función continuamente diferenciable cuya derivada por el lado derecho  $D^+v$  satisface la desigualdad diferencial

$$D^+v \leq L(v, t), \quad v(t_0) \leq u_0,$$

con  $v \in J$  para todo  $t \in [t_0, T)$ . Entonces  $v < u$  para todo  $t \in [t_0, T)$ .

**Definición 2.3 Estabilidad [11]**

El punto de equilibrio  $x^* = 0$  del sistema (2.1) es estable, si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

**Definición 2.4 Uniformemente estable [11]**

El punto de equilibrio  $x^* = 0$  del sistema (2.1) es uniformemente estable, si para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ . independiente de  $t_0$  tal que se cumple

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

**Definición 2.5 Asintóticamente estable [11]**

El punto de equilibrio  $x^* = 0$  es asintóticamente estable, si éste es estable, además si existe  $c = c(t_0) > 0$  tal que  $x(t) \rightarrow 0$  en  $t \rightarrow \infty$ , para todo  $\|x(t_0)\| < c$ .

**Definición 2.6 Exponencialmente estable [11]**

El punto de equilibrio  $x^*$  es exponencialmente estable, si existe un  $\alpha > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que

$$x_0 \in B_r \Rightarrow \|x(t)\| < \beta e^{-\alpha(t-t_0)} x_0.$$

**Definición 2.7 Estabilidad uniformemente últimamente acotado, Estabilidad UUA [11]**

La solución del sistema (2.1) se dice que es uniformemente últimamente acotado estable, si es uniformemente estable y existe un  $c > 0$  con cota última  $b > 0$  independiente de  $t_0$  es decir para  $a \in (0, c) \exists T = T(a, b) > 0$ , tal que

$$\|x(t_0)\| \leq a \quad \Rightarrow \quad \|x(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T.$$

**Teorema 2.2 Teorema de Lyapunov [11]**

Sea  $x^*$  un punto de equilibrio del sistema autónomo,  $D \in \mathbb{R}^n$  el dominio que contiene el origen  $x = 0$ . Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que

$$V(0) = 0, \quad V(x) > 0, \quad \text{en } D - \{0\}.$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \text{en } D.$$

entonces  $x^*$  es estable. Además, si

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{en } D - \{0\},$$

entonces  $x^*$  es asintóticamente estable. <sup>1</sup>

**Definición 2.8 Conjunto atractivo [11]**

Sea  $x^*$  un punto de equilibrio del sistema (2.1), sea  $V(x)$  una función de energía. El conjunto atractivo  $R_A$  está definido por

$$R_A = \left\{ x \in D \mid \dot{V}(x) < c_1 \right\}. \quad (2.2)$$

**Teorema 2.3 [13]** Sea una función real  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$\frac{d}{dt}V(x) \leq -\alpha V(x) + \beta, \quad (2.3)$$

se satisface, con  $\alpha, \beta$  escalares positivos. Entonces,  $V(x)$  es un conjunto atractivo, además la propiedad

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} V(x) \leq \frac{\beta}{\alpha}, \quad (2.4)$$

se cumple.

**Teorema 2.4 Teorema de Taylor [14]** Sea  $r \geq 1$  un entero positivo y la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable  $r$  veces en el punto  $a \in \mathbb{R}$ . Entonces existe una función  $h_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(r)}(a)}{r!}(x-a)^r + h_r(x)(x-a)^r, \quad (2.5)$$

donde  $\lim_{x \rightarrow a} h_r(x) = 0$ . Estos son los llamados términos de orden superior.

Para el caso  $x \in \mathbb{R}^n$ , las derivadas de la función  $f$ , se obtienen mediante la matriz Jacobiana definida por  $\mathbf{J}$

$$f'(a) = \left. \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right|_{x=a} = \mathbf{J}(a)_{ij}.$$

<sup>1</sup>En la notación de la derivada de Lie  $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} \{f(x) + g(x)u\} = L_f V(x) + L_g V(x)$



Obteniendo el estimado de la forma

$$\hat{\theta}(t) = \left( \int_{t_0}^t \varphi^2(\tau) d\tau \right)^{-1} \int_{t_0}^t Z(\tau) \varphi(\tau) d\tau,$$

o en la forma vectorial, es decir cuando se requieren estimar más de un parámetro, descrita por:

$$\hat{\theta} = \left[ \int_{t_0}^t \varphi(x, u) \varphi^\top(x, u) d\tau \right]^{-1} \int_{t_0}^t \varphi(x, u) Z d\tau = \mathbf{P} \int_{t_0}^t \varphi(x, u) Z d\tau.$$

Definiendo  $\mathbf{P}^{-1}$  como

$$\mathbf{P}^{-1} = \int_{t_0}^t \varphi(x, u) \varphi^\top(x, u) d\tau, \quad \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{k \times k}.$$

donde  $\mathbf{P}$  podría no existir, por ello se establece que  $\mathbf{P}\dot{\mathbf{P}}^{-1} = \mathbf{I}_k$  se satisface  $\frac{d}{dt}(\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}) = 0_{k \times k}$ . Entonces es evidente que la siguiente propiedad se satisface

$$\dot{\mathbf{P}}^{-1} = \varphi(x, u) \varphi^\top(x, u),$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}) = \dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{P}}^{-1},$$

donde

$$\dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{P}\varphi(x, u) \varphi^\top(x, u)\mathbf{P}.$$

En consecuencia

$$\dot{\hat{\theta}} = \mathbf{P} \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \varphi(x, u) Z d\tau + \frac{d}{dt} \mathbf{P} \int_{t_0}^t \varphi(x, u) Z d\tau,$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \mathbf{P}\varphi(x, u)Z + \dot{\mathbf{P}} \int_{t_0}^t \varphi(x, u) Z d\tau,$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \mathbf{P}\varphi(x, u)Z - (\mathbf{P}\varphi(x, u) \varphi^\top(x, u)\mathbf{P}) \int_{t_0}^t \varphi(x, u) Z d\tau,$$

Agrupando términos por la izquierda y sustituyendo  $\hat{\theta}$

$$\dot{\hat{\theta}} = \mathbf{P}\varphi(x, u) \left( Z - \varphi^\top(x, u)\mathbf{P} \int_{t_0}^t \varphi(x, u) Z d\tau \right),$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \mathbf{P}\varphi(x, u) \left( Z - \varphi^\top(x, u)\hat{\theta} \right).$$

Se nota que aparece el término de error de estimación (2.7), por lo que

$$\dot{\hat{\theta}} = \mathbf{P}\varphi(x, u)e. \tag{2.8}$$

## **2.3. Discusión del capítulo**

Los conceptos de estabilidad y mínimos cuadrados son herramientas fundamentales en el desarrollo de este proyecto de tesis, como también las propiedades de sistemas no lineales debido al comportamiento del sistema a manipular. Además de la parte de identificación de sistemas que nos permite conocer los parámetros desconocidos de un modelo asociado al sistema para el posterior diseño de la ley de control robusto adaptable .



# Capítulo 3

## Diseño de Control robusto-adaptable

En este capítulo, se presentan los resultados principales del trabajo de investigación, en el cual se aborda el diseño de una ley de control adaptable y robusto para una clase de sistemas no lineales. Para ello, se analiza la estrategia de control proporcional y proporcional integral en sus configuraciones del tipo robusto y adaptable. A continuación, se enlistan los diseños de control desarrollados en este trabajo de tesis.

- Representación del sistema de control
- Diseño de la ley de control P robusto
- Diseño de la ley de control PI robusto
- Diseño de la ley de control P adaptable robusto
- Diseño de la ley de control PI adaptable-robusto

### 3.1. Representación del sistema de control

Sea el sistema no lineal (2.1), donde se desconocen sus parámetros asociados a las funciones  $f(x)$ ,  $g(x)$  pero se cuenta con unos estimados, entonces el mismo se puede redefinir de la forma siguiente

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u + f(x) + g(x)u - \mathbf{A}x - \mathbf{B}u + \xi_p(t), \quad x(0) = x_0. \quad (3.1)$$

Note que al sumar y restar los términos  $\mathbf{A}x + \mathbf{B}u$ , (2.1) se preserva.  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz asociada a la dinámica lineal de  $f$ . La matriz  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , es asociada a la entrada

de (2.1). De esta forma (3.1) se representa como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathbf{A}x + \mathbf{B}u + \xi(x, u, t), \quad x(0) = x_0, \\ \xi(x, u) &= f(x) + g(x)u - \mathbf{A}x - \mathbf{B}u + \xi_p(t).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Cabe remarcar que  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  se pueden obtener, a partir de una linealización basada en una expansión en series de Taylor aplicada al sistema nominal (2.1). En esta propuesta, se supone que los parámetros de las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son inciertas ya que se obtienen de un estimado. Por ello, se proponen algoritmos robustos y adaptables para su estabilización. Adicionalmente, se supone que el término incierto  $\xi$ , cumple la siguiente condición:

$$\|\xi(x, u, t)\|^2 \leq \delta_0 + \delta_1 \|x\|^2.\tag{3.3}$$

A continuación, se presenta el diseño de las leyes de control robusto proporcional y proporcional integral.

## 3.2. Diseño de la ley de control P y PI robusto

La estabilización de sistemas no lineales se puede realizar mediante una acción de control lineal diseñada a partir de una linealización sobre un punto de operación. Cabe resaltar que, cuando hay presencia de perturbaciones no desvanecientes es necesario considerar el concepto de estabilidad últimamente acotada [11]. A continuación se ven las principales características de las proposiciones desarrolladas del diseño de control.

**Proposición 3.1 (Control proporcional robusto)** *Sea el sistema (3.2), con un control por realimentación positiva, dada por*

$$u = \mathbf{K}x, \quad \mathbf{K} \in \mathbb{R}.\tag{3.4}$$

*Si existe un conjunto de soluciones ( $\mathbf{K}$ ,  $0 < \mathbf{P}_1 \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \alpha_1 \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \varepsilon_1 \in \mathbb{R}$ ) tal que*

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) + (\mathbf{A}^\top + \mathbf{K}^\top\mathbf{B}^\top)\mathbf{P}_1 + \alpha_1\mathbf{P}_1 + \varepsilon_1\delta_1\mathbf{I}_n & \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_1 & -\varepsilon_1\mathbf{I}_n \end{bmatrix},\tag{3.5}$$

*sea semidefinida negativa. Entonces, el sistema en lazo cerrado con el control (3.4) garantiza estabilidad últimamente uniformemente acotada (ver Definición 2.7), donde*

$$a = \sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{P}_1)^{-1}V_1(x_0)}, \quad b = \sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{P}_1)^{-1}\beta_1/\alpha_1}, \quad T = \frac{1}{\alpha_1} \ln \left\{ \frac{\alpha_1 V_1(x_0) - \beta_1}{\alpha_1 \rho_1} \right\} + t_0,\tag{3.6}$$

*para una  $0 < \rho_1 \in \mathbb{R}$  suficientemente pequeña, una  $\beta_1 = \varepsilon_1\delta_0$  y una  $V_1(x) = x^\top\mathbf{P}_1x$ .*

**Demostración 1** Se propone una función de energía

$$V_1(x) = x^T \mathbf{P}_1 x,$$

de la Definición 2.1. Para el sistema (2.1) se obtiene lo siguiente

$$\frac{d}{dx} V_1(x) = \frac{\partial V_1(x)}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V_1(x)}{\partial x} g(x) u.$$

Es decir, la derivada temporal de la función de energía asociada al sistema, a lo largo de las trayectorias del sistema (3.2), se define por

$$\dot{V}_1(x) = 2x^T \mathbf{P}_1 \{ \mathbf{A}x + \mathbf{B}u + \xi(x, u, t) \}.$$

Bajo la acción del control (3.4), además de sumar y restar los términos siguientes  $\alpha_1 V_1(x)$ ,  $\varepsilon_1 \|\xi(x, t)\|^2$ , la igualdad se mantiene de la forma

$$\dot{V}_1(x) = \begin{bmatrix} x \\ \xi(x, t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) + (\mathbf{A}^T + \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T) \mathbf{P}_1 + \alpha_1 \mathbf{P}_1 + \varepsilon_1 \delta_1 \mathbf{I}_n & \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_1 & -\varepsilon_1 \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi(x, t) \end{bmatrix} - \alpha_1 V_1(x) + \varepsilon_1 \|\xi(x, t)\|^2.$$

donde  $\mathbf{I}_n$  define una matriz identidad del tamaño del número de las variables de estado. Note que las incertidumbres y perturbaciones  $\xi(x)$  son acotadas (suposición (3.3)). Es evidente que la siguiente desigualdad diferencial, se cumple

$$\dot{V}_1(x) \leq z_1^T \mathbf{W}_1 z_1 - \alpha_1 V_1(x) + \beta_1, \quad z_1(x, \xi) = \begin{bmatrix} x \\ \xi(x, t) \end{bmatrix}.$$

Si  $\mathbf{W}_1$  es semidefinida negativa, es claro que se obtiene la siguiente desigualdad diferencial

$$\dot{V}_1(x) \leq -\alpha_1 V_1(x) + \beta_1 = -\alpha_1 (V_1(x) - \beta_1/\alpha_1),$$

la solución de la desigualdad diferencial anterior, usando el Lema de comparación (Lema 2.3), se define

$$\int_{t_0}^t \frac{\dot{V}_1(x(\tau))}{(V_1(x(\tau)) - \beta_1/\alpha_1)} d\tau \leq -\alpha_1 \int_{t_0}^t d\tau.$$

Obteniendo la siguiente desigualdad

$$V_1(x) \leq (V_1(x_0) - \beta_1/\alpha_1) e^{-\alpha_1(t-t_0)} + \beta_1/\alpha_1. \quad (3.7)$$

Evidentemente de la solución (3.7), los siguientes límites se satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow t_0} V_1(x(t)) \leq V_1(x_0), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V_1(x(t)) \leq \beta_1/\alpha_1. \quad (3.8)$$

del límite cuando  $t \rightarrow t_0$ , se puede decir que

$$\|x_0\| \leq \sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{P}_1)^{-1} V_1(x_0)}.$$

De igual forma del segundo límite

$$\|x\| \leq \sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{P}_1)^{-1} \beta_1/\alpha_1}.$$

Ahora tomando la cota  $\rho_1 + \beta_1/\alpha_1$ , donde  $\rho_1$  es constante, por lo tanto

$$\rho_1 + \beta_1/\alpha_1 = (V_1(x_0) - \beta_1/\alpha_1) e^{-\alpha_1(t-t_0)} + \beta_1/\alpha_1,$$

$$e^{\alpha_1(t-t_0)} = \frac{\alpha_1 V_1(x_0) - \beta_1}{\alpha_1 \rho_1},$$

$$T = \frac{1}{\alpha_1} \ln \left\{ \frac{\alpha_1 V_1(x_0) - \beta_1}{\alpha_1 \rho_1} \right\} + t_0.$$

Por lo tanto, se asegura estabilidad uniformemente últimamente acotada, con parámetros de la Definición 2.7, dados por (3.6). Queda demostrada la proposición. ■

Sobre la acción de control (3.4), tiene la ventaja de su simplicidad, también proporciona un desempeño aceptable, con una respuesta rápida. Su principal desventaja es que hay la posibilidad de que se genere un error en estado estacionario como se vera en el Capitulo 4. Tal error se puede reducir, si en la acción de control se agrega un término integral, cuyo objetivo principal de la acción integral es garantizar convergencia sobre la señal de referencia en estado estacionario [15]. A continuación se muestra el resultado del control proporcional integral robusto.

Para el caso de estudio se considera (3.2) es decir  $x \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R}$ ,  $B \in \mathbb{R}$

$$\dot{x} = Ax + Bu + \xi(x, u, t), \quad x(0) = x_0, \quad (3.9)$$

con la ley de control proporcional integral descrita como

$$u = k_1 x(t) + k_2 \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau, \quad k_1 \in \mathbb{R}, \quad k_2 \in \mathbb{R}.$$

Note que al usar el cambio de variable y definir un nuevo estado aumentado

$$\bar{x}_1(t) = \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau, \quad \bar{x}_2(t) = x(t), \quad \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix}.$$

Se obtiene la siguiente representación del sistema aumentado

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_2, & \bar{x}_1(0) &= \bar{x}_1^0, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= A\bar{x}_2 + Bu + \xi(\bar{x}, u, t), & \bar{x}_2(0) &= \bar{x}_2^0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

cerrando el lazo de control  $u = k_1\bar{x}_2 + k_2\bar{x}_1$ , resulta

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ Bk_2 & A + Bk_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \xi(\bar{x}, t) \end{bmatrix},$$

ó bien

$$\dot{\bar{x}} = \mathbf{A}\bar{x} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}}_1\bar{x} + \xi_a(\bar{x}, t), \quad (3.11)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & A \end{bmatrix}, & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{K}}_1 &= \begin{bmatrix} k_2 & k_1 \end{bmatrix}, & \xi_a(\bar{x}, t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \xi(\bar{x}, t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora el objetivo es estabilizar (3.11) mediante la ley de control

$$u = k_1\bar{x}_2 + k_2\bar{x}_1, \quad (3.12)$$

donde  $k_1$  es la ganancia proporcional y  $k_2$  la ganancia integral.

La siguiente proposición describe condiciones para garantizar que las trayectorias del sistema aumentado permanezcan acotadas alrededor de la referencia.

En este caso tome en cuenta la siguiente función de energía

$$V_2(\bar{x}) = \bar{x}^\top \mathbf{P}_2 \bar{x}, \quad 0 < \mathbf{P}_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

**Proposición 3.2 (Control proporcional integral robusto)** *Considere el sistema (3.11) en lazo cerrado con el control (3.12). Si existe un conjunto de soluciones  $(\bar{\mathbf{K}}_1 = [k_2, k_1], \mathbf{P}_2, 0 < \alpha_2 \in \mathbb{R}, 0 < \varepsilon_2 \in \mathbb{R})$ , tal que la matriz  $\mathbf{W}_2$  es semidefinida negativa*

$$\mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_2(\mathbf{A} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}}_1) + (\mathbf{A}^\top + \bar{\mathbf{K}}_1^\top \mathbf{B}^\top)\mathbf{P}_2 + \alpha_2 \mathbf{P}_2 + \varepsilon_2 \delta_1 \mathbf{I}_p & \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_2 & -\varepsilon_2 \mathbf{I}_p \end{bmatrix}.$$

Entonces, las trayectorias del sistema escalar en lazo cerrado satisfacen estabilidad uniformemente últimamente acotada (Definición 2.7), con

$$a = \sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{P}_2)^{-1}V_2(x_0)}, \quad b = \sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{P}_2)^{-1}\beta_2/\alpha_2}, \quad T = \frac{1}{\alpha_2} \ln \left\{ \frac{\alpha_2 V_2(\bar{x}_0) - \beta_2}{\alpha_2 \rho_2} \right\} + t_0, \quad (3.13)$$

para una  $0 < \rho_2 \in \mathbb{R}$  suficientemente pequeña, y una  $\beta_2 = \varepsilon_2 \delta_0$ .

**Demostración 2** La derivada temporal  $V_2(\bar{x})$  a lo largo de la trayectoria del sistema (3.11) esta dada por

$$\dot{V}_2(\bar{x}) = 2\bar{x}^\top \mathbf{P}_2 (\mathbf{A} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}}_1) \bar{x} + 2\bar{x}^\top \mathbf{P}_2 \xi_a(\bar{x}, t),$$

sumando y restando  $\alpha_2 V_2(\bar{x})$ ,  $\varepsilon_2 \|\xi_a(\bar{x}, t)\|^2$  la igualdad se preserva de la forma

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\bar{x}) = & \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \xi_a(\bar{x}, t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{P}_2(\mathbf{A} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}}_1) + (\mathbf{A}^\top + \bar{\mathbf{K}}_1^\top \mathbf{B}^\top) \mathbf{P}_2 + \alpha_2 \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_2 & -\varepsilon_2 \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \xi_a(\bar{x}, t) \end{bmatrix} \\ & - \alpha_2 V_2(\bar{x}) + \varepsilon_2 \|\xi_a(\bar{x}, t)\|^2. \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{I}_p$  define una matriz identidad  $2 \times 2$ . Como los términos inciertos  $\xi_a(\bar{x}, t)$  son acotados por (3.3), es evidente que

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\bar{x}) \leq & \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \xi_a(\bar{x}, t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{P}_2(\mathbf{A} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}}_1) + (\mathbf{A}^\top + \bar{\mathbf{K}}_1^\top \mathbf{B}^\top) \mathbf{P}_2 + \alpha_2 \mathbf{P}_2 + \varepsilon_2 \delta_1 \mathbf{I}_p & \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_2 & -\varepsilon_2 \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \xi_a(\bar{x}, t) \end{bmatrix} \\ & - \alpha_2 V_2(\bar{x}) + \varepsilon_2 \delta_0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

de igual forma, es evidente que la siguiente desigualdad diferencial se cumple

$$\dot{V}_2(\bar{x}) \leq z_2^\top \mathbf{W}_2 z_2 - \alpha_2 V_2(\bar{x}) + \beta_2, \quad z_2(\bar{x}, \xi_a) = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \xi_a(\bar{x}, t) \end{bmatrix}.$$

Si  $\mathbf{W}_2$  es semidefinida negativa, se obtiene la siguiente desigualdad diferencial

$$\frac{dV_2(\bar{x})}{dt} \leq -\alpha_2 (V_2(\bar{x}) - \beta_2/\alpha_2).$$

La solución es similar que la presentada en (3.7), lo que garantiza estabilidad últimamente uniformemente acotada, con los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $T$  descritos en (3.13). Queda demostrada la proposición.  $\blacksquare$

Las leyes de control descritas anteriormente, desempeñan un comportamiento adecuado ante ciertas restricciones, por ejemplo los parámetros deben ser invariantes en el tiempo. Al agregar términos adaptables sobre el proceso, se puede mejorar el desempeño de las trayectorias [16].

### 3.3. Diseño de la ley de control P y PI adaptable

A continuación se consideran las siguientes características y proposiciones para el desarrollo del control adaptable. Para ello, considere el sistema (3.9), donde se desconocen los parámetros  $A$  y  $B$ , suponiendo que se conoce el signo de  $B$ . Sin embargo, se tienen disponibles sus estimados, definidos por  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ . De esta forma, al sumar y restar  $\hat{A}x + \hat{B}u$ , la siguiente expresión se satisface:

$$\dot{x}(t) = \hat{A}x + \hat{B}u + (A - \hat{A})x + (B - \hat{B})u + \xi(x, u, t).$$

Al proponer los errores de estimación  $\tilde{A} = (A - \hat{A})$ ,  $\tilde{B} = (B - \hat{B})$ , los cuales están compuestos de la diferencia del parámetro real menos el estimado, se define  $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(t)$  y  $\varphi = \varphi(t)$  de la forma

$$\tilde{\theta} = [\tilde{A} \quad \tilde{B}], \quad \varphi = \begin{bmatrix} x \\ \dots \\ u \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

donde  $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  es el vector, de error de estimación y  $\varphi \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  el vector de dinámicas del sistema. Se obtiene la forma parametrizada del sistema

$$\dot{x}(t) = \hat{A}x + \hat{B}u + \tilde{\theta}\varphi + \xi(x, u, t), \quad (3.16)$$

Como en la sección anterior, que de una función de energía en forma cuadrática cumple con lo necesario para analizar estabilidad del sistema en lazo cerrado. En este caso de estudio se desconocen los parámetros  $A$  y  $B$  pero se tienen disponibles sus estimados. Para ello a la función de energía, se le agrega un término adicional como se muestra a continuación:

$$V_3(x, \tilde{\theta}) = x^T P_3 x + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \tilde{\theta}^T \gamma_1 \tilde{\theta} \right\}, \quad 0 < P_3 \in \mathbb{R}, \quad 0 < \gamma_1 \in \mathbb{R}. \quad (3.17)$$

En este caso se considera que los parámetros estimados iniciales se obtienen mediante una identificación previa, basada en la aproximación de la planta a través del siguiente modelo

$$\dot{x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + bu, \quad x(0) = x_0, \quad (3.18)$$

la identificación de los parámetros  $(a_0, a_1, a_2, a_3, b)$ , de la plataforma considerada se presenta en el Apéndice A. Sin embargo, para el diseño de control solamente se considera un modelo en la forma (3.16). Los términos  $a_0 + a_2x^2 + a_3x^3$  se definen como incertidumbres dinámicas, el parámetro  $a_1$  se elige como  $\hat{A}$  pero en forma de un parámetro estimado inicial del sistema, esto es  $\hat{A}_0 = \hat{A}$ , de la misma forma  $b = B$  por lo tanto  $\hat{B}_0 = B$ . De tal manera que se asigna una ganancia de control inicial  $k_0$  mediante el uso de la Proposición 3.1, donde la desigualdad matricial (3.5) tiene la siguiente estructura

$$\begin{bmatrix} 2P_1(\hat{A}_0 + \hat{B}_0k_0) + \alpha_1P_1 + \varepsilon_1\delta_1 & P_1 \\ P_1 & \varepsilon_1 \end{bmatrix} \leq 0. \quad (3.19)$$

Por tanto se puede obtener una estabilización robusta, implicando que el polinomio característico asociado al sistema nominal lineal en lazo cerrado con  $u = k_0x$ , es Hurwitz estable, i.e.

$$\{\lambda - (\hat{A}_0 + \hat{B}_0k_0)\} < 0. \quad (3.20)$$

Así, el valor propio obtenido sirve como referencia para garantizar la estabilidad del algoritmo adaptable ante una ley de control

$$u(t) = k(t)x(t), \quad k(t) = \frac{(\hat{A}_0 + \hat{B}_0k_0) - \hat{A}}{\hat{B}} \quad (3.21)$$

La siguiente proposición muestra el algoritmo de adaptación.

**Proposición 3.3 (Control proporcional robusto adaptable)** *Considere el sistema (3.16) en lazo cerrado con el control (3.21), si los parámetros  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  se estiman de la forma*

$$\dot{\hat{\theta}} = \frac{2P_1x\varphi^\top}{\gamma_1}, \quad \hat{\theta} = [\hat{A} \ \hat{B}], \quad \hat{\theta}_0 = [\hat{A}_0 \ \hat{B}_0] \quad (3.22)$$

entonces, se concluye con

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \rho_1 - \frac{1}{2}\text{tr}\{\tilde{\theta}^\top\gamma_1\tilde{\theta}\}/P_1\right)}, \quad \forall t \geq T, \quad (3.23)$$

$$T = \frac{1}{\alpha_1} \ln \left\{ \frac{\alpha_1 V_3(x_0, \tilde{\theta}_0) - \beta_1}{\alpha_1 \rho_1} \right\} + t_0,$$

para una  $0 < \rho_1$  suficientemente pequeña.

**Demostación 3** La derivada temporal de (3.17) evaluado a lo largo de las trayectorias de  $x$  y  $\tilde{\theta}$  es

$$\dot{V}_3(x, \tilde{\theta}) = 2P_1 x \dot{x} + \gamma_1 \text{tr} \left\{ \dot{\tilde{\theta}}^\top \tilde{\theta} \right\}.$$

Al sustituir (3.16) en la ecuación anterior, con  $u = k_0 x$  se obtiene

$$\dot{V}_3(x, \tilde{\theta}) = \left\{ 2P_1(\hat{A}_0 + \hat{B}_0 k_0) \right\} x^2 + 2xP_1 \tilde{\theta} \varphi + 2xP_1 \xi(x, t) + \gamma_1 \text{tr} \left\{ \dot{\tilde{\theta}}^\top \tilde{\theta} \right\},$$

por las propiedades de la traza resulta, (Ver Apéndice A B.2)

$$2xP_1 \tilde{\theta} \varphi = 2xP_1 \text{tr} \left\{ \varphi \tilde{\theta} \right\},$$

se obtiene la ecuación diferencial

$$\dot{V}_3(x, \tilde{\theta}) = \left\{ 2P_1(\hat{A}_0 + \hat{B}_0 k_0) \right\} x^2 + 2xP_1 \xi(x, t) + \text{tr} \left\{ (2xP_1 \varphi + \gamma_1 \dot{\tilde{\theta}}^\top) \tilde{\theta} \right\}.$$

Sumando y restando  $\alpha_1 V_3(x)$ ,  $\varepsilon_1 \|\xi(x, t)\|^2$ , la igualdad se preserva de la forma

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(x, \tilde{\theta}) &= \begin{bmatrix} x \\ \xi(x, t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 2P_1(\hat{A}_0 + \hat{B}_0 k_0) + \alpha_1 P_1 & P_1 \\ P_1 & -\varepsilon_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi(x, t) \end{bmatrix} - \alpha_1 V_3(x, \tilde{\theta}) \\ &\quad + \varepsilon_1 \|\xi(x, t)\|^2 + \text{tr} \left\{ (2xP_1 \varphi + \gamma_1 \dot{\tilde{\theta}}^\top) \tilde{\theta} \right\} + \frac{\alpha_1 \gamma_1}{2} \text{tr} \left\{ \tilde{\theta}^\top \tilde{\theta} \right\}. \end{aligned}$$

Es claro que de (3.3) y la igualdad siguiente

$$\frac{\alpha_1 \gamma_1}{2} \text{tr} \left\{ \tilde{\theta}^\top \tilde{\theta} \right\} = \frac{\alpha_1 \gamma_1}{2} \|\tilde{\theta}\|^2, \quad (3.24)$$

se satisface la desigualdad diferencial

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(x, \tilde{\theta}) &\leq \begin{bmatrix} x \\ \xi(x, t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 2P_1(\hat{A}_0 + \hat{B}_0 k_0) + \alpha_1 P_1 + \varepsilon_1 \delta_1 & P_1 \\ P_1 & -\varepsilon_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi(x, t) \end{bmatrix} \\ &\quad - \alpha_1 V_3(x, \tilde{\theta}) + \frac{\alpha_1 \gamma_1}{2} \|\tilde{\theta}\|^2 + \varepsilon_1 \delta_0 + \text{tr} \left\{ (2xP_1 \varphi + \gamma_1 \dot{\tilde{\theta}}^\top) \tilde{\theta} \right\}. \end{aligned}$$

Es evidente que de la definición del error de estimación, se tiene

$$\dot{\tilde{\theta}}^\top = \frac{d}{dt} \theta^\top - \frac{d}{dt} \hat{\theta}^\top = -\dot{\hat{\theta}}^\top,$$

se nota que  $\hat{\theta}$  es una variable manipulada, por lo tanto se busca que

$$(2xP_1 \varphi - \gamma_1 \dot{\hat{\theta}}^\top) \tilde{\theta} = 0, \quad (3.25)$$

cumpliendo lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(x, \tilde{\theta}) \leq & \begin{bmatrix} x \\ \xi(x, t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 2P_1(\hat{A}_0 + \hat{B}_0 k_0) + \alpha_1 P_1 + \varepsilon_1 \delta_1 & P_1 \\ & P_1 \\ & & -\varepsilon_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi(x, t) \end{bmatrix} \\ & - \alpha_1 V_3(x, \tilde{\theta}) + \frac{\alpha_1 \gamma_1}{2} \|\tilde{\theta}\|^2 + \varepsilon_1 \delta_0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Las opciones para que (3.25) se satisfaga, es que  $\tilde{\theta} = 0$  o bien que

$$2xP_1\varphi - \gamma_1 \hat{\theta}^\top = 0.$$

De lo anterior se obtiene (3.22). De la desigualdad diferencial (3.26), al definir  $\beta_1 = \frac{\alpha_1 \gamma_1}{2} \|\tilde{\theta}\|^2 + \varepsilon_1 \delta_0$ , se obtiene lo siguiente

$$\dot{V}_3(x, \tilde{\theta}) \leq z_1^\top \mathbf{W}_1 z_1 - \alpha_1 V_3(x, \tilde{\theta}) + \beta_1, \quad z_1(x, \xi) = \begin{bmatrix} x \\ \xi(x, t) \end{bmatrix}.$$

Si  $\mathbf{W}_1$  es semidefinida negativa. Entonces se llega a lo siguiente

$$\frac{dV_3(x, \tilde{\theta})}{dt} \leq -\alpha_1 (V_3(x, \tilde{\theta}) - \beta_1/\alpha_1). \quad (3.27)$$

Aplicando el Lema de comparación 2.3, la solución de (3.27) satisface lo siguiente

$$V_3(x, \tilde{\theta}) \leq \left( V_3(x_0, \tilde{\theta}_0) - \beta_1/\alpha_1 \right) e^{-\alpha_1(t-t_0)} + \beta_1/\alpha_1, \quad (3.28)$$

al sumar un  $0 < \rho_1$  suficientemente pequeño, se obtiene el tiempo de llegada a la cota última

$$T = \frac{1}{\alpha_1} \ln \left\{ \frac{\alpha_1 V_3(x_0) - \beta_1}{\alpha_1 \rho_1} \right\} + t_0.$$

Asimismo, al evaluar el límite de (3.28) cuando  $t \rightarrow \infty$ , es evidente que

$$V_3(x, \tilde{\theta}) \leq \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \rho_1,$$

define la cota última. Al sustituir la función de energía, se obtiene

$$x^2 P_3 + \frac{\gamma_1}{2} \text{tr} \left\{ \tilde{\theta}^\top \tilde{\theta} \right\} \leq \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \rho_1.$$

Por lo tanto, se garantiza que (3.23) se satisface. Para validar la convergencia de  $\tilde{\theta}$  se aplica el corolario al Lema de Barbalat 2.2. Donde,  $G(t) = \tilde{\theta}$ , además  $V_3(x, \tilde{\theta})$  es acotado (por ejemplo, vea (3.23)), indicando que  $\|\tilde{\theta}(t)\| < \infty$ . Por otra parte, al definir  $\dot{G}(t) = \dot{\tilde{\theta}}$ , donde  $\dot{\tilde{\theta}} = \frac{2P_1 x \varphi^\top}{\gamma_1}$  también es acotado, además  $\dot{\tilde{\theta}} = -\hat{\tilde{\theta}}$ , concluyendo que  $\tilde{\theta}$  converge. Queda demostrada la proposición. ■

Finalmente se pretende mejorar el diseño del control robusto proporcional adaptable, agregando la acción integral lo que ayudará a reducir el error en estado estable mediante el cálculo de una ganancia adaptable que servirá para sintonizar el controlador PI ante cualquier variación de la variable de estado. Se retoma el caso de estudio, el sistema aumentado (3.11) donde ahora  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  son desconocidas pero se tiene un estimado  $\hat{\mathbf{A}}$  y  $\hat{\mathbf{B}}$ . De esta forma, al sumar y restar  $\hat{\mathbf{A}}\bar{x} + \hat{\mathbf{B}}u$ , se satisface la siguiente expresión

$$\dot{\bar{x}}(t) = (\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}})\bar{x} - (\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}})\bar{\mathbf{K}}_2\bar{x} + \xi_a(\bar{x}, t) + \hat{\mathbf{A}}\bar{x} - \hat{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}_2\bar{x},$$

Se define los errores de estimación  $\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}})$  y  $\tilde{\mathbf{B}} = (\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}})$ , obteniendo

$$\dot{\bar{x}}(t) = (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}_2)\bar{x} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\gamma} + \xi_a(\bar{x}, t). \quad (3.29)$$

donde  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$  es la matriz del error de estimación y  $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^3$  es el vector de dinámicas del sistema

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & : & \tilde{\mathbf{B}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \cdots \\ \bar{\mathbf{K}}_2\bar{x} \end{bmatrix}$$

En este caso de estudio se propone un error de estimación  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ , el cual se desea minimizar para ello a la función de energía, se le agrega un término adicional como se muestra a continuación:

$$V(\bar{x}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \bar{x}^\top \mathbf{P}_4 \bar{x} + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \boldsymbol{\gamma}_2 \tilde{\boldsymbol{\theta}} \right\}, \quad \mathbf{P}_4, \boldsymbol{\gamma}_2 > 0, \quad \mathbf{P}_4, \boldsymbol{\gamma}_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}. \quad (3.30)$$

De la identificación de la planta experimental (Ver Apéndice A), se obtiene los parámetros del modelo (3.18) donde del sistema (3.29) se considera con parámetros iniciales  $\tilde{\mathbf{A}}_0 = a_1$  y  $\tilde{\mathbf{B}}_0 = b$  y una ganancia inicial  $\bar{\mathbf{K}}_0$ , del conjunto de soluciones de la desigualdad matricial (3.2) en la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_2(\hat{\mathbf{A}}_0 + \hat{\mathbf{B}}_0\bar{\mathbf{K}}_0) + (\hat{\mathbf{A}}_0^\top + \bar{\mathbf{K}}_0^\top\hat{\mathbf{B}}_0^\top)\mathbf{P}_2 + \alpha_2\mathbf{P}_2 + \varepsilon_2\delta_1\mathbf{I}_p & \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_2 & -\varepsilon_2\mathbf{I}_p \end{bmatrix} \leq 0.$$

Se garantiza estabilidad robusta con los polos del polinomio característico en el semiplano izquierdo del plano complejo, del sistema nominal en lazo cerrado  $(\hat{\mathbf{A}}_0 + \hat{\mathbf{B}}_0\bar{\mathbf{K}}_0)$

$$P(\lambda) = c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$$

Así, este polinomio se utiliza de referencia para garantizar la estabilidad del sistema nominal del algoritmo adaptable, en la forma (3.12), con

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} \Phi(\hat{\mathbf{A}}),$$

donde  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}} & \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} \end{bmatrix}$ , es la matriz de controlabilidad con  $\text{rango}(\mathbf{C}) = 2$  y se define  $\Phi(\hat{\mathbf{A}})$  como  $\Phi(\hat{\mathbf{A}}) = \hat{\mathbf{A}}^2 + c_1\hat{\mathbf{A}} + c_0\mathbf{I}_2$ , este método es conocido como la fórmula de Ackermann. A continuación se muestra la proposición para el caso adaptable con acción integral.

**Proposición 3.4 (Control proporcional integral robusto adaptable)** *Si se considera el sistema aumentado (3.29) con la estimación dada por*

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = 2\gamma_2^{-1}\mathbf{P}_2\bar{x}\varphi^\top, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\mathbf{A}} \ \hat{\mathbf{B}}], \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}_0 = [\hat{\mathbf{A}}_0 \ \hat{\mathbf{B}}_0] \quad (3.31)$$

y de la Proposición 3.2 se satisface con Estabilidad UUA, con

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\left(\frac{\beta_2}{\alpha_2} + \rho_2 - \frac{1}{2}\text{tr}\left\{\tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \gamma_2 \tilde{\boldsymbol{\theta}}\right\} / \lambda_{\min}(\mathbf{P}_2)\right)}, \quad \forall t \geq T \quad (3.32)$$

$$T = \frac{1}{\alpha_2} \ln \left\{ \frac{\alpha_2 V_4(x_0, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_0) - \beta_2}{\alpha_2 \rho_2} \right\} + t_0, \quad (3.33)$$

para una  $0 < \rho_2 \in \mathbb{R}$  suficientemente pequeña.

**Demostración 4** *La derivada temporal de (3.30) a lo largo de las trayectorias del sistema y del error de estimación, se define por*

$$\dot{V}(\bar{x}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) = 2\bar{x}^\top \mathbf{P}_2 \left\{ (\hat{\mathbf{A}}_0 - \hat{\mathbf{B}}_0 \bar{\mathbf{K}}_0) \bar{x} \right\} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^\top \varphi + \xi_a(\bar{x}, t) + \text{tr} \left\{ \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}^\top \gamma_2 \tilde{\boldsymbol{\theta}} \right\}.$$

Haciendo uso del operador lineal traza

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) = & \bar{x}^\top(t) \left\{ \mathbf{P}_2(\hat{\mathbf{A}}_0 - \hat{\mathbf{B}}_0 \bar{\mathbf{K}}_0) + (\hat{\mathbf{A}}_0^\top - \bar{\mathbf{K}}_0^\top \hat{\mathbf{B}}_0^\top) \mathbf{P}_2 \right\} \bar{x} + 2\bar{x}^\top \mathbf{P}_2 \xi_a(\bar{x}, t) \\ & + 2\text{tr} \left\{ \bar{x}^\top \mathbf{P}_2 \tilde{\boldsymbol{\theta}} \varphi \right\} + \text{tr} \left\{ \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}^\top \gamma_2 \tilde{\boldsymbol{\theta}} \right\}, \end{aligned}$$

Del Apéndice A (B.2), propiedades de la traza, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) = & \bar{x}^\top \left\{ \mathbf{P}_2(\hat{\mathbf{A}}_0 - \hat{\mathbf{B}}_0 \bar{\mathbf{K}}_0) + (\hat{\mathbf{A}}_0^\top - \bar{\mathbf{K}}_0^\top) \hat{\mathbf{B}}_0^\top \mathbf{P}_2 \right\} \bar{x} + 2\bar{x}^\top \mathbf{P}_2 \xi_a(\bar{x}, t) \\ & + \text{tr} \left\{ (2\varphi \bar{x}^\top \mathbf{P}_2 + \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}^\top \gamma_2) \tilde{\boldsymbol{\theta}} \right\}, \end{aligned}$$

Sumando y restando  $\alpha_2 V(\bar{x})$ ,  $\varepsilon_2 \|\xi_a(\bar{x}, t)\|^2$ , la igualdad se preserva de la forma

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}, \tilde{\theta}) &= \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \xi(\bar{x}, t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P_2(\hat{\mathcal{A}}_0 - \hat{\mathcal{B}}_0 \bar{K}_0) + (\hat{\mathcal{A}}_0^\top - \bar{K}_2^\top \hat{\mathcal{B}}_0^\top) P_2 + \alpha_2 P_2 & P_2 \\ P_2 & -\varepsilon_2 I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \xi_a(\bar{x}, t) \end{bmatrix} \\ &\quad - \alpha_2 V(\bar{x}, \tilde{\theta}) + \varepsilon_2 \|\xi(\bar{x}, t)\|^2 + \text{tr} \left\{ (2\varphi \bar{x}^\top P_2 + \dot{\tilde{\theta}}^\top(t) \gamma_2) \tilde{\theta} \right\} + \frac{\alpha_2}{2} \text{tr} \left\{ \tilde{\theta}^\top \gamma_2 \tilde{\theta} \right\}. \end{aligned}$$

Es claro que, del término de incertidumbres (3.3) y la desigualdad siguiente

$$\frac{\alpha}{2} \text{tr} \left\{ \tilde{\theta}^\top \gamma_2 \tilde{\theta} \right\} \leq \frac{\alpha}{2} \delta_0^2 \lambda_{\min}(\gamma_2) \quad (3.34)$$

se satisface la siguiente desigualdad diferencial

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}, \tilde{\theta}) &\leq \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \xi_a(\bar{x}, t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P_2(\hat{\mathcal{A}}_0 - \hat{\mathcal{B}}_0 \bar{K}_0) + (\hat{\mathcal{A}}_0^\top - \bar{K}_0^\top \hat{\mathcal{B}}_0^\top) P_2 + \alpha_2 P_2 & P_2 \\ P_2 & -\varepsilon_2 I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \xi_a(\bar{x}, t) \end{bmatrix} \\ &\quad - \alpha_2 V(\bar{x}, \tilde{\theta}) + \varepsilon_2 \delta_0 + \text{tr} \left\{ (2\varphi \bar{x}^\top P_2 + \dot{\tilde{\theta}}^\top \gamma_2) \tilde{\theta} \right\} + \frac{\alpha_2}{2} \text{tr} \left\{ \tilde{\theta}^\top \gamma_2 \tilde{\theta} \right\}. \end{aligned}$$

De la definición del error de seguimiento, se tiene

$$\dot{\tilde{\theta}}^\top = \frac{d}{dt} \theta^\top - \frac{d}{dt} \hat{\theta}^\top = -\dot{\hat{\theta}}^\top. \quad (3.35)$$

Es evidente que  $\tilde{\theta}$  es una variable de manipulación, entonces con

$$(2\varphi \bar{x}^\top P_2 + \dot{\tilde{\theta}}^\top \gamma_2) \tilde{\theta} = 0, \quad (3.36)$$

si lo anterior se cumple se obtienen la siguiente desigualdad diferencial

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}, \tilde{\theta}) &\leq \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \xi_a(\bar{x}, t) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P_2(\hat{\mathcal{A}} - \hat{\mathcal{B}}_0 \bar{K}_0) + (\hat{\mathcal{A}}_0^\top - \bar{K}_2^\top \hat{\mathcal{B}}_0^\top) P_2 + \alpha_2 P_2 & P_2 \\ P_2 & -\varepsilon_2 I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \xi_a(\bar{x}, t) \end{bmatrix} \\ &\quad - \alpha_2 V(\bar{x}, \tilde{\theta}) + \varepsilon_2 \delta_0 + \frac{\alpha_2}{2} \text{tr} \left\{ \tilde{\theta}^\top \gamma_2 \tilde{\theta} \right\}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Para esto se requiere que (3.36) sea  $\tilde{\theta} = 0_2$  o también de la siguiente manera

$$2\varphi \bar{x}^\top P_2 - \dot{\tilde{\theta}}^\top \gamma_2 = 0.$$

De lo anterior resulta (3.31). Definiendo  $\beta_2 = \frac{\alpha_2}{2} \delta_0^2 \lambda_{\min}(\gamma_2) + \varepsilon_2 \delta_0$ , de la desigualdad diferencial (3.37) se obtiene

$$\dot{V}_4(\bar{x}, \tilde{\theta}) \leq z_2^\top \mathbf{W}_2 z_2 - \alpha_2 V_4(\bar{x}, \tilde{\theta}) + \beta_2, \quad z_2(\bar{x}, \xi_a) = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \xi_a(\bar{x}, t) \end{bmatrix}.$$

Si  $\mathbf{W}_2$  es semidefinida negativa. Entonces se obtiene lo siguiente

$$\frac{dV_4(\bar{x})}{dt} \leq -\alpha_2 (V_4(\bar{x}, \tilde{\theta}) - \beta_2/\alpha_2). \quad (3.38)$$

Para la solución del sistema anterior se hace uso del Lema de comparación 2.3

$$V_4(\bar{x}, \tilde{\theta}) \leq \left( V_4(\bar{x}_0, \tilde{\theta}_0) - \beta_2/\alpha_2 \right) e^{-\alpha_2(t-t_0)} + \beta_2/\alpha_2, \quad (3.39)$$

al sumar un  $\rho_2$  lo suficiente pequeño, es posible obtener el tiempo de llegada a la cota última (3.33), de igual forma del límite (3.8) cuando  $t \rightarrow \infty$  se cumple la desigualdad

$$V_4(\bar{x}, \tilde{\theta}) \leq \frac{\beta_2}{\alpha_2} + \rho_2,$$

la cual define la cota última. Al sustituir la función de energía, se obtiene

$$\bar{x}^\top P_3 \bar{x} + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \tilde{\theta}^\top \gamma_1 \tilde{\theta} \right\} \leq \frac{\beta_2}{\alpha_2} + \rho_2.$$

Entonces se satisface (3.32). De la misma forma para la convergencia de  $\tilde{\theta}$  se aplica el corolario al Lema de Barbalat 2.2. Donde,  $G(t) = \tilde{\theta}$ , y ya que  $V_4(\bar{x}, \tilde{\theta})$  es acotado (por ejemplo, vea (3.32)), indicando que  $\|\tilde{\theta}(t)\| < \infty$ . Por otra parte, al definir  $\dot{G}(t) = \dot{\tilde{\theta}}$ , donde  $\dot{\tilde{\theta}} = 2\gamma_2^{-1} \mathbf{P}_2 \bar{x} \varphi^\top$  también es acotado, además  $\dot{\tilde{\theta}} = -\tilde{\theta}$ , concluyendo que  $\tilde{\theta}$  converge. Queda demostrada la proposición. ■

### 3.4. Discusión del capítulo

En este capítulo se presentó las principales características de las leyes de control desarrolladas. Como primera parte se mostró los controladores P y PI robustos donde se propone una cota  $\xi$ , la cual contiene los términos inciertos, con una  $\delta_1 \|x\|^2$  que representa los términos no lineales del modelo aproximado por la identificación, las perturbaciones externas están contenidas por el término  $\delta_0$ . Ambos términos consideran el peor de los casos del sistema, siendo este, cuando el término de incertidumbres es de gran tamaño o bien mayor que la magnitud de la parte lineal del modelo, bajo estas incertidumbres el control propuesto encuentra una ganancia  $k$  o  $\mathbf{K}$  dependiendo del caso P o PI, que logre estabilizar el sistema en la referencia deseada. En la segunda parte se compone de los mismos controladores ahora tomando en cuenta la variación de los parámetros del sistema linealizado agregando términos adaptables para mejorar el desempeño de la trayectoria en estado estacionario.

# Capítulo 4

## Resultados experimentales

En este capítulo, se presentan los resultados principales de las leyes de control robustas y robustas adaptables descritas en el capítulo anterior. La implementación se realizó utilizando un prototipo experimental tipo intercambiador de calor descrito en el Apéndice A. Además también se presenta la metodología ocupada para la interpretación y comparación de los resultados experimentales que se describen a continuación.

Las pruebas experimentales consistieron, en el control de temperatura del fluido que circula por el intercambiador de calor, se ocupó 2 litros de agua destilada para el cuidado de la planta. El experimento consistió en llevar el agua de una temperatura ambiente promedio de 18 °C a una temperatura deseada  $X_d$  la cual fue de 25 °C.

La perturbación externa  $P_e$  consistió en introducir un litro de agua a una temperatura aproximadamente de unos 10 °C menor a la temperatura ambiente, al sistema cuando se encontraba en estado estacionario esto causa una variación en la trayectoria del sistema la cual los controladores fueron capaces de atenuar.

La implementación de las estructuras de control diseñadas fueron desarrolladas en la herramienta computacional Matlab en el ambiente de Simulink con el método de solución Runge-Kutta de cuarto orden con paso fijo de 90 milisegundos,

### 4.1. Control P y PI robusto

Se comienza dando solución a la desigualdad matricial lineal  $\mathbf{W}_1$  de la proposición 1, (Ver código Matlab [C.1](#)), se obtienen el conjunto de soluciones

$$k = -0.6386, P = 0.0020, \alpha = 1, \varepsilon = 0.000001, \quad (4.1)$$

resultando con una ubicación de polo robusto en  $\lambda = -325.4261$ . Implementando este conjunto de soluciones en la planta experimental con la ganancia  $k$  como una realimentación de estado, se obtiene la salida de temperatura de la planta (véase Figura 4.1).

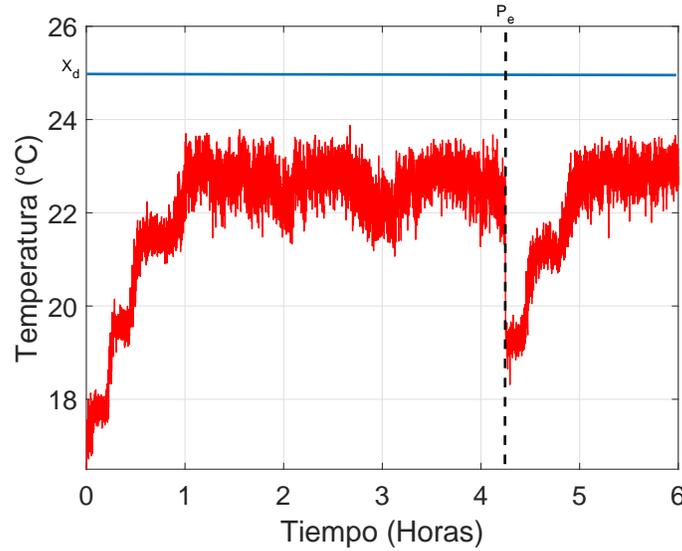


Figura 4.1: Estado del sistema P robusto.

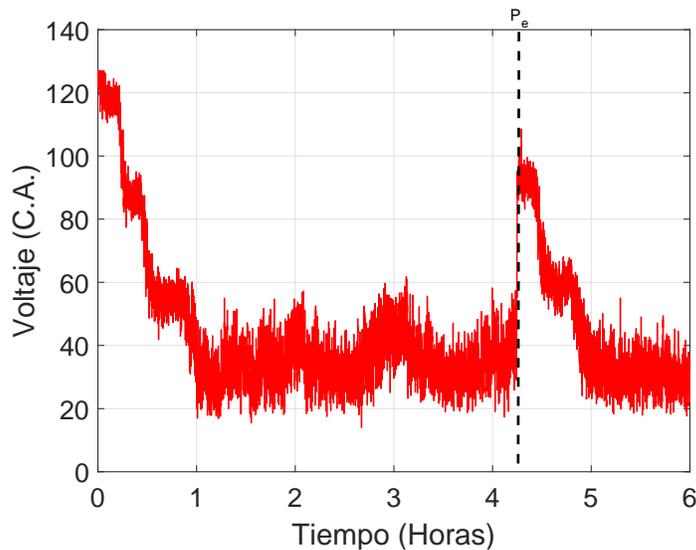


Figura 4.2: Señal de control P robusto.

La referencia deseada es de 25 °C, el sistema alcanza el estado estacionario en un aproximado de 1 hora a una temperatura alrededor de los 23 °C lo que presenta un error

aproximado de 2 °C, pasado un tiempo se le aplicó una perturbación externa indicado por la línea segmentada como se observa en la Figura 4.1, lo que ocasionó un aumento en el error, el cual se abatió aproximadamente en 40 min, con una señal de control aplicada a la resistencia calefactora, vista en la Figura 4.2, se nota que el sistema se queda con un voltaje en estado estacionario de entre 20 a 60 volts.

A continuación con la acción integral del control PI robusto se espera que sea capaz de reducir el error en estado estable presentado en el ejemplo anterior. De la solución del LMI  $\mathbf{W}_2$  (Ver código Matlab C.1 ), se obtienen el conjunto de soluciones

$$K = [-19.6202 \quad 23.8099], \quad P = \begin{bmatrix} 0.0216 & 0.0002 \\ 0.0002 & 0.0001 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 0.0820, \quad \varepsilon = 0.1, \quad (4.2)$$

resultando con una ubicación de polos robustos en  $\lambda_1 = -2.1202$ ,  $\lambda_2 = -88.7710$ . Aplicando esta ley de control con el conjunto (4.2), resulta la salida del sistema siguiente

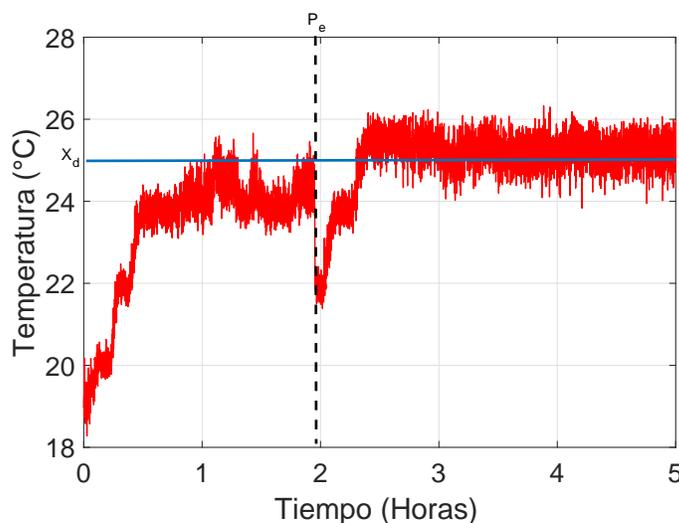


Figura 4.3: Estado del sistema PI robusto.

Con una señal de control mostrada en la Figura 4.4

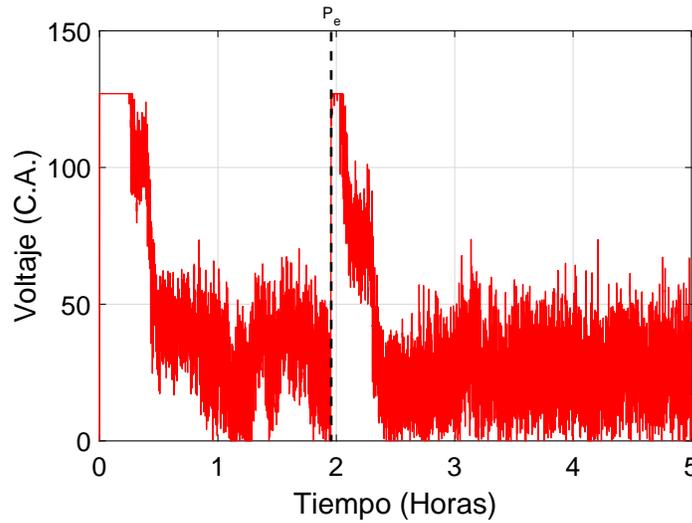


Figura 4.4: Señal de control PI robusto.

En este caso el sistema bajo la acción del control PI robusto se estableció en la referencia deseada con un error mucho menor que en el caso P robusto como se aprecia en la trayectoria mostrada en la Figura 4.3, de igual forma se aplica la misma perturbación una vez que se observó que llegó al estado estacionario alrededor de la 2 horas y después de atenuar la perturbación se estableció en la referencia deseada rápidamente, se observa que su señal de control fue de mayor magnitud ante la perturbación que en el caso anterior como se puede ver en la Figura 4.4 .

Se aplicó una acción integral conocida como integrador anti-windup. Este tipo de acción de control es de gran ayuda cuando los actuadores del sistema tienen un límite de operación, donde puede suceder el caso en que la señal de control requerida sobrepase este límite de operación, rompiendo el lazo de retroalimentación, ya que el actuador estará siempre en su límite, independientemente de la señal del sistema y si el control tiene un tiempo de estabilización demasiado lento el error de integración seguirá creciendo y cuando se alcance la referencia este error será demasiado grande, lo que ocasionará que el error deba tener signo opuesto un tiempo significativamente largo para que regrese a la zona de operación normal del actuador [15]. La ayuda que proporciona este integrador anti-windup es básicamente un reseteo del control al llegar al límite de operación del actuador, manteniendo la señal cerca de la zona límite del actuador para cuando se estabilice en la referencia deseada el control realice inmediatamente el cambio en el actuador, el rango de operación del actuador está entre el ciclo de trabajo de 10 a 255 PWM lo que es equivalente de 0 a 127 Volts de C.A. suministrados a la resistencia calefactora.

## 4.2. Control P y PI robusto adaptable

El control P robusto adaptable se implementó con el conjunto de soluciones del control P robusto definidas por (4.1), con ubicación en el polo robusto de  $\lambda = -325.4261$ . Obteniendo los resultados mostrados en la Figuras 4.5 y 4.7

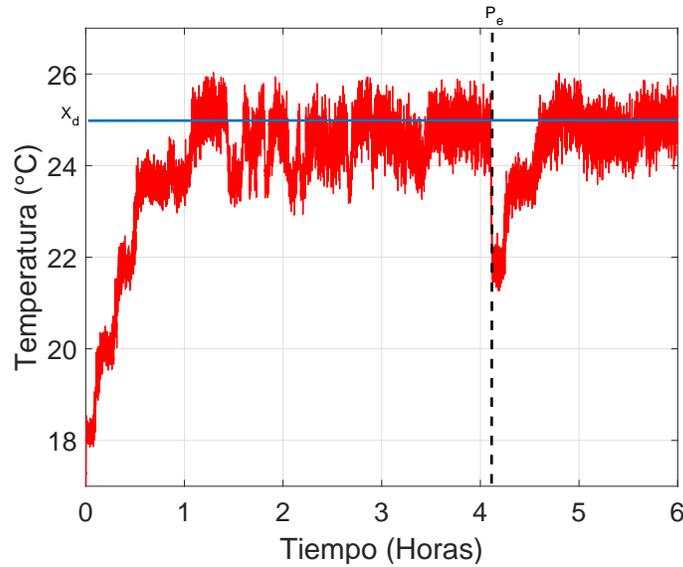


Figura 4.5: Estado del sistema P robusto adaptable.

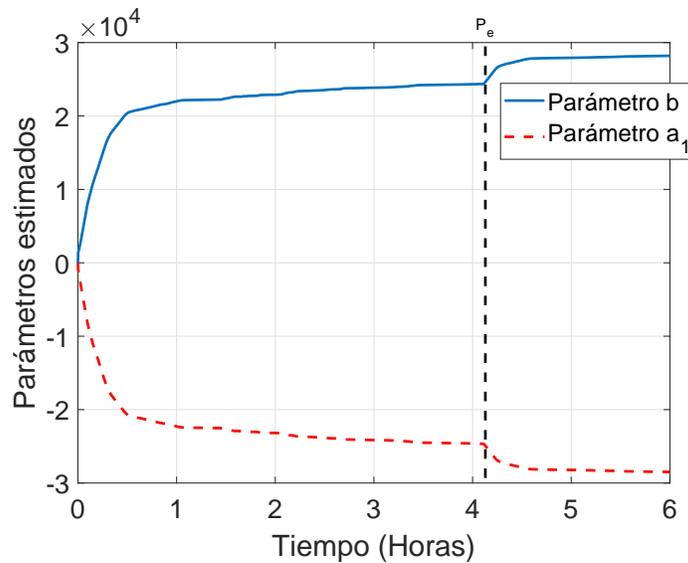


Figura 4.6: Parámetros del sistema.

Se nota que el sistema se alcanza la referencia deseada alrededor de la una hora, pero a diferencia del control PI robusto, éste presenta una señal de estabilización más suave, de igual manera se le aplicó la misma perturbación descrita al principio del capítulo, siendo evidente que fue capaz de volver a su referencia deseada más rápido que los casos anteriores como se nota en la Figura 4.5, donde tardó aproximadamente 30 minutos en regresar a la señal deseada con una señal de control descrita en la Figura 4.7. Para la acción adaptable, se usa el algoritmo obtenido de (3.22), donde se ocupa el estado, la señal de control que forman el vector de dinámicas  $\varphi$ , además de los escalares  $P_1$  y  $\gamma_1$  se obtiene la estimación de la Figura 4.6.

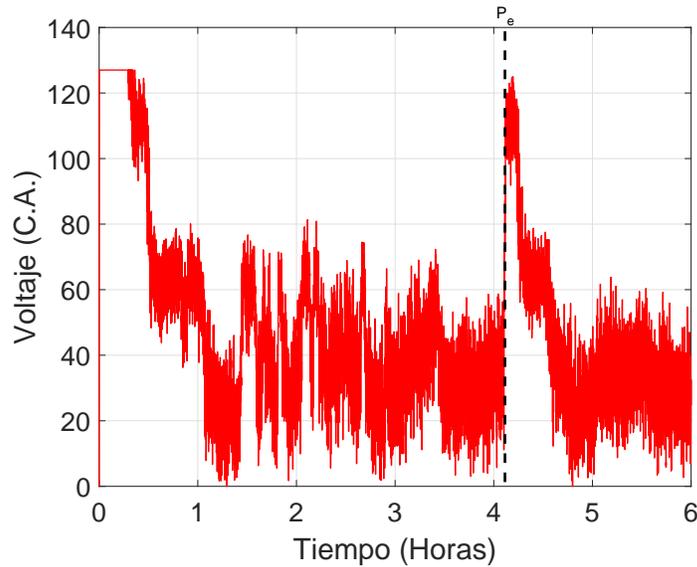


Figura 4.7: Señal de control P robusto adaptable.

Como se observa en la Figura 4.5 presenta un pequeño error en estado estacionario ya que la trayectoria oscila un poco alrededor de la referencia, como se mencionó esto se reduce al agregar un término integral. Al hacer uso del mismo conjunto de soluciones del control PI robusto (4.2), se obtiene la trayectoria del sistema mostrada en la Figura 4.8 y su señal de control en la Figura 4.9

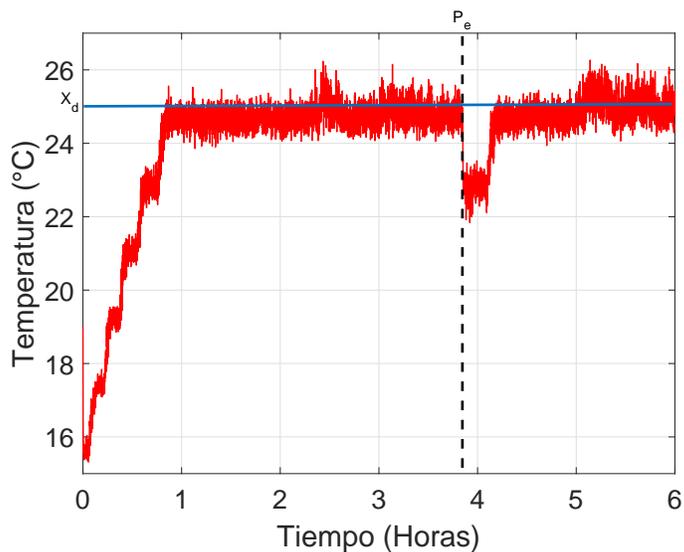


Figura 4.8: Estado del sistema PI robusto adaptable.

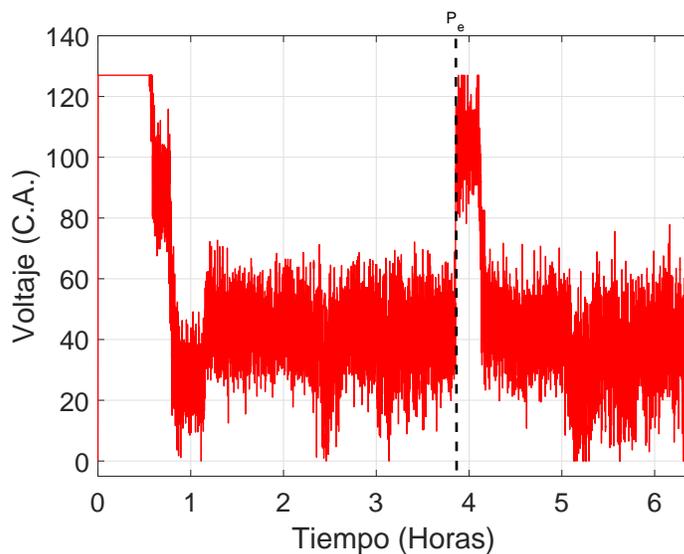


Figura 4.9: Señal de control PI robusto adaptable.

Es evidente que las oscilaciones del ejemplo anterior desaparecieron como se observa en la Figura 4.8 desaparecieron, la trayectoria del control PI robusto es más constante debido a la reducción del error en estado estacionario de igual forma atenúa la perturbación externa en un menor número tiempo que el control anterior por lo que presenta una respuesta mejor en comparación a los controladores anteriores.

### 4.3. Discusión del capítulo

En este capítulo se observó el comportamiento de los controladores robustos y adaptables en la planta térmica bajo las mismas condiciones de implementación experimental, como se esperaba la trayectoria del sistema fue mejorando en comparación con el controlador anterior, siendo el controlador PI robusto adaptable el que desarrolló un mejor comportamiento en base al error de referencia en estado estacionario también presentó una respuesta rápida en la atenuación de la perturbación externa y en alcanzar la referencia deseada a pesar de que comenzó 2 °C por debajo de la temperatura inicial de los experimentos anteriores, además es evidente que redujo las oscilaciones de la trayectoria en estado estacionario en comparación con los demás controladores.

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajo futuro

### 5.1. Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones generales obtenidas de este trabajo de investigación.

Partiendo de la introducción de este trabajo donde se da a conocer la información necesaria para el seguimiento de la investigación, se plantea la principal problemática, la estabilización de un sistema térmico, la planta prototipo basada en un intercambiador de calor, la cual presentaba en la salida del sistema variaciones alrededor de una referencia deseada debido a incertidumbres dinámicas y variantes en el tiempo del modelo paramétrico, además de perturbaciones externas ajenas al sistema. Para solucionar esta problemática se propuso un controlador PI con características de robustez y adaptación, para su desarrollo se estudió conceptos de estabilidad, propiedades de sistemas lineales y no lineales, fundamentos de control robusto y adaptable. También se optó por diseñar, construir e implementar una planta experimental basada en un intercambiador de calor, por lo que fue necesario conocer un poco de la teoría existente de este tipo de sistemas principalmente su funcionamiento y sus tipos de estructuras.

Del diseño de control se comenzó con un controlador P y PI robusto y se llegó a los controladores P y PI robustos adaptables, siendo este último el que presentó el mejor desempeño en comparación a los controladores previos a este, tomando como criterio de comparación la velocidad de convergencia al estado estacionario con condiciones iniciales y perturbaciones externas similares en cada prueba experimental y también en base al error de referencia deseada. A continuación se mencionan los principales resultados obtenidos:

- La obtención de una planta térmica experimental funcional para la implementación de leyes de control.
- La estabilización del sistema experimental mediante la obtención de algoritmos de control robustos y robustos adaptables.
- La ley de control obtenida cuando se asume el modelo matemático conocido no siempre resulta con un buen desempeño al momento de realizar la estabilización alrededor de un punto de operación considerando el peor de los casos en incertidumbres y perturbaciones del sistema.
- Se comprobó, con la característica de adaptabilidad el mejoramiento en la respuesta de la trayectoria del sistema, obteniendo una respuesta más suave y precisa respecto a la referencia deseada.
- La ley de control PI robusto adaptable presentó el mejor desempeño en el ejemplo aplicado tomando como criterio la rápida respuesta en la convergencia a la referencia deseada y en la atenuación de la perturbación externa.

## 5.2. Trabajo futuro

Los planes que se tienen para la continuación de este trabajo de investigación son:

- El estudio comparativo del controlador PI adaptable robusto con un controlador validado en la teoría de control.
- El estudio del controlador PI robusto adaptable en presencia de retardos.
- Aplicación del controlador PI robusto adaptable para sistemas multivariables.

# Bibliografía

- [1] Eduardo Cao. *Transferencia de calor en ingeniería de procesos*. Nueva Librería, 2008.
- [2] Patricio Bohórquez. *Mecánica de fluidos computacional*. Universidad de Jaén, Jaén, 2011.
- [3] Robert L Mott. *Mecanica de Fluidos 6/e*. Pearson educación, 2006.
- [4] I Martín, R Salcedo, and R Font. *Mecánica de fluidos. Operaciones de Separación Sólido-fluido*, 2011.
- [5] Donald Quentin Kern. *Procesos de transferencia de calor/donald q. kern*. 1974.
- [6] Francisco Rodríguez Rubio and Manuel Jesús López Sánchez. *Control adaptativo y robusto*, volume 9. Universidad de Sevilla, 1996.
- [7] Rolf Isermann and Marco Münchhof. *Identification of dynamic systems: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [8] Ri E Kalman. Design of self-optimizing control system. *Trans. ASME*, 80, 1958.
- [9] Karl Johan Åström and Björn Wittenmark. On self tuning regulators. *Automatica*, 9, 1973.
- [10] H Philip Whitaker, Joseph Yamron, and Allen Kezer. *Design of model-reference adaptive control systems for aircraft*. Massachusetts Institute of Technology, Instrumentation Laboratory, 1958.
- [11] Hassan K Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 2, 1996.
- [12] Louis Leithold. *EL CALCULO 2*. 1982.

- 
- [13] Alexander Poznyak, Andrey Polyakov, and Vadim Azhmyakov. *Attractive ellipsoids in robust control*. Springer, 2014.
- [14] Angelo Genocchi. *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale*, volume 1. Bocca, 1884.
- [15] Karl Johan Åström and Tore Hägglund. *PID controllers: theory, design, and tuning*, volume 2. Instrument society of America Research Triangle Park, NC, 1995.
- [16] Petros Ioannou and Barış Fidan. *Adaptive control tutorial*. SIAM, 2006.
- [17] Yunus A Çengel, John M Cimbala, Víctor Campos Olguín, and Sofía Fadeeva Skarina. *Mecánica de fluidos: fundamentos y aplicaciones*, volume 1. McGraw-Hill São Paulo, 2006.
- [18] Ping LI and Ya-rong LI. Design of temperature controller based on max6675 [j]. *Instrument Technique and Sensor*, 7, 2004.
- [19] John-David Warren, Josh Adams, and Harald Molle. Arduino for robotics. In *Arduino robotics*. Springer, 2011.
- [20] William F Smith, Javad Hashemi, Gabriel Nagore Cázares, and Pedro Alejandro González-Caver. *Fundamentos de la ciencia e ingeniería de materiales*. McGraw-Hill México, DF, 2006.

•

# Apéndice A

## Plataforma experimental e Identificación

En esta sección, se presenta una descripción de la plataforma de trabajo, una planta prototipo que consiste de un intercambiador de calor tipo carcasa y tubos. El diseño esta compuesto por tubos cilíndricos montados dentro de una carcasa, con el eje de los tubos paralelos al eje de la carcasa Figura A.1. Un fluido circula por dentro de los tubos, y el otro por el exterior. Son el tipo de intercambiadores de calor más usado en la industria [17].

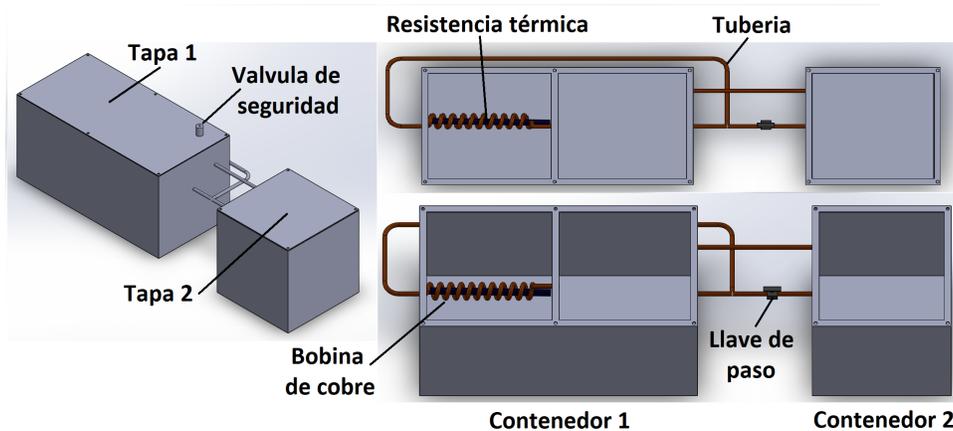


Figura A.1: Diseño en SolidWorks

Como se observa en la Figura (A.2), está compuesto de tres secciones, la primera contiene un bobina de cobre por donde circula el fluido (agua), en medio de la bobina se encuentra el actuador una resistencia térmica de 125 watts a 220 volts, la cual eleva la

temperatura del agua mediante el intercambio de calor entre la bobina de cobre y el agua y es contenida en la segunda sección, un contenedor en la cual se encuentra una pequeña bomba sumergible de C.A la que se encarga de recircular el agua por la bobina de cobre y así absorber parte del calor producido por la resistencia eléctrica, como indican las flechas rojas de la Figura (A.2) y la sección 3 es un contenedor el cual es usado como una entrada de perturbaciones hacia la planta, ya que suministrará agua a una temperatura menor para bajar la temperatura de la sección 2, mostrado por las flechas azules en la Figura (A.2).

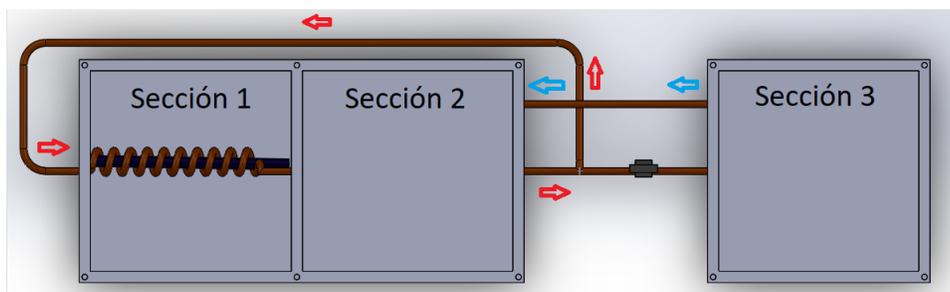


Figura A.2: Principales secciones de la planta térmica

Como sistema de medición se usó un termopar tipo k con el módulo MAX6675 el cual es un convertidor analógico-digital especializado para termopares tipo K [18]. Con este módulo es posible conectar fácilmente un termopar a cualquier microcontrolador a través de una interfaz SPI (Serial Peripheral Interface) unidireccional. Dentro de este pequeño circuito se encuentra la electrónica necesaria para amplificar, compensar y convertir a digital el voltaje generado por el termopar, lo que hace muy sencilla la tarea de conectar un termopar a un microcontrolador.

Existen muchos sensores de temperatura en el mercado, sin embargo las soluciones basadas en silicio, como el LM35 por citar un ejemplo que sea familiar, están normalmente limitados a un rango de temperatura por debajo de los 150 grados centígrados. Lo que los deja fuera de consideración cuando debemos monitorear algún proceso con temperaturas superiores. Los termopares permiten mediciones en un rango más amplio, usualmente de varias centenas de grados centígrados y sin un costo excesivo.

**Características del MAX6675 Módulo interfaz para termopar [18] Figura (A.3).**

- Interfaz compatible con SPI solo de lectura.
- Resolución de 12 bits, 0.25 grados centígrados.

- Medición hasta 1024 grados centígrados.
- Alimentación de 3.3 a 5 volts.
- Consumo máximo de 1.5 miliampers.
- Tiempo de conversión 0.17 a un máximo de 0.22 segundos.
- Frecuencia de reloj SPI máxima  $F_{scl}$  4.3 Megahertz.



Figura A.3: Módulo MAX6675 para termopar tipo K

Para el control de alimentación de la resistencia eléctrica se optó por variar la fase de disparo de la corriente alterna mediante un triac y un circuito detector de cruce por cero para sincronizar la onda de C.A. con una modulación por ancho de pulso PWM, por su siglas en inglés, para hacer el corte de dicha onda de C.A y así ser capaz de variar la tensión de suministro a la resistencia de 1 Volt hasta 127 Volts de valor eficaz Figura (A.4).

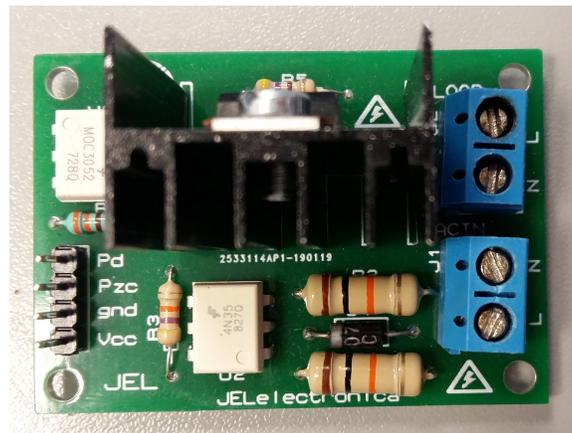


Figura A.4: Dimmer por flanco de cruce por cero

Se realizó la implementación del algoritmo de control en Simulink de Matlab mediante el uso de una tarjeta Arduino Uno para adquirir los datos de la planta experimental y la lectura del sensor de temperatura.



Figura A.5: Arduino Uno

### Características Arduino Uno[19]

- Microcontrolador: ATmega328.
- Voltaje Operativo: 5 Volts.
- Voltaje de Entrada (Recomendado): 7 – 12 Volts.
- Pines de Entradas/Salidas Digital: 14 (De las cuales 6 son salidas PWM).
- Pines de Entradas Análogas: 6.

- Memoria Flash: 32 KB (ATmega328) de los cuales 0,5 KB es usado por Bootloader.
- SRAM: 2 KB (ATmega328).
- EEPROM: 1 KB (ATmega328).
- Velocidad del Reloj: 16 MHZ.

El material usado en la fabricación del chasis de las secciones descritas anteriormente fue acero inoxidable grado quirurgico calibre 316, el acero inoxidable se oxida con menos facilidad que otros metales basados en el hierro, pero no es literalmente “inoxidable”. Como el acero estándar, el inoxidable puede marcarse con huellas digitales y grasa, desarrollar decoloración y eventualmente corroerse. La diferencia es la resistencia. El acero inoxidable puede resistir mucho más tiempo y abuso antes de mostrar signos de desgaste.

Todos los aceros tienen la misma composición básica de hierro y carbono, pero el acero inoxidable también contiene una buena dosis de cromo, la aleación que le da al acero inoxidable su famosa resistencia a la corrosión.

La tubería por donde recircula el agua, es de tubo de cobre de 1/4 de pulgada muy resistente debido a su fabricación por extrusión que permite tubos de una sola pieza, sin costura y de paredes lisas y tersas, aseguran la resistencia de manera uniforme y poca fricción en la conducción de fluidos. Además de que su temple es flexible para una gran gama de usos también cuenta con paredes consistentes y delgadas lo cual nos permite una mejor transferencia de calor [20].



Figura A.6: Planta prototipo

A continuación se muestra en la Figura A.7 un diagrama esquemático de los componentes integrados en el lazo cerrado de control.

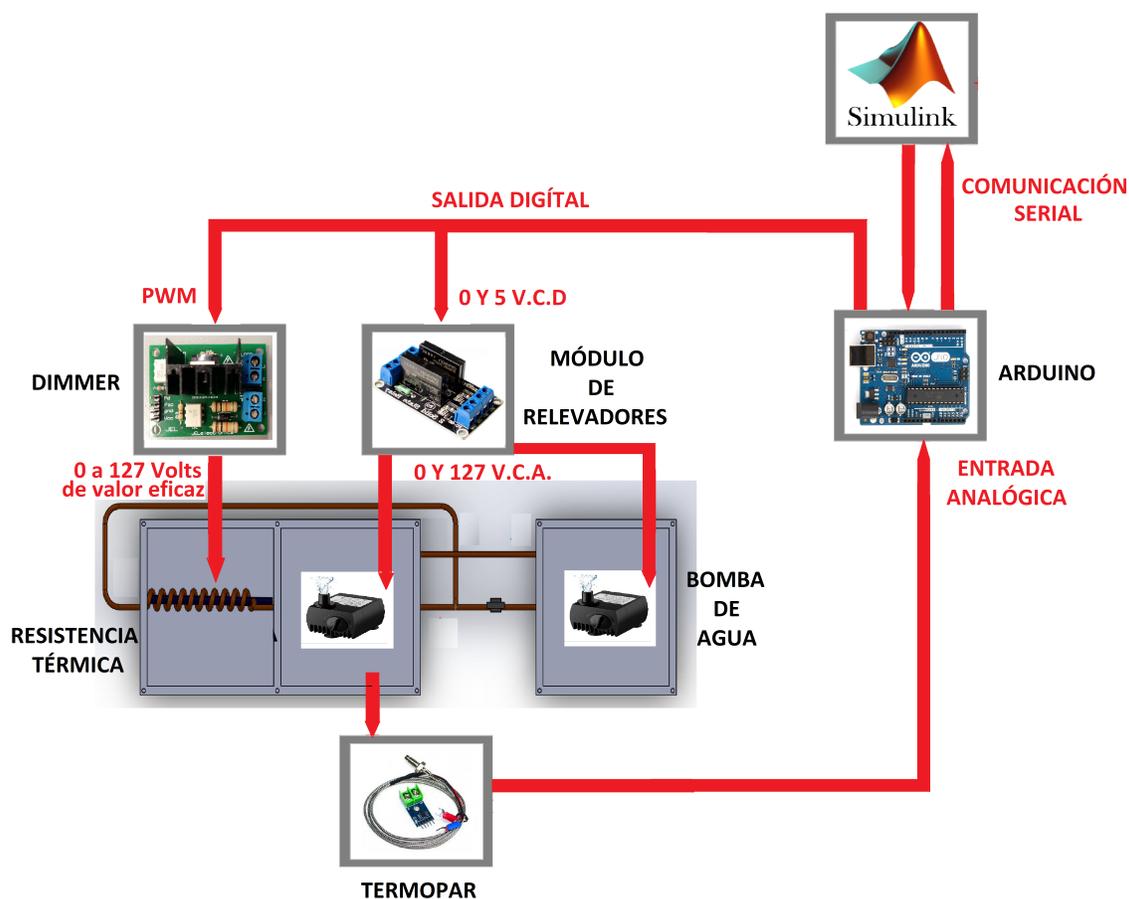


Figura A.7: Diagrama esquemático

## A.1. Identificación por mínimos cuadrados

La implementación se desarrolló en Simulink con método de solución Runge-Kutta de cuarto orden con paso fijo de 1 milisegundo. A la entrada del sistema en lazo abierto (resistencia térmica) se le aplica una señal de entrada persistente de la forma mostrada en la Figura A.8, esto para obtener el comportamiento del sistema aproximado en un rango de variación de 0 a 127 V.C.A.

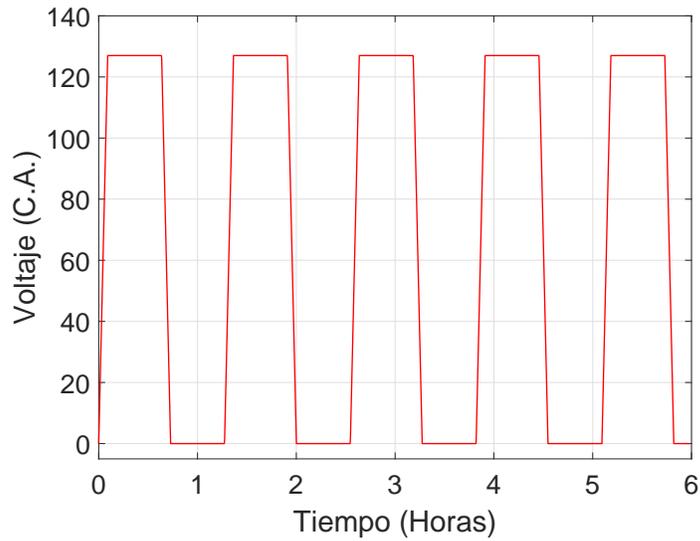


Figura A.8: Señal de entrada para la identificación

Se obtuvo la respuesta de la Figura A.9, donde se observa que el sistema comienza con una temperatura ambiente de 15 °C, elevando su temperatura gradualmente conforme la señal de entrada hasta llegar a un máximo de 35 °C, durante el tiempo de ejecución del experimento.

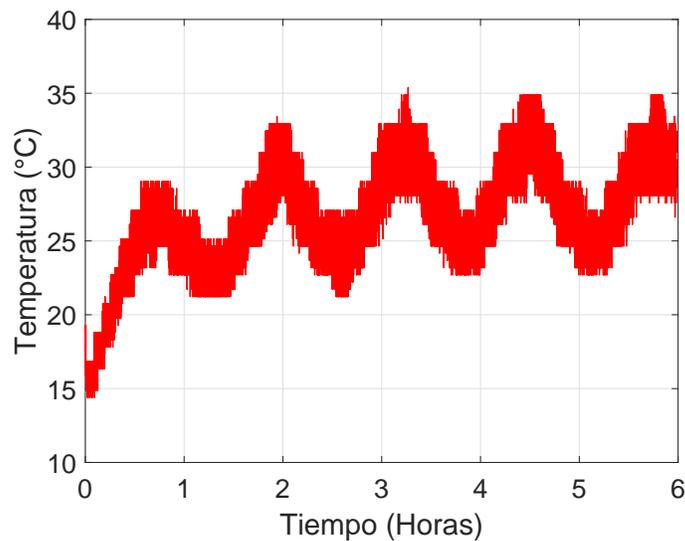


Figura A.9: Estado de la planta experimental

Los parámetros identificados se obtuvieron mediante el algoritmo de M.C.R. (ver ecuación (2.8)) y fueron aproximados por un polinomio de tercer grado, quedando en su forma

lineal a los parámetros, con su vector regresor y el vector de parámetros de la forma siguiente:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b \end{bmatrix}.$$

En la Figura A.10 se muestra el comportamiento que presentan los parámetros, donde se aprecia que cada parámetro comenzó en el origen y se establecen en un valor específico.

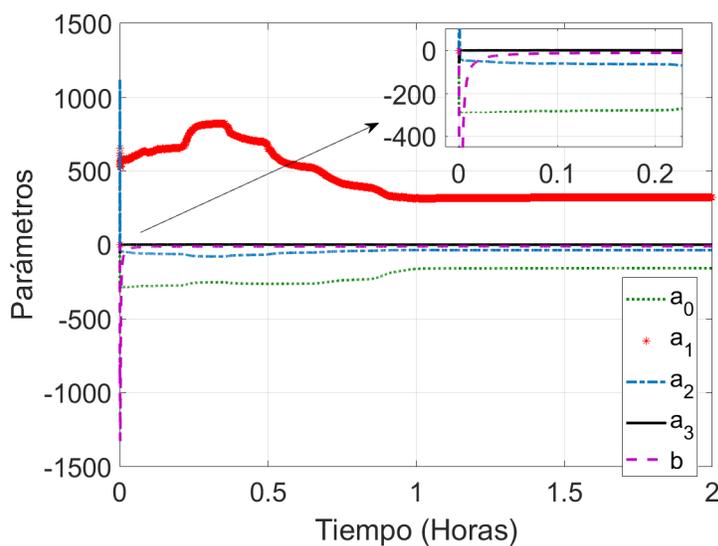


Figura A.10: Parámetros identificados

Se comprobó en simulación el modelo obtenido, resultando el comportamiento observado en la Figura A.11

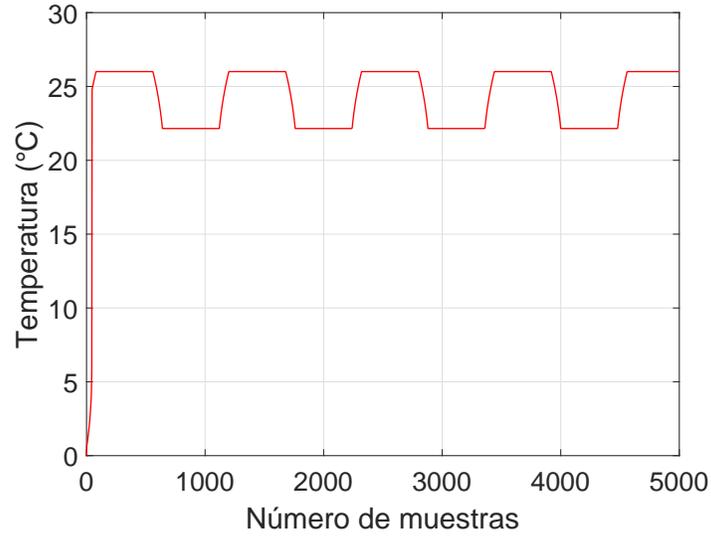


Figura A.11: Simulación del sistema identificado

donde se aprecia que la respuesta del sistema simulado que se muestra en la Figura A.11 es similar a la respuesta real del sistema vista en la Figura A.9, dado por el caso que el sistema simulado no es capaz de saber el cambio en la temperatura del fluido después del primer flanco de subida del tren de pulsos por lo que mantiene constante el cambio entre cada flanco de subida de la señal de entrada. Este modelo identificado se usa en la obtención del control P y PI robusto y adaptable.

# Apéndice B

## Herramientas adicionales

### Definición B.1 *traza* [12]

La traza de una matriz  $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$  (pueden ser elementos complejos), se escribe  $\text{tr}D$ , es definida como la sumatoria de todos los elementos a lo largo de la diagonal principal de  $D$ , de la forma

$$\text{tr}\{D\} := \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (\text{B.1})$$

### Definición B.2 *Propiedades de la traza* [12]

- 1.-  $\text{tr}\{C\} + \text{tr}\{D\} = \text{tr}\{C + D\}$
- 2.-  $\text{tr}\{EF\} = \text{tr}\{FE\}$ , ssi  $E \in \mathbb{R}^{p \times q}, F \in \mathbb{R}^{q \times p}$

### Definición B.3 *Complemento de Schur* [12]

Suponga que  $M_1 \in \mathbb{R}^{J \times J}$ ,  $M_2 \in \mathbb{R}^{J \times L}$ ,  $M_3 \in \mathbb{R}^{L \times J}$ ,  $M_4 \in \mathbb{R}^{J \times J}$  y  $M_4$  es invertible.

De modo que  $M_T = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix}$

Entonces el complemento de Schur es:  $M_1 - M_2 M_4^{-1} M_3 > 0$



# Apéndice C

## Código Matlab de la parte experimental

### C.1. Control P robusto

Listing C.1: Conjunto de soluciones control P robusto.file

```
1 clear all
2 clc
3 %%%% Parametros identificados
4 a1= -0.9989;
5 a2= 36.22;
6 a3= -319.3;
7 a4= 158.1;
8 b= 9.593;
9 %%%% Sistema linealizado
10 A= a3;
11 B= b;
12 C=1;
13 D=0;
14 %%%% Dimensiones del sistema
15 n=1;
16 m=1;
17 In = eye(n);
18 Zn = zeros(n);
```

```

19 %%%% Variables del conjunto de soluciones
20 alp=1;
21 ep =0.000001;
22 % alp = 0.0820;
23 % ep = 0.1;
24 %%%% Cotas de los terminos inciertos (psi)
25 epsq = sqrt(ep);
26 d0 = 1;
27 d1 = 0.001;
28 d1s = sqrt(d1);
29 %%%% Inicializacion de la herramienta CVX
30 cvx_begin sdp
31     cvx_solver sedumi
32     variable X(n,n) symmetric;
33     variable Y(m,n);
34 %%%% Desigualdad lineal matricial
35     LMI = [-A*X-X*A' -B*Y-Y'*B' -alp*X , -In , epsq*d1s*X ;
36           -In , ep*In , Zn ;
37           epsq*d1s*X , Zn , (1/(1))*In ];
38     subject to
39         LMI > 0;
40         X > 0;
41         trace(X) < 1e3;
42 cvx_end
43 %%%% Obtencion de las ganancia K1, sus polos y su polinomio
44     P = inv(X)
45     K1 = Y*P
46     Rob_pol = eig(A + B*K1)
47     SS = poly(Rob_pol);

```