UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

UN ESTUDIO EXPLORATORIO ACERCA DE LAS CONCEPCIONES QUE REFERENTES AL COMPORTAMIENTO VARIACIONAL DE FUNCIONES ELEMENTALES TIENEN LOS PROFESORES DE BACHILLERATO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

LUÍS ARTURO GUERRERO AZPEITIA

DIRECTOR

DR. CRISOLOGO DOLORES FLORES

PACHUCA HIDALGO, OCTUBRE 2002

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Carretera Pachuca-Tulancingo Km. A5
C.P. 4207
Tel. (01 771) 7 20 00
Ext. 6301 6302
Fax (01 771) 7 21 09

LIC. ADOLFO PONTIGO LOYOLA,
DIRECTOR DE CONTROL ESCOLAR DE
LA U.A.E.H.,
P R E S E N T E .

Por este conducto le comunico que el Jurado asignado al Candidato a Maestro en Ciencias con Orientación en la Enseñanza de las Matemáticas **Luis Arturo Guerrero Azpeitia,** quien presenta el trabajo para obtener el grado **"Un Estudio exploratorio acerca de las concepciones que referentes al comportamiento variacional de funciones elementales tienen los profesores de IBachillerato",** después de revisar el trabajo en reunión de Sinodales ha decidido autorizar la impresión del rnismo, hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación se anotan las firmas de conformidad de los integrantes del Jurado:

PRESIDENTE: Dr. Crisólogo Dolores Flores

PRIMER VOCAL: Dr. Carlos Rondero Guerrero

SECRETARIO: Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

PRIMER SUPLENTE: M. en C. Gustavo Martínez Sierra

SEGUNDO SUPLENTE: Dr. Hugo Mirón Shac

Sin otro particular, reitero a usted la seguridad de mi atenta consideración

A T E N T A M E N T E .
"AMOR, ORDEN Y PROGRESO"
Pachuca, Hgo., a 16 de octubre de 2002

Lic. en Com. Luís Islas Hernández
Coordinador de Titulación

Dedicatoria

Quiero dedicar este trabajo a todos aquellos que deforma directa o indirecta intervinieron en el, pero en especial a Emma, por haber despertado en mí el amor hacia la didáctica; a Guadalupe, por todo el amor y cariño que me brindo desde la infancia; a Claudia, por compartir su vida conmigo; a Crisólogo, por haber despertado el gusto por la investigación; a Arturo, por ser todo un ejemplo de dedicación y entrega al trabajo; a Elias, por iluminar mi vida con su alegría; a mi familia, por su apoyo incondicional; a mis maestros, por mostrarme el camino del conocimiento; a mis alumnos, por sus enseñanzas invaluables; Pero sobretodo....a Dios.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

ANTECEDENTES

El presente trabajo se inserta dentro de la línea de investigación indicada por el Dr. Crisólogo Dolores. Teniendo como uno de sus objetivos fundamentales, desarrollar en situación escolar el pensamiento y lenguaje variacional. El pensamiento y lenguaje variacional está asociado con los procesos de transmisión y asimilación del conocimiento relativo a la matemática de las variables, resultando importantes por un lado por un lado las estructuras matemáticas propias de la variación y el cambio así como los procesos cognoscitivos que se ponen en juego cuando los seres humanos interactúan con este conocimiento con el propósito de hacerlos suyos.

En particular esta tesis esta orientada hacia el estudio acerca de las concepciones que de las representaciones gráficas y analíticas sobre el comportamiento de las funciones elementales manifiestan los profesores. Este tipo de representaciones son muy importantes en los procesos de comunicación de las ideas matemáticas pero también lo son para el desarrollo cognitivo del pensamiento[1]. Existen varios trabajos de investigación que dan cuenta del manejo de las representaciones gráficas sobre las funciones y su comportamiento (Dolores C./Guerrero A./Castillo M./Martínez M[2] (2001); Cáceres T.[3] (1997)), en estos trabajos se pone de manifiesto que los estudiantes asocian representaciones gráficas con representaciones analíticas que no se corresponden desde el punto de vista de la matemática. Los profesores esperan que, por ejemplo, cuando se trabaja con la expresión analítica: $f(x)<0$, los estudiantes y profesores inmediatamente la asocien con una gráfica decreciente, en el terreno de los hechos esto no siempre sucede así. En

[1] Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II.* Departamento de Matemática educativa. CINVESTAV/IPN, México D.F.
[2] Guerrero L.; Medina M.; Martínez M. (2000). *El análisis del comportamiento variacional de funciones en estudiantes universitarios.* Tesina de Especialidad en Matemática Educativa. UAEH. Pachuca, Hidalgo
[3] Cáceres T. (1997). *Pensamiento y lenguaje variacional. Estudio exploratorio de ideas variacionales entre jóvenes escolarizados de 17 a 24 años.* Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav/ IPN

general las asociaciones que establecen profesores y estudiantes de la escuela media y superior muy poco se parece a las que se aceptan en los libros usuales de cálculo, por ejemplo hemos encontrado que las asociaciones frecuentes a la expresión $f(x)<0$ son aquellas gráficas tales que *fix)<0.* Tal parece que en la mente de los estudiantes y profesores subsiste la idea que en términos gráficos las expresiones $f(x)=f(x)$ son equivalentes en su significado. Esto evidentemente son manifestaciones acerca del comportamiento variacional de funciones elementales que no son las que esperan los expertos en la materia.

Motivados por estas observaciones empíricas, producto de nuestro quehacer como profesores de cálculo y apoyados en algunas evidencias mostradas en otras investigaciones, nos hemos dado a la tarea investigar sistemáticamente este problema a fin de contribuir, en el futuro, al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje del análisis de las funciones. De aquí emerge nuestro principal problema de investigación.

EL PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN

El problema general en el cual se inserta este trabajo es bastante conocido en el ámbito tanto escolar como en el de la investigación: *"en condiciones ordinarias de enseñanza el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, principalmente del análisis del comportamiento de las funciones es deficiente"* (Dolores C. 1996) [4]. En particular nuestro problema tiene que ver con la escasa correspondencia, que establecen los profesores del nivel medio superior, entre las representaciones analíticas sobre el comportamiento de las funciones elementales y sus gráficas cartesianas. Es por tanto necesario tener un panorama más amplio y profundo acerca de estas relaciones en los profesores pues nos permitirá comprender los mecanismos cognoscitivos que se ponen en juego y las posibles influencias en sus estudiantes cuando trabajan estos temas. De aquí se desprende el objetivo general de esta tesis.

[4] Dolores, C (1996). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato.* Tesis doctoral. Inédita. Biblioteca de la Facultad de Matemáticas de UAG. Chilpancingo Gro

OBJETIVO

Realizar un estudio exploratorio de las concepciones sobre el comportamiento variacional de funciones a través de sus representaciones gráficas y analíticas en los profesores de nivel medio superior. Para el logro de este objetivo, se siguió el esquema metodológico que en términos sintéticos a enuncia a continuación.

METODOLOGÍA.

En cuanto a la metodología se siguieron algunos lineamientos generales desprendidos de la Ingeniería Didáctica y de las Ciencias Pedagógicas, en concreto el cuestionario como instrumento de exploración. El esquema metodológico seguido en la investigación se sujetó a los siguientes puntos:

- ? Revisión bibliográfica de artículos de investigación, tesis, textos y revistas científicas relacionados con el tema.
- ? Diseño del cuestionario de exploración.
- ? Validación del instrumento.
- ? Aplicación a los profesores.
- ? Diseño y aplicación de entrevistas
- ? Análisis de resultados.

ELEMENTOS TEÓRICOS

El presente trabajo está construido, sobre la base de dos planos fundamentales, el cognitivo y el matemático. En referencia al plano cognitivo asumimos la postura teórica referente a los sistemas de representación semiótica, mientras que en el plano matemático, consideramos las relaciones matemáticas (teoremas) sobre las que se basa el análisis de la variación de las funciones.

Plano cognitivo. Las investigaciones actuales en matemática educativa están enfocadas hacia los procesos cognitivos que los estudiantes ponen en juego para asimilar ideas, conceptos, procedimientos y relaciones matemáticas. De acuerdo con Duval[5], es mediante la movilidad entre los diferentes sistemas de representación semiótica que un estudiante tendrá mejores condiciones de éxito en su aprendizaje, considera además que los sistemas de representación pueden ser numéricos, gráficos, algebraicos, analíticos, pictóricos y verbales. Los sistemas de representación juegan un papel fundamental en la actividad matemática ya que es a través de ellos que las representaciones mentales se exteriorizan para fines de comunicación y son al mismo tiempo esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento ya que a su vez las representaciones mentales dependen de la interiorización de las representaciones semióticas.

Quien habla también de Sistemas de Representación es Castro E y Castro[6] que dicen: *"son un medio que se usa con mayor frecuencia en la emisión, transmisión y recepción del conocimiento matemático, mediante enunciados verbales, gráficos, sucesiones numéricas y símbolos que nos expresan los conceptos y los procedimientos matemáticos. La noción de representación se vincula con los signos, notaciones, figuras y expresiones usuales de las matemáticas. Ellas forman parte específica de los sistemas matemáticos de signos, incluidos los gráficos".*

En este trabajo interesa explorar como conciben o interpretan los profesores los aspectos esenciales del análisis de funciones a partir de las representaciones gráfica, analítica y verbal, así como el tratamiento y la conversión entre estos sistemas semióticos de representación. Se entiende por tratamiento y conversión, a las transiciones dentro de un mismo sistema o entre sistemas de representación, es decir, como establecen relaciones dentro de las mismas representaciones, o bien, como a través de una representación gráfica se transita a su correspondiente representación analítica.

[5] Duval, R. (1993). Ibidem
[6] Rico L. et al (1997). *Educación matemática en la enseñanza secundaria.* Universidad de Barcelona España

Plano matemático. El análisis de una función, desde el punto de vista de la matemática, consiste básicamente en poder determinar con los recursos del cálculo, donde una función es creciente, donde es decreciente y, donde tiene puntos estacionarios. Estas actividades pueden hacerse con el cálculo o sin él. Sin el cálculo, el análisis puede arrojar resultados un poco rudimentarios. Sin embargo mediante el cálculo se puede analizar una función con mucha mayor precisión. La derivada en este caso, en una herramienta muy poderosa. El análisis de funciones se hace sobre el teorema de valor medio, el teorema de Lagrange y las definiciones y teoremas asociadas a funciones creciente y decreciente.

Es importante señalar el análisis de funciones continuas presupone la consideración topológica de "vecindades". Es decir, a partir de lo que sucede en una vecindad se extrapola para un intervalo más grande. Esto es posible dado que se estudian funciones continúas.

ESTRUCTURA DE LA TESIS.

La tesis está estructurada en cuatro capítulos, una introducción, conclusiones finales y bibliografía. En la introducción se habla de manera general de los aspectos básicos de la investigación, problema, el objetivo, la metodología, el marco teórico y el diseño del cuestionario para lograr el objetivo.

En el Capítulo I, se presentan los elementos teóricos a los que recurrimos para fundamentar este trabajo de investigación, y son principalmente los sistemas de representación y los procesos cognitivos, así como los teoremas matemáticos fundamentales para el análisis de funciones.

En el Capítulo II se presenta la metodología, es decir el cómo se procedió a la realización integral del presente trabajo de investigación.

En el Capítulo III, se hace un análisis del libro de texto que oficialmente se reconoce como texto base del programa de estudios de la asignatura de cálculo en el CECyTEH.

En cuanto al Capítulo V, se realiza el análisis de las respuestas al cuestionario de exploración aplicado a los profesores, adicionando, el análisis de las entrevistas realizadas a algunos de los mismos. Al final se incluyen las conclusiones generales.

CAPITULO I

MARCO TEÓRICO

1.1 Antecedentes.

La medición es un procedimiento creado por el hombre para estudiar y entender la realidad, el cambio por otro lado, es el componente básico del movimiento[7]*.*

De acuerdo con el Cantoral R. [8], el pensamiento variacional es *"parte del pensamiento matemático avanzado y comprende las relaciones entre la matemática de la variación y el cambio por un lado y los procesos del pensamiento por otro. Implica la integración de los dominios numéricos, desde los naturales hasta los complejos, concepto de variable, función, derivada e integral, así mismo sus representaciones simbólicas, sus propiedades y el dominio de la modelación elemental de los fenómenos del cambio. Los rasgos característicos del comportamiento variacional de las funciones son: crecimiento, decrecimiento, puntos estacionarios, región donde la función es positiva, negativa o nula".*

Si partimos del hecho de que las diferencias indican el cambio de las variables como un proceso de cambio, es entonces a través de ellas que se analiza el comportamiento de las funciones; en este sentido el presente trabajo se centra en la matemática de la variación y el cambio.

Los trabajos de investigación en desarrollo del denominado "Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional en Situación Escolar", a cargo del Dr. Crisólogo Dolores Flores, tienen como objetivo principal desarrollar el pensamiento y lenguaje variacional en los estudiantes de bachillerato y aquellos que principian la Universidad.

---

[7] Dolores, C. (1999). *Algunos elementos acerca de la variación.* Memorias de la XIII Reunión de Matemática Educativa. Santo Domingo. República Dominicana

[8] Cantoral, R. (1997). *Pensamiento y Lenguaje Variacional.* Seminario de Investigación, Área de Educación Superior, Cinvestav/IPN México D.F

Como antecedente inmediato, en una investigación que da cuenta del manejo de las representaciones gráficas sobre las funciones y su comportamiento Dolores C./Guerrero A./Castillo M./Martínez M (2001)[9], se tiene que existen diferentes concepciones referentes al comportamiento variacional de funciones en los estudiantes, entre las que destacan:

- Dificultad en los estudiantes para transitar entre diferentes sistemas de representación en relación al comportamiento variacional de funciones cuando se les plantean condiciones simultaneas.

- Los estudiantes en general, privilegian las condiciones relativas a/(x)<0 *óf(x)>0* sobre/'(x)<0 ó/'(x)>0.

- No existe certeza en la existencia del proceso de reversibilidad en los estudiantes, mostrando evidencia de que transitan con mayor facilidad de *f{x)* a *f(x)* que con respecto al tránsito de f'(x) *a f(x),* mostrando con esto la escasa sistematización de las propiedades variacionales.

- De acuerdo a los resultados, los alumnos no distinguen la diferencia entre un comportamiento variacional y la posición de un punto en el plano, ya que asumen que/'(x)=/(x).

Además en Martínez J.[10], tenemos que se observan situaciones similares, en éste sentido tenemos que para los profesores *en la vecindad del punto no se identifica el comportamiento de la función, situación que prevalece también en los estudiantes",* además en la citada obra, encontramos que *los profesores examinan el comportamiento de funciones en su primera y segunda derivada sólo en un punto. Pero en sentido inverso no, es decir, si se obtienen los datos*

[9] Dolores C,Guerrero A., Martínez M., Medina M (2001). *Un Estudio Exploratorio Acerca de las Concepciones que tienen los Estudiantes Acerca del Comportamiento Variacional de Funciones Elementales.* Memorias de la XV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Buenos Aires, Argentina

[10] Martínez J. Manejo e Interpretación de la Derivada en Profesores y Estudiantes de Nivel Superior. Tesis de Maestría. U.A.E.H. Hidalgo, México

de la segunda derivada para el comportamiento de la función, no puede inferirse el comportamiento de la función original".

Dentro del análisis que realiza el autor, observa que las regularidades que existen entre los profesores y alumnos son producto de la interrelación entre profesor-estudiantes ante el conocimiento. Esto hace que suponer que si los alumnos del nivel medio superior y superior manifiestan deficiencias en el análisis del comportamiento variacional de las funciones, ¿los profesores del nivel medio superior presentarán las ya citadas deficiencias? Si es así ¿qué tan profundas serán?

En los medios escolares se cree que las gráficas son de gran ayuda para visualizar el comportamiento de funciones. Sin embargo, con frecuencia esas *visualizaciones* y los significados que los estudiantes atribuyen a las gráficas no son congruentes con los significados aceptados en textos o los que comparten los expertos. Esta incongruencia causa conflictos en la comprensión y aceptación de los significados, por ello ha recibido varias denominaciones: errores, errores sistemáticos, preconcepciones y concepciones alternativas. El término *error* enfatiza la incongruencia entre el conocimiento de los alumnos y el conocimiento científico aceptado, las *preconcepciones* se caracterizan por aquel tipo de conocimiento precientífico formado por las experiencias cotidianas y que está fuertemente arraigado en la mente, las *concepciones* pueden o no ser acordes con los significados aceptados por textos y expertos, por nuestra parte en este trabajo sea adopta ésta última consideración.

En este sentido, consideramos ahora realizar un estudio exploratorio acerca de las concepciones que tienen profesores de Nivel Medio Superior, en referencia a las mismas ideas matemáticas que tienen que ver con el comportamiento variacional de funciones. Para tal efecto se consideró aplicar un cuestionario de exploración a una muestra de profesores de una institución educativa del Estado de Hidalgo del nivel ya mencionado.

La institución en la que se aplicó el cuestionario, ofrece la modalidad de estudios bivalentes, ya que por una parte permite a los estudiantes continuar con sus estudios de nivel superior y por otra les prepara para una carrera técnica. En este Subsistema Educativo, la materia de matemáticas se imparte cinco de los seis semestres; correspondiendo impartir el curso de cálculo diferencial e integral en los semestres cuarto y quinto respectivamente.

1.2 Plano matemático.

Si es posible expresar de modo analítico la dependencia funcional entre las magnitudes variables que participan en un fenómeno, podemos explorar la dependencia mencionada, sirviéndonos de los métodos del análisis matemático, en el entendido que es difícil realizar una exploración contundente calculando valores de la función en puntos aislados; el método general para el análisis de la variación de las funciones, se encuentra en Piskunov N.[11].

De acuerdo con el autor, el análisis de funciones y construcción de funciones se reduce a la determinación de los siguientes elementos:

1) Dominio natural de definición de la función.
2) Los puntos de discontinuidad de la función.
3) Los intervalos de decrecimiento y crecimiento de la función.
4) Los puntos de máximo y mínimo, así como los valores de máximos y mínimos de la función.
5) Los dominios de convexidad y concavidad de la gráfica y los puntos de inflexión.
6) Las asíntotas de la gráfica de la función.

De estos elementos, se toman los referentes los intervalos de decrecimiento y crecimiento de la función, los valores de x para los cuales la función presenta máximos y mínimos, así como los correspondientes a los puntos de inflexión, de igual forma, los intervalos del dominio para el cual la función es positiva y negativa. Para esto nos valdremos de algunos teoremas del análisis de la variación de las funciones.

[11] Piskunov N. *Cálculo Diferencial e Integral.* Editorial MIR. Moscú 1977

Teorema de Rolle: *"Si una función f{x) es continua sobre el segmento [a, b] y derivable en todos los puntos interiores de éste, reduciéndose a cero en los extremos x = a y x = b, [f{a) =j{b) - 0], entonces, dentro del segmento [a, b] existe por lo menos un punto, x = c, a < c < b, en el que la derivada f(x) se reduce a cero, es decir f'(c) = 0 ".*

Por otra parte, en la misma obra y en referencia al crecimiento de una función, se tiene el siguiente teorema:

1) *Si la función fix), derivable en el segmento [a, b, crece en este segmento, su derivada en este no es negativa, es decir, f(x) > 0.*

2) *Si la función f(x) es continua en el segmento [a, b] y derivable sobre el intervalo (a, b) cuando f'(x) es positiva para $a<x<b$, esta función es creciente sobre el segmento [a, b]*

Existe un teorema análogo para las funciones decrecientes:

Si la función j{x) decrece sobre el segmento [a, b], sobre el mismo segmento la derivada f'{x)<0. Si f(x)<0 sobre el intervalo (a, b), la función fix), decrece en el segmento [a, b.

En relación al punto de inflexión tenemos el siguiente teorema:

Sea y = f(x) la ecuación de una curva. Si f(x)=0, o f(a) no existe, y la derivada f'(x) cambia de signo al pasar por el valor x = a, entonces, el punto de la curva de abscisa x=a es el punto de inflexión.

Con base en estos teoremas y en el plano cognitivo, se diseñó el cuestionario de exploración.

1.3 Plano cognitivo.

En este plano, centraremos la atención en los trabajos de Luis Rico referentes a los sistemas de representación y a la visualización por un lado, y a los trabajos de R. Duval por otro.

Para Encarnación Castro y Enrique Castro[12] los sistemas de representación *"son un medio que se usa con mayor frecuencia en la emisión, transmisión y recepción del conocimiento matemático, mediante enunciados verbales, gráficas, sucesiones numéricas y símbolos que nos expresan los conceptos y los procedimientos matemáticos. La noción de representación se vincula con los signos, notaciones, figuras y expresiones usuales de las matemáticas. Ellas forman parte específica de los sistemas matemáticos de signos, incluidos los gráficos".*

En tanto que para R. Duval, (1993), la distinción entre un objeto y su representación, es un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas, siendo aquel lo que importa y no sus diferentes representaciones semióticas posibles, que pueden ser sistemas de representación algebraico, numérico, gráfico, verbal, geométrico y el relativo al sistema físico.

"No obstante, las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias"[13] , esto lo podemos entender si consideramos que los objetos matemáticos no son directamente accesibles a una situación cotidiana sino que, se requiere que tengan una representación para poder "operar" con ellos; esto representa lo que R. Duval llama una paradoja cognitiva del pensamiento matemático: *"..por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual y, por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos ", si asumimos que las representaciones mentales se ponen de manifiesto a través de las representaciones semióticas no solo para fines de comunicación, sino para favorecer la formación de nuevos conocimientos, el desarrollo de las representaciones mentales o el cumplimiento de diferentes funciones cognitivas como la objetivación y el tratamiento, o para la formación de nuevos conocimientos".*

[12] Rico L. et al (1997). *Educación matemática en la enseñanza secundaria.* Universidad de Barcelona España
[13] Duval, R. Op. cit. pp.2

Se llama sémiosis a la aprehensión o a la producción de una representación semiótica, y noésis a la aprehensión conceptual de un objeto, es entonces necesario afirmar que tanto la noésis como la sémiosis son inseparables.

Existen tres actividades fundamentales ligadas a la sémiosis, que son:

- **La formación de una representación identificable,** que implica una selección de rasgos y en el contenido por representar. La selección se hace en función de las unidades y las reglas de formación que son propias del registro semiótico en el cual se produce la representación. Bajo este aspecto, la formación de una representación podría compararse a la realización de una tarea de descripción.

- **El tratamiento de una representación,** que es la transformación de ésta en el registro mismo donde ha sido formada, es decir, es la transformación interna a un registro. La paráfrasis y la inferencia son formas de tratamiento en lengua natural.

- **La conversión de una representación,** es la transformación de ésta en otro registro conservando la totalidad o solamente parte del contenido de la representación inicial. La conversión, es una transformación externa al registro de partida.

Siendo importante mencionar que según R. Duval, son la formación y el tratamiento las dos actividades que son tomadas en cuenta en la enseñanza.

En cuanto a la noésis, que trata la aprehensión conceptual de un objeto, es importante destacar la necesidad de utilizar varios registros de representación como característica del pensamiento humano y la creación de nuevos conocimientos tiene que ver con la creación y desarrollo de nuevos sistemas de representación, para esto, es necesario considerar una economía del tratamiento, la complementariedad de los registros y la coordinación de los mismos para lograr una conceptualización. En esta investigación se utilizarán los sistemas de representación gráfico, analítico y verbal, así como el tratamiento y la conversión entre ellos.

CAPITULO II

METODOLOGÍA

II.I Descripción.

En la elaboración de este trabajo se utilizaron algunos elementos metodológicos de la ingeniería didáctica, como son el análisis a priori y la validación, de las Ciencias Pedagógicas, principalmente el cuestionario de exploración. Este instrumento fue diseñado con base en los teoremas ya citados en el marco teórico, y pretendemos explorar las concepciones de los profesores referentes al comportamiento variacional de las funciones y que son: crecimiento y decrecimiento de una función y puntos estacionarios, así como función positiva, negativa y nula.

La exploración se llevó a cabo en el CECyTEH, que es una institución de educación media superior con modalidad de estudios bivalente, a algunos profesores que forman la plantilla docente, se aplicó el cuestionario de exploración a un profesor de cada uno de los quince planteles, a excepción de un plantel que fue representado con dos profesores, es importante mencionar que los docentes, hasta la conclusión de la presente investigación, no han recibido cursos de matemáticas o matemática educativa, además el setenta por ciento de los profesores cuenta con Licenciatura en Ingeniería mientras que el treinta por ciento restante tiene formación normalista.

Cabe destacar que la aplicación del cuestionario fue sin previo aviso a los profesores y tuvo una duración de una hora, sin embargo algunos requirieron de una hora con treinta minutos para concluir el cuestionario, el cual fue resuelto en forma individual y sin ningún material de apoyo; con todo esto se tiene una buena confiabilidad en cuanto a las respuestas de los profesores, así como una representatividad importante de la institución educativa.

El esquema se oriento por el esquema siguiente.

- Diseño
- Validación
- Aplicación
- Valoración de resultados

II.2 Diseño del cuestionario de exploración.

El diseño del cuestionario se hizo con la idea de explorar las concepciones que acerca del comportamiento variacional de funciones elementales tienen los profesores, mediante la conversión y tratamiento de diferentes sistemas semióticos de representación, a saber, gráfico, verbal y analítico.

El cuestionario de exploración se diseñó considerando.

Tratamiento	gráfico-gráfico	Preguntas 6 y 9
Conversión.	gráfico-analítco	Preguntas 1
	verbal-gráfico	Preguntas 4, 5
	analítico-gráfico	Preguntas 2, 3, 7, 8

Es importante analizar el empleo del conector lógico *y,* para analizar el comportamiento variacional de funciones bajo dos condiciones simultáneas a la vez, dicho conector lógico es utilizado en las preguntas 3, 4, 5 y 7. El cuestionario de exploración se incorpora en el anexo 1 de este trabajo de investigación.

11.3 Validación

Para la etapa de la validación, se aplicó el cuestionario a dos profesores externos a la institución donde se aplicó el cuestionario de exploración, y a raíz de las observaciones generadas, se realizaron las correcciones pertinentes con la finalidad de que al aplicar el cuestionario, fuera entendible, y que las preguntas propiciaran respuestas claras y unívocas

11.4 Aplicación

Con la finalidad de lograr una respuesta confiable por el profesor, se tomó la decisión para que el cuestionario de exploración fuera aplicado dentro del desarrollo de un curso donde los profesores asistieron y en el que la solución del cuestionario era prerrequisito para acreditar dicho curso. Se aplicaron un total 15 cuestionarios a igual número de profesores, uno por cada plantel, los cuales en su mayoría imparten algún curso de cálculo.

La aplicación fue sin previo aviso y la duración para la solución fue de entre una hora y hora y media, en donde los profesores contestaron en forma individual y sin consultar apuntes, calculadoras o bibliografía. Es importante mencionar que algunos profesores no estaban familiarizados con la estructura del cuestionario.

11.5 Valoración.

Para la valoración de las respuestas dadas en el cuestionario de exploración se realizó un análisis cualitativo de las elecciones y producciones de los profesores, la agrupación de los docentes de acuerdo a patrones de pensamiento, con base a las respuestas, se determinaron después de un primer análisis, los resultados que se hacen explícitos en el capítulo V.

11.6 Entrevistas.

Después del análisis de resultados y con la finalidad indagar, acerca de concepciones particulares de los profesores, se diseño una entrevista que fue aplicada al 50 por ciento de los profesores que contestaron el cuestionario. Posteriormente, se analizaron resultados para contar con evidencia que permitiera afianzar algunas hipótesis planteadas durante el análisis de los resultados.

CAPITULO III

ANÁLISIS DE TEXTOS

A continuación se describen las características generales, de dos aspectos importantes que son, el programa de estudios y una descripción general del análisis de funciones tratado en el libro de mayor uso en el CECYTEH

III.1 Programa de estudios.

Como referencia, y con la finalidad de tener elementos que permitan establecer relaciones con el análisis de resultados, se analizó en primer instancia el programa de estudios de la asignatura de Matemáticas IV y que corresponde al Cálculo Diferencial[14].

Es importante mencionar, que en este documento, solamente se consideran dos objetivos, uno general y uno particular.

El Objetivo General de la asignatura dice: *"Al finalizar el curso el alumno reconocerá la dependencia entre una magnitud con respecto a otra (funciones), y aplicará mecanismos de cálculo que le permitan analizar situaciones de la dependencia, entre variables y las relaciones de comportamiento de variación".*

De acuerdo con el programa, tenemos que es en la unidad cuatro donde se plantea el estudio del comportamiento variacional de funciones y cuyo título es Análisis de Funciones, el objetivo es: *"Al término de la unidad el alumno identificará funciones crecientes y decrecientes, aplicará el interés de la primera y segunda derivada, aplicará el proceso de determinación de máximos y mínimos de una junción, para graficar funciones y resolverá problemas de optimización".*

[14] CECyTEH (1996), *Programa de estudio de la asignatura de Cálculo Diferencial.* Dirección General de CECyTEH

En el entendido que de acuerdo con la normatividad existente, se recomienda evitar la excesiva fragmentación del fenómeno a estudiar, ya que de darse esto, es fácil observar el exceso de conductas insignificantes y memorísticas que se establecen, así como la ausencia de aprendizajes complejos, analíticos, sintéticos y de relaciones.

Además, se asume que los docentes tienen la obligación de interpretar y adecuar estos contenidos mínimos a su situación particular de docencia. En lo que a la instrumentación didáctica se refiere, se debe reflejar la concepción que se tenga en relación al proceso de aprendizaje de la disciplina.

En este tenor, se tiene que el desarrollo temático, recomendaciones didácticas y carga horaria de la unidad son:

No.	DESARROLLO TEMÁTICO	RECOMENDACIONES DIDÁCTICAS	HRS
4.1 4.2 4.3 4.4	Funciones crecientes, decrecientes. Máximos y mínimos. Punto de Inflexión. Aplicaciones.	Exposición docente Trabajo extractase Investigación bibliográfica Solución de problemas en clase	25

III.2 Libro de texto.

El libro analizado es el que el programa de estudios establece como texto y que es Garza *B.*[15] en el cual se abordan los temas referentes límites, continuidad y derivada de funciones antes de analizar los temas relativos al análisis de funciones.

<u>Derivada de una función.</u>

[15] Garza, B. (1900), Matemáticas IV Cálculo Diferencial. SEP SEIT DGETI. México D.F

El autor comienza por establecer el que considera principio fundamental que reglamenta las aplicaciones del cálculo diferencial y que es: *"El valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva en aquel punto".* Definiendo por lo tanto que:

$$\frac{dy}{dx} = tag\Theta = m \quad en \quad p(x, y)$$

A continuación resalta algunos puntos y que son los siguientes:

"Si la dirección de la curva es paralela al eje de las "x" y la tangente es horizontal, el ángulo de inclinación 6= 0º; entonces":

$$\frac{dy}{dx} = tag 0^o = 0$$

"Si la dirección de la curva es perpendicular al eje de las "x" y la tangente es vertical, el ángulo de inclinación 9= 90°; entonces":

$$\frac{dy}{dx} = tag\, 90^o = \infty$$

El autor busca a través de un gráfico (figura 1) en el cual se eligen puntos sobre la curva y se trazan rectas tangentes en ellos, realizando la explicación de lo ya citado en líneas atrás, donde se puede apreciar a cuatro rectas perpendiculares al aje de las abscisas y que de acuerdo al autor son consideradas como rectas tangentes, tres de ellos tienen que ver con la tangente manifestada por el autor como perpendicular y que se ilustra perfectamente en los puntos A, E y G; en donde se puede percibir claramente que el comportamiento variacional de la función es distinto al manifestado por el autor, ya que la función en los puntos indicados debe tener una pendiente no perpendicular; por otra parte, en el punto C no puede trazarse una recta tangente debido a que ahí la función no es derivable.

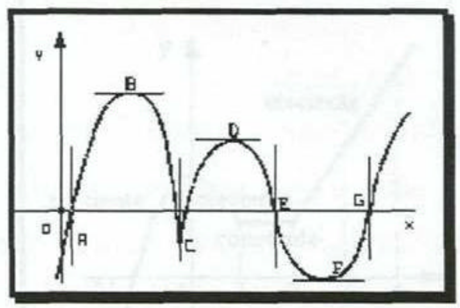


figura 1

Siendo éste, el único argumento gráfico utilizado por el autor para los fundamentos teóricos alusivos a la derivada de una función, por lo que la manera de ejemplificarlos es únicamente a través de la resolución de problemas relacionados con la recta tangente a la función en un punto en especial y que son solucionados con procedimientos netamente algebraicos utilizando escasamente los gráficos (mismos que cuando son empleados, sirven de referencia para explicar la solución de un problema) y finalmente se proponen una serie de ejercicios que son estrictamente repetitivos a los resueltos por el autor. Esto hace evidente el tratamiento presente sólo en el sistema algebraico.

Función creciente y decreciente.

En cuanto al carácter creciente y decreciente de una función, tal como lo define el autor, se inicia el discurso a partir de la gráfica de una función en la que los conceptos relacionados son explicados mediante el análisis visual de un gráfico (figura 2).

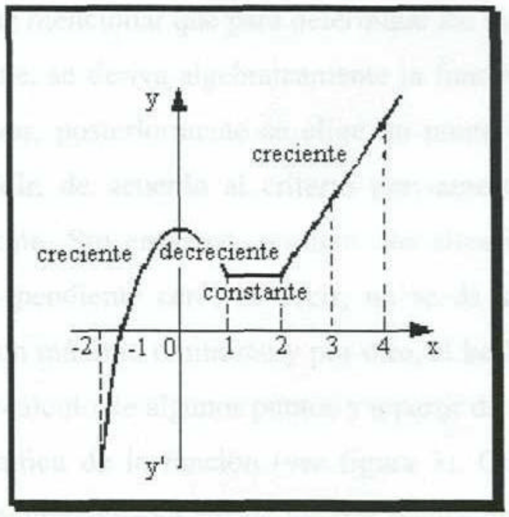


figura 2

Esto es manifiesto por el autor al declarar que:

FUNCIÓN CRECIENTE.- "Una función y=f(x) es creciente si al aumentar algebraicamente x, también y aumenta, es decir, la función es creciente en un intervalo si es creciente en todos los valores del intervalo".

FUNCIÓN DECRECIENTE.- "Una función y=f{x) es decreciente si al aumentar algebraicamente x, la y disminuye, es decir, la función es decreciente en un intervalo si es decreciente en todos los valores del intervalo ".

Establece a continuación un criterio mediante el cual, una función es creciente en tanto tenga una derivada positiva debido a que la tangente forma un ángulo agudo con el eje x, mientras que una función es decreciente cuando su derivada sea negativa, en virtud de que la tangente forma un ángulo obtuso respecto al eje x. Es importante mencionar que el autor sólo hace mención de definiciones, no existiendo alguna actividad a través de la cual se propicie la conversión entre sistemas de representación visual al algebraico, siendo este último el que prevalece en todo momento, en virtud de que para ejemplificar y reforzar el tema se continúan utilizando procedimientos algebraicos únicamente.

De estos problemas es importante mencionar que para determinar los intervalos para los cuales la función es creciente o decreciente, se deriva algebraicamente la función y se iguala a cero para delimitar los intervalos a analizar, posteriormente se elige un punto dentro del intervalo para determinar la pendiente y decidir, de acuerdo al criterio previamente establecido, cuando la función es creciente o decreciente. Sin embargo, resaltan dos situaciones, por un lado no se define cuando la función tiene pendiente cero, es decir, no se da argumentación alguna del significado de este punto como un máximo o mínimo y por otro, el hecho de que la gráfica de la función es obtenida mediante el cálculo de algunos puntos y a partir de la ubicación de ellos en el plano cartesiano, se traza la gráfica de la función (ver figura 3). Otro aspecto importante de resaltar, es el relativo a que coincidentemente dos de los tres puntos que son fundamentales para la construcción de la gráfica coinciden con los puntos estacionarios.

x	y
0	0
1	4
2	2
3	0
4	4
5	20
-1	-16
-2	-30

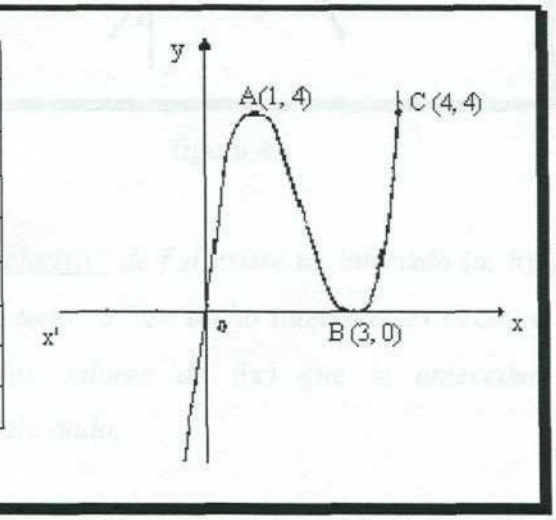


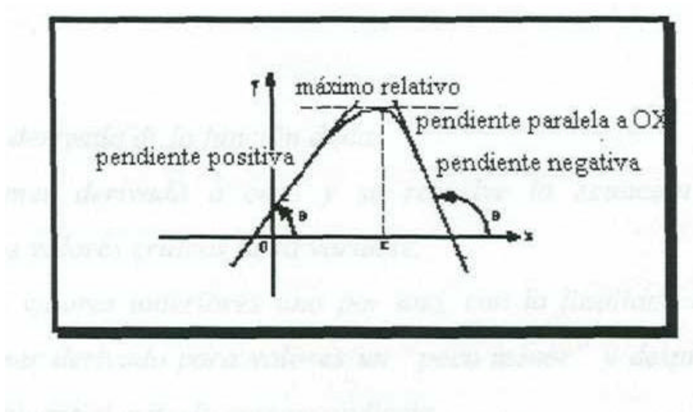
figura 3

Máximos y mínimos de una función.

En referencia a los puntos estacionarios de una función, se hace referencia a que para determinar si una función es creciente o decreciente en un intervalo determinado se utilizó la primer derivada, pero ahora se utilizará esta última para analizar los puntos en los que la función deja de ser creciente para ahora ser decreciente o viceversa. Esto corrobora el análisis presentado en la apartado anterior. Definiendo lo siguiente:

Si "f" es una función cuyo valor es "c", se tiene que:

a) *f(x) se llama un "máximo relativo" de f si existe un intervalo (a,b) que contiene a "c" tal que f(x) < f(x) para todo "x" en dicho intervalo, es decir, si f(c) es mayor que cualquiera de los valores de f(x) que le anteceden o le siguen inmediatamente en el intervalo dado.*



b) *f(x) se llama un "mínimo relativo " de f si existe un intervalo {a, b) que contiene a "c" tal que fix) > f(x) para todo "x" en dicho intervalo, es decir, si f(x) es menor que uno cualquiera de los valores de f(x) que le anteceden o le siguen inmediatamente en el intervalo dado.*

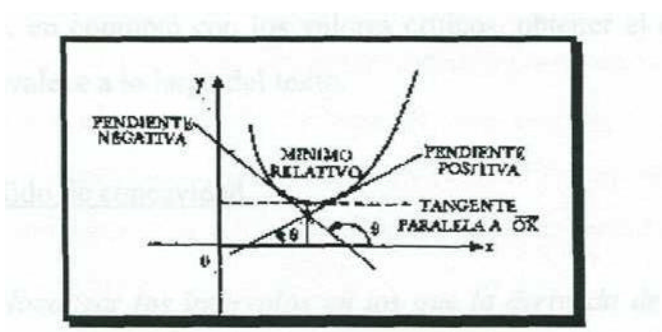


Figura 5

Posteriormente, se define a un punto crítico como aquel donde *f(x) = O* ó *f(x)* no existe, esto permite analizar donde una función tiene un máximo o mínimo relativo. El autor considera esto como fundamental ya que si *f(x)* es igual a cero y la derivada cambia de positiva a negativa, entonces se trata de un máximo, mientras que si *f(c)* es igual a cero y la derivada *cambia* de negativa a positiva se trata de un mínimo; además para identificar de mejor manera, el autor hace manifiesto que es fácil identificar un punto crítico ya que la recta tangente en ese punto será paralela al eje x.

Considerando estás propiedades, el autor plantea un primer método para calcular los máximos y mínimos de una función que son establecidos como un algoritmo y que consiste básicamente en lo siguiente:

1. *Se halla la primer derivada de la función dada.*
2. *Se iguala la primer derivada a cero y se resuelve la ecuación resultante determinándose los valores críticos de la variable.*
3. *Se consideran los valores anteriores uno por uno, con la finalidad de hallar los signos de la primer derivada para valores un "poco menor" y después un "poco mayor" para establecer el criterio correspondiente.*

Haciendo una recapitulación, tenemos que la introducción al tema, se realiza mediante argumentos de tipo gráfico concluyendo con un algoritmo, posteriormente plantea ejercicios que son solucionados en el sistema de representación algebraico para finalmente esbozar la gráfica de la función en cuestión, la cual es obtenida mediante el cálculo de algunos pares de abscisa-ordenada para finalmente, en conjunto con los valores críticos, obtener el esbozo de la gráfica. Esta misma secuencia prevalece a lo largo del texto.

<u>Puntos de inflexión y sentido de concavidad.</u>

El autor plantea que *"al localizar los intervalos en los que la derivada de una función crece o decrece, nos permite indicar sobre la gráfica en donde se curva hacia arriba o hacia abajo; lo anterior se conoce como concavidad".* A partir de esto y con la ayuda de un gráfico, el autor *explica* los tipos de concavidad, argumentado que si una curva queda por debajo de sus tangentes se dice que el arco es cóncavo hacia abajo, mientras que si una curva queda por encima de ellas, se dice que el arco es cóncavo hacia arriba y al cambio de concavidad se llama de punto de inflexión.

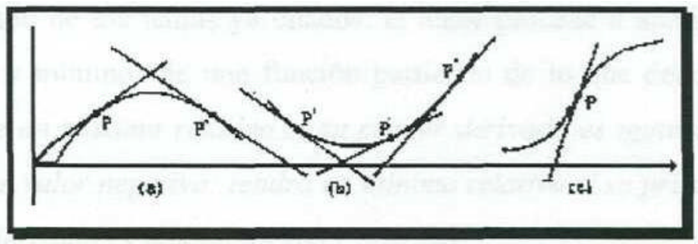


Figura 6

El autor considera que si la gráfica de la función está dada, resulta fácil observar la concavidad de la curva y por lo tanto a partir de éste, comprender las definiciones formales estableciendo el criterio de concavidad: *sea y = f(x) una función cuya gráfica es cóncava hacia arriba si su segunda derivada es positiva; es cóncava hacia abajo si su segunda derivada es negativa* mientras que un punto de inflexión es aquel que separa arcos de una curva que tiene concavidad en sentidos opuestos. Es a partir de estas observaciones que se plantea un algoritmo para hallar los puntos de inflexión y el sentido de concavidad de una función:

1. *Se obtiene la segunda derivada de una función dada.*
2. *Se iguala a cero la segunda derivada y se resuelve le ecuación resultante, considerando únicamente las raíces reales.*
3. *Se analizan los valores de las raíces obtenidas, primero para valores un poco antes y un poco después y si el signo de la segunda derivada cambia entonces existe un punto de inflexión. Cuando la segunda derivada es positiva, la curva es cóncava hacia arriba; mientras que cuando la segunda derivada es negativa, la curva es cóncava hacia abajo.*

Después de presentar este algoritmo, se presentan ejemplos ilustrativos que tienen la misma secuencia que los temas anteriores y que son ejercicios algebraicos y al final de los cuales se obtiene la gráfica de la función, la cual se construye con los mismos criterios que son la obtención de pares abscisa-ordenada, ubicación de estos puntos en el plano cartesiano y finalmente el trazo de la curva.

A raíz de la exposición de los temas ya citados, el autor procede a analizar ahora el segundo método de máximos y mínimos de una función partiendo de lo que denomina teorema: *"Una función y = fix) tiene un máximo relativo si su primer derivada es igual a cero y su segundad derivada es igual a un valor negativo; tendrá un mínimo relativo si su primera derivada es igual a cero y su segunda derivada es igual a un valor positivo'*[1]"

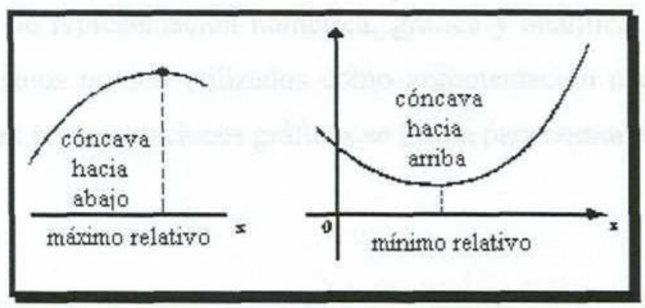


Figura 7

Después de este teorema, tenemos que el autor concluye con un algoritmo para encontrar máximos y/o mínimos y que es el siguiente:

1. *Se obtiene la primera derivada de la función dada.*
2. *Se iguala la primera derivada a cero y se resuelve la ecuación resultante, considerándose únicamente las raíces reales.*
3. *Se obtiene la segunda derivada.*
4. *Sustituir en la segunda derivada, en lugar de la variable, cada uno de los valores críticos obtenidos. Si el valor resultante es negativo, entonces se trata de un máximo para el valor considerado, mientras que si el valor resultante es un número positivo, la función presenta un mínimo para el valor crítico considerado.*

Es importante notar que la observación que hace en este método el autor, carece de algún tipo de argumentación, sea verbal, analítico o gráfico, y que es la aclaración de que este método no es aplicable cuando la segunda derivada es igual a cero o no existe, siendo necesario aplicar el primer método.

Los ejercicios que plantea tienen la misma secuencia, se parte de la representación algebraica de una función, se desarrollan operaciones en esa misma representación y finalmente se obtiene el resultado, para complementar el ejercicio, se construye la gráfica de la función de la misma manera.

Esto evidencia el tratamiento dentro del sistema de representación algebraico en el libro de texto, en tanto los sistemas de representación numérica, gráfica y analítica, así como la transición y conversión de los mismos no son utilizados como argumentación o como ejercitación para el estudiante, el uso de las representaciones gráficas se limita para comunicar una idea.

CAPITULO IV

ANÁLISIS DE RESULTADOS

IV.1 Aplicación del cuestionario de exploración.

El cuestionario de exploración fue aplicado en forma individual a dieciséis profesores de matemáticas representando a cada uno de los planteles del Colegio de Estudios Científicos del Estado de Hidalgo, subsistema de educación media superior, el cual fue aplicado sin previo aviso y con una duración en la prueba de 90 minutos. De los resultados se desprende el siguiente análisis:

IV.2 Análisis de resultados del cuestionario de exploración.

Pregunta 1

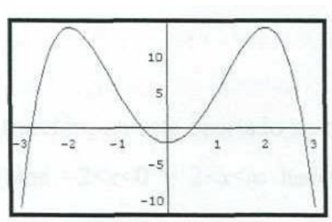
El objetivo de esta pregunta consiste en explorar si los profesores pueden identificar, en una gráfica de *f[x),* las intervalos para los cuales la función es creciente, decreciente o bien tiene puntos de estabilidad, dados en términos analíticos.

La gráfica siguiente corresponde a la función *f(x).* Subraye la opción u opciones que satisfagan la pregunta: ¿ Para qué intervalos se cumple que:

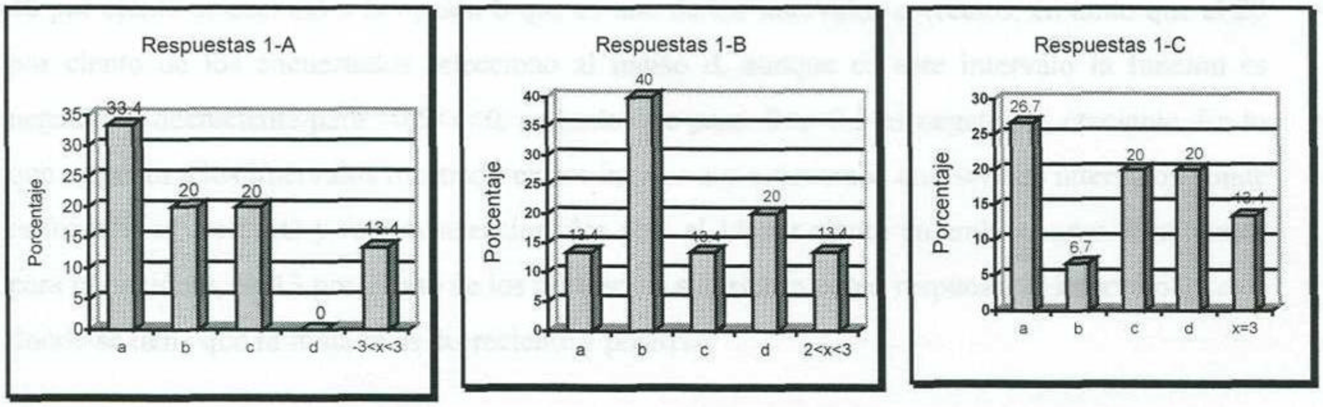
l.A) *fix+h)-J(x)>0,* parah>0? a)-3<x<-2 b)-2<x<0 c)0<x<2 d)-3<x<-0.5 e) otro: ____

l.B) *J(x+h)-flx)<0,* parah>0? a)-3<x<-2 b)-2<x<0 c) 0 < x < 2 d)-0.5<x<0.5 e) otro:_____

1 .C) *fix* +h) *-fix)* = 0, para h > 0? a) x = -3 b) *x* = - 0.5 c) *x* = 0 d) x = 2 e) otro:________



Los resultados para cada una de las opciones son los siguientes:



<u>Respuestas a la pregunta 1 -A</u>

En esta primera parte de la pregunta, se analizan los intervalos de *x* para los cuales la función cumple la condición *f(x+h)-f(x)* > 0 (función creciente), siendo -<x<x<-2 y 0<x<2 donde se cumple dicha condición, sin embargo, aún cuando en el intervalo mostrado en el inciso a se cumple parcialmente la condición, tenemos que un 33 por ciento de los profesores eligió a esta opción; además es importante señalar que para este intervalo, la función es positiva. En cuanto al intervalo de la opción b, en la cual se cumple la condición *f(x+h)-f(x)* < 0 (función decreciente), fue elegida en un 20 por ciento; aquí tenemos que la función es decreciente pero además es, en un segmento, positiva. Para la opción c, se muestra un intervalo en el cual la condición *f(x+h)-f(x)* > 0 se cumple perfectamente y sólo fue elegida por el 20 por ciento de los profesores. La opción d no fue seleccionada por alguno de los profesores. Finalmente, en la opción e se le pidió al profesor anotar un intervalo que a su criterio cumpliera con la condición, presentándose que en un 13 por ciento de las ocasiones, la respuesta fue el intervalo -3<x<3, donde de acuerdo con la gráfica de la función, se tiene que la función es positiva en la mayor parte del intervalo.

<u>Respuestas a la pregunta 1-B</u>

Continuando con el análisis de la función, en este apartado se busca evidenciar si los profesores pueden identificar que los intervalos -2<x<0 y 2<x<8 hacen que se satisfaga la condición

$f(x+h)-f(x) < 0$ (función decreciente), para lo cual, tenemos que de acuerdo con los resultados, el 40 por ciento seleccionó a la opción b que es uno de los intervalos correctos, en tanto que el 20 por ciento de los encuestados seleccionó al inciso d, aunque en este intervalo la función es negativa y decreciente para $-0.5<x<0$, en tanto que para $0<x<0.5$ es negativa y creciente. En lo que respecta a los intervalos mostrados en los incisos a y c, tenemos que son los intervalos donde la función es creciente y fueron seleccionados por el 13 por ciento en ambos casos. Finalmente para la opción e, un 13 por ciento de los profesores sugirieron como respuesta al intervalo $2<x<3$, donde se tiene que la función es decreciente y positiva.

Respuestas a la pregunta 1 -C

En esta sección, se entiende que los puntos estacionarios se tienen cuando x toma los valores de -2, 0 y 2, sin embargo, los profesores consideran en un 20 por ciento que tanto en el inciso c como el d se tienen puntos de estabilización; el 27 por ciento considera que en $x = -3$ existe un punto estacionario y el 7 por ciento asume que se tiene cuando $x = -0.5$, finalmente el 13 por ciento propone como respuesta cuando x toma el valor de 3; estos últimas tres alternativas de los profesores, si se analizan, corresponden a los ceros de la función y no a los puntos de estabilización.

En resumen, tenemos que de los profesores que identificaron puntos estacionarios, una quinta parte lo identificó en $x = 0$ y otra quinta parte en $x = 2$, pero ningún profesor identificó simultáneamente todos los puntos estacionarios; por otra parte, al parecer, un tercio de los profesores considera que los ceros de una función son equivalentes a los puntos estacionarios. En tanto que un tercio no contestó la pregunta.

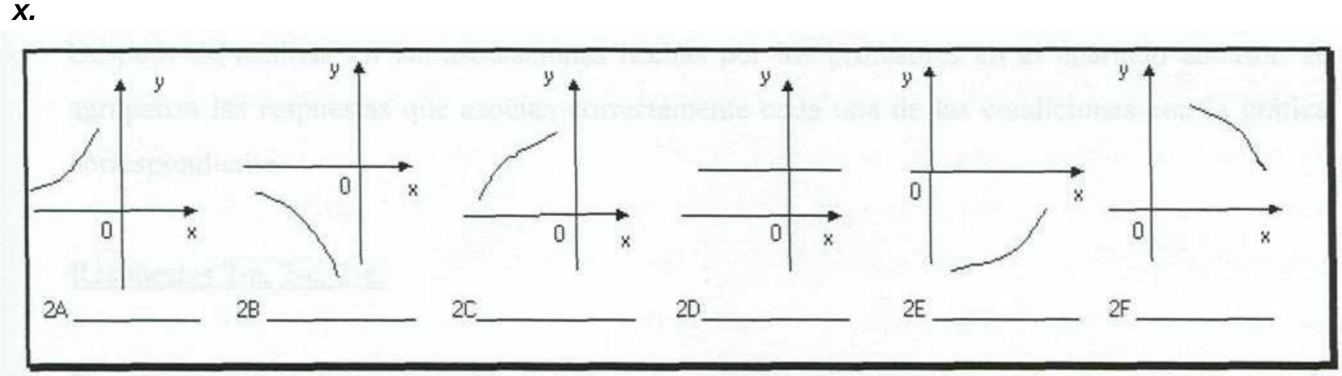
Después del análisis parcial de los resultados de cada uno de los tres apartados que corresponden a la pregunta 1, se halló que sólo dos de los quince profesores seleccionaron las opciones correctas en los tres rasgos solicitados, a saber, $f(x+h)-f(x) > 0$ (función creciente), $f(x+h)-f(x) < 0$ (función decreciente) y $f(x+h)-f(x) = 0$ (puntos de estabilización); en tanto que el resto de los profesores no manifiesta un patrón en sus respuestas, sino que presentan diversidad en las mismas, posiblemente no tienen argumentos sólidos que les permitan tener coherencia en las respuestas.

Esto hace suponer que los profesores confunden un punto estacionario con el cero de una función, además existe confusión en los encuestados en cuanto a que posiblemente asumen que: la expresión $f(x+h)-f(x)<0$ indica que la función es negativa y que por otra parte la expresión $f(x+h)-f(x)>0$ indica que es positiva. Además de acuerdo con los resultados analizados en los incisos **a** y **e** del apartado 1-A, existe proclividad en algunos profesores a confundir crecimiento con positividad en una función, en tanto que de acuerdo con los incisos **b** y **d** de los apartados 1-B y 2-D respectivamente, posiblemente algunos profesores consideran que una función es creciente o decreciente en un intervalo sólo si esta es positiva; y finalmente tenemos que otro sector de los encuestados posiblemente asume una relación entre decrecimiento y negatividad de una función (inciso d, apartado 1-B).

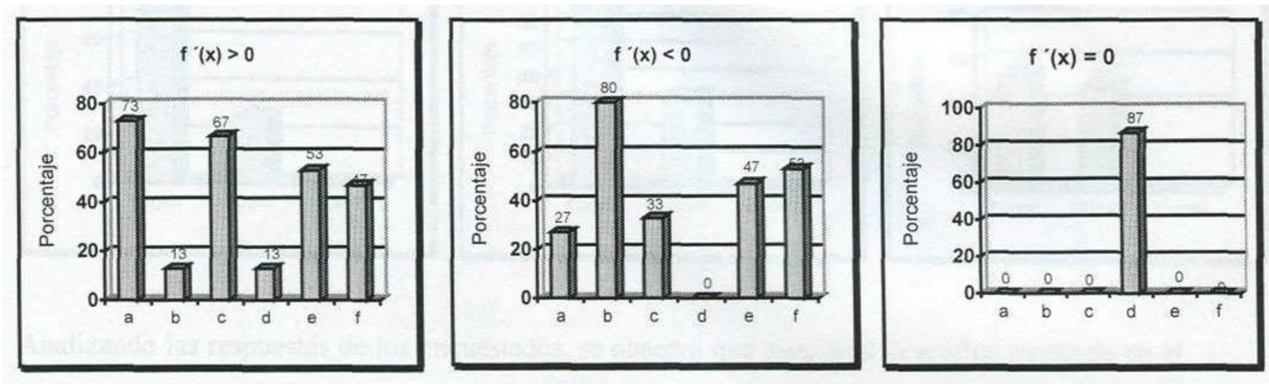
Pregunta 2

Al igual que en la pregunta 1, se consideran los mismos rasgos del comportamiento variacional de la función, sólo que ahora se trabaja con los sistemas de representación analítico y gráfico, así como el tratamiento; el diseño de la pregunta se basa en la derivada como principal criterio de decisión y análisis. La pregunta se planteó en los siguientes términos.

Escriba, *f\x)>0; f\x)<0,* o bien: *f'(x)=O,* donde las gráficas satisfagan la condición, para toda *x.*



Las asociaciones que los profesores establecieron entre las expresiones $f'(x)>0$ (función creciente), $f'(x)<0$ (función decreciente), o bien $f(x)=Q$ (función constante o punto estacionario) respecto a cada una de las opciones, se muestran a continuación.

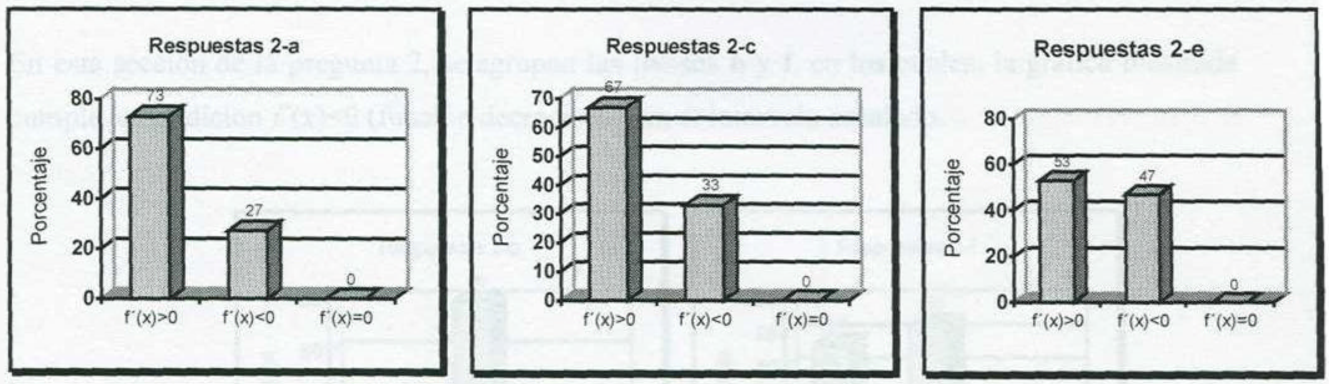


De acuerdo con esto, tenemos que los profesores asocian la expresión $f'(x)>0$ con las gráficas mostradas en los incisos a, c, e y f, en un 73, 67, 53 y 47 por ciento respectivamente, aun cuando en este último, para el intervalo mostrado, la función es decreciente pero además es positiva. En cuanto a la expresión analítica $f'(x)<0$, fue asociada por los encuestados con los incisos b, e y f en 80, 47 y 52 por ciento respectivamente, de estos porcentajes resalta el correspondiente a la gráfica mostrada en el inciso e, donde la función es creciente pero negativa, además, para los incisos a y c (27 y 33 por ciento), se tiene que las funciones son crecientes, con ordenadas positivas y abscisas negativas. Por otra parte, la expresión analítica fue asociada con la gráfica donde la función es constante pero positiva en un 87 por ciento, y como creciente por un 13 por ciento de los encuestados.

Después de analizar en las asociaciones hechas por los profesores en el apartado anterior, se agruparon las respuestas que asocian correctamente cada una de las condiciones con la gráfica correspondiente.

<u>Respuestas 2-a. 2-c. 2-e.</u>

En esta sección de la pregunta 2, se agrupan las incisos a, c y e, en los cuales, la gráfica mostrada cumple la condición $f'(x)>0$ (función creciente) en el intervalo señalado.

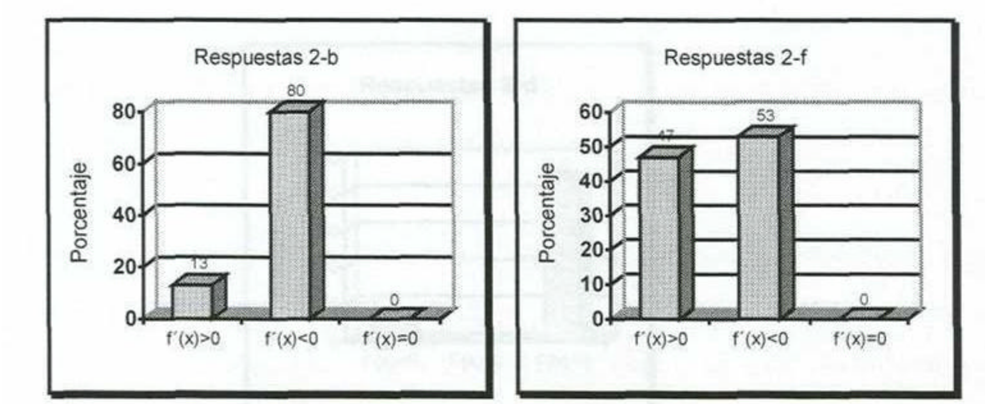


Analizando las respuestas de los encuestados, se observa que asociaron la gráfica mostrada en el inciso a con la condición/'(x)>0 (función creciente) en un 73 por ciento, por un 27 por ciento la asoció *con f'(x)<0,* (función decreciente); mientras tanto, en el inciso c, el 67 por ciento asume que la condición correcta es/'(x)>0, al mismo tiempo que el 33 por ciento asocia a la gráfica mostrada con f'(x)<0; en lo que respecta al inciso e, el 53 por ciento de los encuestados considera que la función es creciente, en tanto que el 47 por ciento de los profesores relacionó la condición referente a una función decreciente, lo que de alguna manera manifiesta la confusión en la asociación hecha por los encuestados.

Si se analizan los porcentajes de las asociaciones hechas por los profesores referentes a las gráficas que cumplen con la condición *f'(x)>0,* se advierte que no se presenta diferencia sustancial en los incisos a y c (73 y 67 por ciento), sin embargo, respecto al inciso e (53 por ciento), tenemos que la diferencia es de 20 puntos porcentuales respecto al inciso a. Por lo que al analizar detenidamente las gráficas presentadas en cada uno de los incisos, se puede apreciar que tanto en a como en c, la gráfica satisface la condición/'(x)>0 pero además, la función es positiva con abscisa negativas; en tanto en e, se cumple de igual modo la condición, pero la función es negativa con abscisas positiva, de acuerdo con todo esto, es posible que un sector de los profesores considere que/'(x)<0 es equivalente *a f(x)<0,* por un lado y por otro, es factible que consideren que una función cumple la condición *f(x)<0* cuando su gráfica en el semieje negativo de las abscisas.

Respuestas 2-b y 2-f.

En esta sección de la pregunta 2, se agrupan las incisos b y f, en los cuales, la gráfica mostrada cumple la condición/'(x)<0 (función decreciente) en el intervalo señalado.

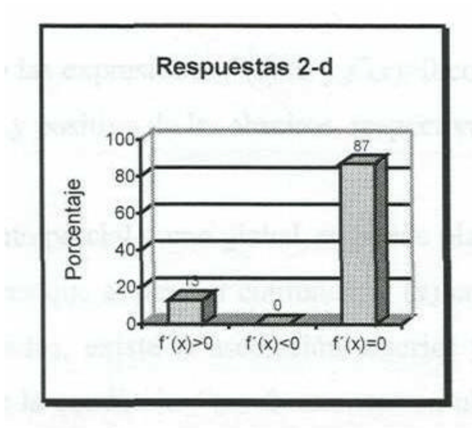


En el caso del inciso b, los profesores asociaron en un 80 por ciento a la condición *f(x)<0* con la gráfica mostrada, en tanto que un 13 por ciento optó por relacionar a la gráfica con la expresión f'(x)>0, como se podrá observar, la diferencia entre la asociación de la gráfica con la condición de decrecimiento respecto al crecimiento es considerable. En cuanto al inciso f, tenemos que no existe diferencia sustantiva en la asociación de la gráfica presentada ya sea con/'(x)<0 o bien con/'(x)>0, (53 contra 47 por ciento respectivamente).

Al analizar las gráficas presentadas, se aprecia que en b que la gráfica satisface la condición *f(x)<0,* pero además las ordenadas y abscisas son negativas, en tanto que en f la gráfica mostrada cumple de igual modo la condición *f(x)<0,* sin embargo tanto las ordenadas como las abscisas son positivas. De acuerdo con los resultados analizados en el párrafo anterior y el análisis del comportamiento variacional de las funciones, se pueden plantear dos conjeturas, primero, es posible, de acuerdo con la similitud en los porcentajes de las asociaciones analizadas en f, que cierto sector de los profesores conciba una relación entre f'(x)>0 y *f[x)>0,* es decir, que tal vez exista confusión entre *f(x)* y f(x); segundo, si esto es cierto, posiblemente la asociación manifestada en b (80 por ciento asociando el decrecimiento con la gráfica de la función), no se deba a la condición de f'(x)<0 y sino que *allí,J{x)* es tal *que f(x)<0* a la posible confusión entre la función primitiva y su derivada.

Respuesta 2-d.

En complemento a lo anterior, el inciso d considera la asociación entre *f'(x)=0* y la gráfica mostrada, la cual es positiva pero constante, por lo cual no tiene variación en todo el intervalo mostrado.



El 87 por ciento de los profesores relacionó la condición f'(x)=0 con la gráfica mostrada en d, en tanto que el 13 por ciento vinculo a la misma gráfica con la condición f'(x)>0. Es posible que cierto sector de los profesores hayan asociado esta última condición debido a que f'(x)>0. <

Después de la serie de análisis parciales, ahora se procede a una exploración global de esta pregunta, primeramente se determinó que el porcentaje de profesores que asociaron simultáneamente la condición f'(x)>0 con los incisos **a, c** y **e** fue del 46 por ciento; para la condición f'(x)<0, los profesores la asociaron con los incisos **b** y **f** en un 73 por ciento; finalmente el 86 por ciento, relacionó la expresión analítica f'(x)=O con la opción **d**.

En síntesis, se desprende que para la pregunta dos, del total de los profesores:

- Un 40 por ciento parece establecer relaciones aceptables entre las condiciones analíticas dadas y su correspondientes representaciones gráficas, es decir, relacionó simultáneamente las tres condiciones: **a, c** y **e** con *f(x)>0,* **b** y **f** con *f'(x)<0* y finalmente **d** con f'(x)=0.

- El 20 por ciento de los profesores asoció f'(x)>0 con los incisos en los cuales, para el intervalo mostrado, la gráfica de la función presentada se ubica en el semieje positivo de las ordenadas; igual porcentaje asocian la condición *f(x)<0* con la gráfica que se ubica en el semieje negativo de las ordenadas.

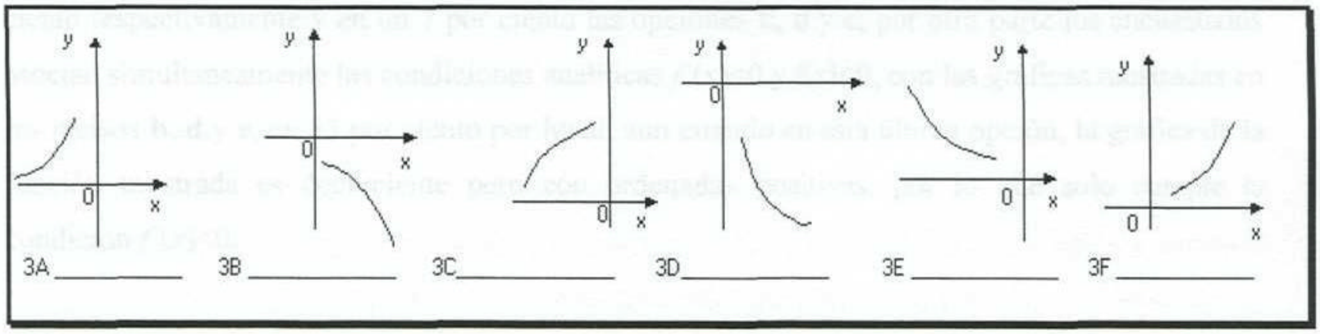
- El 13 por ciento asoció las expresiones f'(x)<0 *y f(x)>0* con las gráficas que se ubica en el semieje negativo y positivo de las abscisas, respectivamente.

De acuerdo con los análisis tanto parcial como global, se puede plantear dos hipótesis, la primera, existe cierto grupo de profesores que al parecer confunden *f(x)* con *f{x)* segunda, es posible que para un sector de los encuestados, exista la asociación anterior y además consideren que si la gráfica de una función cumple la condición f'(x)>0 entonces su ubicación será en los cuadrantes donde las abscisas asuman un valor positivo, en tanto que si se cumple la condición f'(x)<0, entonces la ubicación de la gráfica será en los cuadrantes donde las abscisas conciban valores negativos.

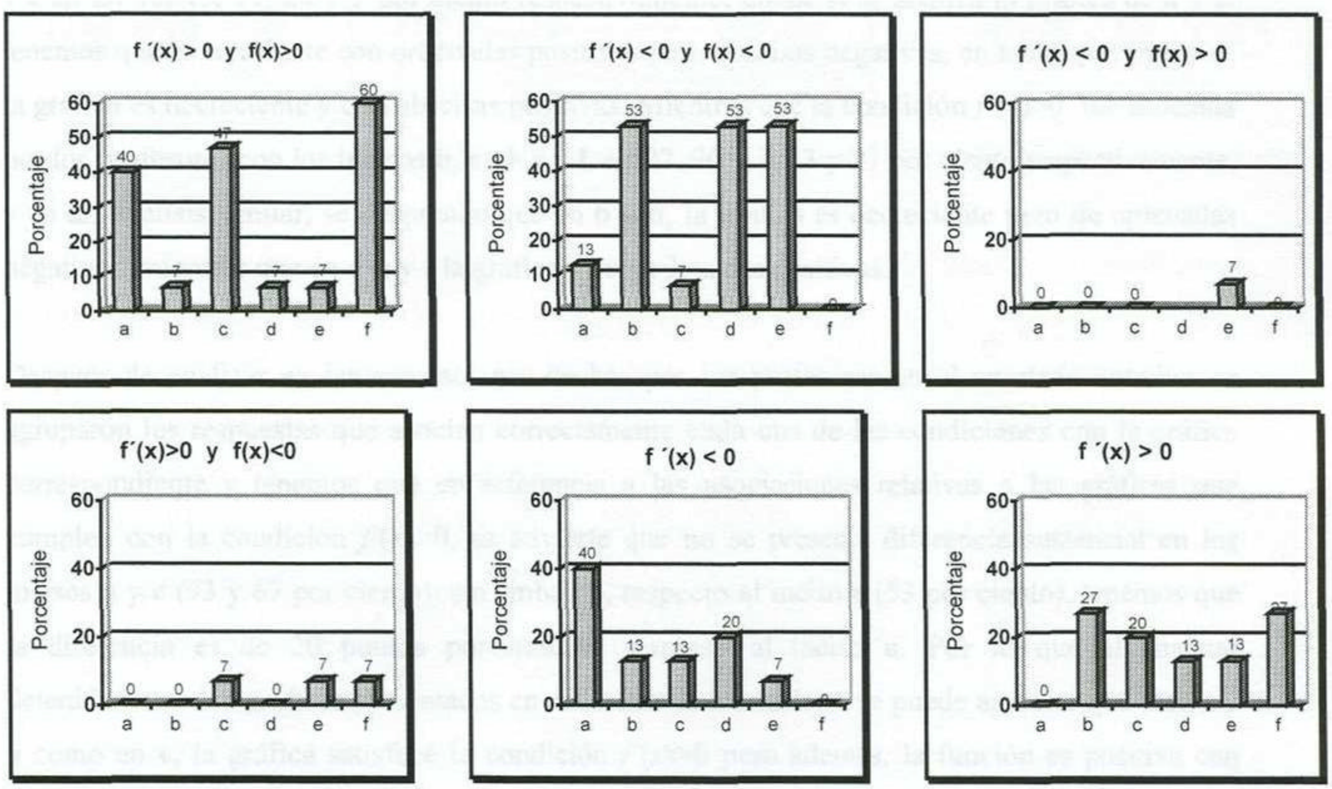
Pregunta 3

En esta pregunta, se consideran los sistemas gráfico y analítico, y la conversión entre ambos sistemas de representación, con la variante de que ahora se consideran dos rasgos del comportamiento variacional en forma simultánea, a saber, función creciente y positiva o bien función decreciente y negativa, siendo importante el uso de la conjunción *y;* siendo la derivada, el principal argumento. La pregunta textualmente fue presentada así.

Escriba: *f\x)>0* y *l*(JC)>0, o bien: *f\x)<0* y *f(x)<0,* donde las gráficas satisfagan las condiciones.



Las asociaciones de las expresiones analíticas de f(x)>0 y f(x)>0 (función creciente y positiva) o bien f(x)<0 y f(x)<0 (función decreciente y negativa), respecto a cada una de las opciones, se muestran a continuación. Es importante mencionar que aunque solamente se les pidió a los profesores el cumplimiento de las dos condiciones simultáneamente que se proporcionaron, algunos encuestados escribieron otras asociaciones.



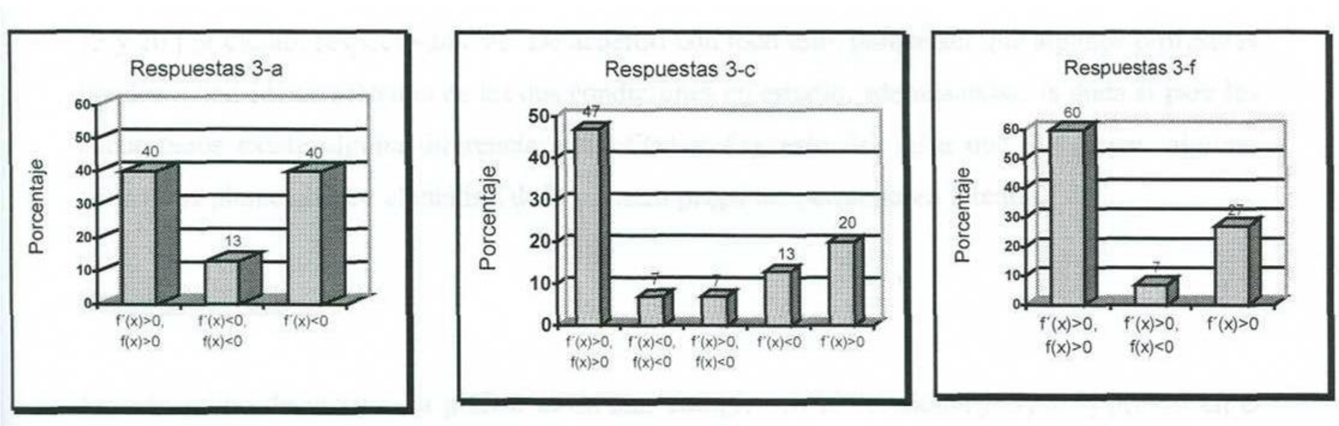
De acuerdo con esto, tenemos que los profesores asocian simultáneamente las condiciones analíticas f'(x)>0 *y f(x)>0,* con las gráficas mostradas en los incisos **a, c** y **f**, en un 40, 47 y 60 por ciento respectivamente y en un 7 por ciento las opciones **b, d** y **e**; por otra parte los encuestados asocian simultáneamente las condiciones analíticas f'(x)<0 *y f(x)<0,* con las gráficas mostradas en los incisos **b, d** y **e**, en 53 por ciento por igual, aun cuando en esta última opción, la gráfica de la función mostrada es decreciente pero con ordenadas positivas, por lo que solo cumple la condición f'(x)<0.

Si bien las expresiones analíticas ya citadas fueron las únicas que se solicitaron, los profesores realizaron otras asociaciones que son detalladas a continuación. Primeramente las combinaciones de las condiciones f'(x)>0 y f(x)<0 así como f'(x)<0 y f(x)>0 fueron relacionadas con la gráfica de los incisos e por un lado, y con las opciones **c, e** y **f** por otro, en un 7 por ciento por igual; sin embargo las relaciones mas importantes son aquellas donde los profesores asociaron solo una de las dos condiciones, primeramente, tenemos que la condición f'(x)<0, fue asociada con **a, b, c, d** y **e** en un 40, 13, 13, 20 y 7 por ciento respectivamente, donde si se analiza la gráfica de **a** y **c**, tenemos que es creciente con ordenadas positivas pero abscisas negativas, en tanto que en **b** y **d**, la gráfica es decreciente y con abscisas positivas. Mientras que la condición f''(x)>0 fue asociada por los profesores con los incisos **b, c, d, e** y **f**, en 27, 20, 13, 13 y 27 por ciento respectivamente, y en un análisis similar, se desprende que en **b** y **d**, la gráfica es decreciente pero de ordenadas negativas, mientras que en **c, e** y **f** la gráfica tiene ordenadas positivas.

Después de analizar en las asociaciones hechas por los profesores en el apartado anterior, se agruparon las respuestas que asocian correctamente cada una de las condiciones con la gráfica correspondiente y tenemos que en referencia a las asociaciones relativas a las gráficas que cumplen con la condición f'(x)>0, se advierte que no se presenta diferencia sustancial en los incisos **a** y **c** (73 y 67 por ciento), sin embargo, respecto al inciso **e** (53 por ciento), tenemos que la diferencia es de 20 puntos porcentuales respecto al inciso **a**. Por lo que al analizar detenidamente las gráficas presentadas en cada uno de los incisos, se puede apreciar que tanto en **a** como en **c**, la gráfica satisface la condición f'(x)>0 pero además, la función es positiva con abscisa negativas; en tanto en **e**, se cumple de igual modo la condición, pero la función es negativa con abscisas positiva, de acuerdo con todo esto, es posible que un sector de los profesores considere que f'(x)<0 es equivalente *a f(x)<0,* por un lado y por otro, es factible que consideren que una función cumple la condición f'(x)<0 cuando su gráfica en el semieje negativo de las abscisas.

<u>Respuesta 3-a, 3-c y 3-f</u>

En esta sección de la pregunta 3, se agrupan las incisos **a, c** y **f**, en los cuales, la gráfica mostrada cumple la condición f'(x)>0 y *f(x)>0* (función creciente y positiva) en el intervalo señalado.



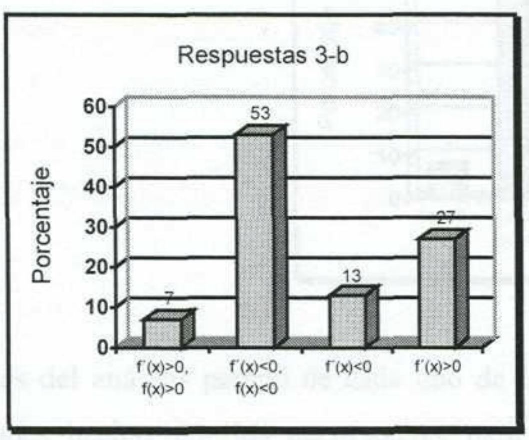
Para la gráfica mostrada en **a**, el 40 por ciento de los encuestados asoció las condiciones simultáneas f'(x)>0 y f(x)>0 (función creciente y positiva), en tanto que el 13 por ciento asoció las condiciones f'(x)<0 y f(x)<0 (función decreciente y negativa) y finalmente un 40 por ciento solo asoció la condición de/'(x)<0. En referencia a la opción c, se desprende que el 47 por ciento de los profesores relacionan las condiciones f'(x)>0 y/(x)>0 con la gráfica mostrada, mientras que el 20 y 13 por ciento asocian solamente la condición f'(x)>0 y f'(x)<0 respectivamente. En cuanto al inciso **f**, la relación de las condiciones f'(x)>0 *y f(x)>0* se presenta en un 60 por ciento contra el 27 por ciento de la asociación parcial de la condición/'(x)>0.

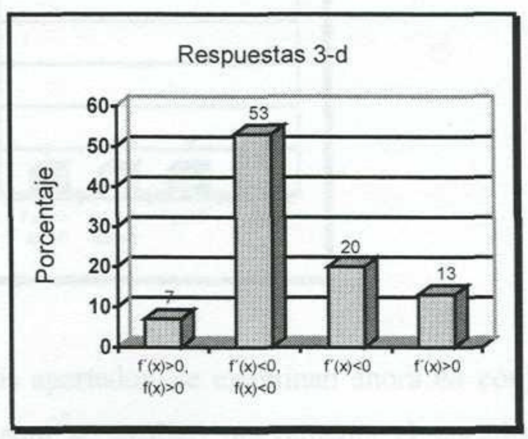
Si se analizan los porcentajes de las asociaciones hechas por los profesores referentes a las gráficas que cumplen con las condiciones f'(x)>0 y *f(x)>0,* se advierte que no se presenta diferencia sustancial en los incisos **a** y **c** (40 y 47 por ciento), sin embargo, respecto al inciso **f**

(60 por ciento), tenemos que la diferencia es de 20 puntos porcentuales respecto al inciso **a**. Por lo que al analizar detenidamente la gráfica presentada en cada uno de los incisos, se puede apreciar que en a, **c** y **f**, la gráfica satisface las condiciones, sin embargo en las dos primeras, las abscisas son negativas, mientras que en la tercera las abscisas son positivas; además coincidentemente las tres gráficas que son crecientes son también positivas. En otro orden de ideas, es alto el porcentaje de profesores que para **a** consideró solamente la condición $f(x)<0$ ya que asciende a un 40 por ciento y dado que la gráfica es creciente pero con abscisas negativas; en contraparte, se desprende que en **f**, el 27 por ciento de los profesores asoció solamente la condición/'(x)>0, sin embargo en este gráfica la función tiene ordenadas y abscisas positivas; en tanto que en **c**, los porcentajes referentes a una sola condición, ya sea $f'(x)>0$ ó $f'(x)<0$ fueron del 13 y 20 por ciento, respectivamente. De acuerdo con todo esto, parece ser que algunos profesores tienden a considerar solo una de las dos condiciones en estudio, además existe la duda si para los encuestados existe alguna diferencia entre *f(x)* y f(*x*), esto debido a que al parecer, algunas conjeturas planteadas en el análisis de la primera pregunta, permanecen latentes.

Respuestas 3-b, 3-d.

En este grupo de incisos, la gráfica mostrada, cumple con la condición *f'(x)<0* y *f{x)<0* en el intervalo mostrado.

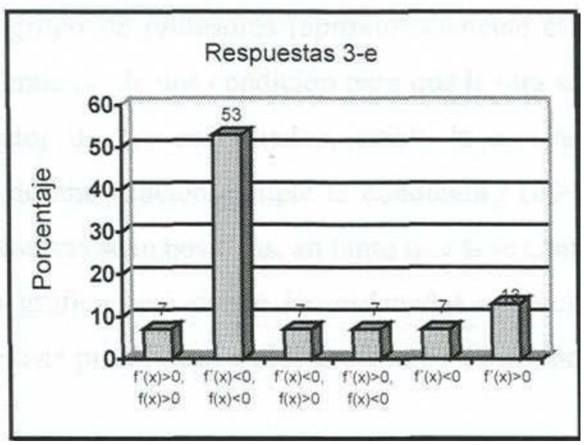




Para el inciso b, el 53 por ciento de encuestados asoció las condiciones *f(x)<0 y f(x)<0* con la gráfica mostrada, porcentaje que contrasta con el 7 por ciento que la relacionó con las condiciones $f(x)>0$ y $f(x)>0$, sin embargo el 27 por ciento vinculó la expresión analítica $f'(x)>0$ en tanto que el 13 por ciento lo hizo con $f'(x)<0$, es importante considerar que la gráfica mostrada es decreciente pero además con ordenadas negativas y abscisas positivas. Un comportamiento similar se observa en la gráfica que se ilustra en **d**, y de igual forma, la condición $f'(x)<0$ *y* $f(x)<0$ fue atribuida en un 53 por ciento de las ocasiones, mientras que el 20 por ciento de los profesores relacionó solamente la condición $f'(x)<0$ por separado, en cambio un 13 por ciento vinculó la expresión analítica $f'(x)>0$.

<u>Respuestas 3-e.</u>

Finalmente, la gráfica de la función mostrada en el inciso **e**, se consideró en un principio que carecería de asociaciones por parte de los profesores, dado que las condiciones que satisface son $f'(x)<0$ *y* $f(x)>0$, es decir, que la gráfica es decreciente pero positiva, además se observa que sus abscisas son negativas. No obstante, lo anterior, los profesores realizaron las siguientes asociaciones.



Después del análisis parcial de cada uno de los apartados, se examinan ahora en conjunto las relaciones hechas por los encuestados, para esto se analizó nuevamente el cuestionario de exploración, y los resultados son los siguientes:

- El 44 por ciento asoció simultáneamente tanto las condiciones f'(x)>0 y f(*x)>0* (creciente y positiva) con las opciones **a, c** y **f**, como las expresiones analíticas f'(x)<0 *y f(x)<0* con las gráficas de los incisos **b** y **d;** aunque en lo que respecta a la opción **e**, ninguna de las condiciones satisfacía el comportamiento variacional de la función, sin embargo los profesores manifestaron alguna asociación.

- El 33 por ciento de los profesores, tal parece que asocian una de las dos condiciones ya sea f'(x)>0 y f(x)>0 si la gráfica de la función está en el semieje positivo de las ordenadas o bien f'(x)<0 *y f{x)<0* si se ubica en el semieje negativo, dando por hecho que la otra condición se cumple.

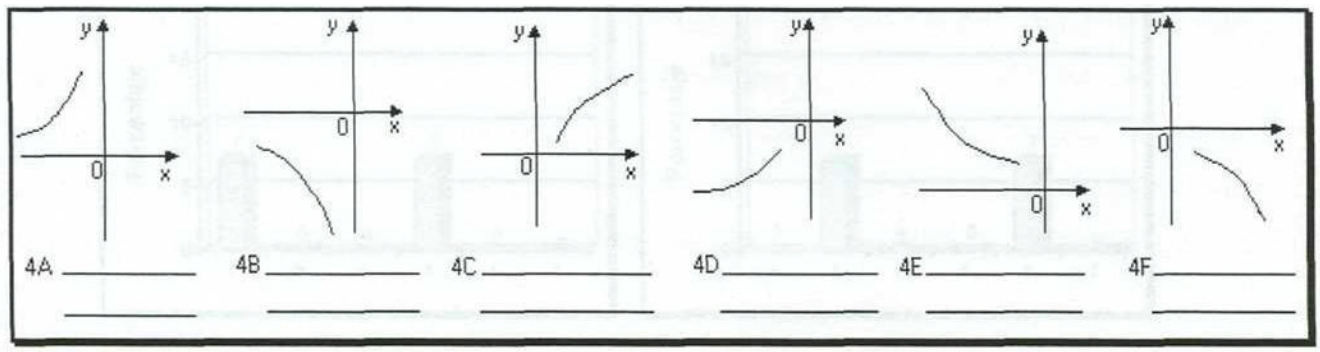
- Otro 18 por ciento, al parecer, asocia solamente una de las dos expresiones analíticas, mostrando cierto sesgo por f'(x)<0 *y f(x)<Q* si la gráfica de la función se localiza en el semieje negativo de las abscisas o bien por f'(x)>0 *y f{x)>0* si se ubica en el semieje positivo de las abscisas, razón suficiente para afirmar la otra condición.

De acuerdo el análisis tanto parcial como global, se puede plantear dos hipótesis, la primera, parece ser que existe cierto grupo de profesores (aproximadamente el 50 por ciento) para los cuales, es suficiente el cumplimiento de una condición para que la otra se de por hecho; segunda, es posible que para un sector de los encuestados, exista la asociación anterior y además consideren que si la gráfica de una función cumple la condición f''(x)>0 entonces su ubicación será donde las ordenadas o abscisas sean positivas, en tanto que si se cumple la condición f'(x)<0, entonces la ubicación de la gráfica será donde las ordenadas o abscisa sean negativas. Esto refuerza la hipótesis de que existe proclividad en los profesores a confundir *f[x)* con f''(x).

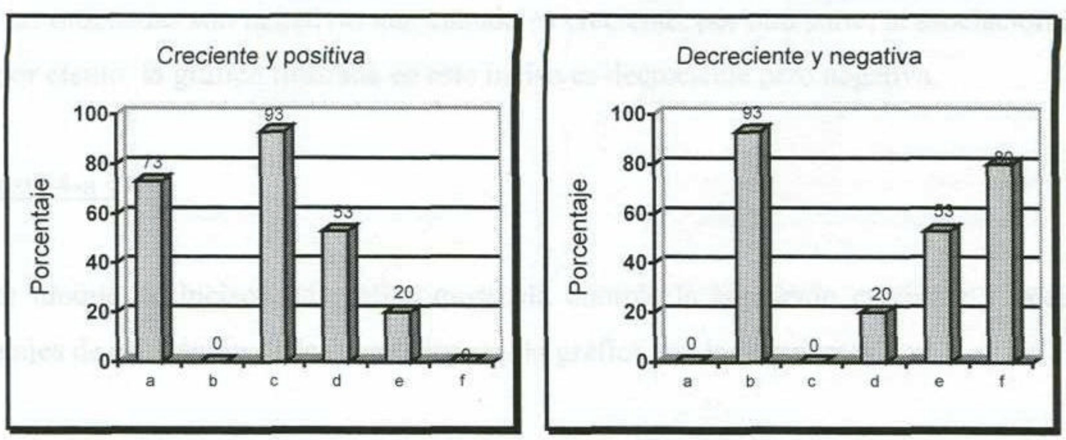
Pregunta 4.

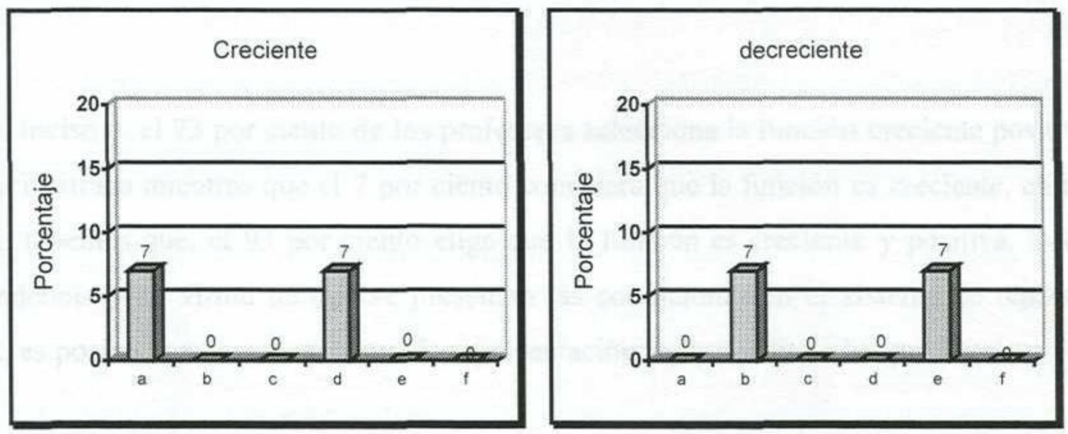
En la pregunta cuatro, se tiene la misma intención que en la anterior, sólo que ahora los sistemas semióticos de representación utilizados son el verbal y el gráfico pero considerando la conversión del sistema verbal al gráfico con dos condiciones simultáneamente.

Escriba sobre las raya correspondiente: función creciente y positiva, o bien, función decreciente y negativa, según el comportamiento de sus gráficas.



Las asociaciones de las expresiones verbales función creciente y positiva o bien función decreciente y negativa, respecto a cada una de las opciones, se muestran a continuación. Es importante mencionar que aunque sólo se les pidió a los profesores el cumplimiento de las dos condiciones simultáneamente que se proporcionaron, algunos encuestados escribieron otras asociaciones.

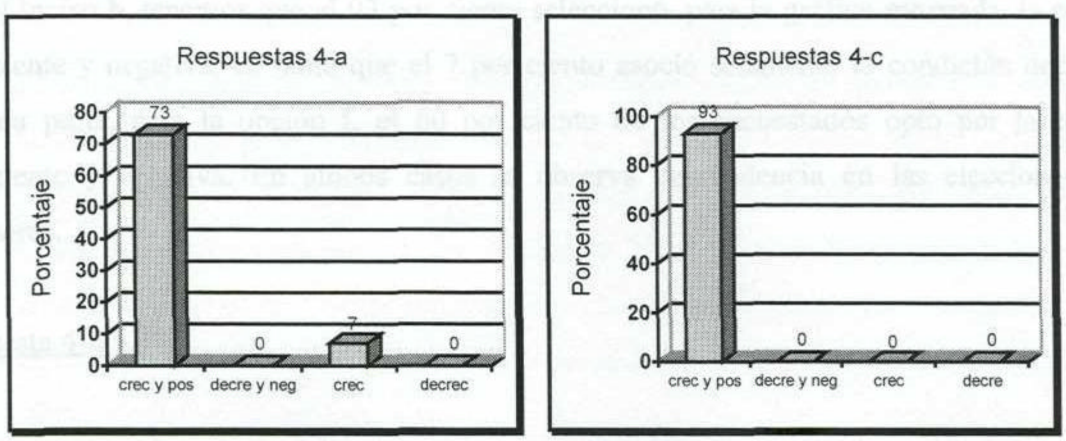




Los profesores asociaron la expresión *creciente y positiva* en las opciones **a** y **c**, en un 73 y 93 por ciento respectivamente, en tanto que la opción **d** se vinculó en un 53 por ciento aun cuando la gráfica mostrada es creciente pero negativa, mientras que **e** es decreciente pero positiva y fue elegida en 20 por ciento; en lo que respecta a las condiciones *decreciente y negativa* se desprende que fueron asociadas principalmente con **b** y **f** en un 93 y 80 por ciento respectivamente; sin embargo, la gráfica mostrada en la opción **d**, que fue asociada en un 20 por ciento, está ubicada donde las ordenadas son negativas aun cuando es creciente, por otra parte, la asociación con e fue de 53 por ciento, la gráfica ilustrada en este inciso es decreciente pero negativa.

Respuesta 4-a y 4-c

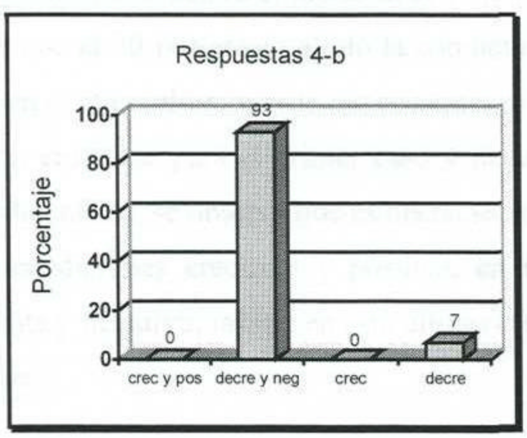
En este bloque de incisos, la gráfica mostrada cumple la condición creciente y positiva, los porcentajes de asociación de las condiciones y la gráfica son las siguientes.

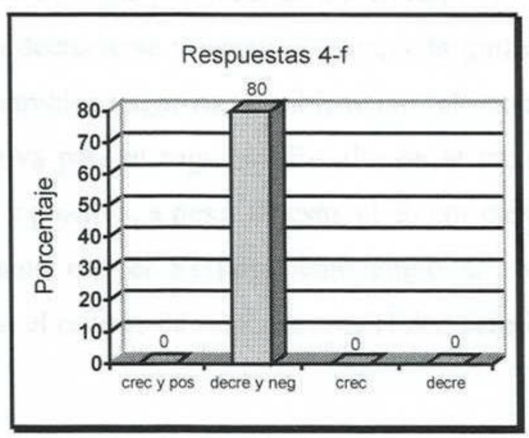


Para el inciso **a**, el 73 por ciento de los profesores selecciona la función creciente positiva con la gráfica ilustrada mientras que el 7 por ciento considera que la función es creciente, en tanto que para c, tenemos que, el 93 por ciento elige que la función es creciente y positiva. Debido a la contundencia y en virtud de que se presentan las condiciones en el sistema de representación verbal, es posible que en este sistema de representación se les facilite a los profesores.

Respuesta 4-b y 4-f

Para las gráficas contenidas en los incisos **b** y **f**, se tiene que cada gráfica de la función que se muestra cumple la condición de ser decreciente y negativa.

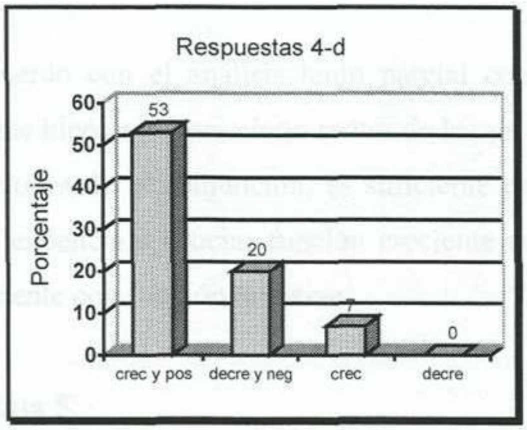


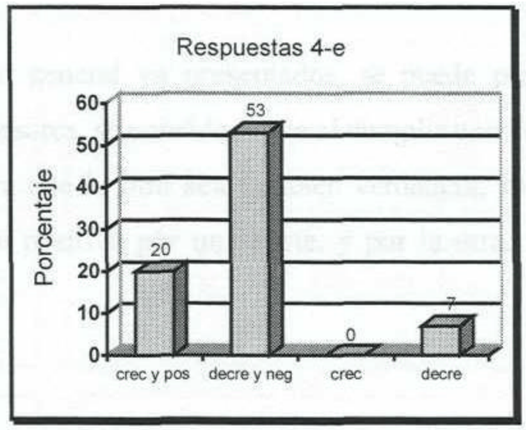


Para el inciso **b**, tenemos que el 93 por ciento seleccionó, para la gráfica mostrada, la condición decreciente y negativa, en tanto que el 7 por ciento asoció solamente la condición decreciente; por otra parte, para la opción **f**, el 80 por ciento de los encuestados optó por la condición decreciente y negativa. En ambos casos se observa contundencia en las elecciones de los profesores.

Respuesta 4-d y 4-e

En estos incisos, las gráficas mostradas cumplen con condiciones diferentes a las propuestas, la gráfica presentada en el inciso **d**, es una función creciente y negativa, en tanto que la mostrada en e, es decreciente y positiva; sin embargo los encuestados contestaron lo siguiente.





Para la gráfica mostrada en el inciso **d**, el 53 por ciento optó por la condición creciente y positiva, mientras que el 20 por ciento eligió la condición decreciente y negativa, aunque la gráfica de la función en el intervalo mostrado es creciente, es también negativa; posiblemente sólo consideran condición creciente para el primer caso y negativa para el segundo. En alusión al inciso e, al analizar la gráfica, se observa que es decreciente y positiva, a pesar de esto, el 20 por ciento optó por las condiciones creciente y positiva, en tanto que el 53 por ciento eligió la condición decreciente y negativa; tal vez en este último caso el criterio de selección sea el decrecimiento de la función.

En referencia al análisis general de la pregunta, se revisaron nuevamente los cuestionarios, y se desprende lo siguiente.

- El 66.7 por ciento de los profesores asoció correctamente los incisos **b** y **f** con las condiciones *creciente y positiva,* en tanto que para **d** y **e** asociaron las condiciones decreciente y negativa, sin embargo, de esta cifra, el 80 por ciento tuvo alguna elección simultáneamente en las opción **d** y **e**, lo que hace suponer que los argumentos de los profesores son parcialmente sólidos; en tanto que el restante 20 por ciento no asoció ninguna de las dos condiciones que se le presentaron, mostrando cierta solidez en sus argumentos.

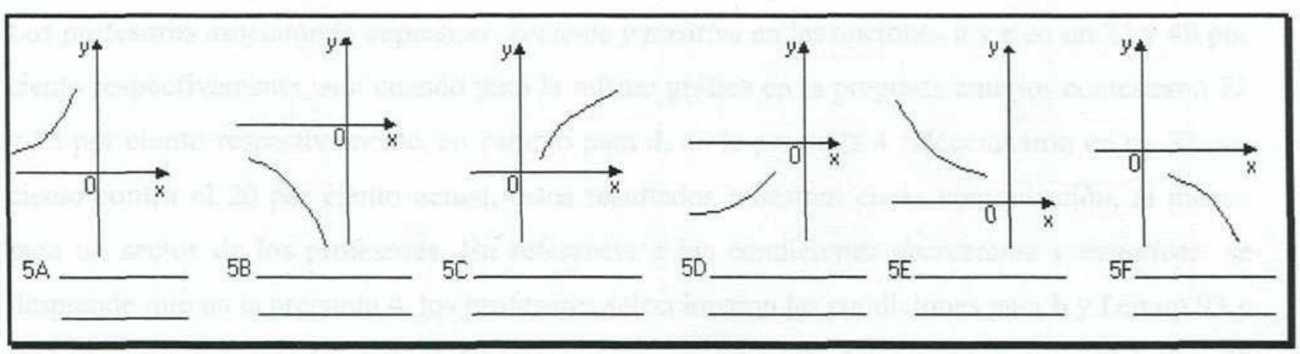
- Mientras que para el 33 por ciento restante, no se encontró un patrón definido en las respuestas de los profesores.

De acuerdo con el análisis tanto parcial como general ya presentados, se puede plantear la siguiente hipótesis, para cierto sector de los profesores, se considere que al cumplir una de las dos condiciones de la conjunción, es suficiente para que la otra sea también verdadera, mostrando cierta tendencia a asociar función creciente con positiva por una parte, y por la otra, función decreciente con función negativa.

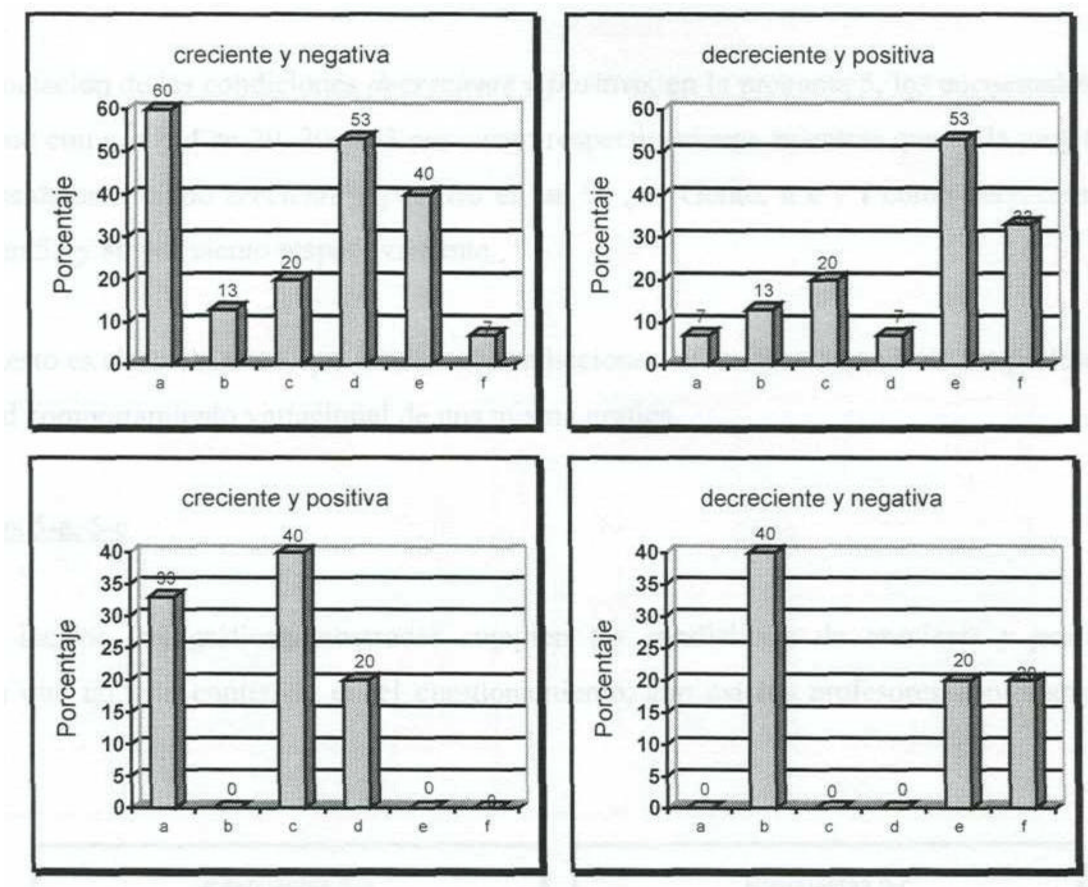
Pregunta 5.

Esta pregunta es complemento de la propuesta 4, pues tiene la misma intención y además se continúa con los sistemas utilizados como son el verbal y el gráfico, buscando evidencia a través de la conversión del sistema de representación verbal al gráfico.

Escriba sobre la raya correspondiente: función creciente y negativa, o bien, función decreciente y positiva, según el comportamiento de sus gráficas.



Las asociaciones de las expresiones verbales función *creciente y negativa* o bien función *decreciente y positiva,* respecto a cada una de las opciones, se muestran a continuación. Es importante mencionar que aunque solamente se les pidió a los profesores el cumplimiento de las dos condiciones simultáneamente que se proporcionaron, algunos encuestados escribieron otras asociaciones.



Los profesores asociaron la expresión *creciente y positiva* en las opciones **a** y **c** en un 33 y 40 por ciento respectivamente, aun cuando para la misma gráfica en la pregunta anterior contestaron 73 y 93 por ciento respectivamente, en cambio para **d**, en la pregunta 4 seleccionaron en un 53 por ciento contra el 20 por ciento actual, estos resultados muestran cierta contradicción, al menos para un sector de los profesores. En referencia a las condiciones *decreciente y negativa,* se desprende que en la pregunta 4, los profesores seleccionaron las condiciones para **b** y **f** en un 93 y 80 por ciento respectivamente, en tanto que para esta pregunta, los porcentajes son del 40 y 20 por ciento, lo cual evidencia de alguna forma las contradicciones de los profesores.

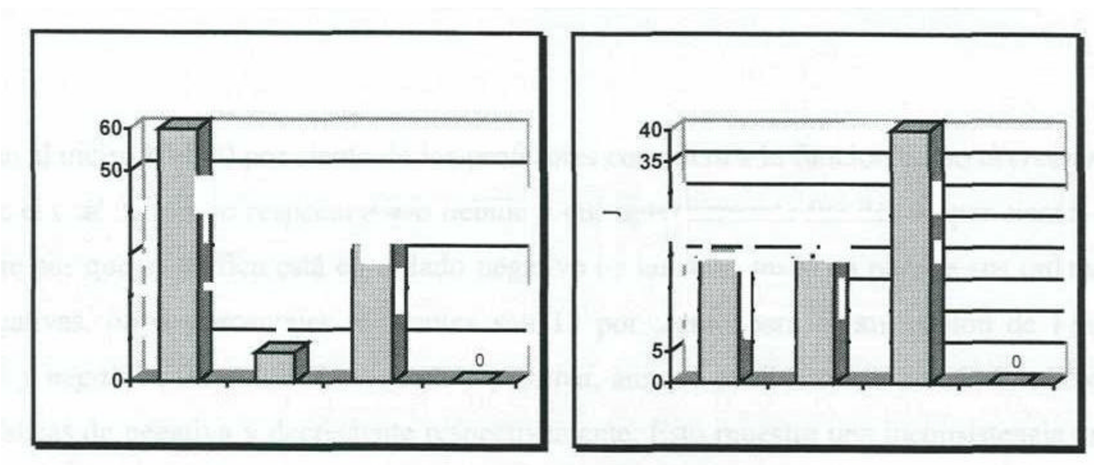
Por otra parte, en la asociación de las condiciones *creciente y negativa* se desprende que para las opciones **a** y **d**, los porcentajes son del 63 y 50 por ciento, aun cuando en la pregunta 4, los profesores consideraron a las gráficas para los mismos incisos en un 73 y 53 por ciento, por lo que respecta a **e**, en la pregunta 4 los profesores asociaron a la gráfica como *decreciente y negativa* en un 53 por ciento, mientras que ahora *creciente y negativa* en un 40 por ciento.

Para la asociación de las condiciones *decreciente y positiva,* en la pregunta 5, los encuestados las relacionaron con **c, e** y **f** en 20, 30 y 53 por ciento respectivamente, mientras que en la pregunta, a c la consideraron como *creciente y positiva* en un 93 por ciento, a **e** y **f** como *decreciente y negativa* en 53 y 80 por ciento respectivamente.

Con todo esto es claro observar, que existen contradicciones en las asociaciones de los profesores respecto al comportamiento variacional de una misma gráfica.

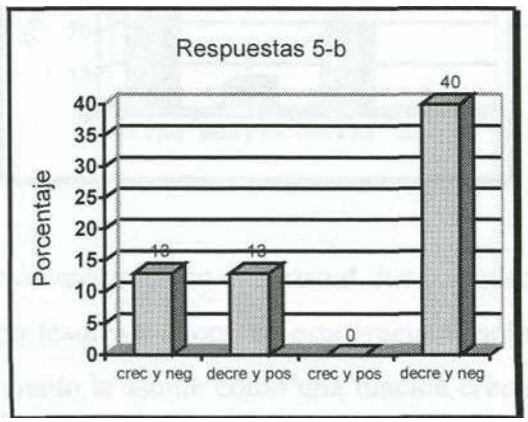
Respuestas 5-a. 5-c

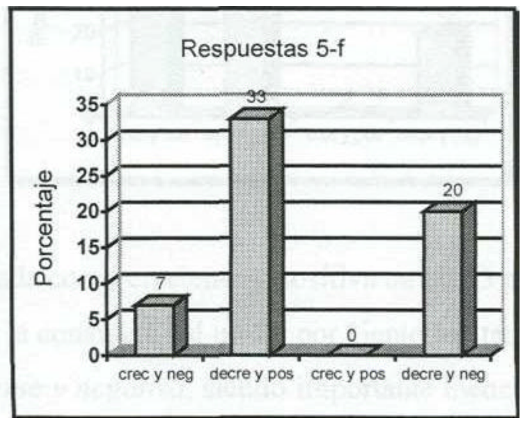
En estos incisos, las gráficas mostradas cumplen las condiciones de *creciente y positiva,* condición que no esta contenida en el cuestionamiento, aún así los profesores contestaron lo siguiente:



Para el inciso **a**, el 60 por ciento de los profesores considera que la función es creciente y negativa y el 33 por ciento asume que es creciente y positiva, si comparamos las respuestas de los profesores para esta misma función y que fue analizada en el apartado 4-a, podremos observar que existen contradicciones muy profundas, en virtud, que para esta misma función previamente contestaron que la función era creciente y positiva en un 73 por ciento, ahora lo afirma sólo el 33 por ciento. Para el inciso **5-c** el 40 por ciento de los encuestados asume que la función es creciente y positiva, este dato contrasta con el 93 por ciento de esta misma respuesta para el inciso **4-c**, por otro lado el 20 por ciento que considera a la función *creciente y negativa* posiblemente esté considerando solo la condición de función creciente, otro 20 por ciento asume que la función es *decreciente y positiva,* aunque posiblemente se seleccione esta opción por ser positiva la función.

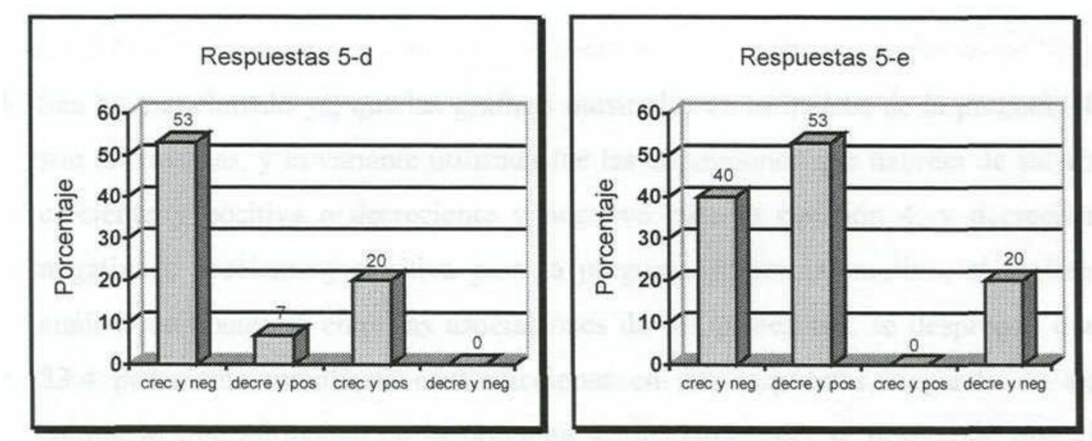
Respuestas 5-b. 5-f





En cuanto al inciso **b** el 40 por ciento de los profesores considera a la función como *decreciente y negativa, el cuál se redujo respecto* a ***4-b*** debido a que anteriormente fue del *93 por ciento, esto* es posible por que la gráfica está en el lado negativo de las abscisas y no porque sus ordenadas sean negativas, otros porcentajes relevantes son 13 por ciento para la afirmación de función *creciente y negativa,* así como *decreciente y positiva,* aunque posiblemente consideren sólo las características de negativa y decreciente respectivamente. Esto muestra una inconsistencia en las *concepciones de los profesores, en virtud de que sólo consideran una de las dos condiciones que* se piden, pero no las dos simultáneamente. En referencia a **f**, la gráfica que se ilustra, fue analizada en el apartado **4-f**, ahí los profesores asociaron a la función con la condición *decreciente y negativa* en un 80 por ciento, el cual contrasta con el 20 por ciento que ahora lo afirma; en tanto que un 33 por ciento vinculó la condición *decreciente y positiva* y sólo un 7 por ciento consideró a la función como *creciente y negativa,* tal vez tenga mayor relevancia el hecho de que la función sea decreciente para el primer caso y *negativa* para el segundo.

Respuestas 5-d, 5-e.



La función mostrada en el inciso **d**, fue considerada como creciente y positiva en un 53 por ciento de los profesores y ahora, en esta pregunta, solo la considera así un 20 por ciento; en tanto que el 53 por ciento la asume como una función *creciente y negativa,* siendo importante mencionar que esta condición no fue relacionada por ningún profesor en el apartado **4-d**; finalmente el 7 por ciento restante considera que es *decreciente y positiva.*

En cuanto a los análisis del inciso **e**, los profesores afirman que la función es *decreciente y positiva* en un 53 por ciento, mientras que para el 40 por ciento es considerada como *creciente y negativa,* tal vez retoma fuerza nuevamente la concepción de que es negativa la función si esta en el semieje negativo de las abscisas, cabe destacar que estas condiciones no fueron relacionadas por algún encuestado en la pregunta 4; siendo que ahí fue considerada como decreciente y negativa por un 53 por ciento y ahora solo el 20 por ciento lo afirma así.

Al revisar los resultados en conjunto para esta pregunta, tenemos lo siguiente.

- El 26.7 por ciento de los profesores consideró que los incisos d y e cumplen la condición de creciente y negativa y, decreciente y positiva respectivamente (afirmación correcta), sin embargo, sólo el 13.3 por ciento muestra cierto dominio en el análisis de gráficas en los rasgos ya citados, en tanto que el 13.3 por ciento restante manifiesta confusión, ya que de acuerdo al análisis de las respuestas, estos profesores manifiestan contradicciones en cuanto al cambio de signo de la función en dos o más incisos.

- Sea ha mencionado ya, que las gráficas mostradas en lo incisos de la pregunta 4 y 5 son las mismas, y la variante utilizada fue las condiciones que habrían de satisfacer: creciente y positiva o decreciente y negativa para la cuestión 4, y decreciente y negativa o creciente y positiva para la pregunta 5, por tal motivo, al realizar un análisis comparativo entre las asociaciones de los profesores, se desprende que el 33.4 por ciento manifiesta contradicciones en sus respuestas, negando de alguna forma, lo que afirmaban en la pregunta 4; de porcentaje, se desprende que el 6.7 contradice sus respuestas de acuerdo a la variación de la función (creciente o decreciente), mientras que el 26.7 por ciento manifiesta el cambio de signo de la función (positiva o negativa).

- Un 20 por ciento, reafirma el argumento de que si una función es creciente es por consecuencia positiva, mientras que si es decreciente es entonces negativa.

- Al parecer, un 20 por ciento de los encuestados tiene proclividad a considerar como función negativa a aquella que esta sobre el semieje negativo de las abscisas y positiva si esta sobre el semieje positivo. Finalmente el 13.4 por ciento no manifiesta un patrón bien definido.

De acuerdo con los resultados ya planteados, se desprende la siguiente hipótesis. La contundencia de los resultados obtenidos en la pregunta 4, posiblemente se debió a la agrupación de las condiciones, es decir, función creciente se asoció con función positiva o bien función decreciente con función negativa, situación que tal vez los profesores asumen como condiciones concomitantes, ya que al permutarse las condiciones, se evidenció a través de las contradicciones, la falta de dominio en el análisis de funciones. Además, es probable, que exista alguna tendencia en los profesores por contestar de acuerdo a las condiciones solicitadas y no en base al análisis de resultados.

ANÁLISIS GLOBAL DE LAS PREGUNTAS 1-5.

Después de analizar las primeras cinco preguntas por separado, y con base en las hipótesis parciales que se plantearon, se procedió a reanalizar el cuestionario de exploración con la finalidad de descubrir algunas generalidades en las asociaciones de los profesores, de dicho análisis se desprende hasta el momento, cuatro agrupaciones de encuestados y que se presentan a continuación.

- **GRUPO A.** En términos generales se puede plantear parcialmente, que el 26.7 por ciento de los profesores se caracteriza por mostrar cierta habilidad para interpretar el comportamiento variacional de una función de acuerdo a una condición especifica, sin embargo, en el momento en que se precisan dos condiciones que deben cumplirse simultáneamente, manifiestan dificultad en la interpretación, debido a que solamente buscan satisfacer cualquiera de ellas, además es posible que confundan/'(x) cono*), por lo que al analizar a/'(x), realmente buscan satisfacer la condición *para j(x)* dando por hecho que se satisface *&f(x).* Por lo que *si f(x)* es creciente entonces es positiva y su derivada también cumple las dos condiciones, si por el contrario, *flx)* es decreciente, entonces la función es negativa y *f\x)* cumple también con las dos condiciones. Además se evidencia la dificultad en la interpretación del comportamiento gráfico de una función, el cuál se agrava en el momento de utilizar el sistema de representación analítico.

- **GRUPO B.** En este grupo de profesores, el 20 por ciento manifiesta de igual modo las concepciones del apartado anterior sólo que ellos asumen además que una función es positiva siempre y cuando este sobre el semieje positivo de las abscisas y será negativa, en tanto este sobre el semieje negativo, construyendo sobre esta idea el análisis del comportamiento variacional de las funciones. El 6.7 por ciento confunde los puntos estacionarios con las raíces de la función

- **GRUPO C.** El 33.3 por ciento concibe las mismas ideas que las manifestadas en el apartado A, sin embargo, manifiestan contradicciones en las respuestas ya bien sea en cuanto al signo de la función o en cuanto al comportamiento de la misma, evidenciando la falta de consistencia en sus concepciones. Existe un transición en este grupo, ya aproximadamente un 60 por ciento de ellos no confunde a f'(x) con f(x). El 20 por ciento confunde los puntos estacionarios con las raíces de la función

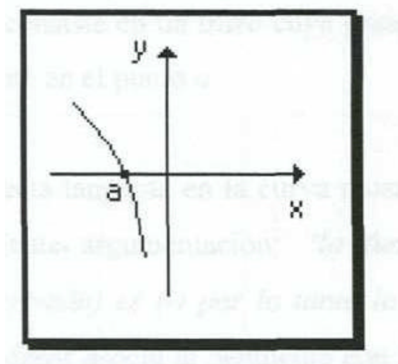
- **GRUPO D.** Finalmente el 20 por ciento parece manifestar cierto dominio en el análisis de funciones, ya que contestó correctamente las preguntas 2, 3, 4 y 5 sin manifestar contradicción, mostrando incluso argumentos gráficos del porque de su proceder. Además a estos profesores se les dificultó de sobremanera el análisis gráfico de la función mostrada en la primer pregunta.

De acuerdo con estas agrupaciones, se analizaron los resultados de las preguntas 6, 7, 8 y 9, con la finalidad de percibir si existen algunos patrones en las producciones que realizaron los profesores. En el entendido que a excepción de la pregunta 8, se busca explorar las concepciones que tienen los profesores acerca del proceso de reversibilidad.

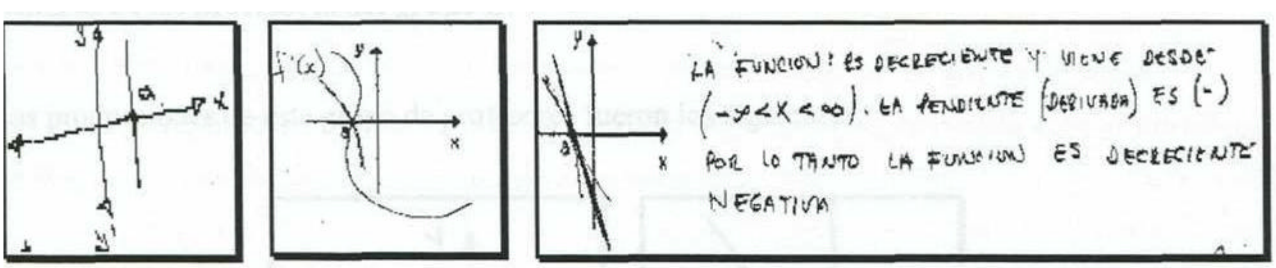
Pregunta 6.

En esta pregunta se pretende explorar el estado del proceso de reversibilidad entre una función y la integral de esta, mediante el tratamiento dentro del sistema de representación gráfico.

En la gráfica que se muestra a continuación una porción de la función derivada *f'(x)* en torno al punto *a,* esboce la gráfica *de f(x)* en torno de x = **a.**



En relación a esta pregunta, tenemos que el 80 por ciento de los profesores realizó producciones, para el análisis de la información obtenida, se agrupó a los profesores de acuerdo a los criterios que ya se mencionaron en los apartados anteriores, por lo que iniciamos con los profesores del **grupo A.**



A-1 **A-2** **A-4**

Con la finalidad de identificar algún patrón existente en los esbozos realizados por los profesores y de acuerdo con la clasificación ya citada en la primera parte de este análisis, se analizarán ahora las producciones por grupos de profesores.

Esbozos de los profesores del grupo A.

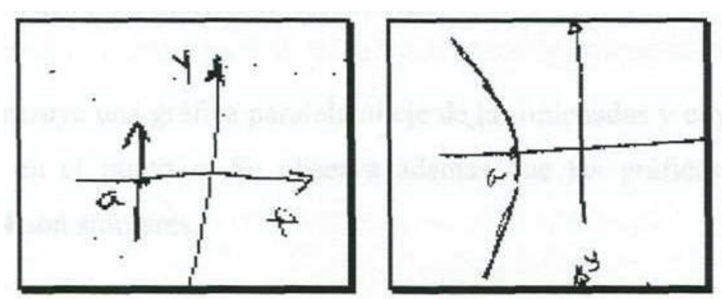
La gráfica esbozada por el profesor A-l es una recta paralela al eje de las ordenadas y presenta una intersección con el eje de las abscisas en un punto ***a*** que al parecer es simétrico respecto al que se muestra en la gráfica de la pregunta, además es importante resaltar que en el semieje negativo de las ordenadas, el profesor le asigna la leyenda *y'.*

El esbozo del profesor **A-2**, consiste en un trazo cuya principal característica es que intersecta al eje de las abscisas exactamente en el punto *a.*

El profesor **A-4**, traza una recta tangente en la curva mostrada, coincidentemente en el punto a, además manifiesta la siguiente argumentación: *"la función: es decreciente y viene desde* (-co<x<co). *La pendiente (derivada) es (-) por lo tanto la función es decreciente negativa",* de aquí se desprende que el profesor asocia la pendiente con la derivada de una función, parece ser que tiene un argumento diferente para determinar el intervalo en el que una función es decreciente, dado que considera que el signo de la derivada solo es indicativo de positividad o negatividad una función y no es asociada como criterio para determinar crecimiento o decrecimiento en una función.

Esbozos de los profesores del grupo B.

Las producciones de este grupo de profesores fueron los siguientes:



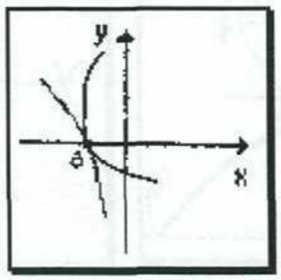
B-1 **B-2**

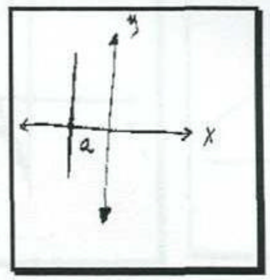
El profesor B-l, esbozó una recta paralela el eje de las ordenadas y tiene como intersección con el eje de las abscisas. La gráfica realizada por el profesor B-2, es semejante a una parábola con eje focal coincidente con el eje de las abscisas, sin embargo, tenemos que nuevamente la gráfica intersecta al eje de las abscisas exactamente en el punto *a.*

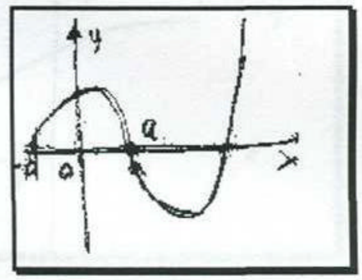
Esbozos de los profesores del grupo C.

En cuanto a este grupo, el 80 por ciento de profesores realzó algún esbozo, estos son los siguientes:


C-2


C-3


C-4


C-5

Para el esbozo de la gráfica **C-2**, nuevamente se aprecia la intersección de la gráfica de la función con el eje de las abscisas, aunque no es manifiesto si se trata del punto *a,* la gráfica se asemeja un poco a una parábola como la realizada por el profesor **B-2**.

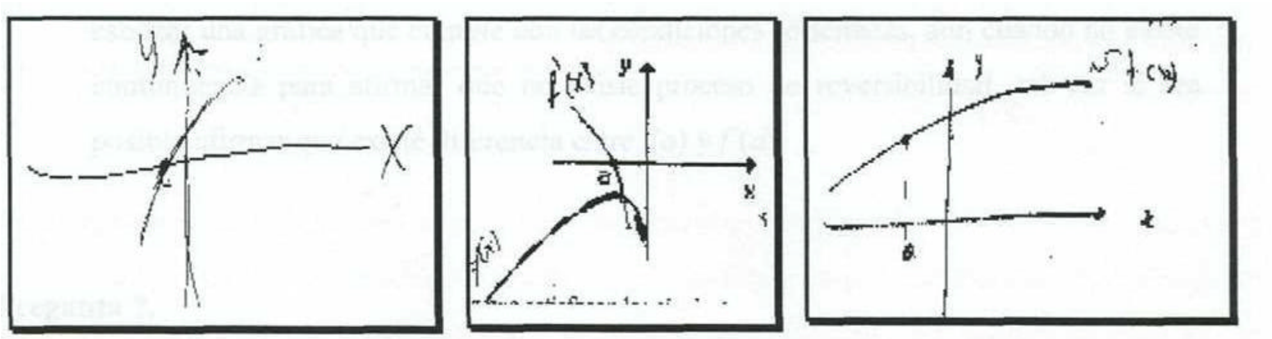
La gráfica realizada por el profesor **C-3**, parece ser un reflejo sobre gráfica la función *f\x)* además intersecta tanto al eje de las abscisas como a la gráfica sobre la cual se debe construir la gráfica *DE f(x)* que cumpla las condiciones específicas.

El profesor **C-4**, construye una gráfica paralela al eje de las ordenadas y cuya intersección con el eje de las abscisas en el punto *a.* Se observa además que las gráficas construidas por los profesores **C-2** y **C-4** son similares.

Por otra parte, el profesor **C-5** realiza la construcción de una gráfica de una función al parecer polinomial con un máximo y un mínimo, tiene intersecciones con el eje de las abscisas en dos puntos *-a* y a, al parecer estos puntos son simétricos respecto al eje de las ordenadas.

Esbozos de los profesores del grupo D.

Las producciones hechas por los profesores son las siguientes:



D-1 D-2 D-3

En este grupo de profesores, tenemos que las todas las producciones no consideran la intersección de la gráfica con la función propuesta en el punto **a**, esto posiblemente se debe a que para ellos, el cero de la función no se conserva. Para la gráfica del profesor **D-1** tenemos que la gráfica construida es creciente y positiva, tiene un punto de intersección con el eje de las abscisas, sin embargo al parecer no es el punto *a.* El profesor **D-2** asocia la gráfica de *f(x)* en x=a con la correspondiente *a f(x)* en el mismo punto. En tanto que el profesor **D-3** construye una gráfica que es creciente y positiva, además es evidente que el punto ***a****,* no es considerado como un cero de la función, tampoco insiste en considerar a al punto a como una intersección con el eje de las abscisas.

Después de analizar el conjunto de las producciones, se puede observar:

- Para 83.4 por ciento de los encuestados (grupos A, B, C y un profesor del grupo D) que realizaron producciones, el punto estacionario *a,* es considerado como un cero de la función *j(a)=0 y* que además es necesario que la gráfica construida tenga intersección con el eje de las abscisas en este punto precisamente, es posible que exista confusión entre f*(x) y f(x).*

- Para el 16.6 por ciento restante (grupo D) no asociaron al punto estacionario ***a*** con el cero de una función, es posible que consideren que existe diferencia entre *f(x)* y f'(x)

- En referencia al proceso de reversibilidad, sólo uno de los profesores fue capaz de esbozar una gráfica que cumple con las condiciones solicitadas, aun cuando no existe contundencia para afirmar que no existe proceso de reversibilidad, tal vez si sea posible afirmar que existe diferencia entre /(a) y *f{a).*

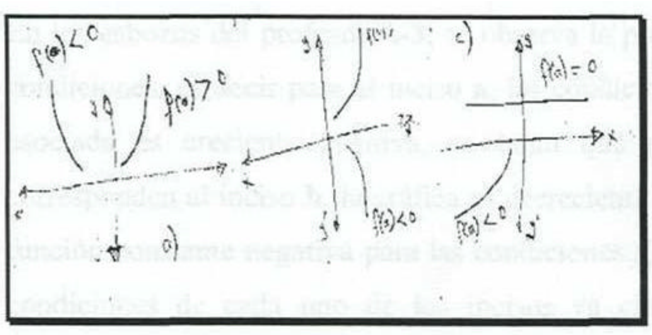
Pregunta 7.

En este caso se explora la habilidad para transitar del sistema de representación analítico al gráfico, siendo importante mencionar que los esbozos deberán cumplir dos condiciones simultáneamente.

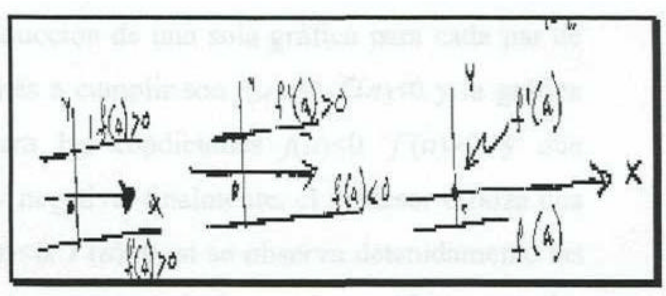
Trace los gráficos de funciones que satisfagan las siguientes condiciones:

a)/(a)>0,/'(a)<0 **b)/(a)<0,/'(a)>0** **c)/(a)<0,/'(a)=0**

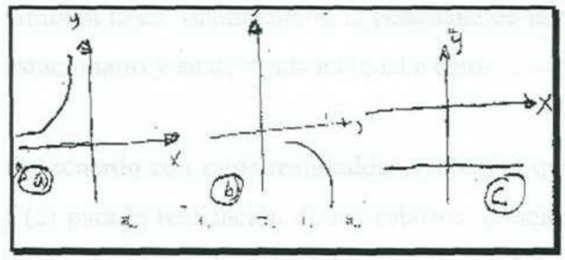
Esbozos de los profesores del grupo A.



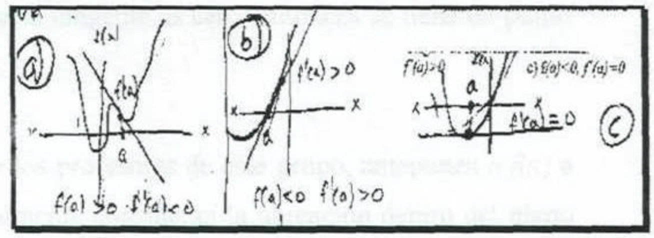
A-1



A-2



A-3



A-4

Para la producción del profesor **A-1**, se tiene un par de gráficas que cumplen con las condiciones pero no de forma simultánea, sino que esboza una gráfica para cada condición, sin embargo en todas ellas especifica que se trata *de f(x)* y ninguna es asociada con /'(x); además en cada uno de los semiejes negativos, tanto de las abscisas como de las ordenadas, el profesor relaciona ax' *y y'* respectivamente, no se observa alguna otra asociación entre *f(x)* y *f'(x),* es posible que las producciones hallan sido elaboradas con base *en f(x),* lo cual de ser cierto, manifestaría confusión entre una función y su derivada.

El profesor **A-2**, asocia una línea recta para cada una de las condiciones, notándose en cada uno de los esbozos que la única diferencia es la ubicación en el plano cartesiano, además, el profesor sitúa un punto en el origen para la condición/'(x)=0.

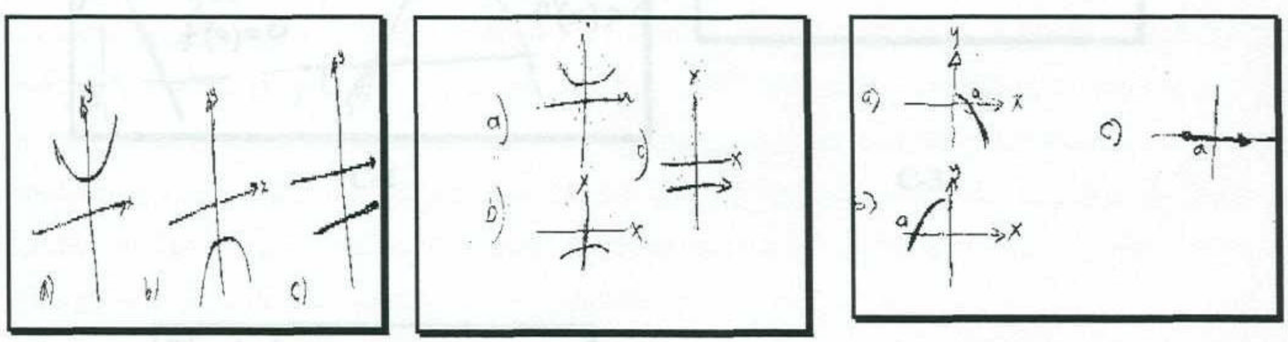
En los esbozos del profesor **A-3**, se observa la producción de una sola gráfica para cada par de condiciones, es decir para el inciso **a**, las condiciones a cumplir *son f(a)>0, f(a)<0 y* la gráfica asociada es creciente positiva, en tanto que para las condiciones *f(a)<0, f'(a)>0 y* que corresponden al inciso **b**, la gráfica es decreciente y negativa, finalmente, el profesor esboza una función constante negativa para las condiciones *f(a)<0, f'(a)=O,* si se observa detenidamente las condiciones de cada uno de los incisos ya citados, se apreciará que las gráficas trazadas corresponden a la primera condición, es decir a *f(x)* en cada uno de los incisos.

Por otra parte, el profesor **A-4**, asocia correctamente cada par de condiciones, es claro además que el principal argumento es la recta tangente, la cual si posee una pendiente positiva entonces la derivada de dicha función es también positiva, si la pendiente es negativa, entonces la derivada también lo es, finalmente si la pendiente de la recta tangente es cero, entonces se tiene un punto estacionario y su derivada es igual a cero.

De acuerdo con estos resultados, se observa que los profesores de este grupo, anteponen *a f(x)* a *f'(x)* para la realización de los esbozos, principalmente consideran la ubicación dentro del plano cartesiano como principal factor, esto se deba posiblemente a la confusión existente entre una función y su derivada.

Esbozos de los profesores del grupo B.

Para el grupo B, tenemos las producciones que se muestran.



B-1 **B-2** **B-3**

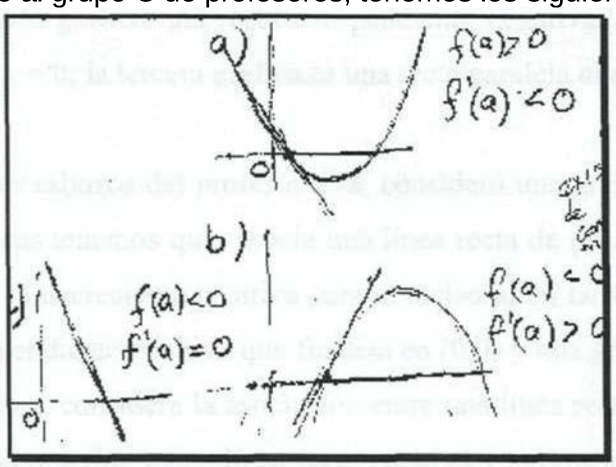
Al analizar la producción de los profesores **B-1** y **B-2**, se observa que los gráficos mostrados son similares, y se observan las condiciones solicitadas, se podrá observar que solo se cumple la primera de las dos condiciones, es decir cuando f*{x)>0, f[x)<0 y f{x)<0* respectivamente para cada una de las gráficas. Es posible que los profesores consideren que al cumplirse una condición, la otra se satisface necesariamente.

En tanto que para el profesor **B-3**, el esbozo para el primer inciso es una gráfica decreciente y para el segundo, es una función creciente, solo que ambas son positivas y negativas en cierto intervalo, en el caso del inciso **c**, la gráfica mostrada coincide con el eje de las abscisas para toda x; en conjunto los trazos satisfacen la condición solicitada para/'(x) en cada uno de los incisos.

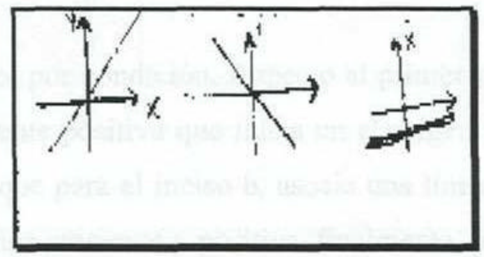
Estas propuestas contrastan con las realizadas por los profesores **B-1** y **B-2**, en virtud de que ellos, al parecer, buscan satisfacer la condición *de f(x)* solamente.

Esbozos de los profesores del grupo C.

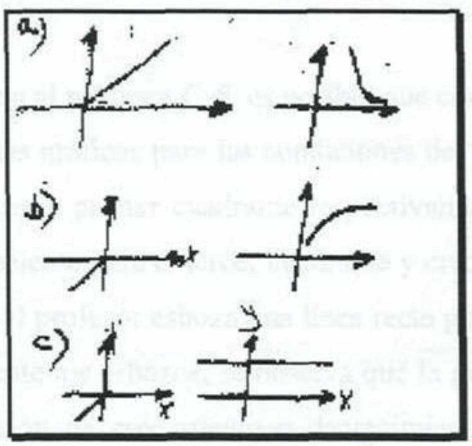
En cuanto al grupo C de profesores, tenemos los siguientes esbozos.



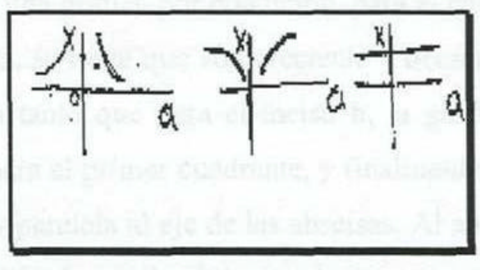
C-2



C-3



C-4



C-5

En los esbozos del profesor C-2, se observa la asociación entre una función cuadrática y una recta tangente a la misma, sin embargo no es evidente que esta última sea considerada como/(a); en relación a la primer gráfica, se tiene una parábola cóncava hacia arriba con recta tangente (con pendiente negativa) en la intersección con el eje de las abscisas, mientras que en la segunda, se observa una parábola cóncava hacia abajo con una recta tangente (con pendiente negativa) en la intersección con el eje de las abscisas; es posible que el profesor considere que para el punto a, se cumple $f(a)=0$.

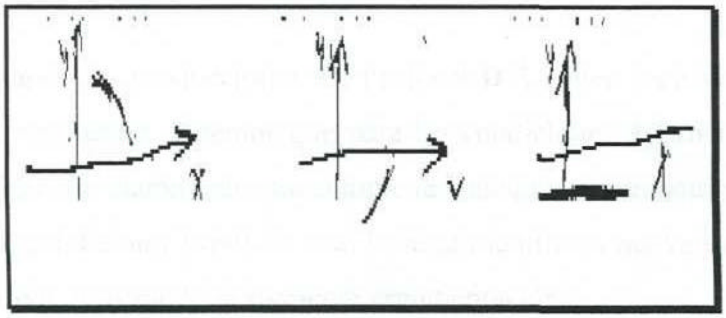
El profesor **C-3**, Esboza en la primera gráfica una recta con pendiente positiva, en tanto que en la segunda gráfico una recta con pendiente negativa, ambas tienen la característica de *que* $f(x)=0$ para $x = 0$; la tercera gráfica es una recta paralela al eje de las abscisas, la cual es negativa.

En los esbozos del profesor **C-4**, consideró una gráfica por condición, respecto al primer par de gráficas tenemos que, asocia una línea recta de pendiente positiva que inicia en el origen y una gráfica decreciente positiva para el inciso **a**, en tanto que para el inciso b, asocia una línea recta con pendiente positiva que finaliza en (0,0) y una gráfica creciente y positiva, finalmente, para el inciso c, considera la asociación entre una línea recta con condiciones muy similares como en el inciso anterior y una línea recta positiva y con pendiente cero. Al analizar con detenimiento las producciones, se observa que cada una de las gráficas cumple solamente con una de las condiciones, es decir, la gráficas de la izquierda cumplen con las condiciones requeridas para/(x) 1 y las gráficas de la derecha satisfacen las condiciones para/'(x).

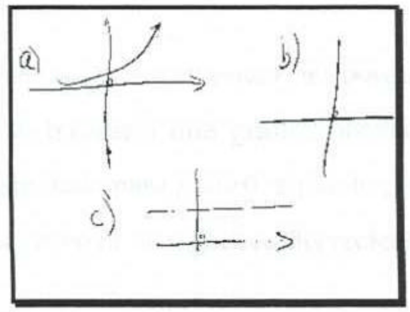
En referencia al profesor **C-5**, es posible que considere una gráfica por condición, para el caso del esbozo de las gráficas para las condiciones del inciso **a**, se tiene que son creciente y decreciente para el tercer y primer cuadrante respectivamente, en tanto que para el inciso **b**, la gráfica es ahora decreciente para el tercer cuadrante y creciente para el primer cuadrante, y finalmente, para el inciso c, el profesor esboza una línea recta positiva y paralela al eje de las abscisas. Al analizar detenidamente los esbozos, se observa que la gráfica ubicada en el primer cuadrante corresponda a la condición de crecimiento o decrecimiento, en tanto que, el esbozo del tercer cuadrante corresponde a la positividad o negatividad de acuerdo con las condiciones preestablecidas, y para que estas se cumplan, es posible que el profesor asocie $f(x)>0$ *con* $f\{x)>0$ *y* $f'(x)<0$ con $f(x)<0$, con lo cual, la gráfica al ser creciente es por tanto positiva y al ser decreciente entonces es negativa y con este razonamiento, entonces se cumplen las condiciones. Esto, de ser cierto, fortalece la hipótesis de que existe confusión entre una función y su derivada.

Esbozos de los profesores del grupo D.

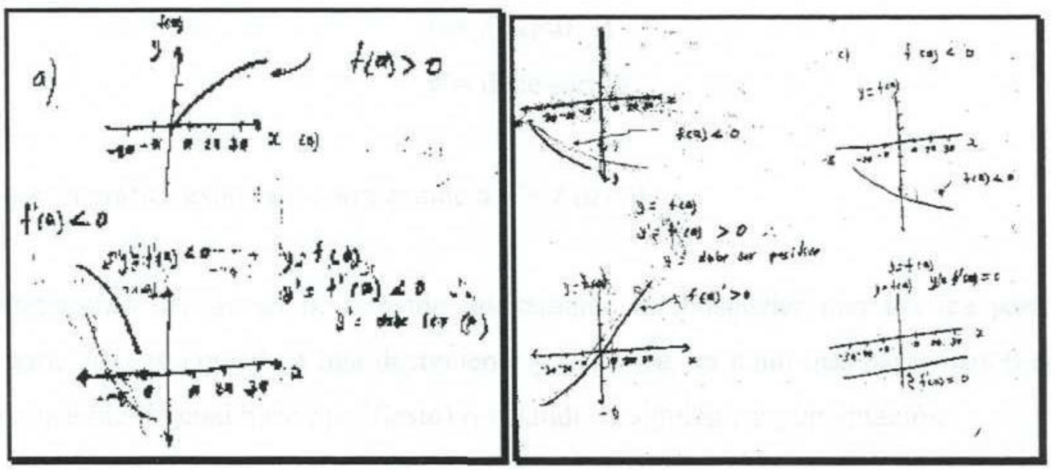
Los profesores de este grupo, realizaron las aproximaciones que a continuación se presentan:



D-1



D-2



D-3

El profesor **D-1**, esboza un segmento de gráfica decreciente y positiva para las condiciones del inciso **a**; para el **b,** dibuja una gráfica creciente y negativa, en tanto que para **c**, se ilustra una línea recta negativa paralela al eje de las abscisas, al analizar en conjunto los bosquejos realizados por éste profesor cumplen con las condiciones preestablecidas para toda x, sin embargo no hace explicito el punto *a,* para el cual se solicitaron las condiciones.

El profesor **D-2**, bosqueja una gráfica creciente y positiva para las condiciones solicitadas en el inciso **a**, misma que cumple satisfactoriamente las condiciones, sin embargo para b, no realizó esbozo alguno, mientras que para c dibuja una línea recta negativa paralela al eje de las abscisas; en virtud de que los bosquejos para los incisos **a** y **c** cumplen las condiciones, es posible que el profesor pueda esbozar una gráfica que cumpla las condiciones de **b**, además, al igual que el profesor **D-1**, no manifiestan la ubicación del punto ***a.***

Analizando las producciones del profesor **D-3**, quien incluso plasma los argumentos del porque de sus respuestas, tenemos que para las condiciones del inciso **a**, bosqueja una gráfica positiva manifestando claramente que cumple únicamente la condición solicitada para X(a)>0, en tanto que para la condición *f(d)<0,* lo cual lo hace manifiesto nuevamente, esboza una gráfica decreciente y positiva, mostrando la siguiente argumentación:

y=(a)
y'=f(a)<0 r. y '=
debe ser (-)

mostrando que la gráfica esbozada corresponde *&y'=f'(a)<0.*

Para las condiciones del inciso **b**, reincide nuevamente en bosquejar una gráfica para cada condición, para *f(a)<0,* considera una decreciente y negativa, en tanto que paraf'(a)>0 esboza una gráfica creciente (lo cual hace manifiesto) revelando la siguiente argumentación:

y=Áa)
y'=f(a)>0 **.".**
y'~ debe ser positiva

Para las condiciones *f(a)<0 y f'(a)<0,* el profesor esboza una gráfica decreciente negativa para la primer característica y una línea recta negativa paralela al eje de las abscisas, mostrando, para esta condición, el siguiente argumento:

y = f (a) y=f\a)=o

indicando que la gráfica trazada cumple con esta condición.

Es preciso aclarar que los profesores clasificados en este grupo, no puntualizaron la ubicación del punto *a,* donde deberían cumplirse la condiciones tanto para f(a) como para *f(a),* sin embargo, realizaron bosquejos que se cumplen para toda *x.*

En un análisis general de los bosquejos realizados, tenemos que:

- Solo el 14 por ciento (grupo A y D) de los profesores esbozan gráficas correctas, sin embargo solo el 7 por ciento (grupo A), esbozó gráficas en las cuales hizo manifiesta la ubicación del punto *a,* para a partir de esta ubicación, cumplir con las condiciones preestablecidas utilizando como principal argumento, una recta tangente en *f(a),* mientras que el resto de los profesores no ubicaron el punto *a* y bosquejaron gráficas que satisfacieran las condiciones para toda *x;* otro aspecto importante de resaltar, es que solamente el profesor que ubicó *f(a)* fue quien relacionó *a f(a)=0* con un punto estacionario, el resto consideró una línea recta positiva o negativa y paralela al eje de las abscisas, posiblemente el argumento sea: *si f(x)=c* entonces/'(x)=0.

- El 28.5 por ciento (grupos A, B y D), elabora esbozos que satisfacen únicamente una condición y que corresponde *& f(x);* en tanto que el 7 por ciento (grupo B) busca satisfacer las condiciones para/'(x) únicamente.

- El 14 por ciento (grupo A y C) de los profesores considera gráficas separadas para cada condición solicitada, sin embargo no las satisfacen, en tanto que un 21 por ciento construye gráficos separados y cada uno de ellos cumple con las condiciones *de f(x) y f(x)* (grupo A, C y D).

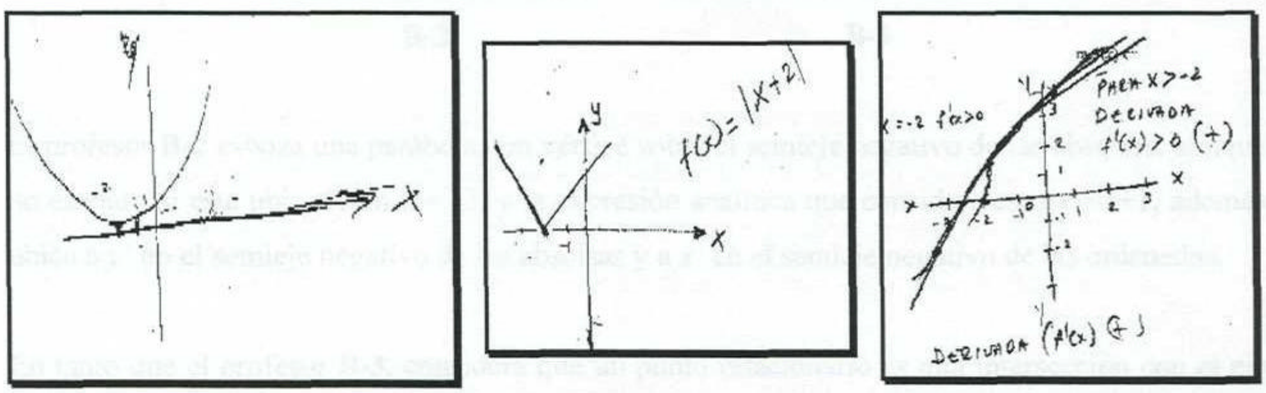
- Solamente dos profesores elaboraron gráficas para satisfacer las condiciones *de f(a)* y *f(a),* el resto considera *a f(x) y f(x).*

Pregunta 8.

Con esta pregunta se pretende explorar el proceso de reversibilidad en los profesores acerca del comportamiento variacional de una función, mediante la conversión del sistema de representación analítico al sistema gráfico, partiendo de la descripción del comportamiento de una función hacia la construcción de la gráfica que cubra las condiciones establecidas.

8. Se sabe que *f(x)* **tiene un único punto estacionario en *x* - -2, *f(x)* > 0 para *x* < *-2* y f'(x) > 0 para *x* > *-2.* Esboce una gráfica para *f{x)* que satisfaga estas condiciones y de la fórmula de la función.**

Esbozos de los profesores del grupo A.



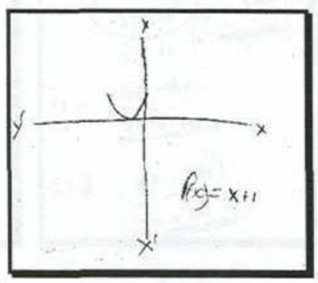
A-2 **A-3** **A-4**

La producción del profesor **A-2**, consiste en el trazo de una parábola con vértice en *x=-2* posiblemente represente un punto estacionario (mínimo relativo), sin embargo si se analiza con detalle, tenemos que el esbozo satisface las condiciones de *f(x)* y no las referentes a *f(x),* posiblemente no existe proceso de reversibilidad.

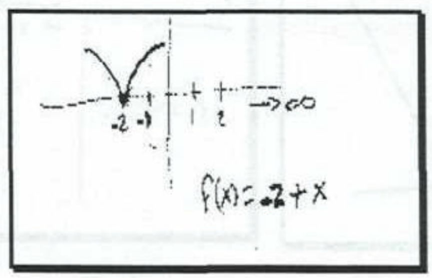
El bosquejo del profesor **A-3**, es la gráfica de una función de valor absoluto, cuya expresión analítica *es f{x)=\x+2\,* siendo evidente que en *x =-2* existe un punto de intersección con el eje de las abscisas.

Para el profesor **A-4**, la gráfica es creciente para toda x, indicando incluso que para x = -2 se cumple que/'(x)>0, esta característica es manifestada en los sistemas de representación gráfico y analítico, además, considera que para x = *-2* la derivada/'(x)>0, es positiva; por otra parte, en el esbozo se muestra que traza rectas tangentes en algunos puntos de la gráfica trazada, es posible que estas rectas sean sus argumentos, ya que en la pregunta anterior los empleo de igual manera.

Esbozos de los profesores del grupo B.



B-2



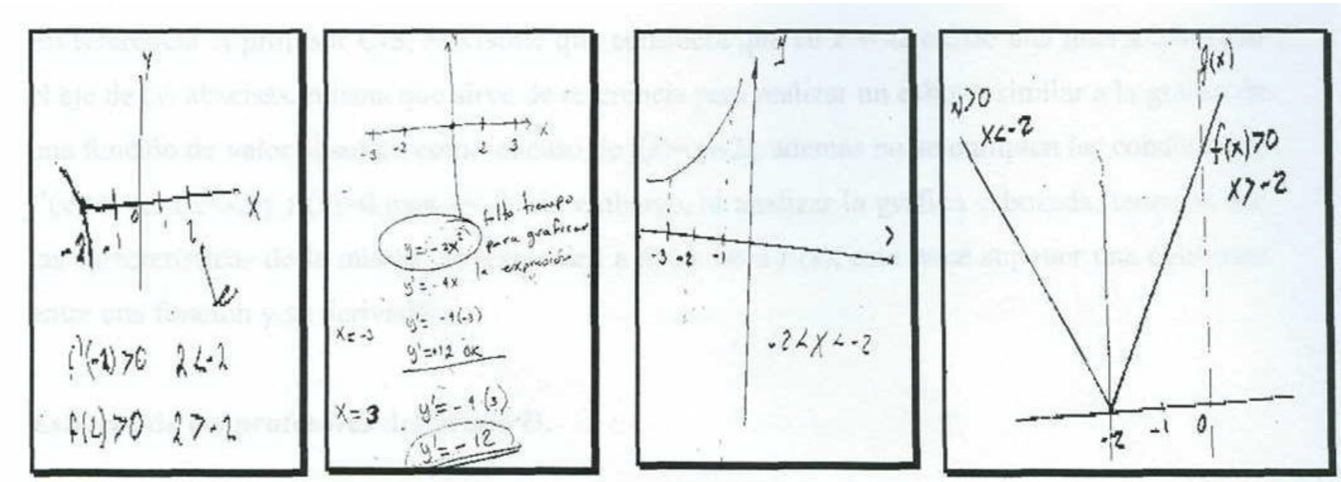
B-3

El profesor **B-2** esboza una parábola con vértice sobre el semieje negativo de las abscisas, aunque no es claro si esta ubicado en x = -2, y la expresión analítica que considera es *f(x)=x+l,* además ubica a *y'* en el semieje negativo de las abscisas y a *x'* en el semieje negativo de las ordenadas.

En tanto que el profesor **B-3**, considera que un punto estacionario es una intersección con el eje de las abscisas, en concreto en x = -2, en la gráfica mostrada se tiene que para el intervalo x<-2 se cumple la condición f'(x)<0 y f*(x)>0* en tanto que para x>-2 se comprueba que *f(x)>0* y *J(x)>Q;* por otro lado el profesor asoció la expresión analítica *f[x) = -2 + x.* Es posible que exista confusión entre/'(x) y *J(x)* dado que los dos segmentos de la gráfica coincide *que f(x)* es positiva y además en x=-2 es una intersección, tal vez el profesor pretendió esbozar *a f(x).*

Esbozos de los profesores del grupo C.

Las producciones de los profesores clasificados en el **grupo C.**



C-2 C-3 C-4 C-5

El profesor **C-2**, considera que en $x = -2$ existe una intersección con el eje de las abscisas, además la gráfica esbozada, para el intervalo mostrado, es siempre decreciente por lo que las condiciones preestablecidas no se cumplen, es posible que exista confusión entre *f(x)* y *f(x),* al menos en referencia a los ceros de la función y los puntos estacionarios de su derivada.

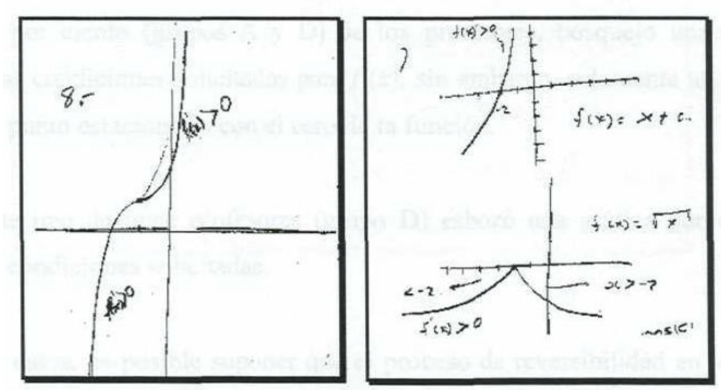
El profesor **C-3**, solamente realizó un tratamiento en el sistema de representación analítico y que se muestra a continuación:

$$y=-2x^2$$
$$y'=-4x$$
$$x=-3$$
$$y'=+12x$$
$$x=3$$
$$y'=-4(3)$$
$$y'=-12$$

Por su parte el profesor **C-4**, bosquejó una gráfica que es creciente y además positiva, y que de acuerdo con sus respuestas y esbozos anteriores, es posible que la gráfica trazada corresponda a las condiciones de f'(x), sin embargo, al parecer no logró asociar al punto estacionario en x = *-2.*

En referencia al profesor **C-5**, es visible que considera que en x = *-2* existe una intersección con el eje de las abscisas, misma que sirve de referencia para realizar un esbozo similar a la gráfica de una función de valor absoluto como el caso *de f(x)*= *\x-2\,* además no se cumplen las condiciones: f'(x)>0 para x<-2 y/'(x)>0 para x<-2, sin embargo, al analizar la gráfica esbozada, tenemos que las características de la misma corresponden *a f(x)* y no a f'(x), esto hace suponer una confusión entre una función y su derivada.

Esbozos de los profesores del grupo D.
Las producciones de los profesores clasificados en el **grupo D.**



D-2 D-3

El profesor **D-2**, esboza una gráfica que cumple claramente con las condiciones solicitadas, /'(x)>0 para x<-2 y f'(x)>0 para x<-2, además se cumple que en x = -2 se tiene un punto estacionario.

Para el profesor **D-3**, realiza dos esbozos, el primero de ellos corresponde a una función siempre creciente para el intervalo mostrado y adicionalmente presenta un punto de intersección con el eje de las abscisas, siendo la expresión analítica asociada $f(x) = x +$ c; en tanto que para el segundo bosquejo, se tiene que en x = -2 existe una intersección, para x<-2 se tiene que $f(x)>0$ y para x >-2 se cumple que f'(x)<0.

En un análisis general, de los profesores que realizaron algún esbozo lo siguiente, tenemos que:

- El 66.7 por ciento (grupos A, B, C y D) de los profesores que realizaron al menos un esbozo para las condiciones solicitadas en esta pregunta, asoció al punto estacionario de la función con el cero de la misma (intersección con el eje de las abscisas). Con esto datos es posible afirmar que existe confusión entre/(x) *y f(x),* al menos en *x=a*

- El 45.5 por ciento (grupos A, B y C), esboza gráficas que cumplen con las condiciones de *J(x)>0* para x<-2 y para *x>-2,* aunque estas condiciones debieron cumplirse pero para/'(x), es probable que se deba a una confusión entre *f(x) y f(x).*

- Un 27.3 por ciento (grupos A y D) de los profesores, bosquejo una gráfica que cumple las condiciones solicitadas para/'(x), sin embargo, solamente un profesor no asoció al punto estacionario con el cero de la función.

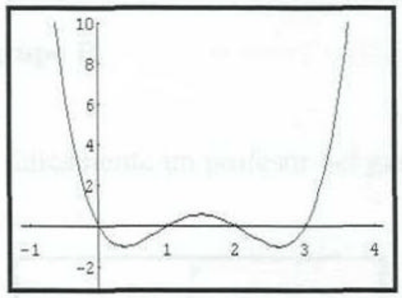
- Solamente uno de once profesores (grupo D) esbozó una gráfica que cumple con todas las condiciones solicitadas.

Con todos estos datos, es posible suponer que el proceso de reversibilidad en los profesores es escaso y que además existe proclividad a confundir *a f{x)* con f(x) al menos en un 60% de los casos.

Pregunta 9.

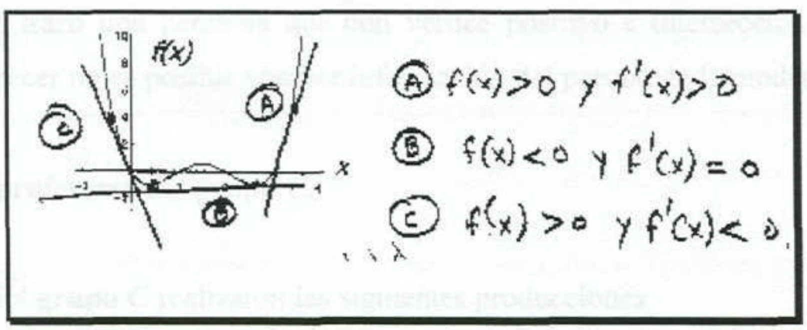
Continuando con la exploración del proceso de reversibilidad, ahora la pregunta está diseñada para el tratamiento en el sistema gráfico, la construcción de la función integral a partir de la función derivada; en el entendido que esta pregunta incluye todos los rasgos característicos del comportamiento variacional.

La Gráfica siguiente corresponde a cierta *f(x),* esboce al menos una que corresponda a f(x)



Esbozos de los profesores del grupo A.

Solamente un profesor realizo un esbozo que es el siguiente.



A-4

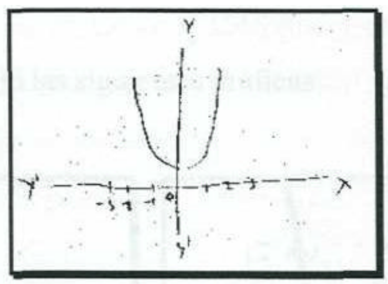
El profesor **A-4**, elige tres puntos sobre la gráfica para trazar sobre ellos una recta tangente y estableciendo la asociación:

Para el punto a,f(x)>0 *y f(x)>0* Para el punto *c f(x)>0 y f'(x)<0* Para el punto b,/(x)<0 *y f'(x)=O*

Es evidente que el profesor busca describir, en parte, el comportamiento de la gráfica mostrada mediante el empleo de rectas tangentes a un punto, donde de acuerdo con el argumento, no presenta confusión entre f(x) y f'(x). Es posible que no exista el proceso de reversibilidad o que la pregunta haya sido confusa.

Esbozos de los profesores del grupo B.

Al igual que en el caso anterior, únicamente un profesor del **grupo B** bosquejó una gráfica y que es la que se muestra:

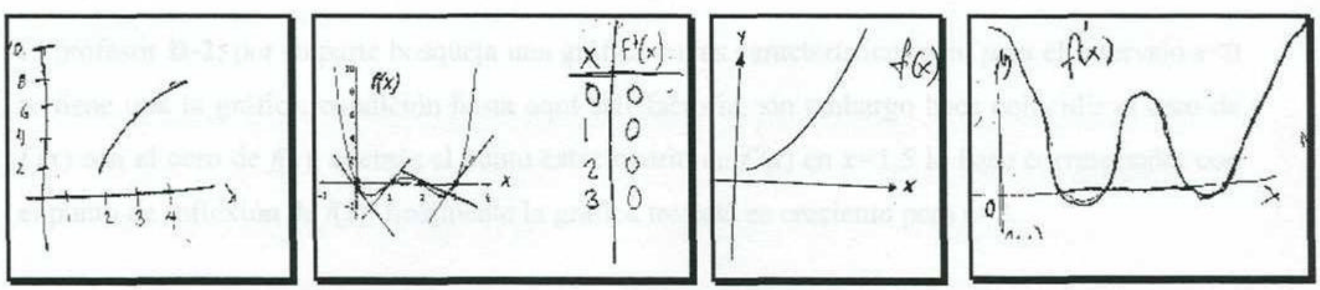


B-2

El profesor **B-2**, trazó una parábola que con vértice positivo e intersección con el eje de las ordenadas, al parecer no es posible obtener información del porque de la producción del profesor.

Esbozos de los profesores del grupo C.

Los profesores del **grupo C** realizaron las siguientes producciones

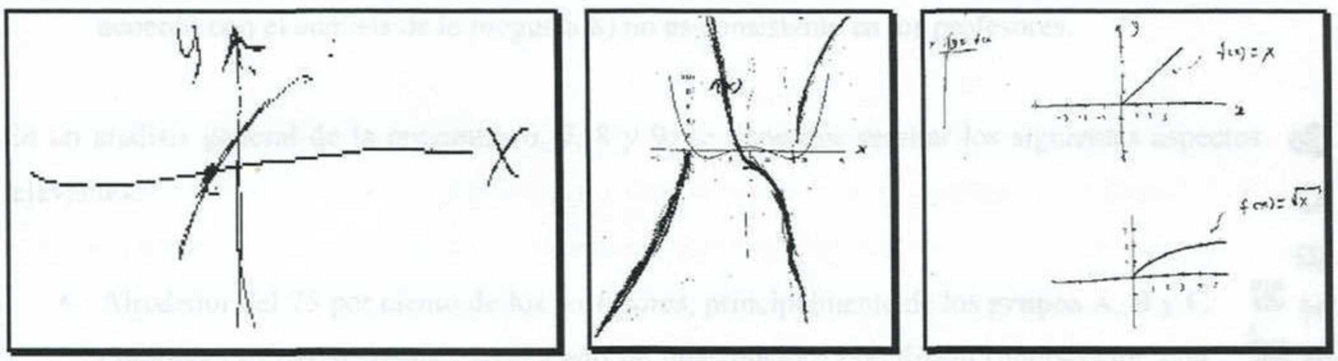


C-2 C-3 C-4 C-5

Los profesores **C-2** y **C-4**, esbozan una gráfica creciente y positiva la cual no provee información relevante. El profesor **C-3**, traza rectas tangentes en diferentes puntos previamente establecidos, muy similar al caso del profesor **A-4**, aunque no manifiesta alguna expresión analítica. En el primer caso del profesor **C-5**, únicamente realiza un desplazamiento a la derecha respecto a la gráfica de la función original.

Esbozos de los profesores del grupo D.

El grupo D de profesores bosquejó las siguientes gráficas



D-1 **D-2** **D-3**

La gráfica esbozada por el profesor **D-1**, consiste en una función creciente para todo el intervalo mostrado, la cual no provee información relevante.

El profesor **D-2**, por su parte bosqueja una gráfica cuyas características son, para el intervalo x<0 se tiene una la gráfica, condición hasta aquí satisfactoria, sin embargo hace coincidir el cero de *f(x)* con el cero *de f(x),* además el punto estacionario de f'(x) en x=1.5 lo hace corresponder con el punto de inflexión *de f(x);* finalmente la gráfica trazada es creciente para x>3.

Por su parte el profesor **D-3**, considera en el bosquejo la gráfica de una función lineal cuya expresión analítica es *f(x)=x,* y esboza además una el segmento superior de una parábola con eje focal en el eje de las abscisas y cuya expresión analítica es

$$f(x) = \sqrt{4x}$$

Al analizar en conjunto los bosquejos de los profesores para esta pregunta, tenemos que:

- El 44.4 por ciento de los profesores (grupos C y D), esbozo una gráfica creciente.

- El 22 por ciento (grupos A y C), pretendió realizar un análisis de *f'(x)* a través de rectas tangentes en algunos puntos.

- Es posible que no exista habilidad en el tratamiento en el sistema de representación gráfico y por tal motivo, el proceso de reversibilidad no se haya manifestado en esta pregunta, aunque cabe la posibilidad de que en caso de existir parcialmente (de acuerdo con el análisis de la pregunta 8) no es consistente en los profesores.

En un análisis general de la preguntas 6, 7, 8 y 9, se tiene que resaltar los siguientes aspectos relevantes:

- Alrededor del 75 por ciento de los profesores, principalmente de los **grupos A, B** y **C** confunde *a f'(á)=0* (punto estacionario de una función) con *f(a)=Q* (intersección con *%* el eje de las abscisas), es posible que para los profesores tenga el mismo significado.

- El 45.5 por ciento **(grupos A, B** y **C),** esboza gráficas que cumplen con las condiciones *de f(x)* aun cuando las condiciones solicitadas son para f'(x), es probable que se deba a una confusión entre f*(x)* y f'(x).

- En referencia a las preguntas que involucran el cumplimiento de dos condiciones simultaneas para la construcción de alguna gráfica, el 35 por ciento de los profesores es proclive a bosquejar una gráfica que cumplan una sola de las dos condiciones, sea para f'(x) o *para f(x);* esto para los **grupos A** y **B.** En tanto que otro 35 por ciento elabora dos gráficas, una para cada condición, sin embargo de este porcentaje solo tres quintas partes logra esbozar gráficas que cumplen las condiciones pero en forma separada. Esto se evidencia principalmente para los **grupos A y C.**

- En cuanto al proceso de reversibilidad, al parecer, prácticamente no existe debido a que solamente el 6 por ciento de los profesores **(grupo D)** esbozó dos de tres gráficas que cumplen perfectamente las condiciones de f(x) dada las condiciones de f'(x), sean gráfica o analíticamente. Aunado a esto, el 22 por ciento **(grupos A** y **C),** pretendió realizar un análisis de f'(x) a través de rectas tangentes en algunos puntos, asumiendo tal vez, que la gráfica mostrada es/(x).

- Es posible que no exista habilidad en el tratamiento en el sistema de representación gráfico y por tal motivo, el proceso de reversibilidad no se haya manifestado en esta pregunta, aunque cabe la posibilidad de que en caso de existir parcialmente (de acuerdo con el análisis de la pregunta 8) no es consistente en los profesores.

En un análisis general de los grupos en que fueron clasificados los profesores, se observa que existe cierta diversidad en las producciones de los profesores, sin embargo se identificaron algunos patrones que se muestran a continuación:

- **GRUPO A**. El proceso de reversibilidad es prácticamente nulo, el 50 por ciento de los profesores no concibe la idea de construir gráficas que satisfagan dos condiciones simultáneamente, existe proclividad a asociar el crecimiento de una función con el hecho de que esta sea positiva, o bien si es decrecimiento con negatividad. Además los profesores tienden a considerar una o las dos igualdades siguientes *f(a)=f(a),* ***f(x)* =/x).**

- **GRUPO B.** Al igual que los profesores del grupo A, tienden a confundir a *f(a)* con *f(a)* ya que asocian el siguiente comportamiento: si *f(a)* es mayor que cero, entonces *f(a)* es mayor que cero, y si *f(a)* es negativa entonces *f(a)* es negativa, situación similar *con f(x)* y f'(x). No manifiestan alguna evidencia del proceso de reversibilidad, al parecer no existe.

- **GRUPO C.** Al igual que los profesores de los grupos A y B, tienden a confundir f'(x) con f(x) o **bien *f(a)*** *con f(a).* Además existe proclividad a considerar solamente una de las dos condiciones para el esbozo de gráficas en un 60 por ciento, es probable que no exista el proceso de reversibilidad.

- **GRUPO D**. En este grupo existen indicios que indican la posible existencia del proceso de reversibilidad, aunque no hay consistencia en los bosquejos de los profesores.

En un análisis global de las 9 preguntas que se incluyeron en el cuestionario, se busca destacar los aspectos más significativos acerca de las concepciones que tienen los profesores referentes a los rasgos del comportamiento variacional de funciones. Continuamos con la clasificación inicial.

- **GRUPO A** Existe cierta habilidad de interpretar el comportamiento variacional de una función de acuerdo a únicamente una condición especifica, sin embargo, en el momento en que aparecen dos condiciones que deben cumplirse simultáneamente, manifiestan dificultad en la interpretación, debido a que sólo buscan satisfacer cualquiera de ellas, además es posible que confundan *f'(x)* con *f{x),* por lo que al analizar a f'(x), realmente buscan satisfacer la condición para f(x) dando por hecho que se satisface a *f{x),* o bien condiciones similares para *f(a)=f{a).* No existe evidencia del proceso de reversibilidad.

- **GRUPO B**. Manifiestan aspectos muy similares al grupo anterior, además no existe evidencia de la existencia del proceso de reversibilidad, hay proclividad a confundir a *x con f(x),* es decir, en el semieje negativo de las abscisas la función es negativa.

- **GRUPO C**. Manifiestan concepciones similares, a los grupos A y B, sin embargo se presentan contradicciones en las respuestas ya bien sea en cuanto al signo de la función o en cuanto al comportamiento de la misma, es posible la existencia de una transición en este grupo, en virtud de que un sector de ellos, al parecer, no confunde a *f'(x) con f(x).* No existe evidencia del proceso de reversibilidad en los profesores de este grupo.

- **GRUPO D.** Los profesores de este grupo, muestran un dominio muy notorio acerca del análisis de funciones, en el entendido que las contradicciones fueron nulas, existen indicios acerca de la existencia del proceso de reversibilidad en los profesores.

IV.3 Análisis de entrevistas.

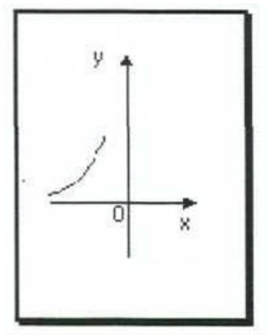
Con la finalidad de indagar algunas concepciones que permitan confirmar ciertas hipótesis, se diseñaron y aplicaron entrevistas para los profesores, siendo importante señalar que se seleccionaron a dos profesores de cada uno de los grupos; las entrevistas se presentan a continuación.

GRUPO A.

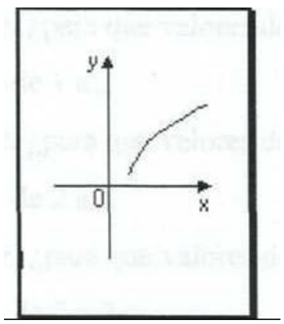
Profesor A-4.

- **Entrevistador.** ¿consideras que una función creciente es por consecuencia positiva?
- **Profesor A-4. Si.**
- **Entrevistador.** Entonces si una función es decreciente ¿podemos decir que es negativa?
- **Profesor A-4.** Supongo que si
- **Entrevistador.** Entonces que tipo de argumentación tienes para la respuesta 5 (se le muestra nuevamente el cuestionario)
- **Profesor A-4 ……….**
- **Entrevistador.** ¿Utilizas la misma argumentación para la pregunta 4?
- **Profesor A-4.** No…… los cuadrantes
- **Entrevistador.** Puedes analizar el comportamiento de las gráficas que se muestran.

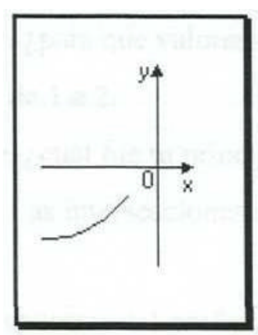
Gráfico mostrado **Interpretación del profesor**



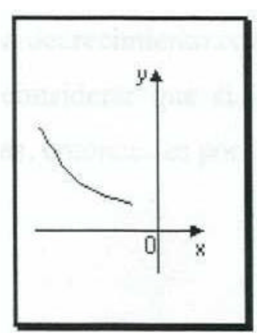
"La gráfica esta en el segundo cuadrante donde las x son negativas"



"Aquí esta en el primer cuadrante donde las equis son positivas"

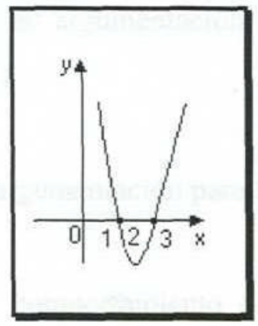


"La gráfica esta en el tercer cuadrante por lo que la función es negativa"



"Aquí la función en negativa”

— **Entrevistador.** Observa la siguiente gráfica y contesta lo que pide



Entrevistador. ¿para que valores de x, la función es decreciente?

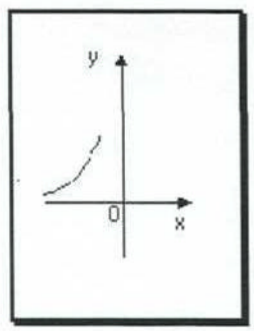
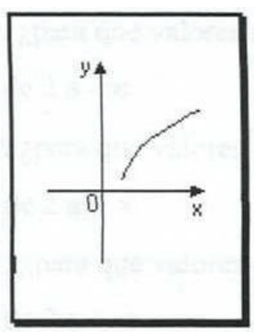
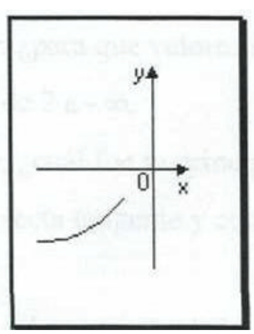
- **Profesor A-4.** de **1** a **2**
- **Entrevistador.** ¿para que valores de x, la función es creciente?
- **Profesor A-4.** de **2** a **3**
- **Entrevistador.** ¿para que valores de x, la función es positiva?
- **Profesor A-4.** de **2** a **3**
- **Entrevistador.** ¿para que valores de x, la función es negativa?
- **Profesor A-4.** de **1** a **2.**
- **Entrevistador.** ¿cuál fue tu principal argumento?
- **Profesor A-4.** Las intersecciones con el eje x, en 1 y 3.

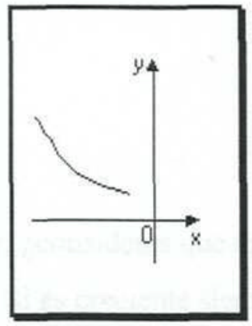
De acuerdo con las respuestas del profesores A-4, se tiene evidencia que considera a crecimiento y positividad, así como decrecimiento con negatividad como condiciones concomitantes, además existe proclividad a considerar que si la gráfica de una función se encuentra en el semieje negativo de las abscisas, entonces es por consecuencia negativa.

Profesor A-2

- **Entrevistador.** ¿Consideras que una función creciente es por consecuencia positiva?
- **Profesor A-2.** Si.
- **Entrevistador.** Entonces si una función es decreciente ¿podemos decir que es negativa?
- **Profesor A-2.** Si se cumple una condición se da la otra

- **Entrevistador.** Entonces que tipo de argumentación tienes para la respuesta 5 (se le muestra nuevamente el cuestionario)
- **Profesor A-2.** la recta tangente.
- **Entrevistador.** ¿Utilizas la misma argumentación para la pregunta 4?
- **Profesor A-2.** si.
- **Entrevistador.** Puedes analizar el comportamiento de las gráficas que se muestran a continuación.

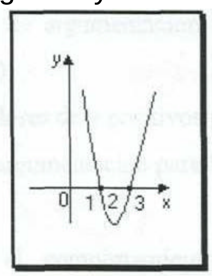
Gráfico mostrado	Interpretación del profesor
	"La concavidad positiva por lo tanto es positiva"
	"Concavidad hacia abajo por lo tanto es negativa"
	"Igual que uno"



"concavidad hacia arriba por lo tanto es positiva"

—

— **Entrevistador.** Observa la siguiente gráfica y contesta lo que pide



— **Entrevistador.** ¿para que valores de x, la función es decreciente?

— **Profesor A-2.** de **2** a **-** co

— **Entrevistador.** ¿para que valores de x, la función es creciente?

— **Profesor A-2.** de **2** a **+** oo

— **Entrevistador.** ¿para que valores de x, la función es positiva?

— **Profesor A-2.** de **2** a **+** oo

— **Entrevistador.** ¿para que valores de x, la función es negativa?

— **Profesor A-2.** de **2** a **-** oo.

— **Entrevistador.** ¿cuál fue tu principal argumento?

— **Profesor A-2.** recta tangente y concavidad

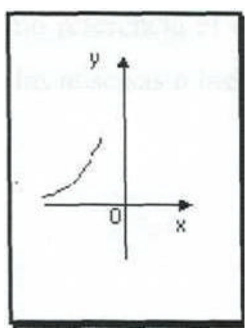
Para el profesor A-2, existe proclividad a asociar las condiciones de crecimiento y positividad, o bien decrecimiento con negatividad; de acuerdo con las respuestas, para considerar si una gráfica es positiva aplica el criterio de concavidad hacia arriba, en tanto que la gráfica es negativa si la concavidad es hacia abajo.

GRUPO B

Profesor B-I

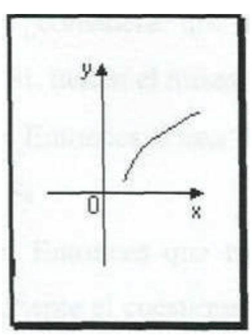
- **Entrevistador.** ¿consideras que una función creciente es por consecuencia positiva?.
- **Profesor B-I.** Si es creciente siempre es positiva... toma todos los valores positivos de x.
- **Entrevistador.** Entonces si una función es decreciente ¿podemos decir que es negativa?
- **Profesor B-I.** Si igual...igual
- **Entrevistador.** Entonces que tipo de argumentación tienes para la respuesta 5 (se le muestra nuevamente el cuestionario)
- **Profesor B-I.** toma los todos los valores de y positivos por lo tanto es creciente positiva.
- **Entrevistador.** ¿Utilizas la misma argumentación para la pregunta 4?
- **Profesor B-I.** si.
- **Entrevistador.** Puedes analizar el comportamiento de las gráficas mostradas a continuación.

Gráfico mostrado **Interpretación del profesor**



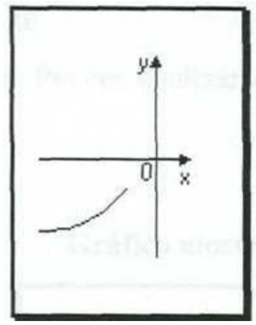
"decreciente"

nota: realiza el análisis desde el eje de las ordenadas hacia el semieje negativo de las abscisas



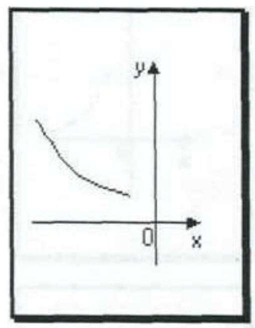
"Creciente positiva"

nota: argumento similar al anterior



"Decreciente negativa"

nota: argumento similar a los anteriores.



"creciente negativa"

nota: argumento similar a los anteriores.

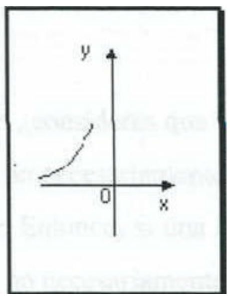
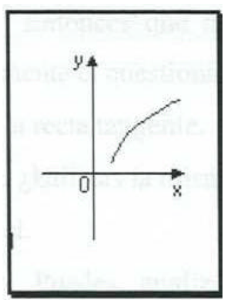
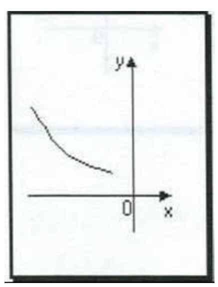
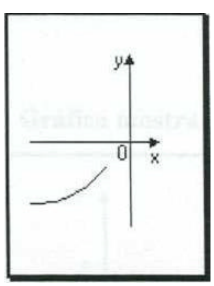
Con base en las respuestas, tenemos que el profesor tiende a asociar las condiciones crecimiento y positividad, así como decrecimiento y negatividad, además es proclive iniciar el análisis de las funciones tomando como referencia el eje de las ordenadas, para a partir de este continuar hacia la semieje negativo de las abscisas o bien hacia la semieje positivo, dependiendo donde se ubique la gráfica.

Profesor B-2

— **Entrevistador.** ¿consideras que una función creciente es por consecuencia positiva?
— **Profesor B-2.** Si, tienen el mismo comportamiento.
— **Entrevistador.** Entonces si una función es decreciente ¿podemos decir que es negativa?
— **Profesor B-2. Si**
— **Entrevistador.** Entonces que tipo de argumentación tienes para la respuesta 5 (se le muestra nuevamente el cuestionario)
— **Profesor B-2.** *f(x)*
— **Entrevistador.** ¿Utilizas la misma argumentación para la pregunta 4?

Profesor B-2. si.

Entrevistador. Puedes analizar el comportamiento de las gráficas que se muestran a continuación.

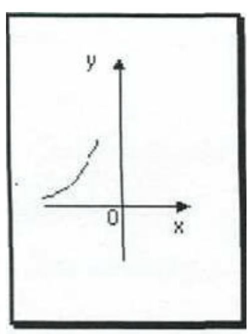
Gráfico mostrado	**Interpretación del profesor**
	"es creciente positiva" nota: realiza el análisis de izquierda a derecha
	“creciente positiva" nota: mismo análisis que el anterior
	"decreciente negativa" nota: realiza el análisis de derecha hacia abajo
	"creciente negativa" nota: inicia con el análisis de derecha a izquierda

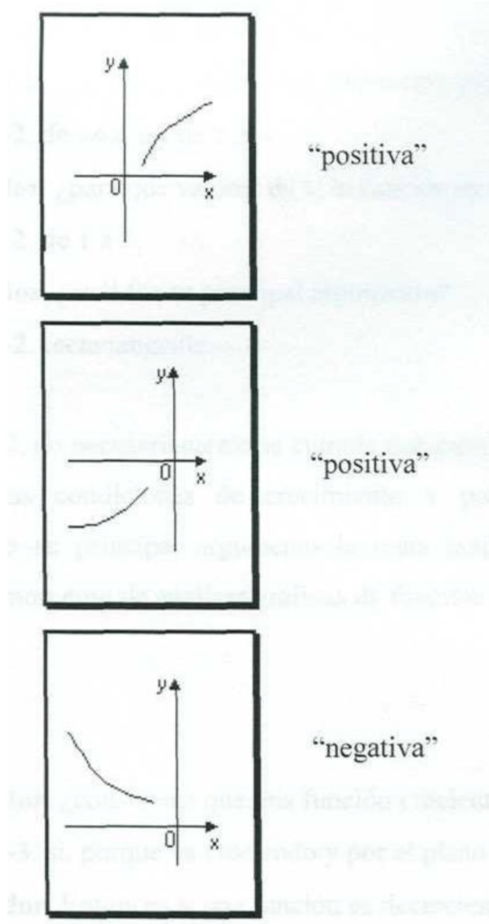
Al igual que el profesor B-V el profesor B-2 manifiesta concepciones similares, aunque el sistema de referencia del eje de las ordenadas no es consistente.

GRUPO C Profesor

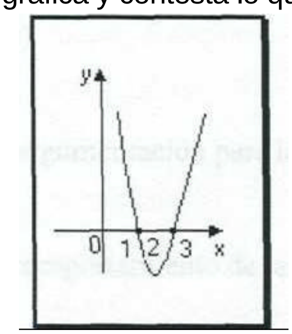
C-2

— **Entrevistador.** ¿consideras que una función creciente es por consecuencia positiva?
— **Profesor C-2.** no necesariamente
— **Entrevistador.** Entonces si una función es decreciente ¿podemos decir que es negativa?
— **Profesor C-2.** no necesariamente
— **Entrevistador.** Entonces que tipo de argumentación tienes para la respuesta 5 (se le muestra nuevamente el cuestionario)
— **Profesor C-2.** la recta tangente.
— **Entrevistador.** ¿Utilizas la misma argumentación para la pregunta 4?
— **Profesor C-2.** si.
— **Entrevistador.** Puedes analizar el comportamiento de las gráficas mostradas a continuación.

Gráfico mostrado	Interpretación del profesor
	“positiva”



— **Entrevistador.** Observa la siguiente gráfica y contesta lo que pide



- **Entrevistador.** ¿para que valores de x, la función es decreciente?

- **Profesor C-2**. de -8 a **2**

- **Entrevistador.** ¿para que valores de x, la función es creciente?

— **Profesor C-2.** de **2** a **+**8

— **Entrevistador.** ¿para que valores de x, la función es positiva?

— **Profesor** C-2. de -8 a 1 y de 3 a 8

— **Entrevistador.** ¿para que valores de x, la función es negativa?

— ProfesorC-2.de 1 a 3.

— **Entrevistador.** ¿cuál fue tu principal argumento?

— **Profesor** C-2. recta tangente.

Para el profesor C-2, no necesariamente se cumple que para la gráfica de una función se cumplan simultáneamente las condiciones de crecimiento y positividad, o bien decrecimiento o negatividad, siendo su principal argumento la recta tangente. Sin embargo muestra ligeras contradicciones al momento de analizar gráficas de funciones.

Profesor C-3

— **Entrevistador.** ¿consideras que una función creciente es por consecuencia positiva?

— **Profesor** C-3. si, porque va creciendo y por el plano positivo

— **Entrevistador.** Entonces si una función es decreciente ¿podemos decir que es negativa?

— **Profesor** C-3. decreciendo y plano negativo.

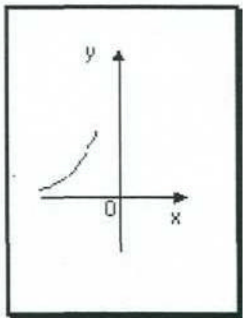
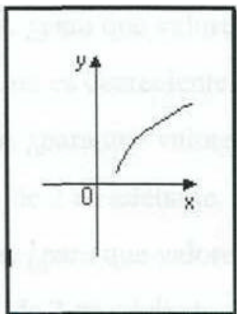
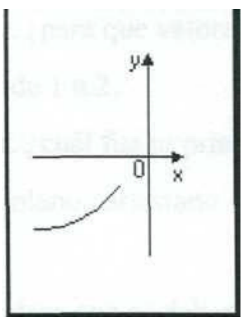
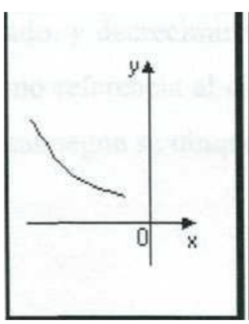
— **Entrevistador.** Entonces que tipo de argumentación tienes para la respuesta 5 (se le muestra nuevamente el cuestionario)

— **Profesor C-3.** la misma.

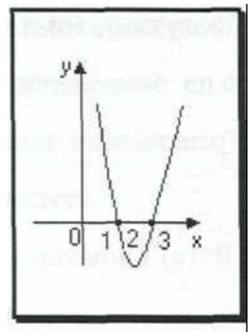
— **Entrevistador.** ¿Utilizas la misma argumentación para la pregunta 4?

— **Profesor C-3.** igual.

— **Entrevistador.** Puedes analizar el comportamiento de las siguientes gráficas.

Gráfico mostrado	**Interpretación del profesor**
	"negativa" nota: realiza un recorrido de derecha a izquierda
	"positiva" nota: inicia un recorrido de izquierda a derecha
	"negativa" nota: mismo análisis que en gráfica
	"positiva respecto a y... negativa respecto a x" nota: inicia un recorrido de derecha a izquierda,

Entrevistador. Observa la siguiente gráfica y contesta lo que pide



— **Entrevistador.** ¿para que valores de x, la función es decreciente?

— **Profesor C-3.** no es decreciente

— **Entrevistador.** ¿para que valores de x, la función es creciente?

— **Profesor C-3.** de 2 en adelante, a la izquierda y a la derecha

— **Entrevistador.** ¿para que valores de x, la función es positiva?

— **Profesor C-3.** de 2 en adelante y de 1 a la izquierda

— **Entrevistador.** ¿para que valores de x, la función es negativa?

— **Profesor C-3.** de **1** a **2.**

— **Entrevistador.** ¿cuál fue tu principal argumento?

— **Profesor C-3.** plano cartesiano.

El profesor C-3, considera que se deben cumplir simultáneamente las condiciones de crecimiento y positividad por un lado, y decrecimiento con negatividad por otro, además, para el análisis de gráficas, considera como referencia al eje de las ordenadas, y continua hacia el semieje negativo o positivo de las abscisas según se ubique la gráfica en cada plano.

GRUPO D

Profesor D-1

— **Entrevistador.** ¿qué argumentos utilizaste para las preguntas 2, 3, 4, 5 y 6?

— **Profesor D-l.** el criterio de la primer derivada, si la recta tangente en el intervalo mostrado tiene un ángulo mayor de noventa grados, entonces la pendiente es negativa y si el ángulo es agudo entonces la derivada es positiva.

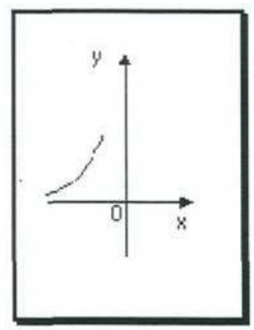
- **Entrevistador.** ¿Solamente utilizaste estos conceptos?
- **Profesor D-l.** Si, bueno... evalué numéricamente en cada intervalo
- **Entrevistador.** ¿qué entiendes por punto estacionario?
- **Profesor D-l.** es donde no crece ni decrece.
- **Entrevistador.** ¿qué entiende por la expresión/'(x)>0 para x<-2?
- **Profesor D-l.** la función es creciente.
- **Entrevistador.** y para/'(x)>0 para x>-2
- **Profesor D-l.** también creciente
- **Entrevistador.** Que significa en tal caso *x=-2*
- **Profesor D-l.** un punto estacionario.
- **Entrevistador.** ¿qué significan las intersecciones con el eje de las abscisas para f'(x)?
- **Profesor D-l.** las raíces son puntos clave para esbozar f(x) sustituye en la función original para ver como se comporta la derivada.

En este caso, es evidente, de acuerdo con las respuestas, que domina sólidamente algunos de los elementos característicos del análisis de la variación de las funciones.

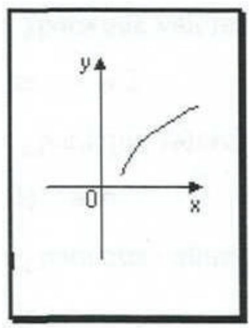
Profesor D-3

- **Entrevistador.** ¿consideras que una función creciente es por consecuencia positiva?
- **Profesor D-3.** según sea el caso
- **Entrevistador.** Entonces si una función es decreciente ¿podemos decir que es negativa?
- **Profesor D-3.** según sea el caso
- **Entrevistador.** Puedes analizar el comportamiento de las gráficas mostradas a continuación.

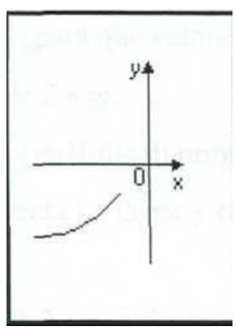
Gráfico mostrado **Interpretación del profesor**



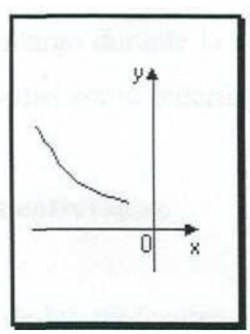
"positiva independientemente de la ubicación, su concavidad, además es creciente".



"negativa, concavidad"

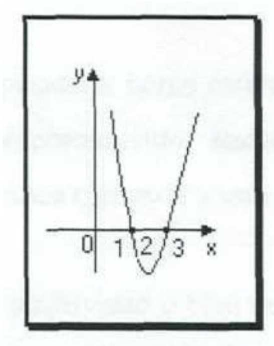


"positiva, independientemente de la ubicación, concavidad además es creciente"



"positiva pero decreciente'

-- **Entrevistador.** Observa la siguiente gráfica y contesta lo que se pide



— **Entrevistador.** ¿para que valores de x, la función es decreciente?

— **Profesor D-3.** de **-8** a **2**

— **Entrevistador.** ¿para que valores de x, la función es creciente?

— **Profesor D-3.** de 2 a 8

— **Entrevistador.** ¿para que valores de x, la función es positiva?

— **Profesor D-3.** de -8 a 2

— **Entrevistador.** ¿para que valores de x, la función es negativa?

— **Profesor D-3.** de 2 a 8.

— **Entrevistador.** ¿cuál fue tu principal argumento?

— **Profesor D-3.** recta tangente y concavidad.

En caso del profesor **D-3**, manifiesta que las condiciones de positividad y crecimiento no son concomitantes, sin embargo durante la entrevista, muestra contradicciones, además es proclive a considerar a la concavidad como criterio para determinar si una función es positiva o negativa

Análisis global de las entrevistas.

Para el 63 por ciento de los profesores entrevistados, el crecimiento y positividad por un lado, y por otro, decrecimiento con negatividad son condiciones concomitantes (profesores A, B y uno del C).

El 25 por ciento considera como argumento la concavidad de la gráfica para determinar si es positiva (cóncava hacia arriba) o negativa (cóncava hacia abajo)

El 38 por ciento, muestran proclividad a considerar como referencia al eje de las ordenadas, para a partir de este, continuar el análisis del comportamiento, hacia el semieje negativo o positivo de las abscisas según sea la ubicación de la gráfica (grupo B y uno del C).

El 25 por ciento afirma que crecimiento y positividad o bien decrecimiento y negatividad no son condiciones concomitantes, sin embargo durante la entrevista muestran contradicciones en sus respuestas.

CONCLUSIONES GENERALES

De acuerdo con el análisis de resultados, tanto del cuestionario de exploración como de las entrevistas, obtenemos las siguientes conclusiones, primero clasificadas por la transición entre sistemas de representación (conversión) y posteriormente de acuerdo con la transición entre un mismo sistema de representación (tratamiento).

- En referencia a la transición entre los sistemas de representación gráfico al analítico, observamos una proclividad a confundir el comportamiento de la función con el signo de la misma, es decir, tienden a asociar la expresión $f(x)>0$ con gráficas en las que se cumple que $f(x)>0$ o bien $f'(x)<0$ con gráficas para las cuales se cumple que $f(x)<0$ por un lado, y por otro, la expresión: $f[x+h)-f(x)>Q$, es asociada con gráficas en las que también se satisface que la función $f(x)$ es positiva, análogamente asocian la expresión $f(x+h)-f(x)<0$ con gráficas en las que la función es negativa.

- Respecto a la transición del los sistemas de representación verbal-gráfico, al pedirles que establecieran las relación de las condiciones creciente y positiva (expresadas en forma verbal-escrita) con una serie de gráficas un alto porcentaje (93 por ciento) lo hace correctamente, sin embargo, al pedirles que asocien las condiciones creciente y negativa (bajo las mismas condiciones), tienden a asociar aquellas funciones que son positivas, mientras que al solicitarles que asocien las condiciones decreciente y positiva, tienden a asociar aquellas gráficas para las cuales se cumple que la función es negativa. Tal vez los profesores le dan un carácter concomitante a las condiciones ya citadas; existe, además en algunos profesores, la dificultad de seleccionar una gráfica que cumpla con dos condiciones simultáneamente, una referente al signo de la función y la otra correspondiente al análisis de la variación de las funciones. Es importante mencionar que solo el 20 por ciento de los profesores muestra, a través de sus respuestas, cierto dominio en el análisis de la variación de las funciones.

- En relación a la transición entre los sistemas analítico-grafico, las preguntas fueron planteadas de tal manera que, en la primera parte los profesores tenían que seleccionar, de una serie de gráficas aquellas que cumplieran con las condiciones analíticas solicitadas, en la segunda parte, se les pidió la construcción de gráficas de acuerdo con las condiciones analíticas solicitadas.

- En cuanto a la selección de gráficas, una vez dadas las condiciones expresadas analíticamente, observamos que existe proclividad en cierto grupo a confundir el crecimiento de una función *(f'(x)>0)* con su ubicación el semieje positivo de las abscisas, en tanto que el decrecimiento de la función (f''(x)<0) es asociado con las gráficas cuya ubicación es el semieje negativo de las abscisas. Para otro grupo de profesores, existe proclividad a relacionar la expresión f(x)>0 con una gráfica cuyas ordenadas sean positivas, mientras que, aquella función que posea ordenadas negativas, es asociada con la expresión *f'(x)<0.* En términos generales notamos la Proclividad de sólo atender una condición cuando se planteaban dos simultáneamente. Siendo importante mencionar que aproximadamente el 30 por ciento de los profesores logró asociar correctamente las condiciones analíticas con las gráficas que las satisfacen.

- En la construcción de gráficas dadas las condiciones expresadas mediante el lenguaje analítico, observamos que los profesores dibujan una recta paralela al eje de las abscisas cuando les es dada la condición analítica f'(x)=0, es posible, que consideren que la función que cumple la condición sea una función constante y no conciban el significado del punto estacionario gráficamente. Al solicitar la construcción de gráficas que cumplan dos condiciones del estilo *f(x)>0* y/(x)<0, los profesores son proclives a esbozar una gráfica por cada una de las dos condiciones, las cuales no siempre satisfacen la condición respectiva para la cual fueron construidas. Por otra parte, notamos la existencia de confusiones entre el significado de cero de la función y los puntos estacionarios, por ejemplo, tienden a confundir la expresión *f(a)=0 con f(a)=O* en su representación gráfica, es decir consideran que la intersección de f(x) es la misma para *f(x),* aun cuando esta condición no se solicita. Siendo importante mencionar que sólo el 10 por ciento aproximadamente asocia correctamente las condiciones analíticas con la gráfica correspondiente.

- En cuanto al transición dentro del mismo sistema de representación gráfico, se observó una fuerte proclividad a considerar que, gráficamente *f(a) = f(a),* es decir, asumen que un punto estacionario *de f(x)* es equivalente *a* $f(x_o)=0$. El proceso de reversibilidad, es prácticamente nulo, los profesores tienden a analizar o a construir gráficas que satisfagan las propias condiciones de *f(x)* y no las correspondientes a *f(x).* Generalmente el proceso de graficación de f'(x) dada f(*x),* es relativamente transitable (empíricamente), en cambio, en nuestra indagación, observamos que los profesores al plantearles construir *f(x)* dada f'(x) (proceso de reversibilidad) esbozan rectas tangentes en algunos puntos de la gráfica de f'(x) y solamente uno de ellos logró construir una gráfica aceptable.

BIBLIOGRAFÍA

- δ Dolores, C. 1996. *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato.* Tesis Doctoral. Inédita. Biblioteca de la Facultad de Matemáticas de UAG. Chilpancingo Gro.

- δ Cantoral, R. (1997) *Pensamiento y lenguaje variacional.* Seminario de Investigación, Área de Educación Superior, Cinvestav/IPN México D.F.

- δ Dolores, C. 1999. *Algunos elementos acerca de la variación.* Memorias de la XIII reunión de Matemática Educativa. Santo Domingo. República Dominicana.

- δ Duval, R.: 1993. *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones de Matemática Educativa II.* Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV/ IPN, México D.F.

- δ Rico, L.: 1997. *Educación Matemática en la enseñanza secundaria.* Universidad de Barcelona España.

- δ Dolores, C. Guerrero A., Martínez M., Medina M. 2001, *Un estudio acerca de las concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de funciones elementales",* Reporte de Investigación. XV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Buenos Aires. Argentina.

- δ Piskunov, N.1977, *Cálculo Diferencial e Integral,* Editorial MIR, Moscú

- δ Cáceres, T. (1997). *Pensamiento y lenguaje variacional. Estudio exploratorio de ideas variacionales entre jóvenes escolarizados de 17 a 24 años.* Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav/ IPN.

- δ Martínez, J. *Manejo e Interpretación de la derivada en profesores y estudiantes de nivel superior.* Tesis de Maestría. U.A.E.H. Pachuca Hidalgo.

- δ Guerrero L.; Medina M.; Martínez M. (2000). *Un estudio exploratorio acerca de las concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de funciones elementales.* Tesina de Especialidad en Matemática Educativa. UAEH. Pachuca, Hidalgo.

- δ Garza B. 1990., *Cálculo Diferencial, matemáticas IV,* DGETI, México.

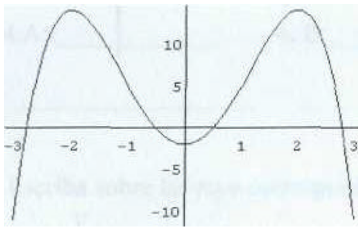
ANEXO

Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Hidalgo

ESTIMADO PROFESOR: El presente cuestionario tiene la intención de explorar algunas ideas matemáticas acerca de las funciones que manejan los profesores de nuestro subsistema. Le pedimos encarecidamente lo conteste con todo cuidado y seriedad, advirtiendo que sus respuestas serán tratadas con plena confidencialidad.

NOMBRE:____ PLANTEL:__________

1. La gráfica siguiente corresponde a la función *f(x).* Subraye la opción u opciones que satisfagan la pregunta: ¿Para qué intervalos se cumple que:

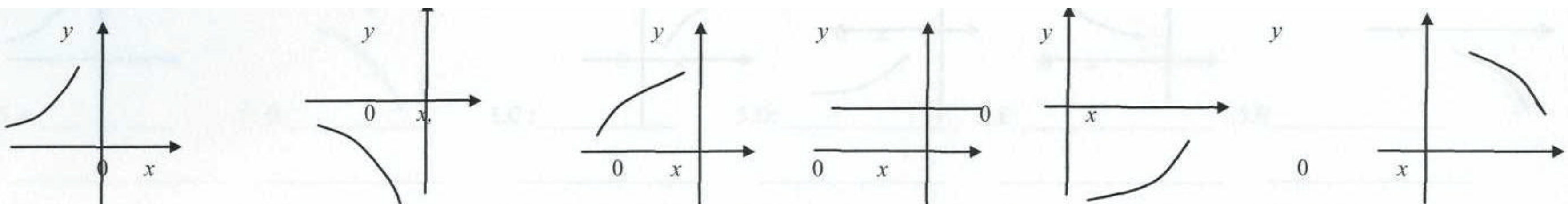


1.A) f(x+h)-f(x)>0, para h>0? a)-3<x<-2 b)-2<x<0 c)0<x<2 d)-3<x<0.5 e) otro:________

1.B) f(x+*h)-f(x)<0,* para h>0? a)-3<x<-2 b)-2<x<0 c)0<x<2 d)-0.5<x<0.5 e) otro:________

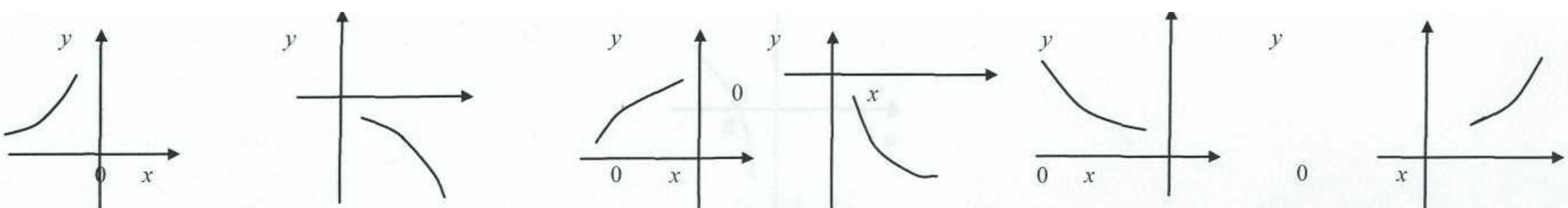
1I.C) /x +h) -*f(x)* = 0, para h > 0? a)x = -3 b) x =-0.5 c)x = 0 d) x=2 e) otro:__________

2. Escriba, f'(x) > 0; *f'(x)* < 0, o bien: *f'(x)* = 0, donde las gráficas satisfagan la condición.



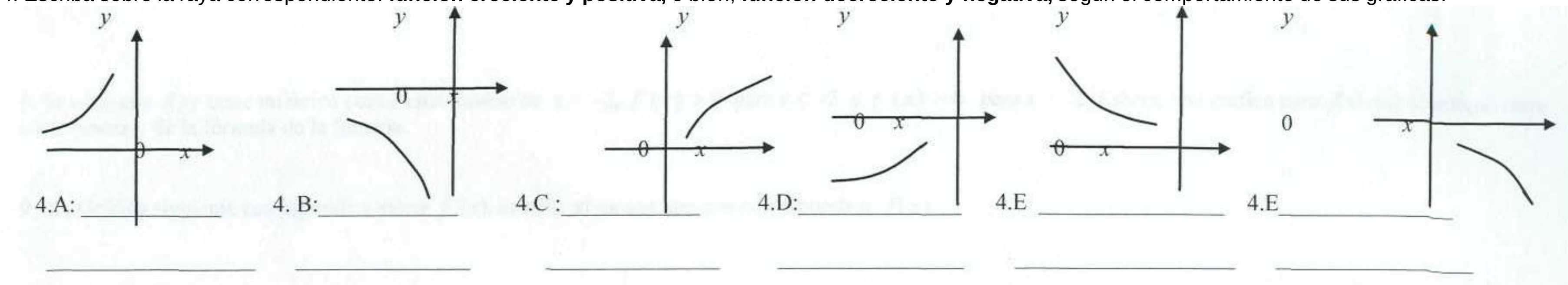
2.A: ___________ 2. B:___________ 2.C :___________ 2.D:___________ 2.E ___________ 2.F ___________

3. Escriba:/'(x) > 0 y *f(x)* > 0, o bien: *f'(x)* < 0 y *f(x)* < 0, donde las gráficas satisfagan las condiciones.



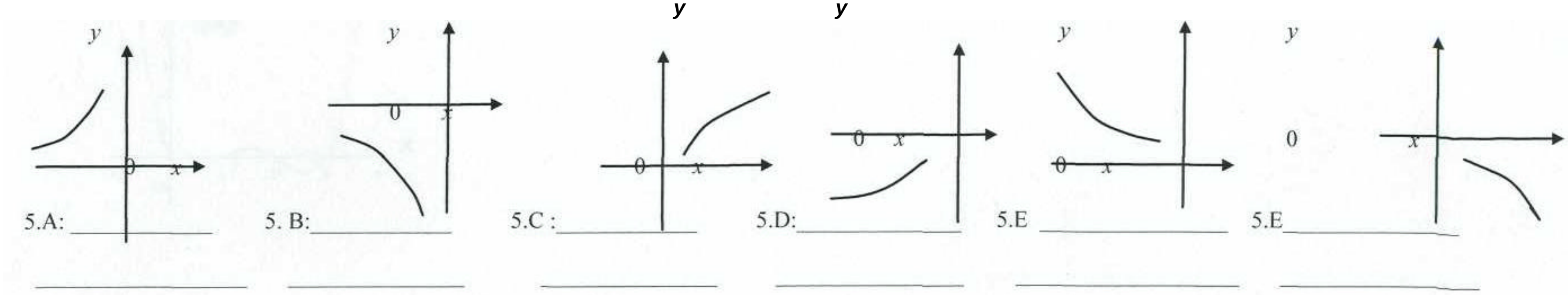
3.A: ___________ 3. B:___________ 3.C :___________ 3.D:___________ 3.E _____________ 3.F _____________

4. Escriba sobre la raya correspondiente: **función creciente y positiva,** o bien, **función decreciente y negativa,** según el comportamiento de sus gráficas.

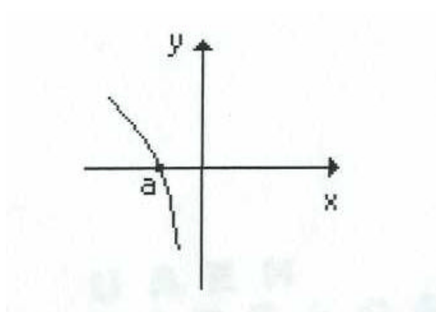


5. Escriba sobre la raya correspondiente: **función creciente y negativa,** o bien, **función decreciente y positiva,** según el comportamiento de sus gráficas.

y ***y***



6. En la gráfica que se muestra a continuación una porción de la función derivada f'(x) en torno al punto *a,* esboce la gráfica de f(x) en torno de x = a.



7.- Trace los gráficos de funciones que satisfagan las siguientes condiciones:
a) $f(a)>0,\ f'(a)<0$ *b)* $f(a)<0, f'(a)>0$ *c)* $f(a)<0, f(a)=0$

8. Se sabe que *f(x)* tiene un único punto estacionario en $x = -2$, $f'(x) >0$ para.t<-2 y/'(*)> 0 para $x> -2$. Esboce una gráfica para f*[x)* que satisfaga estas condiciones y de la fórmula de la función.

9. La Gráfica siguiente corresponde a cierta *f'(x)*, esboce al menos una que corresponda a *f(x)*