



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO  
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA  
ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

# Estabilidad robusta y síntesis de ciclos límite en sistemas controlables de orden $n$

Tesis para obtener el título de

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

presenta

**Lizbeth Sánchez Flores**

bajo la dirección de

**Dr. Raúl Temoltzi Ávila**

Pachuca, Hidalgo. 25 de febrero de 2015.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO  
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA  
ÁREA ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

Lizbeth Sánchez Flores  
P R E S E N T E

Por este conducto le comunico que el Jurado que le fue asignado a su trabajo de tesis titulado *Estabilidad robusta y síntesis de ciclos límite en sistemas controlables de orden  $n$* , después de revisarlo en reunión han decidido autorizar la impresión del mismo, hechas las correcciones que fueron acordadas.

A continuación se anotan las firmas de conformidad de los integrantes del Jurado:

Presidente: Mtra. Margarita Tetlalmatzi Montiel

Secretario: Dr. Roberto Ávila Pozos

Primer Vocal: Dr. Ricardo Cruz Castillo

Segundo Vocal: Dr. Arturo Criollo Pérez

Tercer Vocal: Dr. Raúl Temoltzi Ávila

Atentamente

"Amor, Orden y Progreso"

Mineral de la Reforma, Hidalgo, a 19 de febrero de 2015.

Dr. Rafael Villarroel Flores  
Secretario del Comité de Titulación  
de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas



c.c.p. Archivo

✉ Ciudad Universitaria, Carr. Pachuca-Tulancingo Km. 4.5  
Mineral de la Reforma, Hidalgo 42184 México  
☎ 01 (771) 71 72 158    ☎ 01 (771) 71 72 091

*Con todo mi cariño y amor a mis padres Isidra y Marcelo, que han hecho todo y mas de lo que han podido para que yo pudiera lograr mis sueños, todo ello con mucho cariño y sin pedir nada a cambio.*

*Dulce lunar del sol . . .  
copito de algodón*

## **Agradecimientos**

*A Dios por haberme dado salud para lograr este objetivo y por todas sus bendiciones.*

*Omi, gracias por estar siempre conmigo, gracias por tus cuidados a lo largo de mi vida, por los regaños que merecía y que no entendía, por todo tu amor. Esta tesis es resultado de lo que me has enseñado en la vida ya que siempre has sido una persona honesta, entregada al trabajo y una gran mamá.*

*Papí, gracias por tu paciencia, y amor que aunque no eres muy expresivo yo se que me amas, por enseñarme que la constancia en un trabajo da frutos en el futuro, por apoyarme y entenderme en momentos difíciles y por compartir conmigo tu buen humor.*

*A mis hermanos; Bety y Gabi gracias por preocuparse por su hermana mayor, por todas las travesuras que compartimos, mi pequeño hermano Marce gracias por todo tu amor, desde que llegaste a este mundo nuestra familia es mas feliz. A los tres gracias por estar conmigo es este momento importante en mi vida.*

*A mi tutor de tesis Raúl Temoltzi Ávila sus conocimientos, su paciencia y su motivación han sido fundamentales para realizar este trabajo. Él ha inculcado en mi un sentido de seriedad y responsabilidad, gracias por motivarme hacer las cosas de la mejor manera y por todo lo recibido durante el periodo de tiempo que ha durado la elaboración de esta tesis.*

*A mis profesores, a quienes les debo gran parte de mis conocimientos, gracias por sus enseñanzas, su dedicación y su tiempo.*

*A Emilio, por su comprensión, amor, apoyo en momentos de debilidad, por enseñarme a creer en mí y por contagiarme esa alegría y tranquilidad que lo caracteriza.*

*A Beto y Bris por ser mis compañeros y grandes amigos a lo largo de esta carrera, por estar conmigo en los buenos, malos y peores momentos, los voy a extrañar.*

*A todas la personas que han estado presentes en mi vida me gustaría agradecerles por su amistad, consejos, apoyo, animo y compañía en todo momento. Algunas están conmigo y otras en mis recuerdos y en mi corazón, sin importar donde estén quiero darles las gracias por formar parte de mí, por todo lo que me han dado y por sus bendiciones.*

# Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	V
Introducción	IX
1 Preliminares	1
1.1 Teorema de existencia y unicidad en ecuaciones diferenciales ordinarias .	1
1.2 Elementos básicos de inclusiones diferenciales . . . . .	5
1.3 Controlabilidad y accesibilidad . . . . .	21
1.4 Principio del máximo de Pontryagin . . . . .	29
2 Estabilidad robusta.	33
2.1 Introducción . . . . .	33
2.2 Estabilidad robusta y desviaciones máximas en sistemas de orden 4 . . .	34
2.2.1 Planteamiento del problema . . . . .	37
2.2.2 Determinación de las desviaciones máximas . . . . .	38
2.3 Estabilidad robusta y desviaciones máximas en sistemas de orden $n$ . . .	50
2.4 Ejemplos . . . . .	54
Conclusiones	56
Bibliografía	62

## Resumen

En este trabajo se determinan condiciones que garantizan la estabilidad robusta (basada en la definición introducida por Duboshin y Malkin) para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de orden  $n$  con una perturbación adicional y cuyas soluciones son oscilantes.

Lo anterior se determina resolviendo el problema de desviaciones máximas de las coordenadas fase del sistema (utilizando el principio del máximo de Pontryagin), dichas desviaciones permiten construir un paralelepípedo  $n$ -dimensional que aproxima la frontera del conjunto de accesibilidad del sistema de ecuaciones y dentro del cual se encuentran contenidas las soluciones del sistema.

## Abstract

In this work we determined conditions that guarantee the robust stability (based on the definition introduced by Duboshin and Malkin) for systems of linear differential equations of order  $n$ , with an additional disturbance and whose solutions are oscillating.

This is determined by solving the problem of maximum deviations of phase coordinates of the system (using the Pontryagin maximum principle), these deviations allow building a  $n$ -dimensional parallelepiped which approximates the boundary of the set of accessibility of the system of equations and within which are contained system solutions.

## Introducción

Uno de los principales problemas que se plantean en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias ha sido, desde sus orígenes, el estudio de la estabilidad. Para sistemas lineales de orden  $n$  es posible dar condiciones para determinar su estabilidad; sin embargo, los sistemas no lineales, como el siguiente

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(x, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (0.1)$$

donde  $A$  es una matriz con valores propios con parte real negativa, presentan una variedad de comportamientos mucho más amplios debido a la presencia del término no lineal  $\mathbf{g}(x, t)$ . Determinar soluciones y criterios de estabilidad para el sistema (0.1) no es fácil, estudiar su estabilidad es el mejor acercamiento a conocer el comportamiento de su solución, lo cual siempre es importante. D. M. Grobman y P. Hartman probaron en 1859 de manera independiente que en la vecindad de un punto de equilibrio hiperbólico, un sistema como (0.1) presenta un comportamiento equivalente al del sistema lineal correspondiente. Por lo tanto el teorema de Hartman y Grobman garantiza la estabilidad del sistema no lineal en una vecindad de un punto de equilibrio hiperbólico. Típicamente se desconoce la función  $\mathbf{g}(x, t)$  pero se tiene alguna información sobre esta, por ejemplo, su cota  $\|\mathbf{g}(x, t)\|$ ; ahora bien conociendo esta cota uno se puede preguntar: ¿se pueden dar condiciones para garantizar la estabilidad del sistema, más allá de una vecindad?

Una manera de encontrar dichas condiciones es suponiendo que la dinámica del sistema (0.1) se puede conocer al determinar la dinámica del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (0.2)$$

donde  $u(\cdot)$  es una perturbación que pertenece a un conjunto de funciones acotadas y continuas a trozos.

El desarrollo de la teoría que permite estudiar la estabilidad para ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo, ha sido en gran medida estimulado por sus múltiples aplicaciones. Una aplicación que permite ilustrar el criterio de estabilidad robusta en este trabajo surgió en 1939 cuando B. V. Bulgakov planteó y resolvió el problema de la influencia de la componente boreal de la velocidad de un barco en la inclinación de una brújula [2]. Respecto a la velocidad se supuso que era continua a trozos y de valor absoluto acotado. Se demostró que la peor situación se presenta cuando el barco lleva la velocidad máxima hacia adelante o hacia atrás a lo largo de un meridiano, invirtiendo el curso en cada semiperiodo de las oscilaciones propias de la brújula con respecto a la dirección norte. Estos son los orígenes del problema de desviación máxima que se discutirá más a fondo en el Capítulo 2.

Para poder analizar la estabilidad del sistema (0.2) es natural primero preguntarse cómo es el comportamiento y cómo obtener las soluciones para este tipo de sistemas ya que presentan un comportamiento completamente diferente al que se presenta en sistemas de ecuaciones diferenciales con lado derecho continuo. Por lo tanto, la teoría utilizada para garantizar la existencia de soluciones en sistemas con lado derecho discontinuo difiere de la utilizada para garantizar soluciones en sistemas con lado derecho continuo, en este tipo de sistemas el concepto de solución que se tiene para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias deja de ser válido, ya que en los puntos donde el lado derecho del sistema es discontinuo no es posible construir una solución, pero se puede prolongar la solución siguiendo la idea de construir una solución “saltando” dicha discontinuidad o definiendo de una manera apropiada el lado derecho en los puntos de discontinuidad [9, 18], obteniendo así una solución que es continua pero no diferenciable en dichos puntos. Cabe mencionar que para muchos sistemas con lado derecho discontinuo no existe unicidad para las soluciones. El método utilizado para construir dichas soluciones consiste en aproximar el lado derecho discontinuo del sistema por medio de una familia de funciones que son continuas, y tal que las soluciones de esta familia aproximan la solución del sistema con lado derecho discontinuo. En el límite se obtiene la solución deseada. El procedimiento descrito es conocido como método de Filippov, el cual se desglosa en el Capítulo 1.

En este trabajo se consideran sistemas que son completamente controlables con soluciones oscilantes y con una perturbación adicional  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ , donde  $\mathcal{U}$  es el conjunto de funciones acotadas y discontinuas en un conjunto  $D$  numerable tal que para todo  $\mathbf{x}_i \in D$  se tiene  $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) > \delta > 0$ , para algún  $\delta$  fijo.

El problema que se desea resolver consiste en determinar condiciones que permitan garantizar la estabilidad robusta del sistema (0.2), es decir, se desea encontrar un conjunto cerrado y acotado  $P \subset \mathbb{R}^n$  tal que para cualquier perturbación adicional  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ , las soluciones del sistema se encuentren dentro de dicho conjunto.

Para ello se plantea el problema de determinar desviaciones máximas de las coordenadas fase del sistema, el cual es equivalente a encontrar una perturbación  $u^o(t) \in \mathcal{U}$  (a esta perturbación se le conoce como la peor perturbación), que permita que la solución del sistema se aleje lo más que se pueda del origen y se encuentre dentro del conjunto  $P$ . En el trabajo se muestra que la determinación de las desviaciones máximas para las coordenadas fase del sistema permite construir un ciclo límite máximo, el cual interseca algunos ejes coordenados del sistema en las desviaciones máximas de su correspondiente coordenada, las desviaciones máximas permiten construir un paralelepípedo  $P \in \mathbb{R}^n$ , tal que las soluciones del sistema se encuentran dentro de la región limitada por dicho paralelepípedo, para cada una de las perturbaciones  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ .

El tipo de estabilidad robusta para el sistema (0.2) que se emplea en este trabajo se basa en una modificación a la definición introducida por Duboshin y Malkin [8]. La manera de establecer el criterio de estabilidad robusta se basa en el siguiente método: el sistema (0.2) se transforma en otro sistema equivalente el cual es desacoplado, por medio de una transformación lineal y no degenerada. Se estudia la estabilidad robusta en este

sistema desacoplado, haciendo uso de las desviaciones máximas para las coordenadas fase del sistema y la cota de la peor perturbación  $\delta_1 > 0$ , se establece un criterio de estabilidad robusta para el sistema desacoplado. Ahora bien, con los resultados obtenidos para el sistema desacoplado y aplicando la transformación inversa, se obtienen condiciones para la estabilidad robusta del sistema original (0.2).

En el Capítulo 1, se discuten algunas propiedades de las ecuaciones diferenciales ordinarias con lado derecho continuo y ecuaciones diferenciales ordinarias con lado derecho discontinuo. Esto a fin de mostrar las diferencias que existen entre unas y otras, así mismo se presenta la forma de construir soluciones para sistemas de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo. Por otra parte se introducen algunos conceptos de controlabilidad y accesibilidad que permitirán obtener las desviaciones máximas para el sistema (0.2).

En el Capítulo 2, se plantea el problema de determinar las desviaciones máximas del sistema (0.2) a fin de obtener un criterio de estabilidad robusta para dicho sistema, para facilitar la comprensión del comportamiento de los sistemas de orden  $n$  se muestra primero el caso particular de orden 4, posteriormente se muestra que para dar un criterio de estabilidad robusta en sistemas de orden  $n$ , basta con analizar subsistemas de orden 2 y 1.

Por último se presentan dos ejemplos donde se muestran los resultados obtenidos en este trabajo.



## Preliminares

En este capítulo se muestran algunos conceptos, ideas, propiedades y teoremas que serán útiles en el desarrollo de este trabajo.

### 1.1. Teorema de existencia y unicidad en ecuaciones diferenciales ordinarias

Consideremos un sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

donde  $\mathbf{f} \in C^1(E)$  y  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

Un resultado importante para la demostración del teorema de existencia y unicidad de soluciones para el sistema (1.1) es el siguiente.

**Lema 1.1.**

$\phi(t)$  es una solución de (1.1) si y solo si  $\phi(t)$  es una función continua que satisface la ecuación integral

$$\phi(t) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\phi(\tau))d\tau.$$

**Demostración.** Supongamos primero que  $\phi(t)$  es una solución de (1.1) entonces  $\phi'(t) = \mathbf{f}(\phi(t))$  y  $\phi(t_0) = \mathbf{y}_0$ . Integrando los dos miembros de esta ecuación desde  $t_0$  a  $t$  se obtiene:

$$\phi(t) - \phi(t_0) = \int_{t_0}^t \phi'(\tau)d\tau = \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\phi(\tau))d\tau,$$

## 2 Preliminares

como  $\phi(t_0) = \mathbf{y}_0$  se obtiene la expresión deseada.

Por otra parte supongamos ahora que  $\phi(t)$  satisface la ecuación integral dada, claramente se cumple  $\phi(t_0) = \mathbf{y}_0$ . Por el Teorema fundamental del cálculo se tiene que  $\phi'(t) = \mathbf{f}(\phi(t))$ . Por lo tanto  $\phi(t)$  es solución de (1.1). ■

Para poder mostrar la existencia de una solución al problema (1.1) es necesario definir cuando una función satisface la condición de Lipschitz y mostrar que las funciones de clase  $C^1$  son localmente Lipschitz.

### Definición 1.1 (Condición de Lipschitz).

Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Se dice que la función  $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisface una condición de Lipschitz en  $E$  si existe una constante  $\lambda \geq 0$ , tal que para toda  $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in E$

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{z})\| \leq \lambda \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|.$$

La función  $\mathbf{f}$  es localmente Lipschitz en un conjunto  $E$  si para todo  $\mathbf{x}_0 \in E$  existe una bola abierta de radio  $\epsilon > 0$  centrada en  $\mathbf{x}_0$  contenida en  $E$ ;  $B_\epsilon(\mathbf{x}_0) \subset E$ , y una constante  $\lambda_0 > 0$  tal que para todo  $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in B_\epsilon(\mathbf{x}_0)$

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{z})\| \leq \lambda_0 \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|.$$

### Lema 1.2.

Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Si  $\mathbf{f} \in C^1(E)$  entonces  $\mathbf{f}$  es localmente Lipschitz en  $E$

La demostración se puede consultar en [15, p. 71]. Antes de enunciar el teorema de existencia y unicidad es necesario revisar algunos resultados sobre la completitud del espacio de funciones continuas en un intervalo;  $C(I)$ ,  $I = [-a, a]$ . Se trabaja con funciones  $C(I)$  y la norma del supremo.

$$\|\mathbf{u}\| = \sup_{t \in I} \|\mathbf{u}(t)\|.$$

La convergencia en esta norma es equivalente a la convergencia uniforme.

### Definición 1.2.

Sea  $V$  un espacio lineal normado. Una sucesión  $\{\mathbf{u}_n\} \subset V$  es llamada sucesión de Cauchy si para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $N$  tal que para todo  $k, m > N$  se tiene

$$\|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_m\| < \epsilon.$$

Se dice que el espacio  $V$  es completo si toda sucesión de Cauchy converge a un elemento en  $V$ .

El siguiente Teorema, mostrado en [10], establece la completitud del espacio lineal normado  $C(I)$  con  $I = [-a, a]$ .

**Teorema 1.1.**

Sea  $I = [-a, a]$ ,  $C(I)$  es un espacio lineal normado completo.

Otro resultado conocido [6, pp. 30-32] y que será utilizado para demostrar unicidad de la solución para el problema de valores iniciales (1.1) es el siguiente

**Lema 1.3** (Desigualdad de Gronwall).

Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones reales continuamente diferenciables no negativas definidas en  $\alpha \leq t \leq \beta$  tales que:

$$f(t) \leq k + \int_{\alpha}^t f(\tau)g(\tau)d\tau, \quad k \geq 0$$

Entonces

$$f(t) \leq ke^{\left(\int_{\alpha}^t g(\tau)d\tau\right)}.$$

**Demostración.** Sea  $U(t) = k + \int_{\alpha}^t f(\tau)g(\tau)d\tau$  Entonces  $f(t) \leq U(t)$  y  $U(\alpha) = k$ . Por el teorema fundamental del cálculo se tiene que

$$f'(t) \leq U'(t) = f(t)g(t)$$

o bien

$$f'(t) - f(t)g(t) \leq 0$$

multiplicando por el factor integrante  $e^{-\int_{\alpha}^t g(\tau)d\tau}$  a ambos lado de la desigualdad anterior e integrando se obtiene

$$f(t) \leq ke^{\int_{\alpha}^t g(\tau)d\tau},$$

siendo  $k$  la constante de integración. ■

**Teorema 1.2** (Existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales).

Sea  $E$  subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ , y  $f \in C^1(E)$ , entonces existe  $a > 0$  tal que el problema de valores iniciales:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{1.2}$$

tiene una única solución  $\phi(t)$  en el intervalo  $[-a, a]$ .

## 4 Preliminares

**Demostración.** Dado que  $\mathbf{f} \in C^1(E)$  entonces por el Lema 1.2 se tiene que existen  $N_\epsilon(\mathbf{x}_0) \subset E$  y una constante  $\lambda > 0$  tal que para toda  $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in N_\epsilon(\mathbf{x}_0)$

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{z})\| \leq \lambda \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|.$$

Para  $b = \frac{\epsilon}{2}$ , la función continua  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  es acotada en el conjunto compacto

$$N_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq b\}.$$

Sea  $M = \max_{\mathbf{x} \in N_0} \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|$ . Se define la sucesión  $\{\phi_j(t)\}_{j \geq 0}$  de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \phi_0(t) = \mathbf{x}_0 \\ \phi_{j+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{f}(\tau, \phi_j(\tau)) d\tau. \end{cases} \quad (1.3)$$

Para  $a > 0$  se tiene que  $\phi_j(t)$  es definida y continua en el intervalo  $[-a, a]$  y satisface

$$\max_{t \in [-a, a]} \|\phi_j(t) - \mathbf{x}_0\| \leq b, \quad (1.4)$$

se muestra que  $\{\phi_j(t)\}_{j \geq 0}$  es de Cauchy, con la norma del supremo. Notemos que se cumple lo siguiente para  $j \in \mathbb{N}$

$$\|\phi_{j+1}(t) - \phi_j(t)\| \leq \frac{M\lambda^j |t|^{j+1}}{(j+1)!}.$$

Para mostrar lo anterior se procede por inducción. Si  $j = 1$  se tiene

$$\|\phi_1(t) - \phi_0(t)\| = \left\| \int_0^t \mathbf{f}(\phi_0(\tau)) d\tau \right\| \leq \int_0^t \|\mathbf{f}(\phi_0(\tau))\| d\tau \leq M \int_0^t d\tau \leq M|t| \leq Ma,$$

supongamos valida para  $j = k - 1$

$$\|\phi_k(t) - \phi_{k-1}(t)\| \leq \frac{M\lambda^{k-1} |t|^k}{(k)!}.$$

Por mostrar para  $j = k$ . De la condición de Lipschitz en  $\mathbf{f}(\phi_j(\tau))$  se obtiene la primera desigualdad y haciendo uso de la hipótesis de inducción resulta que

$$\begin{aligned} \|\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)\| &\leq \int_0^t \|\mathbf{f}(\phi_k(\tau)) - \mathbf{f}(\phi_{k-1}(\tau))\| d\tau \leq \int_0^t \lambda \|\phi_k(\tau) - \phi_{k-1}(\tau)\| d\tau \\ &\leq \int_0^t \frac{M\lambda^k |\tau|^k}{k!} d\tau \leq \frac{M\lambda^k |\tau|^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{M\lambda^k a^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

De lo anterior se observa que  $\frac{(\lambda a)^{k+1}}{(k+1)!}$  es el  $k$ -ésimo término de la expansión en series de Taylor de la función exponencial. Se observa que para  $m > n \geq N$  y  $t \in [-a, a]$  se tiene

$$\begin{aligned} \|\phi_m(t) - \phi_n(t)\| &\leq \sum_{j=n}^{m-1} \|\phi_{j+1}(t) - \phi_j(t)\| \\ &\leq \sum_{j=N}^{\infty} \|\phi_{j+1}(t) - \phi_j(t)\| \\ &\leq \sum_{j=N}^{\infty} \frac{M}{\lambda} \left( \frac{(\lambda a)^{k+1}}{(k+1)!} \right). \end{aligned}$$

Lo anterior se aproxima a 0 cuando  $N \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $N$  tal que, para  $m, n \geq N$  se tiene

$$\|\phi_m - \phi_n\| = \max_{[-a, a]} \|\phi_m(t) - \phi_n(t)\| < \epsilon,$$

es decir,  $\{\phi_j\}$  es una sucesión de Cauchy en  $C([-a, a])$ . Esto muestra que  $\phi_j$  converge de manera uniforme a una función continua  $\phi(t)$  para todo  $t \in [-a, a]$  cuando  $j \rightarrow \infty$

$$\phi(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} \phi_j(t). \quad (1.5)$$

La función  $\phi(t)$  satisface la ecuación integral

$$\phi(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{f}(\phi(\tau)) d\tau, \quad (1.6)$$

para todo  $t \in [-a, a]$ , el límite puede entrar a la integral puesto que la convergencia en (1.5) es uniforme en  $[-a, a]$ . Dado que  $\phi(t)$  es continua entonces  $\mathbf{f}(\phi(t))$  es continua y por el Teorema fundamental del cálculo se tiene que el lado derecho de la ecuación (1.6) es diferenciable y

$$\dot{\phi}(t) = \mathbf{f}(\phi(t)), \quad t \in [-a, a],$$

mas aún,  $\phi(0) = \mathbf{x}_0$  por la desigualdad (1.4) se cumple que  $\phi(t) \in B_\epsilon(\mathbf{x}_0) \subset E$  para todo  $t \in [-a, a]$ . Por tanto,  $\phi(t)$  es solución del problema inicial (1.2) en  $[-a, a]$ .

Ahora para mostrar la unicidad, se procede por contradicción, es decir, se supone que existen dos soluciones  $\phi_1(t)$  y  $\phi_2(t)$  de (1.1). Entonces

$$\begin{aligned} \|\phi_1(t) - \phi_2(t)\| &= \left\| \int_0^t [\mathbf{f}(\phi_1(\tau)) - \mathbf{f}(\phi_2(\tau))] d\tau \right\| \\ &\leq \int_0^t \|\mathbf{f}(\phi_1(\tau)) - \mathbf{f}(\phi_2(\tau))\| d\tau \\ &\leq K \int_0^t \|\phi_1(\tau) - \phi_2(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

De la desigualdad de Gronwall

$$\|\phi_1(t) - \phi_2(t)\| \leq C e^{K \int_0^t d\tau} = C e^{Kt} = 0,$$

donde  $C = 0$  de acuerdo a la desigualdad de Gronwall, de donde  $\|\phi_1(t) - \phi_2(t)\| = 0$ , por lo tanto  $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ . Esto muestra que la solución es única. ■

## 1.2. Elementos básicos de inclusiones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo tienen aplicación en la modelación de diversos problemas en diferentes áreas como: electrónica (para la modelación

## 6 Preliminares

de convertidores de potencia), biología (genes regulatorios), fenómenos físicos tales como fricción seca e impacto, etc. A diferencia de las ecuaciones diferenciales con lado derecho continuo, el problema de determinar soluciones únicas a ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo se puede resolver solo en algunos casos particulares, ver por ejemplo [7, 12], lo anterior porque las herramientas desarrolladas para dicha teoría poseen limitaciones.

En este apartado se discute como hallar una solución para el problema de valor inicial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (1.7)$$

donde  $\mathbf{f}$  es una función acotada y discontinua en un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  numerable tal que para todo  $\mathbf{x}_i \in D$  se tiene  $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) > \delta > 0$ , para algún  $\delta$  fijo. En los siguientes ejemplos se ilustra que la definición usual de solución y los teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales con lado derecho continuo no son aplicables cuando existe discontinuidad en el lado derecho de una ecuación diferencial.

**Ejemplo 1.2.1.** Consideremos el siguiente problema de valores iniciales

$$\dot{x} = 2 - \text{sign}(x), \quad x(0) = x_0, \quad \text{donde} \quad \text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Notemos que  $\text{sign}(x)$  no está definida en el punto  $x = 0$ . Si consideramos los valores cuando  $x < 0$ , la ecuación diferencial tomará la forma:  $\dot{x} = 3$ , cuya solución está dada por  $x(t) = 3t + c_1$ . Ahora si consideramos los valores cuando  $x > 0$ , la ecuación tomará la forma:  $\dot{x} = 1$ , cuya solución está dada por  $x(t) = t + c_2$ . Se pueden discutir los siguientes casos:

1. Si  $x_0 > 0$ , entonces la solución del sistema (1.8) es  $x(t) = t + x_0$  la cual está definida para todo  $t > 0$ . Es decir el sistema (1.8) admite una solución única para todo  $t > 0$ .
2. Si  $x_0 < 0$ , se debe considerar inicialmente  $x(t) = 3t + x_0$  como parte de la solución del sistema (1.8) para todo  $0 \leq t < t_* = -\frac{1}{3}x_0$ , mientras que si  $t > t_*$  consideramos como parte de la solución a  $x(t) = t + \frac{1}{3}x_0$ ; es decir, la solución se puede considerar en la forma

$$x(t) = \begin{cases} 3t + x_0, & t < t_*, \\ t + \frac{1}{3}x_0, & t > t_*. \end{cases}$$

Claramente se observa que

$$\lim_{t \rightarrow t_*^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_*^+} x(t) = 0;$$

en consecuencia podríamos definir  $x(t_*) = 0$ , sin embargo la función así definida no es diferenciable y por lo tanto no es solución de (1.8).

3. Si  $x_0 = 0$  no podemos definir una solución pues la función  $\text{sign}(x)$  no está definida en ese punto.

La representación de los primeros dos casos se muestra en la figura 1.1.

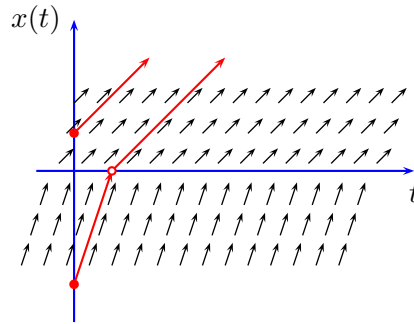


Figura 1.1: Campo de direcciones del problema de valor inicial (1.8).

**Ejemplo 1.2.2.** Ahora se considera el problema de valores iniciales con lado derecho discontinuo

$$\dot{x} = -\text{sign}(x), \quad x(0) = x_0, \tag{1.9}$$

si consideramos los valores cuando  $x < 0$ , la ecuación diferencial tomará la forma:  $\dot{x} = 1$ , cuya solución esta dada por  $x(t) = t + c_1$ . Ahora si consideramos los valores cuando  $x > 0$ , la ecuación tomará la forma:  $\dot{x} = -1$ , cuya solución esta dada por  $x(t) = -t + c_2$ . Se tienen los siguientes casos

1. Si  $x_0 > 0$  se puede considerar como una parte de la solución a  $x(t) = -t + x_0$ , para todo  $t < t_* = x_0$ .
2. Si  $x_0 < 0$  la parte que corresponde a la solución es  $x(t) = t + x_0$ , para todo  $t < t_* = -x_0$ .
3. Si  $x_0 = 0$  no podemos definir una solución, ya que la función  $\text{sign}(x)$  no esta definida en ese punto.

Notemos que para los dos primeros casos la solución tiende a cero cuando  $t \rightarrow t_*$ , por lo tanto sería natural definir  $x(t) = 0$  para todo  $t > t_*$ , sin embargo esta función no satisface la ecuación diferencial (1.9), en consecuencia, en estos casos la solución no puede ser extendida. En la Figura 1.2 se muestra el comportamiento de las soluciones.

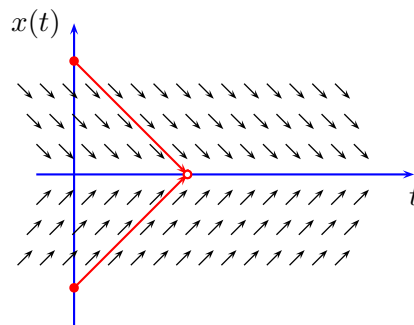


Figura 1.2: Campo de direcciones del problema de valor inicial (1.9).

## 8 Preliminares

**Ejemplo 1.2.3.** Por ultimo se considera el problema de valor inicial

$$\dot{x} = \text{sign}(x), \quad x(0) = x_0, \quad (1.10)$$

para valores de  $x < 0$  la ecuación diferencial toma la forma:  $\dot{x} = -1$  y su solución esta dada por  $x(t) = -t + c_1$ , y para valores de  $x > 0$  la ecuación diferencial toma la forma:  $\dot{x} = 1$  cuya solución esta dada por  $x(t) = t + c_2$ . Ahora podemos discutir los siguientes casos:

1. Si  $x_0 > 0$  entonces la solución al sistema (1.10) esta dada por  $x(t) = t + x_0$ , la cual es única, para todo  $t > 0$ .
2. Si  $x_0 < 0$  la solución esta dada por  $x(t) = -t + x_0$ , la cual al igual que en el caso anterior es única para todo  $t > 0$ .
3. Si  $x_0 = 0$  no podemos definir una solución, pues la función  $\text{sign}(x)$  no esta definida en ese punto. Mas aún, de acuerdo al campo vectorial asociado a la ecuación diferencial (ver Figura 1.3), no es claro como definir una solución para la ecuación.

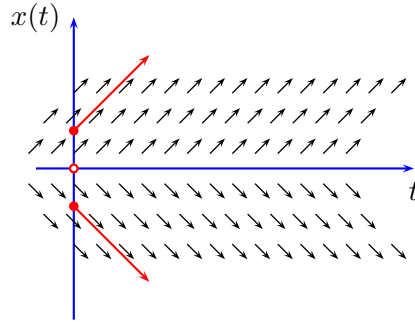


Figura 1.3: Campo de direcciones del problema de valor inicial (1.10).

Se puede concluir de los ejemplos anteriores que para ecuaciones de la forma (1.7) donde  $f(x)$  es discontinua en un conjunto  $D$ , el concepto usual de solución deja de ser valido en los puntos de  $D$ . Un método que extiende el concepto de solución y que nos permitirá encontrar una solución a ecuaciones diferenciales del tipo (1.7) es el que se discute en [9]. Dicho método consiste en considerar alguna de las soluciones de la inclusión diferencial,

$$\dot{\mathbf{x}} \in \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.11)$$

donde  $\mathbf{F}$  se define como

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{\text{conv}(f(B_\epsilon(\mathbf{x}) \setminus D))}, \quad (1.12)$$

donde  $\text{conv}(A)$  denota la envolvente convexa del conjunto  $A$ ,  $B_\epsilon(\mathbf{x})$  es la bola abierta de radio  $\epsilon$ , centrada en  $\mathbf{x}$  y  $\bar{A}$  denota la cerradura del conjunto  $A$ . Notemos que  $\mathbf{F}$  es una función cuyo dominio es el mismo que el dominio de  $f$  y la imagen de un punto  $\mathbf{x}$  en su dominio es un conjunto, es decir;  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ . A este tipo de funciones se les conoce como



*funciones multivaluadas*. Para distinguir a este tipo especial de funciones de las funciones usuales, a estas últimas les denominaremos *funciones univaluadas* ó *monovaluadas*.

Al operador (1.12) se le conoce como operador de Filippov, y dicho operador transforma la función univaluada  $f$  en una función multivaluada  $F$ . Observemos que, si  $x$  es un punto en el cual  $f$  es continua, entonces  $F(x) = \{f(x)\}$ , un conjunto unipuntual.

Demostremos este hecho. Sea  $\epsilon > 0$  y supongamos que  $f$  es continua en  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Sea  $x \in A$ . Por la propiedad Arquimediana, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $N\epsilon > 1$ . Para cada  $n \geq N$  elegimos  $x_n \in A \cap (B_{1/n}(x) \setminus D)$ . Notemos que por la construcción  $x_n \rightarrow x$ , entonces  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ , pues  $f$  es continua. Luego

$$f(x) \in \overline{f(B_\epsilon(x) \setminus D)} \subset \overline{\text{conv}(f(B_\epsilon(x) \setminus D))}.$$

Ya que esto se cumple para todo  $\epsilon > 0$ , entonces

$$f(x) \in \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{\text{conv}(f(B_\epsilon(x) \setminus D))},$$

es decir,  $f(x) \in F(x)$ .

Falta verificar que  $F(x) \subset \{f(x)\}$  para todo  $x \in A$ . Supongamos que no es así, es decir, para algún  $\tilde{x} \in A$ , existe  $y \in F(\tilde{x})$  tal que  $y \neq f(\tilde{x})$ . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $\|y\| > \|f(\tilde{x})\|$ , sea  $D_0 = \mathbb{R}^n \setminus A$ . Por tanto, para cada  $\epsilon > 0$  se tiene que  $y \in \overline{\text{conv}(f(B_\epsilon(\tilde{x}) \setminus D_0))}$ . Ahora bien, para todo  $\epsilon > 0$  existen  $u_\epsilon$  y  $l_\epsilon$  tales que  $\|l_\epsilon\| \leq \|y\| \leq \|u_\epsilon\|$  y  $l_\epsilon, u_\epsilon \in f(B_\epsilon(\tilde{x}) \setminus D_0)$ , pues  $y$  pertenece a la cerradura del conjunto  $\text{conv}(f(B_\epsilon(\tilde{x}) \setminus D_0))$ , existe  $w_\epsilon \in B_\epsilon(\tilde{x}) \setminus D_0 = B_\epsilon(\tilde{x}) \cap A$  que satisface  $f(w_\epsilon) = u_\epsilon$ . Hasta ahora se tiene que  $\|f(w_\epsilon)\| - \|f(\tilde{x})\| = \|u_\epsilon\| - \|f(\tilde{x})\| \geq \|y\| - \|f(\tilde{x})\| > 0$ , lo cual contradice a la continuidad de la función  $f$  en el punto  $\tilde{x}$ . Análogamente si  $\|y\| < \|f(\tilde{x})\|$ .

Por lo tanto para los puntos donde  $f(x)$  es continua se tiene

$$F(x) = \{f(x)\}.$$

Antes de discutir el método que nos permitirá encontrar una solución para ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo, veamos el efecto de aplicar el operador de Filippov a las funciones discontinuas de los Ejemplos 1.2.1-1.2.3. Consideremos inicialmente la función  $f(x) = 2 - \text{sign}(x)$  dada en el Ejemplo 1.2.1. Por lo anterior, tenemos que  $F(x) = \{f(x)\}$  si  $x$  es un punto en el cual  $f$  es continua, por tanto  $F(x) = \{3\}$  si  $x < 0$  y  $F(x) = \{1\}$  si  $x > 0$ . Veamos ahora como es  $F(x)$  para  $x = 0$  que es el único punto donde  $f$  es discontinua. Observemos que para todo  $\epsilon > 0$ , se cumple

$$f(B_\epsilon(0) \setminus \{0\}) = \{1, 3\},$$

y por tanto

$$\text{conv}(f(B_\epsilon(0) \setminus \{0\})) = \overline{\text{conv}(f(B_\epsilon(0) \setminus \{0\}))} = [1, 3].$$

Resumiendo

$$F(x) = \begin{cases} \{3\}, & x < 0, \\ [1, 3], & x = 0, \\ \{1\}, & x > 0. \end{cases}$$

## 10 Preliminares

La gráfica se muestra en la Figura 1.4 (A).

Para la función  $g(x) = -\text{sign}(x)$  dada en el Ejemplo 1.2.2, el conjunto de discontinuidad es dado por  $D = \{0\}$ . Para todos los puntos  $x \neq 0$  se tiene que  $G(x) = \{g(x)\}$ , es decir  $G(x) = \{1\}$  si  $x < 0$  y  $G(x) = \{-1\}$  si  $x > 0$ . Por otra parte  $G(0) = [-1, 1]$ . De esta manera

$$G(x) = \begin{cases} \{1\}, & x < 0, \\ [-1, 1], & x = 0, \\ \{-1\}, & x > 0. \end{cases}$$

La gráfica de  $G(x)$  se muestra en la Figura 1.4 (B).

De forma análoga si  $H(x)$  es la función multivaluada obtenida al aplicar el operador de Filippov a la función  $h(x) = \text{sign}(x)$  del Ejemplo 1.2.3, se tiene

$$H(x) = \begin{cases} \{-1\}, & x < 0, \\ [-1, 1], & x = 0, \\ \{1\}, & x > 0. \end{cases}$$

La gráfica de  $H(x)$  se muestra en la Figura 1.4 (C).

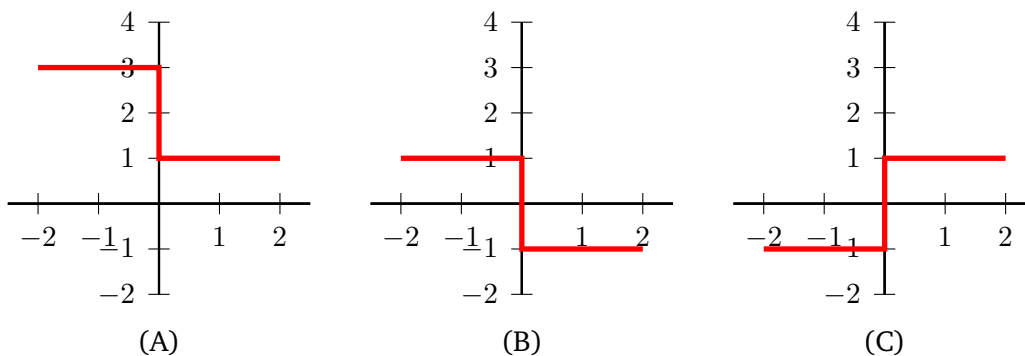


Figura 1.4: (A) gráfica de  $F(x)$  para el Ejemplo 1.2.1, (B) gráfica de  $G(x)$  para el Ejemplo 1.2.2, (C) gráfica de  $H(x)$  para el Ejemplo 1.2.3.

**Nota 1.1.** La función multivaluada que resulta de aplicar el operador de Filippov a la función  $\text{sign}(x)$  es dada por

$$\text{Sign}(x) = \begin{cases} \{-1\}, & x < 0, \\ [-1, 1], & x = 0, \\ \{1\}, & x > 0. \end{cases}$$

Es importante observar que la imagen de cada punto de  $D$  bajo  $F$  es un conjunto cerrado, acotado y convexo. Por esta razón la inclusión diferencial (1.11) tiene infinitas soluciones, donde una solución de la inclusión diferencial (1.11) es una función  $x(t)$  absolutamente continua (Ver Definición A.4 del Apéndice A) que satisface a (1.11) casi en todas partes. Haciendo uso de esta noción de solución, se define una solución para el problema de valor inicial con lado derecho discontinuo (1.7) de la siguiente forma:

**Definición 1.3.**

Una solución en el sentido de Filippov del problema de valor inicial (1.11) es una función absolutamente continua  $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  que satisface (1.11) para casi todo  $t \in \mathbb{R}^+$ .

Se observa que en los puntos de continuidad de la función  $f(x)$  las soluciones de (1.7) y (1.11) son la misma ya que en tales puntos  $F(x)$  es el conjunto unipuntual  $\{f(x)\}$ . Por tanto para poder definir una solución en el sentido de Filippov al problema de valor inicial (1.7) en los puntos de discontinuidad de la función  $f(x)$ , se debe re-definir tal solución haciendo uso de alguna solución de la inclusión diferencial (1.11). Esto es análogo a reemplazar el problema de valores iniciales (1.7) por algún otro problema de valor inicial cuya solución coincida con la solución construida. Este nuevo problema de valor inicial debe cumplir:

1. El lado derecho de este problema de valores iniciales debe ser una función univaluada y debe estar definido para toda  $x$  en el dominio de  $f$ .
2. La solución de este nuevo problema debe ser también solución de la inclusión diferencial, es decir debe ser solución en el sentido de Filippov.

Esta nueva función es llamada *selección*. El concepto se define a continuación:

**Definición 1.4.**

Una función  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  univaluada, es una *selección* de la función multivaluada  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ , si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad g(x) \in F(x).$$

Generalmente  $F$  admite muchas selecciones, cada una da origen a una ecuación diferencial distinta. Existen diferentes formas de elegir una selección. Para dar una solución en el sentido de Filippov la selección se define de la siguiente manera:

**Definición 1.5.**

Para  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ , la función univaluada definida por

$$m(F(x)) := \left\{ u \in F(x) : \|u\| = \min_{y \in F(x)} \|y\| \right\}$$

es llamada *la selección de norma mínima*.

## 12 Preliminares

Para el Ejemplo 1.8 se tiene que la selección de la norma mínima es:

$$m(F(x)) = \begin{cases} 3, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

(Notemos que emplear la selección de norma mínima es equivalente a definir el valor  $\text{sign}(0) = 1$ ; tal valor se considera únicamente para este ejemplo.)

Calculando la selección de la norma mínima al Ejemplo (1.9) se obtiene:

$$m(G(x)) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases}$$

(Al emplear la selección de norma mínima en este ejemplo se define  $\text{sign}(0) = 0$ .)

La gráfica para la selección de norma mínima de los Ejemplos 1.2.1-1.2.3 se observa en la Figura 1.5.

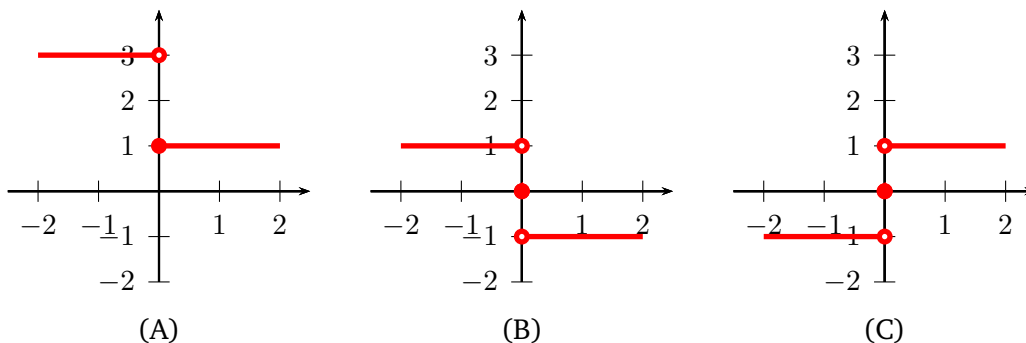


Figura 1.5: (A) gráfica de  $m(F(x))$  para el Ejemplo 1.2.1, (B) gráfica de  $m(G(x))$  para el Ejemplo 1.2.2, (C) gráfica de  $m(H(x))$  para el Ejemplo 1.2.3.

Notemos que en los Ejemplos 1.2.1-1.2.2  $\text{sign}(0)$  es definido de diferentes maneras empleando la selección de norma mínima con el fin de obtener una solución absolutamente continua (lo cual se muestra mas adelante) a la ecuación diferencial, donde en cada uno de estos ejemplos las soluciones no son diferenciables en puntos que pertenecen al conjunto  $D$  pero son continuas en los puntos contenidos en  $D$ . El campo de direcciones que resulta al aplicar la selección de norma mínima a cada uno de los ejemplos anteriores se muestra en la Figura 1.6.

Aún queda pendiente el problema de cómo construir una solución para una ecuación diferencial cuyo lado derecho es la función que resulta de aplicar la selección de norma mínima a una función multivaluada. Un método que permite dar solución a este problema, consiste en aproximar el lado derecho de dicha ecuación por medio de una familia de ecuaciones diferenciales cuyo lado derecho son funciones continuas. Particularmente, cuando la función multivaluada es semicontinua superiormente, en el sentido de la

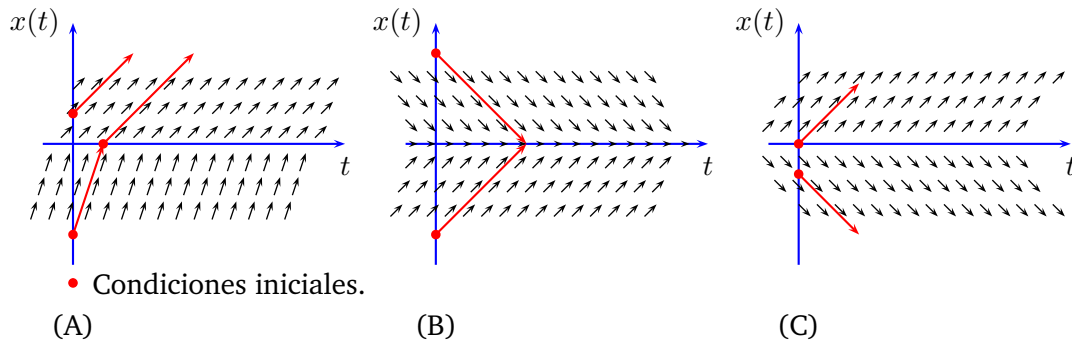


Figura 1.6: (A) Campo de direcciones para el Ejemplo 1.2.1, (B) Campo de direcciones de el Ejemplo 1.2.2, (C) gráfica de el campo de direcciones Ejemplo 1.2.3.

Definición 1.6, se puede obtener dicha familia de ecuaciones diferenciales cuyo lado de-  
recho converge puntualmente a la correspondiente función multivaluada y las soluciones  
de dicha familia convergen uniformemente a la solución de la ecuación diferencial cuyo  
lado derecho es la selección de norma mínima (lo cual se muestra mas adelante en el  
Teorema 1.4 de la página 15).

**Definición 1.6.**

Sea una función multivaluada  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ . Decimos que  $F$  es semicontinua  
superiormente en un punto  $p \in \mathbb{R}^n$ , si para cada conjunto abierto  $U$  de  $2^{\mathbb{R}^n}$  tal  
que  $F(p) \subset U$ , existe un conjunto abierto  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $p \in V$  y  $F(x) \subset U$   
para cada  $x \in V$ . Decimos que  $F$  es semicontinua superiormente si lo es para  
cada punto del dominio (ver Figura 1.7).

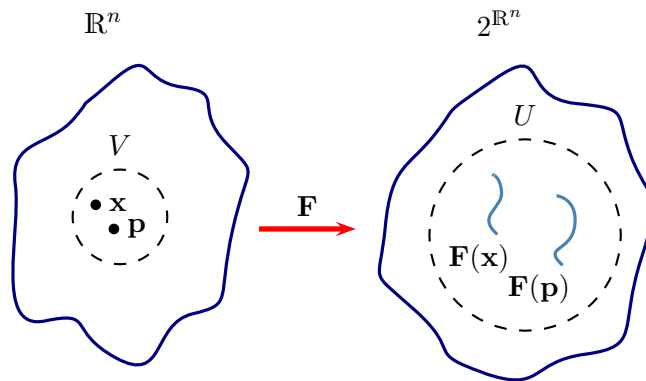


Figura 1.7: Interpretación geométrica de la semicontinuidad superior de una función mul-  
tivaluada.

En el siguiente ejemplo se muestra que la función multivaluada  $F(x) = \text{Sign}(x)$  es semicontinua superiormente.

**Ejemplo 1.2.4.** La función  $F(x) = \text{Sign}(x)$  definida en la Nota 1.1 es semicontinua superiormente. Sea  $p \in \mathbb{R}$ . Si  $p < 0$  entonces  $F(p) = \{-1\}$ , luego si  $U$  es un conjunto abierto en  $\mathbb{R}$  tal que  $\{-1\} \subset U$  existe, por ejemplo, el conjunto abierto  $V = (2p, 0)$  en  $\mathbb{R}$  tal que  $F(x) \subset U$  para cada  $x \in V$ . Si  $p > 0$  entonces  $F(p) = \{1\}$ . Así, si  $U$  es un conjunto abierto en  $\mathbb{R}$  tal que  $\{1\} \subset U$  entonces podemos tomar, por ejemplo, el conjunto abierto  $V = (0, 2p)$ . Note que  $F(x) \subset U$  para cada  $x \in V$ . Si  $p = 0$ , entonces  $F(p) = [-1, 1]$  y si  $U$  es un conjunto abierto en  $\mathbb{R}$  tal que  $F(0) \subset U$  entonces podemos tomar, por ejemplo, el conjunto abierto  $V = (-\epsilon, \epsilon)$  para cada  $\epsilon > 0$ . Para puntos  $x \in (-\epsilon, 0) \subset V$ , se tiene que  $F(x) \subset [-1, 1] \subset U$ , análogamente si  $x \in (0, \epsilon) \subset V$ . Esto muestra que  $F$  es semicontinua superiormente.

El siguiente lema ayudará a mostrar que el operador de Filippov es una función multivaluada semicontinua superiormente, la demostración puede consultarse en [4, 11].

**Lema 1.4.**

Sean  $(V, d)$  y  $(U, d')$  espacios métricos y  $\mathbf{F} : V \rightarrow 2^U$  una función de múltiples valores tal que  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  es un conjunto compacto para cada  $\mathbf{x} \in E$ . Las siguientes proposiciones son equivalente

- (a)  $F$  es semicontinua superiormente en  $\mathbf{p} \in V$ .
- (b) Si  $\{\mathbf{x}_n\}$  y  $\{\mathbf{y}_n\}$  son sucesiones tales que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{p}, \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{q}$$

con  $\mathbf{y}_n \in \mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$ , entonces  $\mathbf{q} \in \mathbf{F}(\mathbf{p})$ .

**Proposición 1.1.**

Sea  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función acotada casi en todas partes. Entonces la función multivaluada obtenida de aplicar el operador de Filippov a la función  $\mathbf{f}$ , es una multifunción semicontinua superiormente.

**Demostración.** Vamos a mostrar que si  $\{\mathbf{x}_n\}$  y  $\{\mathbf{v}_n\}$  son sucesiones tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{p}$  y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{q}$ , con  $\mathbf{y}_n \in \mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$ , entonces  $\mathbf{q} \in \mathbf{F}(\mathbf{p})$ , de acuerdo al lema anterior. Sea  $\epsilon > 0$ . Como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{p}$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que para  $n \geq m$ ,  $\mathbf{x}_n \in B_\epsilon(\mathbf{p})$ . Sea  $\epsilon_n = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{p}\|$ , entonces

$$\mathbf{y}_n \in \overline{\text{conv}(\mathbf{f}(B_{(\epsilon-\epsilon_n)/2}(\mathbf{x}_n) \setminus D))} \subset \overline{\text{conv}(\mathbf{f}(B_\epsilon(\mathbf{p}) \setminus D))},$$

y ya que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{q}$ , entonces  $\mathbf{q} \in \overline{\text{conv}}[\mathbf{f}(B_\epsilon(\mathbf{p}) \setminus D)]$ . Esto muestra que el operador de Filippov es semicontinuo superiormente. ■

Para funciones multivaluadas semicontinuas superiormente, el siguiente resultado; mostrado en [3, p. 84], da condiciones para obtener una familia de funciones continuas que aproximan a la correspondiente función multivaluada.

**Teorema 1.3** (Teorema de la selección aproximada).

Sea  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$  una función multivaluada semicontinua superiormente, tal que para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  es un subconjunto convexo. Entonces para cada  $\epsilon > 0$  existe un mapeo localmente Lipschitz  $\mathbf{f}_\epsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que su imagen esta contenida en la envolvente convexa de la imagen de  $\mathbf{F}$  y

$$\text{graf}(\mathbf{f}_\epsilon) \subset B_\epsilon(\text{graf}(\mathbf{F})).$$

Si la selección de norma mínima  $m(\mathbf{F})$  es localmente compacta (respectivamente localmente acotada), la familia  $\{\mathbf{f}_\epsilon\}$  es localmente equicompacta (respectivamente localmente equiacotada).<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Ver las Definiciones A.5 y A.6 del Apéndice A, en la página 62.

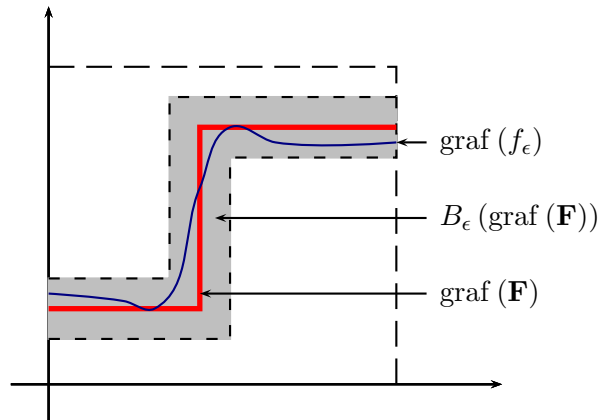


Figura 1.8: Selección aproximada para una función multivaluada.

Combinando lo anterior y el Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales con lado derecho continuo, se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 1.4** (Existencia de soluciones para inclusiones diferenciales).

Sea  $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$  una función multivaluada semicontinua superiormente en  $\Omega$ , donde  $\Omega$  es un subconjunto abierto que contiene a  $\mathbf{x}_0$ , y tales que, para cada  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  es un conjunto cerrado y convexo en  $\mathbb{R}^n$ . Si la función  $m(\mathbf{F})$  es localmente compacta, entonces existe  $T > 0$  y una función absolutamente continua  $\mathbf{x}(\cdot)$  definida en  $[0, T]$ , la cual es una solución a la inclusión diferencial (1.11).

Como  $m(\mathbf{F})$  es localmente compacta existe un subconjunto compacto y convexo  $K$ , y escalares  $a, b > 0$  tales que

$$\mathbf{D} = \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \Omega : |t| < a, \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}\| < b\} \subset \mathbb{R} \times \Omega \quad (1.13)$$

y  $m(\mathbf{F}(\mathbf{x})) \in K$  para todo  $(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{D}$ . Definimos  $T = \min(a, b/\|K\|)$ , donde

$$\|K\| = \sup_{\mathbf{x} \in K} \|\mathbf{x}\|.$$

**Demostración.** Por el Teorema de selección aproximada, para cada  $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , existe una familia de funciones  $\mathbf{f}_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  localmente Lipschitz, que aproximan a  $\mathbf{F}$ . A partir de cada elemento de la sucesión  $\{\mathbf{f}_n\}$  consideremos la familia de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{f}_n(\mathbf{x}_n), \quad \mathbf{x}_n(0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.14)$$

cuyas soluciones existen y son únicas de acuerdo al teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias. Sean  $\mathbf{x}_n : [0, T] \rightarrow \Omega$  las soluciones para las ecuaciones (1.14). En particular cada  $\|\dot{\mathbf{x}}_n(t)\|$  es acotada por  $\|K\|$ , ya que, debido al Teorema de la selección aproximada, se tiene que la sucesión  $\{\mathbf{f}_n(\mathbf{x}_n)\}$  es equicompacta, es decir, para  $(t, \mathbf{x}_n) \in \mathbf{D}$  existe una vecindad  $N(\mathbf{x}_n)$  de  $\mathbf{x}_n$ , tal que  $\{t\} \times N(\mathbf{x}_n) \subset \mathbf{D}$  y  $\mathbf{f}_n(N(\mathbf{x}_n)) \subset K$ , de donde  $\mathbf{f}_n(\mathbf{x}_n) \in K$ , lo cual equivale a  $\|\mathbf{f}_n(\mathbf{x}_n)\| \leq \|K\|$ . Mas aún, cada  $\mathbf{x}_n(t)$  toma valores en el conjunto compacto  $\mathbf{x}_0 + TK$ . Mostremos este hecho por contradicción, es decir, supongamos que  $\mathbf{x}_n(t) \notin \mathbf{x}_0 + TK$ , o de manera equivalente

$$\mathbf{x}_0 + \int_0^T \mathbf{f}_n(\mathbf{x}_n(t)) dt \notin \mathbf{x}_0 + TK,$$

es decir,

$$\int_0^T \mathbf{f}_n(\mathbf{x}_n(t)) dt \neq T\mathbf{y} = \int_0^T \mathbf{y} dt, \quad \text{para toda } \mathbf{y} \in K.$$

Esto implica que  $\mathbf{f}_n(\mathbf{x}_n(t)) \notin K$  para casi todo  $t$ . Lo cual es una contradicción.

Por el Teorema de Arzelà-Ascoli (ver Teorema A.2 en el Apéndice A, página 63) existe una subsucesión  $\{\mathbf{x}_{n_k}(t)\}$  de  $\{\mathbf{x}_n(t)\}$  tal que  $\mathbf{x}_{n_k}(t)$  converge uniformemente a  $\mathbf{x}(t)$  y  $\dot{\mathbf{x}}_{n_k}(t)$  converge puntualmente a  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  en  $[0, T]$ . Además, por el Teorema de convergencia [3, Teorema 1.4.1 p. 60], lo anterior implica

$$d((\mathbf{x}_{n_k}(t), \dot{\mathbf{x}}_{n_k}(t)), \text{graf } \mathbf{F}) = d((\mathbf{x}_{n_k}(t), \mathbf{f}_{n_k}(\mathbf{x}_{n_k}(t))), \text{graf } \mathbf{F}) \rightarrow 0$$



es decir

$$\dot{x}(t) \in \mathbf{F}.$$



**Ejemplo 1.2.5.** Consideremos la siguiente ecuación diferencial con lado derecho discontinuo

$$\dot{x} = \text{sign}(x), \quad x(0) = -1. \tag{1.15}$$

La inclusión diferencial correspondiente es

$$\dot{x} \in \text{Sign}(x), \quad x(0) = -1,$$

donde  $\text{Sign}(x)$  se define de forma análoga a como se define en la Nota 1.1 de la página 10. La selección de norma mínima es dada por

$$m(\text{Sign}(x)) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

la cual es localmente compacta, pues, si  $N(x)$  es una vecindad cualquiera, entonces  $m(\text{Sign}(N(x))) \in \{\{-1\}, \{1\}, \{-1, 0, 1\}\}$ , es decir,  $m(\text{Sign}(N(x)))$  es compacta.

Sea la sucesión  $\{g_n(x)\}$

$$g_n(x) = \tanh nx,$$

esta sucesión es equicomcompacta, pues para cada  $n$  y cualquier vecindad  $N(x)$  se tiene  $g_n(N(x)) \subset [-1, 1]$ . Consecuentemente, la sucesión  $\{g_n(x)\}$  converge puntualmente a  $m(\text{Sign}(x))$ , debido al Teorema de existencia de soluciones para inclusiones diferenciales,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tanh(nx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^{nx} + e^{-nx}} = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

La solución del sistema

$$\dot{x} = \tanh(nx), \quad x(0) = -1, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

es dada por

$$x_n(t) = -\frac{1}{n} \text{arcsenh}(\sinh(n) e^{nt}).$$

Una vez mas, por el Teorema de existencia de soluciones de inclusiones diferenciales, se tiene que la sucesión  $x_n(t)$  converge uniformemente a la solución  $x(t)$  del problema de valores iniciales

$$\dot{x} = m(\text{Sign} x), \quad x(0) = -1, \tag{1.16}$$

cuyo límite se obtiene de

$$\begin{aligned} x(t) &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{arcsenh}(e^{nt} \sinh(n)) \\ &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+t+(1-t)e^{-2n}}{\sqrt{4e^{-2n(t+1)}+(1-e^{-2n})^2}} = \begin{cases} 0, & t < -1, \\ -1-t, & t \geq -1, \end{cases} \end{aligned}$$

la segunda igualdad se obtiene al aplicar la regla de L'hôpital. En la Figura 1.9 se observa la convergencia de las sucesiones  $\{g_n(x)\}$  y  $\{x_n(t)\}$  a las funciones  $m(\text{Sign}(x))$  y  $x(t)$ , respectivamente.

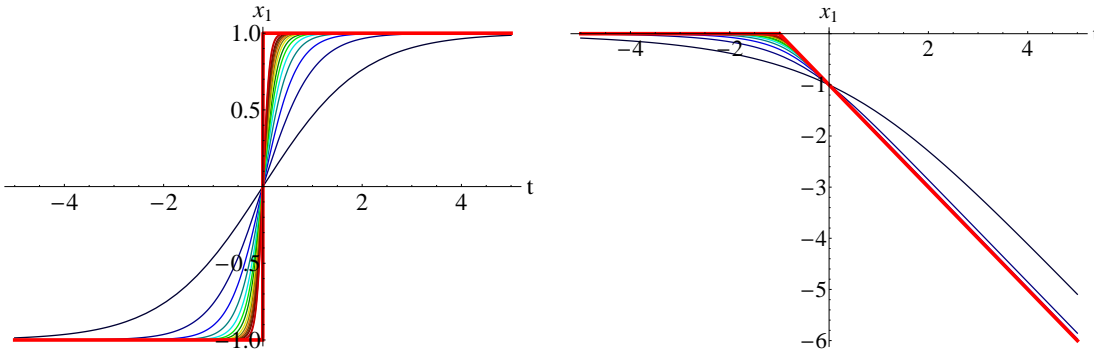


Figura 1.9: Aproximación de la función  $m(\text{Sign } x)$  por la sucesión  $\{g_n(x)\}$  y convergencia de la sucesión  $\{x_n(t)\}$  a la solución del problema de valores iniciales 1.15,  $x(0) = -1$ .

De manera análoga para  $x(0) = 1$ , se observa la convergencia de las sucesiones  $\{g_n(x)\}$  y  $\{x_n(t)\}$  a las funciones  $m(\text{Sign}(x))$  y  $x(t)$ , respectivamente, como se muestra en la Figura 1.10

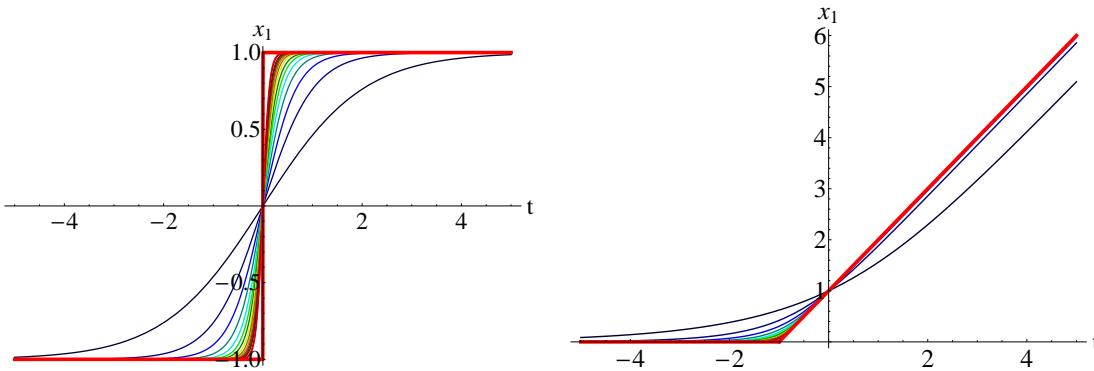


Figura 1.10: Aproximación de la función  $m(\text{Sign } x)$  por la sucesión  $\{g_n(x)\}$  y convergencia de la sucesión  $\{x_n(t)\}$  a la solución del problema de valores iniciales 1.15,  $x(0) = 1$ .

En el Ejemplo 1.2.5 se muestra la forma de obtener una solución para la ecuación diferencial con lado derecho discontinuo (1.15) dadas dos condiciones iniciales diferentes no nulas. Si estas soluciones se observan en tiempos negativos, entonces las soluciones necesariamente deben ser cero hasta algún instante  $T$  (en este caso  $T < 0$  puesto que la condición inicial se ha definido en el instante  $t_0 = 0$ , en otro caso puede ser positivo), y para instantes  $t > T$  la solución deja de ser cero. Si la condición inicial es cero entonces la solución del sistema es siempre cero.

En este trabajo nos interesa estudiar las soluciones del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq t_0, \quad (1.17)$$

donde  $f$  es una función discontinua en un conjunto  $D$  de medida 0 y numerable; las cuales se obtienen de resolver el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = m(\mathbf{F}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq t_0. \quad (1.18)$$

El ejemplo que sigue ilustra el procedimiento para obtener una solución a una inclusión diferencial.

**Ejemplo 1.2.6.** Se presenta el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y, & x(0) &= 1 \\ \dot{y} &= \text{sign}(y), & y(0) &= -1, \end{aligned} \quad (1.19)$$

cuya inclusión diferencial es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y, & x(0) &= 1 \\ \dot{y} &\in \text{Sign}(y), & y(0) &= -1. \end{aligned} \quad (1.20)$$

En el ejemplo anterior se tiene la solución a la inclusión diferencial  $\dot{x} \in \text{Sign}(x)$ , por tanto, la solución del sistema anterior se aproxima por medio de la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y, & x(0) &= 1, \\ \dot{y} &= \tanh(ny), & y(0) &= -1, \end{aligned}$$

cuya solución se puede representar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x_n(t) &= e^t - \int_0^t \frac{e^{t-s} \text{arcsenh}(\text{senh}(n)e^{ns})}{n} ds \\ y_n(t) &= -\frac{1}{n} \text{arcsenh}(\text{senh}(n)e^{nt}). \end{aligned}$$

El Teorema 1.4 garantiza que  $x_n(t) \rightarrow x(t)$  y  $y_n(t) \rightarrow y(t)$ ,  $x(t)$  y  $y(t)$  son las soluciones del sistema (1.20), donde

$$\begin{aligned} x(t) &= e^t - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{e^{t-s} \text{arcsenh}(\text{senh}(n)e^{ns})}{n} ds \\ y(t) &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{arcsenh}(\text{senh}(n)e^{nt}), \end{aligned}$$

para la coordenada  $y$  se tiene

$$\begin{aligned} y(t) &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{arcsenh}(\text{senh}(n)e^{nt}) \\ &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-2n}(1-t) + (1+t)}{\sqrt{4e^{-2n(t+1)} + (1-e^{-2n})^2}} = \begin{cases} 0, & t < -1, \\ -1-t, & t \geq -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Para la coordenada  $x$  se requiere calcular

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ e^t - \int_0^t \frac{e^{t-s} \text{arcsenh}(\text{senh}(n)e^{ns})}{n} ds \right] \\ &= e^t - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{e^{t-s} \text{arcsenh}(\text{senh}(n)e^{ns})}{n} ds = -e^t + 2 + t \end{aligned}$$

dado que la sucesión que se encuentra dentro de la integral es una sucesión no decreciente de funciones no negativas y convergen puntualmente a  $y(t)$ , entonces el Teorema de la Convergencia Monótona [14] permite obtener una expresión para  $x(t)$ . Por tanto, la solución al sistema (1.20) es

$$\begin{cases} x(t) = -e^t + 2 + t, \\ y(t) = -1 - t, \end{cases} \quad t \geq 0.$$

La solución general del sistema es dada por

$$x(t) = e^t + \begin{cases} 0, & t < -1, \\ 2(1 - e^t) + t, & t \geq -1. \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < -1, \\ -1 - t, & t \geq -1. \end{cases}$$

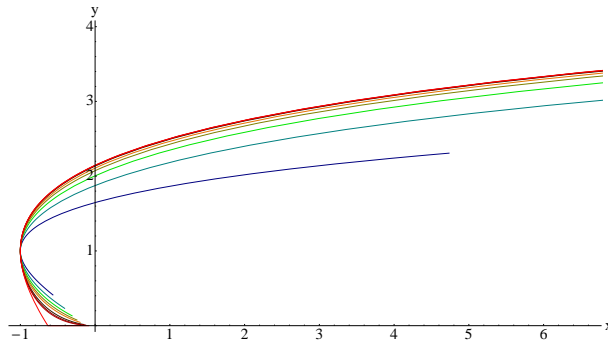


Figura 1.11: convergencia de la sucesión  $\{x_n(\tau)\}$  a la solución del problema de valores iniciales 1.19,  $x(0) = 1$ .

Debido a que en los puntos donde  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  es discontinua, la selección de norma mínima  $m(\mathbf{F}(\mathbf{x}))$  redefine el campo vectorial descrito por la función  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , de tal manera que se pueda extender la solución del sistema (1.17) mas allá de los puntos de discontinuidad, basta con hallar los segmentos de solución donde la función  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  es continua de la siguiente manera. Supongamos que la función es discontinua en los puntos aislados  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_\ell, \dots$ , entonces la solución  $\mathbf{x}(t)$  del sistema (1.18) se puede determinar de la siguiente manera. A partir de la condición inicial  $\mathbf{x}_0$  se determina la solución  $\mathbf{x}(t)$  del sistema (1.18) en un intervalo de tiempo  $t_0 < t < t_1$ , donde  $t_1$  es algún instante en el que se cumple  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ . En el intervalo  $t_0 < t < t_1$  la solución  $\mathbf{x}(t)$  es continua y diferenciable. Ahora bien, ya que  $m(\mathbf{F}(\mathbf{x}))$  es definida en el punto  $\mathbf{x}_1$ , este valor se puede considerar como condición inicial para el sistema (1.18), de manera que se puede determinar la solución  $\mathbf{x}(t)$  en algún intervalo  $t_1 < t < t_2$ , donde  $t_2$  es algún instante en el que se cumple  $\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}_2$ . Esta solución es continua y diferenciable en el intervalo  $t_1 < t < t_2$ . Esto permite extender la solución definida en el intervalo  $t_0 < t < t_2$  la cual es continua y diferenciable a trozos. Este procedimiento se puede repetir en todos los puntos de discontinuidad a fin de obtener una solución continua en todos los puntos y diferenciable a trozos.

### 1.3. Controlabilidad y accesibilidad

Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, & \mathbf{x}(t) &\in \mathbb{R}^n, \\ u(\cdot) &\in \mathcal{U} = \{u(t) \in KC : |u(t)| \leq \delta_1\}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

donde  $A$  es una matriz constante,  $\mathbf{b}$  es un vector constante, y  $\mathcal{U}$  es el conjunto de funciones reales, acotadas por la constante  $\delta_1$  y continuas a trozos ( $KC$ ). La dinámica del sistema se puede pensar de la siguiente manera. Supongamos que  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  modela algún fenómeno físico, químico, biológico, etc., cuyo comportamiento no es de la forma deseada. Si se desea que la dinámica del sistema tenga un comportamiento deseado, es decir, si se requiere que la solución  $\mathbf{x}(t)$  de dicho sistema tome algún valor dado  $\mathbf{x}_f$  en un tiempo  $t_f$ , el cual puede ser fijo o no, o bien; que la solución  $\mathbf{x}(t)$  se comporte de manera análoga a cierta trayectoria  $\gamma(t)$  dada, entonces se puede considerar perturbar el sistema con la ayuda de alguna función  $u(\cdot)$ , la cual, en principio es desconocida. Surge el problema de saber si existe dicha función. El concepto de controlabilidad permite determinar si un sistema tiene la propiedad de poder ser llevado desde algún estado inicial  $\mathbf{x}_0$  dado a otro estado final  $\mathbf{x}_f$  también dado, en un tiempo finito y con ayuda de alguna perturbación  $u \in \mathcal{U}$ , como se muestra en la Figura 1.12 (A). Note que para cada  $u \in \mathcal{U}$  distinta el estado final al que se llega es también distinto como se muestra en Figura 1.12 (B).

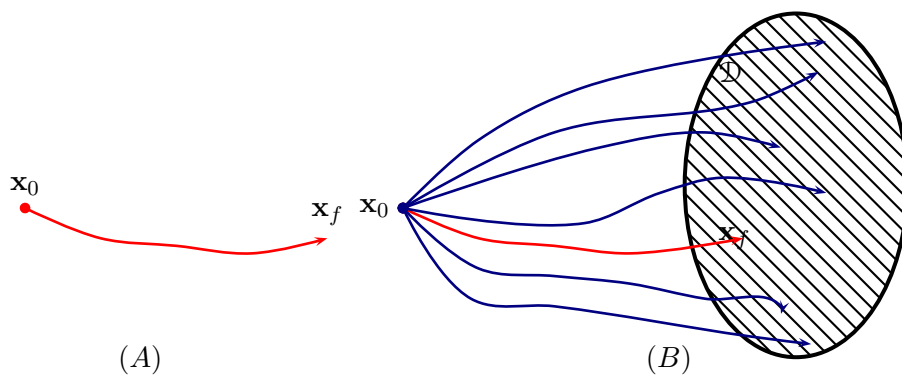


Figura 1.12: Idealización del concepto de accesibilidad.

Para sistemas de la forma (1.21) la matriz de controlabilidad, desempeña un papel importante en la teoría de controlabilidad, la cual se define de la siguiente manera:

**Definición 1.7.**

La matriz  $U = [\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b}]$  es llamada matriz de controlabilidad para el sistema (1.21).

Una pregunta natural sobre el concepto de controlabilidad es la siguiente: si  $\mathbf{x}_0$  es fijo, cuáles son los puntos  $\mathbf{x}_f$  a los que se puede llegar utilizando todas las perturbaciones  $u \in \mathcal{U}$  y que propiedades tiene el conjunto resultante. A dicho conjunto se le conoce como conjunto de accesibilidad y se define como:

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \text{existe } u \in \mathcal{U} \text{ tal que } \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{y} \text{ para algún } t_1 \in (0, \infty)\}.$$

Este conjunto se puede ver como la unión de conjuntos disjuntos a pares. En efecto, si para cada  $t \geq 0$  fijo se define el conjunto

$$\mathcal{D}_t = \{\mathbf{x}_u(t) \in \mathbb{R}^n : u \in \mathcal{U}\},$$

como se muestra en la Figura 1.13. Se tiene que

$$\mathcal{D} = \bigcup_{t>0} \mathcal{D}_t.$$

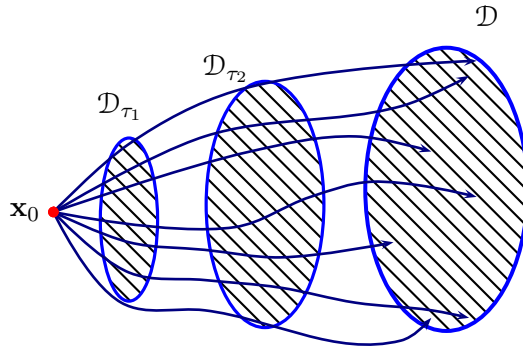


Figura 1.13: Conjuntos  $\mathcal{D}_{\tau_n}$ .

En lo que sigue supondremos que  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , ya que si la condición inicial no es cero, se puede hacer una traslación para obtener dicha condición inicial.

El conjunto de accesibilidad para el sistema (1.21) es simétrico respecto al origen, pues si  $\mathbf{x}_{u_1}(t_1)$  pertenece al conjunto de accesibilidad  $\mathcal{D}$ , entonces existen  $u_1 \in \mathcal{U}$  y  $t_1 < \infty$  tales que

$$\mathbf{x}_{u_1}(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} \mathbf{b} u_1(\tau) d\tau.$$

Es claro que  $-\mathbf{x}_{u_1}(t_1)$  está en  $\mathcal{D}$  bajo la perturbación  $-u_1 \in \mathcal{U}$ .

El siguiente lema nos muestra bajo qué condiciones el conjunto de accesibilidad tiene dimensión  $n$ , es decir, tal que el menor subespacio que contiene al conjunto de accesibilidad es de dimensión  $n$ .

**Lema 1.5.**

Si  $\text{rang } U = n$ , el conjunto de accesibilidad  $\mathcal{D}$  es convexo en  $\mathbb{R}^n$ , y  $\dim \mathcal{D} = n$ .

**Demstración.** Para mostrar que  $\mathcal{D}$  es convexo, primero se mostrará que cada  $\mathcal{D}_t$  es convexo para todo  $t \in (0, \infty)$ . Sean  $\mathbf{x}_{u_1}(t)$  y  $\mathbf{x}_{u_2}(t)$  elementos de  $\mathcal{D}_t$ . Haciendo uso de la linealidad de la integral se tiene que

$$\lambda \mathbf{x}_{u_1}(t) + (1 - \lambda) \mathbf{x}_{u_2}(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{b} (\lambda u_1(\tau) + (1 - \lambda) u_2(\tau)) d\tau \in \mathcal{D}_t,$$

ya que  $\lambda u_1(\tau) + (1 - \lambda) u_2(\tau)$  pertenece  $\mathcal{U}$ . Sean  $\mathbf{x}_{u_1}(t_1)$  y  $\mathbf{x}_{u_2}(t_2)$  elementos en  $\mathcal{D}$  donde, sin pérdida de generalidad, consideramos  $t_1 < t_2$ . Entonces

$$\mathbf{x}_{u_k}(t_k) = \int_0^{t_k} e^{A(t_k-\tau)} \mathbf{b} u_k(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2.$$

Para obtener la convexidad de  $\mathcal{D}$  basta con notar que  $\mathbf{x}_{u_1}(t_1)$  está en  $\mathcal{D}_{t_2}$ . Sea  $u_*(t)$  definido como

$$u_*(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \in [0, t_1], \\ 0, & t \in (t_1, t_2], \end{cases}$$

es claro que  $u_*(t) \in \mathcal{U}$ . Como  $\mathbf{x}_{u_1}(t_1)$  se puede reescribir de la siguiente manera

$$\mathbf{x}_{u_1}(t_1) = \int_0^{t_2} e^{A(t_2-\tau)} \mathbf{b} u_*(\tau) d\tau$$

entonces  $\mathbf{x}_{u_1}(t_1) \in \mathcal{D}_{t_2}$ . Se sigue que  $\mathcal{D}$  es convexo.

Para mostrar que  $\dim \mathcal{D} = n$ , se procede por contradicción supongamos que  $\dim \mathcal{D} = m < n$ . Como  $\mathcal{D}$  es convexo y  $\mathbf{0} \in \mathcal{D}$ , existe un plano tangente que forma un subespacio propio de  $\mathbb{R}^n$ . Se mostrará que  $\mathbf{0}$  está en el interior de  $\mathcal{D}$ , lo cual implica que  $m = n$ . Como  $\dim \mathcal{D} = m < n$ , entonces  $\mathbf{0}$  está en la frontera de  $\mathcal{D}$ . El plano tangente divide a  $\mathbb{R}^n$  en dos semiespacios tal que  $\mathcal{D}$  está completamente contenido en uno de ellos, como se ilustra en la Figura 1.3. Denotamos por  $\boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}$  el vector normal del plano tangente que se halla en el otro semiespacio. Se cumple que

$$\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\eta} \leq 0, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathcal{D}$$

más aún

$$0 = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\eta} = \max_{u \in \mathcal{U}} \int_0^{t_1} \boldsymbol{\eta}^\top e^{A(t_1-t)} \mathbf{b} u(t) dt. \quad (1.22)$$

La igualdad (1.22) es posible si y solo si

$$\boldsymbol{\eta}^\top e^{A(t_1-t)} \mathbf{b} = 0, \quad \text{para todo } t \in [0, t_1]. \quad (1.23)$$

Para  $t = t_1$  se tiene  $\boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{b} = 0$ . La función del lado izquierdo de la igualdad (1.23) se puede diferenciar  $n - 1$  veces con respecto a  $t$ , obteniendo las siguientes  $n - 1$  igualdades

$$\boldsymbol{\eta}^\top A^i \mathbf{b} = 0, \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

de donde se tiene

$$\boldsymbol{\eta}^\top (\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b}) = \boldsymbol{\eta}^\top U = \mathbf{0},$$

se sigue que las  $n$  columnas de la matriz de controlabilidad son linealmente dependientes, es decir su rango es menor que  $n$ , lo cual contradice la hipótesis del lema, y prueba que  $\mathbf{0} \in \mathcal{D}$ , por lo tanto  $\dim \mathcal{D} = n$

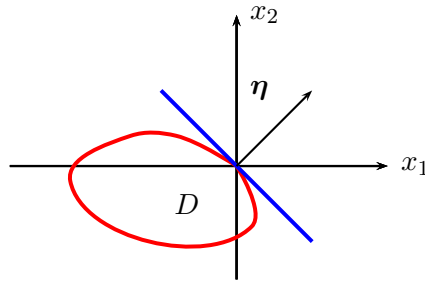


Figura 1.14: Representación de el plano tangente en  $\mathbb{R}^2$ .

#### Definición 1.8.

Se dice que el sistema (1.21) es completamente controlable si dado un estado inicial  $\mathbf{x}_0$ , la solución  $\mathbf{x}(t)$  del sistema puede ser transferida a cualquier estado final  $\mathbf{x}_f \in \mathbb{R}^n$  en algún tiempo finito  $t_f$ .

El siguiente teorema nos da condiciones necesarias y suficientes para decidir cuando el sistema (1.21) es completamente controlable.

#### Teorema 1.5.

El sistema (1.21) es completamente controlable si y solo si

$$\text{rang} [\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b}] = n.$$

**Demostración.** Supongamos primero que el sistema (1.21) es completamente controlable. Por mostrar que  $\text{rang} [\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b}] = n$ . Procediendo por contradicción se supone que

$$\text{rang} [\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b}] = m < n.$$

Entonces las  $n$  filas de la matriz de controlabilidad son linealmente dependientes. Por tanto existen números reales  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , no todos cero, tal que

$$\boldsymbol{\alpha}^\top (\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b}) = (0, 0, \dots, 0)$$



donde  $\alpha^\top = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  y  $\|\alpha\| \neq 0$ .

$$\alpha^\top \mathbf{b} = 0, \quad \alpha^\top A \mathbf{b} = 0, \dots, \quad \alpha^\top A^{n-1} \mathbf{b} = 0.$$

Del Teorema de Cayley-Hamilton se tiene

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I = 0,$$

donde  $a_1, \dots, a_n$  son los coeficiente del polinomio característico de la matriz  $A$ . De las relaciones anteriores se tiene  $\alpha^\top A^n \mathbf{b} = -\alpha^\top (a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I) \mathbf{b} = 0$ , y  $\alpha^\top A^m \mathbf{b} = 0$  para cualquier entero positivo  $m$ . Puesto que

$$\alpha^\top A^{n+1} \mathbf{b} = -\alpha^\top (a_1 A^n + \dots + a_{n-1} A^2 + a_n A) \mathbf{b} = 0.$$

Ahora bien, la solución del sistema (1.21) con condición inicial  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  es

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{b} u(\tau) d\tau$$

de lo cual se obtiene

$$\alpha^\top \mathbf{x}(t) = \int_0^t \alpha^\top e^{A(t-\tau)} \mathbf{b} u(\tau) d\tau = 0,$$

pues la matriz exponencial  $\exp(A(t-\tau))$  es definida como la serie

$$e^{A(t-\tau)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^i}{i!} A^i,$$

de lo anterior se deduce que  $\mathbf{x}(t)$  es ortogonal al vector  $\alpha^\top$  para todo  $t \geq 0$ , es decir  $\mathbf{x}(t)$  es constante para todo  $t \geq 0$ , esto implica que  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  para todo  $t \geq 0$  ya que  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ , lo cual contradice la controlabilidad del sistema.

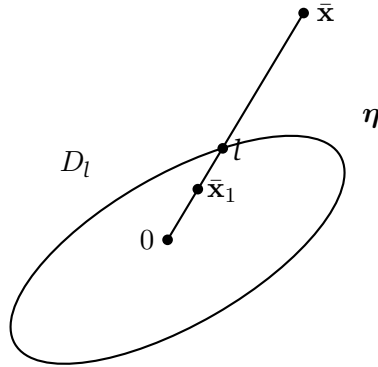


Figura 1.15: Conjunto de accesibilidad.

## 26 Preliminares

Ahora se supone que  $\text{rang} [\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b}] = n$ , por mostrar que el sistema 1.21 es completamente controlable. Procediendo por contradicción, supongamos que la región de accesibilidad es acotada, es decir

$$u(\cdot) \in D_l = \{|u_i(t)| \leq l, i = 1, \dots, s\},$$

por el Lema 1.5 se tiene que para un tiempo  $t_1 = 1$  el conjunto de accesibilidad  $D_l$  es una región convexa que contiene al origen. Ahora haciendo  $l \rightarrow \infty$  se afirma que  $D_l = \mathbb{R}^n$ .

Para probar lo anterior, tomemos un punto aleatorio  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  y el segmento  $(0, \bar{\mathbf{x}})$ . Como  $0 \in D_l$ , entonces existe un punto  $\bar{\mathbf{x}}_1 = \rho \bar{\mathbf{x}} \in D_l$  en dicho segmento tal que  $0 < \rho < 1$ , ahora bien como  $\bar{\mathbf{x}}_1 \in D_l$ , entonces existe un control  $u^l$  tal que

$$\bar{\mathbf{x}}_1 = \int_0^1 e^{A(1-\tau)} \mathbf{b} u^l(\tau) d\tau.$$

Se tiene que el punto  $\bar{\mathbf{x}}$  se puede reescribir en términos de  $\bar{\mathbf{x}}_1$  como sigue

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{\rho} \bar{\mathbf{x}}_1 = \int_0^1 e^{A(1-\tau)} \mathbf{b} \left(\frac{1}{\rho} u^l(\tau)\right) d\tau,$$

es decir, el punto  $\bar{\mathbf{x}}$  se alcanza en el tiempo  $t_1 = 1$  con el control  $\bar{u} = \frac{u^l}{\rho}$ , con lo cual queda demostrada la suficiencia. ■

La controlabilidad completa de un sistema permite expresarlo en una forma especial llamada *forma canónica* del sistema. El siguiente teorema da condiciones necesarias y suficientes para poder transformar el sistema (1.21).

### Teorema 1.6.

El sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad (1.24)$$

se puede expresar en forma del sistema completamente controlable de ecuaciones diferenciales canónico

$$\dot{\mathbf{y}} = \tilde{A}\mathbf{y} + \mathbf{e}_n u, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad (1.25)$$

los escalares  $a_1, \dots, a_n$  son los coeficientes del polinomio característico,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

si y solo si,

$$\text{rang } U = \text{rang} [\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b}] = n.$$

**Demostración.** Supongamos que el sistema (1.24) se puede escribir en la forma (1.25), es decir, existe una matriz  $C$  invertible, tal que la transformación  $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$  permite obtener  $\tilde{A} = C^{-1}AC$  y  $\mathbf{e}_n = C^{-1}\mathbf{b}$ . Como el sistema (1.25) es completamente controlable, se tiene  $\det[\mathbf{e}_n, \tilde{A}\mathbf{e}_n, \dots, \tilde{A}^{n-1}\mathbf{e}_n] \neq 0$ . En sí, al desarrollar el determinante por cofactores se tiene

$$\det [\mathbf{e}_n, \tilde{A}\mathbf{e}_n, \dots, \tilde{A}^{n-1}\mathbf{e}_n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \ell_{n-2,n} \\ 0 & 1 & -a_1 & \cdots & \ell_{n-1,n} \\ 1 & -a_1 & \ell_{n,3} & \cdots & \ell_{n,n} \end{bmatrix} = (-1)^{\frac{n(n+3)}{n}},$$

donde los términos  $\ell_{i,j}$  son distintos de cero. Se sigue entonces

$$\begin{aligned} \det U &= \det [\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b}] = \det [C\mathbf{e}_n, C\tilde{A}\mathbf{e}_n, \dots, C\tilde{A}^{n-1}\mathbf{e}_n] \\ &= \det [C [\mathbf{e}_n, \tilde{A}\mathbf{e}_n, \dots, \tilde{A}^{n-1}\mathbf{e}_n]] = \det C \det [\mathbf{e}_n, \tilde{A}\mathbf{e}_n, \dots, \tilde{A}^{n-1}\mathbf{e}_n]. \end{aligned}$$

Esto muestra que  $\text{rang } U = n$ .

Ahora supongamos que  $\text{rang } U = n$ . Esto implica que el sistema (1.24) es completamente controlable y que las columnas de  $U$  son linealmente independientes, por tanto, forman una base  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ , donde  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{u}_2 = A\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n = A\mathbf{u}_{n-1}$ . Por lo que la representación siguiente es única:

$$\mathbf{u}_{n+1} = a_n\mathbf{u}_1 + \cdots + a_1\mathbf{u}_n$$

donde los escalares  $a_1, \dots, a_n$  son los coeficientes del polinomio característico

$$\det [A - \lambda I] = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Se quiere encontrar una base  $\{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$  tal que el cambio de variable  $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$  permite transformar el sistema (1.24) en el sistema (1.25), donde  $C$  debe ser invertible. Esto equivale a expresar  $\mathbf{x}$  como

$$\mathbf{x} = y_1\mathbf{c}_1 + \cdots + y_{n-1}\mathbf{c}_{n-1} + y_n\mathbf{c}_n.$$

Al substituir esta expresión en el sistema (1.24) se obtiene  $\dot{\mathbf{x}} = AC\mathbf{y} + \mathbf{b}u$  esto se puede expresar de la siguiente manera

$$\dot{\mathbf{x}} = y_1A\mathbf{c}_1 + \cdots + y_{n-1}A\mathbf{c}_{n-1} + y_n\mathbf{c}_n + \mathbf{b}u.$$

Por otra parte, de la relación  $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$  se obtiene  $\dot{\mathbf{x}} = C\dot{\mathbf{y}}$ , lo cual, en virtud del sistema (1.25), es equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \dot{y}_1\mathbf{c}_1 + \cdots + \dot{y}_{n-1}\mathbf{c}_{n-1} + \dot{y}_n\mathbf{c}_n \\ &= y_2\mathbf{c}_1 + \cdots + y_n\mathbf{c}_{n-1} + (-a_n y_1 - a_{n-1}y_2 - \cdots - a_1 y_n + u)\mathbf{c}_n \\ &= -y_1 a_n \mathbf{c}_n - y_2 (a_{n-1} \mathbf{c}_n - \mathbf{c}_1) - \cdots - y_n (a_1 \mathbf{c}_n - \mathbf{c}_{n-1}) + \mathbf{c}_n u. \end{aligned}$$

Igualando las dos expresiones que se tienen para  $\dot{\mathbf{x}}$  se tiene el sistema

$$\begin{aligned}
 A\mathbf{c}_1 &= -a_n\mathbf{c}_n \\
 A\mathbf{c}_2 &= -(a_{n-1}\mathbf{c}_n - \mathbf{c}_1) \\
 &\vdots \\
 A\mathbf{c}_n &= -(a_1\mathbf{c}_n - \mathbf{c}_{n-1}) \\
 \mathbf{b} &= \mathbf{c}_n
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c}_1 &= a_{n-1}\mathbf{b} + a_{n-2}A\mathbf{b} + \cdots + a_1A^{n-2}\mathbf{b} + A^{n-1}\mathbf{b} \\
 \mathbf{c}_2 &= a_{n-2}\mathbf{b} + \cdots + a_1A^{n-3}\mathbf{b} + A^{n-2}\mathbf{b} \\
 &\vdots \\
 \mathbf{c}_{n-1} &= a_1\mathbf{b} + A\mathbf{b} \\
 \mathbf{c}_n &= \mathbf{b}.
 \end{aligned}$$

De las relaciones anteriores se tiene que la matriz  $C = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n]$  resulta de multiplicar dos matrices

$$C = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n] = [\mathbf{b}, A\mathbf{b}, \dots, A^{n-1}\mathbf{b}] \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = UP_1. \tag{1.27}$$

Notemos que  $\det P_1 = (-1)^{\frac{n(n-3)}{2}}$  y  $\det U \neq 0$ , por lo tanto  $\det C \neq 0$ . Esto muestra que los sistemas (1.24) y (1.25) son equivalentes bajo la transformación  $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$ . ■

#### 1.4. Principio del máximo de Pontryagin

Considere el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \tag{1.28}$$

En el apartado anterior se discute el problema sobre la existencia de una trayectoria  $\mathbf{x}(t)$ , solución del sistema (1.28), con la propiedad de alcanzar un estado  $\mathbf{x}_f$  dado en un tiempo finito  $t_f$  (el cual no necesariamente es fijo), con ayuda de alguna función  $u \in \mathcal{U}$ . En el caso particular en el que el sistema es completamente controlable, se puede llegar a cualquier punto  $\mathbf{x}_f$ , partiendo del punto  $\mathbf{x}_0$ . Si fijamos estos dos valores, surge la siguiente pregunta; de cuantas formas se puede alcanzar  $\mathbf{x}_f$  partiendo del estado  $\mathbf{x}_0$ . Si existe mas de una trayectoria, es claro que lo que las hace diferentes es la perturbación  $u \in \mathcal{U}$ . Seria deseable poder seleccionar alguna de estas trayectorias utilizando algún criterio de optimalidad;

por ejemplo, menor (mayor) distancia, menor (mayor) tiempo de recorrido, etc. Es natural cuestionarse si existe una perturbación que optimice dicha trayectoria de acuerdo al criterio de optimalidad elegido; para ello se plantea un problema de optimización:

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(\mathbf{x}(t)) \quad \left( \sup_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(\mathbf{x}(t)) \right), \quad (1.29)$$

observemos que los valores del funcional  $\mathcal{J}(\mathbf{x}(t))$  (es decir, una función cuyo argumento es una función)  $\mathcal{J}(\mathbf{x}(t))$  dependen de la solución del sistema (1.28), es decir se tiene un problema de optimización restringido. Una herramienta que utilizaremos es el principio del máximo de Pontryagin.

Asociado al sistema (1.28) se define el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales conjugado

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = -A^T \boldsymbol{\psi}, \quad (1.30)$$

El siguiente ejemplo da una idea gráfica de la relación que guardan los sistemas (1.28) y (1.30);

**Ejemplo 1.4.1.** Consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u - 1), \quad (1.31)$$

con condición inicial  $\mathbf{x}_0 = [1, 1, 0]^T$  y  $u(t) = 1$ . Cuya solución es

$$\mathbf{x}_1(t) = \text{sen}(t), \quad \mathbf{x}_2(t) = \cos(t), \quad \mathbf{x}_3(t) \equiv 0.$$

Su correspondiente sistema conjugado

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \\ \dot{\psi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & u & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix}. \quad (1.32)$$

La importancia del sistema conjugado es que se cumple la siguiente igualdad para todo  $t > t_0$

$$\langle \boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t) \rangle = c,$$

donde  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  representa el producto usual en  $\mathbb{R}^n$ . Dicha relación que guardan los sistemas (1.28) y (1.30) se muestra en la Figura 1.16.

Se define la función de Pontryagin como

$$H(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, u) = \boldsymbol{\psi}^T (A\mathbf{x} + \mathbf{b}u), \quad (1.33)$$

y la función Hamiltoniana

$$\mathcal{H}(t) = H(\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}^o(t), u^o(t))$$

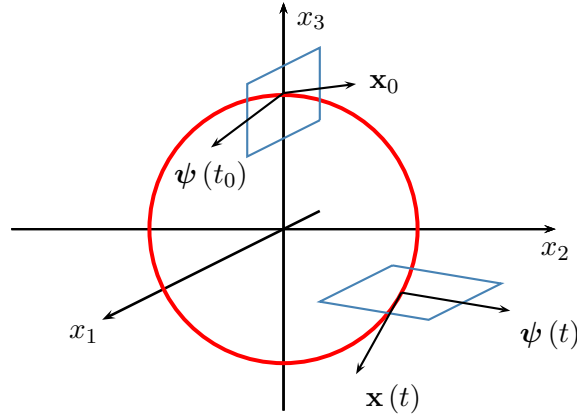


Figura 1.16: Representación del sistema conjugado.

definida en un *proceso óptimo*  $\{u^o(t), \mathbf{x}^o(t), [0, t_f^o]\}$ , es decir, un conjunto constituido por una perturbación óptima  $u^o(t)$ , una trayectoria óptima  $\mathbf{x}^o(t)$  y el intervalo de tiempo  $[0, t_f^o]$  en el que se define dicha trayectoria óptima; el cual da solución al funcional (1.29).

Supongamos que el estado final  $\mathbf{x}_f$  pertenece a una variedad  $M$ . Una condición necesaria para hallar una solución al problema de optimización (1.29) es el principio de máximo de Pontryagin, cuya demostración se puede consultar en [16]:

**Teorema 1.7** (Principio del máximo de Pontryagin).

Para cualquier proceso localmente óptimo  $\{\mathbf{x}^o(t), u^o(t), [0, t_f^o]\}$  existe un par  $(\lambda_0 \geq 0, \psi(\cdot))$  de tal manera que si  $\lambda_0 = 0$  entonces  $\psi(t) \neq 0$ , que satisfacen las siguientes tres condiciones

**Condición de máximo.** La perturbación óptima  $u^o(t)$  satisface

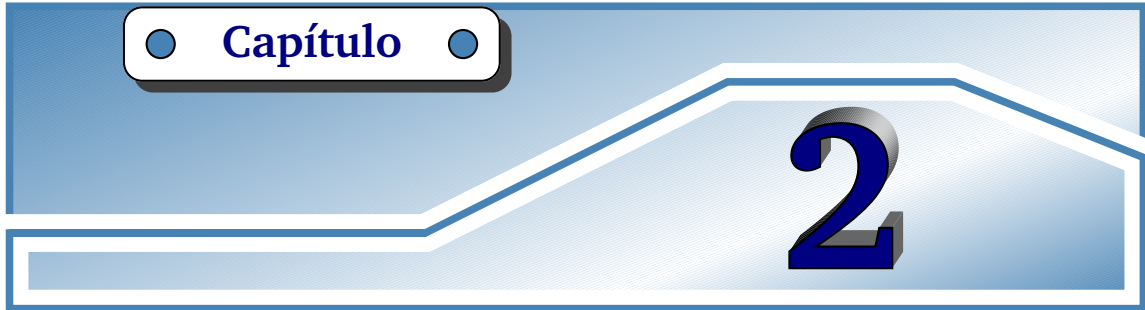
$$\max_{u \in \mathcal{U}} H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u) = H(\psi(t), \mathbf{x}^o(t), u^o(t)), \quad \text{para todo } t \in [0, t_f^o].$$

**Condición de transversalidad.** En el tiempo  $t_f^o$  se da la siguiente condición de ortogonalidad:

$$\left( \psi(t_f^o) + \lambda_0 \frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{x}^o(t_f^o))}{\partial \mathbf{x}} \right) \perp M.$$

**Condición de estacionaridad.** La función Hamiltoniana cumple

$$\mathcal{H}(t) \equiv 0, \quad \text{para todo } t \in [0, t_f^o].$$



## Estabilidad robusta.

### 2.1. Introducción

Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, & \mathbf{x}(t) &\in \mathbb{R}^n, \\ u(\cdot) &\in \mathcal{U} = \{u(t) \in KC : |u(t)| \leq \delta_1\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde  $A$  es una matriz constante con entradas reales, que posee valores propios reales negativos y al menos dos valores propios complejos con parte real negativa,  $\mathbf{b}$  es un vector constante. Se supone que el par  $\{A, \mathbf{b}\}$  es completamente controlable y  $u$  una función real, acotada y continua a trozos. El conjunto  $D$  de discontinuidades de  $u$  es numerable tal que para todo  $\mathbf{x}_i \in D$  se tiene  $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) > \delta > 0$ , para algún  $\delta$  fijo.

Se sabe que si  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , entonces la solución trivial  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  del sistema (2.1) es asintóticamente estable [15]. No obstante si  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ , la estabilidad del sistema (2.1) depende de la función  $u$ . El trabajo de esta tesis consiste en estudiar la dinámica del sistema (2.1), cuando  $u$  es una función arbitraria que pertenece a  $\mathcal{U}$ . El concepto de estabilidad de la solución trivial bajo perturbaciones permanentes, cuya primera definición fue introducida por Duboshin y Malkin [8], permite obtener información sobre el comportamiento de la solución. Empleando este concepto se define la estabilidad robusta para el problema de valor inicial (2.1) cuando la solución trivial  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  es estable bajo perturbaciones permanentes para cada  $u$  que esta en  $\mathcal{U}$ .

Para realizar el estudio de la estabilidad robusta del sistema (2.1), es necesario escribir el sistema en su forma canónica, lo cual permite simplificar algunos cálculos.

## 2.2. Estabilidad robusta y desviaciones máximas en sistemas de orden 4

A fin de comprender el comportamiento del sistema (2.1), en este apartado se analiza el proceso para determinar la estabilidad robusta en el caso particular de orden 4:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \\ u(\cdot) &\in \mathcal{U} = \{u(t) \in KC : |u(t)| \leq \delta_1\}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde  $A$  posee 2 valores propios reales negativos y dos valores propios complejos con parte real negativa. Dado que el sistema (2.2) es completamente controlable entonces de acuerdo al Teorema 1.6, existe una matriz  $C$  invertible, descrita en (1.27), tal que el sistema (2.2) es equivalente a la ecuación diferencial de orden cuatro:

$$\overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{x}} + a_1 \overset{\cdot\cdot}{\bar{x}} + a_2 \overset{\cdot}{\bar{x}} + a_3 \bar{x} + a_4 \bar{x} = \mathbf{b}u,$$

la cual se puede expresar como el siguiente sistema de ecuaciones ordinarias mediante el cambio de variables:  $\bar{x}_1 = \bar{x}$ ,  $\bar{x}_2 = \dot{\bar{x}}$ ,  $\bar{x}_3 = \ddot{\bar{x}}$ ,  $\bar{x}_4 = \overset{\cdot\cdot\cdot}{\bar{x}}$ , y toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \tilde{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{e}_4 u, \\ \tilde{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde,  $a_1, a_2, a_3, a_4$  son los coeficientes del polinomio característico. Por los supuestos respecto a la matriz  $A$ , si los valores propios son de la forma  $\lambda_{1,2} = -\epsilon_1 \pm i\omega_1$ ,  $\lambda_3 = -\epsilon_2$  y  $\lambda_4 = -\epsilon_3$ , entonces el polinomio característico asociado se representa por:

$$P_A(\lambda) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4,$$

con

$$\begin{aligned} a_1 &= 2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3, \\ a_2 &= \epsilon_2\epsilon_3 + 2\epsilon_1(\epsilon_2 + \epsilon_3) + \epsilon_1^2 + \omega_1^2, \\ a_3 &= 2\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 + (\epsilon_2 + \epsilon_3)(\epsilon_1^2 + \omega_1^2), \\ a_4 &= \epsilon_2\epsilon_3(\epsilon_1^2 + \omega_1^2). \end{aligned}$$

Los correspondiente vectores propios asociados a los valores propios de la matriz  $A$  son  $\mathbf{u}_1 \pm i\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{u}_3$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ \epsilon_1 \\ -\epsilon_1^2 + \omega_1^2 \\ \epsilon_1^3 - 3\epsilon_1\omega_1^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ -2\epsilon_1\omega_1 \\ 3\epsilon_1^2\omega_1 - \omega_1^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \epsilon_2 \\ -\epsilon_2^2 \\ \epsilon_2^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ \epsilon_3 \\ -\epsilon_3^2 \\ \epsilon_3^3 \end{bmatrix}.$$

El siguiente teorema que resulta de unir dos resultados [15, 1], cuya demostración se puede consultar en [15], permite separar al sistema (2.3) en tres subsistemas no acoplados mediante una transformación lineal no degenerada, lo cual nos ayudará a estudiar



la estabilidad robusta del sistema (2.3) analizando la estabilidad en cada uno de dichos subsistemas. De las condiciones obtenidas para estos tres subsistemas, se determinarán condiciones necesarias para la estabilidad robusta del sistema original.

**Teorema 2.1.**

Si la matriz  $A$  tiene distintos valores propios complejos  $\lambda_j = a_j + ib_j$  y  $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$  y correspondientes vectores propios  $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j$ ,  $\bar{\mathbf{w}}_j = \mathbf{u}_j - i\mathbf{v}_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  y  $n-k$  distintos valores propios reales  $\lambda_j$  con sus correspondientes vectores propios  $\mathbf{v}_j$ ,  $j = k+1, \dots, n$ . entonces la matriz

$$P = [\mathbf{v}_{k+1} \quad \mathbf{u}_{k+1} \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n \quad \mathbf{u}_n \quad \mathbf{v}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_k]$$

es invertible y

$$P^{-1}AP = \text{diag}[B_{k+1}, \dots, B_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k]$$

donde los  $B_j$  son bloques de la forma

$$B_j = \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Aplicando la transformación  $\bar{\mathbf{x}} = P\mathbf{y}$ , al sistema (2.3) donde la matriz  $P$  se construye de acuerdo al teorema anterior, la cual resulta ser

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ \omega_1 & \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 \\ -2\epsilon_1\omega_1 & -\epsilon_1^2 + \omega_1^2 & \epsilon_2^2 & \epsilon_3^2 \\ 3\epsilon_1^2\omega_1 - \omega_1^3 & \epsilon_1^3 - 3\epsilon_1\omega_1^2 & \epsilon_2^3 & \epsilon_3^3 \end{bmatrix}$$

se obtiene el siguiente sistema equivalente al sistema (2.3).

$$\dot{\mathbf{y}} = \bar{B}\mathbf{y} + \bar{\mathbf{c}}u, \quad u \in \mathcal{U}, \quad (2.4)$$

$$\bar{B} = P^{-1}\tilde{A}P = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & -\omega_1 & 0 & 0 \\ \omega_1 & \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{c}} = P^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{\epsilon}_{12}\bar{\epsilon}_{13} - \omega_1^2}{\omega_1(\bar{\epsilon}_{12}^2 + \omega_1^2)(\bar{\epsilon}_{13}^2 + \omega_1^2)} \\ \frac{-2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}{(\bar{\epsilon}_{12}^2 + \omega_1^2)(\bar{\epsilon}_{13}^2 + \omega_1^2)} \\ \frac{1}{\bar{\epsilon}_{13}(\bar{\epsilon}_{12}^2 + \omega_1^2)} \\ -\frac{1}{\bar{\epsilon}_{23}(\bar{\epsilon}_{13}^2 + \omega_1^2)} \end{bmatrix},$$

donde  $\bar{\epsilon}_{ij}$  denota la resta  $(\epsilon_i - \epsilon_j)$ .

Notemos que el sistema (2.4) es desacoplado, es decir, en el sistema de ecuaciones diferenciales, las coordenadas  $y_3$  y  $y_4$  no dependen de las coordenadas  $y_1$  y  $y_2$ , pero estas ultimas se relacionan mutuamente. Esta transformación nos permite analizar la estabilidad robusta de tres subsistemas de menor dimensión; las condiciones que garantizan la estabilidad robusta de cada uno de estos tres subsistemas, nos permitirá dar condiciones

para la estabilidad robusta del sistema (2.3). Es importante observar que la perturbación  $u(\cdot)$  aparece en los tres subsistemas. Además, dichos subsistemas son completamente controlables, pues sus respectivas matrices de controlabilidad satisfacen:

$$\begin{aligned} \det U_1 &= \det \begin{bmatrix} \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\epsilon_1 - \epsilon_3) - \omega_1^2}{\omega_1((\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + \omega_1^2)((\epsilon_1 - \epsilon_3)^2 + \omega_1^2)} & \frac{-\epsilon_1(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\epsilon_1 - \epsilon_3) + (-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)\omega_1^2}{\omega_1((\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + \omega_1^2)((\epsilon_1 - \epsilon_3)^2 + \omega_1^2)} \\ \frac{-2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}{((\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + \omega_1^2)((\epsilon_1 - \epsilon_3)^2 + \omega_1^2)} & \frac{\epsilon_1^2 - \epsilon_2\epsilon_3 + \omega_1^2}{((\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + \omega_1^2)((\epsilon_1 - \epsilon_3)^2 + \omega_1^2)} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{\omega_1((\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + \omega_1^2)((\epsilon_1 - \epsilon_3)^2 + \omega_1^2)} \neq 0, \\ \det U_2 &= \det \left[ \frac{1}{(\epsilon_2 - \epsilon_3)((\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + \omega_1^2)} \right] = \frac{1}{(\epsilon_2 - \epsilon_3)((\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + \omega_1^2)} \neq 0, \\ \det U_3 &= \det \left[ -\frac{1}{(\epsilon_2 - \epsilon_3)((\epsilon_1 - \epsilon_3)^2 + \omega_1^2)} \right] = -\frac{1}{(\epsilon_2 - \epsilon_3)((\epsilon_1 - \epsilon_3)^2 + \omega_1^2)} \neq 0. \end{aligned}$$

No obstante, el primer subsistema no está expresado en la forma canónica, las expresiones que resultan de hacer los cálculos para determinar la estabilidad robusta pueden ser muy grandes, para evitar esta situación podemos expresar el primer subsistema en forma canónica; esto es, aplicamos el Teorema 1.6 al sistema (2.4) existe una transformación  $\tilde{C}$  definida por:

$$\tilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} c_{11} &= (-2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)\omega_1 \\ c_{12} &= -(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\epsilon_1 - \epsilon_3) + \omega_1^2 \\ c_{21} &= (3\epsilon_1^2 + \epsilon_2\epsilon_3 - 2\epsilon_1(\epsilon_2 + \epsilon_3) - \omega_1^2)\omega_1 \\ c_{22} &= \epsilon_1(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\epsilon_1 - \epsilon_3) + (-3\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)\omega_1^2, \end{aligned}$$

esta transformación permite expresar al primer subsistema de (2.4) en su forma canónica.

De las dos transformaciones anteriores se tiene el siguiente cambio de variable  $y = Sx$ , donde  $S$  está dada como sigue

$$S = \begin{bmatrix} \frac{3\epsilon_1^2 + \epsilon_2\epsilon_3 - 2\epsilon_1(\epsilon_2 + \epsilon_3) - \omega_1^2}{\zeta} & \frac{-2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}{\zeta} & -1 & -1 \\ \frac{-(2\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3)(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)}{\zeta} & \frac{-\epsilon_1^2 - \epsilon_2\epsilon_3 + \omega_1^2}{\zeta} & \epsilon_2 & \epsilon_3 \\ \frac{(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)(\epsilon_1^2 - \epsilon_2\epsilon_3 + \omega_1^2)}{\zeta} & \frac{-2\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1^2(\epsilon_2 + \epsilon_3) + (\epsilon_2 + \epsilon_3)\omega_1^2}{\zeta} & -\epsilon_2^2 & -\epsilon_3^2 \\ -\frac{(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)(-2\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1^2(\epsilon_2 + \epsilon_3) + (\epsilon_2 + \epsilon_3)\omega_1^2)}{\zeta} & 1 + \frac{-\frac{\epsilon_2^3}{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + \omega_1^2} + \frac{\epsilon_3^3}{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + \omega_1^2}}{\epsilon_2 - \epsilon_3} & \epsilon_2^3 & \epsilon_3^3 \end{bmatrix}$$

$$\zeta = ((\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + \omega_1^2)((\epsilon_1 - \epsilon_3)^2 + \omega_1^2)$$

permite expresar el sistema (2.3) en su forma equivalente

$$\dot{x} = Bx + cu, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U} = \{u \in KC : |u(t)| \leq \delta_1\}, \quad (2.5)$$

donde  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)]^T$  representa las coordenadas fase del sistema, y

$$B = S^{-1}\bar{B}S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(\epsilon_1^2 + \omega_1^2) & -2\epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = S^{-1}\bar{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\bar{\epsilon}_{23}(\bar{\epsilon}_{12}^2 + \omega_1^2)} \\ \frac{1}{\bar{\epsilon}_{23}(\bar{\epsilon}_{13}^2 + \omega_1^2)} \end{bmatrix}.$$

### 2.2.1 Planteamiento del problema

El sistema (2.5) es equivalente a los tres subsistemas siguientes

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = \alpha_0^1, \\ \dot{x}_2 = -(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)x_1 - 2\epsilon_1x_2 + u, & x_2(0) = \alpha_0^2, \\ \dot{x}_3 = -\epsilon_2x_3 + b_3u, & x_3(0) = \alpha_0^3, \\ \dot{x}_4 = -\epsilon_3x_4 + b_4u, & x_4(0) = \alpha_0^4, \end{cases} \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad (2.6)$$

donde

$$b_3 = \frac{1}{\bar{\epsilon}_{23}(\bar{\epsilon}_{12}^2 + \omega_1^2)}, \quad b_4 = \frac{1}{\bar{\epsilon}_{23}(\bar{\epsilon}_{13}^2 + \omega_1^2)}.$$

Notemos que si tomamos  $u(t) \equiv 0$ , entonces la solución del sistema (2.6) es asintóticamente estable, debido a que los valores propios asociados a la matriz  $B$  del sistema (2.5) tienen parte real negativa, lo cual implica que  $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . En el primer subsistema de (2.6) la solución

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-\epsilon_1 t} \left[ \alpha \cos \omega_1 t + \frac{\alpha\epsilon_1 + \beta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right], \\ x_2(t) = e^{-\epsilon_1 t} \left[ \beta \cos \omega_1 t - \left( \alpha\omega_1 + \frac{\epsilon_1(\alpha\epsilon_1 + \beta)}{\omega_1} \right) \sin \omega_1 t \right], \end{cases}$$

tiende al punto  $(0, 0)$  en el plano  $\{x_1, x_2\}$  en forma de espiral; mientras que en el segundo y tercer subsistema de (2.6) la solución

$$\begin{cases} x_3(t) = \gamma e^{-\epsilon_2 t}, \\ x_4(t) = \delta e^{-\epsilon_3 t}, \end{cases}$$

tiende al punto  $(0, 0)$  del plano  $x_3x_4$ . En la Figura 2.1 se muestra el campo de trayectorias para cada subsistema.

Por otro lado, si  $u(t) \neq 0$ , el comportamiento de las trayectorias puede cambiar. Tal comportamiento puede ser no deseable para sistemas que sean modelados por una ecuación como (2.5), donde  $u(t)$  representa una perturbación que no se ha considerado en el modelo, o bien una perturbación cuya existencia es conocida, pero cuya representación es desconocida. En esta circunstancia, el comportamiento de las trayectorias es desconocido, aunque en algunos casos el comportamiento puede ser similar al que se muestra en la Figura 2.1. Por otra parte como el sistema (2.5) es completamente controlable, entonces se puede buscar un comportamiento de las trayectorias distinto al que se tiene, por ejemplo, en el que se pierde la estabilidad asintótica del origen de coordenadas. Dicho comportamiento en las aplicaciones prácticas no es deseado, no obstante puede ayudar a proporcionar información sobre otros tipos de comportamiento. Este tipo de comportamiento es

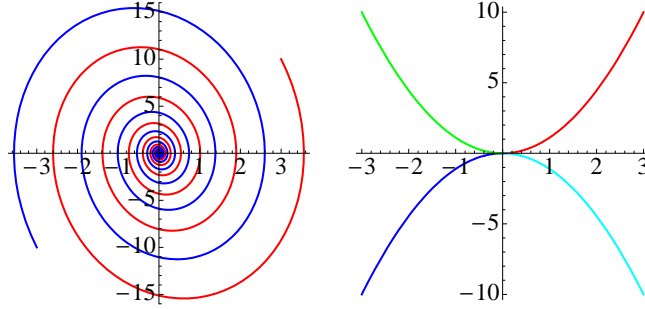


Figura 2.1: Campo de trayectorias para el sistema (2.6).

el que se desea analizar, esto es, se requiere encontrar una perturbación  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  que permita desestabilizar el sistema (2.5) en el sentido de que la trayectoria solución se aleje del origen lo máximo posible. Si tal perturbación existe le llamaremos la *peor perturbación*. Esto equivale a encontrar soluciones a los problemas de optimización:

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} |\mathcal{J}_k(\mathbf{x}(t))|, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

para los funcionales definidos de la forma  $\mathcal{J}_k(\mathbf{x}(t)) := |x_k(t)|$ . A la solución de cada uno de los problemas le llamaremos desviación máxima de la coordenada  $x_k$ . La determinación de la desviación máxima de cada coordenada se discutirá en la siguiente sección.

### 2.2.2 Determinación de las desviaciones máximas

Dividiremos esta sección en dos partes, en la primera calcularemos las desviaciones máximas para las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$  y en la segunda, se determinan las desviaciones máximas para las coordenadas  $x_3$  y  $x_4$ . La razón de esto es que las primeras dos coordenadas son acopladas mientras que las otras dos no lo son.

#### Desviaciones máximas para las coordenadas $x_1$ y $x_2$

Debido a que las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$  son acopladas, el problema de optimización respecto a una coordenada, depende de la otra. Para simplificar esta dependencia dicho problema de optimización se formula de la siguiente forma particular: Podemos suponer que la trayectoria del sistema inicia en el punto  $(\alpha_0^1, 0)$ , y dado que las trayectorias son oscilantes, la desviación máxima que buscamos se obtiene cuando dicha trayectoria vuelve a intersectar al eje  $x_1$ , como se muestra en la Figura 2.2.

Por tanto el problema de optimización que resolveremos para el primer funcional  $\mathcal{J}_1(\mathbf{x}(t)) := x_1(t)$  es el siguiente:

$$\begin{aligned} & \inf_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}_1(\mathbf{x}(t)) \\ & x_1(0) = \alpha_0^1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2(t_1^o) = 0, \\ & x_2(t) \neq 0 \quad \text{para todo } t \in (0, t_1^o), \end{aligned} \quad (2.7)$$

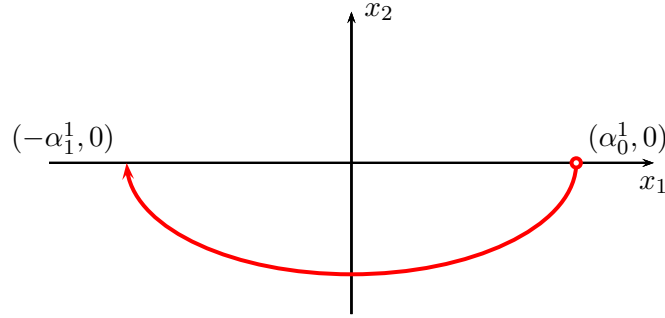


Figura 2.2: Interpretación geométrica del problema de optimización para la coordenada  $x_1$ .

donde  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  satisface el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = \alpha_0^1, \\ \dot{x}_2 = -(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)x_1 - 2\epsilon_1 x_2 + u, & x_2(0) = 0, \end{cases} \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}. \quad (2.8)$$

Las condiciones de frontera a las cuales se encuentra sujeto el funcional  $\mathcal{J}_1(\mathbf{x}(t))$  del problema de optimización (2.7) son necesarias para garantizar la existencia de un mínimo.

Se aplica el principio del máximo de Pontryagin (ver Teorema 1.7 en la página 31) para resolver el problema de optimización y se verificará que se cumplen las tres condiciones dadas. La correspondiente función de Pontryagin es la siguiente

$$H(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, u) = \psi_1 x_2 - \psi_2 [(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)x_1 + 2\epsilon_1 x_2] + \psi_2 u,$$

donde  $\boldsymbol{\psi}(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$  es solución del sistema conjugado asociado al sistema (2.8), es decir

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = (\epsilon_1^2 + \omega_1^2)\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + 2\epsilon_1\psi_2. \end{cases} \quad (2.9)$$

Si  $\{\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}^o(t), u^o(t), [0, t_1^o]\}$  es un proceso óptimo que da solución al problema de optimización, entonces existe una constante  $\lambda_0 \geq 0$  y una función  $\boldsymbol{\psi}(t)$ , de manera que si  $\lambda_0 = 0$ , entonces  $\boldsymbol{\psi}(t) \neq \mathbf{0}$ , tal que la función de Pontryagin satisface las siguientes tres condiciones:

**Condición de máximo.** La perturbación óptima (peor perturbación) que da solución al problema de optimización maximiza la función de Pontryagin,

$$\max_{u \in \mathcal{U}} H(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, u) = \max_{u \in \mathcal{U}} (\psi_1 x_2 - \psi_2 [(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)x_1 + 2\epsilon_1 x_2] + \psi_2 u),$$

de donde la perturbación óptima es  $u^o(t) = \delta_1 \text{sign } \psi_2(t)$  para todo  $t \in (0, t_1^o)$ .

**Condición de transversalidad.** El significado geométrico de esta condición es que la trayectoria óptima interseca ortogonalmente a la variedad  $M$  definida por la recta  $x_2 = 0$ ; esto es

$$\left( \boldsymbol{\psi}(t_1^o) + \lambda_0 \frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{x}^o(t_1^o))}{\partial \mathbf{x}} \right) \perp M,$$

lo cual equivale a la ecuación

$$\left( \begin{bmatrix} \psi_1(t_1^o) \\ \psi_2(t_1^o) \end{bmatrix} + \lambda_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \perp \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{para todo } \gamma \in \mathbb{R}.$$

de donde se obtiene que  $\psi_1(t_1^o) = -\lambda_0 \leq 0$ .

**Condición de estacionaridad.** Esta condición muestra que la función Hamiltoniana definida por  $\mathcal{H}(t) := H(\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t), u^o(t))$  cumple

$$\mathcal{H}(t) \equiv 0, \quad \text{para todo } t \in [0, t_1^o],$$

en particular para  $t = t_1^o$  se tiene

$$\mathcal{H}(t) = \psi_2(t_1^o) \left[ -(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)x_1(t_1^o) - 2\epsilon_1 x_2(t_1^o) + u^o(t_1^o) \right] = 0.$$

Si suponemos que  $-(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)x_1(t_1^o) - 2\epsilon_1 x_2(t_1^o) + u^o(t_1^o) = 0$ , entonces el sistema (2.8) tiene como punto de equilibrio a

$$\mathbf{x}^o(t) = \begin{bmatrix} \frac{u^o(t_1^o)}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

pero eso contradice la condición de que  $x_2(t) \neq 0$  para todo  $t \in (0, t_1^o)$ . Por tanto, necesariamente

$$\psi_2(t_1^o) = 0.$$

Notemos que si  $\lambda_0 = 0$ , entonces la solución  $\boldsymbol{\psi}(t)$  del sistema conjugado (2.9) alcanza al origen de coordenadas en el instante  $t_1^o$ , lo cual se sigue de las condiciones de estacionaridad y transversalidad, esto implica que la solución del sistema (2.9) es  $\boldsymbol{\psi}(t) = \mathbf{0}$  lo cual contradice la existencia de un proceso óptimo, por tanto  $\lambda_0 > 0$ . Sin pérdida de generalidad podemos tomar  $\lambda_0 = 1$  después de normalizar las coordenadas del sistema (2.9) de ser necesario. De esto se obtienen las condiciones en el tiempo terminal:

$$\psi_1(t_1^o) = -1, \quad \psi_2(t_1^o) = 0.$$

Como conclusión del principio del máximo de Pontryagin, si suponemos que el funcional  $\mathcal{J}_1(\mathbf{x}(t))$  toma el valor  $\alpha_1^1$  al resolver el problema de optimización planteado, la trayectoria óptima satisface el siguiente problema de valores en la frontera

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = (\epsilon_1^2 + \omega_1^2) \psi_2, & \psi_1(t_1^o) = -1, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + 2\epsilon_1 \psi_2, & \psi_2(t_1^o) = 0, \\ \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = \alpha_0^1, \quad x_1(t_1^o) = \alpha_1^1, \\ \dot{x}_2 = -(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)x_1 - 2\epsilon_1 x_2 + u, & x_2(0) = 0, \quad x_2(t_1^o) = 0, \\ u^o = \delta_1 \text{sign } \psi_2. \end{cases} \quad (2.10)$$

Hasta el momento desconocemos el valor de los parámetros  $t_1^o$  y  $\alpha_1^1$ , así como la función  $\boldsymbol{\psi}(t)$  en el intervalo  $[0, t_1^o]$ , por lo cual no podemos resolver el problema de contorno en

forma directa. Sin embargo, se deduce que  $\dot{\psi}_2(t_1^o) = -\psi_1(t_1^o) + 2\epsilon_1\psi_2(t_1^o) = 1$ , lo cual implica que existe una vecindad  $V$  de  $t_1^o$  tal que  $\psi_2(t) < 0$  para todo  $t \in V \cap (0, t_1^o)$ . Por tanto  $u^o(t) = -\delta_1$  para todo  $t \in V \cap (0, t_1^o)$ . Se requiere conocer la vecindad  $V$  ya que ella determina la perturbación óptima. Para ello usaremos el tiempo inverso  $\tau = t_1^o - t$ , el sistema (2.10) se pueden escribir como el siguiente problema de contorno, donde

$$x' = \frac{dx(t)}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = -\dot{x},$$

$$\begin{cases} \psi_1' = -(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)\psi_2, & \psi_1(0) = -1, \\ \psi_2' = \psi_1 - 2\epsilon_1\psi_2, & \psi_2(0) = 0, \\ x_1' = -x_2, & x_1(0) = \alpha_1^1, \\ x_2' = (\epsilon_1^2 + \omega_1^2)x_1 + 2\epsilon_1x_2 - \delta_1, & x_2(0) = 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

cuya solución es

$$\begin{cases} \psi_1(\tau) = -e^{-\epsilon_1\tau} \left( \cos \omega_1\tau + \frac{\epsilon_1}{\omega_1} \sin \omega_1\tau \right), \\ \psi_2(\tau) = -\frac{1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} e^{-\epsilon_1\tau} \sin \omega_1\tau, \\ x_1(\tau) = \left( \frac{\delta_1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} - \alpha_1^1 \right) e^{\epsilon_1\tau} \left( \cos \omega_1\tau - \frac{\epsilon_1}{\omega_1} \sin \omega_1\tau \right) - \frac{\delta_1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2}, \\ x_2(\tau) = -\frac{(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)\alpha_1^1 - \delta_1}{\omega_1} e^{\epsilon_1\tau} \sin \omega_1\tau. \end{cases}$$

De lo anterior se deduce que

$$x_2(\tau) = \frac{(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)((\epsilon_1^2 + \omega_1^2)\alpha_1^1 - \delta_1)}{\omega_1} e^{2\epsilon_1\tau} \psi_2(\tau), \quad \text{para todo } \tau \in (0, t_1^o),$$

lo cual implica

$$\text{sign } x_2(\tau) = \text{sign } \psi(\tau), \quad \tau \in (0, t_1^o),$$

ya que  $(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)\alpha_1^1 - \delta_1 > 0$ , lo cual se sigue de la solución del sistema (2.11). Para verificar esta desigualdad, primero observemos que  $x_1(\tau)$  es una función creciente tal que  $x_1(0) = -\alpha_1^1$ . Se desea encontrar  $\tau_1 \in (0, t_1^o)$  tal que  $x_1(\tau_1) = -\frac{\delta_1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2}$ , y por lo anterior se deduce

$$x_1(\tau_1) = -\frac{\delta_1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} > -\alpha_1^1 = x_1(0),$$

lo cual establece la desigualdad deseada. El valor  $\tau_1$  es la raíz de la ecuación

$$0 = \cos \omega_1\tau_1 - \frac{\epsilon_1}{\omega_1} \sin \omega_1\tau_1 = \cos \left( \omega_1\tau_1 + \arctan \frac{\epsilon_1}{\omega_1} \right),$$

de donde

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_1} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\epsilon_1}{\omega_1} \right).$$

Se tiene  $\tau_1 \in (0, t_1^o)$  ya que

$$0 < \tau_1 < \frac{\pi}{2\omega_1} < t_1^o,$$

la última desigualdad es consecuencia del hecho  $x_1(\tau_1) < 0$ .

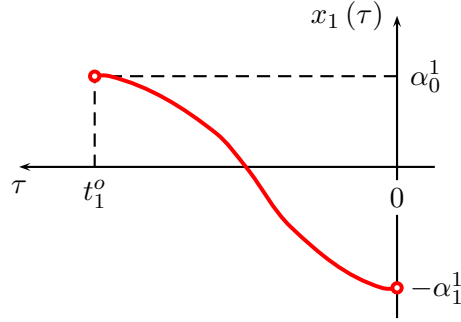


Figura 2.3: Comportamiento de la función  $x_1(\tau)$  en el intervalo  $(0, t_1^o)$  con las condiciones iniciales  $x_1(0) = -\alpha_1^1$  y  $x_1(t_1^o) = \alpha_0^1$ .

El valor de  $t_1^o$  es el menor valor distinto de cero que cumple  $x_2(t_1^o) = 0$ , es decir, es una raíz de la ecuación:

$$-\frac{(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)\alpha_1^1 - \delta_1}{\omega_1} e^{\epsilon_1 t_1^o} \sin \omega_1 t_1^o = 0,$$

de donde

$$t_1^o = \frac{\pi}{\omega_1}.$$

Ahora ya se puede usar el valor de  $t_1^o$  para encontrar la relación que existe entre  $\alpha_0^1$  y  $\alpha_1^1$ , pues  $x_1(t_1^o) = \alpha_0^1$ , sustituyendo se tiene

$$x_1(t_1^o) = \left( \frac{\delta_1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} - \alpha_1^1 \right) e^{\epsilon_1 t_1^o} \left( \cos \omega_1 t_1^o - \frac{\epsilon_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t_1^o \right) - \frac{\delta_1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} = \alpha_0^1,$$

realizando las operaciones correspondientes y despejando se obtiene

$$\alpha_1^1 = e^{-\frac{\pi \epsilon_1}{\omega_1}} \alpha_0^1 + \frac{\delta_1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} \left[ 1 + e^{-\frac{\pi \epsilon_1}{\omega_1}} \right]. \quad (2.12)$$

Este es el valor que alcanza el funcional, y por tanto la desviación máxima para la coordenada  $x_1(t)$  en el intervalo  $(0, t_1^o)$ . La peor perturbación está dada por

$$u^o(t) = \text{sign } x_2(t), \quad \text{para todo } t \in (0, t_1^o). \quad (2.13)$$

Ahora se formula un nuevo problema de optimización en el intervalo  $(t_1^o, t_2^o)$  con el fin de determinar una nueva desviación máxima para la coordenada  $x_1(t)$ , como se sigue

$$\begin{aligned} & \sup_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}_1(\mathbf{x}(t)) \\ & x_1(t_1^o) = -\alpha_1^1, \quad x_2(t_1^o) = 0, \quad x_2(t_2^o) = 0, \\ & x_2(t) \neq 0 \quad \text{para todo } t \in (t_1^o, t_2^o). \end{aligned}$$

Este problema se puede resolver con los resultados ya obtenidos en el problema de optimización anterior. Utilizando el siguiente cambio de variable,

$$\tilde{x}_i(t - t_1^o) = -\frac{\alpha_0^1}{\alpha_1^1} x_i(t), \quad t \geq t_1^o, \quad i = 1, 2$$



el sistema 2.8 se transforma en

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = x_2, & \tilde{x}_1(0) = \alpha_0^1, \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)x_1 - 2\epsilon_1 x_2 - \frac{\alpha_0^1}{\alpha_1^1}u, & \tilde{x}_2(0) = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Si se define el funcional  $\tilde{J}(\tilde{\mathbf{x}}) := \tilde{x}_1(t)$  asociado al sistema de ecuaciones (2.14) y utilizando dicho funcional se plantea el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} & \inf_{u \in \mathcal{U}} \tilde{J}_1(\tilde{\mathbf{x}}) \\ & \tilde{x}_1(0) = \alpha_0^1, \quad \tilde{x}_2(0) = 0, \quad \tilde{x}_2(t_1^o) = 0, \\ & \tilde{x}_2(t) \neq 0 \quad \text{para todo } t \in (0, t_1^o), \end{aligned}$$

se obtiene la desviación máxima para la coordenada  $\tilde{x}_1(t)$

$$\tilde{\alpha}_1^1 = e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}} \alpha_0^1 + \frac{\alpha_0^1}{\alpha_1^1} \cdot \frac{\delta_1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} \left[ 1 + e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}} \right], \quad (2.15)$$

donde se cumplen las condiciones  $\tilde{x}_1(0) = \alpha_0^1$ ,  $\tilde{x}_1(t_1^o) = -\tilde{\alpha}_1^1$ ,  $\tilde{x}_2(0) = 0$ ,  $\tilde{x}_2(t_1^o) = 0$ , y  $\tilde{x}_2(t) \neq 0$  para todo  $t \in (0, t_1^o)$ . Se deduce de lo anterior que  $x_2(t_1^o) = 0$ ,  $x_2(2t_1^o) = 0$ , y  $x_2(t) \neq 0$  para todo  $t \in (t_1^o, 2t_1^o)$ . Además se tiene

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \tilde{J}_1(\tilde{\mathbf{x}}) = -\frac{\alpha_0^1}{\alpha_1^1} \sup_{u \in \mathcal{U}} J_1(\mathbf{x}).$$

De las relaciones anteriores se obtiene

$$t_2^o = 2t_1^o.$$

Por tanto  $-\tilde{\alpha}_1^1 = -\frac{\alpha_0^1}{\alpha_1^1} \alpha_2^1$ . Substituyendo esta expresión en la ecuación (2.15) y simplificando la expresión se concluye

$$\alpha_2^1 = e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}} \alpha_1^1 + \frac{\delta_1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} \left( 1 + e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}} \right). \quad (2.16)$$

La correspondiente peor perturbación está dada por

$$u^o(t) = \text{sign } x_2(t), \quad \text{para todo } t \in (t_1^o, t_2^o). \quad (2.17)$$

Repitiendo este procedimiento consecutivamente, dada una condición inicial  $\alpha_0^1$  las desviaciones máximas se obtienen de manera recurrente bajo la siguiente formula:

$$\alpha_n^1 = e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}} \alpha_{n-1}^1 + \frac{\delta_1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} \left( 1 + e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

El comportamiento de la solución óptima del sistema (2.6) que se obtiene al sustituir la peor perturbación queda determinado a partir de la sucesión  $\{\alpha_n^1\}$  definida por 2.18. Si tal sucesión es divergente, entonces la correspondiente solución del sistema es inestable, mientras que si la sucesión converge a cero, la solución es asintóticamente estable,

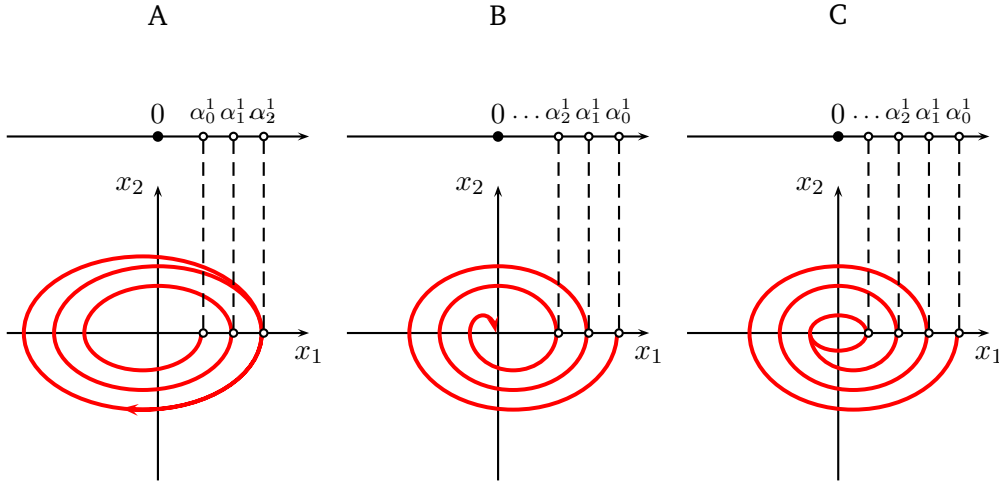


Figura 2.4: (A) Solución inestable. (B) Solución asintóticamente estable. (C) Solución estable

y si la sucesión converge a un punto distinto de cero, la solución correspondiente es estable, como se muestra en la Figura 2.2.2, lo cual define un mapeo de Poincaré (ver el Apéndice A.4).

A continuación se muestra que para el problema (2.6) la solución solo cumple el tercer caso, es decir que existe un ciclo límite al cual convergen las trayectorias, para ello se requiere encontrar una trayectoria cerrada, lo cual es equivalente a encontrar un valor invariante  $\alpha^*$  para la sucesión definida por (2.18). Esto significa que si se toma  $\alpha_0^1 = \alpha^*$  como condición inicial, entonces  $\alpha_n^1 = \alpha^*$  para todo  $n \geq 0$ . La determinación para  $\alpha^*$  es como sigue.

Los dos primeros términos de la sucesión  $\{\alpha_n^1\}$  son

$$\alpha_1^1 = e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}} \alpha_0^1 + \frac{\delta_1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} \left(1 + e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}}\right),$$

$$\alpha_2^1 = e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}} \alpha_1^1 + \frac{\delta_1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} \left(1 + e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}}\right) = e^{-2\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}} \alpha_0^1 + \frac{\delta_1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} \left(1 + e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}}\right)^2,$$

dado que  $\alpha_0^1 = \alpha_2^1 = \alpha^*$ , lo cual se expresa en la forma

$$\alpha^* = e^{-2\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}} \alpha^* + \frac{\delta_1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} \left(1 + e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}}\right)^2,$$

de donde se obtiene

$$\alpha^* = \delta_1 \cdot \frac{\frac{1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} \left(1 + e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}}\right)}{1 - e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}}}.$$

La trayectoria cerrada obtenida es un ciclo límite estable, esto quiere decir que para cualquier condición inicial  $\alpha_0^1$  distinta del valor  $\alpha^*$  la correspondiente trayectoria tiende

al ciclo límite, lo cual es equivalente a que la sucesión generada por (2.18) a partir de  $\alpha_0^1$  converge a  $\alpha^*$ . La demostración de este hecho es como sigue.

Sea  $\xi > 0$  y  $\alpha_0^1 = \alpha^* \pm \xi$  una condición inicial. De la fórmula de recurrencia (2.18) se obtienen los primeros  $n$  términos de la sucesión  $\{\alpha_n^1\}$

$$\begin{aligned}\alpha_1^1 &= e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}} (\alpha^* \pm \xi) + \frac{\delta_1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} \left(1 + e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}}\right), \\ \alpha_2^1 &= e^{-2\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}} (\alpha^* \pm \xi) + \frac{\delta_1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} \left(1 + e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}}\right) \left(1 + e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}}\right), \\ &\vdots \\ \alpha_n^1 &= e^{-n\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}} (\alpha^* \pm \xi) + \frac{\delta_1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} \left(1 + e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}}\right) \left(1 + e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}} + e^{-2\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}} + \dots + e^{-(n-1)\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}}\right) \\ &= e^{-n\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}} (\alpha^* \pm \xi) + \frac{\delta_1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} \left(1 + e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}}\right) \frac{1 - e^{-n\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}}}{1 - e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}}}.\end{aligned}$$

Tomando límite cuando  $n \rightarrow \infty$  se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^1 = \frac{\frac{\delta_1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} \left(1 + e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}}\right)}{1 - e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}}} = \alpha^*.$$

Por tanto la desviación máxima es

$$\alpha_{\star}^1 = \frac{\delta_1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}}}{1 - e^{-\frac{\pi\epsilon_1}{\omega_1}}},$$

cuya expresión se puede representar en la forma

$$\alpha_{\star}^1 = \delta_1 \cdot \frac{1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} \coth\left(\frac{\pi\epsilon_1}{2\omega_1}\right) \quad (2.19)$$

Ahora se busca la desviación máxima para la coordenada  $x_2$ . Se supone que la trayectoria inicia en el punto  $(\alpha_0^2, 0)$ , ya que las trayectorias son oscilantes, se busca la desviación máxima como se muestra en la Figura 2.5.

Sea el funcional  $\mathcal{J}_2(\mathbf{x}(t)) = x_2(t)$  y se define el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned}\inf_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}_2(\mathbf{x}(t)) \\ x_2(0) = \alpha_0^2, \quad x_1(0) = 0, \quad x_1(t_1^o) = c, \\ \ddot{x}_1(t) \neq 0 \quad \text{para todo } t \in (0, t_1^o),\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  satisface el sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = -(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)x_1 - 2\epsilon_1 x_2 + u, & x_2(0) = \alpha_0^2, \end{cases} \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad (2.20)$$

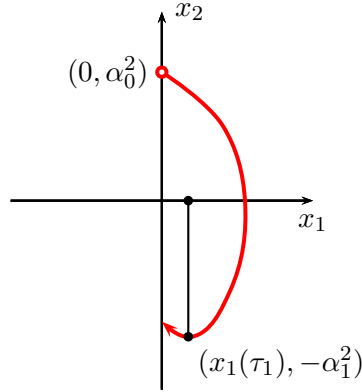


Figura 2.5: Interpretación geométrica del problema de optimización para la coordenada  $x_2$ .

y la función de Pontryagin es

$$H(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, u) = \psi_1 x_2 - \psi_2 [(\epsilon_2^2 + \omega_1^2)x_1 + 2\epsilon_1 x_2] + \psi_2 u,$$

donde  $\boldsymbol{\psi}(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$  es solución del mismo sistema conjugado dado en 2.9, el cual también es asociado al sistema (2.20).

Si  $\{\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}^o(t), u^o(t), [0, t_1^o]\}$  es un proceso óptimo que da solución al nuevo problema de optimización, entonces se puede encontrar una constante  $\lambda_0 \geq 0$  y una función  $\boldsymbol{\psi}(t)$ , tal que si  $\lambda_0 = 0$ , entonces  $\boldsymbol{\psi}(t) \neq \mathbf{0}$ . La función de Pontryagin satisface las siguientes tres condiciones:

**Condición de máximo.**

$$\max_{u \in \mathcal{U}} H(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, u) = \max_{u \in \mathcal{U}} (\psi_1 x_2 - \psi_2 [(\epsilon_2^2 + \omega_1^2)x_1 + 2\epsilon_1 x_2] + \psi_2 u),$$

de donde resulta que la perturbación óptima es  $u^o(t) = \delta_1 \text{sign } \psi_2(t)$  para todo  $t \in (0, t_1^o)$ .

**Condición de transversalidad.** La variedad  $M$  esta dada por el eje  $x_1 = c = x_1(t_1^o)$ . Esta condición implica que

$$\left( \boldsymbol{\psi}(t_1^o) + \lambda_0 \frac{\partial \mathcal{J}(\mathbf{x}^o(t_1^o))}{\partial \mathbf{x}} \right) \perp M,$$

lo cual equivale a la ecuación

$$\left( \begin{bmatrix} \psi_1(t_1^o) \\ \psi_2(t_1^o) \end{bmatrix} + \lambda_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \perp \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad \text{para todo } \gamma \in \mathbb{R}.$$

de donde se obtiene que  $\psi_2(t_1^o) = -\lambda_0 \leq 0$  y  $\psi_1(t_1^o) = 0$ .

**Condición de estacionaridad.** Esta condición muestra que la función Hamiltoniana definida por  $\mathcal{H}(t) := H(\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t), u^o(t))$  cumple

$$\mathcal{H}(t) \equiv 0, \quad \text{para todo } t \in [0, t_1^o],$$

lo cual se puede reescribir en la forma

$$\psi_1(t) \dot{x}_1(t) + \psi_2(t) \dot{x}_2(t) = 0 \quad \text{para todo } t \in [0, t_1^o]. \quad (2.21)$$

Notemos que si  $\lambda_0 = 0$ , entonces de la ecuación (2.21) se tiene que  $\psi_2(t_1^o) = 0$ , de donde  $\psi(t) \equiv \mathbf{0}$  es solución del sistema conjugado (2.9) lo cual contradice la existencia de un proceso óptimo, por tanto  $\lambda_0 < 0$ . Sin pérdida de generalidad podemos tomar  $\lambda_0 = 1$  después de normalizar el sistema (2.9) de ser necesario. De esto se obtiene las siguientes condiciones en el tiempo terminal:

$$\psi_1(t_1^o) = 0, \quad \psi_2(t_1^o) = -1.$$

Ya que  $(\psi_1(t), \psi_2(t))$  son las coordenadas duales de  $(x_1(t), x_2(t))$  existe una constante  $C$  tal que  $(\psi_1(t), \psi_2(t))^T (x_1(t), x_2(t)) = C$  para todo  $t \in [0, t_1^o]$ . En particular para  $t = t_1^o$  se halla  $C = -x_2(t_1^o) > 0$ . Considerando esta ecuación junto con (2.21) se tiene el sistema

$$\begin{aligned} \psi_1(t) \dot{x}_1(t) + \psi_2(t) \dot{x}_2(t) &= 0, \\ \psi_1(t) x_1(t) + \psi_2(t) x_2(t) &= -x_2(t_1^o). \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema respecto a  $\psi_2(t)$  se obtiene

$$\psi_2(t) = -\frac{x_2(t) x_2(t_1^o)}{\dot{x}_1(t) x_2(t) - \dot{x}_2(t) x_1(t)}, \quad \text{para todo } t \in [0, t_1^o].$$

Como  $\dot{x}_1(t) x_2(t) - \dot{x}_2(t) x_1(t) = x_2^2(t) - \dot{x}_2(t) x_1(t) > 0$  para todo  $t \in [0, t_1^o]$ , ya que  $x_1(t)$  es positiva y cóncava hacia abajo, lo cual equivale a  $\ddot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) < 0$ , entonces

$$\text{sign } x_2(t) = \text{sign } \psi_2(t), \quad \text{para todo } t \in [0, t_1^o].$$

Por tanto la peor perturbación es

$$u^o(t) = \text{sign } x_2(t), \quad \text{para todo } t \in [0, t_1^o]. \quad (2.22)$$

Dado que las peores perturbaciones que se obtienen al determinar las desviaciones máximas para las coordenadas  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  son iguales, se tiene que la desviación máxima para la coordenada  $x_2$  se puede determinar utilizando la trayectoria óptima que permite encontrar la desviación máxima para la coordenada  $x_1$ .

En lo que sigue se determina tal desviación máxima. Se considera que la trayectoria óptima pasa por los puntos  $(\alpha_*^1, 0)$  y  $(-\alpha_*^1, 0)$ . Se supone que la trayectoria óptima se puede extender en un tiempo inverso hasta el punto  $(0, \alpha_0^2)$ , el cual se considera como condición inicial de la trayectoria óptima. La desviación máxima para la coordenada  $x_2$  resulta ser el valor mínimo  $x_2(\tau_1)$  respecto a la coordenada  $x_2$  para algún tiempo  $\tau_1$ , como se muestra en la Figura 2.6. Por lo anterior, encontrar la desviación máxima para la coordenada  $x_2$  se reduce a encontrar el valor de  $\tau_1$ , el cual satisface la ecuación  $\dot{x}_2(\tau_1) = 0$ ; se sabe que el punto crítico resultante es un mínimo puesto que la trayectoria óptima es cóncava hacia arriba. Por tanto, basta tomar en cuenta el segmento de trayectoria óptima comprendido entre los puntos  $(\alpha_*^1, 0)$  y  $(-\alpha_*^1, 0)$ , el cual es la solución al siguiente problema con condiciones iniciales

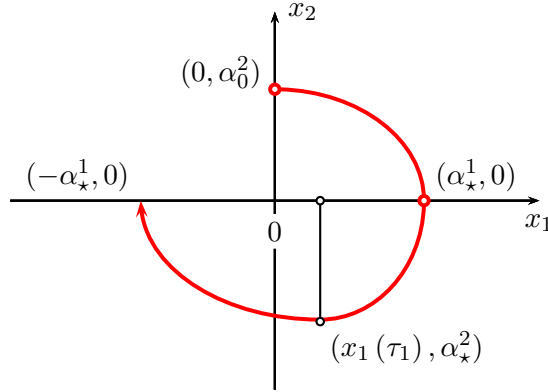


Figura 2.6: Interpretación geométrica en el plano fase del problema de optimización para la coordenada  $x_2$ .

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = \alpha_*^1, \\ \dot{x}_2 = -(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)x_1 - 2\epsilon_1 x_2 - \delta_1, & x_2(0) = 0, \end{cases}$$

de donde se tiene

$$\begin{cases} x_1(t) = \left( \frac{\delta_1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2} - \alpha_*^1 \right) e^{-\epsilon_1 t} (\cos \omega_1 t + \frac{\epsilon_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t) - \frac{\delta_1}{\epsilon_1^2 + \omega_1^2}, \\ x_2(t) = \left( \frac{(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)\alpha_*^1}{\omega_1} - \delta_1 \right) e^{-\epsilon_1 t} \sin \omega_1 t. \end{cases}$$

La ecuación  $\dot{x}_2(\tau_1) = 0$  toma la forma

$$\dot{x}_2(\tau_1) = - \left( \frac{(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)\alpha_*^1}{\omega_1} - \delta_1 \right) e^{-\epsilon_1 \tau_1} (\omega_1 \cos \omega_1 \tau_1 - \epsilon_1 \sin \omega_1 \tau_1) = 0,$$

cuya solución satisface

$$\omega_1 \tau_1 + \arctan \frac{\epsilon_1}{\omega_1} = \frac{\pi}{2},$$

de donde

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_1} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\epsilon_1}{\omega_1} \right). \quad (2.23)$$

Por tanto la desviación máxima buscada es

$$x_2(\tau_1) = \left( \frac{(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)\alpha_*^1}{\omega_1} - \delta_1 \right) e^{-\frac{\epsilon_1}{\omega_1} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\epsilon_1}{\omega_1} \right)} \sin \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\epsilon_1}{\omega_1} \right).$$

lo cual se reduce

$$\begin{aligned} \alpha_*^2 &= \frac{(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)\alpha_*^1 - \omega_1 \delta_1}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \omega_1^2}} e^{-\frac{\epsilon_1}{\omega_1} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\epsilon_1}{\omega_1} \right)}, \\ \alpha_*^2 &= \delta_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \omega_1^2}} \left( 1 + \coth \frac{\pi \epsilon_1}{2 \omega_1} \right) e^{-\frac{\epsilon_1}{\omega_1} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\epsilon_1}{\omega_1} \right)}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

El procedimiento descrito permite construir soluciones oscilatorias cuyas intersecciones con el eje  $x_1$  y con las rectas  $x_1 = x_1(t_1^o)$ ,  $x_1 = -x_1(t_1^o)$  convergen a las desviaciones máximas en las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente, como se muestra en la Figura 2.7.

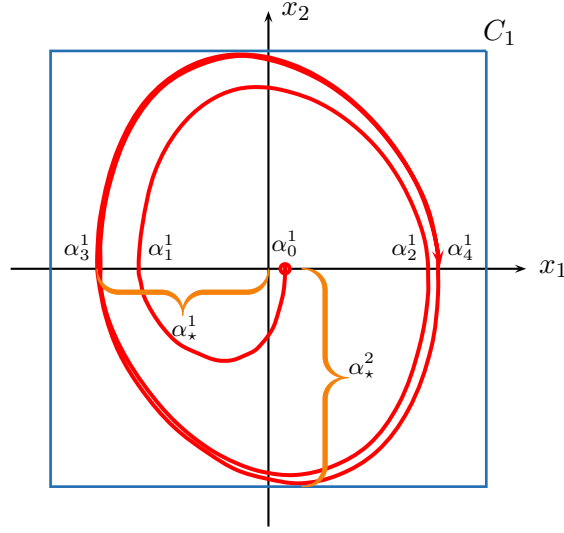


Figura 2.7: Representación gráfica de las desviaciones máximas de las coordenadas  $x_1$  y  $x_2$  del sistema (2.6).

### Desviaciones máximas para las coordenadas $x_3$ y $x_4$

Para el funcional

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}_3(\mathbf{x}(t))$$

el problema de optimización se pueden resolver de forma directa, lo cual se sigue de la ecuación diferencial asociada a la coordenada  $x_3$ :

$$\dot{x}_3 = -\epsilon_2 x_3 + b_3 u, \quad x_3(0) = \alpha_0^3, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad (2.25)$$

cuya solución se puede expresar de la siguiente manera

$$x_3(t) = \alpha_0^3 e^{-\epsilon_2 t} + \int_0^t b_3 u(s) e^{\epsilon_2(s-t)} ds$$

de donde

$$\begin{aligned} \sup_{u \in \mathcal{U}} |x_3(t)| &= \sup_{u \in \mathcal{U}} \left| \alpha_0^3 e^{-\epsilon_2 t} + \int_0^t b_3 u(s) e^{\epsilon_2(s-t)} ds \right| \\ &\leq \left| \alpha_0^3 \right| e^{-\epsilon_2 t} + |b_3| \sup_{u \in \mathcal{U}} \int_0^t |u(s)| e^{\epsilon_2(s-t)} ds \\ &\leq \left| \alpha_0^3 \right| e^{-\epsilon_2 t} + \delta_1 |b_3| \int_0^t e^{\epsilon_2(s-t)} ds \\ &\leq \left( \left| \alpha_0^3 \right| - \frac{\delta_1 |b_3|}{\epsilon_2} \right) e^{-\epsilon_2 t} + \frac{\delta_1 |b_3|}{\epsilon_2}. \end{aligned}$$

El lado derecho de esta expresión tiende a  $\frac{\delta_1 |b_3|}{\epsilon_2}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por tanto, siempre que  $x_3(0) < \frac{\delta_1 |b_3|}{\epsilon_2}$

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} |x_3(t)| = \delta_1 \cdot \frac{|b_3|}{\epsilon_2}. \quad (2.26)$$

## 48 Estabilidad robusta.

En este caso, la peor perturbación resulta ser constante, cuya expresión está dada por

$$u^o(t) = \delta_1 \operatorname{sign} b_3.$$

De manera análoga para el problema de optimización respecto a la coordenada  $x_4$ :

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}_4(\mathbf{x}(t))$$

se obtiene que la desviación máxima es:

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} |x_4(t)| = \delta_1 \cdot \frac{|b_4|}{\epsilon_3}, \quad (2.27)$$

donde, nuevamente la peor perturbación resulta ser constante y está dada por

$$u^o(t) = \delta_1 \operatorname{sign} b_4.$$

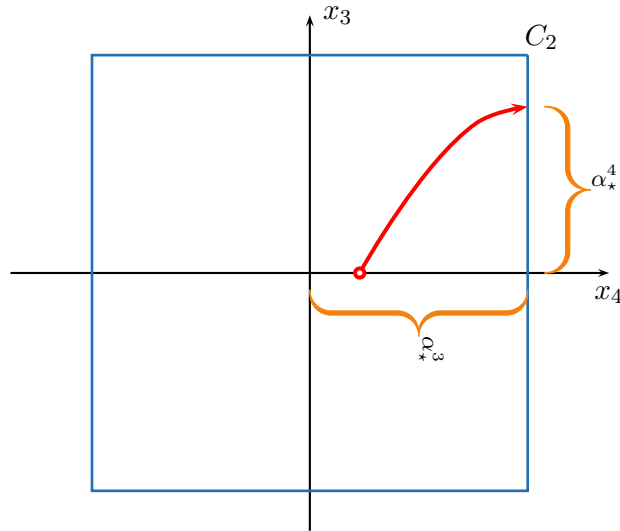


Figura 2.8: Representación gráfica de las desviaciones máximas de las coordenadas  $x_3$  y  $x_4$  del sistema (2.6).

### 2.3. Estabilidad robusta y desviaciones máximas en sistemas de orden $n$

Se analiza el problema de determinar las desviaciones máximas para el problema de valor inicial completamente controlable de orden  $n \geq 3$  descrito en (2.1) de la página 33. La matriz  $A$  es una matriz real de  $n \times n$  con entradas constantes, la cual posee al menos un



par de valores propios complejos conjugados, y se supone también que el vector  $\mathbf{b}$  posee entradas constantes, y ambos se pueden escribir de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para obtener las desviaciones máximas del sistema (2.1) se aplica el mismo método que se siguió para el sistema de orden 4: el sistema original (2.1) se transforma, por medio de una transformación  $\mathbf{x} = S\mathbf{y}$ , la cual es lineal y no degenerada, en otro sistema equivalente el cual es desacoplado. Posteriormente se obtiene las desviaciones máximas en el sistema desacoplado, y con los resultados obtenidos y aplicando la transformación inversa se hallan las desviaciones máximas del sistema (2.1). En la Figura 2.9 se muestra dicho método.

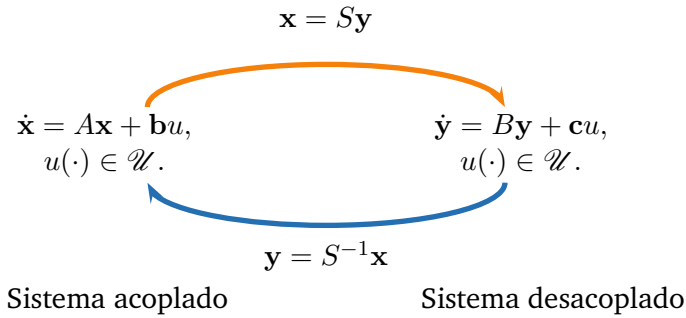


Figura 2.9: Método de desacoplamiento en el estudio de las desviaciones máximas de el sistema (2.1).

El siguiente lema muestra condiciones bajo las cuales el sistema (2.1) puede desacoplarse en subsistemas completamente controlables de orden uno y dos.

**Lema 2.1.**

Si  $A$  posee  $2m$  valores propios complejos conjugados distintos con parte real negativa  $-\epsilon_1 \pm i\omega_1, \dots, -\epsilon_m \pm i\omega_m$ , y  $n-2m$  valores propios reales negativos distintos  $-\epsilon_{2m+1}, \dots, -\epsilon_n$ , donde  $2m \leq n$ , entonces el sistema (2.1) es equivalente a

$$\dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y} + \mathbf{c}u, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad (2.28)$$

donde  $B = \text{diag} \{B_1, \dots, B_m, -\epsilon_{2m+1}, \dots, -\epsilon_n\}$ ,

$$B_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\epsilon_j^2 - \omega_j^2 & -2\epsilon_j \end{bmatrix},$$

$\mathbf{c} = (0, 1, \dots, 0, 1, b_{2m+1}, \dots, b_n)^\top$ , con  $b_{2m+1}, \dots, b_n \neq 0$ .

**Demostración.** Sean  $\mathbf{u}_1 \pm i\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{u}_m \pm i\mathbf{v}_m$  los vectores propios asociados a los valores propios complejos conjugados, y  $\mathbf{u}_{2m+1}, \dots, \mathbf{u}_n$  los vectores propios asociados a los valores propios reales. Como la multiplicidad de cada valor propio es uno,

$$Q = [\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{2m+1}, \dots, \mathbf{u}_n]$$

es invertible, en [15] se muestra que

$$Q^{-1}AQ = \text{diag} \{A_1, \dots, A_m, -\epsilon_{2m+1}, \dots, -\epsilon_n\},$$

con

$$A_j = \begin{bmatrix} -\epsilon_j & \omega_j \\ -\omega_j & -\epsilon_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Si  $\mathbf{q} = Q^{-1}\mathbf{e}_n = (q_1, \dots, q_n)^\top$ , el sistema (2.1), bajo la transformación  $\mathbf{x} = Q\bar{\mathbf{x}}$ , es equivalente al sistema

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = Q^{-1}AQ\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{q}u, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U},$$

el cual es completamente controlable con matriz de controlabilidad  $Q^{-1}U$ . Como este sistema es desacoplado, lo cual se sigue de la estructura de la matriz  $Q^{-1}AQ$ , cada uno de sus subsistemas es completamente controlable, y por tanto, cada uno puede transformarse en su forma canónica siguiendo el desarrollo de [1] mediante la transformación  $\bar{\mathbf{y}} = \bar{U}P\bar{\mathbf{x}}$ , donde

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \text{diag} \{\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_m, 1, \dots, 1\}, \\ P &= \text{diag} \{P_1, \dots, P_m, 1, \dots, 1\}, \end{aligned}$$

con

$$\bar{U}_j = \begin{bmatrix} q_{2j-1} & -\epsilon_j q_{2j-1} + \omega_j q_{2j} \\ q_{2j} & -\omega_j q_{2j-1} - \epsilon_j q_{2j} \end{bmatrix}, \quad P_j = \begin{bmatrix} 2\epsilon_j & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se sigue que  $\mathbf{b} = (Q\bar{U}P)^{-1}\mathbf{e}_n$ . La controlabilidad completa de cada subsistema implica que  $b_{2m+1}, \dots, b_n \neq 0$ .

Por tanto, la transformación  $\mathbf{y} = S\mathbf{x}$ , donde  $S = Q\bar{U}P$ , es no degenerada. Esto muestra que (2.1) y (2.28) son equivalentes. ■

El Lema 2.1 implica que el sistema (2.1) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales desacoplado

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{y}_1 = y_2, & y_1(0) = \alpha_0^1, \\ \dot{y}_2 = -(\epsilon_1^2 + \omega_1^2)y_1 - 2\epsilon_1 y_2 + u, & y_2(0) = \alpha_0^2, \\ \dots & \dots \\ \dot{y}_{2m-1} = y_{2m} & y_{2m-1}(0) = \alpha_0^{2m-1} \\ \dot{y}_{2m} = -(\epsilon_m^2 + \omega_m^2)y_{2m-1} - 2\epsilon_m y_{2m} + u, & y_{2m}(0) = \alpha_0^{2m} \\ \dot{y}_{2m+1} = -\epsilon_{m+1}y_{2m+1} + b_{2m+1}u & y_{2m+1}(0) = \alpha_0^{2m+1}, \\ \dots & \dots \\ \dot{y}_n = -\epsilon_n y_n + b_n u, & y_n(0) = \alpha_0^n. \end{array} \right. \quad (2.29)$$

Se observa que el sistema (2.29) consiste de  $m$  subsistemas de ecuaciones diferenciales de orden dos y  $n - 2m$  ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Cada uno de los  $m$  subsistemas de orden dos y las  $n - 2m$  ecuaciones diferenciales de orden uno tienen la misma forma de los sistemas estudiados en la sección anterior, por tanto, las desviaciones máximas de cada una de estas coordenadas se pueden obtener realizando los pasos de los resultados obtenidos anteriormente. Es decir, las desviaciones de las  $2m$  primeras coordenadas están dadas por

$$\begin{aligned}\alpha_*^{2j-1} &= \delta_1 \cdot \frac{1}{\epsilon_j^2 + \omega_j^2} \coth \frac{\pi \epsilon_j}{2\omega_j}, \\ \alpha_*^{2j} &= \delta_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_j^2 + \omega_j^2}} \left(1 + \coth \frac{\pi \epsilon_j}{2\omega_j}\right) e^{-\frac{\epsilon_j}{\omega_j} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\epsilon_j}{\omega_j}\right)},\end{aligned}\quad j = 1, \dots, m, \quad (2.30)$$

y

$$\alpha_*^k = \delta_1 \cdot \frac{|b_k|}{\epsilon_k}, \quad k = 2m + 1, \dots, n. \quad (2.31)$$

Es importante observar de las relaciones (2.30) y (2.31) que todas las desviaciones máximas se expresan en la forma  $\alpha_*^k = \delta_1 \cdot \alpha_k$ .

Las desviaciones máximas (2.30) y (2.31) acotan cada una de las coordenadas del sistema (2.29) si la condición inicial de tal coordenada es menor en valor absoluto que la correspondiente desviación máxima, es decir, si  $|y_k(0)| \leq \alpha_k^*$  para toda  $t \geq 0$ , donde  $k = 1, \dots, n$ , entonces  $|y_k(t)| \leq \alpha_k^*$ , en las Figura 2.7 y 2.8 se muestra esta situación. Esto se interpreta de forma geométrica al decir que todas las coordenadas del sistema (2.1) se hallan dentro de un paralelepípedo  $P \subset \mathbb{R}^n$  que se obtiene como el producto cartesiano de  $m$  rectángulos de la forma  $C_1, C_3, \dots, C_{2m-1}$ , donde

$$C_{2k-1} = [-\alpha_*^{2k-1}, \alpha_*^{2k-1}] \times [-\alpha_*^{2k}, \alpha_*^{2k}], \quad k = 1, \dots, m,$$

y  $n - 2m$  intervalos  $I_{2m+1}, \dots, I_n$ , donde

$$I_j = [-\alpha_*^j, \alpha_*^j], \quad j = 2m + 1, \dots, n.$$

Esto es

$$P = C_1 \times C_3 \times \dots \times C_{2m-1} \times I_{2m+1} \times \dots \times I_n.$$

La solución  $\mathbf{y}(t)$  del sistema (2.28) es acotada para todo tiempo  $t \geq 0$  y toda perturbación  $u \in \mathcal{U}$ . Esto se verifica de las desigualdades  $|x_k(t)| \leq \alpha_k^*$  para  $k = 1, \dots, n$  y todo  $t \geq 0$ , de donde

$$\|\mathbf{y}(t)\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{y_1(t), \dots, y_n(t)\} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_*^1, \dots, \alpha_*^n\} = \|\boldsymbol{\alpha}_*\|,$$

donde  $\boldsymbol{\alpha}_* = (\alpha_*^1, \dots, \alpha_*^n)^\top$ .

La descripción anterior permite obtener condiciones de estabilidad robusta en el sistema (2.1). La siguiente definición es empleada para obtener las condiciones de estabilidad robusta.

**Definición 2.1.**

La solución trivial  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$  del sistema (2.1) es robustamente estable, si dado  $\epsilon > 0$  existen  $\delta_1 = \delta_1(\epsilon)$  y  $\delta_2 = \delta_2(\epsilon)$  tales que si  $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta_1$  y  $|u(t)| < \delta_2$  para todo  $t > 0$ , entonces  $\|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon$  para todo  $t > 0$  y toda  $u \in \mathcal{U}$ .

Empleando la definición anterior se muestra que las soluciones del sistema (2.1) pueden acotarse como se desee. El siguiente teorema resume los resultados de este trabajo.

**Teorema 2.2.**

Si en el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, & \mathbf{x}(t) &\in \mathbb{R}^n, \\ u(\cdot) &\in \mathcal{U} = \{u(t) \in KC : |u(t)| \leq \delta_1\}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

la matriz  $A$  satisface las condiciones del Lema 2.1, entonces dicho sistema es robustamente estable si dado cualquier  $\epsilon > 0$  existen  $\delta_1 \geq 0$  y  $\delta_2 \geq 0$  tales que

$$\delta_1 \leq \frac{\epsilon}{\|S\| \|\boldsymbol{\alpha}^*\|}, \quad (2.33)$$

y  $\delta_2 < \delta_1 \|S\| \|\boldsymbol{\alpha}^*\|$ .

**Demostración.** Si la matriz  $A$  del sistema (2.32) satisface las condiciones del Lema 2.1, entonces el sistema (2.32) es equivalente al sistema (2.28), el cual a su vez, se expresa en la forma (2.29). Las soluciones de este sistema son acotadas y cumplen la relación  $\|\mathbf{y}(t)\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}^*\|$  para todo  $t \geq 0$ . Por otra parte, como  $\mathbf{x}(t) = S\mathbf{y}(t)$  y  $S$  es una matriz invertible se sigue que

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \|S\mathbf{y}(t)\| \leq \|S\| \|\mathbf{y}(t)\| \leq \|S\| \|\boldsymbol{\alpha}^*\| = \delta_1 \|S\| \|\boldsymbol{\alpha}\|.$$

Aquí se ha usado el hecho de que  $\boldsymbol{\alpha}^* = \delta_1 \boldsymbol{\alpha}$ . Por tanto, dado  $\epsilon > 0$ , si la condición (2.33) se satisface, entonces  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \epsilon$  se cumple también. La desigualdad anterior muestra también que  $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta_2$  es satisfecha. ■

**2.4. Ejemplos**

En lo siguiente se ilustran los resultados obtenidos para la estabilidad robusta con algunos ejemplos particulares del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u_1 \quad (2.34)$$

**Ejemplo 2.4.1.** Se considera un caso particular del sistema (2.34) de orden 3 con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{229}{200} & -\frac{249}{100} & -\frac{9}{10} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrix  $A$  tiene valores propios:  $\lambda_1 = -\epsilon_1 = -\frac{1}{2}$  y  $\lambda_{2,3} = -\epsilon_2 \pm i\omega_2 = -\frac{1}{5} \pm i\frac{3}{2}$ . Empleando la transformación  $\mathbf{x} = S\mathbf{y}$ , donde

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{229}{234} & \frac{20}{17} & \frac{50}{17} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

se transforma el sistema, en su forma equivalente

$$\dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y} + \mathbf{b}_1 u, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U} = \{u \in KC : |u(t)| \leq \delta_1\}, \quad (2.35)$$

donde  $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), y_3(t)]^\top$  representa las coordenadas fase del sistema, y

$$B = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{229}{100} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = S^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{50}{117} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

el cual es desacoplado. Fijando  $\delta_1 = 0.3137$

Las desviaciones máximas para este sistema son

$$\hat{\alpha}^1 = \frac{32}{37}, \quad \hat{\alpha}^2 = \frac{16}{37} \coth\left(\frac{\pi}{12}\right), \quad \hat{\alpha}^3 = \frac{4e^{-\frac{1}{8} + \arctan(\frac{1}{8})} (1 + \coth(\frac{\pi}{12}))}{\sqrt{37}}.$$

De esta manera se tiene que las soluciones  $\mathbf{x}(t)$  para cada  $u \in \mathcal{U}$  satisfacen  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq 1$  para todo  $t \geq 0$ .

**Ejemplo 2.4.2.** Ahora supongamos un sistema de orden 4, donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{23}{16} & -\frac{17}{32} & -\frac{13}{128} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Donde los valores propios de la matriz  $A$  son

$$-\epsilon_1 \pm i\omega_1 = -\frac{1}{4} \pm i\frac{1}{4} \quad -\epsilon_2 \pm i\omega_2 = -\frac{1}{2} \pm i\frac{3}{4}.$$

El cambio de coordenadas  $\mathbf{x} = S\mathbf{y}$ , donde

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{16} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{13}{16} & 1 & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

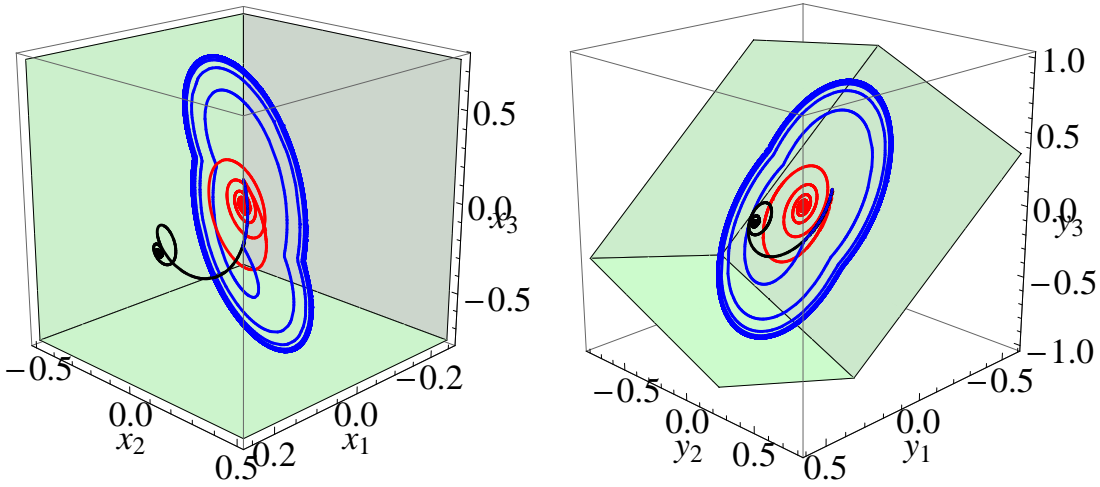


Figura 2.10: Diagrama fase del sistema de orden 3 con condición inicial  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 = S\mathbf{x}_0$ , respectivamente

expresa el sistema (2.34) en el sistema equivalente

$$\dot{\mathbf{x}} = B\mathbf{x} + \mathbf{b}_1 u, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U} = \{u \in KC : |u(t)| \leq \delta_1\},$$

donde

$$B = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{16} & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = S^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

el cual es desacoplado. Para  $\delta_1 = 0.058243$  se tiene que los valores de las desviaciones máximas son

$$\hat{\alpha}^1 = 18.4219, \quad \hat{\alpha}^2 = 11.8734, \quad \hat{\alpha}^3 = 8.3063, \quad \hat{\alpha}^4 = 3.5502.$$

De lo anterior se tiene que las soluciones del sistema (2.34) satisfacen  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq 1$  para todo  $t \geq 0$ .

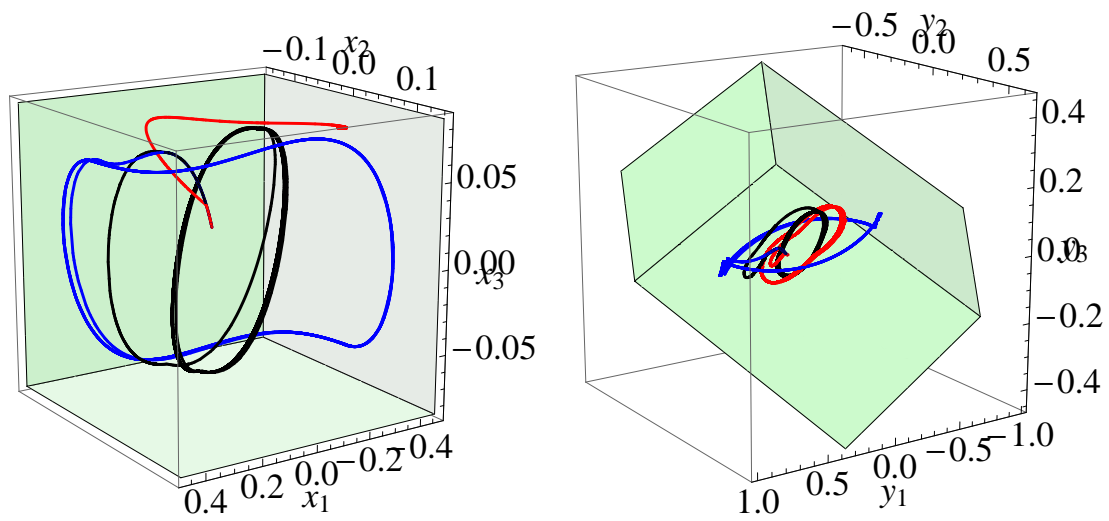


Figura 2.11: Diagrama fase de las trayectorias para el sistema (2.4.2).

## Conclusiones

A continuación se resumen los resultados obtenidos en este trabajo de tesis que se consideran mas relevantes.

1. En el primer Capítulo se desarrollaron con mayor detalle algunos temas de la teoría de ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo, ya que dicha teoría no es cubierta a un nivel básico, generalmente es presentada de forma abstracta y por ello se han extendido algunas demostraciones y ejemplos para una mejor comprensión. Además se ilustra por qué la teoría para ecuaciones diferenciales ordinarias no se puede aplicar directamente a ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo.
2. Se concluye que para sistemas de ecuaciones diferenciales presentados en el Capítulo dos los cuales se pueden descomponer mediante una transformación lineal no degenerada en subsistemas desacoplados de orden dos y uno se encuentran expresiones algebraicas para calcular las desviaciones máximas de dichos subsistemas.
3. Se muestra que el criterio de estabilidad robusta para un sistema lineal de orden  $n$  con una perturbación adicional (discontinua en un conjunto numerable de medida cero y acotada), cuya matriz posee valores propios con parte real negativa y al menos un par de valores propios complejos conjugados, queda determinado por las desviaciones máximas para las coordenadas fase del sistema y la cota de la peor perturbación. Estas permiten dar aproximación al conjunto de accesibilidad del sistema. Los resultados obtenidos se ilustran en dos ejemplos particulares.

Alguna de las líneas de investigación futura pueden ser las siguientes.

1. Queda abierto el problema de obtener una mejor aproximación para el conjunto de accesibilidad para los sistemas de ecuaciones diferenciales estudiados.
2. Otro problema por el que uno se podría preguntar es si se puede determinar un criterio de estabilidad robusta cuando en la matriz  $A$  del sistema de ecuaciones diferenciales existe alguna perturbación.



## ● Apendice ●



### A.1. Conjuntos

Algunas propiedades importantes de los conjuntos convexos que se utilizan en el texto son las siguientes.

#### Definición A.1.

Sea  $X$  un espacio vectorial real. Un subconjunto  $K$  de  $X$  es llamado convexo si para cada  $x, y \in K$  y cada  $\lambda \in [0, 1]$ , se cumple que  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$ .

Otro concepto interesante es el de la *envolvente convexa* de un conjunto  $K$ , que se define de la siguiente manera.

#### Definición A.2.

Llamaremos envolvente convexa,  $\text{conv}(K)$ , del conjunto  $K$  a la intersección de todos los conjuntos que contienen a  $K$  y envolvente convexa cerrada del conjunto  $K$  a la intersección de todos los conjuntos cerrados y convexos que contiene a  $K$ .

## A.2. Convergencia

### Definición A.3.

Una sucesión de funciones  $\{f_n\}$  converge uniformemente a  $f$  sobre un conjunto  $A$  si para cada  $\epsilon > 0$  existe un número  $N$  tal que para  $n > N$  y para toda  $\mathbf{x} \in A$

$$\|f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\| \leq \epsilon.$$

Lo que es importante observar respecto a la convergencia uniforme es que el número  $N$  depende solamente de  $\epsilon$ , es independiente del punto  $\mathbf{x} \in A$ .

## A.3. Funciones absolutamente continuas

En este apartado se presentan algunas propiedades de funciones vectoriales, las cuales se requieren a lo largo del trabajo. Algunas de ellas se presentan sin demostración y pueden ser consultadas en la literatura citada.

### Definición A.4.

Una función  $\mathbf{y} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  se llama absolutamente continua si para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que para toda familia finita  $\{(a_i, b_i)\}$  de intervalos disjuntos en  $[a, b]$  tales que  $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$  se cumple la desigualdad

$$\sum_{i=1}^n \|\mathbf{y}(b_i) - \mathbf{y}(a_i)\| < \epsilon. \quad (\text{A.1})$$

### Teorema A.1.

Si  $f$  es continua en un intervalo  $[a, b]$  y  $f'$  existe y es acotada en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es absolutamente continua en  $[a, b]$ .

### Definición A.5.

Una función  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es llamada localmente compacta (respectivamente localmente acotada) si para cada punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  existe una vecindad  $N(\mathbf{x})$  de  $\mathbf{x}$ , tales que  $\varphi(N(\mathbf{x}))$  es compacta (respectivamente acotado).

**Definición A.6.**

Una familia de funciones  $\{f_n\}$ , donde  $f_n : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , es llamada equicompackta (respectivamente equiacotada) si para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ , existe un subconjunto compacto (respectivamente acotado)  $K \subset \mathbb{R}^m$ , una vecindad  $N(\mathbf{x})$  de  $\mathbf{x}$ , y un  $\epsilon_0 > 0$  tales que

$$\text{para todo } \epsilon < \epsilon_0, f_\epsilon(N(\mathbf{x})) \subset K.$$

**Teorema A.2 (Ascoli-Arzelà).**

Sea  $\{\mathbf{x}_k(t)\}$  una sucesión de funciones absolutamente continuas  $\mathbf{x}_k : [0, T] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfacen:

- Para todo  $t \in [0, T]$ ,  $\{\mathbf{x}_k(t)\}$  es un subconjunto relativamente compacto (es decir, su clausura es un conjunto compacto) en  $\mathbb{R}$ .
- Existe una función positiva  $c(\cdot)$  tal que, para casi todo  $t \in [0, T]$ ,  $\|\dot{\mathbf{x}}_k(t)\| \leq c(t)$ .

Entonces existe una subsucesión  $\{\mathbf{x}_{k_n}\}$  que converge a una función  $\mathbf{x}(t) : [0, T] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  absolutamente continua en el sentido de que

- $\{\mathbf{x}_{k_n}(t)\}$  converge uniformemente a  $\mathbf{x}(t)$  en todo subconjunto compacto de  $[0, T]$ .
- $\{\dot{\mathbf{x}}_{k_n}(t)\}$  converge puntualmente a  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ .

El teorema de Hartman-Grobman es un resultado importante en la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias. Este teorema muestra que cerca de un punto de equilibrio hiperbólico  $\mathbf{x}_0$ , el sistema no lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{A.2}$$

tiene la misma estructura que el sistema lineal

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{A.3}$$

donde  $A = D\mathbf{x}_0$ . En adelante supondremos que el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  ha sido trasladado al origen.

Dos sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales, como (A.2) y (A.3) se dice que son topológicamente equivalentes en una vecindad del origen, es decir que tienen la misma estructura cualitativa cerca del origen si existe un homeomorfismo  $H$  que mapea un conjunto abierto  $U$  que contiene el origen en un conjunto abierto  $V$  que contiene el origen y que mapea las trayectorias de (A.2) en  $U$  sobre las trayectorias de (A.3) en  $V$  y conserva su orientación por el tiempo, es decir, si una trayectoria está dirigida de  $x_1$  hacia  $x_2$  en  $U$ , entonces su imagen dirigida desde  $H(x_1)$  de  $H(x_2)$  en  $V$ .

**Teorema A.3.**

Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene al origen,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  con derivadas parciales continuas en  $E$ , y  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$  la solución del sistema no lineal que inicia en el punto  $\mathbf{x}_0$ . Suponga que  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  y que la matriz jacobiana  $A = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}) \right)$  no tiene valores propios con parte real igual a cero (es decir  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es un punto de equilibrio hiperbólico). Entonces existe un homeomorfismo  $H$  de un conjunto  $U$  que contiene al origen  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  sobre otro conjunto  $V$  que también contiene al origen, tal que para cada  $\mathbf{x}_0 \in U$ , existe un intervalo abierto  $I_0 \subset \mathbb{R}$  que contiene al cero de manera que para todo  $\mathbf{x}_0 \in U$  y  $t \in I_0$  se cumple

$$H(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)) = e^{At} H(\mathbf{x}_0),$$

es decir,  $H$  transforma trayectorias del sistema lineal alrededor del origen, sobre trayectorias del sistema no lineal alrededor del origen, y preserva la parametrización por el tiempo.

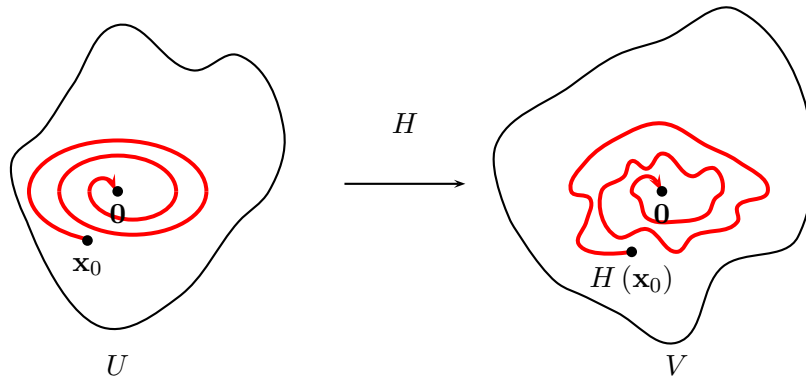


Figura A.1: Representación del Homeomorfismo  $H$ .

#### A.4. Mapeo de Poincaré

Consideramos el problema de determinar cuando una solución oscilante converge a una trayectoria cerrada, para ello consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, con condición inicial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad t \geq 0, \quad (\text{A.4})$$

el cual tiene soluciones oscilantes. Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$  un plano. En adelante denotaremos por  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}(t_0))$  la solución al sistema (A.4) en el instante  $t$  y condición inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ .

El mapeo de Poincaré resulta de la transformación siguiente: se parte de una condición inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , dado que las soluciones del sistema (A.4) son oscilantes para algún instante  $t_1$  la trayectoria dada por la solución  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$  interseca el plano  $S$ , como se muestra en la Figura A.2, ahora tomando como condición inicial al punto  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1; \mathbf{x}_0)$ , se tiene que para algún instante  $t_2$  la trayectoria dada por la solución  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_1)$  interseca al plano  $S$  en el punto  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t_2; \mathbf{x}_1)$ , haciendo lo anterior consecutivamente se obtiene el conjunto  $K = \{t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots : \mathbf{x}_i \in S\}$ .

El conjunto  $\Sigma \subset S$  se define como sigue

$$\Sigma = \{\mathbf{x}(t_i; \mathbf{x}_{i-1}) : t_i \in K\}, \tag{A.5}$$

el cual es llamado *sección de Poincaré*.

**Definición A.7.**

El mapeo  $\mathbf{P} : \Sigma \rightarrow S$  es llamado *mapeo de Poincaré*, donde

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}(t_k; \mathbf{x}_{k-1})) := \mathbf{x}(t_{k+1}; \mathbf{x}_k).$$

Notemos que una condición para garantizar la existencia de un ciclo límite es que el mapeo de Poincaré  $\mathbf{P}$  tenga un punto fijo.

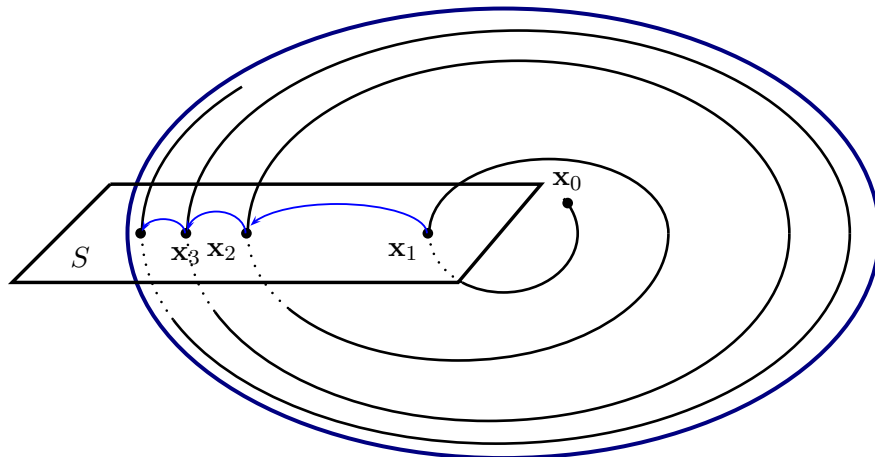


Figura A.2: Ilustración del mapeo de Poincaré

## Bibliografía

- [1] V. V. Alexandrov, Yu. V. Bolotin, S. S. Lemak, N. A. Parusnikov, S. I. Zlochevsky, and S. W. F. Guerrero. *Introduction to control of dynamic systems*. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México, 2009.
- [2] V. V. Alexandrov, D. I. Bugrov, S. S. Lemak, A. Yu. Nevidomdky, O. Yu. Cherkasov, A. G. Yakushev, S. Reyes, A. J. Gutiérrez, and J. J. Torres. *Control optimal de un sistema perturbado*. Moscú-México, 2003.
- [3] J. P. Aubin and A. Cellina. *Set-valued maps and viability theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [4] J. P. Aubin and H. Frankowska. *Set-valued analysis*. Birkäuser, Boston, 1990.
- [5] V. G. Boltyanski and A. S. Poznyak. *The robust maximum principle*. Springer, New York, 2012.
- [6] F. Brauer and J. A. Nohel. *The qualitative theory of ordinary differential equations. An introduction*. Dover Publications, Inc., New York, 1989.
- [7] M. F. Danca. On a class of discontinuous dynamical systems. *Mathematical Notes, Miskolc*, 2(2):103–116, 2001.
- [8] L. Elsgoltz. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Mir, Moscú, 1969.
- [9] A. F. Filippov. *Diferential equations with discontinuous righthand sides*. Mathematics and its applications (Soviet series). Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1988.
- [10] I. L. Iribarren. *Topología de espacios métricos*. Limusa, México, 2008.
- [11] M. Q. Jacobs. *The existence of optimal controls*. PhD thesis, The university of Oklahoma, 1966.
- [12] R. I. Leine, D. H. van Campen, and B. L. van de Vrande. Bifurcations in nonlinear discontinuous systems. *Nonlinear dynamics*, 23:105–164.
- [13] J. C. Macías-Romero. Funciones multivaluadas y sus aplicaciones. *Miscelánea Matemática SMM*, 47(2007):101–116.
- [14] F. Menéndez-Conde. *Teoría de integración*. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Pachuca, Hidalgo, 2011.

- [15] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems*. Springer, New York, 2001.
- [16] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The mathematical theory of optimal processes*. John Wiley and sons, New York, 1962.
- [17] D. X. Narváes y G. Restrepo. Funciones multivaluadas. *Revista de Ciencias, Universidad del Valle*, 15(2011):63–81.
- [18] V. A. Yakubovich, G. A. Leonov, and A. Kh. Gelig. *Stability of stationary sets in control systems with discontinuous nonlinearities*. World Scientific, New Jersey, 2004.