UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

Tareas de instrucción para promover el entendimiento de ecuaciones lineales con una incógnita

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA

PRESENTA:

Oscar Arce Peña

DIRIGIDO POR:

DR. FERNANDO BARRERA MORA

DR. AARÓN REYES RODRÍGUEZ

Mineral de la Reforma, Hidalgo, Noviembre de 2018.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

Mineral de la Reforma, Hgo., a 28 de noviembre de 2018

Número de control: ICBI-D/1151/2018
Asunto: Autorización de impresión de tesis.

MTRO. JULIO CÉSAR LEINES MEDECÍGO
DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

Por este conducto le comunico que el comité revisor asignado al C. Óscar Arce Peña, alumno de la Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica, con número de cuenta 111221, autoriza la impresión del proyecto de tesis titulado "Tareas de instrucción para promover el entendimiento de ecuaciones lineales con una incógnita" en virtud de que se han efectuado las revisiones y correcciones pertinentes.

A continuación se registran las firmas de conformidad de los integrantes del comité revisor.

PRESIDENTE	Dra. Alma Sofía Santillán Hernández	
SECRETARIO	M. en C. Marcos Campos Nava	
VOCAL	Dr. Fernando Barrera Mora	
SUPLENTE	Dr. Aarón Víctor Reyes Rodríguez	

Sin otro particular reitero a Usted la seguridad de mi atenta consideración.

Atentamente
"Amor, Orden y Progreso"

Dr. Óscar Rodolfo Suárez Castillo
Director del ICBI

ORSC/POJM

Ciudad del Conocimiento
Carretera Pachuca-Tulancingo km 4.5 Colonia Carboneras, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C.P. 42184
Teléfono: +52 (771) 71 720 00 ext. 2231
Fax 2109
direccion_icbi@uaeh.edu.mx

DEDICATORIA

A mi esposa,

Por todo el apoyo brindado, por su amor y estar siempre impulsándome a cumplir una meta más de vida. Gracias por acompañarme y ser parte de este logro.

A mis padres,

Por enseñarme valores y fomentar en mí la responsabilidad, agradezco todas sus enseñanzas.

A mi hermano,

Por enseñarme que uno puede caer pero cuando uno se levanta hay que hacerlo con más fuerza.

A mis sobrinos,

Por motivarme para ser un ejemplo de superación para ellos.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Fernando Barrera Mora y al Dr. Aarón Reyes Rodríguez, asesores de este trabajo de tesis, por su paciencia, tiempo y sus conocimientos, por el apoyo brindado para concluir este trabajo.

A la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo por haberme permitido estudiar mi licenciatura y ahora haber realizado mis estudios de posgrado. #orgullosamente_uaeh

Al Colegio de Bachilleres del Estado de Hidalgo (COBAEH) por permitirme desarrollar profesionalmente, brindándome todas las facilidades para realizar este proyecto.

A los estudiantes y padres de familia COBAEH Plantel Tizayuca del grupo 1104 por su apoyo y colaboración para desarrollar las actividades planeadas.

Resumen

Uno de los principales problemas que se han observado en el aprendizaje del álgebra, se relaciona con las dificultades que tienen los estudiantes con el sentido numérico, y sus implicaciones al operar expresiones alfanuméricas. Se observa que no dan sentido a los símbolos y a las operaciones que ejecutan con esos símbolos. Con este antecedente, se diseñaron tareas de instrucción para implementarse con estudiantes de primer semestre de un bachillerato general en el Estado de Hidalgo. El objetivo del trabajo fue identificar dificultades que tienen los estudiantes para dar significado a expresiones algebraicas, que se derivan de la identificación y generalización de patrones en secuencias figurales. También se utilizó una calculadora básica como herramienta para ayudar a identificar patrones. Se trató de conocer cómo los estudiantes dieron sentido a la solución de ecuaciones lineales de la forma $ax + b = c$.

En esta investigación participaron 44 estudiantes quienes abordaron las tareas en equipos, durante tres sesiones de dos horas. Se implementaron tres tareas, en la primera, empleando una calculadora básica realizaron una suma, pulsando repetidamente la tecla igual y observando los resultados. En la segunda, se llevó a cabo un juego, en donde, se proporcionó una secuencia figural, asociada con la construcción de torres de latas. La tercera tarea consistió en determinar el comportamiento de un ahorro realizado en un banco.

Entre los principales resultados se destaca que no todos los estudiantes fueron capaces de dar sentido a los símbolos al generalizar patrones, ya que únicamente centraron la atención en los resultados y no en la estructura de las operaciones. Entre aquellos estudiantes que sí expresaron la generalidad de forma simbólica, hubo algunos que sustituyeron valores particulares para obtener certeza de la validez de sus resultados. Se observó que estos últimos estudiantes dieron sentido a los símbolos, basado en el contexto de las tareas, y este significado fue de utilidad para que expresaran verbalmente el proceso de solución de las ecuaciones correspondientes, a través del método que ellos denominaron *operaciones inversas*. Respecto al tránsito entre ese procedimiento verbal y las manipulaciones simbólicas respectivas hubo diversas dificultades, algunas de las cuales se relacionan con uso del signo igual como una relación de equivalencia.

Abstract

One of the main problems that have been observed in the learning of algebra is related to the difficulties that students have with the numerical sense and its implications when operating alphanumeric expressions. It is observed that they do not give meaning to the symbols and the operations that they execute with those symbols. With this background, instructional tasks were designed to be implemented with first semester students of a general baccalaureate in the State of Hidalgo, Mexico. The research's objective was to identify difficulties that students have to give meaning to algebraic expressions, which are derived from the identification of patterns in figurative sequences. A basic calculator was used as a tool to help students identify patterns. We sought to know how students could make sense of the solution of linear equations of the form $ax + b = c$.

In this research, participated 44 students, who tackled the tasks in teams during three sessions, of two hours each one. Three tasks were implemented, in the first one, using a basic calculator, they made sums, pressing keys repeatedly and observing the results. In the second one, a game was carried out, where a figural sequence was provided, and the corresponding pattern was associated with the construction of can towers, in the third task was to determine the behavior of a savings made in a bank.

Among the main results is that not all students were able to make sense of the symbols in the generalization of the expressions, since they only focused attention on the results and not on the operations. Among those students who expressed generality in a symbolic way, there were some who substituted particular values to obtain certainty about the validity of their results. It was observed that these last students gave meaning to the symbols, based on the context of the tasks, and this meaning was useful for them to verbally express the process of solving the corresponding equations, through the method they called inverse operations. Regarding the transit in that verbal procedure and the respective symbolic manipulations there were several difficulties, some of which are related to the use of the same as an equivalence relation.

Contenido **Página**

CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Introducción

Uno de los principales problemas en el aprendizaje de las matemáticas, en la educación básica y media superior, tiene que ver con temas referentes al álgebra, en particular con la solución de ecuaciones lineales (Samuel, Mulenga y Angel, 2016). Respecto al entendimiento de las ecuaciones de primer grado con una incógnita, los Common Core State Standards (NGACBP & CCSSO, 2010) sugieren, que el alumno debe ser capaz de modelar situaciones mediante ecuaciones lineales en una variable y utilizarlas para resolver problemas. También es importante que desarrolle habilidades para explicar cada paso en el proceso de solución de una ecuación, a partir de suponer que la ecuación original tiene una solución, y construir un argumento viable para justificar el método de solución. El alumno debiera resolver ecuaciones lineales en una incógnita, incluidas ecuaciones con coeficientes generales representados por letras.

En este trabajo el propósito fue el diseño e implementación de tareas de instrucción, que promovieran el entendimiento de ecuaciones lineales con una incógnita, con base en el desarrollo de significado para los símbolos algebraicos, mediante procesos de identificación y generalización de patrones en secuencias figurales. Algunos elementos que se han reconocido como un puente entre la aritmética y álgebra, son: i) comprender la estructura de las operaciones, ii) generalizar y justificar resultados, iii) extender el sistema de números, y iv) usar notación con significado (Rusell, et al., 2011).

El diseño de las tareas se orientó a que los estudiantes construyeran significados para expresiones algebraicas, a través de la identificación de patrones en secuencias figurales y en contextos que involucraron el uso de una calculadora básica. Con base en estos significados, sustentados en los contextos de las tareas, se trató de que los estudiantes dieran sentido a la solución de ecuaciones lineales de la forma $ax + b = c$.

1.2 Revisión de la literatura

La literatura en donde se aborda el problema del desarrollo del pensamiento algebraico y, particularmente, el análisis del entendimiento de ecuaciones lineales con una incógnita, es diversa. Rojano (2010) realizó un estudio con alumnos de secundaria, con edades entre 12 y 14 años. En el estudio se empleó una balanza virtual para ayudar a los alumnos a abstraer las acciones al nivel de lenguaje simbólico, asociadas con la resolución de ecuaciones lineales. Se investigó si los alumnos son capaces de generalizar el método de "hacer lo mismo de ambos lados de la igualdad", y extenderlo a modalidades de ecuaciones cada vez más complejas, incluidas aquellas que contienen sustracción de términos con coeficientes positivos.

Por otra parte, Socas (2011) analizó el tránsito de la aritmética al álgebra desde una perspectiva global que comprende el desarrollo del pensamiento operacional, estructural y procesal. El análisis se efectuó mediante un acercamiento semiótico, mediante el cual se buscó establecer conexiones entre el lenguaje algebraico y el pensamiento geométrico. Los sistemas de representación que se utilizan para dar significado al lenguaje algebraico, además de considerar su carácter conceptual y procedimental, también muestran la necesidad de considerar el álgebra como una actividad, en donde los alumnos tienen la oportunidad de usar signos, como un instrumento específico y mediador para realizar operaciones aritméticas.

De acuerdo con Radford (1996) las bases del pensamiento algebraico consisten en: determinar semejanzas y diferencias, ordenar, clasificar, etiquetar. El álgebra aparece como un medio para la expresión y manipulación de generalidades. Al generalizar patrones se usan variables e incógnitas, fórmulas y ecuaciones en un marco de resolución de problemas, esto tiene relación estrecha con el sentido numérico (implica que los estudiantes sepan utilizar los números y las operaciones en distintos contextos) y la generalización. Las aproximaciones que lleven a cabo los estudiantes para la construcción de fórmulas o ecuaciones en las que se aprecie la expresión de generalidad, deben ser variadas. Visualización, manipulación de figuras, formulación de reglas recursivas que muestran cómo construir el siguiente término usando el precedente, son algunas estrategias para encontrar un patrón y generalizarlo.

Radford (2006) llevó a cabo un estudio cuyo objetivo fue que los estudiantes aprendieran conceptos algebraicos y obtuvieran un entendimiento acerca de cómo se desarrolla el pensamiento algebraico. En el estudio participaron alumnos de noveno grado (secundaria en México). Observaron las dificultades que tienen los estudiantes, así como las posibles formas de enfrentar esas dificultades con base en una perspectiva semiótica. Los resultados de la investigación permitieron distinguir diversas estrategias para generalizar patrones: inducción ingenua (empleando métodos de adivinación) y generalización. En cuanto a la generalización formularon subcategorias tales como la generalización aritmética y la generalización algebraica. En la generalización algebraica, el objeto generalizado se presenta empleando un esquema que contiene una regla que proporciona una expresión de cualquier término de la secuencia.

Filloy y Rojano (1989) realizaron una investigación acerca de la transición de la aritmética al algebra, realizando una distinción entre ecuaciones lineales que tienen manifestaciones concretas y abstractas. El análisis se llevó a cabo mediante tareas que utilizaron modelos de balanza y modelos geométricos. Los resultados indican que el desarrollo del uso de un modelo concreto para operar las incógnitas en una ecuación no es uniforme, aun cuando los estudiantes tienen niveles cognitivos similares. Con los modelos de balanza, los pasos para resolver la ecuación se redujeron a iteraciones sucesivas de cancelación. En el modelo geométrico, para resolver ecuaciones de la forma $Ax + B = Cx + D$ se requirió del traslape de rectángulos representados por los términos de primer grado, Ax y Cx. Los autores afirman que el modelado tiene dos significados: el primero tiene que ver con la traslación de significados y el segundo con la separación de nuevos objetos con significado apropiado a contextos concretos.

Stacey (1989) realizó una investigación sobre problemas de generalización de patrones lineales. Planteó actividades donde los estudiantes observan y usan un patrón lineal de la forma $f(x) = ax + b$, con $b \neq 0$, para contestar una serie de preguntas. En el estudio participaron estudiantes de entre 9 y 13 años, documentando las explicaciones que dan. El autor observó una inconsistencia sustancial de la elección del modelo, ya que los estudiantes que contestaron correctamente una pregunta fácil, adoptaron con frecuencia un modelo más simple pero incorrecto para preguntas más difíciles. Otros estudiantes utilizaron implícitamente un modelo lineal más frecuente y consistente. Sus explicaciones relacionaban los patrones espaciales y los patrones numéricos.

Rivera y Becker (2008) realizaron un estudio sobre las percepciones cognitivas de generalizaciones que implican patrones lineales con estudiantes de secundaria. Encontraron tres formas de generalización: *norma constructiva*, *constructivo no estándar* y *desconstructivas*. Las dos primeras se refieren a una generalización constructiva de un patrón figurativo lineal. El estándar constructivo es el más fácil para la mayoría de los niños y el constructivo no estándar es algo difícil. Las *desconstructivas* se presentan en casos donde los alumnos generalizan al observar configuraciones superpuestas en la estructura, es decir, implican un proceso de suma y resta por separado, contando cada subconfiguración y quitando partes que se superponen. También documentaron la tendencia de pasar de una estrategia figural a una estrategia numérica para determinar el patrón. Observaron un cambio en la habilidad y fluidez de representación, de lo verbal a lo simbólico, y cómo este cambio afecta la manera que justifican sus generalizaciones.

Cooper y Warren (2011) llevaron a cabo un estudio sobre la habilidad para generalizar en estudiantes de primaria. Encontraron que algunos estudiantes pueden expresar la generalización en términos de números específicos, antes que puedan proporcionar una generalización verbal o simbólica, a lo que llamaron cuasi-generalización. Afirman que la cuasi-generalización es el precursor necesario para expresar la generalidad en lenguaje natural y notación algebraica. También identificaron que los estudiantes de últimos grados pueden: (i) representar la equivalencia con incógnitas en forma de ecuación; (ii) generalizar el principio de equilibrio para todas las operaciones; y (iii) utilizar el principio de equilibrio para resolver incógnitas en ecuaciones lineales. Consideran que las secuencias de representaciones activadoras, icónicas y simbólicas son importantes en la construcción hacia la generalización.

Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens (2005) realizaron una investigación con estudiantes de nivel medio superior sobre el entendimiento de algunos conceptos algebraicos, en específico las ideas de equivalencia y variable. Observaron que los estudiantes ven el signo igual "=" como un símbolo operativo (es decir, una indicación para "hacer algo"), en lugar de verlo como un símbolo relacional (es decir, "lo mismo que").Una visión relacional del signo igual es esencial para entender que las transformaciones realizadas en el proceso de resolver una ecuación, deben preservar la relación de equivalencia. Descubrieron que muchos estudiantes sabían cómo usar transformaciones en la resolución de ecuaciones, sin embargo, estos mismos estudiantes no parecen utilizar ese conocimiento para determinar si dos ecuaciones dadas son equivalentes.

Pino-Fan, Assis y Godino (2015) efectuaron un trabajo de investigación sobre los significados pretendidos e implementados por profesores, y los significados que logran los estudiantes en una tarea sobre patrones. El estudio se realizó con estudiantes de 7º año de enseñanza básica en Brasil. Evidenciaron una serie de procesos matemáticos en los que destacan el de *problematización*, cuyo objetivo fue que a partir de procesos de *particularización* se lograra uno de *generalización*. Identificaron diferentes procedimientos que realizaron los estudiantes, entre los que enfatizan, el reconocimiento de regularidades, el conteo, la generalización y la construcción de una expresión matemática para representar el enésimo término y/o para expresar la regularidad encontrada. También resaltan la complejidad del trabajo del profesor, quien debe ser capaz de reconocer y negociar los significados producidos por los estudiantes.

Los trabajos consultados nos permiten concebir las diferentes formas en que se han abordado tareas con patrones. En las indagaciones se muestran las dificultades y avances que tienen los estudiantes en la transición de la aritmética al álgebra. Y como por medio del reconocimiento de regularidades, los estudiantes son capaces de llegar a la generalización y la representan por medio de expresiones matemáticas. Por otra parte, en la solución de ecuaciones se han utilizado métodos de balanza y modelos geométricos con la intención de que los estudiantes puedan generalizar los procesos para resolverla.

1.3 Planteamiento del problema

Con base en la revisión de la literatura, se identificó que el álgebra es entendida, de una manera restrictiva, como lenguaje simbólico, y orientada básicamente a la resolución de ecuaciones y estudio de polinomios. Esta asignatura aparece de manera abrupta en secundaria, sin que al abordarla exista una continuidad con los temas de aritmética, medida y geometría, tratados en la escuela primaria (Godino, 2012). En este contexto, se busca identificar elementos que pudiesen ayudar a realizar una conexión entre aritmética y álgebra a través de los procedimientos empleados al resolver ecuaciones, que aparecen en diferentes tareas sobre identificación y generalización de patrones. También se busca conocer cómo los estudiantes dan sentido a los símbolos, al centrar la atención en la estructura de las operaciones en el ámbito algebraico. Enfedaque (1990) identificó que generalmente cuando se presenta una ecuación, se señala que existe algo llamado incógnita y que para saber cuánto vale hay que resolver la ecuación. Generalmente se da un método para resolverla y este método se enseña de forma desligada de contextos y significados concretos, así como en los conceptos que se basan los posibles procedimientos.

En los grupos de primer semestre del Colegio de Bachilleres del Estado de Hidalgo (COBAEH) Plantel Tizayuca turno matutino, en las evaluaciones diagnósticas (APÉNDICE G) realizadas al inicio de curso 16-B, se obtuvo, que el 80% de los alumnos muestran dificultades con los temas que tienen que ver con aritmética y álgebra, aprenden a manejar y operar, en forma básica, algunos símbolos, pero sin darle sentido a sus planteamientos o respuestas. Estos estudiantes de acuerdo al programa de estudios de matemáticas, guía para el maestro de secundaria (2011) debieran ser capaces de identificar relaciones y operaciones entre cantidades indeterminadas, darle significado a la representación de números por literales, formular patrones en forma verbal y simbólica, desarrollar habilidades para operar con símbolos que representan cantidades con fluidez; dando sentido a los números y operaciones. También deben plantear y proponer modelos que resuelvan problemas haciendo uso de la ecuación lineal. Obtener expresiones equivalentes y asociar la ecuación lineal con una función lineal y su representación gráfica.

Respecto al entendimiento de las ecuaciones de primer grado con una incógnita los Common Core State Standards (NGACBP & CCSSO, 2010) sugieren, que el alumno debe ser capaz de obtener ecuaciones en una variable y utilizarlas para resolver problemas. Además, debe de explicar cada paso en la solución de una ecuación simple, a partir de la suposición de que la ecuación original tiene una solución. Construir argumentos para justificar el método de solución, y resolver ecuaciones lineales en una variable, incluidas ecuaciones con coeficientes generales representados por letras.

En este sentido, y de acuerdo con el programa de estudio de matemáticas I de la Dirección General de Bachillerato (DGB, 2014), los indicadores de desempeño de los estudiantes son: (i) identifica lo que es una ecuación lineal en una variable, (ii) usa diferentes técnicas para resolver ecuaciones lineales en una variable, (iii) reconoce a la ecuación $y = mx + b$ como una ecuación de dos variables, como la forma de una función lineal; (iv) modela situaciones para escribirlas como una ecuación lineal, redacta y resuelve problemas relativos a situaciones que requieran el uso de ecuaciones lineales en una variable.

Por lo antes mencionado, el objetivo del presente trabajo es documentar dificultades al abordar la solución de ecuaciones lineales con una incógnita, propiciando la construcción de significado para las literales, expresiones algebraicas y ecuaciones, mediante actividades de identificación y generalización de patrones. La pregunta que orienta el presente trabajo es: ¿De qué manera, tareas que involucran generalización de patrones en contextos de secuencias figurales y de operaciones aritméticas con una calculadora básica, apoyan a que estudiantes de bachillerato den sentido a ecuaciones de la forma $ax + b = c$, así como a la solución y al proceso para obtenerla?

1.3.1 Hipótesis

La hipótesis que se plantea en este trabajo es que el contexto de la tarea, particularmente la identificación de elementos variables e invariantes es fuente de significado para los elementos de las expresiones algebraicas $f(x) = ax + b$. Por otra parte, elementos involucrados en el contexto de las tareas, tales como el número de veces que se presiona la tecla igual o la posición de la figura, así como el resultado que aparece en la calculadora o el número de objetos que conforman una cierta figura, permiten a los estudiantes dar significado a la incógnita y al parámetro c, respectivamente, en la ecuación $ax + b = c$. Así mismo, el contexto de la tarea permite al estudiante establecer conexiones necesarias entre las operaciones aritméticas que involucran al parámetro c con la incógnita x, esto en términos de procedimientos operacionales físicos.

CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL

2.1 Introducción

Todo trabajo científico debe adoptar un marco de investigación, el cual consiste en una estructura básica de ideas, principios, acuerdos o reglas que proporcionan las bases y lineamientos para orientar el proceso investigativo. Un marco conceptual es una estructura, en donde los términos elegidos para la indagación y cualquier relación entre ellos, debiera ser apropiada y útil, dado el problema de investigación. Los marcos conceptuales, al igual que los marcos teóricos, se basan en investigaciones previas (Lester, 2010). En el presente trabajo se adopta un marco conceptual, que nos permite argumentar la relación entre las concepciones de las matemáticas, el aprendizaje de las matemáticas y la instrucción matemática para la solución de problemas.

De acuerdo con Steen (1988), podemos definir a las matemáticas como la *ciencia de los patrones*. Un matemático busca patrones en los números, en las formas y el espacio, etcétera. Las teorías matemáticas explican las relaciones entre esos patrones para producir estructuras matemáticas duraderas. Las aplicaciones de las matemáticas utilizan estos patrones para “explicar” y “predecir” comportamientos de fenómenos naturales y sociales que se ajustan a tales patrones. La actividad esencial de los matemáticos no consiste en aplicar reglas o algoritmos, sino inventar esas reglas, algoritmos y procedimientos que nos permitan entender las regularidades que aparecen en nuestro mundo (Barrera y Reyes, 2013). El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas (Godino y Font, 2003). Así, en este trabajo, consideramos que las matemáticas son la ciencia de los patrones.

Por otra parte, se adoptó una postura desde la que se concibe al aprendizaje, como un proceso tanto individual como social. De esto se desprende, que cada estudiante construye su propio conocimiento al enfrentarse a situaciones problemáticas que desequilibran sus estructuras cognitivas, independientemente del escenario de instrucción. La actividad matemática que se lleva a cabo en una comunidad de aprendizaje (el salón de clase) influye en las características del conocimiento que el estudiante construye (Simon, 1994), el cual puede ser un conocimiento atomizado o un conocimiento estructurado. A medida que se negocian los significados grupales, los miembros de una comunidad de práctica (Wenger, McDermott y Snyder, 2002) se involucran en dar sentido y resolver el desequilibrio causado por las diferencias entre sus ideas y las de los demás, por lo que la promoción de la reorganización cognitiva es la reflexión, la comunicación de ideas y la cooperación.

La idea central es que los estudiantes construyen, activamente, sus propios entendimientos, la construcción de nuevas estructuras cognitivas es estimulada por una situación problemática que perturba la organización actual del conocimiento del individuo. Esta distorsión o "desequilibrio", ocurre cuando sus estructuras cognitivas actuales no son útiles para explicar el comportamiento de una situación problemática. El desequilibrio conduce a la actividad mental y a una modificación de ideas previamente sostenidas para explicar la nueva experiencia (Simon y Schifter, 1991).

De acuerdo con esta perspectiva, los estudiantes tienen que estar activamente involucrados en: la exploración de situaciones problemáticas, en la búsqueda de patrones, en la generación de ideas e hipótesis, en la verificación de estas hipótesis, en la generalización y justificación de las ideas que se presentan. Para ello, los estudiantes manipulan una variedad de representaciones, incluyendo modelos físicos, diagramas, representaciones dinámicas y símbolos matemáticos, y desarrollan conexiones entre ellas. Esta actividad se desarrolla, a veces individualmente, a menudo en parejas o en pequeños grupos, y en discusiones de clase. Los estudiantes poseen la experiencia de crear matemáticas, no sólo imitar las matemáticas de los demás, comunican regularmente sus ideas al maestro y a sus compañeros, a través de diversos sistemas de representación. Los entendimientos se solidifican por medio del refinamiento de las ideas, los problemas no rutinarios, que fomentan el uso de nuevas ideas en una variedad de contextos, empujan las comprensiones a niveles más complejos.

2.2 Aprendizaje con entendimiento

Entendemos algo si vemos cómo ese algo está relacionado o conectado con otras cosas que sabemos (Hiebert et al., 1997). Dos componentes críticos del entendimiento son: la reflexión y la comunicación de ideas. La comunicación nos permite desafiar nuestras formas de pensar y pedir aclaraciones para describirlas con más claridad o para explicarlas o justificarlas. Al detenernos cuidadosamente para pensar en las cosas y reflexionar, es casi seguro que aumentará nuestro entendimiento sobre el objeto de reflexión. Entre mayor sea el número de conexiones relevantes que se pueden realizar entre una idea y otras cosas que conocemos será mayor el nivel de entendimiento logrado.

Por ejemplo, entendemos a un nivel básico el Teorema de Pitágoras si conocemos su enunciado "En un triángulo rectángulo, la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa" y podemos aplicarlo para resolver problemas en los que hay que encontrar el valor desconocido de un lado si se conocen los valores de los otros dos lados del triángulo rectángulo. Otro nivel de entendimiento de este resultado se consigue si podemos caracterizar a todos los números enteros x, y y z que satisfacen la ecuación $x^2+y^2=z^2$ o si conocemos que, si se construyen cuadrados sobre los lados de un triángulo rectángulo, entonces la suma de las áreas de los cuadrados que se encuentran sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa (Barrera y Reyes, 2014).

La construcción de la comprensión matemática requiere desarrollar ciclos sucesivos de acción, observación, formulación de conjeturas y justificación de resultados (Barrera y Reyes, 2016). En Carpenter y Lehrer (1999) se proponen cinco formas de actividad mental de las que emerge el entendimiento de las matemáticas: (a) la construcción de relaciones. (b) extender y aplicar conocimientos matemáticos, (c) reflexionar sobre las experiencias, (d) articular lo que uno conoce y (e) hacer el conocimiento matemático propio. El papel más importante para el profesor es convertir un aula en un ambiente en el que todos los estudiantes pueden reflexionar sobre las matemáticas, comunicar sus pensamientos y acciones (Hiebert et al., 1997).

Aprender a pensar matemáticamente significa (a) desarrollar un punto de vista que valore el proceso de matematización y abstracción, y tener la tendencia a aplicarlos, y (b) desarrollar una competencia con las herramientas de trabajo y usarlas en la meta de entender y construir estructuras para desarrollar el sentido matemático (Schoenfeld, 1994). Si se busca que los estudiantes entiendan matemáticas, debemos pensar que el entendimiento, es algo que resulta de resolver problemas, más que algo que podemos enseñar directamente (Barrera y Reyes, 2014).

2.3 Instrucción matemática

Santos Trigo (1997) argumenta que un aspecto crucial en la instrucción matemática es ayudar a los estudiantes a matematizar su aprendizaje, vía la resolución de problemas. El propósito principal de una instrucción basada en la resolución de problemas no es equipar a los estudiantes con un bagaje de estrategias y habilidades; por el contrario, se busca que desarrollen los elementos del pensamiento matemático (experimentar, explorar relaciones, formular conjeturar, justificar resultados). El valor de las estrategias, habilidades y procesos radica en favorecer en el estudiante una forma inquisitiva de pensar. En Sepulveda y Santos (2006) señalan, que el reto en la instrucción matemática, es generar condiciones de aprendizaje para los estudiantes donde se reflejen valores propios relacionados con el desarrollo de la disciplina. En particular, el salón de clase debe promover actividades y hábitos consistentes con la práctica real de la misma.

Simon (1994) destaca, que el éxito en la instrucción matemática debería resultar, no solo en el desarrollo conceptual y de una mayor capacidad de resolución de problemas, sino también, en el desarrollo de concepciones útiles sobre las matemáticas. Con este fin, la actividad matemática en el aula debe involucrar a los estudiantes, en la exploración de situaciones matemáticas, generación de hipótesis, comunicación, validación y aplicación de nuevas ideas.

En la resolución de problemas, es primordial analizar el proceso cognitivo y no solo los productos que muestra el estudiante durante sus experiencias de aprendizaje. Además, en esta perspectiva existen constructos teóricos que ayudan a caracterizar el desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes en términos de la visión de la disciplina (creencias). Los recursos básicos de los que disponen y puedan acceder durante la comprensión de las ideas matemáticas y la resolución de problemas, las estrategias cognitivas relevantes en el proceso de solución y las de monitoreo, evaluación y autorregulación que guían la resolución de problemas. Estos aspectos, han influido no solamente en la forma de estructurar los escenarios de instrucción, sino en la selección e implementación de actividades de aprendizaje que faciliten a los estudiantes revelar y atender el desarrollo de ideas matemáticas (Santos, 2009).

No existe un formato único acerca de cómo estructurar las distintas actividades de aprendizaje. Cada profesor, de acuerdo a las condiciones propias de su institución, selecciona, organiza e implementa diversas series de actividades que promuevan: (i) la participación de los estudiantes en la discusión de tareas o problemas en pequeños grupos, (ii) la presentación de los acercamientos de los estudiantes a los problemas a toda la clase o grupo, (iii) la retroalimentación y orientación por parte del profesor que permita identificar las estrategias y métodos de solución de los estudiantes y la necesidad de aprender nuevos contenidos, (iv) la reflexión individual que permita al estudiante incorporar y refinar los distintos acercamientos que aparecieron durante el desarrollo de las actividades (Santos, 2008).

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

Este trabajo se abordó desde un enfoque esencialmente cualitativo, ya que la investigación cualitativa da profundidad a los datos, la dispersión, la riqueza interpretativa, la contextualización del ambiente o entorno, los detalles y las experiencias únicas (Sampieri, Collado y Lucio, 2003). En una aproximación cualitativa, se busca caracterizar los significados o las formas de entendimiento que los estudiantes construyen al abordar situaciones problemáticas.

3.1 Participantes

Las tareas se implementaron en el COBAEH Plantel Tizayuca, ubicado en el municipio de Tizayuca, perteneciente al Estado de Hidalgo. El grupo con el que se desarrollaron las tareas contó con 44 alumnos (17 mujeres y 27 hombres), con edades entre los 14 – 17 años de primer semestre, ciclo escolar 16-B. Al ser estudiantes menores de edad, se solicitó autorización por escrito a los padres de familia para poder grabar en video a sus hijos durante la implementación de las tareas. Las videograbaciones se transcribieron posteriormente asignándoles seudónimos a los estudiantes con la finalidad de proteger la identidad de los mismos (APÉNDICE A).

La mayoría de los estudiantes cursaron su educación secundaria en sistema escolarizado y solamente uno lo hizo en sistema abierto, los estudiantes, de acuerdo con la opinión del profesor del grupo, muestran diferencias considerables en sus habilidades matemáticas para realizar diferentes cálculos, por lo que se propició el trabajo en equipo para favorecer la comunicación y reflexión de las tareas.

3.2 Las tareas y el escenario de instrucción

La implementación de las tareas de instrucción, se desarrolló en tres etapas, en cada etapa las actividades planteadas invitaron al estudiante a formular conjeturas para resolver paso a paso lo que se solicitó y así llegar a la generalización de patrones y darle significado a los símbolos.

Etapa uno

Se llevó a cabo una actividad empleando una calculadora básica para desarrollar el sentido de análisis de patrones a partir de operaciones realizadas con ella. Se solicitó a los alumnos traer consigo: plumones, lápiz, hojas blancas y calculadora. Al inicio de la actividad se realizaron las siguientes preguntas en forma oral: ¿Sabes realizar operaciones aritméticas básicas? Realiza la suma 5 + 5 + 5 ¿Cuál es el resultado?, si multiplicas 3 x 5 ¿Cuál es el resultado? con el propósito de tener un antecedente de los conocimientos previos de los estudiantes.

Al terminar las preguntas en un tiempo no mayor a cinco minutos, se solicitó a los alumnos realizar las siguientes sumas, representándolas en una tabla, en donde se debe de escribir la operación propuesta, la representación numérica y el total obtenido. La operación propuesta fue 5 + 2, se les solicitó a los estudiantes que se reunieran por equipos de cuatro integrantes y se les pidió que realizaran la operación empleando la calculadora básica de la siguiente forma: introducir 5 + 2 y teclear el símbolo "=", volver a teclear el símbolo "=" y que observaran lo que pasa cuando se presiona en repetidas ocasiones el símbolo "=". Se solicitó que completaran la siguiente tabla:

Representación numérica de la suma	Veces que presionas =	Valor obtenido

Una vez que los estudiantes completaron el llenado de las tablas, se proporcionó un espacio de análisis y reflexión, realizando las siguientes preguntas: ¿Qué valor se obtiene en la pantalla de la calculadora si presionas 20 veces la tecla igual? ¿Si se presiona 30 veces? ¿Existe alguna relación entre el resultado obtenido y el número de veces que presionas la tecla “igual”? ¿Cómo explicarías la relación obtenida? Si tuvieras que explicar la relación a otra persona por medio de un mensaje corto, ¿cómo abreviarías la relación obtenida?

Después de que los estudiantes contestaron las interrogantes previas, se continuó con el análisis de la actividad con las siguientes preguntas: ¿Cuántas veces tengo que presionar la tecla “igual” para obtener el número 9? ¿Cuántas veces tengo que presionar la tecla “igual” para obtener el número 25? ¿Cuántas veces tengo que presionar la tecla “igual” para obtener el número 195? ¿Cómo obtuviste la respuesta? Se llevó a cabo un proceso de validación de respuestas, en donde los alumnos argumentaron el procedimiento utilizado.

Etapa dos

Se realizó una actividad para dar sentido a los símbolos mediante el análisis de comportamiento de patrones a partir de las relaciones encontradas entre la posición y la figura de una secuencia, identificando lo variante de lo invariante, empleando construcción de torres de latas. En un inicio se solicitó a los estudiantes que observaran la siguiente secuencia.

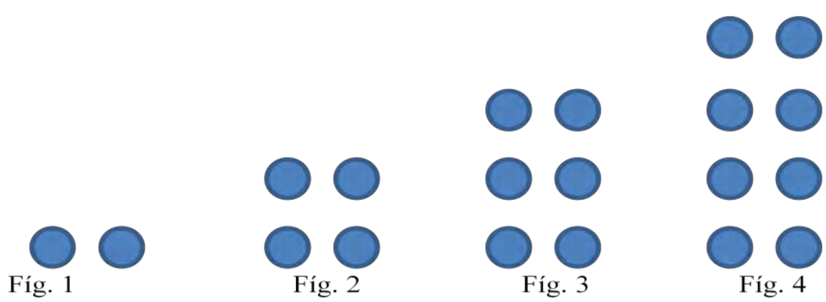


Figura 1. Representación de secuencia figural tarea dos

Empleando hojas de papel y lápiz, se pidió a los estudiantes que dibujaran la figura 5 y la figura 7, así como la figura10. Se les cuestionó a los estudiantes ¿Cómo realizaron la representación?

Una vez que terminaron de realizar la representación, se pidió a los estudiantes del grupo que se integraran en cinco equipos, se solicitó nombrar al juez de la competencia que llevó el registro de los puntos y el tiempo. El juego consistió en que dos integrantes de cada equipo construyeran torres con latas de refresco, de acuerdo a la secuencia mostrada. El juez tira el dado para determinar el número de figura que se realizaría, la pareja de cada equipo tomó el número de latas que creían necesario, ya que no podían regresar por latas para terminar de construir su torre. Se tuvo un minuto para tomar las latas y construir las torres.

El proceso de puntuación fue el siguiente: gana 3 puntos, el primer equipo que termine de construir su torre y dure tres segundos sin caerse. Gana 2 puntos, el segundo equipo en terminar de construir su torre y dure tres segundos sin caerse. Gana 1 punto, el tercer equipo en terminar de construir su torre y dure tres segundos sin caerse. Gana 3 puntos adicionales, el equipo que utilice el número exacto de latas. El juego se realizó a 5 rondas. El equipo que acumuló la mayor cantidad de puntos ganó la partida. Después de haber terminado el juego, se propició un momento de reflexión, en donde se hicieron algunos cuestionamientos: ¿Cómo supiste el número exacto de latas a utilizar en las torres? ¿Existirá alguna expresión que permita relacionar el número de figura con la cantidad de latas? ¿Puedes expresar esa relación? ¿Qué número de figura pertenece una torre de 24 latas? Una torre con 36 latas ¿a qué figura pertenece? ¿Cómo obtuviste el número de figura?

Etapa tres

Se solicitó a los estudiantes que resolvieran la siguiente situación que puede ocurrir en la vida cotidiana (Problema adaptado de Radford, 2013). En cierto banco, se ofrece que, invirtiendo un peso, te devuelven dos pesos más, y mientras sigas manteniendo la inversión, cada semana te aumentan dos pesos más. ¿Cuánto dinero tendrás en la semana cinco? ¿En la semana diez? ¿En la semana veinte? ¿Cuántas semanas pasaron para tener $51? Y ¿Cuántas deben transcurrir para tener $125? Después de haber terminado la actividad, se llevó un momento de reflexión, en donde se realizaron las siguientes preguntas: ¿Cómo supiste la cantidad de dinero recibido cada semana? ¿Existirá alguna expresión que permita relacionar la cantidad de dinero recibido con el número de semana? ¿Cómo obtuviste el número de semanas para obtener el total acumulado? Se mostró en el pizarrón la secuencia de la Figura 2.

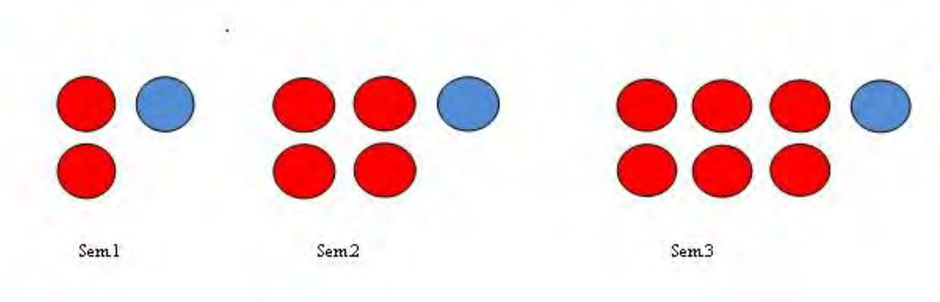


Figura 2. Representación figural de ahorro en un banco

Después de haber debatido sobre los procedimientos empleados en la obtención del número de pesos dado el número de semanas, se comenzó a preguntar, si tenemos una cantidad específica de dinero por ejemplo \$121. ¿Cuántas semanas pasaron para tener esta cantidad? Se continuó preguntando sobre casos particulares de cantidades de dinero \$157 y \$317. Se propuso el llenado de una tabla con dos columnas, una con el título de valor ahorrado y la otra con número de semanas que pasaron para el ahorro. Con la finalidad de observar si han comprendido la forma de resolver una ecuación del tipo $ax + b = c$. Se pidió a los estudiantes que explicaran el procedimiento de solución para encontrar el número de semanas que pasaron para el ahorro mostrado.

Dinero ahorrado	Semanas que pasaron para obtener el ahorro
\$25	
\$57	
\$135	
\$141	
\$297	

3.3 Evaluación de la actividad

La evaluación del proceso de aprendizaje, consiste de todos aquellos recursos cognitivos y afectivos que un profesor utiliza durante el proceso de construcción del aprendizaje. Díaz y Hernández (2010) mencionan que hay que tener presente dos cuestiones para evaluar las características del conocimiento construido por los estudiantes: (1) es necesario tratar y considerar todo el proceso en su dinamismo, (2) el proceso de construcción no puede ser explicado en su totalidad partiendo exclusivamente de las acciones cognitivas y conductuales de los alumnos. Las acciones docentes en su más amplio sentido, actividades de planeación, enseñanza, evaluativas y los factores contextuales del aula también desempeñan un papel importante y decisivo. Para llevar a cabo la evaluación de la actividad implementada en este trabajo, se emplearon rúbricas, una para evaluar el proceso de generalización y otra para la solución de ecuaciones. El empleo de estas rúbricas facilitó la identificación del nivel de entendimiento alcanzado por los estudiantes al abordar las tareas y determinar cómo estas influyeron en su aprendizaje.

Tabla 1. Rúbrica para evaluar el proceso de generalización de patrones.

Nivel	Descriptor
Básico	Reconoce el patrón en la secuencia mostrada, describe verbalmente el comportamiento del patrón.
Intermedio	Reconoce el patrón en la secuencia mostrada, describe verbalmente el comportamiento del patrón y asigna símbolos para expresar la generalización.
Avanzado	Reconoce el patrón en la secuencia mostrada, describe verbalmente el comportamiento del patrón y asigna símbolos para expresar la generalización, explica a sus compañeros, ejemplos del número de elementos que debe contener de acuerdo a la posición en cada caso.

Tabla 2. Rúbrica para evaluar el proceso de solución de una ecuación lineal.

Nivel	Descriptor
Básico	Describe verbalmente la forma de solución de la ecuación.
Intermedio	Describe verbalmente la forma de solución de la ecuación y emplea la manipulación simbólica para obtener la solución.
Avanzado	Describe verbalmente la forma de solución de la ecuación y emplea la manipulación simbólica para obtener la solución, comunica a sus compañeros el proceso realizado y prueba su validez.

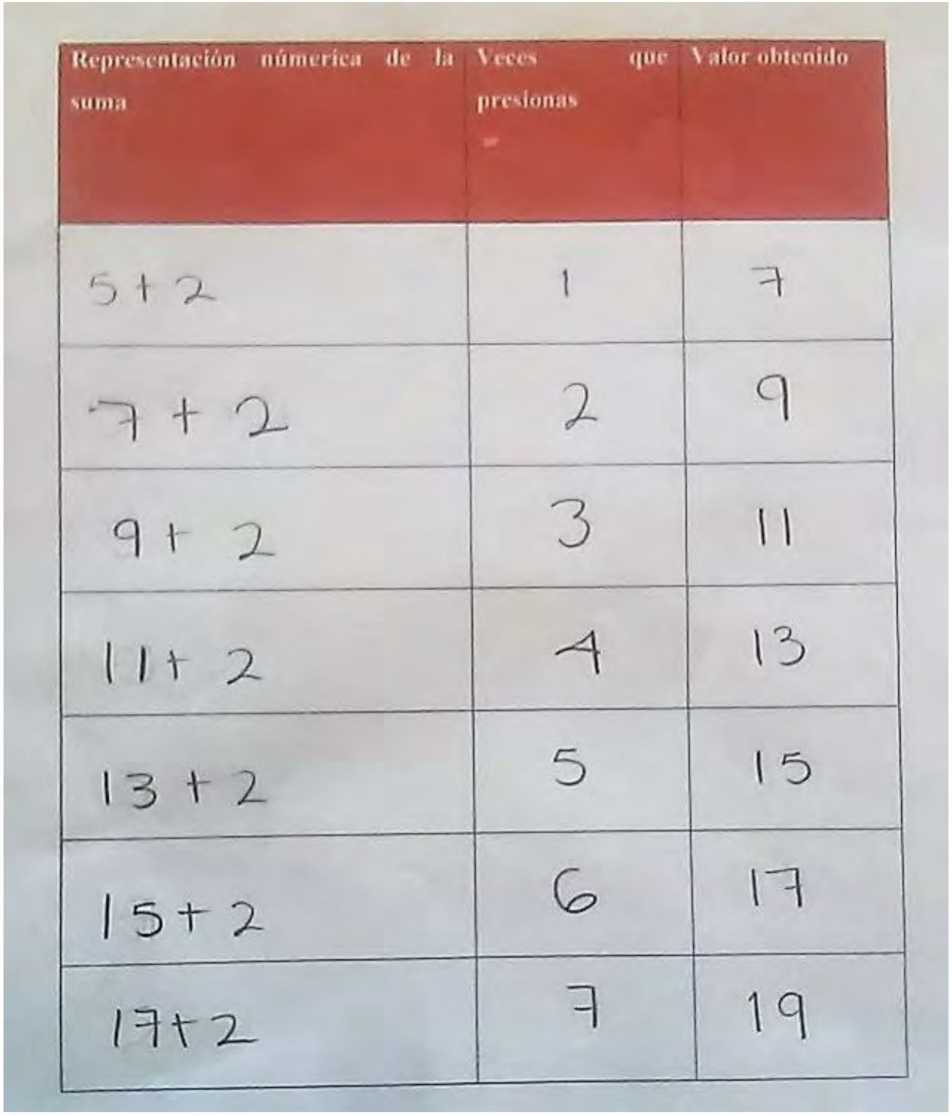
Para la elaboración de las rúbricas se adoptaron diferentes elementos del marco conceptual. Uno de ellos, es la postura donde se concibe al aprendizaje, como un proceso tanto individual como social. Otro elemento, es el aprendizaje con entendimiento donde la comprensión matemática requiere desarrollar ciclos sucesivos de acción, observación, formulación de conjeturas y justificación de resultados (Barrera y Reyes, 2016).

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

Este capítulo tiene la finalidad de determinar, si actividades que involucran identificación y generalización de patrones lineales apoyaron la construcción de significado para ecuaciones lineales de la forma $ax + b = c$ y un entendimiento del proceso de solución de la ecuación. Cada una de las tres actividades propuestas se analiza de forma individual, centrando la atención en cómo los estudiantes le dieron sentido a los símbolos algebraicos y a la solución de una ecuación lineal. Finalmente se realiza un análisis global de cómo estas tareas contribuyeron al entendimiento de las ecuaciones lineales.

4.1 Análisis de patrones que surgen de realizar operaciones aritméticas con una calculadora básica

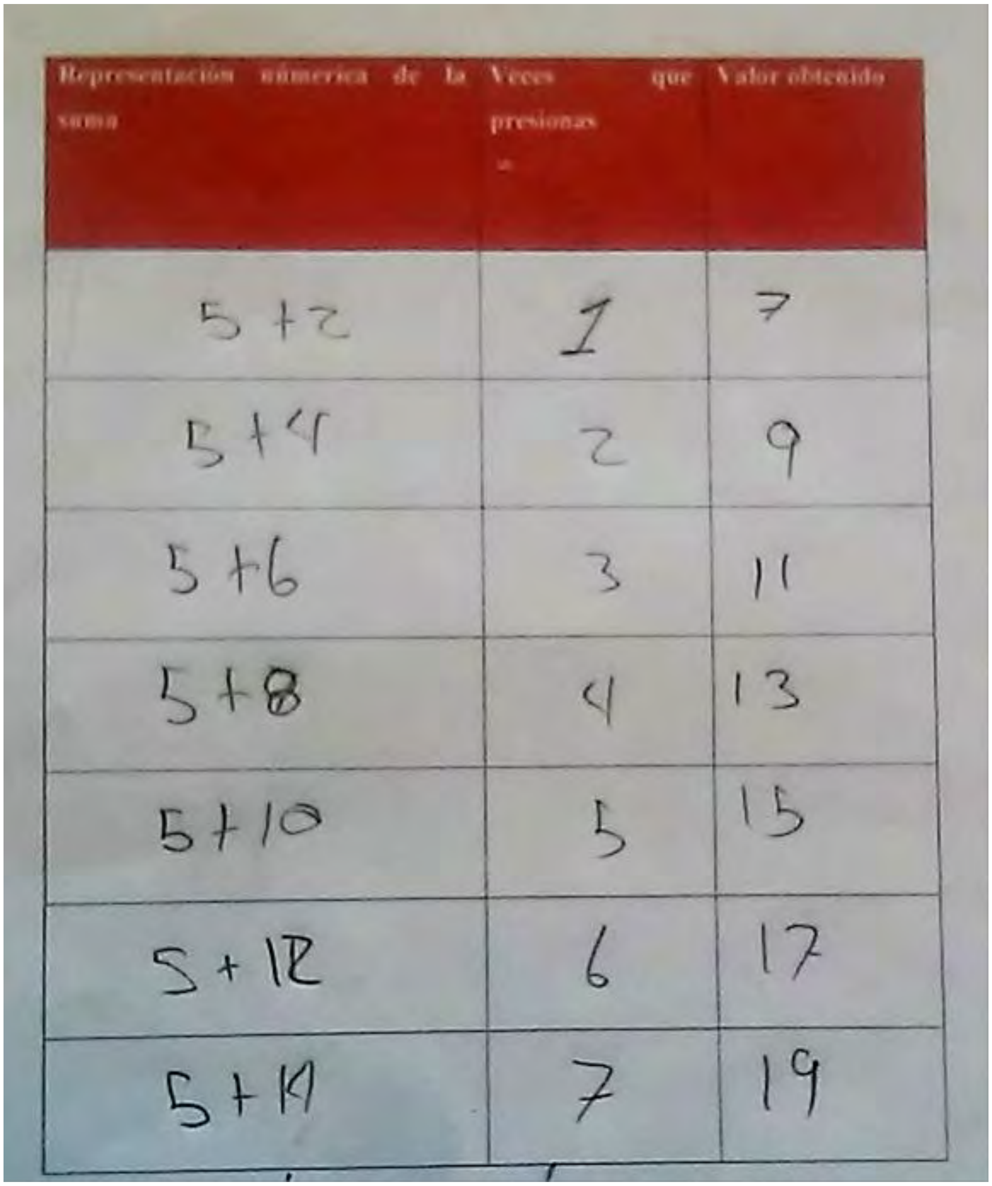
La primera actividad se llevó a cabo empleando una calculadora básica, se propuso una suma "5 + 2" y que los estudiantes teclearan el símbolo "=" en reiteradas ocasiones. En las hojas de trabajo realizaron las anotaciones pertinentes. Se observaron tres estrategias diferentes para representar el resultado que mostraría la calculadora a partir del número de veces que se presiona la tecla "=". En un equipo, representaron las operaciones de la siguiente manera: iniciaron con la suma propuesta "5 + 2", en el siguiente renglón al resultado del paso anterior le sumaron dos, es decir "7+2". Posteriormente usaron este mismo procedimiento para los siguientes renglones registrando las operaciones "9+2", "11+2", hasta completar la tabla. Esta forma de representar la información únicamente permitió visualizar el aumento constante de dos, pero no ayudó a los estudiantes a observar más relaciones entre los datos (Figura 3).



Representación númerica de la suma	Veces que presionas	Valor obtenido
5+2	1	7
7+2	2	9
9+2	3	11
11+2	4	13
13+2	5	15
15+2	6	17
17+2	7	19

Figura 3. Representación con dos sumandos enfocándose en el aumento constante de dos

Una segunda estrategia para representar la información consistió en colocar fijo el sumando inicial (cinco) y en cada uno de los siguientes renglones aumentar dos unidades al segundo sumando del renglón previo (Figura 4). En esta forma de representar la información la secuencia de segundos sumandos es 2,4,6,8,10,12. En este caso es relativamente fácil obtener cada elemento de la secuencia al multiplicar el número de veces que se presiona la tecla “=” por dos.



Representación númerica de la suma	Veces que presionas =	Valor obtenido
5 + 2	1	7
5 + 4	2	9
5 + 6	3	11
5 + 8	4	13
5 + 10	5	15
5 + 12	6	17
5 + 14	7	19

Figura 4. Representación de dos sumandos, manteniendo invariante al cinco

La tercera estrategia, empleada por cuatro equipos, es parecida a la segunda estrategia, sólo que en este caso escribieron explícitamente la cantidad de veces que aparece el dos como sumando (Figura 5). En esta forma de representar la información, los estudiantes podrían identificar que la cantidad de “2” que aparecen como sumandos es igual al número de veces que se presionó la tecla “=”.

Representación númerica de la suma	Veces que presionas =	Valor obtenido
5 + 2	1	7
5+2+2	2	9
5+2+2+2	3	11
5+2+2+2+2	4	13
5+2+2+2+2+2	5	15
5+2+2+2+2+2+2	6	17
5+2+2+2+2+2+2+2	7	19

Figura 5. Representación con sumandos desagregados “+2” de acuerdo a las veces tecleadas “=”

Una vez que se completaron las tablas, el instructor solicitó identificar algunas relaciones entre los datos. Para apoyar el avance de los estudiantes, el instructor preguntó: ¿Qué pasaría si presiono veinte veces la tecla igual? Al no haber una respuesta correcta, el instructor buscó centrar la atención en la historia de los datos para que los estudiantes observaran las regularidades, y fueran construyendo la expresión general. Se inició preguntando acerca de los primeros valores para que revisaran lo que habían escrito en las tablas. Al preguntarles nuevamente, ¿si se presiona veinte veces la tecla igual [cuál es el resultado]? Un estudiante contestó, noventa, el instructor trató de que reflexionara su respuesta preguntando ¿Cuánto? Otro estudiante contestó en forma correcta, cuarenta y cinco. Los resultados correctos fueron anotados en el pizarrón, para posteriormente, dar un tiempo a los equipos de justificar sus conjeturas sobre la regla que permite generalizar la actividad propuesta con la calculadora.

El instructor preguntó ¿[cuál es el resultado] si lo presiono treinta veces? Un estudiante contestó cincuenta y cinco, y otro contestó que treinta y uno, el instructor comentó: si ya me pudieron decir que veinte fueron cuarenta y cinco, con treinta veces, ¿cuánto es? A lo que un estudiante diferente a los que habían participado contestó que sesenta y cinco.

Profesor: ¿Qué pasaría si yo presiono veinte veces la tecla igual? ¿Qué resultado nos daría?

Joss: Un chorro…

Profesor: Por ejemplo, si presionaron una vez, una vez el igual, ¿cuánto les dio?

Estudiantes: Siete

Profesor: ¿Si lo presionaron dos veces?

Estudiantes: Nueve

Profesor: ¿Si lo presiono dos veces, que resultado da?

María G: Nueve

Profesor: Nueve, ¿Si lo presiono tres veces?

Estudiantes: Once

Profesor: Once… ¿cuatro?

Estudiantes: Trece

Profesor: ¿Si yo lo presiono veinte veces?

Joss: Noventa

Profesor: ¿Cuánto?

Caballero: Cuarenta y cinco

Profesor: ¿Si lo presiono treinta veces?

Joss: Cincuenta y cinco

Profesor: ¿Cuánto?

Joss: Cincuenta y cinco

Leonel: Treinta y uno

Profesor: A ver…

Joss: Como treinta y uno

Profesor: Si ya me pudieron decir que veinte fueron cuarenta y cinco, con treinta veces que lo presiono, ¿Cuánto es? Esto es presionando el signo de igual

Caballero: Sesenta y cinco

Después de haber explorado algunos casos particulares (posición 20 y 30). Se dio oportunidad de que los estudiantes interactuaran en sus equipos para encontrar la expresión que generalizaba el comportamiento de las cantidades que registraron en la tabla y en exposición plenaria comunicaron sus conjeturas.

Tabla 3. Diversas maneras de simbolizar el patrón de la calculadora.

Equipo	Tabla utilizada	Expresión general	Explicación
1	Figura 5	$2x + 5$	"Nosotros encontramos así la expresión que resuelve el problema, sería el número de veces que presionas igual lo representamos con la *x*, lo multiplicamos por dos y le sumas cinco"
2	Figura 4	$a + b = c^2$	"Para mí *a* vale cinco, *b* vale dos por el número de veces que se presiona igual y c^2 es un valor que va a ir cambiando"
3	Figura 5	$5 + 2x$	"Es casi igual que esta (la primera expresión) nada más que lo puse así, lo puse al revés dos equis y cinco"

La forma en que los equipos representaron la información, contribuyó a que algunos de ellos identificaran más fácilmente la relación entre el número de veces que presiona la tecla igual y el resultado que muestra la calculadora. Para encontrar la expresión general, los equipos que representaron la información como en tabla uno (Figura 3), no lograron llegar a la expresión general, por lo que se puede afirmar, que dependiendo la forma de representar la información permite a los estudiantes visualizar de forma más explícita un patrón de comportamiento.

4.1.1 Comprensión de la solución de una ecuación lineal

Una vez que se encontró la expresión general, la tarea se orientó a que los estudiantes dieran sentido a ecuaciones lineales del tipo $ax + b = c$. Se pidió a los estudiantes determinar el número de veces que es necesario presionar la tecla igual para obtener un resultado. Por ejemplo, se les propusieron los siguientes resultados;15 y 35. Los estudiantes resolvieron el problema mentalmente. En el caso del resultado 15, comentaron que presionaron cinco veces la tecla "=" y que la presionaron quince veces para obtener 35 como resultado. Se observó, que una estrategia utilizada para estos casos sencillos fue sustituir valores en la expresión general hasta obtener el resultado requerido.

Profesor: Si yo les digo treinta y cinco

Joss: Quince

Profesor: ¿Quince?

Estudiantes: Quince

Viviana: No

Joss: Sí, *porque sería quince por dos son treinta, más cinco, treinta y cinco*

A medida que se les proponían resultados mayores, tuvieron algunas dificultades para encontrar la respuesta. Cuando el instructor preguntó, si el resultado que se muestra en la calculadora es noventa y siete, ¿cuántas veces se presionó el igual? **Joss** contestó cuarenta y seis veces, y explicó cómo encontró la solución. Mediante la explicación se identificó, que el estudiante dio sentido al símbolo para definirlo como incógnita y realizó implícitamente un proceso de transposición de términos para encontrar su valor.

Profesor: Si yo les digo […] noventa y siete, podrán decirme ¿Cuántas veces se presionó el igual?

María G: Espere, noventa y siete menos cinco, (silencio) cuarenta y seis veces no

Profesor: ¿Cuántas?

María G: Cuarenta y seis veces

Profesor: Cuarenta y seis veces, ¿les puede explicar a sus compañeros que hizo?

Profesor: A ver, escuchamos a su compañera por favor

María G: *Al resultado, que fue noventa y siete, le resté cinco y lo dividí entre dos*

El instructor propuso otros casos particulares con la finalidad de promover la participación de otros estudiantes, ya que solamente Joss y María G respondían a las preguntas. El análisis de estos casos particulares también se orientó a que los estudiantes reflexionaran sobre las acciones que realizaban al resolver el problema. Cuando el instructor preguntó si el resultado obtenido en la calculadora es ciento treinta y cinco, ¿cuántas veces presionan el igual? **Mario** relacionó los elementos de la expresión general del patrón con las acciones que realizó para resolver el problema, a partir de cuestionamientos realizados por el instructor.

Profesor: Entonces, esto que estamos aquí viendo, cinco más dos equis ¿Va a ser igual a qué? ¿A un resultado no?

María G: Si

Profesor: Por ejemplo, ciento treinta y cinco, ustedes pueden saber el valor de esta equis. ¿Cómo lo obtienen? ¿Cómo dijo su compañera? ¿Qué hicieron primero?

Mario: *Pasar el cinco de forma negativa*

María G: *Y al resultado de esa diferencia se divide entre dos*

Los estudiantes de cuatro equipos, quienes eran los más participativos para la realización de la tarea, lograron comprender este proceso de solución, porque, al encontrar el valor de la incógnita, sustituían éste en la expresión general para verificar que el total de elementos de la figura era el correcto. Lo anterior aporta evidencia que estos estudiantes dieron sentido al proceso de solución para determinar el valor de la incógnita.

4.2 Análisis de patrones en una competencia "construyendo la torre más alta"

La segunda actividad se realizó en dos fases. En la primera, se les mostró una secuencia de figuras (figura 6) y se les pidió que dibujaran las posiciones cinco y seis con la finalidad de observar el patrón involucrado en la secuencia, el cual sería de utilidad en la siguiente fase. En la segunda fase, los estudiantes participaron en una competencia que consistió en la formación de torres con latas de refresco, basado en el patrón observado en la fase uno. Se identificaron las problemáticas que tuvieron algunos estudiantes para darle sentido a los símbolos, dificultando el entendimiento para solucionar ecuaciones.

Figura 6. Secuencia de figuras para obtención de patrón del juego

Primera fase. En primer lugar, se les mostró a los estudiantes la secuencia (Figura 6) y se les pidió que dibujaran las representaciones correspondientes a las posiciones cinco y seis. De los ocho equipos que se integraron, sólo seis resolvieron de manera correcta el problema, un equipo no realizó la actividad y otro equipo lo resolvió de forma errónea, del cual, no se logró identificar el razonamiento que los estudiantes utilizaron en la solución (Figura 7) y no se les preguntó, porque una vez entregadas las respuestas se pasó inmediatamente a la realización de la segunda fase de la tarea.

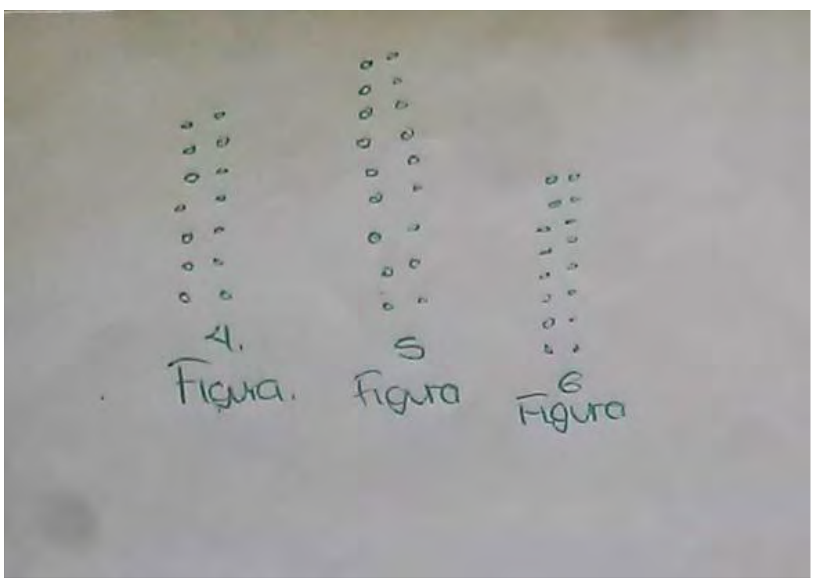


Figura 7. Falta de asociación entre posición y número de elementos.

Dos equipos tuvieron que dibujar todas las posiciones desde el inicio y tres equipos dibujaron específicamente las posiciones solicitadas. Se observó, que seguir una estrategia de representar las posiciones anteriores a las solicitadas apoyó el desarrollo de una idea más clara de la regla recursiva. La cual permitía obtener la posición siguiente a partir de la anterior (los estudiantes observaron que dada una posición podían construir la figura de la posición siguiente agregando un nuevo renglón).

Segunda fase. Se llevó a cabo un juego "construyendo la torre más alta", el juego consistió en tomar latas de refresco para construir una torre de acuerdo al patrón de comportamiento de la fase uno. Dos integrantes de cada equipo participaron por turno, debían tomar las latas exactas para construir la torre de la posición solicitada, ya que no podían regresar a tomar más, ni debían sobrarles latas. El juego se realizó en cinco rondas, observándose los siguientes resultados: En la primera y segunda ronda todos los equipos lograron construir sus torres de forma correcta. En la tercera ronda, se observó que algunos equipos tomaban el mismo número de latas que otros, y por ello se decidió cambiar la dinámica y conformar dos subgrupos de manera que primero compitieran tres equipos entre sí y luego los dos restantes. En la primera competencia de tres equipos, uno de ellos (integrado por Edwin y Jan) no llevó el número adecuado de latas para construir la torre de la posición seis, y solamente llevaron latas suficientes para representar la posición tres, es aquí, donde se observó que no hubo una asociación con la regla que seguía la secuencia. Cuando pasaron los otros dos equipos, construyeron la posición cuatro en forma correcta. En la cuarta y quinta ronda todos los equipos construyeron en forma correcta sus torres llevando el número adecuado de latas.

Ronda	Equipo que construyó en forma incorrecta la torre	Descripción del error
3	3	No llevó el número adecuado de latas para construir su torre, ya que tenían que representar la posición seis, y solamente llevaron latas suficientes para representar la posición tres

El equipo se equivocó al tomar un número de latas menor al que tenían que representar, pero llevaron seis latas, por lo que conjeturamos que estaban pensando en la posición, pero no recordaron el patrón, para tomar las latas necesarias. Cuándo se llegó a la etapa de reflexión y análisis se les preguntó ¿cuál es la expresión que representa la secuencia mostrada? Las respuestas que dieron los estudiantes, se muestran a continuación.

Tabla 4. Diversas maneras de simbolizar el patrón de la torre de latas.

Expresión encontrada	Significado
x.y	*x* es el número de la figura, y la literal *y* es igual a dos. (Algunos estudiantes emplean símbolos sólo por tratarse de un tema de álgebra, sin darle sentido)
***x*.2**	En donde *x* es el número de la figura y se multiplica por dos.
2*n*	Es dos veces el número de la figura en donde *n* representa el número de la figura.

Después de haber observado las expresiones algebraicas propuestas por los otros dos equipos, el primer equipo se dio cuenta de que podía haber puesto el dos en lugar de la literal *y*. En las expresiones encontradas se observó, que los estudiantes fueron capaces de asignar una literal al número de la figura y expresar las operaciones que debían realizar con esta literal (multiplicar por dos) para obtener la cantidad de latas en la posición dada.

4.2.1 Comprensión de la solución de una ecuación lineal

Una vez encontrada la expresión general del patrón, se les preguntó a los estudiantes si conociendo el número total de latas en la torre, ellos podrían conocer la posición de la torre en la secuencia correspondiente. Algunos de los casos que se abordaron fueron 30 latas, 42 latas, en donde casi de forma inmediata respondieron en forma correcta que correspondían a la posición 15 y 21, respectivamente. Cuando se les cuestionó acerca de la posición que ocupaba una torre con 280 latas, después de unos segundos contestaron que era la posición

140, al preguntarles sobre cómo obtuvieron el resultado, *los estudiantes comentaron que, dividiéndolo entre dos*, aquí se observó que dieron sentido al símbolo para encontrar el valor de la incógnita realizando una transposición de términos.

4.3 Análisis de patrones que surgen al proponer un problema de ahorro en un banco

La tercera actividad se realizó, en dos fases, en la primera se mostró una secuencia en el pizarrón (Figura 8) donde se pidió a los estudiantes que imaginaran la siguiente situación. Al invertir un peso en un banco, este nos regresa dos pesos cada semana, así sucesivamente. Después debían encontrar la expresión que generalizaba el comportamiento de ahorro. En la segunda fase, se buscó que encontraran el número de la semana a partir de diversas cantidades ahorradas para después explicar el procedimiento de solución.

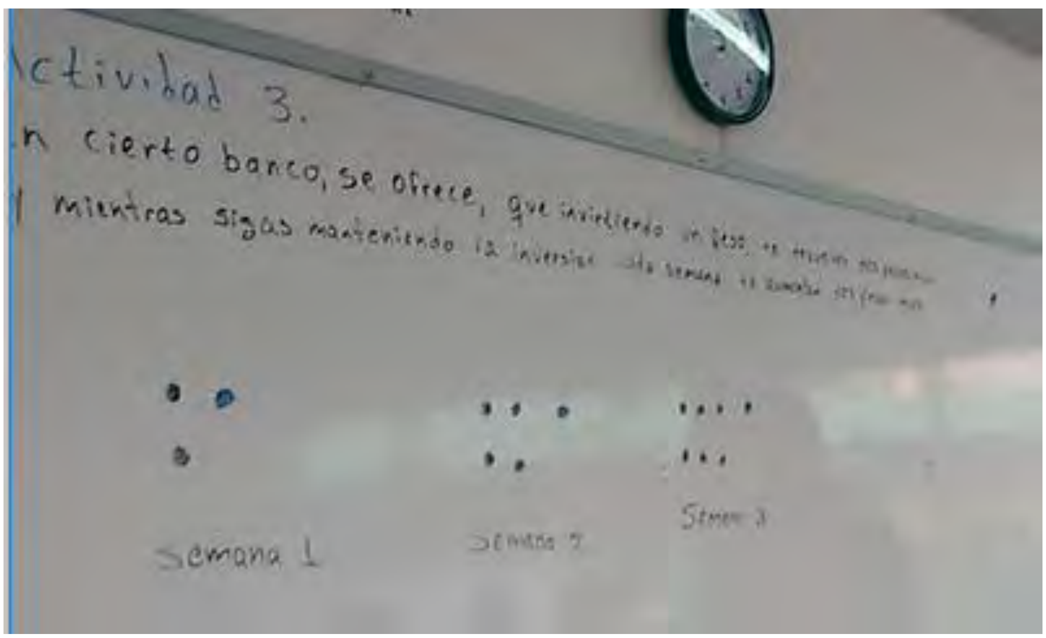


Figura 8. Secuencia del problema de ahorro mostrada en pizarrón

Primera fase. Se solicitó que dibujaran la posición cinco y la posición diez, después de haber mostrado en el pizarrón las primeras tres posiciones. Ocho estudiantes no realizaron el dibujo de las posiciones solicitadas, treinta y dos estudiantes realizaron la actividad, de los cuales cinco estudiantes no dibujaron en forma correcta la figura de la posición solicitada. De los estudiantes que colocaron los elementos necesarios para cada posición se observaron diversas estrategias.

Tabla 5. Estrategias para abordar la tarea de ahorro en el banco.

Nombre de la estrategia	Descripción	No. de Estudiantes
Todo el camino	Los estudiantes dibujaron cada una de las posiciones hasta llegar a las solicitadas	3
De horizontal a vertical	Los estudiantes cambiaron la imagen de la secuencia para colocar verticalmente dos columnas representando el aumento constante de dos en cada renglón y a un lado el peso inicial.	4
Completando a posición 5	Elaboraron las figuras 4 y 5 siguiendo el patrón de comportamiento mostrado en el pizarrón.	7
Cambiando renglones	Colocaron el número adecuado de elementos en la posición 5 y 10 cambiando el orden de los renglones es decir la secuencia que le tocaría al superior, la colocó en el inferior y la del inferior la puso en el superior	1
Cumpliendo el objetivo	Colocaron en forma correcta el número de elementos de acuerdo a la posición solicitada	6
Sin sentido	Completaron el número de elementos que le corresponden a la posición, pero no hay ninguna relación con la secuencia mostrada en el pizarrón	3

Después de haber dado unos minutos de reflexión, se preguntó si había una forma de expresar la secuencia mostrada, un estudiante (Caballero) contesto, que $2n + 1$, en donde n, representa el número de semanas, el coeficiente 2, son los dos pesos que cada semana aumenta y el uno, es el peso de inversión inicial (Figura 9). Aquí se observa, que el estudiante dio sentido a los símbolos, ya que relacionó diversos elementos de la expresión algebraica con los elementos del problema (semanas, inversión, etc.). El instructor preguntó, si alguien tenía otra expresión que permitiera generalizar el patrón de la secuencia, pero los estudiantes comentaron que la que había descrito su compañero era la apropiada.

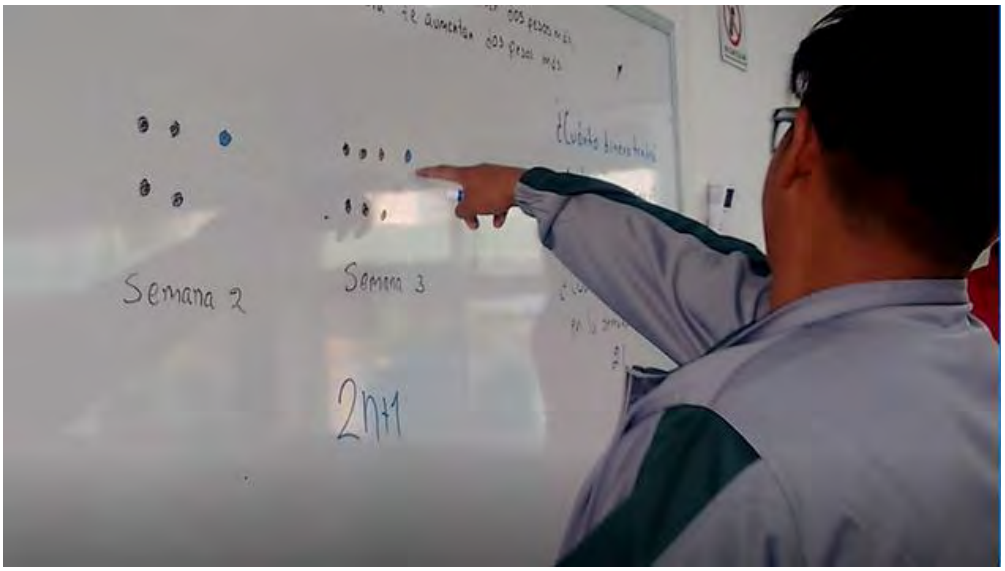


Figura 9. Explicación de la expresión algebraica que permite generalizar el patrón

4.3.1 Comprensión de la solución de una ecuación lineal en el problema del banco

Una vez que se encontró la expresión que generaliza el patrón mostrado en la secuencia, el instructor preguntó sobre el número de semanas necesarias para acumular cierto monto de dinero. Comenzó con algunos valores, por ejemplo $121, en donde los alumnos contestaron que debían transcurrir 60 semanas. Cuando el instructor preguntó por el método empleado, tres estudiantes contestaron que le *habían quitado uno al resultado y después dividieron entre dos*, aquí se observa que siguen realizando una transposición de términos para encontrar el valor de la incógnita.

Al preguntar si se tienen $157, un estudiante trató de resolver en forma instantánea diciendo que eran 73, algunos de sus compañeros dijeron que no era correcto y que tenían que haber pasado 78 semanas, empleando el procedimiento anteriormente descrito. El siguiente valor fue \$317, después de unos instantes Isaí, contestó que 158 semanas, aplicando la estrategia de restarle uno y dividirlo entre dos.

El instructor solicitó, la integración de equipos de trabajo para realizar el llenado de un cuadro que contenía en una columna el dinero ahorrado y en la otra el número de semanas que tuvieron que pasar para acumular ese dinero, se les pidió explicar la forma en cómo encontraron sus valores .Durante el llenado del cuadro, los estudiantes intercambiaron ideas y se apoyaron para encontrar los valores.

> **Tamara:** Oye Aldo, ¿Cómo se hacía aquí?
> **Aldo:** Pues supongo, que como nos da la fórmula, que era $2n + 1$, ahora va a ser al revés, veinticinco se le restaría uno, serían veinticuatro, se divide sobre dos y serían doce
> **Tamara:** Y eso, ¿Sería para todos los valores?
> **Aldo:** Si

Para verificar si los resultados de la actividad eran correctos, el instructor preguntó a algunos equipos cómo resolvieron el problema. En un equipo tuvieron un desorden en la explicación confundiendo un término al cuadrado con un coeficiente dos, ya que mencionaban al principio de su explicación "desde la semana uno hicimos $x^2 + 1$, porqué es el doble de un número más uno".

> **Profesor:** Si ahorramos \$25 ¿Cuántas semanas pasaron?
> **Joan:** Doce
> **Profesor:** ¿Cómo lo resolvieron?
> **Joan:** Con la formula, pero la inversa
> **Profesor:** ¿Qué hicieron con esa fórmula?
> **Joan:** Lo planteamos desde la semana uno, hicimos $x^2 + 1$, porqué es el doble de un número más uno, uno por dos más uno [haciendo referencia a la posición uno del problema] en la semana dos fue el doble que serían cuatro, le sumamos uno, así hasta la semana doce, fue 2 $x^2 + 1$
> **Profesor:** Fueron 12 semanas. Habría que tener cuidado, que significa si es al cuadrado o es el doble, hay que verificarlo, revisen la sucesión.

Para el segundo valor de la tabla que se tenían ahorrados $57, al preguntarles ¿cuántas semanas tenían que haber pasado? Los estudiantes contestaron que 28. Para el tercer valor que era $135, el profesor le pregunto al equipo "2", ellos contestaron que 67, el profesor solicitó que explicaran el por qué de su resultado, comentaron que, a 135 se le resta uno, serían 134, se divide entre dos y da 67, el profesor les cuestionó ¿por qué le tendrían que restar ese uno? Aldo respondió "que como ahora se está buscando la semana y en la formula anterior el ahorro total, entonces se le resta uno, estaba sumando ahora se resta y se divide" y hace un comentario respecto a unas leyes, suma pasa a resta, multiplicar – división. Se observa que ocupa la transposición de términos para encontrar el valor solicitado y trata de asociar algunos conocimientos previos sobre la transposición para encontrar el valor de la incógnita que representa el número de semanas.

> **Profesor:** ¿Cuántas semanas pasarían para ahorrar $135?
> **Tamara:** Sesenta y siete
> **Profesor:** ¿Por qué Aldo?
> **Tamara:** Porque a 135 se le resto uno, serían 134, se divide entre dos y da 67 [se adelantó a contestar]
> **Profesor:** ¿Por qué le tendríamos que restar ese uno?
> **Aldo:** Porque, bueno, en la fórmula como ahora estamos buscando la semana, en la fórmula anterior se estaba buscando el ahorro total, entonces se le resta uno, estaba sumando ahora se resta y se divide, es como las leyes, que suma pasa resta, multiplicar – división.

Para el cuarto valor que era $141 y el último valor $297, se les preguntó a dos equipos diferentes sobre las semanas que pasaron para obtener ese ahorro. Los dos equipos contestaron en forma correcta que fueron 70 semanas y 148 semanas respectivamente, al preguntarles sobre la forma de solución contestaron de forma similar comentando, *que lo único que hicieron fue invertir lo de la primera fórmula que se dio y fue restarle el peso y después dividirlo entre dos y así salió*.

> **Profesor:** Y el último 297 [refiriéndose a cuántas semanas pasaron para ahorrar $297]
> **Rebeca:** A nosotros nos salió 148
> **Profesor:** 148, ¿Qué hicieron?

Rebeca: Lo único que hicimos fue invertir lo de la primera fórmula que se dio y fue restarle el peso y después dividirlo entre dos y así salió.

Otra explicación que realizó un estudiante en su hoja de trabajo fue, que definió a la letra N como el número de semanas y a x como el ahorro total de la expresión: $2(N) + 1 = x$, *"la manera de resolver es restándole a x uno y lo que salga de este dividirlo entre dos y ese resultado obtenido es la semana de ahorro (N)"* (Figura 10). Aquí se observó que le dio sentido a los símbolos asociando la expresión general con un resultado cualquiera, empleó la transposición de términos para encontrar el número de semanas dado un resultado.

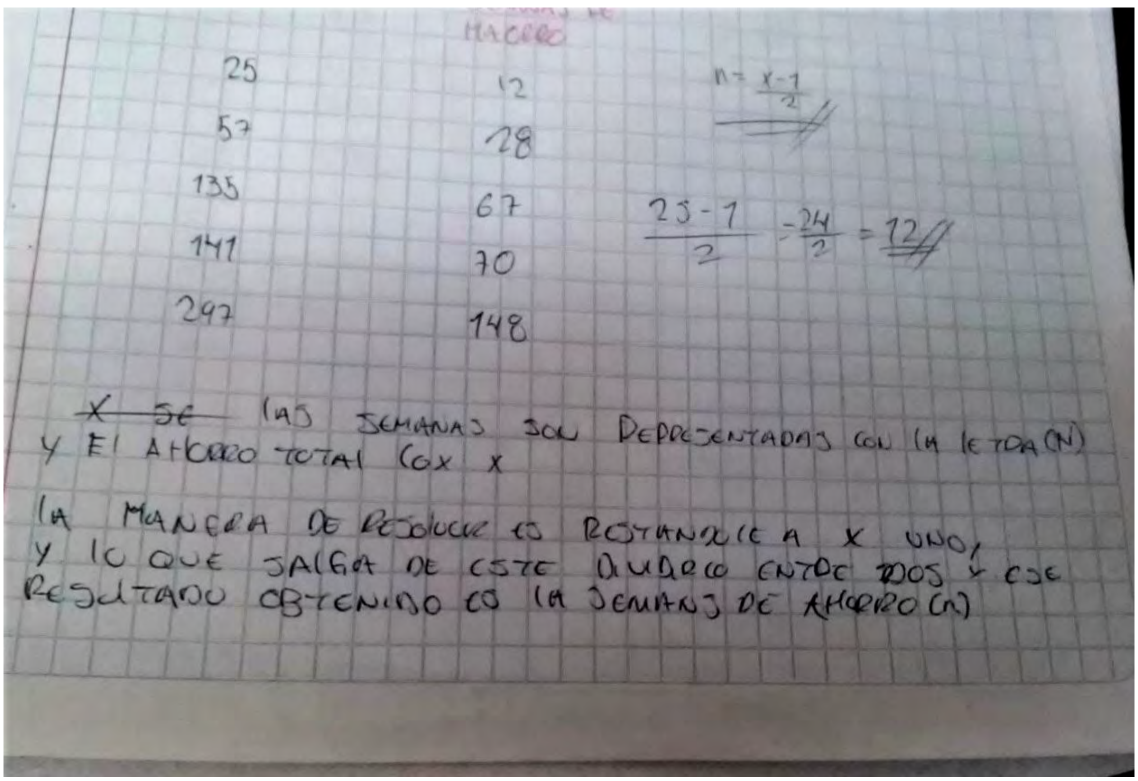


Figura 10. Explicación del proceso de solución para llenado de tabla

Solamente, 17 de los 32 estudiantes, expresaron por escrito la ruta de solución empleando dos formas, en una sólo redactaron las ideas, expresada en el procedimiento verbal (Figura 11), mientras que el resto, relacionaron estas ideas con manipulaciones simbólicas para encontrar el número de semanas.

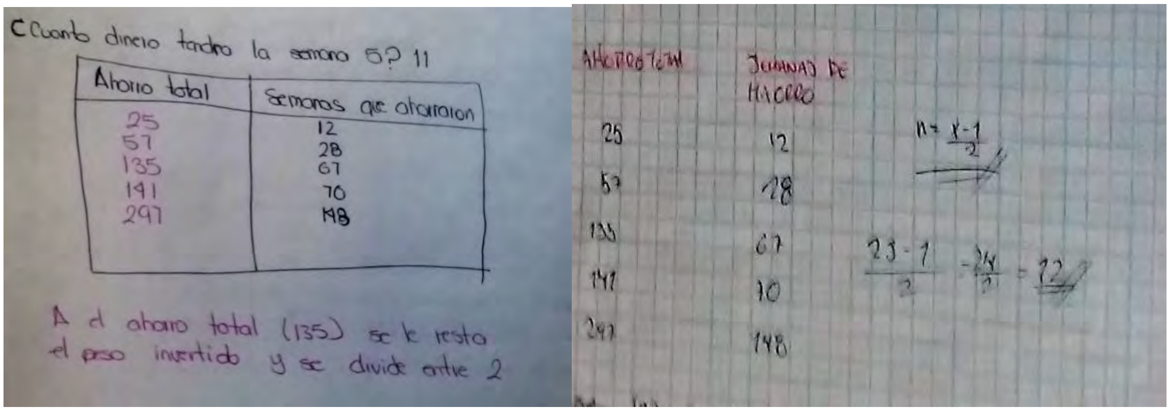


Figura 11. Expresión escrita del procedimiento verbal y expresión simbólica de la solución

4.4 Comprensión de una ecuación lineal *ax* + *b* = *c* haciendo uso de patrones

Al observar el desarrollo de las actividades y cómo los estudiantes encontraron las expresiones que generalizaban las secuencias figurales propuestas, en algunos equipos, se observó que para validar sus conjeturas sustituían valores para comprobar el patrón. En el análisis de las tres tareas propuestas con patrones para la solución de una ecuación lineal del tipo $ax + b = c$, se observó, que algunos estudiantes dieron sentido a la incógnita para encontrar la solución en cada actividad realizando una transposición de términos, como se muestra en la Tabla 6.

Los estudiantes identificaron que realizando "operaciones contrarias" podían encontrar el valor de la incógnita. En las explicaciones proporcionadas, se muestra el sentido que dan a los símbolos para poder llegar a la solución, así también, el uso de secuencias figurales que emplean un comportamiento creciente facilitó que los estudiantes realizaran una comprensión sobre el procedimiento de solución en cada actividad.

Un elemento importante para que los estudiantes llegaran a la solución, fue la interacción y la comunicación. Al manipular la calculadora o en la construcción de torres con latas de refresco, mostraron interés en su mayoría por realizar la actividad. Las discusiones que se tuvieron al interior de los equipos para encontrar la expresión general o un valor determinado ayudaron a los estudiantes para confirmar sus conjeturas y validar sus procedimientos.

Tabla 6. Formas de comprender el proceso de solución de una ecuación lineal.

Actividad	Explicación de la solución
Suma con calculadora	*Pasar el cinco de forma negativa y al resultado de esa diferencia se divide entre dos*
Construyendo la torre más alta	*Los estudiantes comentaron que, dividiéndolo entre dos*
Problema del banco	*a) El procedimiento que utilizamos fue al monto de pesos le restamos uno y después lo dividimos entre dos* *b) En la fórmula como ahora estamos buscando la semana, en la formula anterior se estaba buscando el ahorro total, entonces se le resta uno, estaba sumando ahora se resta y se divide, es como las leyes, que suma pasa resta, multiplicar – división* *c) Lo único que hicimos fue invertir lo de la primera fórmula que se dio y fue restarle el peso y después dividirlo entre dos y así salió* *d) La manera de resolver es restándole a x uno y lo que salga de este dividirlo entre dos y ese resultado obtenido es la semana de ahorro (N)*

CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este capítulo se contrastan los resultados de esta tesis con los que se han obtenido en investigaciones previas. Posteriormente, se lleva a cabo una reflexión de los aspectos metodológicos que pudieron realizarse de una mejor manera, con la finalidad de orientar futuros trabajos en esta misma línea de investigación. Finalmente se identifica cómo la realización de esta investigación contribuyó en mi formación profesional como docente.

En los equipos de trabajo, algunos estudiantes lograron expresar verbalmente los patrones que generalizaban lo que observaron en las secuencias y también lograron expresarlos con símbolos alfanuméricos. Es importante mencionar que los estudiantes asignaron significado a esos símbolos con base en el contexto de las tareas, no todos los estudiantes fueron capaces de dar sentido a los símbolos en la generalización de las expresiones, ya que únicamente centraron la atención en los resultados y no en las operaciones. Entre aquellos estudiantes que si expresaron la generalidad de forma simbólica hubo algunos que sustituyeron valores particulares para obtener certeza de la validez de sus resultados. Se observó que estos últimos estudiantes dieron sentido a los símbolos, basado en el contexto de las tareas, y este significado, fue de utilidad para que expresaran verbalmente el proceso de solución de las ecuaciones correspondientes, a través del método que ellos denominaron *operaciones inversas*.

En la realización de las actividades se identificó, que cuando los estudiantes tenían que encontrar la expresión que permitió generalizar la secuencia, le dieron significado al símbolo utilizado, ya sea, n o x para que pudiera tomar cualquier valor, para ellos representaba el número de la posición [término variable], lo que les permitió obtener la expresión general. Pero, cuando se les solicitó que obtuvieran el valor específico para ese símbolo, dándoles un resultado, los estudiantes lo convirtieron en una incógnita y realizaron la manipulación de símbolos para encontrar el valor. Aquí se observa, que le dan un significado muy diferente al símbolo y emplean ese significado para resolver la ecuación y encontrar el valor específico. Respecto al tránsito en ese procedimiento verbal y las manipulaciones simbólicas respectivas hubo diversas dificultades, algunas de las cuales se relacionan con uso del igual como una relación de equivalencia.

5.1 Respuesta a la pregunta de investigación

La pregunta que orientó el presente trabajo es: ¿De qué manera tareas que involucran generalización de patrones en contextos de secuencias figurales y de operaciones aritméticas con una calculadora básica, apoyan que estudiantes de bachillerato den sentido a ecuaciones de la forma $ax + b = c$, así como a la solución y al proceso para obtenerla? En cada una de las actividades propuestas, los estudiantes interactuaron en equipos de trabajo para proponer conjeturas, realizaron casos particulares y comentaron sus resultados participando, la mayoría de ellos, en forma activa. Algunos estudiantes encontraron el valor solicitado de la incógnita cuando se preguntó sobre algún resultado específico, asociaban la expresión general con el resultado para obtener una ecuación de la forma $ax + b = c$. Dieron sentido al símbolo para definirlo como incógnita y realizaron un proceso de transposición de términos para encontrar la solución mostrando un entendimiento al realizar las conexiones necesarias para llevar a cabo dicho procedimiento.

En la tercera tarea, que consistió en determinar el comportamiento de ahorro realizado en un banco, los alumnos lograron darle sentido a los símbolos interpretando el número de semanas y el $1 invertido con la expresión y con la forma de resolver la ecuación, realizaron conexiones con los conocimientos adquiridos en cursos previos. Se observó que ellos comprenden, que para la obtención del valor de la incógnita deben de realizar una transposición de términos y de esta forma logran obtener el resultado. Es importante observar que las tareas propuestas presentan caracterizaciones de tres tipos; generacional, transformacional y global o de meta nivel propuestos por Kieran (citado en Godino, 2012).

Un resultado relevante de este trabajo es que los estudiantes quienes para encontrar la posición de la figura o el número de veces que presionan la tecla "igual" en la calculadora, utilizaron la estrategia de seleccionar la operación inversa. Hicieron un progreso hacia el entendimiento de la sintaxis algebraica para resolver ecuaciones lineales de la forma $ax + b = c$, resultado que es similar a lo obtenido por Filloy y Rojano (1989) al trabajar con modelos de balanzas. En este trabajo se observó, que los estudiantes lograron generalizar el proceso de solución al emplear "operaciones inversas", a diferencia de lo que propone Rojano (2010) en el "método de hacer lo mismo de ambos lados de la igualdad".

Contrario a otros trabajos que dicen que el álgebra es aritmética generalizada, decimos que no, porque los estudiantes tienen que centrar la atención en las operaciones aritméticas y no sólo en los resultados, como ocurre en la instrucción usual de la aritmética. El contexto es un apoyo para darle significado a los símbolos. Al realizar actividades con patrones, algunos estudiantes emplean métodos de inducción ingenua (adivinar el resultado), queriendo contestar en forma instantánea, así que el uso que hicieron estos estudiantes de las literales no necesariamente expresaba la generalización, de acuerdo con Radford (2010), estos procedimientos no conducen al álgebra, porque el álgebra no es adivinar, se trata más bien de usar signos para pensar una generalidad.

Alrededor de diecisiete estudiantes consiguieron comunicar, no solo en forma verbal sino también de manera simbólica las expresiones que generalizaban las secuencias, lograron expresarlas con símbolos y darles significado a esos símbolos, así como su manipulación en las ecuaciones para encontrar el valor específico. De acuerdo con la rúbrica propuesta, estos estudiantes alcanzaron un nivel avanzado. Se obtuvo evidencia de que las tareas permitieron a los estudiantes darles sentido a los símbolos, empleando el contexto de las tareas, con acciones de presionar tecla igual, con la cantidad de elementos en la figura, a diferencia de lo que ocurre en los salones de clase, donde el álgebra se reduce a la manipulación de símbolos que no representan algo más (Kaput, 1999). Una dificultad que mostraron los estudiantes para generalizar requiere centrar la atención en la comunicación y la estructura más que en los casos particulares.

Al igual que el estudio de Pino-Fan, et al., (2015), se observaron diferentes procedimientos que llevaron a cabo los estudiantes, como son, el reconocimiento de regularidades, el conteo, la generalización y la construcción de una expresión matemática para representar el enésimo término y/o para expresar la regularidad encontrada. Además se identificó cómo los estudiantes realizaron el proceso de solución de una ecuación lineal empleando operaciones inversas dando significado a los símbolos.

5.2 Trabajos a futuro

En este trabajo, las tareas se implementaron con estudiantes que ya tenían algunos conocimientos de álgebra. Se propone como una investigación posterior, aplicar estas mismas tareas con estudiantes que no tienen conocimientos de álgebra. Así también, el instructor omitió el preguntar el ¿por qué? de sus respuestas a algunos estudiantes, por lo que se sugiere estar indagando en forma constante, a todos los estudiantes, el ¿por qué? de sus respuestas

El diseño de tareas es una actividad que los profesores llevamos a cabo de manera permanente. Una tarea nunca está finalizada, ya que al implementarla podemos identificar, a partir del trabajo de los estudiantes, formas de mejorarla. Por otra parte, una tarea siempre requerirá de adaptaciones dependiendo de las características de los estudiantes con los cuales se busca implementar. Por ejemplo, realizar tareas previas donde los estudiantes representen las operaciones aritméticas de diferentes formas, ya que la mayoría de los estudiantes centra la atención en los resultados

El tener espacios físicos adecuados para la realización de la tarea es importante, por ejemplo, para la actividad de la construcción de las torres de latas se sugiere realizarla en un espacio abierto (patio), ya que en el salón de clases, es muy reducido el espacio para llevar a cabo la competencia. Al implementar nuevamente estas tareas, se sugiere que el instructor centre la atención de los estudiantes en las operaciones aritméticas, ya que esto les facilitará desarrollar procesos de generalización.

Cuando los estudiantes explicaron sus métodos de solución, y el instructor validó la solución con el primer expositor, los demás equipos ya no quisieron participar. Por lo anterior se propone, fomentar primero la participación de los estudiantes que no contestaron correctamente fomentando una cultura donde no se penalice el error, sino que se considere a este como una oportunidad para reflexionar y aprender. Se sugiere identificar contextos que sean apropiados para desarrollar tareas donde aparezcan ecuaciones lineales donde la incógnita se encuentre en ambos lados de la igualdad.

La implementación de las tareas no es algo sencillo, ya que no todos los estudiantes se interesaron por realizar las tareas, por lo que es importante diseñar mecanismos que fomenten el interés. Problemáticas de tipo social, familiar y emocional, no permiten que los estudiantes consideren que la escuela proporciona valor para su desarrollo personal y se ve como una obligación. Resulta relevante realizar trabajos donde se enfoque la atención en cómo los estudiantes relacionan las soluciones verbales con manipulaciones simbólicas, ya que nuestros resultados indican que no todos los estudiantes logran realizar en forma correcta el tránsito de una a otra. En esta misma línea, se debe prestar particular atención al uso del signo igual, ya que la mayoría de los estudiantes lo asocian con un operador unidireccional de resultado y no como un símbolo que expresa relaciones de equivalencia.

5.3 Reflexiones finales

La realización de este trabajo me sirvió para darme cuenta de que un aspecto central de la actividad docente consiste en conocer cómo piensan los estudiantes, al preguntarles el por qué de sus repuestas. Este conocimiento es de utilidad para orientarlos y ofrecerles sugerencias que les permitan avanzar en el proceso de solución de los problemas o cambiar de perspectiva si han elegido un camino equivocado. Anteriormente, para abordar la solución de ecuaciones con mis estudiantes utilizaba la interpretación de una ecuación como una balanza, sin embargo, me di cuenta que existen otras rutas y que es importante dar sentido a los símbolos y a las manipulaciones simbólicas con base en un contexto. Además, conocí que existen recursos tecnológicos (balanzas virtuales[1]) que pueden apoyar mi labor para que los estudiantes entiendan este tema.

Aunque en mis cursos promovía el trabajo en equipo, no le otorgaba la importancia requerida a la comunicación de ideas, ya que únicamente los estudiantes trabajan en grupos pequeños sin comunicar sus resultados. Al aplicar este trabajo me di cuenta de que la comunicación es parte fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático. Contextualizar las tareas es importante, porque a la mayoría de los estudiantes les motiva realizar las actividades cuando se trata de manipulación de objetos y juegos de

[1]https://www.mathsisfun.com/algebra/add-subtract- balance.html
http://www.mathplayground.com/AlgebraEquations.html

competencia, despierta su interés por participar en la dinámica de la clase y lleva al conocimiento de la parte concreta a la abstracta. Aprendí a reconocer lo importante que es darle sentido a los símbolos y cómo orientar a los estudiantes para que le den ese significado a partir de realizar conexiones de los conocimientos que tienen y lo que están aplicando.

El planear una tarea para que los estudiantes interactúen y logren entender el tema abordado, no es una actividad fácil, ya que se requiere tener experiencia, porque cuando se plantea una metodología y la forma de llevarla a cabo, no siempre se tiene el escenario ideal y todas las variables a favor, hay que considerar elementos imponderables y cómo darles solución en el momento de la aplicación. La planeación de tareas debe ser integral, siempre recuperando los conocimientos previos, que servirán de base para poder avanzar y alcanzar el objetivo planteado, es importante que se busquen estrategias que permitan movilizar los saberes que tienen los estudiantes y como son empleados para darle significado a las tareas.

La práctica docente en el aula evidencia el poco o nulo sentido que los estudiantes dan a los procesos aritméticos al abordar tareas. Consecuentemente, no establecen conexiones entre conocimientos previos y aquellos que se abordarán, dando como resultado un entendimiento poco robusto. En algunas tareas no analizan sus procedimientos y resultados. Únicamente esperan utilizar un algoritmo para encontrar la solución a un problema planteado sin analizar por qué emplearon cierto método y los resultados obtenidos. Es complicado lograr que 44 estudiantes de un grupo obtengan los mismos resultados y sean favorables para todos. Es un desafío como docente, el tratar de involucrarlos y que se sientan atraídos para realizar las actividades. Cuando logramos involucrarlos y observamos esos pequeños avances en cada uno de nuestros estudiantes por mínimo que parezcan, habrá valido la pena el esfuerzo.

El plantear actividades en donde se privilegie la comunicación y reflexión debe ser una premisa como docente, ya que los estudiantes al expresar sus ideas y debatir sus conjeturas, permite que le den un significado a lo que están haciendo, se sientan motivados para llevar a cabo las tareas y les sea útil en su formación.

REFERENCIAS

Barrera- Mora, F. y Reyes -Rodríguez, A. (2013). *Elementos didácticos y resolución de problemas: formación docente en matemáticas.*Pachuca: UAEH.

Barrera- Mora, F. y Reyes -Rodríguez, A. (2014). Sobre el aprendizaje con entendimiento en matemáticas.*PÄDI Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*,*2*(3).

Barrera-Mora, F., y Reyes-Rodríguez, A. (2016). Designing Technology-Based Tasks for Enhancing Mathematical Understanding Through Problem Solving. In L. Uden, D. Liberona y B. Feldmann (Eds.).*Proceedings5th International Workshop on Learning Technology for Education in Cloud*(pp. 183-192). Hagen: Springer.

Carpenter, T. P., y Lehrer, R. (1999).Teaching and learning mathematics with understanding. In E. Fennema y T.A. Romberg (Eds.),*Mathematics classrooms that promote understanding*(pp.19-32). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Cooper, T. J., y Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. In J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 187-214). Berlin, Heidelberg. Springer.

Dirección General de Bachillerato (2014). *Matemáticas I* disponible en https://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/z1er_SEMESTRE/Matematicas_I_biblio2014.pdf

Díaz Barriga, F y Hernández Rojas, G. (2010). *Constructivismo y evaluación educativa, Estrategias docentes para un aprendizaje significativo, una interpretación constructivista*. México: McGraw-Hill.

Enfedaque, J. (1990). De los números a las letras. *Suma*, *5*, 23-34.

Filloy, E., y Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra.*For the learning of mathematics,*9(2), 19-25.

Godino, J., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema*, *26*, 483-511.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997).*Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Kaput, J. (1999).Teaching and Learning a New Algebra.In E. Fennemaand T. A. Romberg (eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., Mc Neil, N. M., Weinberg, A., y Stephens, A. C. (2005). Middle school student´s understanding of core algebraic concepts: Equivalence & variable. *Zentalblattfür Didaktik der Mathematik*, 37(1), 68-76.

Lester, F. (2010). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. In B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education*, (pp. 67–85).Heidelberg: Springer.

National Governors Association Center for Best Practices, & Council of Chief State School Officers [NGACBP & CCSSO] (2010).*Common Core State Standards for mathematics*. Washington DC: Author.

Pino-Fan, L. R., Assis, A. y Godino, J. D. (2015).Análisis del proceso de acoplamiento entre las facetas epistémica y cognitiva del conocimiento matemático en el contexto de una tarea exploratorio-investigativa sobre patrones. *Educación matemática*, 27(1), 37-64.

Radford, L. (1996). The Roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective. Cap.3, pp. 39-54. In N. Bednarz et al (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*.Dordrecht: Kluwer.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In S. Alatorre, J.L, Cortina, M. Saizand A. Mendez (Eds),*Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Education,* (pp. 2-21).Merida: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities.*PNA, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2013). Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 2* (1), 7-44.

Rivera, F. D., y Becker, J. R. (2008).Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns.*ZDM*, *40*(1), 65-82.

Rojano, T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos.*Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*,*75*, 5-20.

Russell, S. J., Schifter, D., y Bastable, V. (2011).Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. In J. Cai and E. Knuth (Ed.), *Early algebraization* (pp. 43-69).Heidelberg: Springer.

Santos Trigo, L. (1997). *Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Santos-Trigo, L. (2008). Sobre la construcción de una comunidad de práctica en la resolución de problemas. *Memorias del Segundo Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas*, 133-144.

Santos Trigo, L. (2009). Innovación e investigación en educación matemática. *Innovación educativa, 9*(46), 5-13.

Sampieri Hernández, R., Collado Fernández, C. y Lucio Baptista, P. (2003). *Metodología de la investigación*. México:McGraw-Hill Interamericana.

Samuel, K., Mulenga, H. M., y Angel, M. (2016). An investigation into challenges faced by secondary schoolteachers and pupils in algebraic linear equations: A case of Mufulira District, Zambia. *Journal of Education and Practice, 7*(26), 99-106.

Secretaría de Educación Pública (2011). *Programas de estudio 2011.Guía para el maestro. Educación básica. Secundaria. Matemáticas*. México: Secretaría de Educación Pública

Sepúlveda López, A y Santos Trigo, L. (2006). Desarrollo de episodios de comprensión matemática. *Revista Mexicana de Investigación Educativa,* 11, 1389-1422.

Schoenfeld, A. H. (1994). Reflection on doing and teaching mathematics.In A.H. Schoenfeld (ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 53-70). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Steen, L. A. (1998). The science of patterns.*Science*, 240, 611-616.

Simon, M. A. (1994). Learning mathematics and learning to teach: Learning cycles in mathematics teacher education.*Educational studies in mathematics*,*26*, 71-94.

Simon, M. A., y Schifter, D. (1991). Towards a constructivist perspective: An intervention study of mathematics teacher development. *Educational studies in mathematics*,*22*, 309-331.

Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación.*Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*,*77*, 5-34.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems.*Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164.

Wenger, E., McDermott, R., y Snyder, W. M. (2002).*Cultivating communities of practice*. Boston, MA: Harvard Bussines School Press.

APÉNDICE A. OFICIO DE AUTORIZACIÓN PARA QUE LOS ESTUDIANTES PARTICIPARAN EN EL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

Tizayuca, Hgo., a 10 de noviembre de 2016.

ESTIMADOS PADRES DE FAMILIA:

Como es de su conocimiento, el profesor Oscar Arce Peña que imparte la asignatura de Matemáticas I en los grupos 1101, 1102,1103 y 1104 de primer semestre, está cursando la Maestría en Ciencias en Matemáticas y su Didáctica y, como parte de la realización de su tesis, requiere hacer un proyecto de investigación en el que debe videograbar algunas de las clases que tiene con sus hijos.

Por este motivo me dirijo a ustedes con el propósito de solicitar su autorización y, para tal efecto, les pido por favor llenar y devolver el día lunes, el talón que aparece al calce de la presente circular.

Es importante que sepa que estos videos se utilizan exclusivamente para fines de investigación y serán revisados sólo por el profesor y los directores de tesis de la UAEH, respetando íntegramente la identidad de los estudiantes, asignándoles un seudónimo.

Sin más por el momento, quedo de ustedes.

Ing. Darío Gerardo Negrete Trejo

Director del COBAEH Plantel Tizayuca

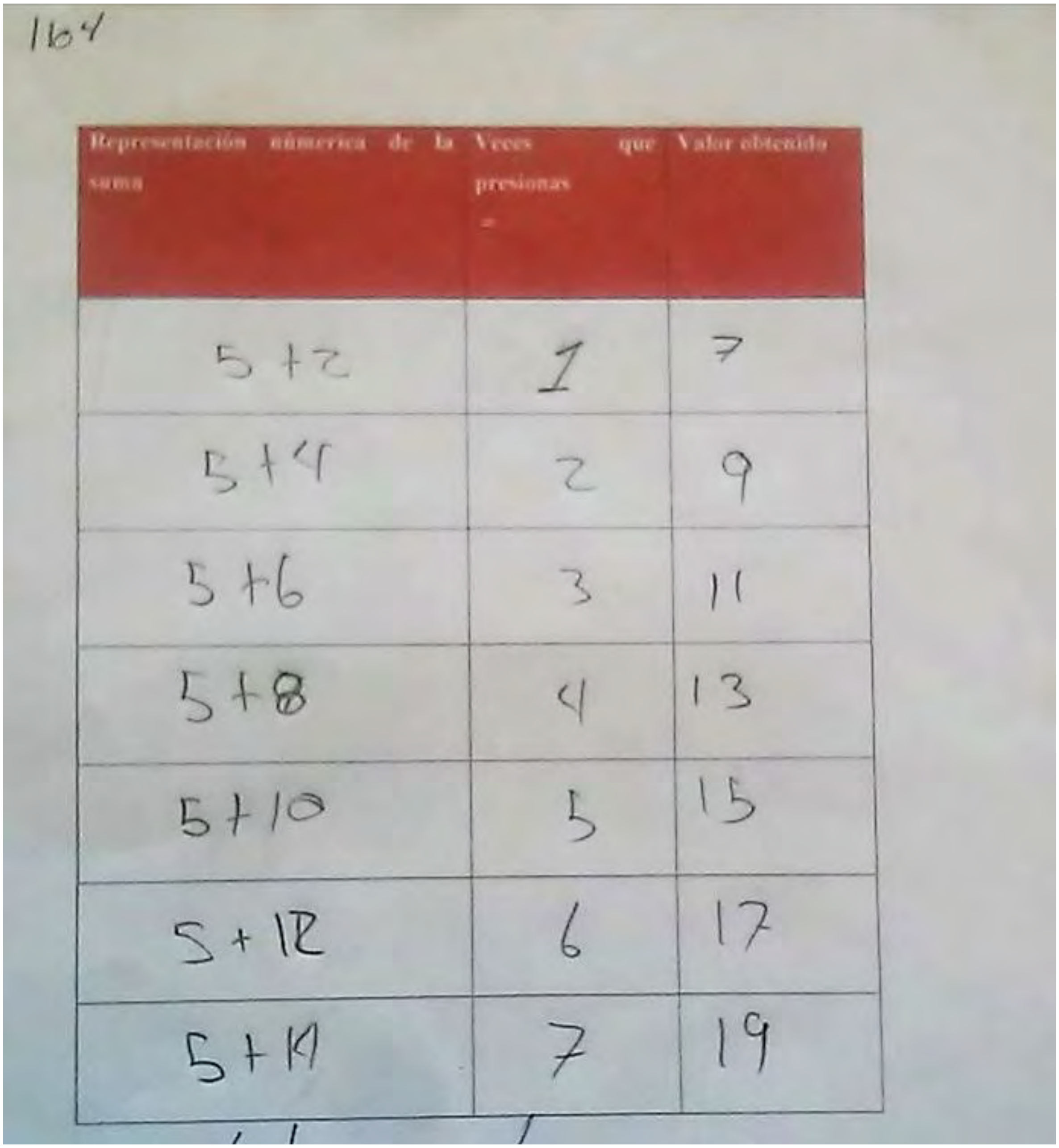
Autorizo a mi hijo (a) ____ del grupo ________, para que participe en el proyecto de investigación del Profesor Oscar Arce Peña

Nombre del Padre: _________________________________Firma: _______________

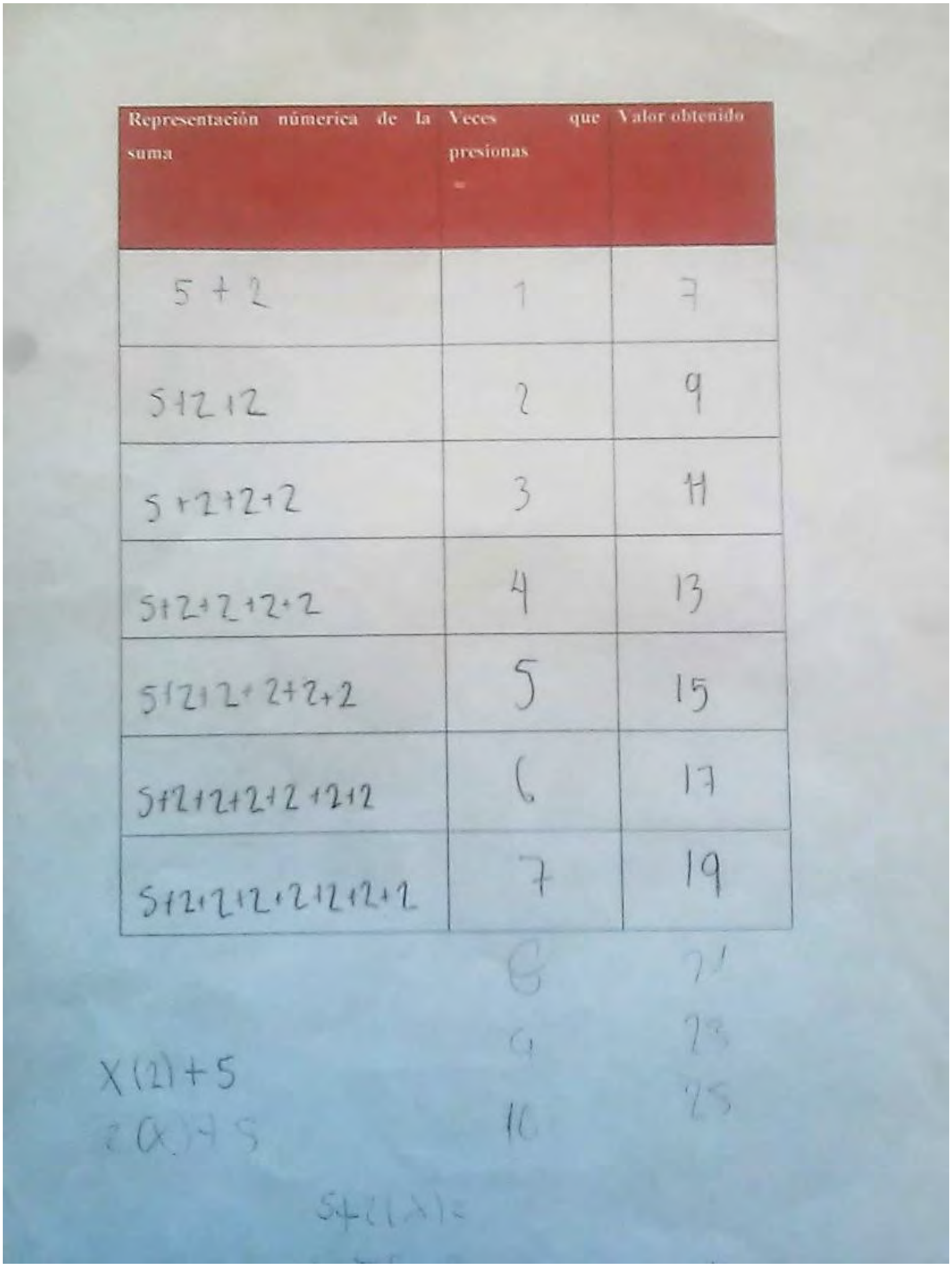
APÉNDICE B. HOJAS DE TRABAJO. OPERACIONES ARITMÉTICAS CON UNA CALCULADORA BÁSICA

Representación numérica de la suma	Veces que presionas =	Valor obtenido

Representación númerica de la suma	Veces que presionas =	Valor obtenido
5+2	1	7
7+2	2	9
9+2	3	11
11+2	4	13
13+2	5	15
15+2	6	17
17+2	7	19


164

Representación númerica de la suma	Veces que presionas =	Valor obtenido
5 + 2	1	7
5 + 4	2	9
5 + 6	3	11
5 + 8	4	13
5 + 10	5	15
5 + 12	6	17
5 + 14	7	19



Representación númerica de la suma	Veces que presionas =	Valor obtenido
5 + 2	1	7
5+2+2	2	9
5+2+2+2	3	11
5+2+2+2+2	4	13
5+2+2+2+2+2	5	15
5+2+2+2+2+2+2	6	17
5+2+2+2+2+2+2+2	7	19

8 21

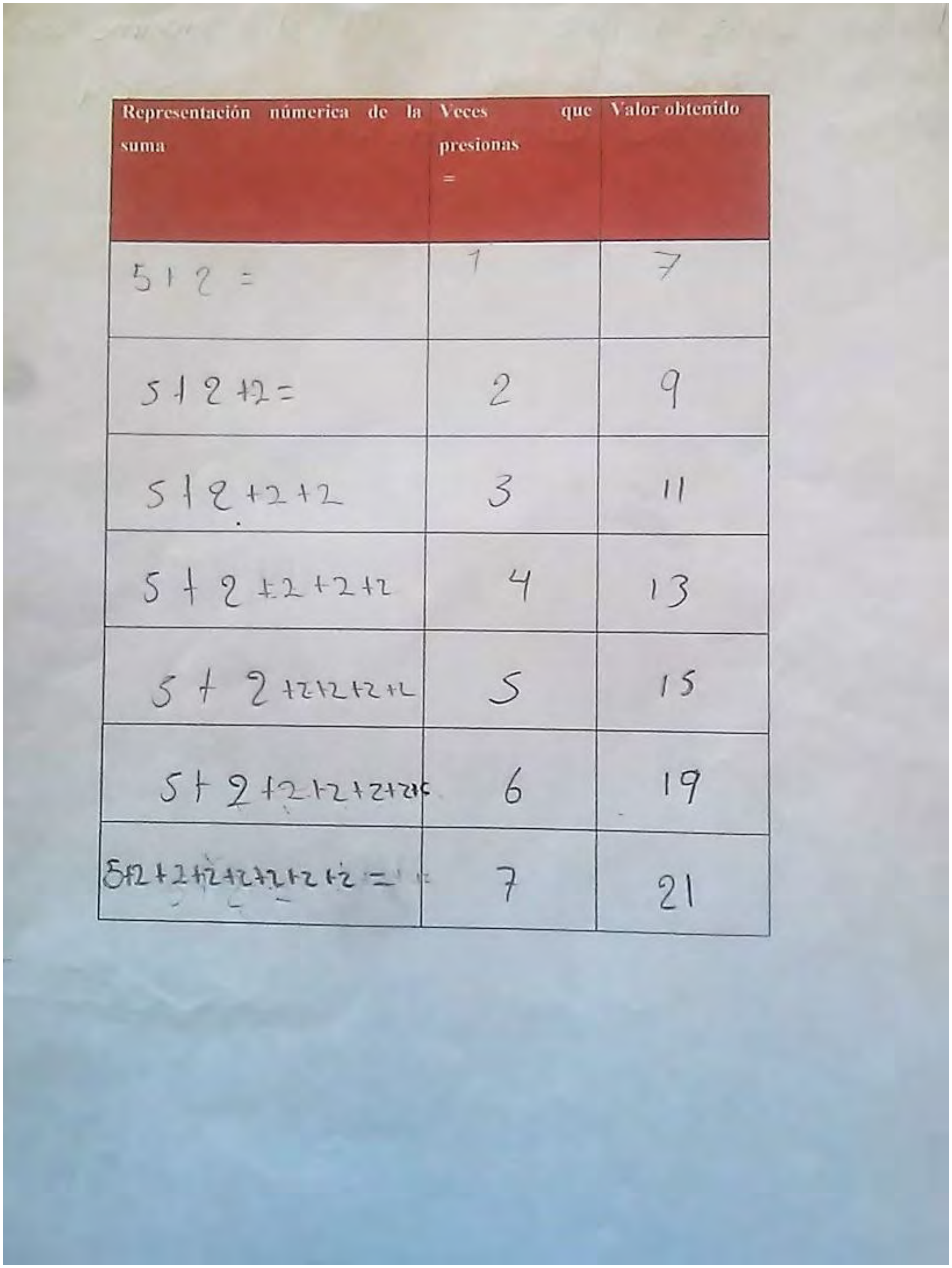
9 23

10 25

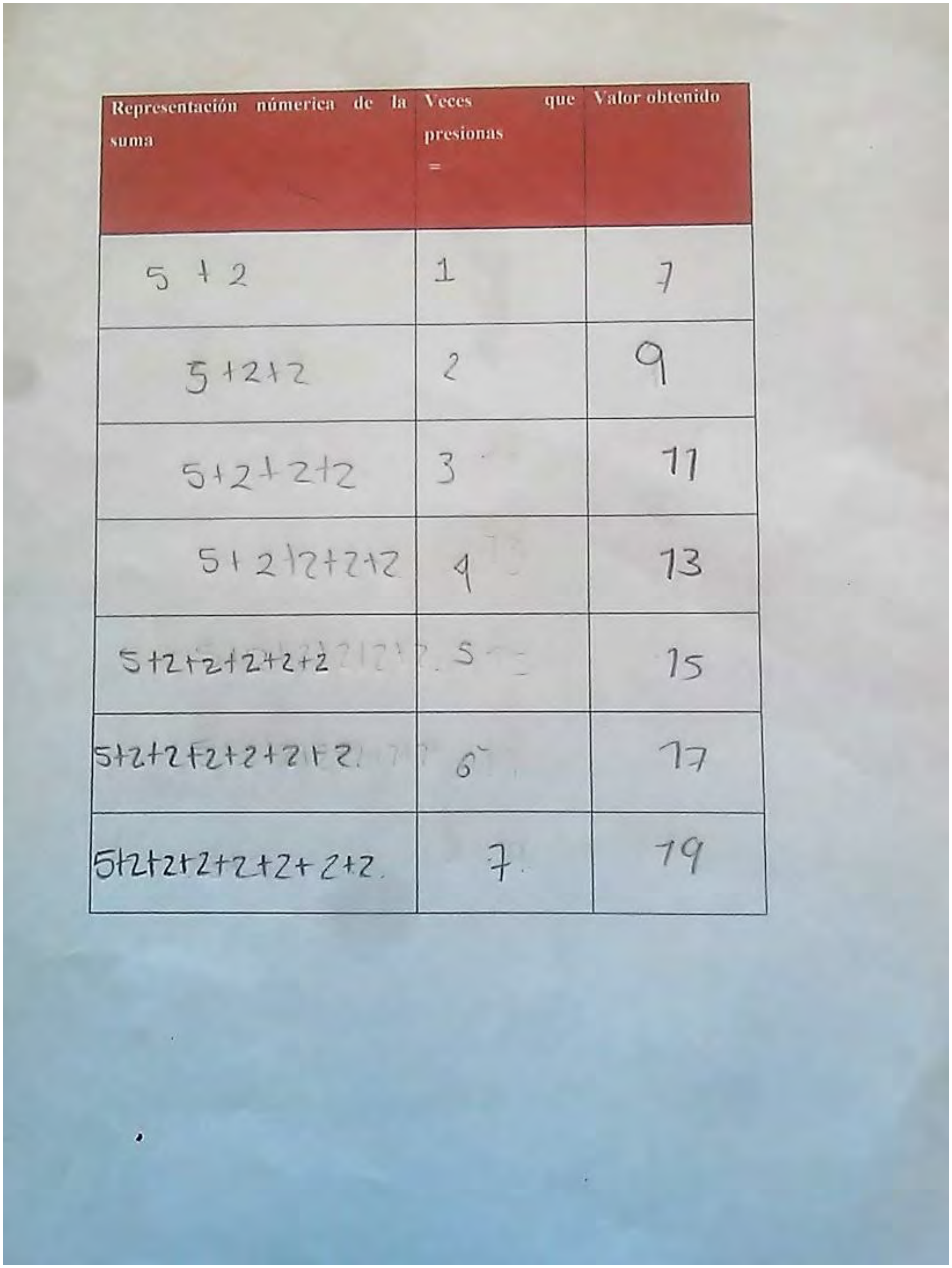
X(2)+5

2(X)+5

5+2(X)=

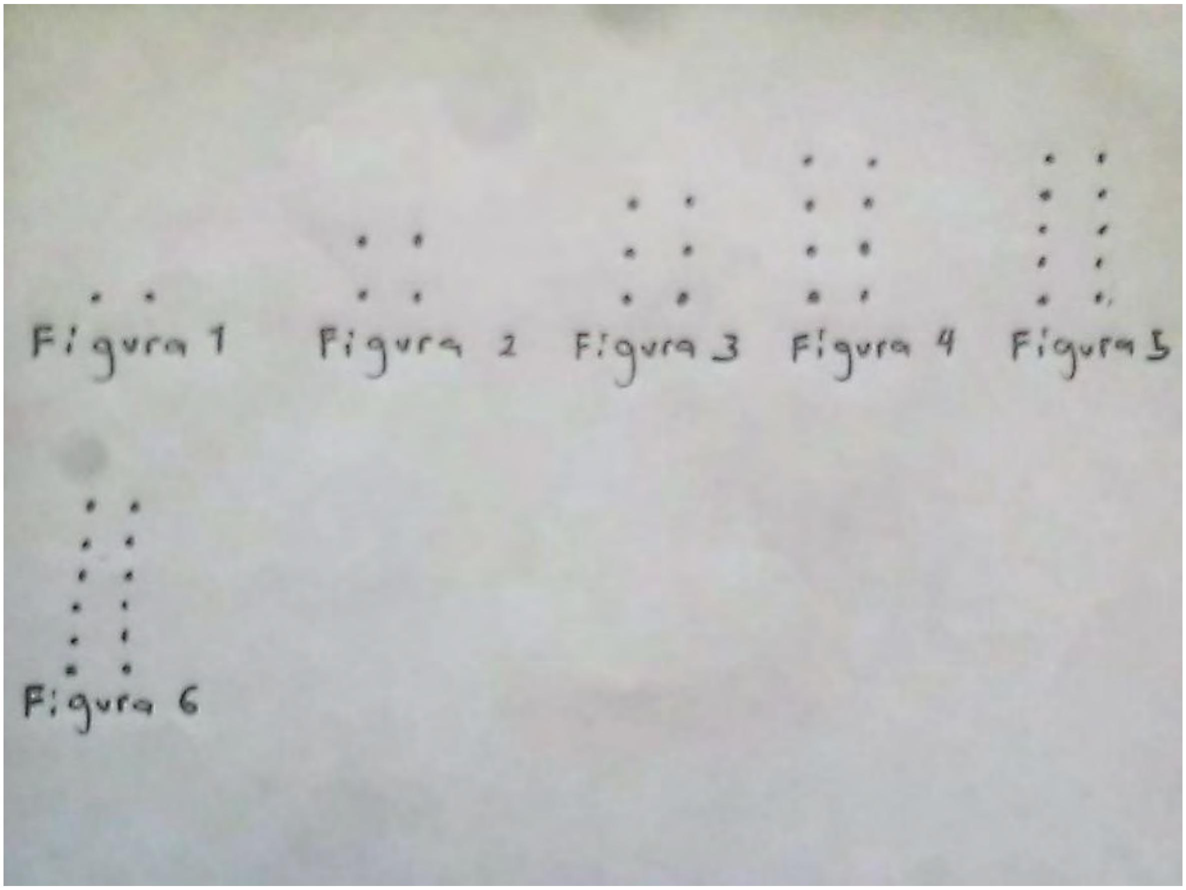


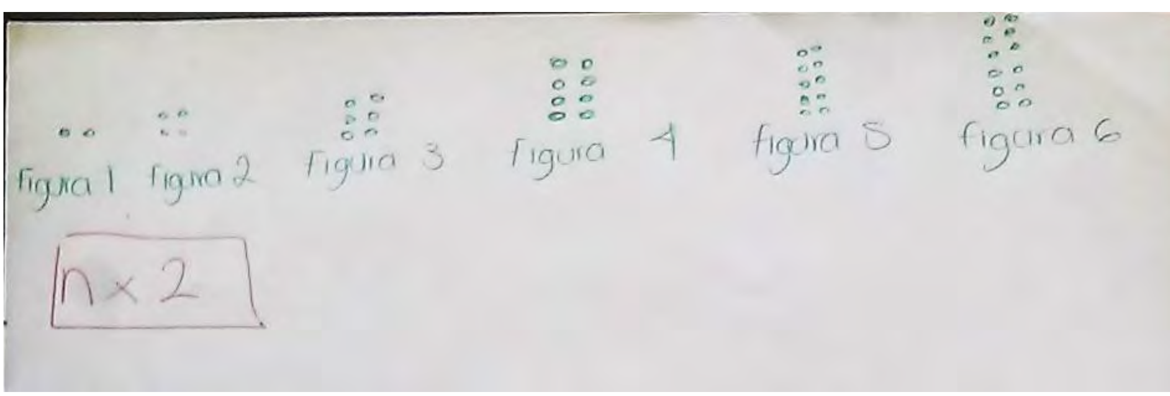
Representación numérica de la suma	Veces que presionas =	Valor obtenido
5 + 2 =	1	7
5 + 2 + 2 =	2	9
5 + 2 + 2 + 2	3	11
5 + 2 + 2 + 2 + 2	4	13
5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2	5	15
5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 +	6	19
5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 =	7	21



Representación númerica de la suma	Veces que presionas =	Valor obtenido
5 + 2	1	7
5+2+2	2	9
5+2+2+2	3	11
5+2+2+2+2	4	13
5+2+2+2+2+2	5	15
5+2+2+2+2+2+2.	6	17
5+2+2+2+2+2+2+2.	7.	19

APÉNDICE C. HOJAS DE TRABAJO. CONSTRUYENDO LA TORRE MÁS ALTA





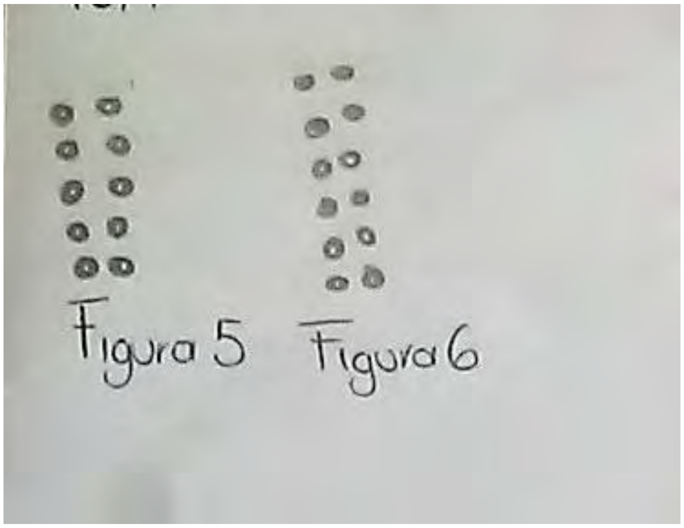
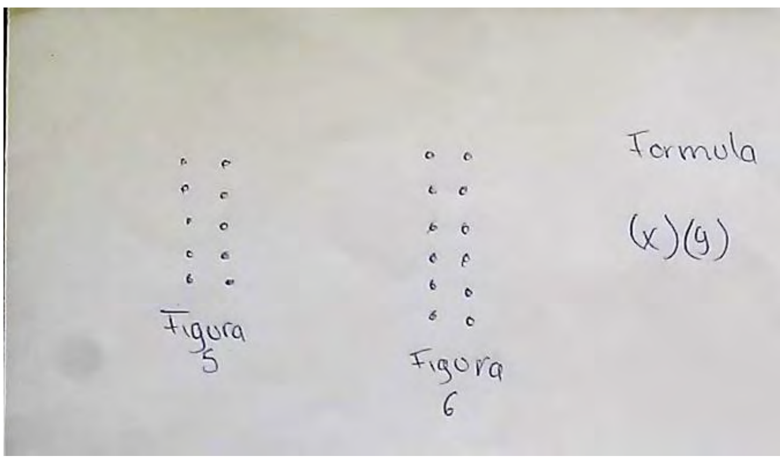


Figura 5
Figura 6


Formula
(x)(9)
Figura 5
Figura 6

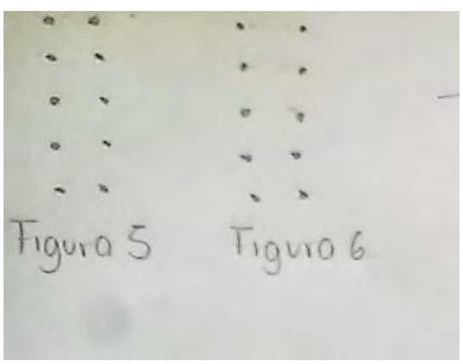


Figura 5
Figura 6

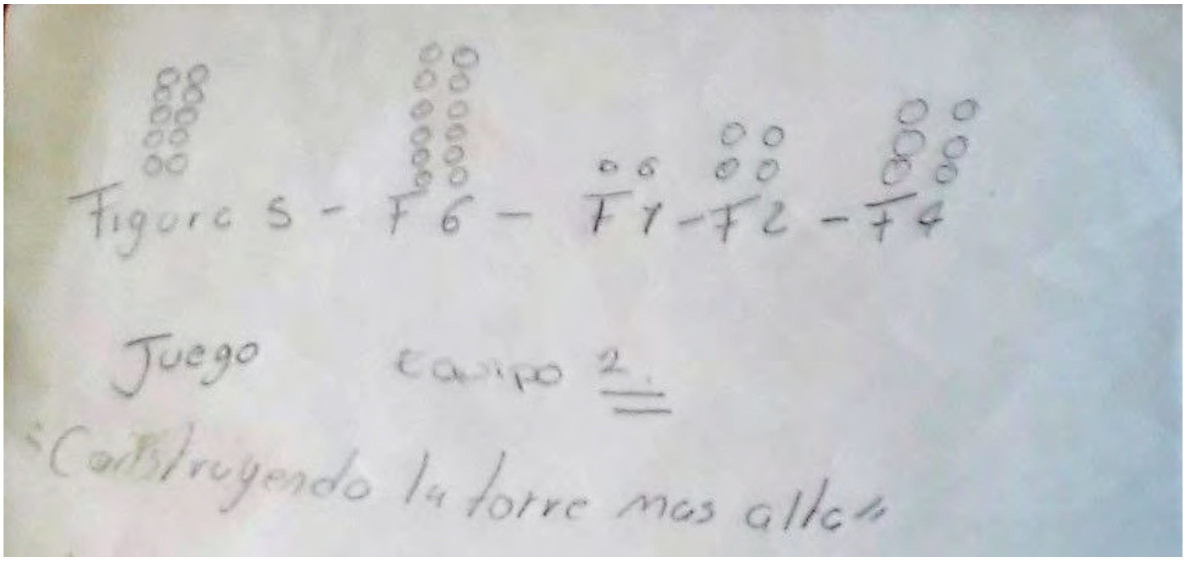
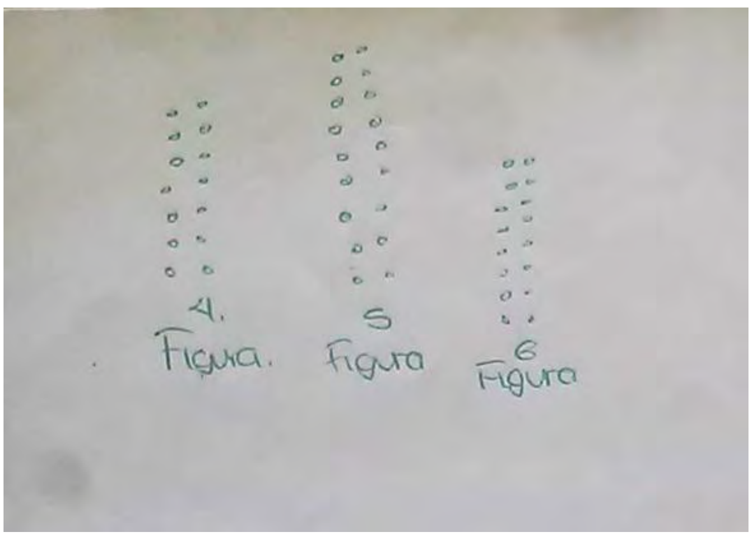


Figura 5 - F6 - F1 - F2 - F4
Juego equipo 2.
«Construyendo la torre mas alta»


4. Figura.
5 Figura
6 Figura

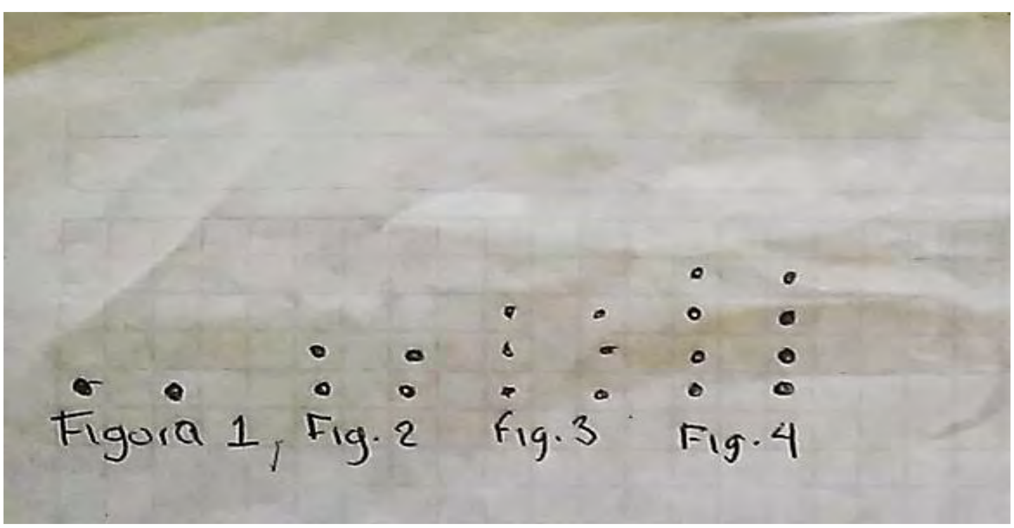
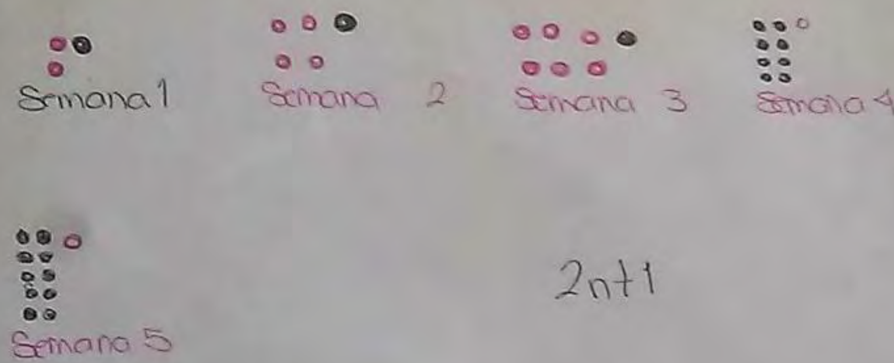


Figura 1, Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

APÉNDICE D. HOJAS DE TRABAJO. AHORRO REALIZADO EN UN BANCO

Actividad 5:

En cierto banco, se ofrece, que invirtiendo un peso, te devuelven 2 pesos mas. y mientras sigas manteniendo la inversion, cada semana te aumentan 2 pesos mas



¿Cuanto dinero tendra la semana 5? 11

Ahorro total	Semanas que ahorraron
25	12
57	28
135	67
141	70
297	148

A el ahorro total (135) se le resta el peso invertido y se divide entre 2

EN CIERTO BANCO, SE OFRECE, QUE INVIRTIENDO UN PESO, TE DEVUELVEN DOS PESOS MÁS, Y MIENTRAS MANTENIENDO LA INVERSIÓN CADA SEMANA AUMENTA 2 PESOS MÁS

SEMANA 1 JEMANA 2 JEMANA 3 JEMANA 5

$2(N)+1=x$

JEMANA 10

SEMANA 5 $2(5)=10+1=11$

JEMANA 10 $=2(10)=20+1=21$

AHORRO TOTAL	SEMANAS DE AHORRO
25	12
57	28
135	67
141	70
297	148

$n=\frac{x-1}{2}$

$\frac{25-1}{2}=\frac{24}{2}=12$

~~X SE~~ LAS SEMANAS SON REPRESENTADAS CON LA LETRA (N) Y EL AHORRO TOTAL CON X

LA MANERA DE RESOLVER ES RESTÁNDOLE A X UNO, Y LO QUE SALGA DE ESTE DIVIDIRLO ENTRE DOS Y ESE RESULTADO OBTENIDO ES LA SEMANA DE AHORRO (N)

ACTIVIDAD 3

En cierto banco, se ofrece, que invirtiendo un peso, te devuelven dos pesos más, y mientras sigas manteniendo la Inversión, cada semana te aumentan dos pesos más.

semana 1 semana 2 semana 3 semana 5 semana 10

Formula

$2n + 1$

¿Cuanto dinero tendra en la semana 5?

R= 11 pesos

¿Cuanto dinero tendrá en la semana 10?

R= 21

Aplicamos la formula inversa:

$n - 1 \div 2$

Ahorro total	Semanas que ahorramos
25	12
57	28
135	67
141	70
297	148

Semanas que ahorramos =

$$\frac{n-1}{2}$$

donde n significa el ahorro total

Ejemplo: 121 de ahorro total:

$$\frac{121-1}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

APÉNDICE E. TRANSCRIPCIÓN AUDIO 1 OPERACIONES ARITMÉTICAS CON UNA CALCULADORA BÁSICA

Equipo de trabajo.
Estudiante1 (E1): Cinco más siete, cinco más dos es igual a siete y presionas igual
Estudiante 2 (E2): Igual a siete, igual a nueve
E1: Otra vez presiónalo
E2: 11
E1: Otra vez
E2: 13
E1: Aja
E2: 15
E1: Aja y luego
E2: Diecisiete
E1: Cinco más dos
E2: Diecinueve
E1: Mis números
Estudiante 3 (E3): Pásamelo para yo remarcarlo
Profesor: ¿Ya acabaron?
Estudiantes: Ya profe
Profesor: Ahorita vamos hacer unas preguntas
E1: ¿Es así?
Profesor: ¿Esta suma nos da esto?
E2: Nueve
Profesor: Pero, la suma representada ¿sería así?
Estudiantes: No…. sería
Profesor: ¿Qué le falta?
Estudiante: No, sería
Profesor: Ahí van siete, le falta, otro ejemplo
Profesor: ¿Más dos, no?
E2: Ah... ya
Profesor: Bien, ¿Ya terminaron de llenar su tabla?
Estudiantes: ¡Nooo!
Profesor: Vamos a revisar algunos valores…
E1: Espéreme tantito
E2: Ahí nos equivocamos porque cinco más dos es igual a siete
E3: ¿Por qué más?
E2: Ah sí cierto, no sí, sí, así
E2: Cinco más dos, más dos, más dos,
Profesor: Ya se dieron cuenta de lo que está pasando cuando presionan la tecla igual
Profesor: ¿Qué pasaría si yo presiono veinte veces la tecla igual? ¿Qué resultado nos daría?
E2: Un chorro…
Profesor: Por ejemplo, si presionaron una vez, una vez el igual, ¿cuánto les dio?

Estudiantes: Siete
Profesor: ¿Si lo presionaron dos veces?
Estudiantes: Nueve
Profesor: ¿Si lo presiono dos veces, que resultado da?
Estudiantes: Nueve
Profesor: Nueve, ¿si lo presiono tres veces?
Estudiantes: Once
Profesor: Once… ¿cuatro?
Estudiantes: Trece
Profesor: ¿Si yo lo presiono veinte veces?
Estudiante x (Ex): Noventa
Profesor: ¿Cuánto?
Estudiante y (Ey): Cuarenta y cinco
Profesor: ¿Si lo presiono treinta veces?
E1: Cincuenta y cinco
Profesor: ¿Cuánto?
E1: Cincuenta y cinco
Estudiante z (Ez): Treinta y uno
Profesor: A ver…
E1: Cómo treinta y uno
Profesor: Si ya me pudieron decir que veinte fueron cuarenta y cinco, con treinta veces que lo presiono, ¿cuánto es? Esto es presionando el signo de igual
Estudiante R (Er): Sesenta y cinco
Profesor: ¿Cuánto? Setenta y cinco
Er: Sesenta y cinco
Profesor: ¿Seis cinco?
Er: Seis cinco
Profesor: Seis cinco, ok. ¿Si yo lo presiono cuarenta veces?
Estudiante 1: Ochenta y cinco
Profesor: ¿Si lo presionamos cien veces?
E1: ¡Ahhh!
Estudiante m: Ciento cinco
Profesor: ¿Cuánto?
E1: Ciento quince
Er: Doscientos cinco
Profesor: Doscientos cinco
E1 y E2: Nooo, ciento quince
Er: ¡Doscientos cinco!
E1: ¿Ciento quince, no?
Profesor: ¿Si presionamos cien veces el igual, doscientos cinco?
E2: No, espera, de cincuenta son noventa y cinco,
Profesor: Vayan observando las regularidades
E2: De sesenta son…
E1: No, es que en mi caso se le suman, sesenta y cinco, se suman quince, ochenta,
E2: De noventa, ciento treinta y cinco, de cien, ciento veinticinco, noo?

Profesor: De cien son doscientos cinco, ¿habrá alguna expresión matemática que me ayude a definir cómo se está comportando esto?
E2: No sé
Profesor: A ver, ¿vayan analizando esto?
Estudiante k: Si ¿no?
E2: Es mucho análisis para mi cerebro,
Ek: Es el doble de…
Profesor: ¿El doble de cuál? A ver vamos a dar tres minutos, coméntenlo con sus equipos y ahorita me dicen cuál sería su respuesta
E1: Es que de veinte son cuarenta y cinco, de treinta son sesenta y cinco, se le suma veinticinco ¿ya viste?
E3: Veinte
E1: Veinticinco
E3: Veinte, no manches, como le vas a sumar veinticinco a cuarenta y cinco
E1: Ah no, sí es cierto, no espérame, cuarenta y cinco más veinte sesenta y cinco, más veinte ochenta y cinco, para que nos de doscientos cinco menos ochenta y cinco, cero, dos, uno
E3: Ciento veinte
E1: ¿Ciento veinte son de cincuenta no?... si son de cincuenta
E3: Noo,
E1: Si porque imagina
E3: No porque sería mira: sería ochenta y cinco más veinte da ciento cinco
E4: Oye si podría ser esa
E1: O dos equis más cinco
Profesor: A ver, vamos a ver que dice su compañero, nos podría explicar por favor…
Ec: ¡Ah bueno!, este
Profesor: Escuchamos por favor
Ec: Nosotros encontramos así la expresión que resuelve el problema, sería el número de veces que presionas igual lo representamos con la x, lo multiplicamos por dos y le sumas cinco, ya te saldría, si quieres representar, si quieres saber cuántas veces el resultado que sale si lo presionas setenta y cinco veces los sustituirías a la equis por setenta y cinco lo multiplicarías por dos y le sumas cinco.
E1: Por dos más cinco
Profesor: Esa es una forma de representar, ¿alguien más tiene otra idea?
E1: Es que no, Dos equis más cinco, ¡es que no! ¿O sea cómo?
E3: Dos equis más cinco.
Inaudible….
Profesor: A ver estudiante h
Eh: Es casi igual que esta nada más que lo puse así
E1: Lo puso al revés dos equis y cinco.
Profesor: ¿Está mejor?
Estudiantes: Si
Profesor: Tenemos el número cinco, que es el número fijo, y equis es el número de veces que se presiona la tecla igual aquí tenemos la expresión más general “cinco más dos equis”

Profesor: Muy bien, veamos ahora entonces si yo les doy un valor, me pueden decir ¿cuántas veces se presionó el igual no? A ver, si yo les digo, por ejemplo, tengo de resultado quince, ¿cuántas veces presionaron el igual?
Estudiantes: Cinco, cinco veces
Profesor: ¿Cinco veces?
Estudiantes: Si
Profesor: Si yo les digo treinta y cinco
E2: Quince
Profesor: ¿Quince?
Estudiantes: Quince
Em: No
E2: Si, porque sería quince por dos son treinta, más cinco, treinta y cinco
Profesor: Si yo les digo noventa, noventa y siete, por ejemplo, perdón, noventa y siete, podrán decirme ¿cuántas veces se presionó el igual?
E1: Espere, noventa y siete menos cinco, (silencio) cuarenta y seis veces no
Profesor: ¿Cuántas?
E1: Cuarenta y seis veces
Profesor: Cuarenta y seis veces, ¿les puede explicar a sus compañeros que hizo?
E1: Ahhh.
Profesor: A ver, escuchamos a su compañera por favor
E1: Al resultado que fue noventa y siete, le reste cinco y lo divide entre dos
Profesor: Muy bien, se les restan cinco y lo dividió entre dos. Que pasaría entonces, si yo tengo aquí ciento treinta y cinco, ¿cuántas veces presiono el igual?
E1: ¿Sesenta y cinco no?
Profesor: ¿Cuántas?
E1: Sesenta y cinco
Profesor: Sesenta y cinco, están de acuerdo,
Estudiantes: Si
Profesor: Entonces, esto que estamos aquí viendo, cinco más dos equis ¿va a ser igual a qué? ¿A un resultado no?
E1: Si
Profesor: Por ejemplo, ciento treinta y cinco, ustedes pueden saber el valor de esta equis, ¿cómo lo obtienen? Como dijo su compañera, ¿qué hicieron primero?
E1: Pasar el cinco de forma negativa y al resultado de esa diferencia se divide entre dos.
Profesor: Al dividir entre dos, están solucionando una ecuación.

APÉNDICE F. TRANSCRIPCIÓN AUDIO PROBLEMA DE AHORRO EN UN BANCO

Profesor: Dice aquí el problema. En cierto banco, se ofrece, que invirtiendo un peso te devuelven dos pesos más y mientras sigas manteniendo la inversión cada semana te aumentan dos pesos más. Aquí, ya les puse las figuras como quedaría, la semana uno con tantos pesos, más el peso que teníamos; la semana dos, le aumentamos otros dos pesos más, más lo que ya teníamos; la semana tres, también y así sucesivamente, va a ser cada semana. Lo que queremos saber es ¿cuánto dinero tendremos en la semana cinco? ¿Cuánto dinero tendremos en la semana diez? Podríamos ir revisando y analizando cómo encontrar una expresión que nos dé los valores para cada semana. A ver, vamos a trabajar. Vamos a tratar de encontrar esos valores. Cada quien en sus equipos traten de buscar ¿Cuánto dinero tendríamos en la semanas cinco y en la semana diez? Adelante.
Estudiantes: [Realizan el trabajo en equipos]
Profesor: ¿En la semana diez?
Estudiantes: Veintiuno
Profesor: ¿Habrá alguna expresión que me permita calcular para un cierto número de semanas? ¿Cuál sería?
Caballero: Dos “n” más uno
Profesor: A ver, pásele Caballero. ¿Qué significa eso de dos “n” más uno?
Caballero: ¡Eh! Bueno, “n” representa el número de semanas, el coeficiente 2, son los dos pesos que cada semana aumenta y el uno, es el peso de inversión inicial
Profesor: ¿Están de acuerdo con su compañero?
Estudiantes: Si
Profesor: Veamos, ya tenemos la expresión que digamos que funciona para esto. ¿Alguien tiene otra expresión? Que la quiera compartir.
Estudiantes: No
Profesor: Vamos a ver dos “n” más uno dice su compañero que “n” significa el número de semanas. Qué pasaría si yo les doy por ejemplo, si tenemos ya en el banco $121. ¿Cuántas semanas tendrían que pasar para ahorrar $121
Isai: Quince
Profesor: A ver, traten de resolver esto, si yo tengo $121¿Cuántas semanas pasarían?
Estudiante I: Sesenta
Profesor: A ver Díaz
Ismael: Sesenta
Profesor: sesenta, ¿Cómo lo resolvió? A ver hay atrás
Mario: En esa fórmula, le quitamos uno, dio 120, entre dos son sesenta
Profesor: ¿Así es como lo resolvió Díaz?
Díaz: [inaudible]
Caballero: Se le restaría uno, y todo lo demás se divide entre dos, y eso sería el número de semanas
Profesor: Si tuviéramos ciento cincuenta y siete pesos ahorrados, ¿Cuántas semanas pasarían? ¿Cuántas semanas tendrían que pasar para que tuviéramos ciento cincuenta y siete pesos? ¿Cómo le haríamos?
Caballero: Setenta y seis

Profesor: ¿Cuántas? ¿Haber? Díganme cómo lo están resolviendo, tenemos $157 ahorrados, ¿Cuántas semanas pasaron?
Tamara: Setenta y tres
Profesor: ¿Setenta y tres?
Guadalupe: Setenta y ocho
Profesor: ¿Cuántas fueron Guadalupe?
Guadalupe: Setenta y ocho
Profesor: Setenta y ocho, ¿Por qué setenta y ocho?
Guadalupe: Porque hice la misma operación que hizo Mario, le reste uno y se dividió entre dos. Ciento cincuenta y seis entre dos da setenta y ocho.
Profesor: serían setenta y ocho semanas. Imaginemos que ya juntamos trescientos diecisiete pesos ¿Cuántas semanas tendrían que pasar para juntar trescientos diecisiete pesos?
Estudiantes: 158 semanas
Profesor: ¿Están de acuerdo con los demás?
Estudiantes: Si
Profesor: Les voy a poner aquí ciertos valores y van a poner cuantas semanas tuvieron que pasar para tener la cantidad ahorrada. Vamos hacer un cuadro, van a encontrar estos valores, ¿Cómo los encontrarían? ¿Qué valor le corresponde para el valor ahorrado total? Si yo junte veinticinco pesos. ¿Cuántas semanas tuvimos que ahorrar? ¿Cómo le harían? Vayan haciendo su actividad y ahorita platicamos.
[Realización de actividad en hojas de trabajo.]
Profesor: ¿Todos los equipos ya terminaron? A ver, levanten la mano. Tenemos el ahorro total y cuantas semanas tuvieron que pasar.
Profesor: Si ahorramos $25 ¿cuántas semanas pasaron?
Joan: Doce
Profesor: ¿Cómo lo resolvieron?
Joan: Con la formula, pero la inversa
Profesor: ¿Qué hicieron con esa fórmula?
Joan: Lo planteamos desde la semana uno, hicimos $x^2 + 1$, porqué es el doble de un número más uno, uno por dos más uno [haciendo referencia a la posición uno del problema] en la semana dos fue el doble que serían cuatro, le sumamos uno, así hasta la semana doce, fue $2\,x^2 + 1$
Profesor: Fueron 12 semanas. Habría que tener cuidado, que significa si es al cuadrado o es el doble, hay que verificarlo, revisen la sucesión.
Profesor: ¿Es el cuadrado o es el doble?
Joan: El doble
Profesor: Hay que tener cuidado.
Profesor: El del ahorro total, cuando fueron cincuenta y siete pesos de este lado.
Equipo2: veintiocho
Profesor: Veintiocho, ¿Están de acuerdo todos?
Estudiantes: Si
Profesor: ¿Cuántas semanas pasarían para ahorrar $135?
Tamara: Sesenta y siete
Profesor: ¿Por qué Aldo?

Tamara: Porque a 135 se le resto uno, serían 134, se divide entre dos y da 67 [se adelantó a contestar]

Profesor: ¿Por qué le tendríamos que restar ese uno?

Aldo: Porque, bueno, en la fórmula como ahora estamos buscando la semana, en la formula anterior se estaba buscando el ahorro total, entonces se le resta uno, estaba sumando ahora se resta y se divide, es como las leyes, que suma pasa resta, multiplicar – división.

Profesor: Ok, el de 141, ¿Cuánto les dio? A ver Amellali.

Amellali: Setenta

Profesor: Perfecto, ¿Por qué setenta?

Amellali: Igual hicimos como Aldo, restar uno y dividir 140 entre dos y da 70.

Profesor: y el último 297 [refiriéndose a cuántas semanas pasaron para ahorrar $297]

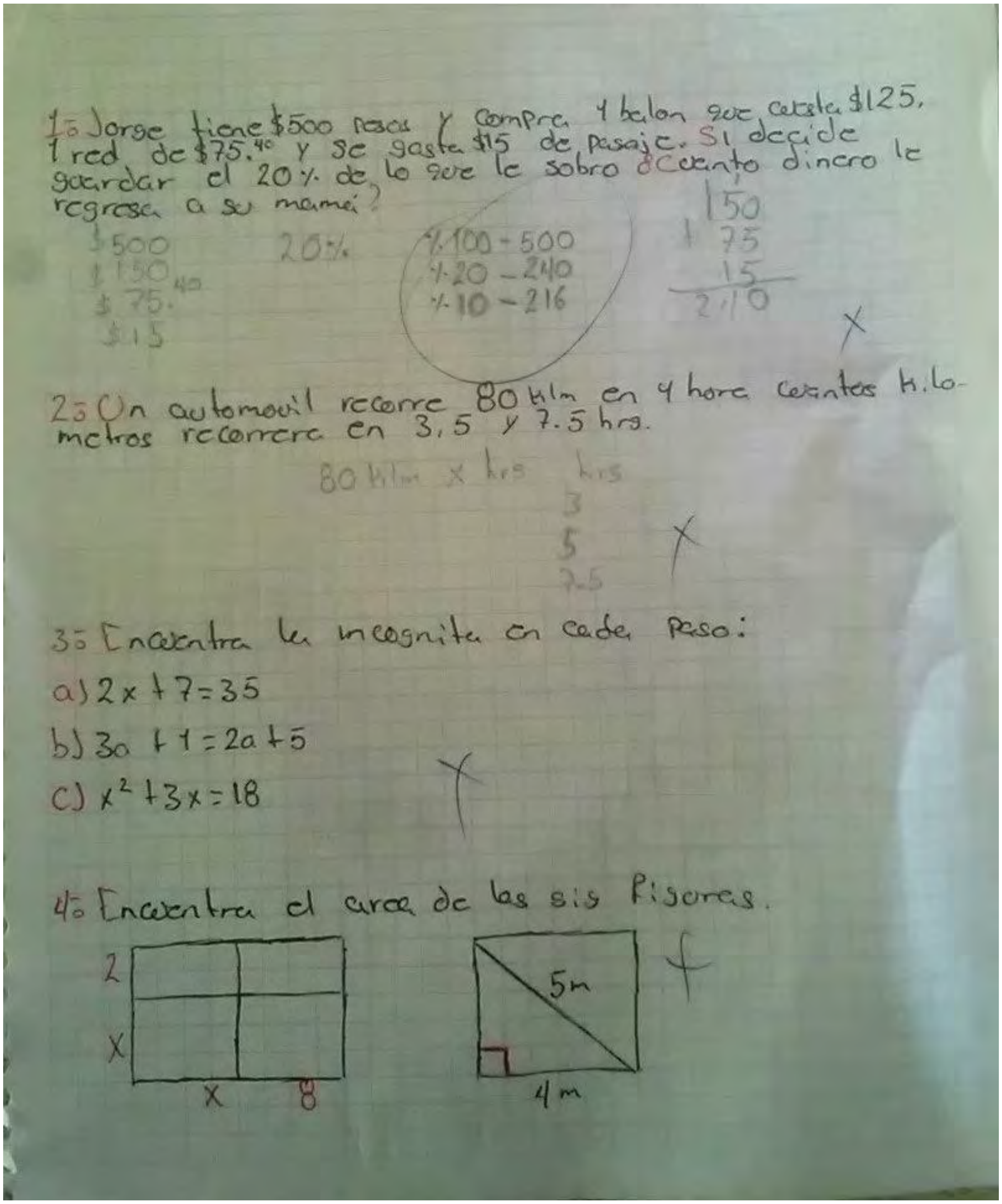
Rebeca: A nosotros nos salió 148

Profesor: 148, ¿Qué hicieron?

Rebeca: Lo único que hicimos fue invertir lo de la primera fórmula que se dio y fue restarle el peso y después dividirlo entre dos y así salió.

Profesor: Muy bien, aquí tenemos los valores que debieron haber salido.

APÉNDICE G. EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA REALIZADA A GRUPOS DE PRIMER SEMESTRE CICLO 16-B



1º Jorge tiene $500 pesos y compra 1 balon que cuesta $125, 1 red de $75.40 y se gasta $15 de pasaje. Si decide guardar el 20% de lo que le sobro ¿cuanto dinero le regresa a su mamá?

$500
$150
$75.40
$15

20%

%100 - 500
%20 - 240
%10 - 216

150
75
15
210

X

2º Un automovil recorre 80 klm en 1 hora cuantos kilometros recorrera en 3.5 y 7.5 hrs.

80 klm x hrs hrs
3
5
7.5

X

3º Encuentra la incognita en cada paso:

a) $2x + 7 = 35$

b) $3a + 1 = 2a + 5$

c) $x^2 + 3x = 18$

X

4º Encuentra el area de las sig figuras.