



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE HIDALGO**

**INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN TECNOLOGÍAS DE LA
INFORMACIÓN Y SISTEMAS**

**MAESTRÍA EN CIENCIAS EN
AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL**

T E S I S

**CONTROL ÓPTIMO CON CARACTERÍSTICAS
DE ROBUSTEZ PARA SISTEMAS LINEALES
CON RETARDO EN EL ESTADO**

PRESENTA:

HÉCTOR ARISTEO LÓPEZ LABRA

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**MAESTRO EN CIENCIAS EN
AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL**

DIRECTORES DE TESIS:

**DR. OMAR JACOBO SANTOS SÁNCHEZ
DRA. LILIAM RODRÍGUEZ GUERRERO**



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
 Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
 Área Académica de Computación y Electrónica

Mineral de la Reforma, Hgo., a 29 de octubre de 2018

Número de control: ICBI-AACyE/1963/2018
 Asunto: Autorización de impresión de tesis.

M. EN C. JULIO CÉSAR LEINES MEDÉCIGO
DIRECTOR DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR DE LA UAEH

Por este conducto le comunico que el comité revisor asignado al C. **Héctor Aristeo López Labra** alumno de la Maestría en Ciencias en Automatización y Control, autoriza la impresión del proyecto de tesis titulado "**Control óptimo con características de robustez para sistemas lineales con retardo en el estado**" en virtud de que se han efectuado las revisiones y correcciones pertinentes.

A continuación, se registran las firmas de conformidad de los integrantes del comité revisor

Presidente	Dr. Hugo Romero Trejo
Secretario	Dr. Jesús Escamilla Roa
Vocal	Dr. Carlos Cuvas Castillo
Suplente	Dr. Omar Jacobo Santos Sánchez

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

Atentamente
 "Amor, Orden y Progreso"

Dr. Jesús Patricio Ordaz Oliver

Coordinador de la Maestría en Ciencias en Automatización y Control



Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
 Área Académica de Computación y Electrónica

JPOO/APL



Consejo del Estado de Hidalgo
 Dirección Regional de Atención al Ciudadano
 Carretera México-Atlixco, s/n, Atlixco, Hidalgo
 México, C.P. 42183
 Teléfono: (02 221) 1-4111 ext. 1006, 1007
 Fax: 2103
 aacye_icbi@uah.edu.mx

www.uah.edu.mx

Gracias a

CONACyT por la beca de maestría

otorgada durante el periodo

Agosto 2016 - Julio 2018.

Agradecimientos

Pienso que nadie puede decir que los logros que alcanzamos en la vida son un mérito individual, porque hay personas que en mayor o menor proporción, influyen y ayudan a que uno llegue a ellos...

En primer lugar quiero dar gracias a mis padres, la Señora Gabriela Lábra Pérez y el Señor Ignacio López López, por todo su amor, sacrificio e inmenso apoyo, porque gracias a ellos hoy puedo considerarme un buen hombre. Gracias a mi hermano César López Labra, por todo el cariño, apoyo y buenos momentos que siempre pasamos juntos. Con ellos tres, puedo sentirme dichoso en esta vida.

A Michelle Carrillo Peña, gracias por todo tu cariño, comprensión e inmenso apoyo, por estar siempre junto a mi y compartir muchos momentos felices.

A mis amigos, o mejor dicho, mis hermanos, porque ellos son la familia que elegí. Gracias por todo su apoyo, por los irremplazables momentos de felicidad, por su cariño y aliento en los momentos de tristeza, gracias por estos casi diez años de su incondicional amistad.

A mis asesores de tesis, el Dr. Omar Jacobo Santos Sánchez y la Dra. Liliam Rodríguez Guerrero, por su invaluable conocimiento que me han compartido, por toda su paciencia y apoyo para la realización de este trabajo de tesis, muchas gracias.

A mis sinodales que tuvieron el tiempo y la paciencia de dar revisión a este trabajo de tesis, gracias por sus valiosas observaciones. A mis profesores que tuve durante esta maestría, gracias por sus enseñanzas y empeño para lograr que mis conocimientos se enriquecieran.

A mis compañeros de la maestría, Eduardo, Daniel, David y Jorge, por los agradables momentos de diversión y por compartir sus conocimientos, por su apoyo y por hacer muy amenos estos dos años de posgrado.

Finalmente, gracias a todas las personas que de alguna manera me han ayudado a poder disfrutar de estas metas en mi vida.

Publicaciones

Este trabajo de tesis dió pie a la siguiente publicación.

López-Labra H., Santos-Sánchez O., Rodríguez-Guerrero L., Ordaz-Oliver J., Civas-Castillo C., (2018). Experimental results of optimal and robust control for uncertain linear time delayed systems. *Journal of Optimization Theory and Applications (JOTA)*. Springer.

Artículo aceptado para publicación.

Resumen

El problema de la regulación de temperatura del aire en un proceso de deshidratación de jitomate, en el cual se ve implicada la optimización del consumo de energía y la convergencia de la variable del proceso a la referencia tan rápido como sea posible, es abordado en el presente trabajo de tesis.

Debido a que el modelo matemático linealizado que representa la dinámica de la planta involucra un retardo de tiempo en el estado, se considera un problema de optimización clásico para resolver el problema de control óptimo para sistemas lineales con retardos.

En consecuencia con lo anterior, es desarrollada la prueba alternativa de la construcción de una funcional $V(\varphi)$ propuesta en [3], la cual permite hallar el control óptimo clásico para sistemas lineales con retardo de tiempo. Sin embargo, debido a la presencia de incertidumbres no lineales en el modelo nominal linealizado, el uso de un control lineal podría verse limitado en su desempeño.

Es por ello que se considera el enfoque de Rediseño de Lyapunov extendido a los sistemas con retardo de tiempo, con el que se diseña un término que compense las incertidumbres y no linealidades presentes en los sensores y acondicionadores de señal de la planta, esto para dar características de robustez al control óptimo lineal mejorando el rendimiento en lazo cerrado.

Los resultados experimentales obtenidos y la comparación contra un control PI optimizado, dan evidencia de la efectividad de la propuesta.

Abstract

The regulation problem of air temperature in a tomato dehydration process, in which is implied the energy optimization consumption and the convergence of process variable to the reference in a short time, is addressed in this thesis work.

Due to the fact that the linearized mathematical model, which represents the plant dynamics, involves a time delay in the state, is considered a classic optimization problem to solve the optimal control problem for time delay linear systems.

Consequently, the alternative test of the construction of a functional $\mathbf{V}(\varphi)$ proposed in [3] is developed, which allows to find the classical optimal control for time delay linear systems. However, due to the presence of nonlinear uncertainties in the linearized nominal model, the use of a linear control could be limited in the performance.

Here is considered The Lyapunov's Redesign approach extended to time delay systems, with this approach a component to compensate for the uncertainties and non-linearities present in the sensors and signal conditioners of the plant is designed, in order to give robustness characteristics to the optimal linear control increasing the performance in closed loop.

The experimental results obtained and the comparison versus an optimized PI control, give evidence of the effectiveness of the proposal.

Acrónimos

Acrónimo	Descripción
PID	Controlador proporcional integral derivativo.
PI	Controlador proporcional integral.
CD	Corriente directa.
CA	Corriente alterna.
VCD	Voltaje de corriente directa.
VCA	Voltaje de corriente alterna.
RTD	Detector de temperatura por resistencia.
LED	Diodo emisor de luz.
SP	Punto de referencia.
PV	Variable del proceso.
IAE	Integral del error absoluto.

Simbología

Simbolo	Descripción
$\mathbf{x}(t)$	Estado del sistema que representa la temperatura dentro de la cámara de deshidratación
$\mathbf{u}(t)$	Señal de control aplicada al sistema
\mathbf{u}_L	Señal de Control óptimo
K_1	Ganancia de la función transferencia del sistema
h	Retardo de tiempo en el estado
τ	Constante de tiempo de la función transferencia
\mathbf{K}_o	Ganancia óptima para un control óptimo a $50^\circ C$
$e(t)$	Error entre la referencia y la variable del proceso
\mathbf{Q}	Matriz de penalización para el estado del sistema
\mathbf{R}	Matriz de penalización para el control
\mathbf{x}_t	Trayectoria de un sistema con retardo en el estado
$K(t)$	Matriz fundamental de un sistema con retardos
φ	Condición inicial para un sistema con retardos
\mathbf{K}_L	Matriz de Lyapunov para los sistemas con retardos
v	Término de control robusto
δ	Término de incertidumbre no modelada
$\alpha_1, \dots, \alpha_4$	Funciones de clase κ
α_5, α_6	Constantes mayores a cero
T_{dur}	Tiempo de duración del experimento en minutos
T_{es}	Tiempo de establecimiento de la variable del proceso en segundos
M_p	Máximo sobre impulso de la variable del proceso
σ_G	Desviación estándar generalizada

Notación

Notación	Descripción
$\ \cdot \ $	Norma en el espacio vectorial
\mathbb{R}^n	Espacio Euclidiano n -dimensional
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Espacio Euclidiano $n \times n$ -dimensional
$x \in A$	El elemento x pertenece al conjunto A
$P > 0$	La matriz P es definida positiva
$Q < 0$	La matriz Q es definida negativa
$W \geq 0$	La matriz W es definida semi-positiva
$E \leq 0$	La matriz E es definida semi-negativa

Índice de figuras

2.1. Diseño plataforma experimental	18
2.2. Comportamiento corriente alterna	22
2.3. Detección de cruce por cero	23
2.4. Ángulo de disparo	23
2.5. Ángulo de disparo a 90°	24
2.6. Gráfica relación VCD-VCA contra aproximación polinómica	25
2.7. Circuito de interfaz de potencia	26
2.8. Respuesta planta real contra parámetros estimados	27
3.1. Respuesta de la planta a una entrada escalón	35
3.2. Diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado	37
3.3. Temperatura y Señal de control óptimo caso sin retardo	37
3.4. Error y Potencia control óptimo caso sin retardo	38
5.1. Diagrama de flujo de programación en Matlab	60
5.2. Estructura de programación de \mathbf{u}_L en LabVIEW	63
5.3. Temperatura y Señal de control óptimo caso con retardo	64
5.4. Error y Potencia caso con retardo	64
7.1. Comparativa 1 Temperatura y Señal de Control 50°C	81
7.2. Comparativa 1 Error y Potencia 50°C	82

7.3. Curvas deshidratación óptimo 50°C	83
7.4. Curvas deshidratación óptimo+robusto 50°C	83
7.5. Comparativa 1 Temperatura y Señal de Control 60°C	84
7.6. Comparativa 1 Error y Potencia 60°C	85
7.7. Curvas deshidratación óptimo 60°C	86
7.8. Curvas deshidratación óptimo+robusto 60°C	86
7.9. Comparativa 1 Temperatura y Señal de Control 70°C	87
7.10. Comparativa 1 Error y Potencia 70°C	88
7.11. Curvas deshidratación óptimo 70°C	89
7.12. Curvas deshidratación óptimo+robusto 70°C	89
7.13. Comparativa 2 Temperatura y Señal de Control 50°C	91
7.14. Comparativa 2 Error y Potencia 50°C	92
7.15. Curvas deshidratación óptimo 50°C	93
7.16. Curvas deshidratación óptimo+robusto 50°C	93
7.17. Comparativa 2 Temperatura y Señal de Control 60°C	94
7.18. Comparativa 2 Error y Potencia 60°C	95
7.19. Curvas deshidratación óptimo 60°C	96
7.20. Curvas deshidratación óptimo+robusto 60°C	96
7.21. Comparativa 2 Temperatura y Señal de Control 70°C	97
7.22. Comparativa 2 Error y Potencia 70°C	98
7.23. Curvas deshidratación óptimo 70°C	99
7.24. Curvas deshidratación óptimo+robusto 70°C	99
7.25. Óptimo+Robusto vs PI Óptimo Temperatura y Señal de Control 50°C	102
7.26. Óptimo+Robusto vs PI Óptimo Error y Potencia 50°C	103
7.27. Curvas deshidratación PI óptimo 50°C	104
7.28. Curvas deshidratación óptimo+robusto 50°C	104

7.29. Óptimo+Robusto vs PI Óptimo Temperatura y Señal de Control 60°C 105

7.30. Óptimo+Robusto vs PI Óptimo Error y Potencia 60°C 106

7.31. Curvas deshidratación PI óptimo 60°C 107

7.32. Curvas deshidratación óptimo+robusto 60°C 107

7.33. Óptimo+Robusto vs PI Óptimo Temperatura y Señal de Control 70°C 108

7.34. Óptimo+Robusto vs PI Óptimo Error y Potencia 70°C 109

7.35. Curvas deshidratación PI óptimo 70°C 110

7.36. Curvas deshidratación óptimo+robusto 70°C 110

Índice general

	Pág.
1. Introducción	9
1.1. Introducción general	9
1.2. Revisión bibliográfica de resultados previos	10
1.3. Justificación	13
1.4. Planteamiento del problema	14
1.5. Objetivos	14
1.5.1. Objetivo General	14
1.5.2. Objetivos específicos	14
2. Método de investigación científica	17
2.1. Diseño de la plataforma experimental	18
2.2. Implementación de controladores	19
2.3. Convertidor de señal e Interfaz de potencia	20
2.4. Cálculo de los nuevos parámetros de la planta	26
2.5. Método de experimentación	27
2.6. Método de graficación	28
2.7. Tabla de resultados experimentales	30

3. Control óptimo para el caso sin retardos	33
3.1. Identificación de la planta	33
3.2. Diseño de un control óptimo a 50°C	36
3.3. Resultados experimentales	37
4. Control óptimo para sistemas con retardo en el estado	39
4.1. Existencia y unicidad de las soluciones	40
4.2. Definiciones auxiliares para sistemas con retardos	41
4.3. Condiciones suficientes para la existencia del control óptimo para sistemas con retardo	43
4.4. Proposición de una funcional $\mathbf{V}(\varphi)$	44
4.5. Prueba alternativa para la construcción de $\mathbf{V}(\varphi)$	45
4.6. Obtención del control óptimo $\mathbf{u}_L(t)$ para sistemas con retardo	51
5. Cálculo de la ley de control óptima para sistemas con retardos mediante el algoritmo de D. Ross	55
5.1. Cálculo de las matrices $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1(\theta), \mathbf{K}_2(\xi, \theta)$	55
5.2. Implementación del control óptimo $\mathbf{u}_L(t)$	60
5.3. Resultados	63
6. Cálculo de la ley de control óptimo con características de robustez	67
6.1. Estabilización robusta (Rediseño de Lyapunov) caso sistema sin retardo	68
6.2. Estabilización robusta (Rediseño de Lyapunov) caso sistema con retardo	73
6.3. Implementación de un control óptimo con características de robustez	77
7. Resultados experimentales	79
7.1. Primeros resultados experimentales control óptimo vs control óptimo-robusto	80

7.2. Segundos resultados experimentales control óptimo vs control óptimo-robusto	90
7.3. Comparativa de un control óptimo con características de robustez vs PI óptimo	101
8. Conclusiones	113
A. Programación en Matlab	115
A.1. Programa mínimos cuadrados recursivos	115
A.2. Programa Índice de Ross Generalizado Matlab	119

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción general

Debido a las características de los sistemas con retardos, existe un retraso entre la entrada de control al sistema (y/o el estado) y la respuesta del mismo, generalmente debido a fenómenos de transporte de información. El problema para los sistemas con retardos de tiempo, es garantizar su estabilidad, dichos retardos pueden inducir a comportamientos complejos como oscilaciones, inestabilidad y comportamiento caótico, entre otros. Si es bien conocido que en algunos casos, el retardo del sistema puede despreciarse, en muchos otros su impacto en la dinámica del sistema cobra gran relevancia y debe ser tomado en cuenta en el modelo matemático y en la sintetización de su control.

Lo anterior ha motivado a buscar nuevas estrategias de control para el caso de sistemas con retardos, [1] [2] . Sin embargo, a pesar del gran número de publicaciones y resultados, el problema del control para sistemas con retardos es aún bastante complejo [1] [2].

Una de las estrategias de control propuesta por distintos autores, es el control óptimo para sistemas con retardos, dentro de esta área se encuentra el estudio del control óptimo de horizonte infinito para sistemas con retardos. Uno de los resultados relevantes que nos interesa estudiar es el publicado por D. Ross [3], en donde se propone un control óptimo de horizonte infinito para sistemas con retardo puntual en el estado.

Sin embargo, este control es aplicado a un caso para un sistema linealizado, donde se omiten dinámicas no modeladas, incertidumbres y no linealidades de sensores y acondicionadores de señal, por mencionar algunos. Lo anterior, da la motivación para diseñar un componente de control que se adicione al control óptimo de horizonte infinito para agregar robustez al sistema y mejorar el rendimiento en lazo cerrado con respecto al tiempo de establecimiento y al error.

1.2. Revisión bibliográfica de resultados previos

El control óptimo de horizonte infinito para sistemas con retardo temporal en el estado es un tema ampliamente estudiado. De hecho, con respecto al enfoque de programación dinámica, uno de los primeros trabajos seminales fue desarrollado en [4], donde el sistema con retardo de tiempo en el estado, fue considerado para el caso de horizonte infinito, se propuso la funcional y el control óptimo, así mismo fueron dadas las condiciones necesarias y suficientes.

Sin embargo, las fórmulas explícitas para encontrar las matrices del control óptimo no fueron dadas. En otra contribución importante [3], fueron dadas dichas

fórmulas explícitas para encontrar las matrices del control óptimo para sistemas con retardo temporal en el estado, adicionalmente, fue propuesto un método numérico para obtener una aproximación de dichas matrices, se abordó el problema de la existencia de las soluciones para el conjunto de ecuaciones de tipo de Riccati, los resultados de simulación (usando esta metodología) se pueden encontrar en [5]. En [6] y [7] se presentaron algunas propiedades sobre la estabilidad y la robustez del control óptimo propuesto en [4],[3].

Las soluciones exactas para algunos casos de ecuaciones del tipo de Riccati para sistemas con retardo de tiempo en el estado se dieron en [8], así como también algunos ejemplos numéricos. En [9] se propuso un método constructivo e iterativo utilizando funcionales de Lyapunov-Krasovskii de tipo completo, se sintetizó un control subóptimo y se obtuvieron las matrices del control mediante la resolución de las tres propiedades de la matriz de Lyapunov para sistemas con retardo de tiempo: propiedad algebraica, propiedad dinámica y la propiedad de simetría [10], adicional a esto, fue garantizada la estabilidad de todo el proceso en cada paso, por lo que se garantizó la existencia y unicidad de la solución.

Un tema muy importante es la robustez ante dinámicas no modeladas del control óptimo de horizonte infinito: mayor optimización de energía implica menos robustez y viceversa [11], en este sentido, un enfoque de control que vincula los problemas de control óptimo y robusto podría ser la mejor opción para algunas aplicaciones, por lo que con respecto al control óptimo o subóptimo que combinan características de robustez, es posible citar los siguientes trabajos: sobre incertidumbres paramétricas y control óptimo para sistemas con retardo temporal [12], [13], [14], [15] y [16]; en cuanto a perturbaciones externas acotadas en sistemas con retardo temporal

distribuido [17] y las perturbaciones externas acotadas para sistemas con retardo temporal variable [18]. Los resultados más recientes publicados acerca del problema de control óptimo de horizonte finito para sistemas con retardo de tiempo (sin características de robustez) son: [19], [20] y [21].

Por otro lado, hasta ahora no hay ningún resultado experimental utilizando el control óptimo para los sistemas lineales con retardo de tiempo en el estado, propuesto en [4], [3], la validación experimental de los algoritmos de control es una etapa crucial para validar su robustez en sistemas en lazo cerrado con una planta real, observe que la dinámicas no modeladas, las perturbaciones externas y las no linealidades de los actuadores y acondicionadores de señal están presentes en el lazo de control, y es una buena prueba para verificar el rendimiento del controlador en todas estas condiciones. Otro beneficio de la validación experimental es observar que el ajuste de un controlador es difícil en una situación real.

Para el caso de control óptimo, la elección de las matrices de penalización en el índice de desempeño cuadrático (Q y R) y los parámetros de la planta con retardo, define la solución de las ecuaciones de tipo de Riccati, por lo que un problema interesante es que en un lazo de control se verifique la facilidad para elegir estas matrices que generan una solución y ésta caracterice a un controlador óptimo con un rendimiento adecuado en tiempo real.

Entonces, en esta tesis, el control óptimo propuesto en [4], [3], se prueba experimentalmente en un proceso de temperatura específico, esto constituye una contribución de este trabajo, sin embargo, la presencia de dinámicas no lineales no modeladas en la planta [22], disminuyen su rendimiento en tiempo real, observe

que la dinámica no lineal no modelada, altera la estructura de la parte lineal nominal retardada, por lo que proponemos una solución basada en el enfoque de rediseño Lyapunov [23] extendido para sistemas con retardo, que otorga robustez ante dinámicas no modeladas al algoritmo de control óptimo.

La principal contribución de este trabajo es la propuesta de un control óptimo-robusto, que se sintetiza mediante el uso de la función de Bellman para un sistema con retardo en el estado [4] [3] y la teoría de estabilidad de Lyapunov-Krasovskii. Aunque el rediseño de Lyapunov se utiliza en [24] para casos con sistemas con retardo, en el se aborda el problema de estabilización robusta, pero no se presentó combinado con control óptimo, ni se presentaron resultados experimentales. Para este trabajo, los resultados experimentales dan evidencia de que el control óptimo-robusto mejora el rendimiento de la planta en lazo cerrado con respecto al tiempo de establecimiento y el error.

1.3. Justificación

A diferencia del problema abordado en [4] [3] en donde no se considera la existencia de dinámicas no modeladas, incertidumbres y no linealidades de los sensores y acondicionadores de señal, en el presente trabajo de tesis se adiciona un término no lineal al control óptimo que agregue características de robustez que compense las dinámicas inciertas para evidenciar una mejora en el desempeño del sistema en lazo cerrado. Aunado a esto, el problema cobra aún mas relevancia debido a que es posible aplicar el control obtenido en un proceso de deshidratación, cuyo modelo incluye retardos en el estado debido a una realimentación física de aire.

1.4. Planteamiento del problema

Se desea implementar un control óptimo para un sistema lineal con retardo puntual en el estado, que contenga una componente de robustez ante dinámicas no modeladas. La ley de control se implementará mediante un sistema digital diseñado en el software LabVIEW y se probará experimentalmente en un proceso de deshidratación.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo General

Sintetizar un control óptimo (en el sentido local) para un sistema nominal lineal retardado, con un componente robusto que compense el efecto de las perturbaciones no modeladas, mediante programación dinámica, funcionales de Lyapunov-Krasovskii y rediseño de Lyapunov para sistemas con retardos, lo cual garantice que las trayectorias del sistema en lazo cerrado son estables en el sentido de Lyapunov. Adicionalmente, implementar la ley de control en un proceso de deshidratación.

1.5.2. Objetivos específicos

- Sintetizar el controlador óptimo con una componente robusta para sistemas lineales retardados con dinámicas no modeladas, mediante programación dinámica y análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov para sistemas con retardos.

- Implementar la ley de control obtenida mediante un sistema de adquisición de datos y software especializado LabVIEW para poder aplicarlo a un sistema de deshidratación.
- Realizar un análisis comparativo con un control PI optimizado de corte industrial (PID 500 Selec) para evidenciar posibles ventajas en cuanto a consumo energético y desempeño de la planta.

Capítulo 2

Método de investigación científica

En esta sección se dan a conocer los métodos utilizados para recabar y analizar los datos obtenidos durante los experimentos que se realizaron en este trabajo de tesis.

Más en específico, en primera instancia, se describe el diseño de la plataforma experimental, así como también el método y los criterios que se tomaron en cuenta para realizar cada uno de los experimentos.

De igual forma se da una descripción de la interfaz de potencia utilizada. También se mencionan los métodos para obtener cada una de las gráficas mostradas. Por último se describen cada una de las variables que se consideran en las tablas mostradas en el capítulo de resultados experimentales.

2.1. Diseño de la plataforma experimental

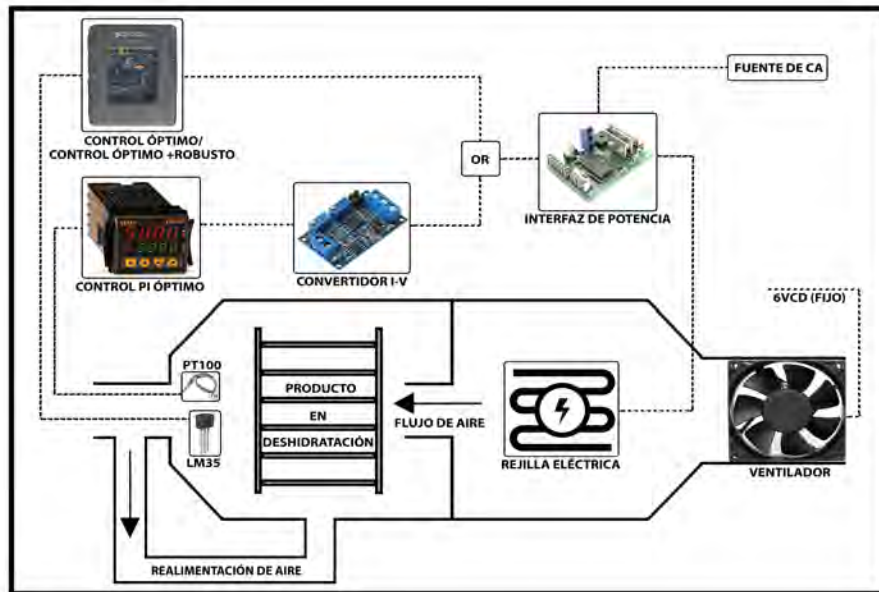


Figura 2.1: Diseño plataforma experimental

En la Figura 2.1 se observa un esquema de la plataforma experimental, en la cual se implementa el control óptimo, así como también el control óptimo con características de robustez y el control PI óptimo.

La estructura de la cámara de deshidratación está hecha de material metálico, con una dimensión de $60\text{cm} \times 40\text{cm} \times 30\text{cm}$ (largo, ancho y alto). Esta estructura consta de dos zonas, una zona de deshidratación y una zona de calentamiento.

Dentro de la zona de calentamiento se ubican dos elementos, el primero es un ventilador accionado por un motor de corriente directa, al cual se le aplica un voltaje de 6VCD para generar un flujo de aire constante que pasa a través

del segundo elemento, una rejilla eléctrica de 12Ω a la que se le aplica un voltaje variable de corriente alterna en un rango de $0VCA$ a $120VCA$, la cual tiene como finalidad ser la fuente de calor para llegar a una temperatura deseada, teniendo como temperatura máxima $95^{\circ}C$.

En la zona de deshidratación se ubican tres elementos, el primero consta de una base con malla metálica puesta de forma horizontal, en donde se colocan las rebanadas de jitomate a deshidratar, el flujo de aire caliente que proviene de la zona de calentamiento, impacta al producto en deshidratación. El segundo elemento es un sensor de temperatura LM35, el cual se conecta a una fuente de alimentación constante de $5VCD$, este sensor proporciona una señal de voltaje de $10mVCD$ por cada $1^{\circ}C$ de temperatura medido. El tercer elemento es un detector de temperatura por resistencia (RTD) modelo PT100, el cual tiene una referencia de 100Ω a una temperatura de $0^{\circ}C$.

Fuera de la cámara de deshidratación también hay otros elementos importantes tales como un PID y una tarjeta embebida National Instruments en dónde se implementan los controladores. De igual forma también es necesario el uso de un convertidor de señal (corriente a voltaje) y una interfaz de potencia.

2.2. Implementación de controladores

Controlador SELEC PID500

En lo que respecta al controlador PID, es un controlador de corte industrial marca SELEC modelo PID500, con entrada para RTD y salida de corriente normalizada ($4mA - 20mA$), en el cual se programa el control PI óptimo. Dicho control óptimo es

sintonizado con la metodología descrita en [26] con la que se obtienen las ganancias óptimas k_P y k_I respectivamente.

Tarjeta embebida National Instruments myRIO

Por otra parte se tiene una tarjeta embebida marca National Instruments, modelo myRIO, la cual cuenta internamente con el software de programación LabVIEW. También cuenta con entradas y salidas tanto digitales como analógicas, indispensables para implementar el control óptimo y el control óptimo con características de robustez.

Ambos controles son programados de forma discreta, con un periodo de muestreo de $100ms$ en todos los experimentos realizados.

2.3. Convertidor de señal e Interfaz de potencia

Convertidor de señal corriente a voltaje

Debido a que la salida del controlador PID500 es una salida que otorga una corriente normalizada (4mA-20mA), es necesario hacer uso de un convertidor de corriente a voltaje, ya que la interfaz de potencia, tiene una entrada de voltaje de corriente directa que va de $0VCD$ a $5VCD$. El convertidor se ajustó de manera experimental, de modo que se obtuviera una conversión entre la entrada de corriente y la salida de voltaje de $4mA-20mA$ a $0VCD-5VCD$ respectivamente.

Interfaz de potencia de corriente directa

La interfaz de potencia de corriente directa es usada para la implementación de los primeros dos controles, el control óptimo para el caso de un sistema sin retardos y un control óptimo para el caso de un sistema con retardo en el estado.

Esta interfaz de potencia tiene la función de convertir una señal de voltaje de corriente directa entre $0VCD$ y $5VCD$ a un voltaje variable también de corriente directa de $0VCD$ a $180VCD$ que alimenta a una resistencia de $7,5\Omega$, en consecuencia, la corriente máxima demandada por esta interfaz de potencia es de $24A$ y una potencia máxima de $4320W$.

Interfaz de potencia de corriente alterna

El diseño e implementación de una nueva interfaz de potencia se realiza para mejorar el desempeño de la planta, ya que como se mencionó anteriormente, la interfaz anterior, demandaba una corriente máxima de $24A$, esto tenía como consecuencia calentamiento en los cables, la clavija y el contacto de la fuente de alimentación.

El diseño de la nueva interfaz trabaja acondicionando un voltaje de corriente directa de $0 - 5VCD$ a un voltaje de corriente alterna de $0 - 120VCA$, el cual se aplica a la rejilla calefactora con una resistencia de 12Ω , así, la corriente máxima demandada por la planta es de $10A$ y la potencia máxima es de $1200W$, esto es posible mediante un circuito que controla el ángulo de disparo en la onda senoidal de la corriente alterna. Básicamente el procedimiento para lo anterior consiste en 3 etapas:

- Detección del cruce por cero de la corriente alterna.
- Cálculo del ángulo de disparo.
- Sincronización con la línea de corriente alterna.

Detección de cruce por cero de la corriente alterna

La corriente alterna tiene una forma senoidal que va desde un valor pico máximo (V_{p+}) a un valor pico mínimo (V_{p-}) pasando por cero, y a una frecuencia determinada como se muestra en la Figura 2.2.

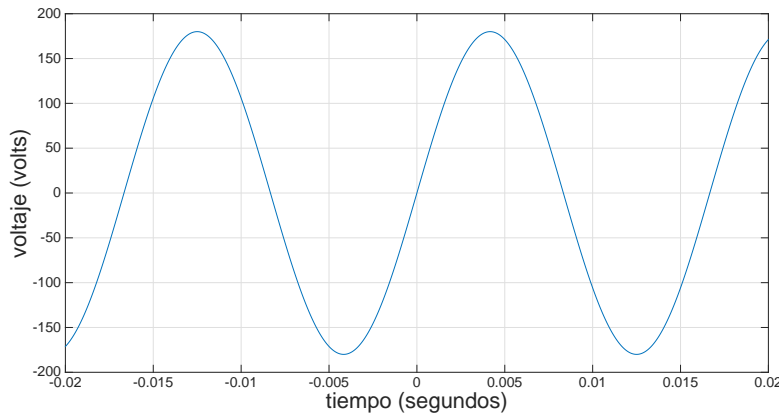


Figura 2.2: Comportamiento corriente alterna

Para poder regular el voltaje de 0-120VCA Es necesario detectar el instante en el que el valor de la corriente alterna es cero, a partir de ese instante se hace un conteo de tiempo para determinar el momento en el cual se debe dejar pasar parte de la media onda de corriente alterna a la rejilla. Esto se hace mediante un circuito de detección de cruce por cero, el cual se ve en la Figura 2.3.

La corriente alterna es rectificadora a través de un puente de diodos como se observa en la señal de color rojo, posteriormente esta misma señal pasa a través de una resistencia limitadora de corriente y del diodo LED del optoacoplador 4N25, cuando el voltaje de la señal rectificada se aleja del cero, el LED del optoacoplador satura la base de su transistor y hace que se genere una tensión de 5VCD en el emisor, cuando el voltaje de la señal rectificada se acerca al cero, el LED del optoacoplador deja de saturar la base del transistor y el voltaje en el emisor es 0VCD como se

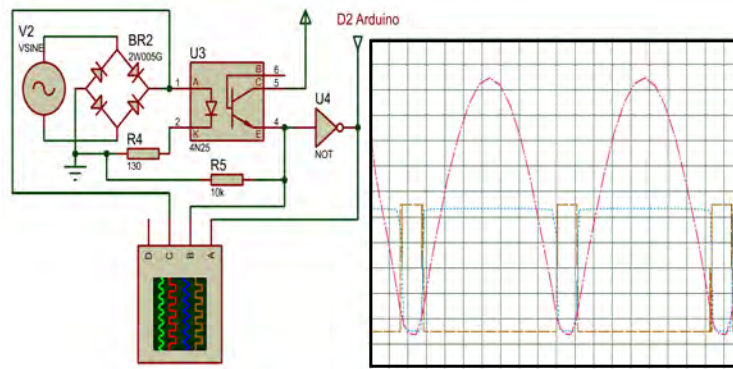


Figura 2.3: Detección de cruce por cero

puede observar en la señal de color azul. Enseguida se hace una inversión de la señal de color azul, el pulso obtenido, observado en la señal de color naranja, es el pulso necesario que indica que la corriente alterna está cruzando por cero.

Cálculo del ángulo de disparo

Considere la Figura 2.4.

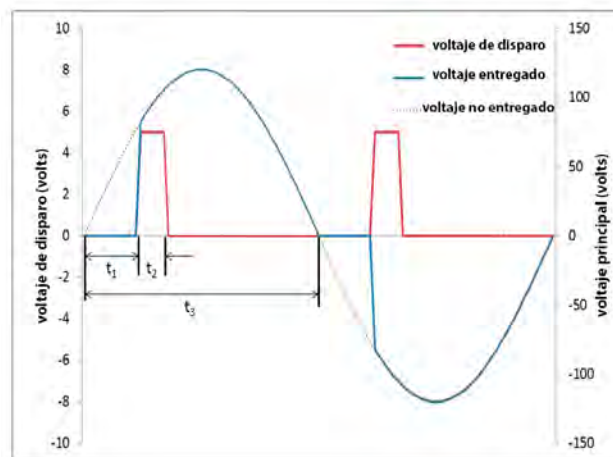


Figura 2.4: Ángulo de disparo

Aquí t_1 es el tiempo que transcurre después de detectar el cruce por cero, hasta el instante en que se da la señal de disparo, t_2 es el tiempo mínimo que tarda la señal de disparo para activar la compuerta del triac que conduce la corriente alterna entregada a la rejilla, t_3 es el tiempo de medio ciclo de la onda senoidal, así mismo $t_3 - t_1$ es el tiempo en que la corriente alterna es entregada a la rejilla. Entonces si se desea dejar pasar a la rejilla mayor o menor parte de la media onda senoidal, es necesario modificar el valor de t_1 . Para ello se hace uso de una placa Arduino NANO, la cual cuenta con un microprocesador que se encarga de calcular el tiempo t_1 . En la Figura 2.5 se puede observar el funcionamiento del control del ángulo de disparo a 90° .

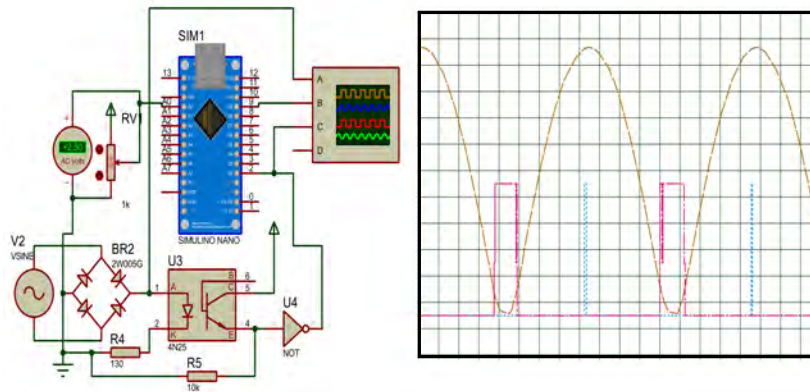


Figura 2.5: Ángulo de disparo a 90°

El pulso obtenido en la detección de cruce por cero es enviado al Pin número 2 del Arduino NANO, el cual sirve como interrupción de su programa principal, en donde se realiza la lectura de la señal de control (0-5VCD) en su entrada analógica A0, al enviar la señal de cruce por cero al pin 2 del Arduino, interrumpe el programa principal y dependiendo del valor del dato que es leído en la entrada analógica, se hace un escalamiento de 0-5VCD a 0-8.33ms, este tiempo calculado es t_1 en la Figura 2.4.

En la Figura 2.6 se puede observar que la relación entre el voltaje de corriente directa y el voltaje de corriente alterna no es lineal, por este motivo se hace aproximación polinómica de esta relación que se da a continuación.

$$VCA = -4.75VCD^2 + 46.3258VCD + 4.4501. \quad (2.1)$$

Aquí VCA representa el voltaje de corriente alterna y VCD representa el voltaje de corriente continua.

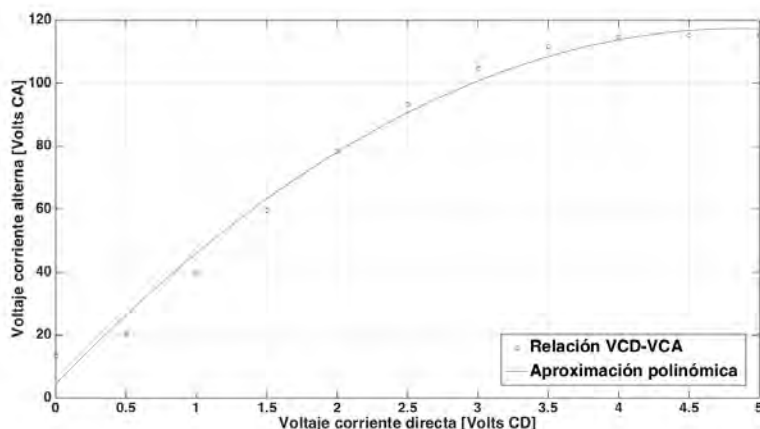


Figura 2.6: Gráfica relación VCD-VCA contra aproximación polinómica

Sincronización con la línea de corriente alterna

Transcurrido el tiempo calculado t_1 , otro pulso es enviado al optoacoplador MOC3021 el cual aísla eléctricamente a la etapa de control con la de potencia, el LED interno del MOC3021 excita al DIAC y este a su vez satura la compuerta del TRIAC MAC22, que hace pasar parte de la onda senoidal a la carga. Con este circuito se tiene la certeza que el pulso que hace conducir la corriente a través del TRIAC comienza exactamente cuando la corriente alterna está cruzando por cero. La capacidad de corriente máxima y voltaje máximo del TRIAC es de 25A y 600V.

En la Figura 2.7 se muestra el diagrama del circuito de la interfaz de potencia.

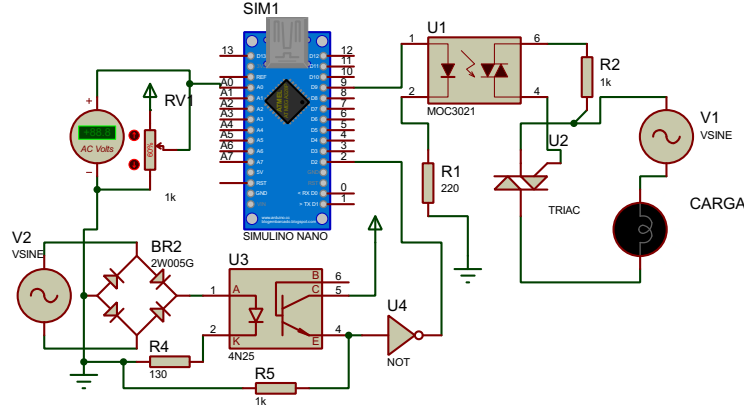


Figura 2.7: Circuito de interfaz de potencia

2.4. Cálculo de los nuevos parámetros de la planta

Debido a que la estructura de la planta se modificó, fue necesario hacer una nueva identificación de parámetros de la planta mediante la programación del método de mínimos cuadrados recursivos [25]. El programa se puede ver en el Apéndice. El nuevo modelo que representa la dinámica de la planta en donde se implementará el control óptimo con características de robustez es:

$$\dot{x}(t) = -0.011227685x(t) + 0.00736970x(t - 17) + 0.001573951u(t), \quad (2.2)$$

en donde $x(t)$ representa el estado del sistema y $u(t)$ es la señal de control aplicado al sistema.

En la Figura 2.8 se muestra una comparación entre la dinámica real de la planta, y la dinámica con los parámetros estimados.

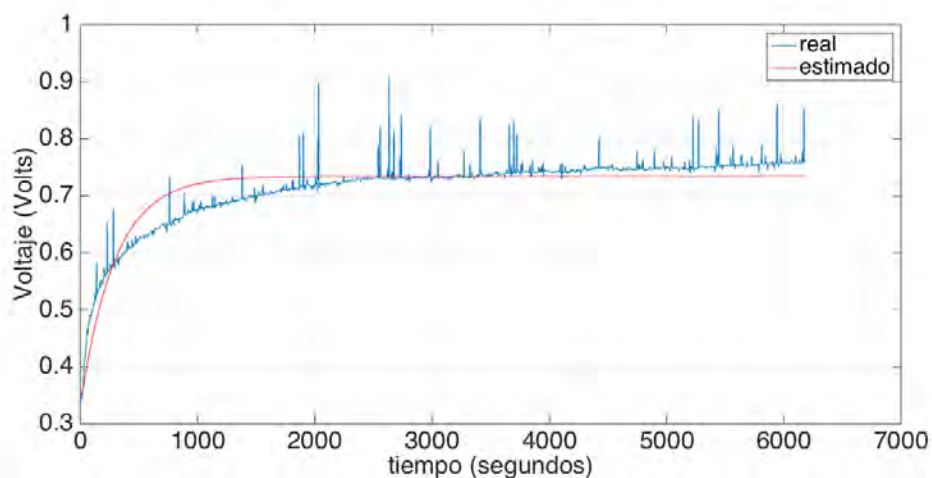


Figura 2.8: Respuesta planta real contra parámetros estimados

La discrepancia entre la respuesta del modelo aproximado y la variable del proceso medida, puede estar relacionada a la presencia de dinámicas no modeladas, no linealidades del actuador y parámetros inciertos.

2.5. Método de experimentación

La metodología que se lleva a cabo para realizar cada uno de los experimentos hechos en este trabajo de tesis se describe a continuación.

El experimento consiste en deshidratar cuatro rebanadas de jitomate de aproximadamente 5mm de grosor cada una. Cada rebanada comienza inicialmente con 5g de peso, del cual, el 90% es agua y el 10% restante es materia seca. El objetivo final es eliminar el 90% del total de agua de cada rebanada de jitomate, es decir, el 81% del peso total de cada rebanada, en otros términos, el peso final de cada rebanada debe ser muy aproximado a 0.95g [29].

El criterio que se ocupa para decidir cuando terminar el experimento, es que al menos tres rebanadas lleguen a su peso final deseado ($0.95g$).

Para conocer el peso de cada rebanada de jitomate durante el experimento, se abre la compuerta de la cámara de deshidratación, se extrae el producto e inmediatamente se cierra la compuerta para evitar que en lo posible, la temperatura dentro de la cámara se modifique. Posteriormente, se pesa cada una de las rebanadas y se registran los datos obtenidos. Por último, el producto es devuelto a la cámara de deshidratación. Este procedimiento se realiza cada 15 minutos y el producto en deshidratación debe durar el menor tiempo posible fuera de la cámara.

2.6. Método de graficación

Para realizar una comparación entre la implementación de un control y otro con respecto a su eficiencia, se han realizado cinco gráficas diferentes que describen cada experimento.

Gráfica de Temperatura VS Tiempo

En esta gráfica se muestra la medición respecto al tiempo de la temperatura dentro de la cámara de deshidratación. Como ya se mencionó anteriormente, el periodo de muestreo es de $100ms$. La medición se realiza utilizando el sensor de temperatura LM35 mencionado en la sección de Diseño de la plataforma experimental. La señal del sensor LM35 es enviada a una de las entradas analógicas de la tarjeta MyRIO, en donde se registran todas las muestras en un vector de datos, para posteriormente graficar en Matlab.

Gráfica de Control VS Tiempo

Esta gráfica muestra el voltaje aplicado a la rejilla calefactora. Para ello, primeramente se realiza el cálculo del control que se está implementando en línea y en forma discreta, recordando que el periodo de muestreo es de $100ms$. Este control es programado en la tarjeta MyRIO y el valor del control obtenido es limitado por un saturador virtual, de modo que la señal de control esté limitada entre $0 - 5VCD$. Los datos obtenidos son registrados en un vector de datos. Posteriormente con una aproximación polinómica para cada interfaz de potencia, se obtienen los valores del voltaje de corriente alterna aplicado a la rejilla calefactora, la aproximación polinómica para cada interfaz (interfaz de corriente directa e interfaz de corriente alterna respectivamente) son las siguientes:

$$VCD_{rejilla} = 36VCD_{control},$$

$$VCA_{rejilla} = -4.75VCD_{control}^2 + 46.3258VCD_{control} + 4.4501,$$

En donde $VCD_{control}$ es el voltaje de corriente directa de control, $VCD_{rejilla}$ es el voltaje de corriente directa aplicado a la rejilla utilizando la interfaz de corriente directa y $VCA_{rejilla}$ es el voltaje de corriente alterna aplicado a la rejilla utilizando la interfaz de corriente alterna.

Gráfica de Error VS Tiempo

Esta gráfica muestra la diferencia que existe entre la temperatura deseada y la temperatura de la cámara de deshidratación, $(SP - PV)$, es decir, muestra el error instantáneo que se tiene en cada iteración ($100ms$), los datos obtenidos, son guardados en un vector de datos para posteriormente realizar su gráfica en Matlab.

Gráfica de Potencia VS Tiempo

Aquí se grafica la potencia instantánea obtenida en cada iteración ($100ms$) esta potencia se calcula fuera de línea en Matlab, el cálculo es simple, se ocupa la fórmula de la potencia:

$$P_{instantnea} = \frac{V_{rejilla}^2}{R_{rejilla}},$$

en donde $P_{instantnea}$ es la potencia instantánea calculada, $V_{rejilla}$ es el voltaje aplicado a la rejilla (voltaje de corriente alterna o directa) y $R_{rejilla}$ es la resistencia de la rejilla.

Gráfica de Curvas de deshidratación

En esta gráfica se muestran las curvas de deshidratación en términos de porcentaje de cada una de las rebanadas de jitomate en cada experimento. A diferencia de las gráficas explicadas anteriormente, aquí el periodo de muestreo es de $15 minutos$. es decir, los datos se registran cada que se extrae el producto de la cámara de deshidratación. Los datos se registran en una tabla para posteriormente realizar la gráfica en Matlab.

2.7. Tabla de resultados experimentales

A continuación se describen 5 variables importantes que se registran en las tablas de resultados experimentales y que describen cada experimento. Considerando dichas variables, se puede analizar y determinar la eficiencia de los controles implementados.

Variable de Energía

Describe la energía total consumida durante el experimento, se da en términos de Watts consumidos por hora (Wh), se calcula con la función *trapz* en Matlab, la cual da una aproximación de la integral de una función mediante el método trapezoidal.

Variable de la Integral del Error Absoluto IAE

Es una forma de medir el índice de desempeño del control implementado. Para calcularlo, es necesario obtener el valor absoluto de todos los datos del error, posteriormente, se utiliza la función *trapz* en Matlab para calcular una aproximación de la integral del error absoluto.

Variable de Tiempo de duración

Esta variable indica el tiempo en minutos de la duración de cada experimento.

Variable de Tiempo de establecimiento

Indica el tiempo en segundos que tarda la temperatura (estado del sistema) en establecerse. Se considera que la temperatura se estableció cuando entra en una banda de tolerancia de $\pm 2\%$ del valor de la temperatura deseada.

Variable de desviación estándar generalizada

Describe la medida de dispersión generalizada del porcentaje de deshidratación entre las rodajas de jitomate. La variable se calcula obteniendo la desviación estándar de todas las rodajas en cada iteración (15 *minutos*), posteriormente se suman todas las desviaciones estándar y se obtiene un promedio de ellas para obtener una desviación estándar generalizada de cada experimento.

Capítulo 3

Control óptimo para el caso sin retardos

En este capítulo se presenta el cálculo del modelo matemático lineal aproximado y sin retardos que describe la dinámica de una planta deshidratadora, así como también la metodología para sintetizar un controlador óptimo para dicha planta. Los resultados experimentales del control óptimo junto con la planta en lazo cerrado, son presentados al final del capítulo.

3.1. Identificación de la planta

Con el propósito de aproximar el modelo matemático de primer orden que describe la dinámica de la planta deshidratadora, se calcula su función transferencia mediante el método de respuesta al escalón, la forma generalizada de la función transferencia para un sistema lineal de primer orden sin retardo es:

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{K_1}{\tau s + 1}$$

en donde $X(s)$ representan la respuesta del sistema, $U(s)$ representa la entrada de control, K_1 es la ganancia de la planta y está dada en términos de el valor alcanzado en la respuesta de la planta en estado estacionario dividido por el valor de la entrada escalón aplicado, τ es el tiempo en que la respuesta alcanza el 63.21 % del valor de la respuesta en estado estacionario.

La planta tiene como variable de entrada el voltaje (VCD) aplicado a una rejilla calefactora, como variable de salida, un voltaje de $10mVCD$ por cada $1^\circ C$ proporcionado por un sensor de temperatura LM35, este voltaje es muestreado por una tarjeta de adquisición de datos de la marca National Instruments DAQ NI-USB 6008.

Con el fin de obtener el modelo matemático aproximado, se aplicó una entrada escalón de $48.35VCD$ en lazo abierto para que en la salida se obtuviera un valor de $0.51325VCD$ equivalente a $51.32^\circ C$ como se muestra en la Figura 3.1.

Tomando en cuenta la respuesta real de la planta, los parámetros aproximados para la función transferencia son:

$$K_1 = \frac{0.51325 - 0.26295}{48.35} = 0.005176327, \quad \tau = 217,17,$$

de modo que la función transferencia de la planta que aproxima el comportamiento de la planta queda de la forma:

$$G(s) = \frac{0.0051776327}{217.17s + 1} = \frac{0.00002383536861}{s + 0.004604687572} \quad (3.1)$$

Se simula la función transferencia calculada para hacer la comparación contra la planta real como se muestra en la Figura 3.1.

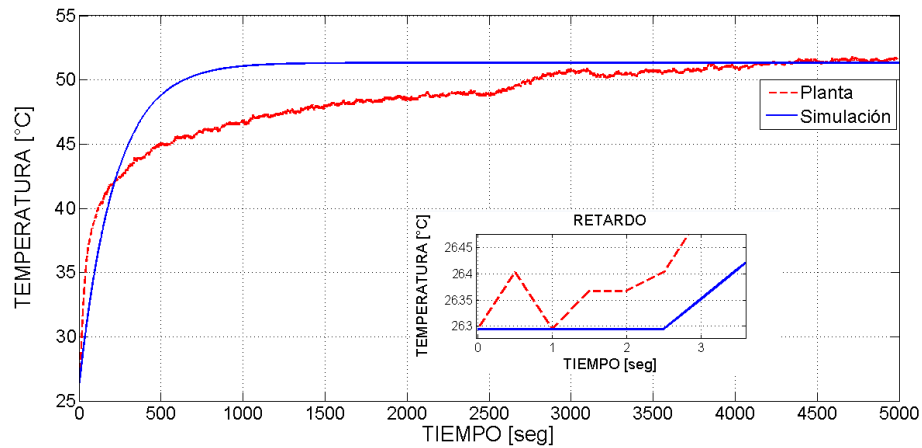


Figura 3.1: Respuesta de la planta a una entrada escalón

Como se puede observar, existe una similitud entre el comportamiento de la planta real y el modelo aproximado de la misma. En la subgráfica se puede observar que el retardo de la planta es de $h = 2.5s$, tomando el criterio de Astrom, el cual nos dice que, si el retardo de tiempo es por lo menos 4 veces menor que la constante de tiempo τ , es posible no considerar dicho retardo en el sistema.

Con este modelo matemático aproximado de la planta, es posible buscar un control que modifique en lazo cerrado las dinámicas del sistema a un comportamiento deseado.

La discrepancia entre la respuesta del modelo aproximado y la variable del proceso medida, puede explicarse debido a la presencia de dinámicas no modeladas, no linealidades del actuador y parámetros inciertos.

3.2. Diseño de un control óptimo a 50°C

Considere la función transferencia dada en (3.1), su representación en espacio de estado es de la forma

$$\dot{x} = -0.004604687572x(t) + 0.00002383536861u(t). \quad (3.2)$$

Se busca el controlador $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_O\mathbf{x}(t)$ que minimice el índice de desempeño cuadrático de horizonte infinito de la forma

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t))dt, \quad (3.3)$$

donde $\mathbf{Q} \geq 0$, $\mathbf{R} > 0$.

La ganancia óptima \mathbf{K}_O es calculada con la instrucción *lqr* (acrónimo de Linear-Quadratic Regulator) en MATLAB dadas las matrices conocidas A , B , Q , y R . En este caso se define convenientemente a: $\mathbf{R} = 70$, $\mathbf{Q} = 1000$ obteniendo como resultado la ganancia óptima para este caso escalar

$$\mathbf{K}_O = 0.037.$$

El sistema en lazo cerrado con el control óptimo resulta de la forma como se muestra en la Figura 3.2.

El control óptimo calculado, es programado en el entorno de programación gráfica LabVIEW. El offset de **0.56** que se adiciona al control óptimo se calculó para mantener una temperatura constante a 50°C, es decir, cuando el error entre la

temperatura deseada y el estado de la planta es cero.

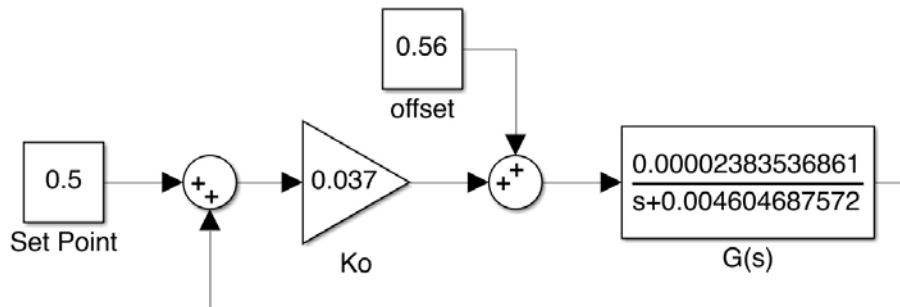


Figura 3.2: Diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado

La señal de control es acondicionada mediante una interfaz de potencia, de manera que se haga un escalamiento entre 0-5VCD entregados por la tarjeta de adquisición de datos DAQ NI-USB 6008 a 0-180VCD aplicados a la rejilla calefactora.

3.3. Resultados experimentales

Los resultados de la temperatura, control, error y potencia, se muestran en la Figura 3.3 y Figura 3.4.

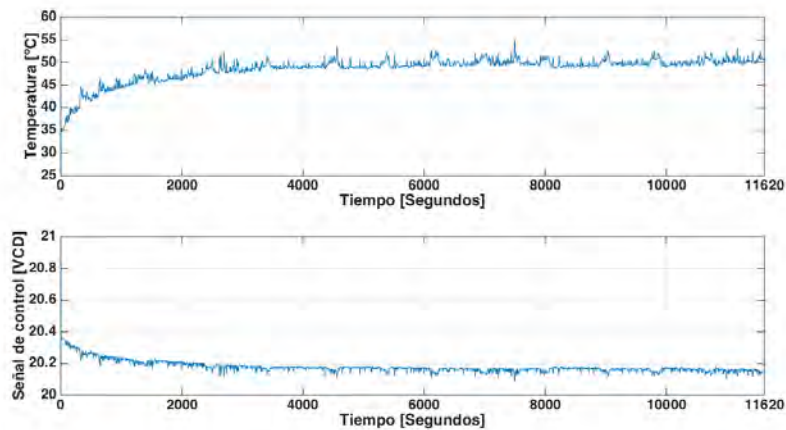


Figura 3.3: Temperatura y Señal de control óptimo caso sin retardo

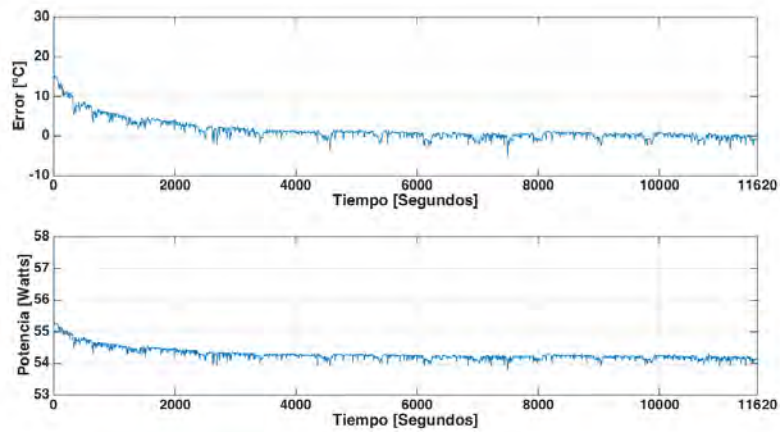


Figura 3.4: Error y Potencia control óptimo caso sin retardo

Una forma de medir el desempeño de la respuesta en lazo cerrado es calculando la integral del valor absoluto del error (IAE):

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt = 204290.$$

La energía consumida durante el experimento resulta ser 54.28Wh.

Como se puede observar en la gráfica de temperatura, existen algunos sobreimpulsos periódicos, esto es debido a incertidumbres que no se contemplaron en el modelo aproximado de la planta y debido a perturbaciones en la temperatura ambiente que entran al abrir la puerta de la cámara de deshidratación ya que es necesario extraer el producto cada 15 minutos para conocer su estado de humedad, todo lo anterior se traduce en un mayor error entre la temperatura deseada y el estado del sistema.

En el siguiente capítulo se da la teoría para abordar el problema de control óptimo para un sistema con retardo en el estado.

Capítulo 4

Control óptimo para sistemas con retardo en el estado

Considere el siguiente sistema con retardo en el estado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t-h) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),$$

donde \mathbf{A}_0 y $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ y condición inicial

$$\mathbf{x}(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-h, 0],$$

en donde $\varphi(\theta) \in \mathbb{C} : [-h, 0]$ donde \mathbb{C} representa el conjunto de funciones continuas definidas en $[-h, 0]$.

Ahora se define el índice de desempeño cuadrático de la forma:

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)]dt, \quad (4.1)$$

conociendo que la matriz $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es semi definida positiva y $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ una matriz definida positiva.

Aquí el problema radica en hallar el control $\mathbf{u}(t)$ tal que minimice al índice de desempeño J .

En la siguiente sección se hace referencia a la existencia y unicidad de las soluciones [3] para el caso de sistemas con retardos.

4.1. Existencia y unicidad de las soluciones

Se definen las siguientes variables:

$\mathbf{x}(t)$ la variable que representa el estado instantáneo del sistema.

\mathbf{x}_t la variable que representa el estado completo del sistema, $\mathbf{x}(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, donde h es el retardo.

$\mathbf{x}(t, \mathbf{u}, \varphi)$ la variable que representa el valor del estado $\mathbf{x}(t)$ usando un control $\mathbf{u}(t)$ con condición inicial φ .

Considere el siguiente sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t - h) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad (4.2)$$

$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_t)$ entonces el sistema se puede reescribir como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t - h) + \mathbf{B} \mathbf{u}(\mathbf{x}_t), \quad (4.3)$$

más aún la dinámica del sistema es función del estado completo del sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}_t), \quad (4.4)$$

en donde $\mathbf{u}(x_t) = 0$ y $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$.

Entonces las soluciones de (4.4) existen y son únicas si se cumple la condición de Lipschitz

$$\forall \varphi \in \mathbb{C} : [-h, 0] \exists L > 0 / \| f(\mathbf{x}(\theta)) - f(\mathbf{y}(\theta)) \| \leq L \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|$$

y además

$$\| \mathbf{u}(\mathbf{x}_t) - \mathbf{u}(\mathbf{y}_t) \| \leq L_u \| \mathbf{x}_t - \mathbf{y}_t \|, \quad L_u > 0.$$

A continuación se presentan tres definiciones auxiliares enunciadas en [3] para sistemas con retardos.

4.2. Definiciones auxiliares para sistemas con retardos

Definición 1. *La solución trivial de $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}_t)$ se dice estable si*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 /$$

$$\| \varphi \| < \delta \Rightarrow \| \mathbf{x}_t \| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Definición 2. Si la Definición 1 se satisface y tenemos que $\|\mathbf{x}_t\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $\mathbf{x} = 0$ se dice asintóticamente estable. Si todas las soluciones se aproximan a cero cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $\mathbf{x} = 0$ es globalmente asintóticamente estable.

Definición 3. Un control admisible para el sistema (4.2) satisface

i) $\mathbf{u}(t) < \mathbf{u}(\mathbf{x}_t)$.

ii) $\mathbf{u}(\mathbf{x}_t)$ es tal que (4.2) tiene una solución $\forall t \geq 0$ y $\forall \varphi \in \mathbb{C} : [-h, 0]$.

iii) La solución trivial de (4.2) es asintóticamente estable.

iv) $\mathbf{u}(\mathbf{x}_t)$ es tal que $J < \infty \forall \varphi \in \mathbb{C} : [-h, 0]$.

En el artículo de Krasovskii [4] se considera que una ley de control admisible para un sistema de la forma (4.2) satisface lo siguiente:

1) El control lineal es una funcional del estado completo \mathbf{x}_t

$$\mathbf{u}_L(t) = \mathbf{K}_0 \mathbf{x}(t) + \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta) \mathbf{x}(t + \theta) d\theta, \quad (4.5)$$

donde $\mathbf{K}_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $\mathbf{K}_1(\theta)$ es una matriz de funciones continuas de $m \times n$ definida en el intervalo $[-h, 0]$.

2) El sistema de la forma (4.2) en lazo cerrado con una ley de control admisible de la forma (4.5) es estable.

A continuación se dan las condiciones suficientes para la existencia de un control óptimo para sistemas lineales con retardos[3], [4].

4.3. Condiciones suficientes para la existencia del control óptimo para sistemas con retardo

Considere un sistema de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t - h) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (4.6)$$

su índice de desempeño es de la forma

$$J = \int_0^{\infty} f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t))dt, \quad (4.7)$$

donde $f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t))$ es una funcional definida positiva. Si existe un control admisible $\mathbf{u}_L(t)$ para el sistema (4.6) y una funcional definida positiva $\mathbf{V}(\mathbf{x}_t)$ que satisface las siguientes condiciones:

$$\left. \frac{d\mathbf{V}(\mathbf{x}_t)}{dt} \right|_{(4.6), \mathbf{u}(t)=\mathbf{u}_L} (t) + f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_t, \mathbf{u}_L(t)) = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.8)$$

$$\left. \frac{d\mathbf{V}(\mathbf{x}_t)}{dt} \right|_{(4.6), \mathbf{u}(t)=\mathbf{u}_L(t)} + f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_t, \mathbf{u}_L(t)) \leq \left. \frac{d\mathbf{V}(\mathbf{x}_t)}{dt} \right|_{(4.6), \mathbf{u}(t)} + f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t)). \quad (4.9)$$

Para cualquier control admisible $\mathbf{u}(t)$, entonces $\mathbf{u}_L(t)$ proporciona un mínimo para el índice de desempeño (4.7) entre todos los controles admisibles, además

$$\mathbf{V}(\varphi) = J(\varphi, \mathbf{u}_L(t))$$

es el valor óptimo del índice de desempeño (4.7).

Las dos condiciones anteriores se puede resumir en una sola, la ecuación del tipo de Bellman

$$\min_{\mathbf{u}(t)} \left\{ \left. \frac{d\mathbf{V}(\mathbf{x}_t)}{dt} \right|_{(4.6), \mathbf{u}(t)} + f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t)) \right\} = 0. \quad (4.10)$$

Es por ello que en las condiciones suficientes, se supone que se conoce la funcional de Bellman $\mathbf{V}(\mathbf{x}_t)$ y se busca hallar $\mathbf{u}_L(t)$ tal que la ecuación de Bellman dada en (4.10) se satisfaga.

En la siguiente sección se propone y también se construye una funcional $\mathbf{V}(\varphi)$ la cual cumpla las condiciones antes mencionadas.

4.4. Proposición de una funcional $\mathbf{V}(\varphi)$

Proposición [3]: Si $\mathbf{u}_L(t) = \mathbf{u}_L(\mathbf{x}_t)$, $\forall t \geq 0$ es un control lineal admisible que satisface una condición de Lipschitz y φ es una función inicial arbitraria, entonces la función

$$\mathbf{V}(\varphi) = J(\varphi, \mathbf{u}_L) = \int_0^{\infty} \left\{ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_L^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}_L(t) \right\} dt \quad (4.11)$$

tiene representación

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\varphi) = & \varphi^T(0)\mathbf{K}_0\varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\varphi(\theta)d\theta \\ & + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \varphi^T(\xi)\mathbf{K}_2(\xi, \theta)\varphi(\theta)d\xi d\theta, \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde:

- i) \mathbf{K}_0 es una matriz simétrica definida positiva.
 - ii) \mathbf{K}_1 es una matriz continua en $[-h, 0]$.
 - iii) \mathbf{K}_2 es una función continua $\forall \xi, \theta \in [-h, 0]$.
- además $\mathbf{K}_2^T(\xi, \theta) = \mathbf{K}_2(\theta, \xi)$.

La prueba original para la construcción de la funcional $\mathbf{V}(\varphi)$ no fué dada en [3], solo se hace mención que se realizó mediante aproximaciones de Riez, dicha prueba sólo se encuentra en la tesis doctoral de D. Ross [3], a la cuál no se tiene acceso fácilmente. Debido a lo anterior, la siguiente prueba, es una prueba alternativa, realizada como parte esencial del trabajo de la presente tesis.

4.5. Prueba alternativa para la construcción de $\mathbf{V}(\varphi)$

(condiciones suficientes)

Sea el sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t-h) + \mathbf{B}u(t) \quad (4.13)$$

$$\mathbf{x}(\theta) = \varphi(\theta) \quad \theta \in [-h, 0]$$

y de acuerdo al artículo de Krasovskii [4], se considera una ley de control óptima (condiciones necesarias) como sigue:

$$\mathbf{u}_L(\mathbf{x}_t) = \mathbf{K}_0\mathbf{x}(t) + \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\theta, \quad (4.14)$$

donde \mathbf{K}_0 y $\mathbf{K}_1(\theta)$ son funciones tal que el sistema (4.13) en lazo cerrado con el control (4.14) es:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{(\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}\mathbf{K}_0)}_{\tilde{\mathbf{A}}}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t-h) + \underbrace{\mathbf{B} \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\theta}_{\mathbf{G}(\theta)=\mathbf{B}\mathbf{K}_1(\theta)}, \quad (4.15)$$

ya que el control $\mathbf{u}_L(\mathbf{x}_t)$ dado por (4.14) es óptimo, entonces es admisible y (4.15) es estable, debido a que se satisface la ecuación (4.10).

Reescribiendo el sistema de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t-h) + \int_{-h}^0 \mathbf{G}(\theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\theta. \quad (4.16)$$

La solución en la forma de Cauchy [27] de (4.16), es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t, \varphi) &= \mathbf{K}(t)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \mathbf{K}(t-\theta-h)\mathbf{A}_1\varphi(\theta)d\theta \\ &+ \int_{-h}^0 \int_{-h}^{\theta} \mathbf{K}(t-\theta+\xi)\mathbf{G}(\xi)d\xi\varphi(\theta)d\theta, \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde $\mathbf{K}(t)$ es la matriz fundamental de (4.16) y $\varphi(\theta) \in \mathbb{C} : [-h, 0]$.

De otro modo se puede reescribir (4.17) como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t, \varphi) &= \mathbf{K}(t)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \underbrace{\left\{ \mathbf{K}(t - \theta - h)\mathbf{A}_1 + \int_{-h}^0 \mathbf{K}(t - \theta + \xi)G(\xi)d\xi \right\}}_{\hat{\mathbf{K}}} \varphi(\theta)d\theta, \\ \mathbf{x}(t, \varphi) &= \mathbf{K}(t)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \hat{\mathbf{K}}(t, \theta)\varphi(\theta)d\theta, \end{aligned} \quad (4.18)$$

A continuación se define un índice de desempeño de la forma

$$J(\varphi, \mathbf{u}_L) = \int_0^\infty g(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_L(t))dt, \quad (4.19)$$

donde

$$g(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_L(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_L^T(\mathbf{x}_t)\mathbf{R}\mathbf{u}_L(\mathbf{x}_t), \quad (4.20)$$

sustituyendo el control (4.14) en (4.20) tenemos que

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_L(t)) &= \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \left[\mathbf{K}_0\mathbf{x}(t) + \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\mathbf{x}(t + \theta)d\theta \right]^T \\ &\quad \times \mathbf{R} \left[\mathbf{K}_0\mathbf{x}(t) + \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\mathbf{x}(t + \theta)d\theta \right] \\ &= \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{K}_0^T\mathbf{R}\mathbf{K}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{K}_0^T\mathbf{R} \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\mathbf{x}(t + \theta)d\theta \\ &\quad + \int_{-h}^0 \mathbf{x}^T(t + \theta)\mathbf{K}_1^T(\theta)d\theta\mathbf{R}\mathbf{K}_0\mathbf{x}(t) \\ &\quad + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \mathbf{x}^T(t + \theta_1)\mathbf{K}_1^T(\theta_1)\mathbf{R}\mathbf{K}_1(\theta_2)\mathbf{x}(t + \theta_2)d\theta_1d\theta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{x}^T(t) \underbrace{[\mathbf{Q} + \mathbf{K}_0^T \mathbf{R} \mathbf{K}_0]}_{M_1} \mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^T(t) \int_{-h}^0 \underbrace{\mathbf{K}_0^T \mathbf{R} \mathbf{K}_1(\theta)}_{M_2(\theta)} \mathbf{x}(t + \theta) d\theta \\
 &\quad + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \mathbf{x}^T(t + \theta_1) \underbrace{\mathbf{K}_1^T(\theta_1) \mathbf{R} \mathbf{K}_1(\theta_2)}_{M_3(\theta_1, \theta_2)} \mathbf{x}(t + \theta_2) d\theta_1 d\theta_2,
 \end{aligned}$$

de otra forma, $g(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_L(\mathbf{x}_t))$ se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
 g(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_L(\mathbf{x}_t)) &= \mathbf{x}^T(t) M_1 \mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^T(t) \int_{-h}^0 M_2(\theta) \mathbf{x}(t + \theta) d\theta \\
 &\quad + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \mathbf{x}^T(t + \theta_1) M_3(\theta_1, \theta_2) \mathbf{x}(t + \theta_2) d\theta_1 d\theta_2. \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

Entonces el índice de desempeño (4.19) se puede reescribir en función de $\mathbf{u}_L(x_t)$ como sigue:

$$J(\varphi, \mathbf{u}_L(\mathbf{x}_t)) = \int_0^\infty g(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_L(\mathbf{x}_t)) dt. \tag{4.22}$$

Si se sustituye (4.21) en (4.22) entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
 J(\varphi, \mathbf{u}_L(\mathbf{x}_t)) &= \int_0^\infty \left[\mathbf{x}^T(t, \varphi) M_1 \mathbf{x}(t, \varphi) + 2\mathbf{x}^T(t, \varphi) \int_{-h}^0 M_2(\theta) \mathbf{x}(t + \theta, \varphi) d\theta \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \mathbf{x}^T(t + \theta_1, \varphi) M_3(\theta_1, \theta_2) \mathbf{x}(t + \theta_2, \varphi) d\theta_1 d\theta_2 \right] dt, \tag{4.23}
 \end{aligned}$$

sustituyendo la solución en la forma de Cauchy (4.18) en el índice de desempeño

$$\begin{aligned}
 J(\varphi, \mathbf{u}_L(\mathbf{x}_t)) &= \int_0^\infty \left\{ [\mathbf{K}(t)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \hat{\mathbf{K}}(t, \theta)\varphi(\theta) d\theta]^T M_1 [\mathbf{K}(t)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \hat{\mathbf{K}}(t, \theta)\varphi(\theta) d\theta] \right. \\
 &\quad \left. + 2[\mathbf{K}(t)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \hat{\mathbf{K}}(t, \theta_1)\varphi(\theta_1) d\theta_1]^T \int_{-h}^0 M_2(\theta_2) [\mathbf{K}(t+\theta_2)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \hat{\mathbf{K}}(t+\theta_2, \theta)\varphi(\theta) d\theta] d\theta_2 \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 [\mathbf{K}(t + \theta_1)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \hat{\mathbf{K}}(t + \theta_1, \xi)\varphi(\xi)d\xi]^T M_3(\theta_1, \theta_2) [\mathbf{K}(t + \theta_2)\varphi(0) \\
 & \quad + \int_{-h}^0 \hat{\mathbf{K}}(t + \theta_2, \theta)\varphi(\theta)d\theta] d\theta_1 d\theta_2 \} dt. \tag{4.24}
 \end{aligned}$$

Al desarrollar las operaciones indicadas en (4.24), el índice de desempeño $J(\varphi, \mathbf{u}_L(\mathbf{x}_t))$ queda de la manera siguiente

$$\begin{aligned}
 J(\varphi, \mathbf{u}_L(\mathbf{x}_t)) & = \varphi^T(0) \left[\int_0^\infty \mathbf{K}^T(t) M_1 \mathbf{K}(t) dt + 2 \int_0^\infty \int_{-h}^0 \mathbf{K}^T(t) M_2(\theta) \mathbf{K}(t + \theta) d\theta dt \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^\infty \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \mathbf{K}^T(t + \theta_1) M_3(\theta_1, \theta_2) \mathbf{K}(t + \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 dt \right] \varphi(0) \\
 & + \int_{-h}^0 \varphi^T(\theta) \left[\int_0^\infty \hat{\mathbf{K}}^T(t, \theta) M_1 \mathbf{K}(t) dt + 2 \int_0^\infty \int_{-h}^0 \hat{\mathbf{K}}^T(t, \theta) M_2(\theta_2) \mathbf{K}(t + \theta_2) d\theta_2 dt \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^\infty \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \hat{\mathbf{K}}^T(t + \theta_1, \theta) M_3(\theta_1, \theta_2) \mathbf{K}(t + \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 dt \right] d\theta \varphi(0) \\
 & + \varphi^T(0) \int_{-h}^0 \left[\int_0^\infty \mathbf{K}^T(t) M_1 \hat{\mathbf{K}}(t, \theta) dt + 2 \int_0^\infty \int_{-h}^0 \mathbf{K}^T(t) M_2(\theta_2) \hat{\mathbf{K}}(t + \theta_2, \theta) d\theta_2 dt \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^\infty \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \mathbf{K}^T(t + \theta_1) M_3(\theta_1, \theta_2) \hat{\mathbf{K}}(t + \theta_2, \theta) d\theta_1 d\theta_2 dt \right] \varphi(\theta) d\theta \\
 & + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \varphi^T(\xi) \left[\int_0^\infty \hat{\mathbf{K}}^T(t, \xi) M_1 \hat{\mathbf{K}}(t, \theta) dt + 2 \int_0^\infty \int_{-h}^0 \hat{\mathbf{K}}^T(t, \xi) M_2(\theta_2) \hat{\mathbf{K}}(t + \theta_2, \theta) d\theta_2 dt \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^\infty \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \hat{\mathbf{K}}^T(t + \theta_1, \xi) M_3(\theta_1, \theta_2) \hat{\mathbf{K}}(t + \theta_2, \theta) d\theta_1 d\theta_2 dt \right] \varphi(\theta) d\theta d\xi.
 \end{aligned}$$

De lo anterior se pueden definir 4 términos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_0 & = \int_0^\infty \mathbf{K}^T(t) M_1 \mathbf{K}(t) dt + 2 \int_0^\infty \int_{-h}^0 \mathbf{K}^T(t) M_2(\theta) \mathbf{K}(t + \theta) d\theta dt \\
 & \quad + \int_0^\infty \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \mathbf{K}^T(t + \theta_1) M_3(\theta_1, \theta_2) \mathbf{K}(t + \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 dt,
 \end{aligned}$$

en donde \mathbf{K}_0 es constante debido a que al abrir las integrales no hay variable en juego.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1^T(\theta) &= \int_0^\infty \hat{\mathbf{K}}^T(t, \theta) M_1 \mathbf{K}(t) dt + 2 \int_0^\infty \int_{-h}^0 \hat{\mathbf{K}}^T(t, \theta) M_2(\theta_2) \mathbf{K}(t + \theta_2) d\theta_2 dt \\ &\quad + \int_0^\infty \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \hat{\mathbf{K}}^T(t + \theta_1, \theta) M_3(\theta_1, \theta_2) \mathbf{K}(t + \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 dt, \end{aligned}$$

en donde al abrir las integrales, queda sólo en juego la variable θ .

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1(\theta) &= \int_0^\infty \mathbf{K}^T(t) M_1 \hat{\mathbf{K}}(t, \theta) dt + 2 \int_0^\infty \int_{-h}^0 \mathbf{K}^T(t) M_2(\theta_2) \hat{\mathbf{K}}(t + \theta_2, \theta) d\theta_2 dt \\ &\quad + \int_0^\infty \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \mathbf{K}^T(t + \theta_1) M_3(\theta_1, \theta_2) \hat{\mathbf{K}}(t + \theta_2, \theta) d\theta_1 d\theta_2 dt, \end{aligned}$$

en donde al abrir las integrales, queda sólo en juego la variable θ .

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2(\xi, \theta) &= \int_0^\infty \hat{\mathbf{K}}^T(t, \xi) M_1 \hat{\mathbf{K}}(t, \theta) dt + 2 \int_0^\infty \int_{-h}^0 \hat{\mathbf{K}}^T(t, \xi) M_2(\theta_2) \hat{\mathbf{K}}(t + \theta_2, \theta) d\theta_2 dt \\ &\quad + \int_0^\infty \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \hat{\mathbf{K}}^T(t + \theta_1, \xi) M_3(\theta_1, \theta_2) \hat{\mathbf{K}}(t + \theta_2, \theta) d\theta_1 d\theta_2 dt, \end{aligned}$$

en donde al abrir las integrales, quedan en juego las variables ξ y θ .

Si se considera que $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_1^T$ entonces se tiene que

$$\begin{aligned} J(\varphi, \mathbf{u}_L(\mathbf{x}_t)) &= \mathbf{V}(\varphi) = \varphi^T(0) \mathbf{K}_0 \varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta) \varphi(\theta) d\theta \\ &\quad + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \varphi^T(\xi) \mathbf{K}_2(\xi, \theta) \varphi(\theta) d\xi d\theta \end{aligned} \tag{4.25}$$

y aquí la prueba queda concluida.

4.6. Obtención del control óptimo $\mathbf{u}_L(t)$ para sistemas con retardo

Ahora si se considera al estado completo \mathbf{x}_t en la funcional (4.25) entonces se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}_t) &= \mathbf{x}^T(t)\mathbf{K}_0\mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^T(t) \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\theta \\ &+ \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \mathbf{x}^T(t+\xi)\mathbf{K}_2(\xi,\theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\xi d\theta. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Recordando el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t-h) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.27)$$

y de las condiciones suficientes para la existencia de $\mathbf{u}_L(t)$ se calcula lo siguiente:

$$\left. \frac{dV(\mathbf{x}_t)}{dt} \right|_{(4.27)} + f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_t, \mathbf{u}_L(t)) = 0, \quad t \geq 0,$$

en donde $f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_t, \mathbf{u}_L(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)$.

Entonces

$$\begin{aligned} &\left. \frac{d}{dt}[\mathbf{x}^T(t)\mathbf{K}_0\mathbf{x}(t)] \right|_{(4.27)} + \left. \frac{d}{dt}[2\mathbf{x}^T(t) \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\theta] \right|_{(4.27)} \\ &+ \left. \frac{d}{dt} \left[\int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \mathbf{x}^T(t+\xi)\mathbf{K}_2(\xi,\theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\xi d\theta \right] \right|_{(4.27)} + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t) = 0 \end{aligned}$$

Aplicando las reglas de derivación correspondientes se tiene que

$$\begin{aligned}
 & \dot{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{K}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{K}_0\dot{\mathbf{x}}(t) \\
 & + 2\dot{\mathbf{x}}^T(t) \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\theta + 2\mathbf{x}^T(t) \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta) \frac{\partial\mathbf{x}(t+\theta)}{\partial t} d\theta \\
 & + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \frac{\partial\mathbf{x}^T(t+\xi)}{\partial t} \mathbf{K}_2(\xi, \theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\xi d\theta + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \mathbf{x}^T(t+\xi)\mathbf{K}_2(\xi, \theta) \frac{\partial\mathbf{x}(t+\theta)}{\partial t} d\xi d\theta \\
 & + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t) = 0, \tag{4.28}
 \end{aligned}$$

sustituyendo $\dot{\mathbf{x}}(t)$ en la ecuación (4.28), se tiene que

$$\begin{aligned}
 & [\mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t-h) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)]^T \mathbf{K}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{K}_0[\mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t-h) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)] \\
 & + 2[\mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t-h) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)]^T \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\theta + 2\mathbf{x}^T(t) \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta) \frac{\partial\mathbf{x}(t+\theta)}{\partial t} d\theta \\
 & + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \frac{\partial\mathbf{x}^T(t+\xi)}{\partial t} \mathbf{K}_2(\xi, \theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\xi d\theta + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \mathbf{x}^T(t+\xi)\mathbf{K}_2(\xi, \theta) \frac{\partial\mathbf{x}(t+\theta)}{\partial t} d\xi d\theta \\
 & + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t) = 0 \\
 & = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{A}_0^T \mathbf{K}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t-h)\mathbf{A}_1^T \mathbf{K}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{B}^T \mathbf{K}_0\mathbf{x}(t) \\
 & + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{K}_0\mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{K}_0\mathbf{A}_1\mathbf{x}(t-h) + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{K}_0\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\
 & + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{A}_0^T \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\theta + \mathbf{x}^T(t-h)\mathbf{A}_1^T \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\theta \\
 & + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{B}^T \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\theta + 2\mathbf{x}^T(t) \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta) \frac{\partial\mathbf{x}(t+\theta)}{\partial t} d\theta \\
 & + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \frac{\partial\mathbf{x}^T(t+\xi)}{\partial t} \mathbf{K}_2(\xi, \theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\xi d\theta + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \mathbf{x}^T(t+\xi)\mathbf{K}_2(\xi, \theta) \frac{\partial\mathbf{x}(t+\theta)}{\partial t} d\xi d\theta \\
 & + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t) = 0.
 \end{aligned}$$

Agrupando los términos que contienen $\mathbf{x}^T(t)$ del lado izquierdo, $\mathbf{x}(t)$ del lado derecho y renombrando la ecuación como

$$\begin{aligned}
 \Phi(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}) &= \mathbf{x}^T(t)[\mathbf{A}_0^T \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_0 \mathbf{A}_0] \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t-h) \mathbf{A}_1^T \mathbf{K}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{B}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{x}(t) \\
 &\quad + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{K}_0 \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t-h) + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{K}_0 \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\
 &\quad + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{A}_0^T \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta) \mathbf{x}(t+\theta) d\theta + \mathbf{x}^T(t-h) \mathbf{A}_1^T \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta) \mathbf{x}(t+\theta) d\theta \\
 &\quad + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{B}^T \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta) \mathbf{x}(t+\theta) d\theta + 2\mathbf{x}^T(t) \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta) \frac{\partial \mathbf{x}(t+\theta)}{\partial t} d\theta \\
 &\quad + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \frac{\partial \mathbf{x}^T(t+\xi)}{\partial t} \mathbf{K}_2(\xi, \theta) \mathbf{x}(t+\theta) d\xi d\theta + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \mathbf{x}^T(t+\xi) \mathbf{K}_2(\xi, \theta) \frac{\partial \mathbf{x}(t+\theta)}{\partial t} d\xi d\theta \\
 &\quad + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) = 0.
 \end{aligned}$$

Se busca el mínimo de todos los controles admisibles \mathbf{u} tal que

$$\min_{\mathbf{u}\text{-admisible}} \left\{ \Phi(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t)) \right\} = \Phi(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}_L(t)),$$

en donde \mathbf{x}_t y $\mathbf{u}_L(t)$ es la trayectoria óptima y el control óptimo, de manera que para realizar la minimización respecto a \mathbf{u} , y por el teorema fundamental del cálculo de variaciones, se calcula la derivada parcial de $\Phi(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t))$ respecto a $\mathbf{u}(t)$ y se iguala la ecuación a cero.

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} = 2\mathbf{B}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{x}(t) + 2\mathbf{B}^T \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta) \mathbf{x}(t+\theta) d\theta + 2\mathbf{R} \mathbf{u}(t) = 0.$$

Al despejar $\mathbf{u}(t)$ se tiene que el control óptimo para el sistema (4.27) es

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_L(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_0\mathbf{x}(t) - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\theta, t \geq 0. \quad (4.29)$$

Finalmente se puede concluir que aunque en el artículo de D. Ross [3] no se da una prueba para la construcción de la funcional $\mathbf{V}(\varphi)$, la prueba alternativa realizada nos lleva al mismo resultado, además con esta funcional fue posible confirmar que el control óptimo calculado es de la forma del control óptimo propuesto por Krasovskii en [4].

En el siguiente capítulo se calcula el control óptimo para sistemas lineales con retardo mediante el algoritmo de D. Ross mencionado en [5], también se realiza la discretización de dicho control para realizar su programación en LabVIEW, por último se hace una prueba experimental del control óptimo para sistemas lineales con retardo en una planta de deshidratación y se muestran los resultados obtenidos.

Capítulo 5

Cálculo de la ley de control óptima para sistemas con retardos mediante el algoritmo de D. Ross

En este capítulo se explica el algoritmo dado en el artículo de D. Ross en [3] el cual nos permite realizar un cálculo aproximado de la matriz de Lyapunov para sistemas con retardo \mathbf{K}_L la cual tiene como submatrices a \mathbf{K}_0 , $\mathbf{K}_1(\theta)$ y $\mathbf{K}_2(\xi, \theta)$ que son parte esencial del control óptimo para sistemas con retardo obtenido en el capítulo anterior.

5.1. Cálculo de las matrices \mathbf{K}_0 , $\mathbf{K}_1(\theta)$, $\mathbf{K}_2(\xi, \theta)$

Considere el siguiente sistema retardado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t - h) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (5.1)$$

donde \mathbf{A}_0 , $\mathbf{A}_1 \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times r}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^{r \times 1}$ y $h > 0$ es el retardo en el estado.

La ley de control óptimo propuesta en [5] es el resultado de hallar una solución aproximada de un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales dado en el siguiente teorema:

Teorema 5.1.1. [5] *Una ley de control*

$$\mathbf{u}_L(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_0\mathbf{x}(t) - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\theta, \quad t \geq 0, \quad (5.2)$$

produce un mínimo absoluto para el índice de desempeño cuadrático de horizonte infinito

$$J[\varphi, \mathbf{u}_L(t)] = \int_0^\infty [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}_L^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}_L(t)]dt \quad (5.3)$$

sujeto al sistema dinámico (5.1) si se cumplen las siguientes condiciones:

a) $\mathbf{u}_L(t)$ es una ley de control que estabiliza a (5.1).

b) \mathbf{K}_0 es una matriz simétrica definida positiva la cual junto con

$\mathbf{K}_1(\theta) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\theta \in [-h, 0]$ y $\mathbf{K}_2(\xi, \theta)$, $\xi, \theta \in [-h, 0]$ satisface las siguientes igualdades:

c) $\mathbf{A}_0^T\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_0\mathbf{A}_0 - \mathbf{K}_0\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1^T(0) + \mathbf{K}_1(0) + \mathbf{Q} = 0.$

d) $\frac{d\mathbf{K}_1(\theta)}{d\theta} = (\mathbf{A}_0^T - \mathbf{K}_0\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T)\mathbf{K}_1(\theta) + \mathbf{K}_2(0, \theta), \quad \theta \in [-h, 0].$

e) $\frac{\partial\mathbf{K}_2(\xi, \theta)}{\partial\xi} + \frac{\partial\mathbf{K}_2(\xi, \theta)}{\partial\theta} = -\mathbf{K}_1^T(\xi)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}_1(\theta), \quad \theta \in [-h, 0], \xi \in [-h, 0].$

f) $\mathbf{K}_1(-h) = \mathbf{K}_0\mathbf{A}_1.$

g) $\mathbf{K}_2(-h, \theta) = \mathbf{A}_1^T\mathbf{K}_1(\theta).$

Además, bajo estas condiciones, la representación del índice de desempeño en términos de las condiciones iniciales es

$$J[\varphi, u_L] = \varphi^T(0)\mathbf{K}_0\varphi(0) + 2\varphi^T(0) \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\varphi(\theta)d\theta + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \varphi^T(\xi)\mathbf{K}_2(\xi, \theta)\varphi(\theta)d\xi d\theta.$$

Para resolver este conjunto de ecuaciones, D. Ross propone en [5] un algoritmo para obtener una solución aproximada de las matrices \mathbf{K}_0 , $\mathbf{K}_1(\theta)$, $\mathbf{K}_2(\xi, \theta)$. Dicho algoritmo consiste básicamente en usar diferencias finitas para las derivadas. Después se particiona el intervalo $\theta \in [-h, 0]$ en m segmentos igualmente espaciados cuyos puntos finales son $-\frac{ih}{m}$, $0 \leq i \leq m$. También se particiona el cuadrado $-h \leq \xi \leq 0$, $-h \leq \theta \leq 0$ en pequeños cuadrados cuyos vértices son $(\xi, \theta) = (-\frac{ih}{m}, -\frac{jh}{m})$ para $0 \leq i \leq m$ y $0 \leq j \leq m$. Reemplazando estas consideraciones en las condiciones c) a g) previamente mencionadas se obtiene:

- c) $\mathbf{A}_0^T \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_0 \mathbf{A}_0 - \mathbf{K}_0 \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1^T(0) + \mathbf{K}_1(0) + \mathbf{Q} = 0.$
- d) $\frac{\mathbf{K}_1(-(i-1)h/m) - \mathbf{K}_1(-ih/m)}{i/m} = (\mathbf{A}_0^T - \mathbf{K}_0 \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T) \mathbf{K}_1(-(i-1)h/m) + \mathbf{K}_2(0, -(i-1)h/m).$
- e) $\frac{\mathbf{K}_2(-(i-1)h/m, -(j-1)h/m) - \mathbf{K}_2(-ih/m, -(j-1)h/m)}{i/m} + \frac{\mathbf{K}_2(-(i-1)h/m, -(j-1)h/m) - \mathbf{K}_2(-(i-1)h/m, -jh/m)}{i/m} = -\mathbf{K}_1^T(-(i-1)h/m) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}_1(-(j-1)h/m).$
- f) $\mathbf{K}_1(-h) = \mathbf{K}_0 \mathbf{A}_1.$
- g) $\mathbf{K}_2(-h, -j/m) = \mathbf{A}_1^T \mathbf{K}_1(-j/m).$

Donde $j \in [0, m]$, $i \in [0, m]$, la matriz \mathbf{K}_L que contiene a las matrices \mathbf{K}_0 , $\mathbf{K}_1(\theta)$ y $\mathbf{K}_2(\xi, \theta)$ es una matriz semidefinida positiva y es la solución de la ecuación algebraica de tipo Riccati:

$$\mathbf{A}_m^T \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_L \mathbf{A}_m - \mathbf{K}_L \mathbf{B}_m \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_m^T \mathbf{K}_L + \mathbf{Q}_m = 0, \quad (5.4)$$

en donde \mathbf{A}_m , \mathbf{B}_m , \mathbf{Q}_m están definidas como:

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{A}_1 \\ m\mathbf{I} & -m\mathbf{I} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & m\mathbf{I} & -m\mathbf{I} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m\mathbf{I} & -m\mathbf{I} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix},$$

\mathbf{I} es una matriz identidad de $n \times n$, \mathbf{A}_m y \mathbf{Q}_m son matrices cuadradas de $n \times (m + 1)$ filas y $n \times (m + 1)$ columnas, \mathbf{B}_m es una matriz de $n \times (m + 1)$ filas y r columnas.

La construcción de la matriz \mathbf{K}_L , consiste en $(m + 1)^2$ submatrices $\mathbf{K}_{i,j}$ para $0 \leq i \leq m$ y $0 \leq j \leq m$ de dimension $m \times m$,

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{0,0} & \mathbf{K}_{0,1} & \dots & \mathbf{K}_{0,m} \\ \mathbf{K}_{1,0} & \mathbf{K}_{1,1} & \dots & \mathbf{K}_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{m,0} & \mathbf{K}_{m,1} & \dots & \mathbf{K}_{m,m} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

En específico

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_{0,0} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{K}_1(-ih/m) = m\mathbf{K}_{0,i+1}, \quad 0 \leq i \leq m-1, \quad \mathbf{K}_1(-h) = \mathbf{K}_0\mathbf{A}_1 = \mathbf{K}_{0,0}\mathbf{A}_1 \quad (5.7)$$

$$\mathbf{K}_2(-ih/m, -jh/m) = m^2\mathbf{K}_{i+1,j+1}, \quad 0 \leq i \leq m-1, \quad 0 \leq j \leq m-1$$

$$\mathbf{K}_2(-h, -jh/m) = \mathbf{A}_1^T \mathbf{K}_1(-jh/m), \quad 0 \leq j \leq m-1$$

$$\mathbf{K}_2(-ih/m, -h) = \mathbf{K}_1^T(-ih/m)\mathbf{A}_1, \quad 0 \leq i \leq m-1 \quad (5.8)$$

Se realiza una secuencia de cálculos para cada $m = 1, 2, \dots$, se resuelve la ecuación algebraica de Riccati para hallar los valores de las submatrices $\mathbf{K}_{i,j}$, enseguida, se utilizan las ecuaciones (5.6), (5.7) y (5.8) para determinar \mathbf{K}_0 , $\mathbf{K}_1(-i/m)$, $0 \leq i \leq m$, $\mathbf{K}_2(-i/m, -j/m)$, para $i, j = 0, 1, \dots, m$.

La interpolación entre puntos da una aproximación a los valores óptimos de \mathbf{K}_0 , $\mathbf{K}_1(\theta)$ y $\mathbf{K}_2(\xi, \theta)$. El cálculo termina cuando el valor de los elementos de las matrices antes mencionadas ya no cambie considerablemente.

Debido a que el cálculo de las matrices \mathbf{K}_0 , $\mathbf{K}_1(\theta)$, $\mathbf{K}_2(\xi, \theta)$ resulta considerablemente complicado, el algoritmo previamente descrito se programa de forma general para un sistema $n \times n$ de la forma (5.1) en el entorno matemático MATLAB. El algoritmo de programación se puede estudiar con mayor detalle en el Apéndice.

A continuación, en la Figura 5.1 se muestra un diagrama de flujo del procedimiento que se lleva a cabo en la programación para el cálculo de las matrices \mathbf{K}_0 , $\mathbf{K}_1(\theta)$, $\mathbf{K}_2(\xi, \theta)$.

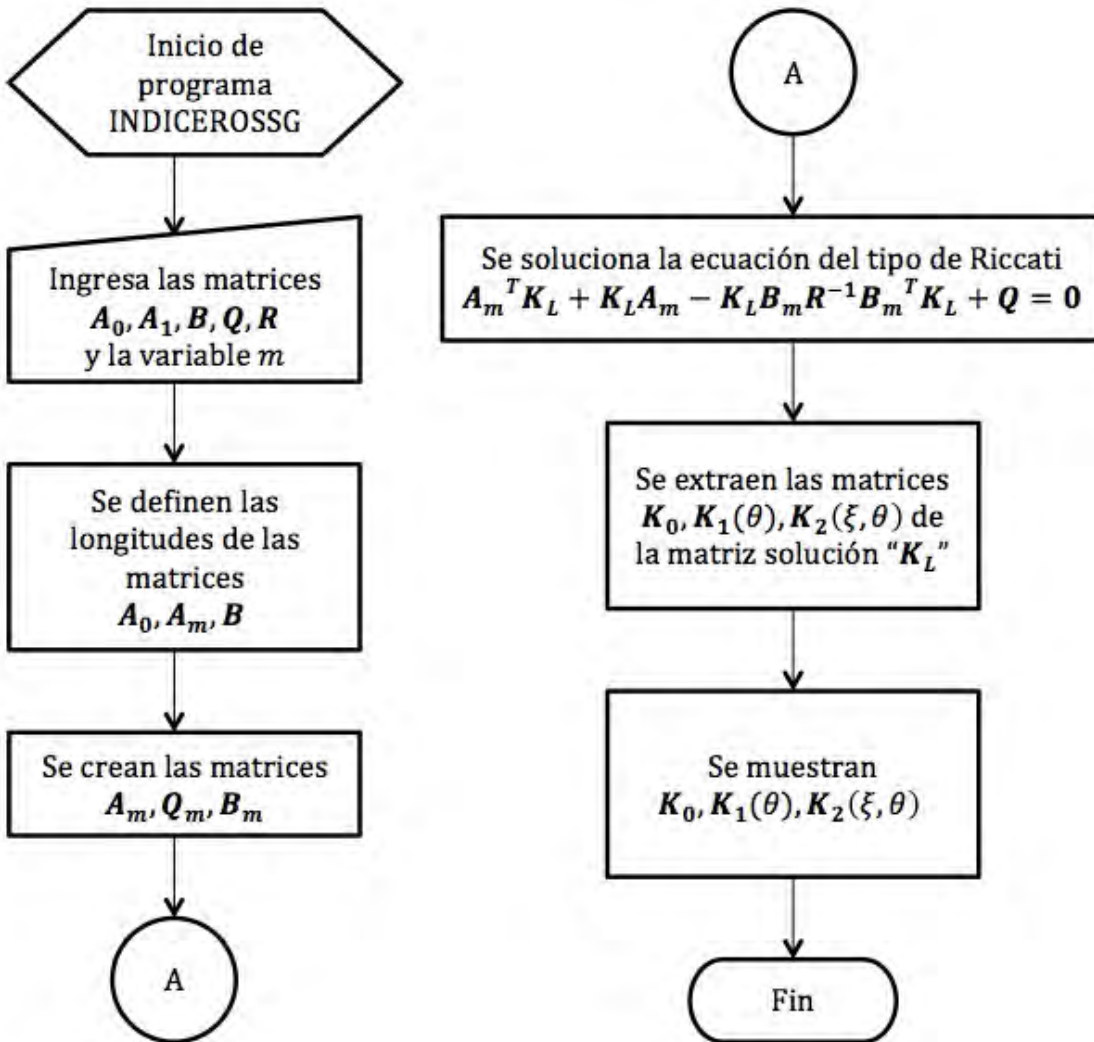


Figura 5.1: Diagrama de flujo de programación en Matlab

5.2. Implementación del control óptimo $u_L(t)$

Considere el siguiente sistema de primer orden con retardo en el estado, el cual representa un modelo aproximado de la planta de deshidratación.

$$\dot{x} = -0.141345x(t) + 0.129x(t - 10) + 0.00620u(t). \quad (5.9)$$

El término $u(t)$ se define como

$$\mathbf{u}_L(t) = F_0 \mathbf{x}(t) + F_1 \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta) \mathbf{x}(t + \theta) d\theta, t \geq 0,$$

en donde $F_0 = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}_0$, $F_1 = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T$ y \mathbf{u}_L produce un mínimo local para el índice de desempeño cuadrático de horizonte infinito

$$J[\varphi, u_L] = \int_0^\infty [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}_L^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}_L(t)] dt.$$

De acuerdo con resultados experimentales, se elige convenientemente a las matrices $\mathbf{R} = 1$ y $\mathbf{Q} = 1$.

Se calcula la aproximación de las matrices \mathbf{K}_0 y $\mathbf{K}_1(\theta)$ mediante la programación en Matlab del algoritmo de **D. Ross** visto en la sección anterior:

$$\mathbf{K}_0 = 352.8508$$

$$\mathbf{K}_1(\theta) = [45.5178 \quad 45.4363 \quad 45.3303 \quad 45.2085 \quad 45.0772 \quad 44.9408 \quad 46.6414 \quad 48.9814 \quad 51.7667].$$

Aquí, $\theta \in [-h, 0]$, se dividió en $m = 8$ segmentos, y recordando que en la sección anterior se mencionaron las dimensiones de $\mathbf{K}_1(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times (m+1)}$ entonces $\mathbf{K}_1(\theta) \in \mathbb{R}^{1 \times 9}$

Debido a que el control se implementa de forma discreta, es necesario hacer la discretización para su programación. Si se considera el control:

$$\mathbf{u}_L(t) = F_0 \mathbf{x}(t) + F_1 \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta) \mathbf{x}(t + \theta) d\theta, \quad \forall t \geq 0$$

Entonces su forma discreta viene dada por:

$$\mathbf{u}_L(k) = F_0 x(k) + \frac{h}{m} F_1 \sum_{i=1}^{m+1} \mathbf{K}_1(\theta_i) x(k - (m + 1) + i), \quad \forall k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

En este caso el retardo es $h = 10$ y el número de partes en que se divide el retardo es $m = 8$. El índice i en θ_i corresponde al i -ésimo elemento de la matriz $\mathbf{K}_1(\theta)$ calculada en el algoritmo de D. Ross.

Al sustituir los valores de todas las constantes el control se reescribe como:

$$\mathbf{u}_L(k) = 2.1877x(k) + 0.0023 \sum_{i=1}^{m+1} \mathbf{K}_1(\theta_i) x(k - (m + 1) + i), \quad \forall k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.10)$$

Esta ley de control discreta se programa en la plataforma y entorno de desarrollo para el diseño de sistemas LabVIEW en conjunto con la tarjeta embebida de la marca National Instruments MyRIO, la cual toma la tarea de adquirir la señal del sensor de temperatura LM35.

La tarjeta también se encarga del procesamiento de datos para calcular el control \mathbf{u}_L en cada iteración para entregar la señal de control en una de sus salidas analógicas.

En la Figura 5.2, se muestra la estructura que toma la programación del control en LabVIEW, a continuación se da una explicación breve de la programación.

La señal que proporciona el sensor de temperatura, es adquirida por una entrada analógica de la tarjeta MyRIO con un periodo de muestreo de $100ms$.

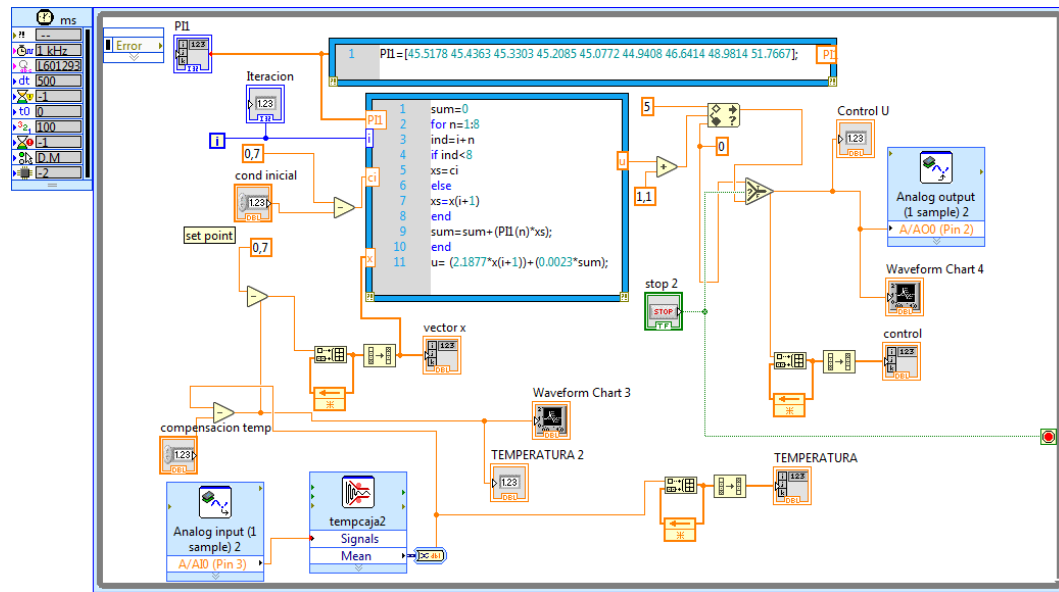


Figura 5.2: Estructura de programación de u_L en LabVIEW

Se crea una variable x dependiente del error entre el punto de consigna (Set Point) y la variable del proceso (Process Variable).

Posteriormente, en un *script* matemático, se calcula el control u_L en cada iteración.

Finalmente, el control calculado se suma a un offset, este último valor, es acotado por un saturador de 0V-5V, para evitar daño a la tarjeta, después es enviado por una salida analógica hacia el circuito acondicionador de señal que escala de 0-5VCD a 0-180VCD para alimentar a la rejilla calefactora de la planta de deshidratación.

5.3. Resultados

A continuación se muestran los resultados obtenidos aplicando la ley de control óptima para sistemas con retardos en un proceso de deshidratación de jitomate a 70°C.

En la Figura 5.3 se puede observar que la temperatura sobrepasa el punto de consigna SP así mismo se puede notar que existen sobre impulsos que pueden llegar a afectar el producto en deshidratación, lo anterior posiblemente se deba a distintos fenómenos, un mal cálculo del offset, dinámicas no contempladas, perturbaciones externas, no linealidades en los instrumentos de medición, entre otros.

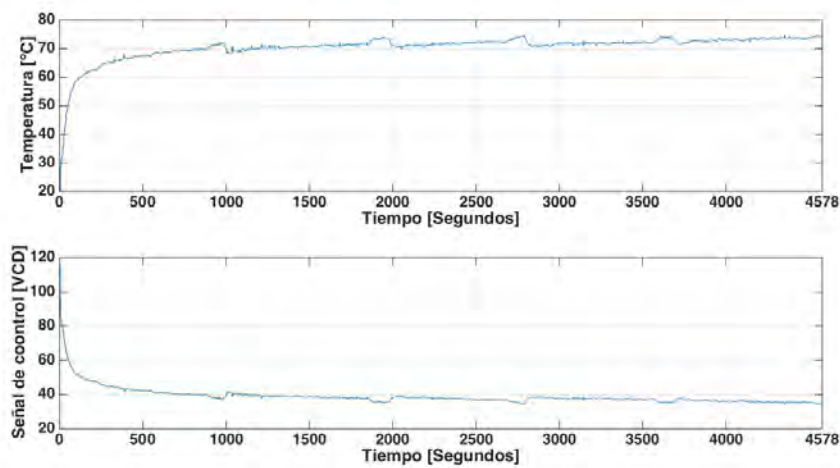


Figura 5.3: Temperatura y Señal de control óptimo caso con retardo

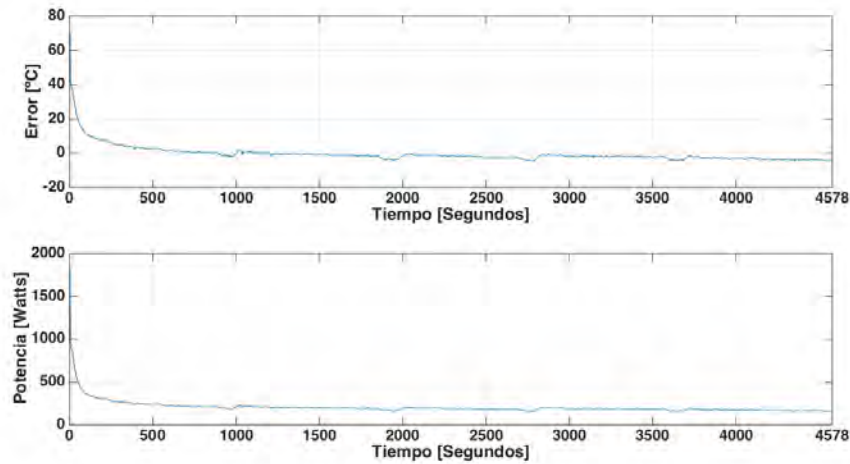


Figura 5.4: Error y Potencia caso con retardo

Lo anterior da paso a que en el siguiente capítulo se aborde la metodología para diseñar un término de control robusto mediante el enfoque de rediseño de Lyapunov, que adicionado al control óptimo para sistemas con retardos, compense dinámicas no modeladas en el sistema, incertidumbres y no linealidades de los sensores y acondicionadores de señal.

Capítulo 6

Cálculo de la ley de control óptimo con características de robustez

Considere el siguiente sistema lineal, con retardo en el estado y con perturbación no lineal

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t - h) + \mathbf{B}[\mathbf{u}(t) + \delta(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t))], \quad (6.1)$$

donde $\delta(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t))$ es una incertidumbre no modelada que se adiciona al sistema (5.1) y entra por el mismo canal que la señal de control. δ es continua en t , localmente Lipschitz en $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$. Mediante el enfoque de rediseño de Lyapunov se pretende diseñar un componente de control adicional v , tal que el control

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_L(t) + v \quad (6.2)$$

con $\mathbf{u}_L(t)$ dado en (5.2) estabiliza al sistema nominal (5.1) y v es el término que se busca para compensar a la perturbación $\delta(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t))$.

6.1. Estabilización robusta (Rediseño de Lyapunov) caso sistema sin retardo

Considere el sistema de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x}(t)) + G(t, \mathbf{x}(t))[\mathbf{u}(t) + \delta(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))] \quad (6.3)$$

en donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$ y f, G, δ están definidas para $(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \in [0, \infty) \times \mathbb{D} \times \mathbb{R}^p$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ y contienen al cero.

Se sabe también que f, G, δ son funciones continuas a tramos $\forall t$ y localmente Lipschitz en $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$.

Si se considera sólo la parte nominal del sistema (6.3) entonces se tiene que:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x}(t)) + G(t, \mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t) \quad (6.4)$$

Suponga que se conoce una función $\psi(t, \mathbf{x}(t))$ tal que $\mathbf{u}(t) = \psi(t, \mathbf{x}(t))$ entonces

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x}(t)) + G(t, \mathbf{x}(t))\psi(t, \mathbf{x}(t)) \quad (6.5)$$

(6.5) posee punto de equilibrio $\mathbf{x}(t) = 0$ estable.

Suponga también que se conoce una función $V(\mathbf{x})$ tal que

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(\mathbf{x}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|)$$

$$\left. \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \right|_{(6.5)} = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} [f(t, \mathbf{x}) + G(t, \mathbf{x})\psi(t, \mathbf{x})] \leq -\alpha_3(\|\mathbf{x}\|) \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, \infty) \times \mathbb{D},$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son funciones clase κ .

Ahora asuma que

$$\mathbf{u} = \psi(t, \mathbf{x}(t)) + v$$

y que el término de incertidumbre δ satisface las siguientes condiciones:

$$\|\delta(t, \mathbf{x}, \psi(t, \mathbf{x}) + v)\| \leq \rho(t, \mathbf{x}) + k\|v\| \quad \forall k \in [0, 1),$$

donde $\rho : [0, \infty) \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, ρ es una función conocida no negativa.

Sea $v = \gamma(t, \mathbf{x})$ entonces el control \mathbf{u} se puede reescribir como

$$\mathbf{u} = \psi(t, \mathbf{x}) + \gamma(t, \mathbf{x}).$$

Se desea diseñar $v = \gamma(t, \mathbf{x})$ tal que \mathbf{u} estabiliza la planta ante la presencia de perturbaciones, como $\psi(t, \mathbf{x})$ es conocido, entonces se diseña a $v = \gamma$.

Considere a (6.3) en lazo cerrado con $\mathbf{u} = \psi(t, \mathbf{x}) + v$ tal que

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}) + G(t, \mathbf{x})[\psi(t, \mathbf{x}) + v + \delta(t, \mathbf{x}, \psi(t, \mathbf{x}) + v)], \quad (6.6)$$

donde el sistema nominal es (6.5), para el cual se conoce la función de Lyapunov $V(\mathbf{x})$, ésta se toma para derivarla a lo largo de las trayectorias del sistema (6.6), entonces

$$\frac{dV(x)}{dt} = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} [f(t, \mathbf{x}) + G(t, \mathbf{x})[\psi(t, \mathbf{x}) + v + \delta(t, \mathbf{x}, \psi(t, \mathbf{x}) + v)]]$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \right|_{(6.6)} &= \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} [f(t, \mathbf{x}) + G(t, \mathbf{x})\psi(t, \mathbf{x})] + \\ &\quad \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} [G(t, \mathbf{x})[v + \delta(t, \mathbf{x}, \psi(t, \mathbf{x}) + v)]], \end{aligned}$$

como se sabe que la derivada de $V(\mathbf{x})$ para el sistema nominal es

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} [f(t, \mathbf{x}) + G(t, \mathbf{x})\psi(t, \mathbf{x})] \leq -\alpha_3(\|\mathbf{x}\|),$$

entonces se sigue conservando la desigualdad en ambos lados si se suma en ambos lados lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} [f(t, \mathbf{x}) + G(t, \mathbf{x})\psi(t, \mathbf{x})] + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} [G(t, \mathbf{x})[v + \delta(t, \mathbf{x}, \psi(t, \mathbf{x}) + v)]] \\ \leq -\alpha_3(\|\mathbf{x}\|) + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} [G(t, \mathbf{x})[v + \delta(t, \mathbf{x}, \psi(t, \mathbf{x}) + v)]]. \end{aligned}$$

Sea el siguiente término definido como

$$w^T = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} G(t, \mathbf{x}),$$

entonces la desigualdad se puede reescribir como

$$\left. \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \right|_{(6.6)} \leq -\alpha_3(\|\mathbf{x}\|) + w^T v + w^T \delta(t, \mathbf{x}, \psi(t, \mathbf{x}) + v),$$

se desea elegir v tal que

$$w^T v + w^T \delta(t, \mathbf{x}, \psi(t, \mathbf{x}) + v) \leq 0,$$

como sabemos que la siguiente desigualdad se cumple

$$\|\delta(t, \mathbf{x}, \psi(t, \mathbf{x}) + v)\| \leq \rho(t, \mathbf{x}) + k\|v\| \quad \forall k \in [0, 1),$$

entonces también podemos asegurar que las siguientes dos desigualdades se cumplen

$$w^T v + w^T \delta(t, \mathbf{x}, \psi(t, \mathbf{x}) + v) \leq w^T v + \|w^T\| \|\delta(t, \mathbf{x}, \psi(t, \mathbf{x}) + v)\|,$$

$$w^T v + \|w^T\| \|\delta(t, \mathbf{x}, \psi(t, \mathbf{x}) + v)\| \leq w^T v + \|w^T\| [\rho(t, \mathbf{x}) + k\|v\|].$$

Defina al término v como

$$v \triangleq -\frac{\eta(t, \mathbf{x})}{1-k} \frac{w}{\|w\|}, \quad \eta(t, \mathbf{x}) \geq \rho(t, \mathbf{x}),$$

donde $\eta(t, x) \geq \rho(t, x)$ evita considerar una $\rho(t, x)$ pequeña.

Ahora bien, ya se sabe que

$$w^T v + w^T \delta(t, \mathbf{x}, \psi(t, \mathbf{x}) + v) \leq w^T v + \|w\| \rho(t, \mathbf{x}) + \|w\| k \|v\|,$$

sustituyendo a v en el lado derecho de la desigualdad anterior

$$-\frac{w^T \eta(t, \mathbf{x})}{1-k} \frac{w}{\|w\|} + \|w\| \rho(t, \mathbf{x}) + \|w\| k \left| -\frac{\eta(t, \mathbf{x})}{1-k} \frac{w}{\|w\|} \right|$$

$$= -\frac{\|w\|^2 \eta(t, \mathbf{x})}{(1-k)\|w\|} + \|w\| \rho(t, \mathbf{x}) + \frac{k\|w\|^2 \eta(t, \mathbf{x})}{(1-k)\|w\|}$$

$$= -\eta(t, \mathbf{x}) \|w\| \left(\frac{1}{1-k} - \frac{k}{1-k} \right) + \|w\| \rho(t, \mathbf{x})$$

$$= -\eta(t, \mathbf{x})\|w\| + \|w\|\rho(t, \mathbf{x}),$$

de la desigualdad $\eta(t, \mathbf{x}) \geq \rho(t, \mathbf{x})$ se tiene que

$$-\eta(t, \mathbf{x}) \leq -\rho(t, \mathbf{x}),$$

multiplicando ambos lados de la desigualdad por $\|w\|$,

$$-\eta(t, \mathbf{x})\|w\| \leq -\rho(t, \mathbf{x})\|w\|,$$

si se suma en ambos lados de la desigualdad el término $\rho(t, \mathbf{x})$,

$$-\eta(t, \mathbf{x})\|w\| + \rho(t, \mathbf{x}) \leq -\rho(t, \mathbf{x})\|w\| + \rho(t, \mathbf{x}),$$

de lo anterior se llega a la siguiente desigualdad:

$$-\eta(t, \mathbf{x})\|w\| + \|w\|\rho(t, \mathbf{x}) \leq -\rho(t, \mathbf{x}) + \rho(t, \mathbf{x}),$$

$$-\eta(t, \mathbf{x})\|w\| + \|w\|\rho(t, \mathbf{x}) \leq 0,$$

esto implica que

$$w^T v + w^T \delta(t, \mathbf{x}, \psi(t, \mathbf{x}) + v) \leq -\eta(t, \mathbf{x})\|w\| + \|w\|\rho(t, \mathbf{x}) \leq 0$$

y por lo tanto

$$\mathbf{u} = \psi(t, \mathbf{x}) + \gamma(t, \mathbf{x}) \tag{6.7}$$

estabiliza robustamente a la planta en lazo cerrado.

6.2. Estabilización robusta (Rediseño de Lyapunov) caso sistema con retardo

Ahora considere el sistema con retardo en el estado y con incertidumbre no modelada

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t-h) + \mathbf{B}[\mathbf{u}(t) + \delta(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t))], \quad (6.8)$$

donde $\delta(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t))$ es una incertidumbre no modelada que se adiciona al sistema (5.1) y entra por el mismo canal que la señal de control, además el término de incertidumbre $\delta(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t))$ satisface las siguientes condiciones:

$$\|\delta(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t))\| \leq \rho(t, \mathbf{x}) + k\|v\| \quad \forall k \in [0, 1),$$

donde $\rho : [0, \infty) \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, ρ es una función conocida no negativa.

si se define al control $\mathbf{u}(t)$ como

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_L + v,$$

donde \mathbf{u}_L estabiliza la parte nominal de (6.8) y v compensa las incertidumbres no modeladas, entonces el sistema se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t-h) + \mathbf{B}[\mathbf{u}_L + v + \delta(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u})], \quad (6.9)$$

más aún se puede reescribir a (6.9) como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\mathbf{A}_0\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t-h) + \mathbf{B}\mathbf{u}_L}_{\text{parte nominal}} + \underbrace{\mathbf{B}[v + \delta(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u})]}_{\text{parte incertidumbre}}. \quad (6.10)$$

Sea la funcional de Bellman para el sistema nominal definida como

$$V(\mathbf{x}_t) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{K}_0\mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^T(t) \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\theta + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \mathbf{x}^T(t+\xi)\mathbf{K}_2(\xi, \theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\xi d\theta,$$

entonces la derivada de $V(\mathbf{x}_t)$ respecto al tiempo es

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}_t) &= \mathbf{x}^T(t)\mathbf{K}_0\dot{\mathbf{x}}(t) + \dot{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{K}_0\mathbf{x}(t) + \frac{d}{dt} \left[2\mathbf{x}^T(t) \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\theta \right] \\ &\quad + \frac{d}{dt} \left[\int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \mathbf{x}^T(t+\xi)\mathbf{K}_2(\xi, \theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\xi d\theta \right], \end{aligned}$$

se transpone el término $\dot{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{K}_0\mathbf{x}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}_t) &= 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{K}_0\dot{\mathbf{x}}(t) + 2 \left[\dot{\mathbf{x}}^T(t) \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\theta + \mathbf{x}^T(t) \frac{d}{dt} \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\theta \right] \\ &\quad + \frac{d}{dt} \left[\int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \mathbf{x}^T(t+\xi)\mathbf{K}_2(\xi, \theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\xi d\theta \right], \\ \dot{V}(\mathbf{x}_t) &= 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{K}_0\dot{\mathbf{x}}(t) + 2 \left[\dot{\mathbf{x}}^T(t) \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\theta + \mathbf{x}^T(t) \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t+\theta)d\theta \right] \\ &\quad + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}^T(t+\xi)\mathbf{K}_2(\xi, \theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\xi d\theta + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 \mathbf{x}^T(t+\xi)\mathbf{K}_2(\xi, \theta) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t+\theta)d\xi d\theta, \end{aligned} \tag{6.11}$$

se sabe que la derivada para la parte sin perturbaciones de la ecuación (6.10) es

$$\dot{V}(\mathbf{x}_t) \Big|_{(parte\ nominal)} = -[\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_L^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}_L(t)] = -\alpha_4(\mathbf{x}_t),$$

en donde α_4 es una función de clase κ .

Ahora si se consideran los términos en donde aparece $\dot{\mathbf{x}}(t)$ en la derivada descrita en (6.11) y se sustituye la parte de incertidumbre $B[v + \delta(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u})]$ se tiene que

$$\dot{V}(\mathbf{x}_t) \Big|_{(parte\ incertidumbre)} = 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{K}_0 \left[\mathbf{B}[v + \delta(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u})] \right]$$

$$+2 \left[[\mathbf{B}[v + \delta(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u})]]^T \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta) \mathbf{x}(t + \theta) d\theta \right],$$

por lo tanto la derivada de $V(\mathbf{x}_t)$ a lo largo de las trayectorias de (6.8) es

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}_t) \Big|_{(6.8)} &= \dot{V}(\mathbf{x}_t) \Big|_{(parte\ nominal)} + \dot{V}(\mathbf{x}_t) \Big|_{(parte\ incertidumbre)} \\ \dot{V}(\mathbf{x}_t) \Big|_{(6.8)} &= -[\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_L^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}_L(t)] + 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{K}_0 \left[\mathbf{B}[v + \delta(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u})] \right] + \\ &2 \left[[\mathbf{B}[v + \delta(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u})]]^T \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta) \mathbf{x}(t + \theta) d\theta \right]. \end{aligned}$$

Recordando que la derivada a lo largo de las trayectorias de la parte nominal es:

$$\dot{V}(\mathbf{x}_t) \Big|_{(parte\ nominal)} = -[\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_L^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}_L(t)] = -\alpha_4(\mathbf{x}_t),$$

entonces

$$\begin{aligned} & -[\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_L^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}_L(t)] + 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{K}_0 \left[\mathbf{B}[v + \delta(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u})] \right] \\ & + 2 \left[[\mathbf{B}[v + \delta(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u})]]^T \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta) \mathbf{x}(t + \theta) d\theta \right] = \\ & -\alpha_4(\mathbf{x}_t) + 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{K}_0 \left[\mathbf{B}[v + \delta(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u})] \right] \\ & + 2 \left[[\mathbf{B}[v + \delta(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u})]]^T \int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta) \mathbf{x}(t + \theta) d\theta \right] = \\ & -\alpha_4(\mathbf{x}_t) + \left[2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{K}_0 + 2 \left[\int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta) \mathbf{x}(t + \theta) d\theta \right]^T \right] \left[\mathbf{B}[v + \delta(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u})] \right], \end{aligned}$$

$\dot{V}(\mathbf{x}_t)$ se puede reescribir como

$$\dot{V}(\mathbf{x}_t) = -\alpha_4(\mathbf{x}_t) + \omega^T v + \omega^T \delta(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}),$$

en donde el término

$$\omega^T = \left[2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{K}_0 + 2\left[\int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\theta\right]^T \right] \mathbf{B}.$$

Se desea elegir a v tal que

$$\omega^T v + \omega^T \delta(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}) \leq 0,$$

de la sección anterior se concluyó que

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_L(t) + v,$$

estabiliza robustamente a la planta con

$$v = -\frac{\eta}{1-k} \frac{\omega}{\|\omega\|},$$

en donde $\eta \geq \rho$.

Del artículo relacionado al control óptimo para sistemas con retardos [28], se define a η como

$$\eta = \alpha_5 \|\mathbf{x}(t)\| + \alpha_6 \|\mathbf{x}(t-h)\|,$$

en donde $\alpha_5, \alpha_6 > 0$, entonces v queda diseñada de la forma

$$v = -\frac{\alpha_5 \|\mathbf{x}(t)\| + \alpha_6 \|\mathbf{x}(t-h)\|}{1-k} \frac{\left[\left[2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{K}_0 + 2\left[\int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\theta\right]^T \right] \mathbf{B} \right]^T}{\left\| \left[\left[2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{K}_0 + 2\left[\int_{-h}^0 \mathbf{K}_1(\theta)\mathbf{x}(t+\theta)d\theta\right]^T \right] \mathbf{B} \right]^T \right\|},$$

donde se sabe que $k \in [0, 1)$.

6.3. Implementación de un control óptimo con características de robustez

En esta sección se muestran los resultados obtenidos en la implementación del control óptimo con características de robustez.

Es necesario obtener la forma discreta del término de control robusto v para poder programarlo junto con el control óptimo implementado en la sección 5.2.

Entonces la forma discreta de v es

$$v(k) = -\frac{\alpha_5 \|\mathbf{x}(k)\| + \alpha_6 \|\mathbf{x}(k - N)\|}{1 - k} \frac{\left[\left[2\mathbf{x}^T(k)\mathbf{K}_0 + 2\left[\frac{h}{m} \sum_{i=1}^{m+1} \mathbf{K}_1(\theta_i)x(k - (m + 1) + i)\right]^T \right] \mathbf{B} \right]^T}{\left\| \left[\left[2\mathbf{x}^T(k)\mathbf{K}_0 + 2\left[\frac{h}{m} \sum_{i=1}^{m+1} \mathbf{K}_1(\theta_i)x(k - (m + 1) + i)\right]^T \right] \mathbf{B} \right]^T \right\|},$$

en donde $N = \frac{h}{\Delta t}$ y Δt es el periodo de muestreo.

El control óptimo con características de robustez $\mathbf{u} = \mathbf{u}_L(t) + v$ queda de la siguiente forma

$$\mathbf{u}(k) = F_0 x(k) + \frac{h}{m} F_1 \sum_{i=1}^{m+1} \mathbf{K}_1(\theta_i)x(k - (m + 1) + i) + \frac{\alpha_5 \|\mathbf{x}(k)\| + \alpha_6 \|\mathbf{x}(k - N)\|}{1 - k} \frac{\left[\left[2\mathbf{x}^T(k)\mathbf{K}_0 + 2\left[\frac{h}{m} \sum_{i=1}^{m+1} \mathbf{K}_1(\theta_i)x(k - (m + 1) + i)\right]^T \right] \mathbf{B} \right]^T}{\left\| \left[\left[2\mathbf{x}^T(k)\mathbf{K}_0 + 2\left[\frac{h}{m} \sum_{i=1}^{m+1} \mathbf{K}_1(\theta_i)x(k - (m + 1) + i)\right]^T \right] \mathbf{B} \right]^T \right\|} \quad (6.12)$$

En el siguiente capítulo se muestran los resultados experimentales aplicando el control óptimo con características de robustez en la planta de deshidratación, se hace una comparación contra el control óptimo sin el término robusto para evidenciar las posibles mejoras en rendimiento.

Capítulo 7

Resultados experimentales

A continuación se muestran los resultados obtenidos al hacer una comparativa entre el control óptimo y el control óptimo con características de robustez, donde $\alpha_5 = \alpha_6 = 1000$ fueron ajustadas heurísticamente.

Para el control óptimo con características de robustez, fueron probados distintos valores para $k \in [0, 1)$, se pudo observar que si $k = 0$ el control óptimo con características de robustez no presenta ventajas sobresalientes cuando es comparado contra el control óptimo, y cuando k tiene valores cercanos a 1, el desempeño de la planta incrementa (con respecto al error y el tiempo de establecimiento), sin embargo es consumida demasiada energía.

Debido a lo anterior se escogió un valor para $k = 0.5$. el valor numérico para las matrices de penalización $Q = 3$ y $R = 1$ fueron elegidas de forma fácil cuando se usó el control óptimo con características de robustez, pero esta elección no fue fácil cuando es usado sólo el control óptimo, debido a que pequeñas variaciones en estas matrices de penalización producen importantes cambios en el desempeño de todo el sistema de control.

Los experimentos se llevaron a cabo con cuatro rebanadas de tomate de aproximadamente $3mm$ de espesor y $5g$ de peso, el experimento finaliza cuando más del 50 % de las rebanadas son deshidratadas (tienen el 10 % de humedad relativa). Cada 15 minutos las rebanadas son extraídas de la cámara de deshidratación y son pesadas para calcular su humedad, esto implica que la temperatura de la cámara de deshidratación es perturbada por incertidumbres no modeladas debido a la temperatura externa, regularmente cercana a $25^{\circ}C$, la cual también se toma como la temperatura inicial (condiciones iniciales φ).

7.1. Primeros resultados experimentales control óptimo vs control óptimo-robusto

Cuadro 7.1: Resultados experimentales 1

$$Q = 1, R = 1, \alpha_5 = 1000, \alpha_6 = 1000, k = 0$$

Región de operación.	Control	Energía (Wh)	IAE	T_{dur} (min)	T_{es} (seg)	σ_G (% Humedad)
$50^{\circ}C$	Óptimo	284.98	161390	118	543	1.8001
	Óptimo+Robusto	163.39	55614	109	876	2.5112
$60^{\circ}C$	Óptimo	212.50	136430	106	1999	1.5452
	Óptimo+Robusto	253.36	90381	92	1797	2.7565
$70^{\circ}C$	Óptimo	440.01	76660	61	904	2.2872
	Óptimo+Robusto	597.40	66708	76	1238	1.3889

Gráficas comparativas 50°C

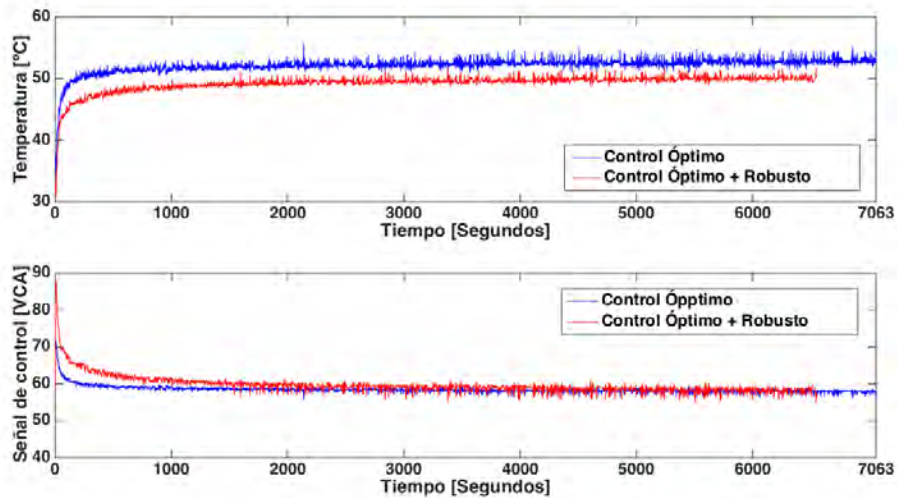


Figura 7.1: Comparativa 1 Temperatura y Señal de Control 50°C

En la gráfica de temperatura contra tiempo que aparece en la Figura 7.1 se puede observar que al aplicar control óptimo con características de robustez, el estado del sistema se mantiene más cercano a la referencia (50°C) en comparación con el control óptimo, ya que, a pesar de que al implementar el control óptimo se llega antes a la referencia, hay un mayor error en estado estacionario. Además, también se puede observar claramente que el tiempo de duración del experimento es menor al implementar el control óptimo con características de robustez.

Si se analiza la gráfica de señal de control, se puede observar que aparentemente el control óptimo con características de robustez utiliza mayor energía durante todo el experimento, sin embargo, utilizando este control, el tiempo de duración del experimento es menor, y esto lleva a que en el Cuadro 7.1 de resultados experimentales se observe que el control óptimo con características de robustez consuma menos energía respecto al control óptimo.

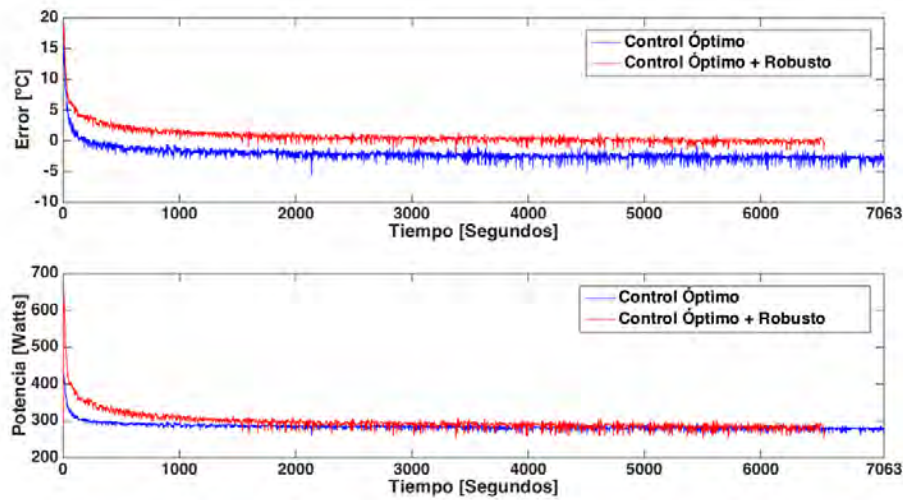


Figura 7.2: Comparativa 1 Error y Potencia 50°C

Otra forma de medir el desempeño entre un control y otro, es analizando la gráfica del error, ya que se puede observar que el al aplicar el control óptimo con características de robustez, el error entre el estado y la referencia es menor si se compara con el error entre el estado y la referencia al aplicar el control óptimo.

En la gráfica de potencia se puede observar que la potencia instantánea al implementar el control óptimo con características de robustez es mayor en comparación con la potencia instantánea implementando el control óptimo, sin embargo, el tiempo de duración del experimento es mayor aplicando el control óptimo, y esto se traduce en un mayor consumo de energía respecto al control óptimo con características de robustez.

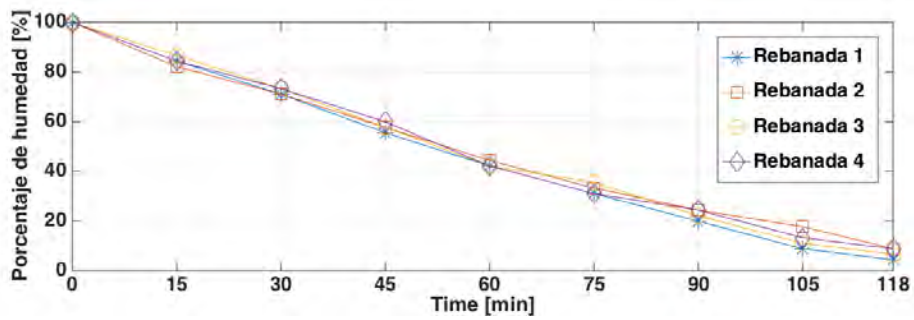


Figura 7.3: Curvas deshidratación óptimo 50°C

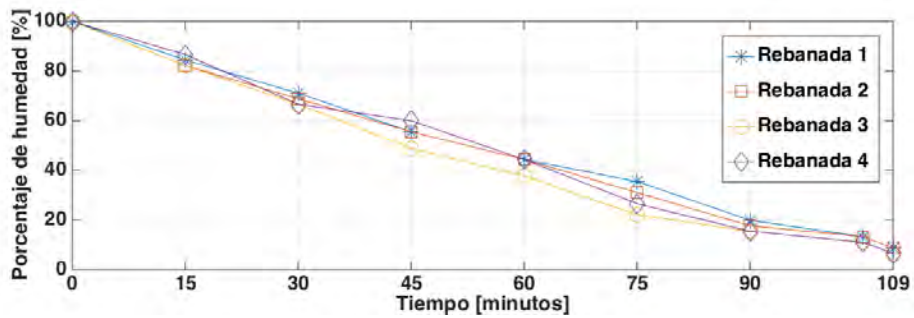


Figura 7.4: Curvas deshidratación óptimo+robusto 50°C

Las Figuras 7.3 y 7.4 muestran las curvas de deshidratación en términos porcentuales de las rebanadas de jitomate durante los experimentos, de estas gráficas se determinó una desviación estándar general para cada experimento, en donde se obtuvo una mayor desviación estándar al implementar el control óptimo con características de robustez, esto se puede traducir en una menor uniformidad de deshidratación del producto, sin embargo, también se puede observar que al final del experimento la diferencia de porcentaje de humedad entre las rebanadas es mínima.

Gráficas comparativas 60°C

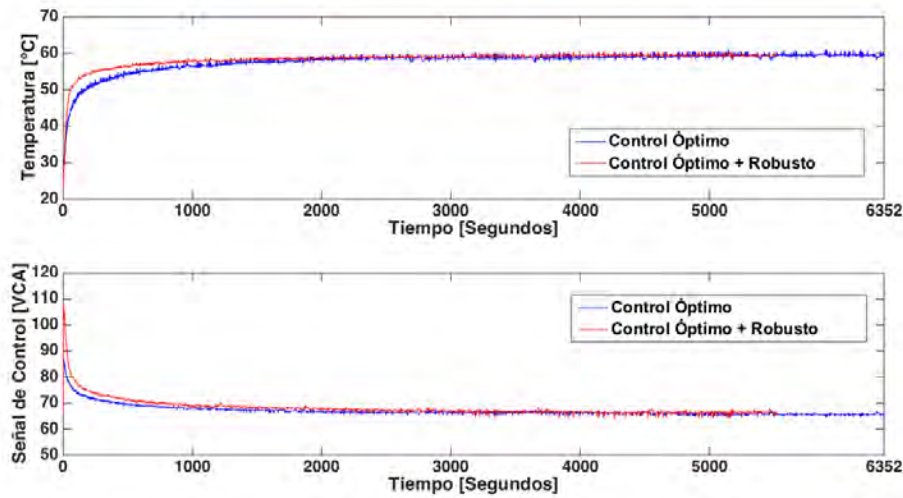


Figura 7.5: Comparativa 1 Temperatura y Señal de Control 60°C

Si se toma en cuenta la gráfica de la temperatura que aparece en la figura 7.5, se puede observar que cada control en lazo cerrado con el sistema, llevan a la variable del proceso a la referencia, sin embargo el control óptimo con características de robustez toma ventaja sobre el control óptimo, ya que el tiempo de establecimiento es menor, así como también el tiempo de duración del experimento.

Por otro lado, al observar la gráfica en donde se comparan ambos controles, se puede ver que el control óptimo con características de robustez demanda más energía durante todo el experimento, esto es de esperarse, ya que al hablar de un control óptimo con un término de robustez, implica por supuesto hablar de un mayor consumo de energía, sin embargo, la diferencia de la energía consumida entre un control y otro, es mínima.

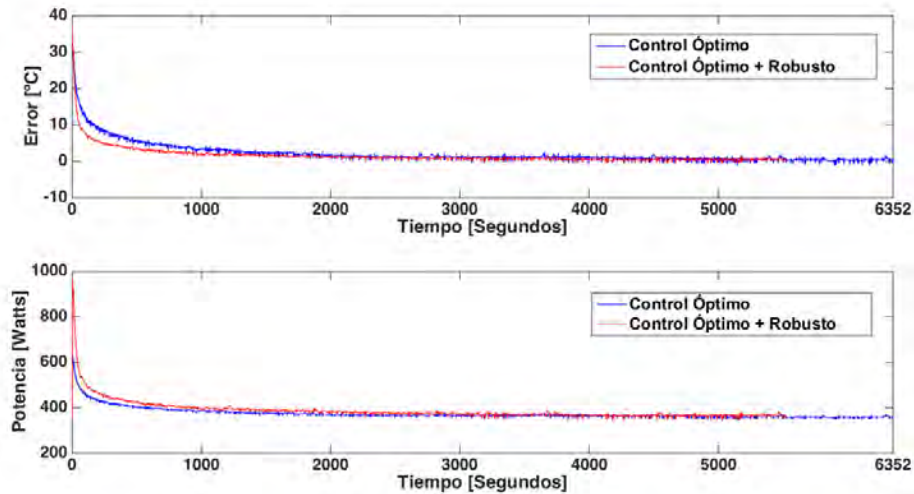


Figura 7.6: Comparativa 1 Error y Potencia 60°C

Como se comentó anteriormente, el control óptimo con características de robustez, estabiliza a la planta en un tiempo menor en comparación con el control óptimo, esto se puede traducir en un error mas pequeño entre la referencia (60°C) y la variable del proceso, así mismo, de la gráfica del error se obtiene el índice de desempeño calculado con la integral del error absouto (IAE) para ambos controladores, obteniendo un IAE menor para el control óptimo con características de robustez, lo cual se puede confirmar en el Cuadro 7.1 de resultados experimentales.

Para observar la energía consumida por cada control respectivamente, se realiza la gráfica de la comparativa de la potencia instantánea, obteniendo un mayor consumo de energía al implementar el control óptimo con características de robustez, sin embargo, si se habla en términos de desempeño, se considera que el control óptimo con características de robustez se desempeña mejor que el control óptimo debido a que su IAE es menor.

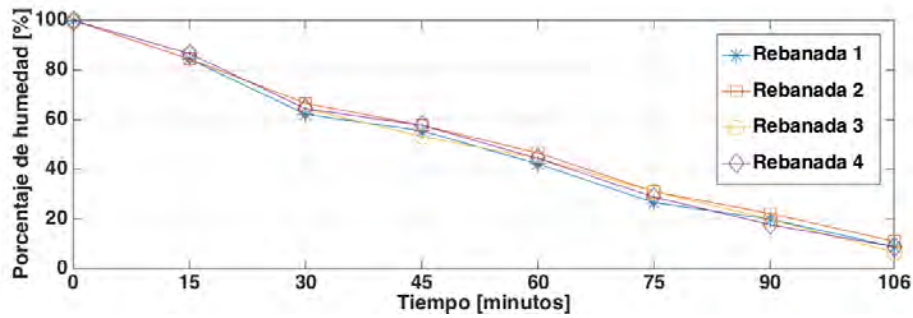


Figura 7.7: Curvas deshidratación óptimo 60°C

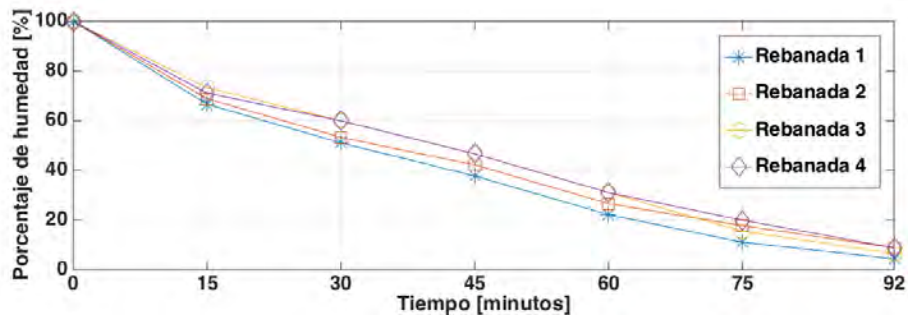


Figura 7.8: Curvas deshidratación óptimo+robusto 60°C

Si se analizan las gráficas de las Figuras 7.7 y 7.8 en dónde se ven las curvas de deshidratación en términos porcentuales, se puede confirmar que el valor numérico de la desviación estándar generalizada aplicando el control óptimo con características de robustez es mayor, esto se puede ver en el Cuadro 7.1 de resultados experimentales, sin embargo, al término del experimento la diferencia de porcentaje de humedad entre todas las rebanadas es mínima.

Gráficas comparativas 70°C

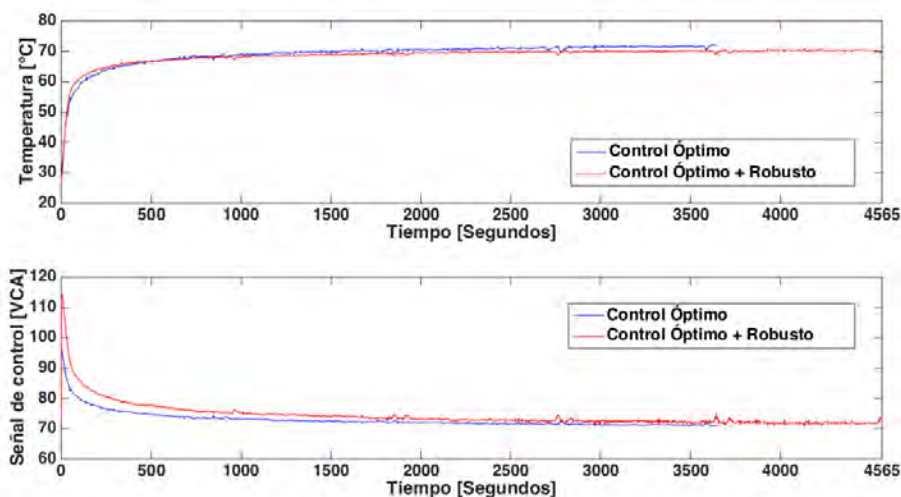


Figura 7.9: Comparativa 1 Temperatura y Señal de Control 70°C

En la gráfica de la temperatura que se muestra en la Figura 7.9 se observa que al implementar el control óptimo en lazo cerrado con la planta, la variable del proceso sobrepasa por 3°C a 4°C a la referencia (70°C), por consiguiente la deshidratación de las rebanadas de jitomate es más rápida esto puede afectar al producto [29]. Lo anterior es debido a incertidumbres y/o no linealidades en los sensores de medición y acondicionadores de señal. Sin embargo, al aplicar el control óptimo con características de robustez en lazo cerrado con la planta, estas incertidumbres y no linealidades son compensadas, por lo que la variable del proceso se mantiene muy cerca de la referencia y su tiempo de establecimiento es menor.

Si se considera la gráfica que compara las señales de ambos controladores, se puede observar claramente que la señal de control óptimo con características de robustez siempre es mayor, sin embargo como ya se mencionó anteriormente, al aplicar el control óptimo sin el término robusto, las incertidumbres presentes y/o las no linealidades de los sensores y acondicionadores de señales hacen que la variable del proceso no tienda a la referencia.

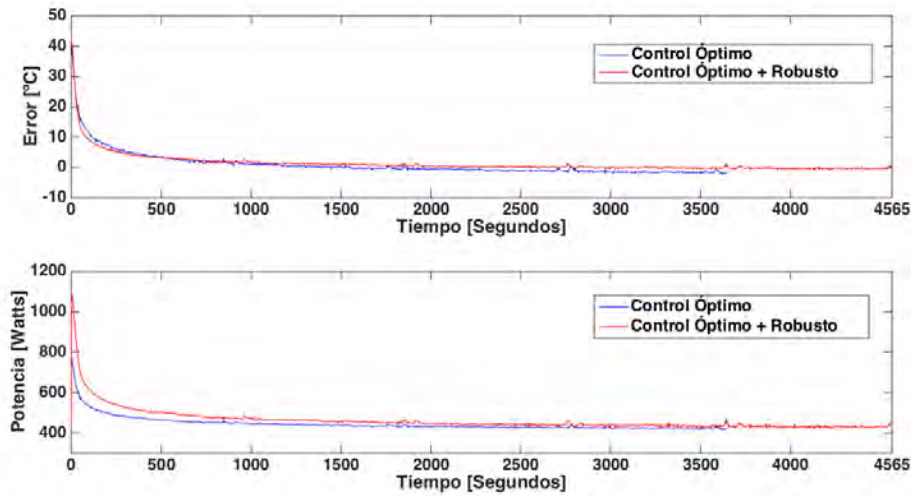


Figura 7.10: Comparativa 1 Error y Potencia 70°C

Si se analiza la gráfica del error mostrada en la Figura 7.10, se observa una diferencia entre la implementación de un controlador y otro. Al implementar el control óptimo con características de robustez el error tiende a ser cero, mientras que aplicando el control óptimo sin el término robusto, el error diverge del cero. Si se calcula el índice de desempeño de ambos controladores, se puede ver en el Cuadro 7.1 de resultados experimentales que el control óptimo con características de robustez tiene un menor valor numérico para la integral del error absoluto, por consiguiente se puede deducir que este control tiene un mayor desempeño sobre el control óptimo.

Respecto a la gráfica de la potencia, se puede observar que el control óptimo con características de robustez consume mayor energía durante todo el experimento respecto al control óptimo sin termino robusto, sin embargo esta diferencia no es grande, esto se puede validar en el Cuadro 7.1 de resultados experimentales. Además, esto es algo esperado, ya que al agregar un término robusto al control óptimo, se consume más energía.

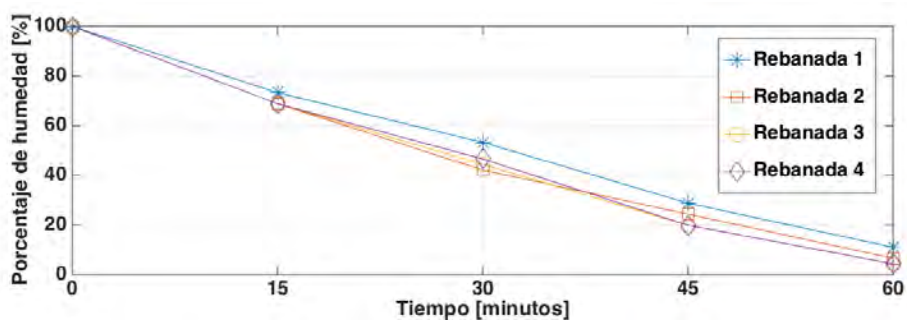


Figura 7.11: Curvas deshidratación óptimo 70°C

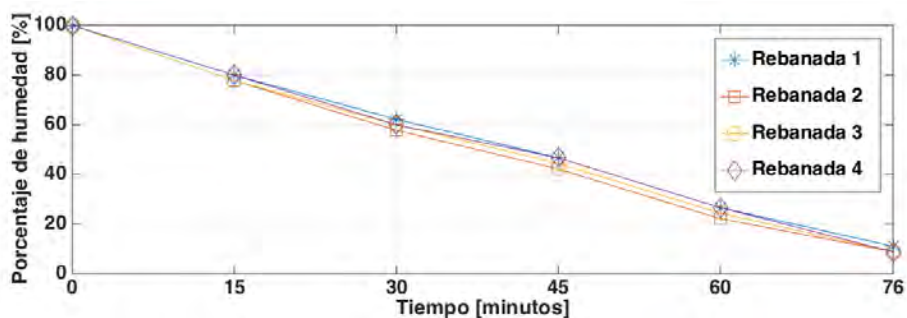


Figura 7.12: Curvas deshidratación óptimo+robusto 70°C

Al comparar las gráficas de las curvas de deshidratación mostradas en las Figuras 7.11 y 7.12 se puede observar que existe una mayor uniformidad de deshidratación cuando se usa el control óptimo con características de robustez, además, también se puede observar que cuando se usa el control óptimo sin término robusto, las rebanadas de jitomate tuvieron una desviación estándar más alta al término del experimento, así como también las rebanadas tuvieron un exceso de deshidratación sobrepasando el peso final deseado (0.95g).

7.2. Segundos resultados experimentales control óptimo vs control óptimo-robusto

Al igual que en la sección anterior, en esta sección se muestran los resultados experimentales de la comparativa entre un control óptimo y un control óptimo con características de robustez, en donde las constantes $\alpha_5 = 1000$ y $\alpha_6 = 1000$ se mantuvieron con el mismo valor, sin embargo el valor de $k = 0$ fue modificado a $k = 0.5$ así como también la matriz de penalización $Q = 1$ fue modificada a $Q = 3$, obteniendo los siguientes resultados para la implementación de cada control.

Cuadro 7.2: Resultados experimentales 2

$$Q = 3, R = 1, \alpha_5 = 1000, \alpha_6 = 1000, k = 0.5$$

Región de operación	Control.	Energía. (Wh)	IAE	T_{dur} (min)	T_{es} (seg)	σ_G (% Humedad)
50°C	Óptimo	146.62	52426	118	604	2.5366
	Óptimo+Robusto	153.13	32539	116	208	1.5885
60°C	Óptimo	249.14	146380	92	-	2.2977
	Óptimo+Robusto	263.59	49421	84	1580	2.1862
70°C	Óptimo	358.89	51807	76	923	3.3733
	Óptimo+Robusto	369.47	38816	74	485	1.3108

Gráficas comparativas 50°C

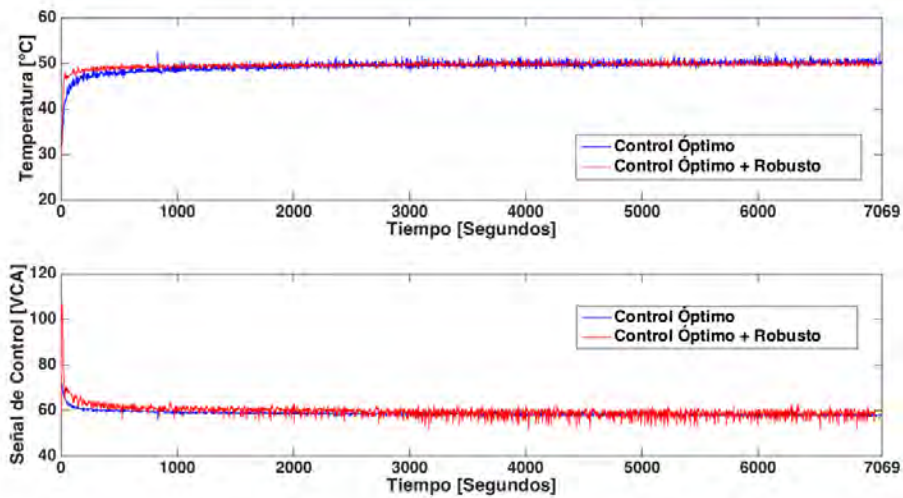


Figura 7.13: Comparativa 2 Temperatura y Señal de Control 50°C

Considerando la gráfica de temperatura en la Figura 7.13, se puede observar que tanto el control óptimo como el control óptimo con características de robustez se comportan de manera similar, sin embargo, el control óptimo con el término de robustez tiene un mejor desempeño, ya que al implementar este control, se puede ver que la variable del proceso tiene un menor tiempo de establecimiento y el tiempo de duración del experimento es más corto.

Analizando la gráfica de la comparativa de las señales de control, se puede observar que la señal de control óptimo con características de robustez se comporta de manera más sensible ante pequeños cambios en la variable del proceso, esto se debe a que el término robusto compensa las incertidumbres y/o no linealidades presentes en los sensores y acondicionadores de señal, sin embargo esto permite que la variable del proceso se mantenga más cercana a la referencia en comparación con el control óptimo sin término robusto.

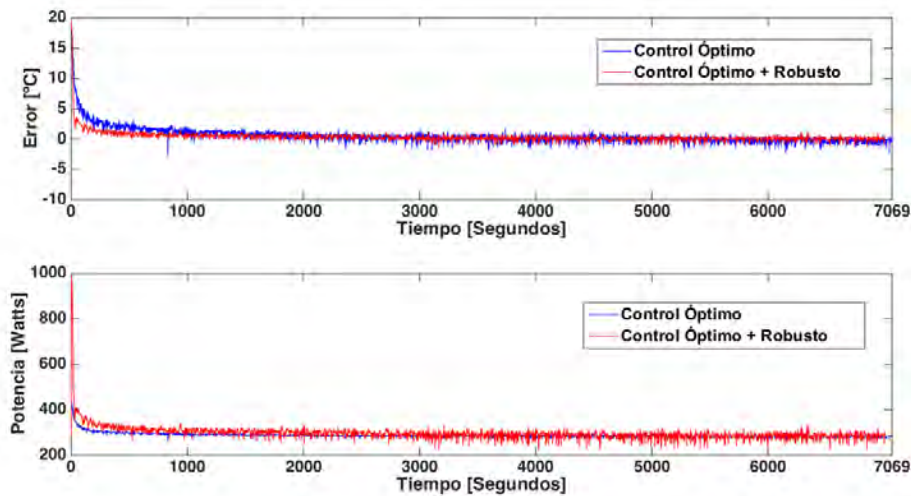


Figura 7.14: Comparativa 2 Error y Potencia 50°C

En la gráfica del error mostrada en la Figura 7.14 se puede ver claramente que al implementar el control óptimo sin el término robusto, tanto el error en estado transitorio como en estado estacionario es más grande en comparación con el error que se tiene al implementar el control óptimo con el término robusto, así mismo se calculó el IAE en ambos casos para medir el desempeño que tuvo cada control, obteniendo un mayor valor numérico para el control óptimo, debido a lo anterior, se puede deducir que el control óptimo con características de robustez tiene un mejor desempeño.

Al analizar la gráfica de la potencia instantánea, se puede observar que el control óptimo con el término de robustez demanda más potencia que el control óptimo sin término robusto. Además, al calcular la energía total consumida en cada experimento, se puede observar que el consumo energético del control óptimo es menor, pero no muy diferente a la energía consumida implementando el control óptimo con características de robustez, sin en cambio, como se mencionó anteriormente, el control óptimo con el término robusto, obtuvo un mejor desempeño.

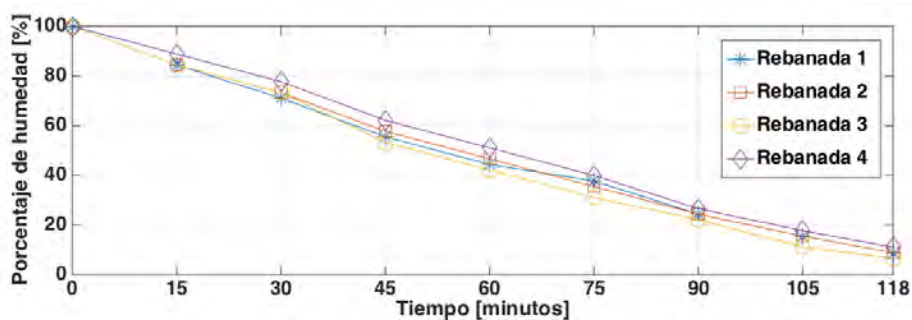


Figura 7.15: Curvas deshidratación óptimo 50°C

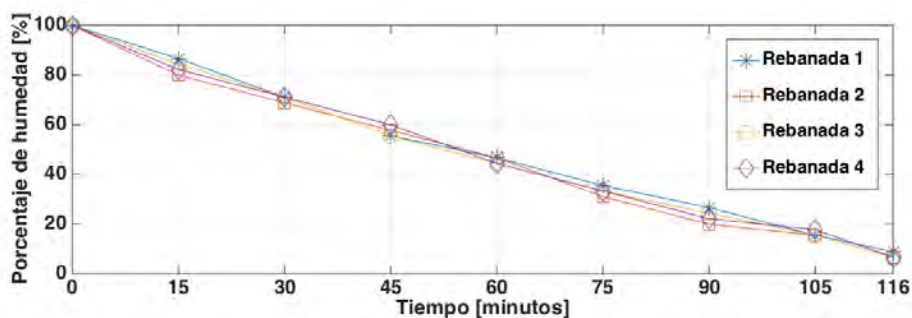


Figura 7.16: Curvas deshidratación óptimo+robusto 50°C

Comparando las gráficas mostradas en las Figuras 7.15 y 7.16 en donde se observan las curvas de deshidratación en términos porcentuales de la implementación del control óptimo y el control óptimo con características de robustez, se puede ver que al implementar el control óptimo con características de robustez, las rebanadas de jitomate tuvieron una deshidratación más uniforme, es decir, el valor numérico de la desviación estándar generalizada es menor.

Gráficas comparativas 60°C

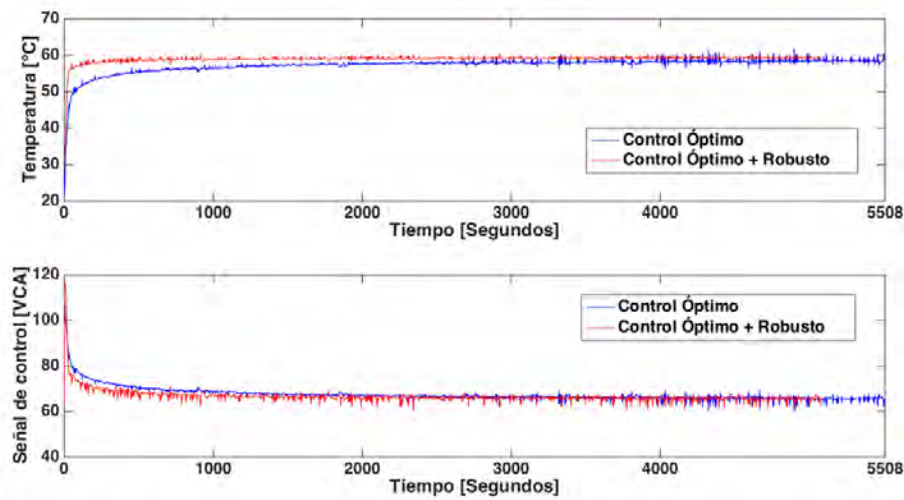


Figura 7.17: Comparativa 2 Temperatura y Señal de Control 60°C

En la gráfica de temperatura mostrada en la Figura 7.17 se puede observar que el control óptimo con características de robustez toma una ventaja considerable sobre el control óptimo sin término robusto, ya que la variable del proceso tiene un tiempo de establecimiento mucho menor, además de que el tiempo de duración del experimento también es menor.

Si se toma en cuenta la gráfica de la comparativa de las señales de control, se puede observar que el control óptimo con término robusto tiene un comportamiento más sensible ante perturbaciones, esto es debido a que el término robusto compensa las perturbaciones como son las incertidumbres y no linealidades presentes en los sensores y acondicionadores de señal.

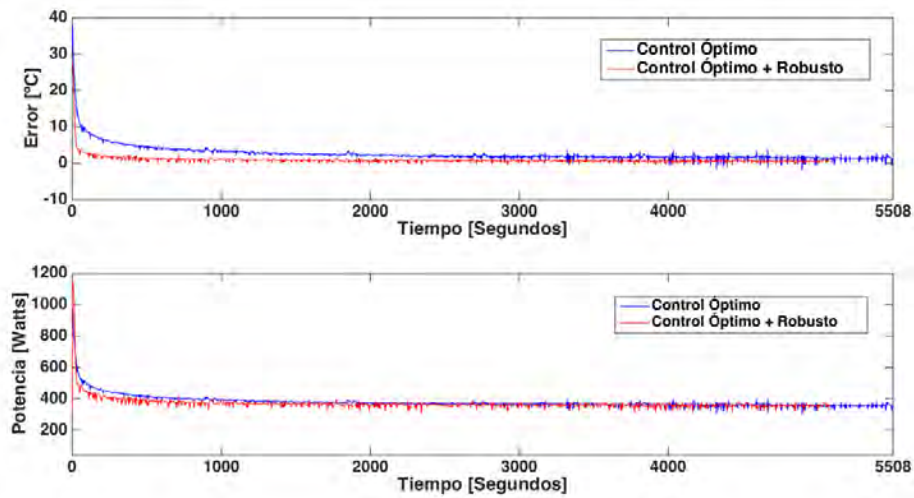


Figura 7.18: Comparativa 2 Error y Potencia 60°C

Como se mencionó anteriormente, al implementar el control óptimo con características de robustez, la variable del proceso alcanza a la referencia en un tiempo menor, esto también se traduce en un menor error entre la referencia (60°C) y la variable del proceso como se puede observar en la gráfica del error mostrada en la Figura 7.18.

Respecto a la energía consumida en cada experimento, se puede ver en el Cuadro 7.2 de resultados experimentales que el control óptimo sin término robusto consume menos energía, sin embargo, analizando la gráfica de la potencia instantánea se puede observar que la energía consumida por el control óptimo con el término robusto es ligeramente mayor.

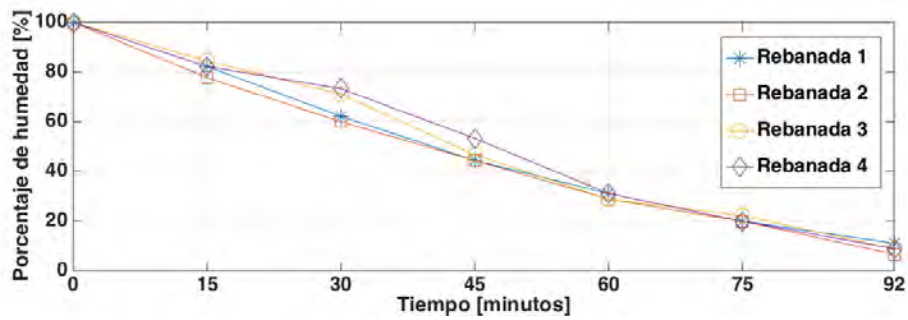


Figura 7.19: Curvas deshidratación óptimo 60°C

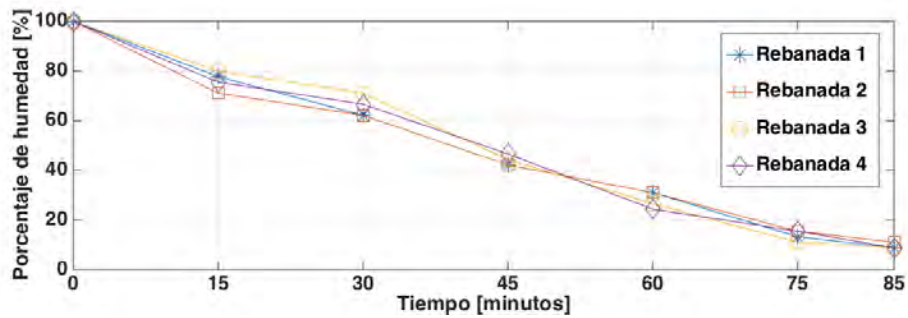


Figura 7.20: Curvas deshidratación óptimo+robusto 60°C

Cuando se analizan las curvas de deshidratación de cada experimento que se muestran en las Figuras 7.19 y 7.20 se puede observar que la deshidratación del producto entre ambos experimentos es similar, sin embargo hay una ligera ventaja al utilizar el control óptimo con características de robustez, ya que la desviación estándar generalizada al utilizar este control es menor, esto se puede confirmar en el Cuadro 7.2 de resultados experimentales.

Gráficas comparativas 70°C

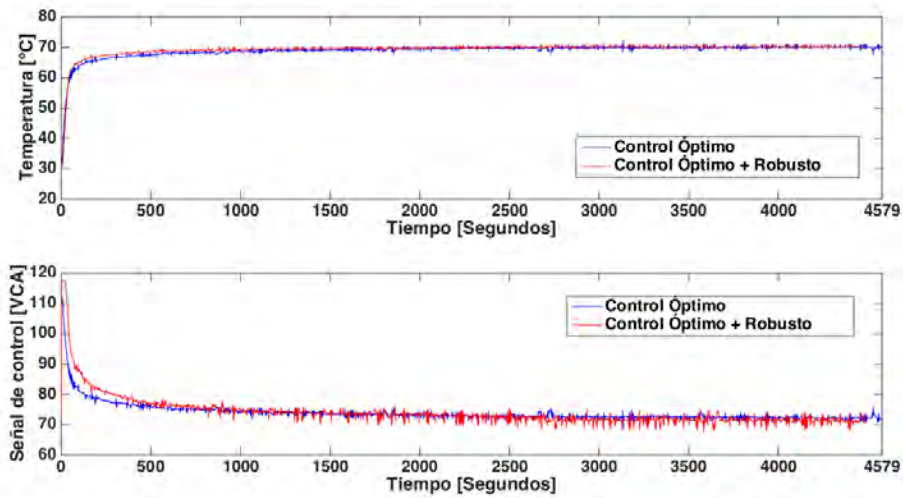


Figura 7.21: Comparativa 2 Temperatura y Señal de Control 70°C

En la gráfica de la temperatura mostrada en la Figura 7.21 se muestra la respuesta de las variables del proceso implementando el control óptimo y el control óptimo con características de robustez, se puede observar que ambos controles hacen que la respuesta del sistema tenga un comportamiento casi idéntico, sin embargo analizando un más esta comparativa, se puede notar que el control óptimo con el término de robustez tiene una ligera ventaja sobre el control óptimo, ya que el tiempo de establecimiento es menor, así como también el tiempo de duración del experimento.

Por otra parte, si se analiza la gráfica en donde se comparan las señales de control, se puede observar que el control óptimo con características de robustez es más sensible a los cambios en la variable del proceso, esto implica una señal más grande en comparación con el control óptimo.

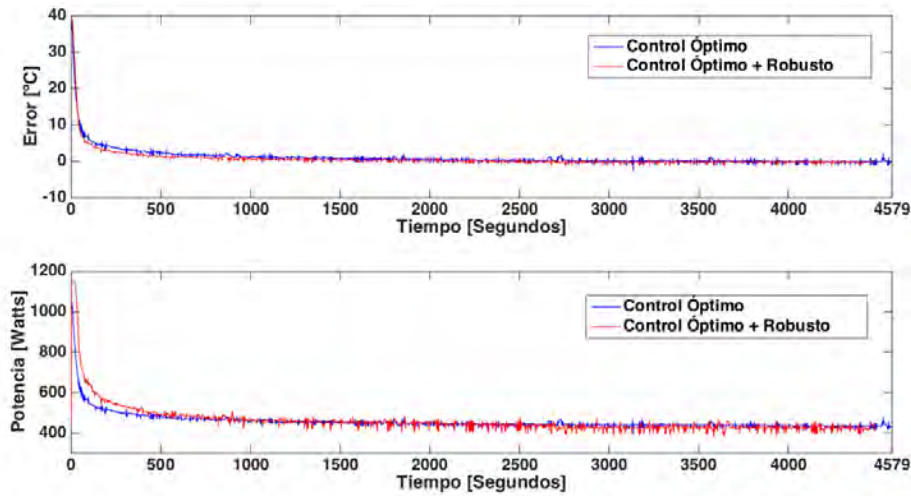


Figura 7.22: Comparativa 2 Error y Potencia 70°C

Si se analiza detenidamente la gráfica del error que se muestra en la Figura 7.22 se puede observar que el control óptimo sin el término robusto tiene un error ligeramente más grande tanto en estado transitorio como en estado estacionario, para determinar el desempeño de cada controlador, se calcula el IAE , en donde se puede ver que el control óptimo sin término robusto tiene un valor numérico mayor para este índice de desempeño, por lo tanto se dice que el control óptimo con características de robustez tiene un mejor desempeño.

Para determinar el control que utiliza más energía al ser implementado, se analiza la gráfica de la potencia, en donde se observa que el control óptimo con características de robustez demanda mayor energía, esto se puede confirmar en el Cuadro 7.2 de resultados experimentales, sin embargo la diferencia de la energía utilizada entre un controlador y otro no es tan grande.

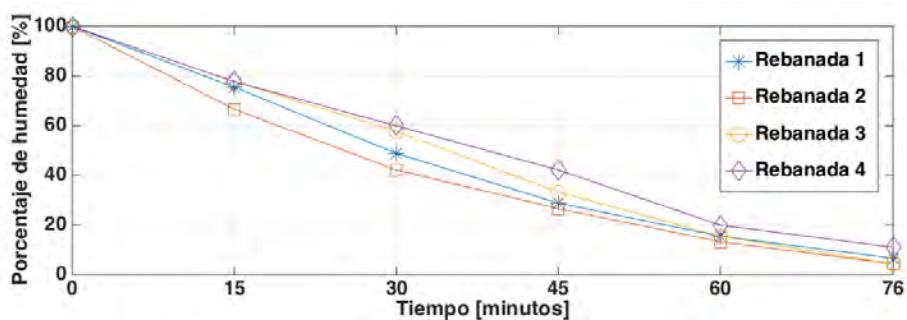


Figura 7.23: Curvas deshidratación óptimo 70°C

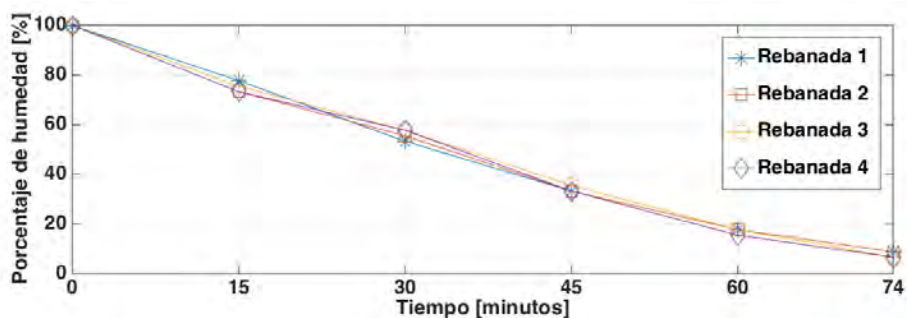


Figura 7.24: Curvas deshidratación óptimo+robusto 70°C

Cuando se analizan las curvas de deshidratación de las rebanadas de jitomate mostradas en las Figuras 7.23 y 7.24, se puede ver claramente que la desviación estándar generalizada de la deshidratación en términos porcentuales es más grande al implementar el control óptimo sin el componente de robustez, también se puede observar que al término de los experimentos, la desviación estándar de las rebanadas es considerablemente menor implementando el control óptimo con características de robustez.

De manera general se puede observar que en la mayoría de experimentos el control óptimo con características de robustez tiene mayor ventaja sobre el control óptimo con respecto al tiempo de establecimiento, respecto al error entre el punto de consigna (SP) y la variable del proceso (PV), así como también respecto al tiempo de duración del experimento.

De acuerdo con los resultados obtenidos el control óptimo con características de robustez presenta ventajas respecto a:

- Un menor valor numérico en la Integral del Error Absoluto (IAE), esto implica que los nutrientes (licopeno y fenoles totales) en el producto están mejor preservados [29].
- El tiempo de duración de los experimentos y el tiempo de establecimiento es menor cuando se usa el término robusto, esto implica mayor preservación de los niveles de vitamina C [29].
- Se observa una mayor deshidratación uniforme del producto, esto puede concluirse cuando es calculada la desviación estándar general, hay menos dispersión en la humedad del producto.
- A pesar de que es usada más energía en el control óptimo con características de robustez, esta diferencia de consumo energético entre un control y otro no es significativa, sin embargo el desempeño usando el término robusto, es mayor.

7.3. Comparativa de un control óptimo con características de robustez vs PI óptimo

En esta sección se hace una comparación entre el control óptimo con características de robustez contra un control PI optimizado, implementado en un PID de corte industrial de la marca SELEC, modelo PID500, el cual fue sintonizado con la metodología descrita en [26] y con las mismas matrices de penalización $Q = 3$ y $R = 1$, se tomaron los mejores resultados obtenidos aplicando el control óptimo con características de robustez para evidenciar ventajas, los resultados se muestran a continuación.

Cuadro 7.3: Comparación Control Óptimo + Robusto VS PI Óptimo

Parámetros Óptimo + Robusto $Q = 3$, $R = 1$, $\alpha_1 = 1000$, $\alpha_2 = 1000$, $k = 0.5$

Parámetros PI Óptimo $K_p = 10.8847$, $K_i = 19.8735$

Región de operación	Control	Energía. (Wh)	IAE	T_{dur} (min)	T_{es} (seg)	M_p °C	σ_G (% Humedad)
50°C	PI Óptimo	136.45	41994	119	404	56	2.5422
	Óptimo+Robusto	153.13	32539	116	208	-	1.5885
60°C	PI Óptimo	200.20	49509	106	601	67	2.0439
	Óptimo+Robusto	263.59	49421	84	1580	-	2.1862
70°C	PI Óptimo	298.79	39505	85	291	80	2.0617
	Óptimo+Robusto	369.47	38816	74	485	-	1.3108

Gráficas comparativas 50°C

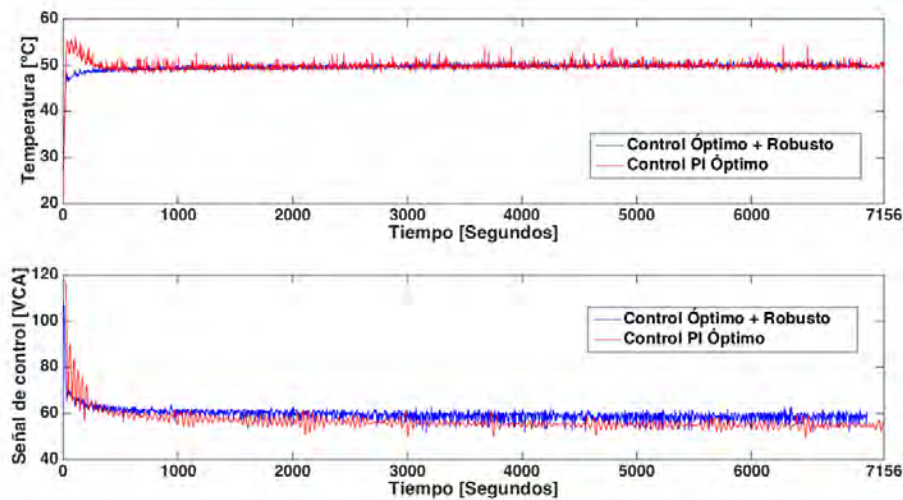


Figura 7.25: Óptimo+Robusto vs PI Óptimo Temperatura y Señal de Control 50°C

Al analizar la gráfica en donde se muestra la respuesta de la planta implementando el control PI óptimo y el control óptimo con características de robustez, se puede observar que existe un sobre impulso considerable al utilizar el control PI óptimo, además existen pequeñas oscilaciones durante todo el experimento, esto es muy posiblemente debido a que existen incertidumbres y no linealidades en los sensores y acondicionadores de señal. Por otra parte, la respuesta del sistema utilizando el control óptimo con características de robustez tiene un comportamiento mas favorable ya que no existe sobre impulso, la variable del proceso se mantiene más cercana a la referencia y el tiempo de duración del experimento es menor.

También parte se puede observar que el comportamiento de la señal de control óptimo con el término robusto es más uniforme y no presenta tantas oscilaciones, sin embargo esta señal de control demanda más energía en comparación con el control PI óptimo.

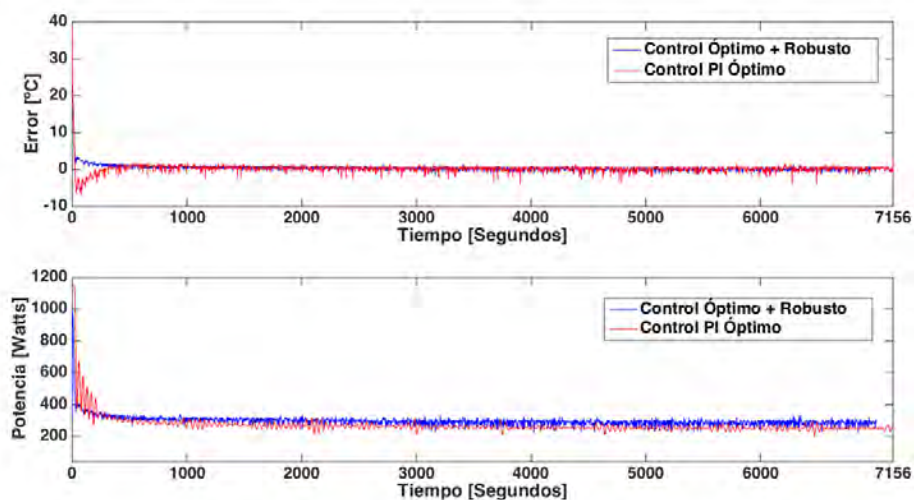


Figura 7.26: Óptimo+Robusto vs PI Óptimo Error y Potencia 50°C

Tomando en cuenta la gráfica del error que se muestra en la Figura 7.26 se observa que durante todo el experimento hay un error mayor al implementar el control PI óptimo, debido a lo anterior, al calcular el IAE para este control, el valor numérico es mas grande en comparación con el IAE calculado para el control óptimo con características de robustez, por lo tanto se dice que este control óptimo con el término robusto tiene un mejor desempeño.

Como se mencionó anteriormente, el control PI óptimo demanda menos energía en comparación con el control óptimo con características de robustez, esto se puede ver en la gráfica de potencia, y se puede reafirmar en el Cuadro 7.3 de resultados experimentales, sin embargo esta diferencia de energía no es grande.

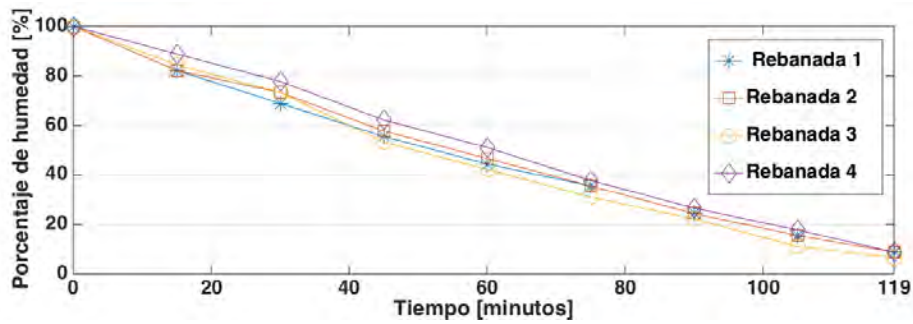


Figura 7.27: Curvas deshidratación PI óptimo 50°C

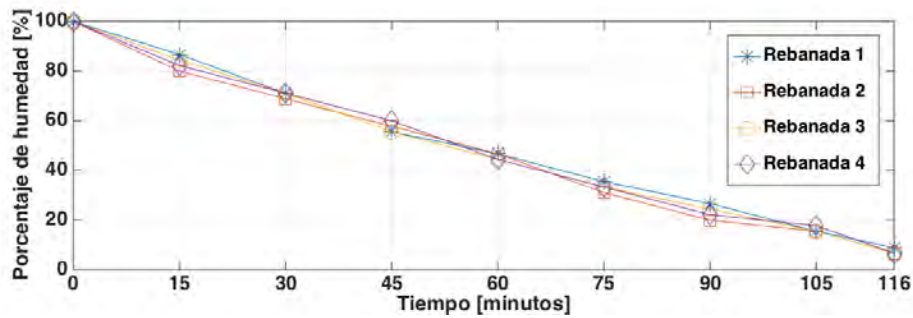


Figura 7.28: Curvas deshidratación óptimo+robusto 50°C

Comparando las gráficas de las curvas de deshidratación mostradas en las Figuras 7.27 y 7.28 se puede ver que implementando el control PI óptimo existe una deshidratación del producto menos uniforme en comparación con el control óptimo con características de robustez, esto puede estar relacionado con el comportamiento oscilatorio de la señal de control PI óptimo antes mencionado.

Gráficas comparativas 60°C

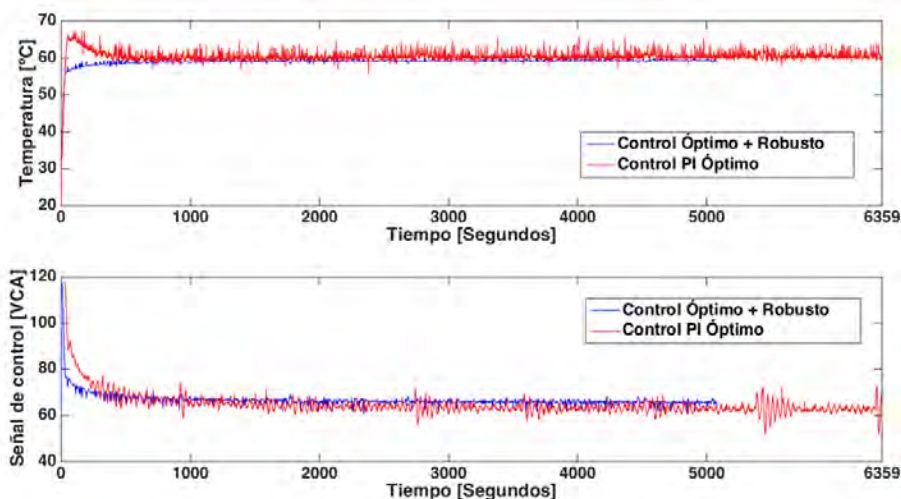


Figura 7.29: Óptimo+Robusto vs PI Óptimo Temperatura y Señal de Control 60°C

Considere la gráfica de la temperatura que se muestra en la Figura 7.29, se puede observar que al implementar el control óptimo con características de robustez la variable del proceso se mantiene más cercana a la referencia, además de que tanto el tiempo de establecimiento y el tiempo de duración del experimento es menor, por otra parte, al implementar el PI óptimo, existe sobre impulso y oscilaciones en la temperatura que afectan al producto en deshidratación.

Si se analiza la gráfica en donde se comparan las señales de control se puede observar que el comportamiento de la señal de control PI óptimo presenta muchas oscilaciones, sin embargo a pesar de que la señal de control óptimo con características de robustez tiene un comportamiento más uniforme, este demanda un valor de energía más grande.

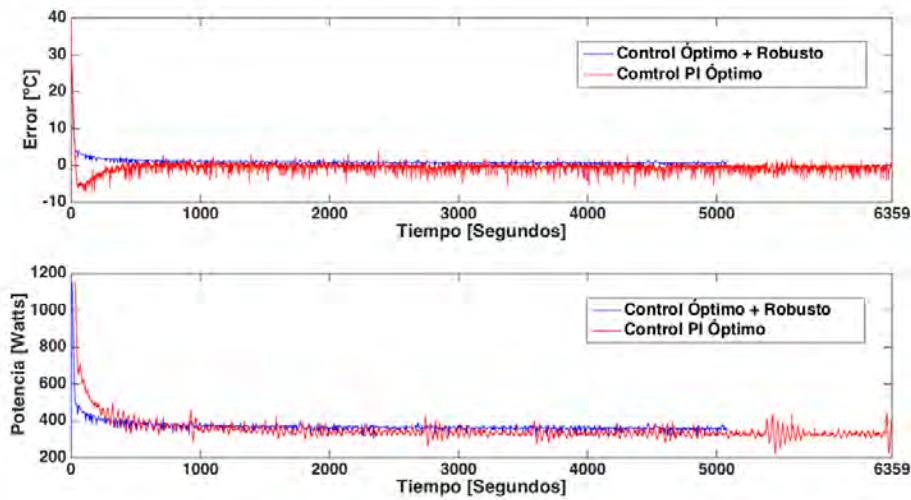


Figura 7.30: Óptimo+Robusto vs PI Óptimo Error y Potencia 60°C

En la gráfica del error mostrada en la Figura 7.30 se puede ver que debido a el sobre impulso y los cambios bruscos de la señal de control, la implementación del control PI óptimo presenta un valor numérico de error más grande, de otra manera se calcula el IAE para ambos casos obteniendo un mejor desempeño el control óptimo con características de robustez.

Si se analiza la gráfica de la potencia demandada durante los experimentos, se puede observar que aparentemente el control PI óptimo demanda más energía, pero al calcular la energía total consumida en ambos experimentos, el control PI óptimo resulta consumir menos energía, sin embargo el control óptimo con características de robustez tiene un consumo energético ligeramente mayor.

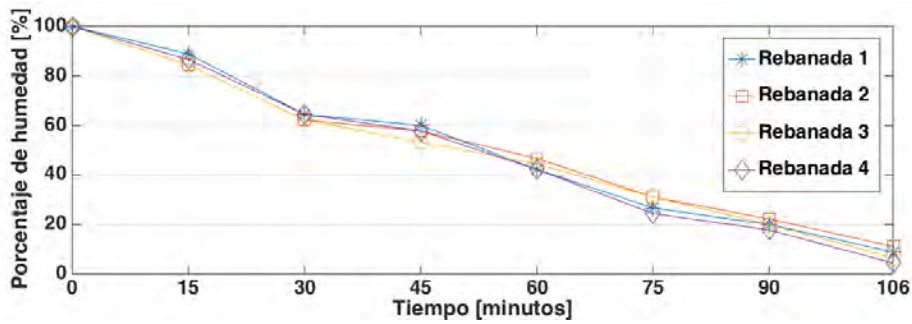


Figura 7.31: Curvas deshidratación PI óptimo 60°C

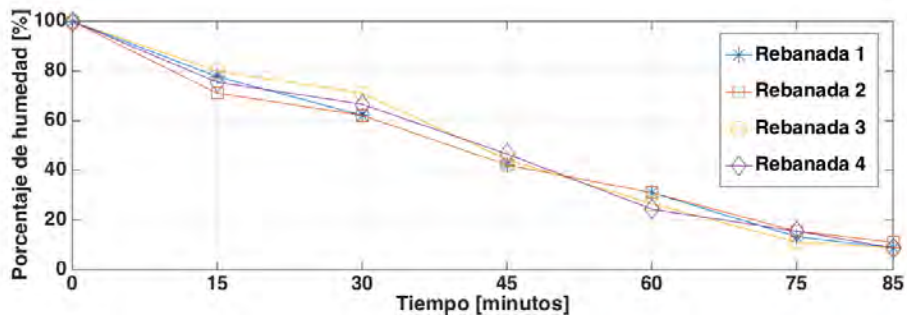


Figura 7.32: Curvas deshidratación óptimo+robusto 60°C

Si se consideran las Figuras 7.31 y 7.32 en donde se muestran las curvas de deshidratación porcentual de las rebanadas de jitomate al implementar ambos controles, se puede observar que la desviación estándar generalizada es ligeramente mayor al utilizar el control óptimo con características de robustez, en otras palabras, hay una menor uniformidad de deshidratación implementando este control, sin embargo, en el final del experimento se tuvo una desviación estándar mucho menor en comparación con el control PI óptimo en donde las rebanadas de jitomate se deshidrataron más de lo esperado.

Gráficas comparativas 70°C

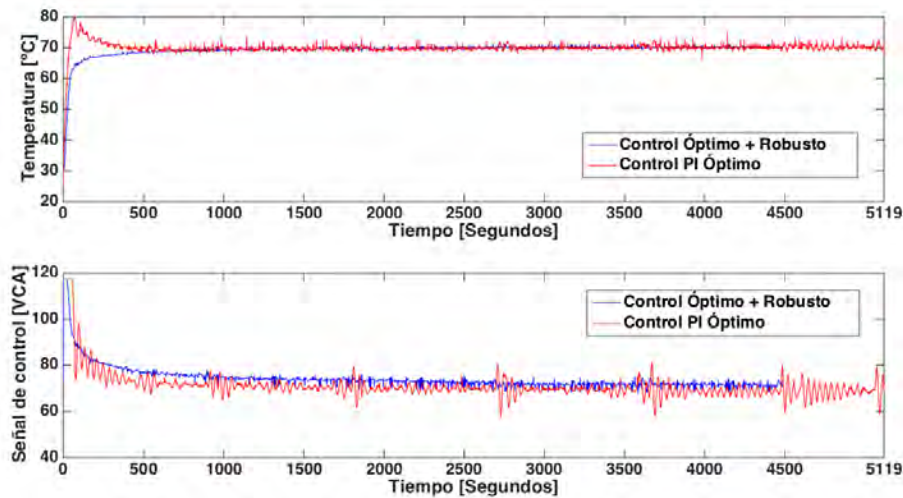


Figura 7.33: Óptimo+Robusto vs PI Óptimo Temperatura y Señal de Control 70°C

Considerando la gráfica de la temperatura en la Figura 7.33 se puede observar que existe un sobre impulso excediendo por 10°C a la referencia cuando es implementado el control PI óptimo, esto podría llegar a quemar el producto en deshidratación, además que existen oscilaciones en la temperatura durante todo el experimento, sin en cambio el control óptimo con características de robustez tiene un mejor comportamiento al no presentar sobre impulso y tener un tiempo de establecimiento y tiempo de duración del experimento menor.

En la gráfica de la comparativa de la señal de control se puede observar que el control óptimo con características de robustez tiene un comportamiento más uniforme, sin embargo, al contener un término de robustez, este control demanda más energía en comparación con el control PI óptimo.

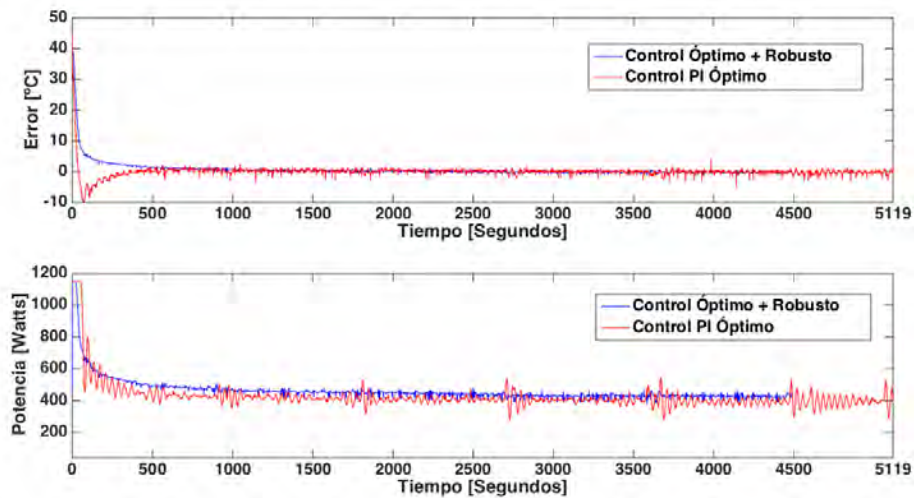


Figura 7.34: Óptimo+Robusto vs PI Óptimo Error y Potencia 70°C

Cuando se analiza la gráfica del error de la Figura 7.34 se puede ver que el control óptimo con características de robustez tiene un menor error tanto en estado transitorio como en estado estacionario, al obtener el índice de desempeño IAE se obtiene un menor valor numérico para este control, por lo tanto el control óptimo con término robusto tiene un mejor desempeño en comparación con el control PI óptimo.

Considerando la gráfica en donde se muestra la potencia demandada por cada controlador, se puede observar que a pesar de que el control óptimo con características de robustez tiene un comportamiento más uniforme, este consume más energía, sin embargo la diferencia de consumo no es grande entre un control y otro.

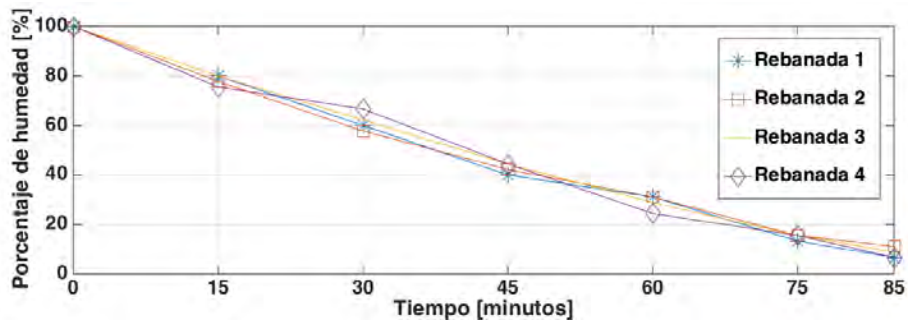


Figura 7.35: Curvas deshidratación PI óptimo 70°C

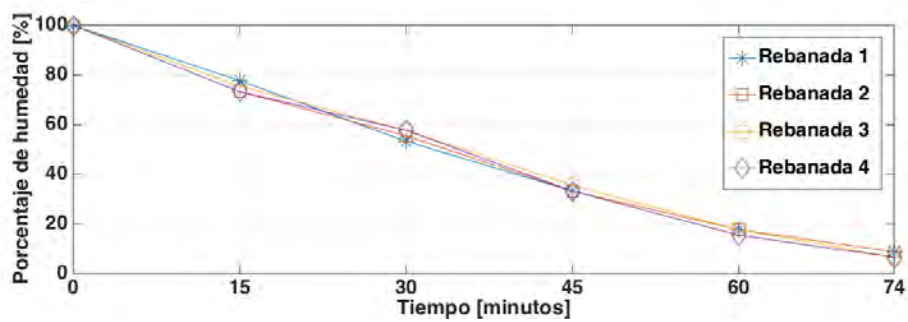


Figura 7.36: Curvas deshidratación óptimo+robusto 70°C

Si se comparan las gráficas de las curvas de deshidratación mostradas en las Figuras 7.35 y 7.36, se puede observar que la desviación estándar generalizada tiene un valor numérico menor implementando el control óptimo con características de robustez en comparación con la desviación estándar calculada para el control PI óptimo, esto puede atribuirse a que en el control óptimo con características de robustez se tienen menos cambios bruscos en la variable del proceso gracias al término robusto.

En base a los resultados obtenidos en el Cuadro 7.3, se puede concluir que el control óptimo con características de robustez, tiene un desempeño mayor que el control PI óptimo, esto se puede observar debido a que existe un menor valor numérico en la Integral del Error Absoluto, menor tiempo de duración en el experimento, la respuesta no presenta sobre impulso y hay una menor dispersión en la humedad relativa del producto, esto implica que los nutrientes (licopeno y fenoles totales) en el producto se preservan mejor [29], así como también los niveles de vitamina C y el producto no se ve afectado con el aumento considerable de temperatura que se presenta en el sobre impulso en el PI óptimo.

Por otra parte, pesar que hay un menor gasto energético en el PI óptimo, esta diferencia no es significativa en términos porcentuales.

Otra ventaja del control óptimo con características de robustez, es que su implementación es menos costosa que un controlador PID de corte industrial.

Capítulo 8

Conclusiones

El control óptimo con características de robustez implementado para la regulación de la temperatura en un proceso de deshidratación fue abordado en este trabajo de tesis, debido a los requerimientos que implica la optimización del consumo de energía y la convergencia de la variable del proceso (PV) al punto de consigna (SP) tan rápido como sea posible, se implementó un control óptimo cuadrático clásico, sin embargo, la presencia de incertidumbres en el lazo de control motivó al uso del enfoque de control robusto: Rediseño de Lypaunov extendido a los sistemas con retardo de tiempo. De acuerdo con los resultados experimentales obtenidos, el control óptimo-robusto mejora en lazo cerrado el rendimiento de una manera significativa con un consumo relativamente pequeño de energía.

Adicionalmente como parte esencial de este trabajo de tesis fue realizada la prueba alternativa para la construcción de la funcional $\mathbf{V}(\varphi)$ propuesta en [3] a la cual no se tiene acceso fácilmente, así mismo se concluye la prueba alternativa obteniendo el mismo resultado para dicha funcional.

Fue implementado experimentalmente por primera vez el control óptimo para sistemas lineales con retardo de tiempo [3] en lazo cerrado con una planta de deshidratación,

además, de acuerdo con la literatura especializada documentada, se implementó por primera vez en un proceso práctico en tiempo real.

Finalmente se realizó la comparación de los mejores resultados obtenidos al implementar el control óptimo con características de robustez contra un control PI óptimo implementado y programado en un PID de corte industrial para evidenciar las ventajas ante este, obteniendo resultados favorables para el control óptimo-robusto.

Como conclusión personal, se tiene la satisfacción de concluir este trabajo de tesis con resultados favorables no sólo de manera teórica, sino también de manera experimental, ya que hasta ahora, no había resultados documentados de la implementación del control óptimo para sistemas con retardo propuesto en [3], además al agregar el término robusto a este control basado en el enfoque de Rediseño de Lyapunov extendido al caso de sistemas con retardo de tiempo, se mejoró la respuesta del sistema tanto en estado transitorio como en estado estacionario.

Apéndice A

Programación en Matlab

A.1. Programa mínimos cuadrados recursivos

```
clc
clf
close all
clear all
format long
load temperaturaplanta.lvm
load controlturaplanta.lvm
% periodo de muestreo (seg)
T=0.1;
% Datos de la respuesta al escalon de la planta
y=temperaturaplanta(:,2);
%
for i=1:1:length(y)-50
y1(i)=mean([y(i),y(i+1),y(i+2),y(i+3),y(i+4),y(i+5),y(i+6),y(i+7),
y(i+8),y(i+9),y(i+10),y(i+11),y(i+12),y(i+13),y(i+14),y(i+15),
```

```

y(i+16),y(i+17),y(i+18),y(i+19),y(i+20),y(i+21),y(i+22),y(i+23),
y(i+24),y(i+25),y(i+26),y(i+27),y(i+28),y(i+29),y(i+30),y(i+31),
y(i+32),y(i+33),y(i+34),y(i+35),y(i+36),y(i+37),y(i+38),y(i+39),
y(i+40),y(i+41),y(i+42),y(i+43),y(i+44),y(i+45),y(i+46),y(i+47),
y(i+48),y(i+49),y(i+50)]);
end
y=y1;
u=controlturaplanta(:,2);
t=temperaturaplanta(:,1);
figure(1)
plot(t(1:length(y1)),y1)
hold on
h=10/T;
tau=0/T;
ci=0.30;
ciu=1.808168;
Pt0=10000000000*eye(3);
A0=-0.141345*0;
A1=0.129102*0;
B=0.006206*0;
% tetar=[A0;A1;B];
tetar=[0;0;0];
for i=1:length(y)-1
    a=i-1;
    b=i-h-1;
    c=i-tau-1;
    if a<1
        uno=ci;
    end
end

```

```

else
    uno=y(a);
end

if b<1
    dos=ci;
else
    dos=y(b);
end

if c<1
    tres=ciu;
else
    tres=u(c);
end

xt(i,:)=[uno, dos, tres];
    etm1(i)=y(i)-xt(i,:)*tetar;
if i-1<1
    Pt(:, :, i)=Pt0;
    teta=tetar;
else
Pt(:, :, i)=Pt0*(eye(3)-((xt(i,:) ' * xt(i,:) * Pt0)/(1+xt(i,:) *
Pt0*xt(i,:) ')));
teta=tetar+Pt(:, :, i)*xt(i,:) ' * etm1(i);
end
a0(i)=teta(1);
a1(i)=teta(2);
b0(i)=teta(3);

```

```

        tetar=teta;
        Pt0=Pt(:, :, i);
    end
    a0c=(a0(length(a0))-1)/T
    a1c=(a1(length(a0)))/T
    bc=(b0(length(a0)))/T
    %respuesta aproximada
    for i=1:h+1
        yc(i)=ci;
    end
    for i=1:tau
        u(i)=ciu;
    end
    for i=(h+2):length(t)
        yc(i)=a0(length(a0))*yc(i-1)+a1(length(a0))*yc(i-h-1)+
        b0(length(a0))*u(i-tau-1);
    end
    figure(1)
    plot(t,yc(1:length(t)),'r')
    legend('real','estimado_ordinarios','estimado_recursoivo')
    hold on
    grid on
    
```

A.2. Programa Índice de Ross Generalizado Matlab

```
clear all
global GAMATHETA1 Qj
% Obtencion de los valores de A0,A1,B,Q,R,Phi,m y grado de la
% aproximación
phi = [0.30];
A0=[-0.141345];
A1=[0.129];
B=[0.00620];
Q=[1];
R = eye(1);
m=8;
grado=6;
% Se crean variables que definen las longitudes de las Matrices A0,Am,B
longA0=length(A0);
longAm=length(A0)*(m+1);
longB=length(B);
dimB=size(B);
% Se crea la matriz Am de dimención: n*(m+1) x n*(m+1)
for i=0:longA0:longAm-1
    for j=0:longA0:longAm-1
        if i==j
            if i==0
                Am(i+1:i+longA0 , j+1:j+longA0)=A0;
            else
                Am(i+1:i+longA0 , j+1:j+longA0)=-m*eye(longA0);
            end
        end
    end
end
```

```

        Am(i+1:i+longA0, j-longA0+1:j)=m*eye(longA0);
    end
end
if i==0 && j==(longAm-longA0)
    Am(i+1:i+longA0, j+1:j+longA0)=A1;
end
end
end
end
% Se crea la matriz Qm de dimensión: n*(m+1) x n*(m+1)
Qm=zeros(size(Am));
Qm(1:4,1:4)=Q;
% Se crea una variable que define el número de columnas de B
colB=size(B);
colB=colB(1,2);
% Se crea la matriz Bm de dimensión: n*(m+1) x r
% (r=número de columnas de B)
Bm=zeros((longA0*(m+1)), colB);
Bm(1:longB, 1:colB)=B;
Rm = Bm*inv(R)*Bm';
ham = [Am -Rm; -Qm -Am'];
[x1,x2, fail, reig_min] = ric_schr(ham);
P = x2/x1;
longP=length(P);
% Matriz PI0
PI0 = P(1:longA0, 1:longA0);
% Creacion de la matriz a bloques PI1 que contiene a todos
% los elementos Pi1(-i/m)
% para (0 <= i <= m-1)

```

```

for i=0:longA0:longP-longA0-1
    PI1(1:longA0,i+1:i+longA0)=m*P(1:longA0,i+1+longA0:i+(2*longA0));
end
% Pi(-1)
PI1_1G=PI0*A1;
% Creacion de la matriz Pi2_j_i que contiene a todos los elementos
% Pi2(-i/m,-j/m)
% para (0 <= i <= m-1, 0 <= j <= m-1)
for i=0:longA0:longP-longA0-1
    for j=0:longA0:longP-longA0-1
        PI2_i_j(i+1:i+longA0,j+1:j+longA0)=(m^2)*P(i+longA0+1:i+(2*longA0),j+longA0+1:j+(2*longA0));
    end
end
% Creacion de la matriz PI2_i_1 que contiene a todos los elementos
% Pi2(-i/m,-1)
% para (0 <= i <= m-1)
for i=0:longA0:longP-longA0-1
    PI2_i_1(1:longA0,i+1:i+longA0)=(PI1(1:longA0,i+1:i+longA0))'*A1;
end
% Creacion de la matriz PI2_1_j que contiene a todos los elementos
% Pi2(-1,-j/m)
% para (0 <= j <= m-1)
for i=0:longA0:longP-longA0-1
    PI2_1_j(1:longA0,i+1:i+longA0)=A1'*PI1(1:longA0,i+1:i+longA0);
end
% Matriz Pi2(-1,-1)
PI2_11 = PI1_1G'*A1;

```

```

longPI1=length(PI1);
x=[-1:1/m:0]';
flag=0;
for i=longPI1:-longA0:longA0
    PI1N(flag+1:flag+longA0,1:longA0)=PI1(1:longA0,i-longA0+1:i);
    flag=flag+longA0;
end
PI1N=[PI1_1G;PI1N];

```


Bibliografía

- [1] Niculescu, Silviu I., (2001). Delay effects on stability A robust control approach. *Lecture Notes in control and Information 269*, Springer, Alemania.
- [2] Richard, J. (2003). Time delay systems: an overview of some recent advances and open problems, *Automatica* vol. 39, no. 10, 1667-1694.
- [3] Ross, D., W., and Flugge-Lotz, I., (1969). An optimal control problem for systems with differential difference equation dynamics., *SIAM Journal On Control an Optimization*, vol. 7, no. 4, pp609-623.
- [4] Krasovskii, N., N., (1962). On analytic desing of optimal controllers for systems with time delay. *Prikl. matem. i mekh*, vol. 26, no. 1 pp 39-51.
- [5] Ross, D. W. (1971). Controller design for time lag systems via a quadratic criterion, *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. AC-16, no. 6, 654-672.
- [6] Uchida, K., & Shimemura, E., (1986). Closed-loop properties of the infinite-timeliner-quadratic optimal regulator for systems with delays. *International Journal of Control*, 43(3), 773-779.
- [7] Uchida, K., Shimemura, E., & Abe, N., (1987). Circle condition and stability margin of the optimal regulator for systems with delays. *International Journal of Control*, 46(4), 1203-1212.

- [8] Kim, A. V., & Lozhnikov, A. B., (2000). A Linear-Quadratic Control Problem for State-Delay Systems. Exact Solutions for the Riccati Equations. *Automation and Remote Control C/C of Avtomatika i Telemekhanika*, 61(7;1), 1076-1090.
- [9] Santos, O., Mondié, S., & Kharitonov, V. L. (2009). Linear quadratic suboptimal control for time delays systems. *International Journal of Control*, 82(1), 147-154.
- [10] Kharitonov, V. L., & Zhabko, A. P. (2003). Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems. *Automatica*, 39(1), 15-20.
- [11] Kirk, D. E., (2012). Optimal control theory: an introduction. *Courier Corporation*.
- [12] Wu, H. S., (1998). Sufficient conditions for robust stability of LQG optimal control systems including delayed perturbations. *Journal of optimization theory and applications*, 96(2), 437-451.
- [13] Kosmidou, O. I., & Boutalis, Y. S., (2006). A linear matrix inequality approach for guaranteed cost control of systems with state and input delays. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 36(5), 936-942.
- [14] Lien, C. H., (2006). Guaranteed cost output control for uncertain neutral systems with time-varying delays via LMI. *International Journal of Systems Science*, 37(10), 723-734.
- [15] Lin, Y. C., & Lin, C. L., (2012). Optimal control approach for robust control design of neutral systems. *Optimal Control Applications and Methods*, 30(1), 87-102 (2009)
- [16] Chuang, C. H., Lin, C. L., & Lin, Y. C., Robust optimal control of time delay systems based on Razumikhin theorem. *Asian Journal of Control*, 14(5), 1431-1438.
- [17] Ariola, M., & Pironti, A., (2008). H_∞ optimal terminal control for linear systems with delayed states and controls. *Automatica*, 44(10), 2676-2679.
- [18] Niamsupa, P., & Phatb, V. N., (2009) H_∞ optimal control of linear time-varying systems with time-varying delay via a controllability approach, *Science Asia* 35, 284289.

- [19] Glizer, V. Y., & Turetsky, V., (2014, June). Optimal quadratic control of linear time delay systems: One approach to numerical solution. *In Control and Automation (ICCA), 11th IEEE International Conference on (pp. 797-802). IEEE.*
- [20] Erfani, A., Rezaei, S., Pourseifi, M., & Derili, H., (2018). Optimal control in teleoperation systems with time delay: A singular perturbation approach. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 338, 168-184.
- [21] Marzban, H. R., & Hoseini, S. M., (2018). Optimal control of linear multi-delay systems with piecewise constant delays. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 35(1), 183212.
- [22] Rodríguez, L., Santos, O. J., Cervantes, N., & Romero, H., (2017). Real-time discrete suboptimal control for systems with input and state delays: Experimental tests on a dehydration process. *ISA transactions*, 71, 448-457.
- [23] Khalil, H. K., & Grizzle, J. W. (1996). *Nonlinear systems* (Vol. 3). New Jersey: Prentice hall.
- [24] Rodríguez, L., Mondié, S., & Santos-Sánchez, O. (2015). Guaranteed cost control using Lyapunov redesign for uncertain linear time delay systems. *IFAC-PapersOnLine*, 48(12), 392-397.
- [25] Zarrop, M., & Wellestead, P. (1991). *Self-Tuning Systems: Control and Signal Processing. John Wiley and Sons Ltd*
- [26] Cervantes, N., Santos, O., Rodríguez, L., Romero, H., & González A. (2018). Optimal PI and PID Temperature Controls for a Dehydration Process. *Arabian Journal for Science and Engineering, Springer.*
- [27] Kolmanovskii, V., & Myshkis, A. (1999). *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. Springer Science & Business Media.*

- [28] Rodríguez-Guerrero, L., Santos-Sánchez, O., & Mondié, S. (2016). A constructive approach for an optimal control applied to a class of nonlinear time delay systems. *Journal of Process Control*, 40, 35-49.
- [29] Santos-Sánchez, N. F., Salas-Coronado, R., Santos-Sánchez, O. J., Romero, H., & Garrido-Aranda, E., (2016). On the effects of the temperature control at the performance of a dehydration process: energy optimization and nutrients retention. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 86(9-12), 3157-3171.
- [30] Moheimani, S. O. R., Savkin, A. V., & Petersen, I. R. (1996, December). Robust control of uncertain time-delay systems—a minimax optimal approach. *In Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control, 1996*, (Vol. 2, pp. 1362-1367).
- [31] Petersen, I. R. (2013) The Matching Condition and Feedback Controllability of Uncertain Linear Systems. *Robust Control of Linear Systems and Nonlinear Control Proceedings of the International Symposium MTNS-89* Vol. 2. Springer Science & Business Media, pp 177-187.
- [32] Rodríguez-Guerrero, L., Santos, O., & Mondié, S. (2014). Inverse optimality for a class of nonlinear time delay systems: a constructive approach. *In 53rd IEEE Conference on Decision and Control* (pp. 1972-1977).
- [33] Jiang, N., Liu, B., Jing, Y., & Dimirovski, G. M. (2008, June). Minimax robust control of structured uncertain time-delay systems. *In 2008 American Control Conference* (pp. 3834-3838).