



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

MAESTRÍA EN CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN Y
CONTROL

CONTROL BASADO EN MODOS DESLIZANTES DE UN VEHÍCULO AÉREO NO
TRIPULADO.

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS EN AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL

PRESENTA:

L.S.C. ANGEL AUGUSTO VILLANUEVA REYES

ASESORES:

DR. JESÚS PATRICIO ORDAZ OLIVER

DR. HUGO ROMERO TREJO

PACHUCA HGO, MÉXICO 2018



Mineral de la Reforma, Hgo., a 24 de enero de 2018
 Oficio No. MCAC04_2018

Lsc. Ángel Augusto Villanueva Reyes
 PRESENTE

Por medio de la presente y en mi calidad de coordinador de la Maestría en Ciencias en Automatización y Control, del Área Académica de Computación y Electrónica (AACyE) de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH), me es grato informarle que el Jurado asignado para la revisión de su trabajo de tesis titulado: **“Control basado en modos deslizantes de un vehículo aéreo no tripulado”**, dirigido por el Dr. Jesús Patricio Ordaz Oliver y el Dr. Hugo Romero Trejo, que para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Automatización y Control fue presentado por usted, ha tenido a bien en reunión de sinodales, autorizarlo para impresión. A continuación se integran las firmas de conformidad de los integrantes del Jurado:

Dr. Carlos Cuvas Castillo	(Presidente)	UAEH	
Dr. Raúl Villafuerte Segura	(Secretario)	UAEH	
Dr. J. Patricio Ordaz Oliver	(Vocal)	UAEH	
Dr. Omar Jacobo Santos Sánchez	(Suplente 1)	UAEH	
Dr. Hugo Romero Trejo	(Suplente 2)	UAEH	

Atentamente
 “Amor, Orden y Progreso”

Dr. Jesús Patricio Ordaz Oliver
 Coordinador de la Maestría en Ciencias en Automatización y Control
 Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

c.c.p. Dr. Dr. Oscar Rodolfo Suárez Castillo, Director del Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
 c.c.p. Dr. Hugo Romero Trejo, Jefe del Área Académica de Computación y Electrónica
 c.c.p. Expediente/ apl

Ciudad del Conocimiento
 Carretera Pachuca - Tulancingo km. 4.5
 Colonia Carboneras
 Mineral de la Reforma, Hidalgo, México, C.P. 42184
 Tel. +52 771 7172000 exts. 2250 y 2251
jesus_ordaz@uaeh.edu.mx



Agradecimientos

Aunque la mayoría de las veces parece que estuviéramos en una batalla, hay momentos para lograr nuestros objetivos. Gracias por no solo ayudarme a concluir con el desarrollo de esta tesis, si no por todos los momentos que pasamos en el proceso. Por lo tanto quiero expresarles mi agradecimiento por medio de las siguientes palabras.

A mis padres Ines Reyes Galvan y Angel Pedro Villanueva Dominguez, por haberme forjado como la persona que soy actualmente, por siempre apoyarme incondicionalmente y enseñarme el valor de luchar día a día por conseguir nuestros sueños. Este logro también es de ustedes, los quiero.

A pesar que tengamos algunas discusiones y que algunas veces seamos polos opuestos en ciertos puntos de vista, me has ayudado a la terminación de este proyecto. Te quiero mucho, mi hermana Alma Mariana Villanueva Reyes.

Agradezco también a mis asesores de tesis, Dr. Jesús Patricio Ordaz Oliver y Dr. Hugo Romero Trejo, por haberme brindado la oportunidad de recurrir a su capacidad y conocimiento, así como también haberme tenido toda la paciencia del mundo para guiarme durante el desarrollo de esta tesis.

A mis compañeros Juan Francisco Hernández Pérez (Juanito), Leopoldo Vite Hernández (Polo), Ismael Barrera González (Flaco), Andrés Ramírez García (Andresito) y Nicolás Cervantes Escorcía (Wero), por brindarme su apoyo y amistad durante y después de la culminación de este posgrado.

Gracias al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico para la realización de este posgrado y a la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH) por haberme aceptado ser parte de ella y donde he obtenido mis conocimientos. Orgullosamente Garza.

Resumen

En este trabajo de tesis se aborda el problema de estabilización de un vehículo aéreo no tripulado por sus siglas en inglés (UAV), por medio de una ley de control de modos deslizantes la cual considera el modelo completo del estado sin dividir la dinámica en sub-sistemas, lo cual es nuestra principal aportación en esta tesis. Los cuadricóptero, son vehículos aéreos que tiene una mecánica simple y han sido ampliamente estudiados al rededor del mundo durante las últimas décadas. Este sistema posee más grados de libertad que actuadores, por lo tanto se considera un sistema sub-actuado. En el caso del cuadricóptero posee seis grados de libertad y cuatro actuadores que afectan directamente la dinámica del sistema por las perturbaciones externas, la fricción del medio ambiente, por las dinámicas no modeladas y por las dinámicas de los actuadores.

Nuestra metodología considera un modelo dinámico del cuadricóptero que fue previamente reportado en la literatura, el cual ha sido obtenido mediante el formalismo de Euler-Lagrange, entonces se usa la representación completa del estado traslacional y rotacional $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ y $(\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$, respectivamente. Como se mencionó previamente, la ley de control aquí sintetizada es una estrategia de modos deslizantes dinámicos, por lo tanto, es necesario plantear una superficie de deslizamiento, la cual debe de garantizar la estabilidad exponencial del sistema en un tiempo finito.

Abstract

In this thesis the problem of stabilization of an unmanned aerial vehicle (UAV) applying a dynamic sliding mode control strategy which use the whole mathematical model of robot, without divide the dynamical model by subsystems in order to synthesize the control law, which is one of the main contributions of this thesis. The quadrotors are flying machine having a simple mechanic, with more degrees of freedom than actuators, it means that they are underactuated systems. This kind of dynamic systems has been widely studied around the world during last decades around by many research groups and laboratories.

This methodology considers a dynamical model of quadrotor previously reported in the literature, which has been obtained by the Euler-Lagrange formalism, then it uses the whole representation at time the full translational state $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ and the full rotational state $(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$. As be previously mentioned, the control law here synthesized is a dynamic sliding mode strategy, then it is necessary to build a sliding surface which must be assure the exponential stability of the system.

Notación

- $x \in \mathbb{R}$: Es el plano x del espacio (x, y, z) .
- $y \in \mathbb{R}$: Es el plano y del espacio (x, y, z) .
- $z \in \mathbb{R}$: Es el plano z del espacio (x, y, z) .
- $\psi \in \mathbb{R}$: Es la orientación ψ del espacio (z) .
- $\theta \in \mathbb{R}$: Es la orientación θ del espacio (x) .
- $\phi \in \mathbb{R}$: Es la orientación ϕ del espacio (y) .
- $\frac{d(\cdot)}{dt}$: Derivada respecto al tiempo.
- $\frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$: Derivada parcial respecto a x de (\cdot) .
- $\mathcal{Q}_{gen_i}^{not\ pot}$: Energías no potenciales.
- $\mathcal{K}(q, \dot{q})$: Energía cinética.
- m_i : Es la i -ésima masa, respecto a la i -ésima partícula.
- v_i : Es el i -ésimo módulo de velocidad respecto a la i -ésima partícula.
- q : Es el vector de posiciones en coordenadas generalizadas.
- \dot{q} : Es el vector de velocidad respecto al vector de posiciones.
- $\mathcal{D}(\theta)$: Matriz de inercias $\langle J_q^T P_i(x, y, z), J_q P_i(x, y, z) \rangle$.
- $J_q(\theta)$: Matriz Jacobiana.
- $\langle x, y \rangle$: Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ dos vectores, define el producto interno entre ellos
- \mathcal{P}_g : Energía potencial respecto a la gravedad.
- g : Fuerza de gravedad.

- h_i : Describe la i -ésima altura del centro de la i -ésima masa.
- $\mathcal{L}(q, \dot{q})$: Lagrangiano.
- $\xi = (x \ y \ z) \in \mathbb{R}^3$: Vector de posiciones del espacio (x, y, z) .
- $\eta = (\psi \ \theta \ \phi) \in \mathbb{R}^3$: Vector de posiciones angulares ó ángulos de Euler.
- $X \in \mathbb{R}^{12}$: Es el vector $X = (x_1, x_2, \dots, x_{12})$.
- $X_1 \in \mathbb{R}^6$: Vector que contiene las posiciones en el espacio y los ángulos.
- $X_2 \in \mathbb{R}^6$: Vector que contiene las velocidades en el espacio y los ángulos.
- $S, \sigma \in \mathbb{R}^n$: Son las superficies de deslizamiento.
- $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Es una matriz definida positiva.
- $f(x, u) \in \mathbb{R}^n$: Es una función lineal o no lineal que depende de x y u .
- $\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$, $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ matriz A del sistema.
- $\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 4}$, $0, B \in \mathbb{R}^{6 \times 4}$, donde B es la matriz del sistema.
- $k = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 12}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$ matriz de ganancias obtenido resolviendo la LMI.

Acrónimos

- UAV: Vehículo Aéreo no Tripulado por sus siglas en ingles (Unmanned Aerial Vehicle).
- US: Estados unidos por sus siglas en inglés (United States).
- INTA: Instituto Nacional de Técnicas Aeroespacial.
- IPN: Instituto Politécnico Nacional.
- SM: Modos Deslizantes o por sus siglas en ingles (Sliding Mode).
- SMC: Control por Modos Deslizantes o por sus siglas en ingles (Sliding Mode Control).
- LMI: Linear Matrix Inequalities.

Glosario

Definición 1 (Biplano) : Aeroplano con dos alas paralelas superpuestas a cada costado.

Definición 2 (Roll) : El movimiento de roll permite al cuadricóptero desplazarse a la izquierda o derecha. Este desplazamiento es posible al girar el ángulo ψ .

Definición 3 (Pitch) : El movimiento de pitch permite al cuadricóptero realizar movimientos hacia adelante y atrás. Este desplazamiento es posible al girar el ángulo θ .

Definición 4 (Yaw) : El movimiento de yaw permite al cuadricóptero girar su eje vertical. Este desplazamiento es posible al girar el ángulo ϕ .

Definición 5 (Vuelo estacionario (Hover)) : Es el término aplicado cuando un helicóptero mantiene una posición constante sobre un punto seleccionado.

Definición 6 (Actuador) : Es un dispositivo inherentemente mecánico cuya función es proporcionar fuerza para mover otro dispositivo.

Definición 7 (Subactuado) : Es un dispositivo que posee más grados que libertad de actuadores.

Definición 8 (La matriz Q es definida positiva) : Si $0 < Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si para todo $z \in \mathbb{R}^n$, $0 < z^T Q z$ excepto para $z = \bar{0}_n$.

Considere el sistema

$$\dot{x} = f(x) \tag{0.0.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $f(x)$ una función no lineal. Entonces

Definición 9 (Estabilidad en el sentido de Lyapunov [1]) : Se dice que el sistema 0.0.1 es estable en el sentido de Lyapunov si,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \therefore \|x(t_0)\| < \delta \rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t > 0$$

Definición 10 (Estabilidad asintótica [1]) : Se dice que el sistema 0.0.1 es asintóticamente estable si, es estable y además,

$$\exists \delta > 0 \therefore \|x(t_0)\| < \delta \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Definición 11 (Estabilidad exponencial [1]) : Se dice que el sistema 0.0.1 es exponencialmente estable si,

$$\exists \alpha > 0, \beta > 0 \therefore \|x(t)\| \leq \alpha \|x(t_0)\| e^{\beta t}, \forall t > 0$$

Definición 12 (Estabilidad última uniformemente acotada [2]) : Se dice que el sistema 0.0.1 es estable última uniformemente acotada si,

$$|x(t_0)| \leq a, \implies |x(t)| \leq b, \forall t \geq t_0 + T$$

donde $b > 0$, $c > 0 \in \mathbb{R}$, $a \in (0, c)$, y $T = T(a, b)$ sea independiente de t_0 .

Índice general

1. Introducción	17
1.1. Antecedentes	20
1.2. Justificación	21
1.3. Objetivos	22
1.4. Planteamiento del problema	23
1.5. Hipótesis	23
1.6. Métodos	24
2. Modelo dinámico y control	25
2.1. Euler-Lagrange	25
2.2. Control por Modos Deslizantes	31
2.2.1. Superficie Deslizante	32
2.2.2. Efecto chattering	33
2.2.3. Diseño de la Superficie de Deslizamiento para Modos Deslizantes Asintóticos	34
2.2.4. Diseño de la Superficie de Deslizamiento para Modos Deslizantes Dinámicos	37
2.3. Conclusión	43
3. Resultados en simulación numérica	44
3.1. Control PD clásico para un UAV	44
3.2. Resultados en simulación del control SMC Asintóticos	49
3.3. Resultados en simulación del control SMC dinámico	52

3.4. Diseño de trayectoria	56
3.5. Análisis comparativo	60
3.6. Conclusión	62
4. Conclusiones y trabajo futuro	63
4.1. Conclusiones	63
4.2. Trabajos futuros	63

Índice de figuras

1.1. Kettering Bug [3].	18
1.2. Posición en el espacio y ángulos de euler.	19
2.1. Esquema de helicóptero con cuatro rotores.	28
2.2. Pares de fuerza generados en torno a cada eje.	32
2.3. Superficie de Deslizamiento.	33
2.4. Efecto chattering	33
3.1. Comportamiento de los estados respecto al tiempo.	47
3.2. Control PD aplicado al UAV.	48
3.3. Comportamiento de las posiciones y ángulos de Euler a lo largo del tiempo.	49
3.4. Control ASMC aplicado al UAV.	50
3.5. Superficies de Deslizamiento ASMC.	51
3.6. Comportamiento de los estados respecto al tiempo.	53
3.7. Control DSMC aplicado al UAV.	54
3.8. Superficies de Deslizamiento DSMC.	55
3.9. Trayectoria.	57
3.10. Seguimiento de trayectoria.	60

Índice de tablas

3.1. Ganancias del control PD	46
3.2. Tabla comparativa para posiciones en el espacio (x, y, z)	61
3.3. Tabla comparativa para posiciones en el espacio (θ, ϕ, ψ)	61

Capítulo 1

Introducción

En los últimos años los vehículos aéreos no tripulados UAV han tenido un gran crecimiento gracias a los avances tecnológicos, especialmente para que este tipo de sistemas tengan la capacidad de autonomía a un costo razonable [4]. Entre sus principales aplicaciones está el evitar la presencia de personas en situaciones de alto riesgo. Otra aplicación es el uso en acciones militares donde las misiones pueden poner en peligro la integridad de los pilotos [5]. Las primeras aplicaciones de los UAV fueron bélicas, esto por el alto número de bajas causadas por misiones de búsqueda, además por la capacidad de rastreo [6]. Desde mediados del siglo XX hasta hoy un número considerable de investigadores han trabajado en el diseño, operación y control de los UAV [7]. Un sub-conjunto de los UAV son los helicópteros de cuatro rotores mejor conocidos como cuadricóptero o simplemente dron.

Los primeros usos de los UAV's que se tienen registro, son a finales de la primera guerra mundial, éste fue elaborado por los US llamado *Aerial Torpedo*, fue un vehículo bombardero biplano sin piloto fabricado principalmente de madera con un peso de 270 kilogramos y usando un motor Ford de 40 caballos de fuerza [3]. Esta aeronave contaba con un giroscopio, un giro-estabilizador, un barómetro, un motor y un generador eléctrico. En años posteriores se presentó un UAV que fue una versión mejorada del Aerial Torpedo llamada *Kettering Bug* [3], ver Figura 1.1.

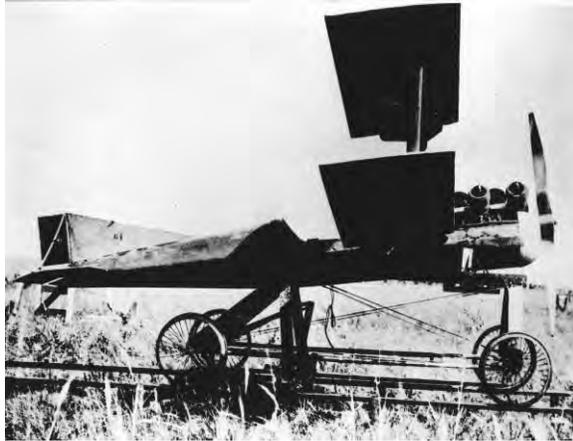


Figura 1.1: Kettering Bug [3].

A principios de 1900 los hermanos Breguet fabricaron el primer cuadricóptero llamado *The Breguet Gyroplane N.1* [8], este prototipo sólo tenía la capacidad de controlar su ascenso y descenso, además de grandes problemas de estabilidad. En 1922 Jerome de Bothzat construyó, unos de los cuadricópteros más grandes el cual era capaz de ser controlado a bajas alturas y con movimientos verticalmente pero fue abandonado por el bajo rendimiento [9].

El cuadricóptero es un vehículo aéreo no tripulado, y desde el punto de vista de sistemas de control, es un dispositivo sub-actuado. Las variables que representan la dinámica de este tipo de dispositivos son:

- Posiciones en el espacio (x, y, z)
- Ángulos de Euler Pitch (ϕ) , Roll (θ) y Yaw (ψ) , ver Figura 1.2.

De forma general un cuadricóptero puede describirse como un helicóptero de cuatro hélices en forma de una cruz. El movimiento es producido mediante la variación de las velocidades de cada motor. El cuadricóptero puede generar diversos movimientos en los ángulos de pitch, roll y yaw, lo que ocasiona que se desplace en diferentes direcciones [10]. Una de las grandes ventajas de estos cuadricópteros,

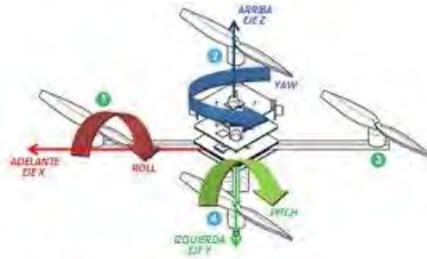


Figura 1.2: Posición en el espacio y ángulos de euler.

en comparación a otros vehículos aéreos, es que tienen la capacidad de despegar y aterrizar verticalmente lo que reduce el espacio de despeje y aterrizaje además, tiene la capacidad de realizar vuelo estacionario *hover* y su diseño mecánico relativamente simple en comparación de otros diseños más complejos [4]. Adicionalmente, un cuadricóptero tiene mejor capacidad de maniobra en comparación de un helicóptero clásico, esto se debe a que tiene una mayor cantidad de motores a controlar sobre la nave. Alrededor del mundo se han implementado leyes de control que permiten estabilizar los UAV's [11]. Algunos de los controles aplicados a los vehículos aéreos no tripulados son: Control adaptable, Control óptimo, Redes neuronales Artificiales, Control basado en modos deslizantes, Control Backstepping, vea por ejemplo, [12], [13], [14] y [15].

Gracias a su gran desempeño los cuadricópteros han sido utilizados en aplicaciones de carácter civil, militar y científico, por mencionar algunas, en España el Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial (INTA) utiliza UAVs para la prevención y monitoreo de incendios forestales. En Argentina utilizan UAV's para el diagnóstico del estado de nutrición nitrogenada en maíz [16]. Igualmente en Argentina especialmente en Buenos Aires, utilizan UAV's para la generación de mapas de prescripción de malezas [17]. En México también por mencionar algunas aplicaciones, con la participación del Instituto Politécnico Nacional (IPN), se usan UAV's para el monitoreo de oleoductos y exploración geológica [18].

1.1. Antecedentes

Recientemente el problema de estabilización de UAV's (conocido como *hover*) ha sido uno de los problemas que se ha atacado mediante estrategias de control avanzado. El modelo dinámico de un cuadricóptero se obtiene a través de las leyes de Euler-Lagrange, y el control tradicional es mediante la descomposición del sistema en tres sub-sistemas. En la literatura tradicional el primer sub-sistema se encarga de estabilizar las dinámicas de posición en x e y y sus ángulos de inclinación (*roll* y *pitch*), posteriormente el segundo control estabiliza la inclinación en (*yaw*), por la variación de las velocidades de los rotores y así poder controlar el sub-sistema (z).

Los UAV's como sistemas de control, pueden ser controlados por una gran variedad de estrategias, desde estrategias lineales hasta controles no lineales avanzados, sin embargo la gran mayoría de ellos usan la descomposición en sub-sistemas para su control. En [19], se diseña un control con enfoque backstepping el cual es aplicado en el Lagrangiano de la dinámica y no en la forma espacio estado. Además, se introducen dos redes neuronales para estimar ciertas componentes dinámicas del sistema, una tiene la función estimar las fuerzas aerodinámicas y la otra para estimar los momentos aerodinámicos, el resultado es un control con una estructura atractiva. El control presentado en [20], es un control basado en la unión de dos metodologías, una basada en control backstepping y la otra basada en modos deslizantes, logrando un mejor desempeño que usando las metodologías separadas. Flórez, Villa, Rojas y Toledo [21], propone un control para la corrección y estabilización de la altura, teniendo en cuenta perturbaciones propias del sistema y efectos no lineales, en dicho trabajo se introduce un control por modos deslizantes lo que brinda la reducción del error y la robustez necesaria para asegurar el comportamiento estable y deseado frente a perturbaciones. Por otra parte, Aguilera R. [22], propone el control de cabeceo mediante una estrategia de control basada en modos deslizantes, el propósito es de disminuir las perturbaciones externas, al aplicar este control el UAV es capaz de realizar tareas complejas

ante la presencia de perturbaciones de viento. Mohamed [23], propone un control por modos deslizantes, donde la estabilidad es propuesta mediante el análisis de Lyapunov. Bouadi [24], menciona un control adaptable para la estabilización de la orientación y la altitud, donde se realizan bajo el supuesto que el sistema es ideal (sin perturbaciones). Posteriormente al sistema se le induce ruido gaussiano. La prueba de estabilidad se comprueba con el análisis de Lyapunov y mediante simulaciones donde se llega a la conclusión que la técnica empleada es correcta. Sanchez [25], plantea un diseño de un control robusto integral utilizando modos deslizantes para el seguimiento de trayectorias y mediante simulaciones se verifica que el sistema en lazo cerrado rechace las perturbaciones aplicadas.

Merheb [26], plantea un control mediante modos deslizantes para la orientación del UAV y mediante un PD donde se estabiliza la altura. Para evitar el efecto de chattering, producido por los modos deslizantes, es utilizado una función de saturación en lugar de la función signo. J Xion and Zheng [27], proponen un control de posición y de orientación donde el modelo dinámico es dividido en dos sub-sistemas. Para controlar el primero es implementado un controlador deslizante terminal donde se garantiza que los estados converjan a los valores deseados en tiempo finito, para el otro sub-sistema es empleado un controlador PD. En ambos diseños de control se realiza pruebas de estabilidad mediante la teoría de Lyapunov.

1.2. Justificación

Existen leyes de control que permiten la estabilización de un cuadricóptero, sin embargo, la mayoría de ellas dividen la dinámica del UAV en cuatro sub-sistemas para su control. Sin embargo, la dinámica de este tipo de sistemas es inherentemente acoplada, i.e. para el control de una variable es necesario el control de las demás variables. Por ello, al dividir el la dinámica en sub-sistemas es necesario realizar suposiciones adicionales para su control. Entonces, si el sistema puede ser controlado mediante la descomposición en sub-sistemas, nacen las preguntas ¿Se

puede controlar un UAV sin utilizar la representación en sub-sistemas? de ser así ¿Qué tan compleja es su aplicación? y ¿Qué ventajas tiene un diseño de control de este estilo? Para dar respuesta a lo anterior, y poder implementar estrategias de control avanzado, este trabajo de tesis propone un análisis distinto al presentado en la literatura clásica para el control de UAV's. Además, la estrategia de control busca el reducir los efectos de dinámicas no modeladas y perturbaciones externas.

1.3. Objetivos

Objetivo General

Diseñar e implementar una ley de control no lineal por modos deslizantes que garantice la estabilización de un UAV, sin la necesidad de dividir la dinámica en sub-sistemas para su control.

Objetivos particulares

- Diseñar dos controladores basados en modos deslizante y el uso completo del modelo dinámico para la estabilización de un UAV.
- Obtener condiciones para garantizar estabilidad de un UAV basados en la convergencia en tiempo finito mediante el diseño de la superficie de deslizamiento.
- Realizar el estudio comparativo de las estrategias de control diseñadas, mediante el análisis de desempeño del sistema para definir que controlador es viable en su aplicación.
- Diseñar una trayectoria basada en ecuaciones paramétricas del perfil de posición y velocidad para el control de un UAV.
- Validar resultados en simulación numérica mediante el uso del Software MATLAB.

1.4. Planteamiento del problema

El modelo dinámico general de los UAV's puede ser representado como un sistema no lineal afín al control, dentro del análisis de este sistema se puede garantizar que el mismo es controlable de forma local. Por tal razón que el control basado en la división de subsistemas es funcional. Sin embargo el diseño de control mediante la representación completa de la dinámica puede ocasionar dificultades en su aplicación, esto se debe a que en diseños basados en realimentación de estado la ley de control depende de funciones que en la programación de la misma no son sencillas de implementar. Además cuando existen perturbaciones externas el desacoplamiento de las mismas es muy difícil de tratar (este fenómeno se debe al acoplamiento dinámico). Por esta razón el problema que da solución este proyecto de tesis es el diseñar una estrategia de control robusta basada en el modelo completo que sea fácil de implementar en un dispositivo físico.

1.5. Hipótesis

Si el sistema es controlable de forma local, entonces se puede diseñar una estrategia de control que mediante energía finita se lleve de una posición inicial a una posición final en tiempo finito. Para ello el concepto de modos deslizantes compagina con lo antes descrito, donde el objetivo es garantizar convergencia en tiempo finito sobre una superficie de deslizamiento misma que provee de robustez en el diseño de control. Ejemplo de ello, es el representar la dinámica de deslizamiento en términos posiciones y velocidades mecánicas del UAV, de tal manera que la superficie de deslizamiento represente una ecuación diferencial lineal de primer orden estable. Entonces, al llevar dicha superficie de deslizamiento a cero en un tiempo finito, las trayectorias del sistema convergerán en forma asintótica a la solución deseada.

1.6. Métodos

La metodología para la implementación del control se basa en los siguientes puntos los cuales son:

1.- Obtener un modelo dinámico de un UAV: Se utiliza un modelo no lineal de un UAV utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange para su desarrollo.

2.- Diseño de controladores robustos que estabilicen un UAV: En este trabajo de tesis se diseñan dos tipos de controles por modos deslizantes basado en la representación completa del estado para la estabilización del UAV.

3.- Obtención de las ganancias de control: Se obtienen ganancias que estabilicen un UAV.

4.- Diseño de trayectorias: Se diseña una trayectoria basada en ecuaciones paramétricas para un UAV.

5.- Implementación de resultados: Por último, se comparará el control por modos deslizantes asintótico y dinámico contra un control PD clásico.

Capítulo 2

Modelo dinámico y control

En este capítulo se detalla el modelado matemático del sistema, se obtienen las ecuaciones cinemáticas para dar uso al formulismo de Euler-Lagrange, esto se realiza al dividir el sistema en dos sub-sistemas: traslación y rotación. Algunas técnicas de control requieren información parcial o total del modelo dinámico que describe el comportamiento del sistema a controlar. Las ecuaciones dinámicas de un sistema mecánico pueden ser obtenidas a partir de las ecuaciones de movimiento de Newton-Euler, Euler-Lagrange, entre otras. Para el caso de estudio es utilizado el método de Euler-Lagrange.

2.1. Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se utilizan para describir la dinámica de cualquier sistema mecánico, esto mediante el uso de coordenadas generalizadas de posición y velocidad. El lagrangiano se utiliza para los sistemas conservativos y es un caso particular de las ecuaciones de Euler-Lagrange donde involucran energía cinética, energía potencial y el lagrangiano [28]. La forma más general de estas ecuaciones para un sistema de partículas es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} \right) = Q_{gen_i}^{not\ pot}$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots$, es el número de partícula.

Definición 13 (Coordenadas Generalizadas) *Se denominan coordenadas generalizadas a un conjunto cualquiera de parámetros numéricos que sirven para determinar de manera unívoca la configuración de un mecanismo o sistema mecánico con un número finito de grados de libertad.*

Definición 14 (Energía Cinética [29]) *Es la energía que posee un cuerpo en movimiento.*

Caso de una partícula

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}mv^2$$

Caso de varias partículas

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$$

donde m_i y v_i^2 representan la masa y la velocidad asociadas a la i -ésima partícula. Donde v_i se puede representar de la siguiente manera

$$\mathcal{V}_i(x, y, z) = \|\mathcal{V}_i(p_x, p_y, p_z)\| = [v_i(p_x)^2 + v_i(p_y)^2 + v_i(p_z)^2]^{1/2}$$

Por definición

$$v_i^2 = v_i(x)^2 + v_i(y)^2 + v_i(z)^2 = \langle \mathcal{V}_i^\top(x, y, z), \mathcal{V}_i(x, y, z) \rangle \quad (2.1.1)$$

entonces

$$\mathcal{V}(x_i, y_i, z_i) = \mathbf{J}_q P_i(p_x, p_y, p_z) \dot{q} \quad (2.1.2)$$

donde \dot{q} es el vector de velocidades articulares.

Sustituyendo (2.1.2) en (2.1.1) la energía cinética queda en términos del Jacobiano.

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^\top \langle \mathbf{J}_q^\top P_i(x, y, z), \mathbf{J}_q P_i(x, y, z) \rangle \dot{q}$$

por lo tanto, la energía cinética de un sistema de partículas se define como

$$\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}^\top \mathbf{D}(q) \dot{q} \rangle$$

donde $\mathbf{D}(q) = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{J}_q P_i(p_x, p_y, p_z), \mathbf{J}_q P_i(p_x, p_y, p_z) \rangle$ y p_x , p_y y p_z son las posiciones.

Definición 15 (Energía Potencial [29]) *Es la capacidad que tiene un cuerpo para realizar un trabajo. Caso de energía potencial debida a efectos gravitacionales de una partícula.*

$$\mathcal{P}_g = mgh$$

donde m es la masa de la partícula, g es la fuerza de gravedad y h es la altura del centro de masa.

Caso de energía potencial debida a efectos gravitacionales de varias partículas.

$$\mathcal{P}_g = g \sum_{i \in \mathbb{S}} m_i h_i$$

donde m_i es la i -ésima masa respecto a la i -ésima partícula, g es la fuerza de gravedad y h_i es la i -ésima altura del centro de masa respecto a la i -ésima partícula.

Definición 16 (Lagrangiano [29].) *Es la relación que existe del intercambio de energía cinética y energía potencial descrita por:*

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{P}(q).$$

$$\mathcal{P}_g = mgh$$

A continuación se presenta el modelo dinámico de un cuadricóptero mediante el método de Euler-Lagrange [30].

Las ecuaciones generalizadas para el UAV pueden escribirse en términos de la variable $p \in \mathbb{R}^6$ definido por

$$p = (p_x, p_y, p_z, \psi, \theta, \phi)^\top$$

donde las variables (x, y, z) representan la posición del centro de masa del UAV y las variables (ψ, θ, ϕ) los ángulos de Euler, que representan la orientación del cuadricóptero. De esta manera se tienen dos vectores, uno referente a la posición (*traslación*) y otro a la orientación (*rotación*) que son descritos por $\xi = (x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3$ y $\eta = (\psi, \theta, \phi)^\top \in \mathbb{R}^3$, respectivamente (ver Figura 2.1). La energía cinética de

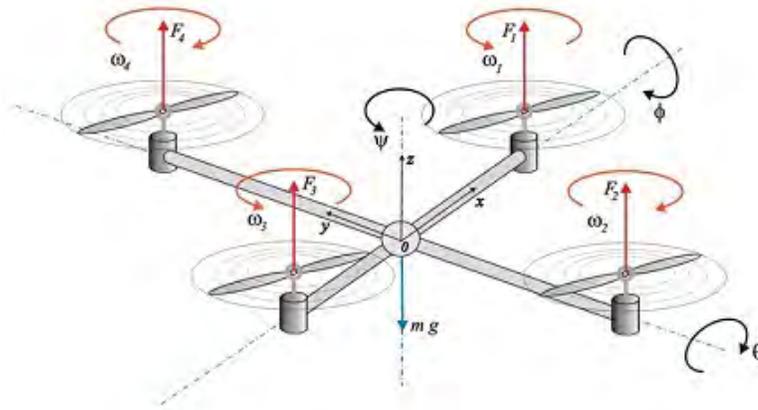


Figura 2.1: Esquema de helicóptero con cuatro rotores.

traslacional y la energía cinética rotacional están dadas por:

$$\mathcal{T}_{tras} = \frac{m}{2} \dot{\xi}^\top \dot{\xi}, \quad \mathcal{T}_{rot} = \frac{1}{2} \Omega^\top \mathbb{I} \Omega \quad (2.1.3)$$

donde $\Omega \in \mathbb{R}^3$ es el vector de velocidades angulares y la variable $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ como la matriz de inercia.

Entonces se define el Lagrangiano como:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{T}_{trans} + \mathcal{T}_{rot} - \mathcal{P}_g$$

El vector de velocidades angulares Ω respecto a los ejes de coordenadas del cuerpo se relaciona con la velocidades generalizadas $\dot{\eta} \in \mathbb{R}^3$ utilizando una relación estándar cinemática.

$$\Omega = W_n \dot{\eta} \quad (2.1.4)$$

donde

$$W_\eta = \begin{bmatrix} -\text{sen } \theta & 0 & 1 \\ \text{sen } \phi \cos \theta & \cos \phi & 0 \\ \cos \phi \cos \theta & -\text{sen } \phi & 0 \end{bmatrix}$$

entonces el vector Ω es definido por:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \text{sen } \psi \\ \dot{\psi} \text{ sen } \phi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \text{sen } \phi \end{bmatrix}$$

tomando la ecuación (2.1.4) y sustituirla en (2.1.3) se tiene:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \dot{\eta}^\top W_\eta^\top \mathbb{I} W_\eta \dot{\eta} \quad (2.1.5)$$

se define que:

$$\mathbb{J}(\eta) \triangleq W_\eta^\top \mathbb{I} W_\eta.$$

Implicando que la ecuación (2.1.5) puede ser representada como:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \dot{\eta}^\top \mathbb{J} \dot{\eta}$$

Donde $\mathbb{J} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de inercia para la energía cinética de rotación, expresada bajo las coordenadas generalizadas η . En consecuencia el Lagrangiano está dado por.

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{\xi}^\top \dot{\xi} + \frac{1}{2} \dot{\eta}^\top \mathbb{J} \dot{\eta} - mgz.$$

Al aplicar las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, donde

$$\mathbb{Q}_{gen}^{no \text{ pot}} = \begin{bmatrix} F_\xi \\ \tau \end{bmatrix}$$

el vector $F_\xi = R\hat{F} \in \mathbb{R}^3$ representa la fuerza traslacional aplicada sobre el cuadricóptero, R es la matriz de rotación del cuadricóptero, el vector de momentos generalizados sobre las variables de η están representadas por τ_ψ , τ_θ y τ_ϕ los cuales están incluidos en $\tau \in \mathbb{R}^3$. Además R y \hat{F} son descritas por:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \text{sen } \phi \text{ sen } \theta \cos \psi - \text{sen } \psi \cos \phi & \text{sen } \phi \text{ sen } \psi + \text{sen } \theta \cos \phi \cos \psi \\ \text{sen } \psi \cos \theta & \text{sen } \phi \text{ sen } \theta \text{ sen } \psi + \cos \phi \cos \psi & \text{sen } \theta \text{ sen } \psi \cos \phi - \text{sen } \phi \cos \psi \\ -\text{sen } \theta & \text{sen } \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \hat{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix}$$

donde u es la entrada de control principal y se representa como:

$$u = \sum_{i=1}^4 f_i$$

con

$$f_i = \kappa_i \omega_i^2$$

donde i representa el número del actuadores (motor), que va de $i=1, \dots, 4$, el parámetro κ_i es un parámetro constante y depende de la densidad del aire ω_i , La velocidad angular de cada uno de los motores y el vector de pares generalizados está formado por:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_\psi \\ \tau_\theta \\ \tau_\phi \end{bmatrix}$$

Cada uno de los vectores de pares puede ser representado en una forma aproximada por:

$$\tau_\psi = \sum_{i=1}^4 \tau_{M_i}, \quad \tau_\theta = (f_2 - f_4)\ell, \quad \tau_\phi = (f_3 - f_1)\ell$$

donde ℓ es la distancia entre los ejes de los motores al centro de gravedad del cuadricóptero y τ_{M_i} es el momento producido por el motor M_i , $i=1, \dots, 4$ alrededor del centro de gravedad del cuadricóptero. Los torques τ_ϕ y τ_θ dependen de las fuerzas lineales de empuje o propulsión, mientras que el torque τ_ψ depende de cada momento producido por los motores.

Puesto que el Lagrangiano no contiene términos en la energía cinética que relacionen los términos $\dot{\xi}$ con $\dot{\eta}$, las dinámicas pueden ser divididas para las coordenadas de ξ como para las coordenadas de η . Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para el movimiento de traslación son:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{tras}}{\partial \dot{\xi}} \right] - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{tras}}{\partial \xi} \right) = F_\xi$$

o de forma general como:

$$m \xi + \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} = F_\xi$$

De manera similar, para las ecuaciones de dinámicas para el movimiento rotacional son:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{rot}}{\partial \dot{\eta}} \right] - \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{rot}}{\partial \eta} \right) = \tau$$

donde se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} &= \frac{1}{2} (\mathbb{J}(\eta) + \mathbb{J}(\eta)^\top) \dot{\eta} = \mathbb{J}(\eta) \dot{\eta} \\ \mathbb{J}(\eta) \dot{\eta} + \left(\dot{\mathbb{J}}(\eta) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^\top \mathbb{J}(\eta)) \right) &= \tau\end{aligned}\tag{2.1.6}$$

Los efectos de Coriolis pueden ser representados como:

$$\mathbf{C}(\eta, \dot{\eta}) \dot{\eta} = \dot{\mathbb{J}}(\eta) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^\top \mathbb{J}(\eta))$$

Al substituir los efectos de Coriolis $\mathbf{C}(\eta, \dot{\eta})$ en (2.1.6) y $\mathbf{M}(\eta) = \mathbb{J}(\eta)$, se tiene:

$$\mathbf{M}(\eta) \dot{\eta} + \mathbf{C}(\eta, \dot{\eta}) = \tau$$

Por lo anterior el sistema puede ser re-escrito como:

$$m\ddot{\xi} = F_\xi + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}, \quad \dot{\eta} = \bar{\tau}, \quad \xi = \begin{bmatrix} p\ddot{x} \\ p\ddot{y} \\ p\ddot{z} \end{bmatrix}$$

Al hacer las operaciones pertinentes se obtiene que un vehículo aéreo no tripulado puede ser representado con el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= -u \sin \theta, & \ddot{\psi} &= \tilde{\tau}_\psi \\ m\ddot{y} &= u \cos \theta \sin \phi, & \ddot{\theta} &= \tilde{\tau}_\theta \\ m\ddot{z} &= u \cos \theta \cos \phi - mg, & \ddot{\phi} &= \tilde{\tau}_\phi\end{aligned}$$

donde p_x , p_y son los movimientos en el plano horizontal y p_z es el movimiento vertical, θ es el ángulo roll respecto al eje x , ϕ es el ángulo pitch respecto al eje p_y , ψ es el ángulo yaw respecto al eje p_x . Las entradas de control son: u , $\tilde{\tau}_\phi$, $\tilde{\tau}_\theta$, y $\tilde{\tau}_\psi$, donde u es la fuerza generada por los motores para elevar el UAV. $\tilde{\tau}_\phi$, $\tilde{\tau}_\theta$, y $\tilde{\tau}_\psi$ son pares de fuerzas generadas en torno a cada eje como se muestra en la Figura 2.2.

2.2. Control por Modos Deslizantes

En teoría de control, los modos deslizantes son una forma de control de estructura variable. Es un método de control no lineal que altera la dinámica de un

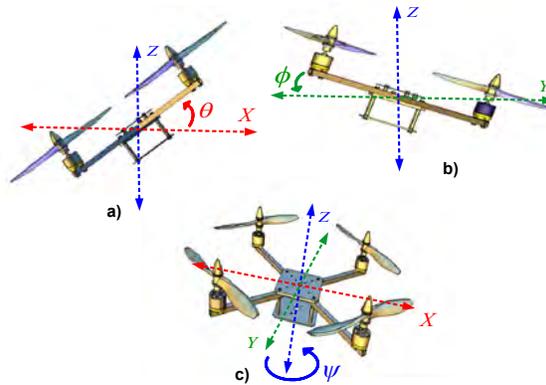


Figura 2.2: Pares de fuerza generados en torno a cada eje.

sistema no lineal aplicando un control que cambia de dirección también conocido como control por relevador. Las estructuras de control múltiple se diseñan para que siempre las trayectorias se dirijan hacia la condición de cambio (Switching). Así, la última trayectoria no existirá completamente en una sola estructura de control. Lo que ocurrirá es que la trayectoria última se deslizará por la frontera entre las diferentes estructuras de control.

La mayor ventaja del control por modo deslizante es su robustez, ya que el control puede ser tan simple como el salto entre dos variables de estado. No necesita ser preciso y no se verá afectado a variaciones de parámetros sobre la entrada de control. Además, como la ley de control no es una función continua, la superficie de deslizamiento se puede alcanzar en tiempo finito [31].

2.2.1. Superficie Deslizante

Una superficie se forma por el error y la tasa de cambio del error. El objetivo ideal de todo sistema es que este error sea nulo, es así que se diseña una ley de control que permita que las variables de estado converjan y permanezcan en la superficie deslizamiento donde el error sea prácticamente cero (ver Figura 2.3).

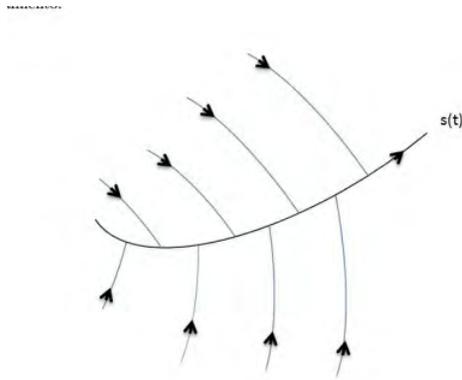


Figura 2.3: Superficie de Deslizamiento.

2.2.2. Efecto chattering

El gran problema que presenta el control por modos deslizantes, es que la señal de control al alcanzar la superficie de deslizamiento oscila infinitamente (ver Figura 2.4). Este efecto produce que en la práctica este tipo de ley de control sea poco implementada debido al desgaste o deterioro que producen en los actuadores. La causa principal de este problema se debe al uso de la función signo, $Sign(S)$.

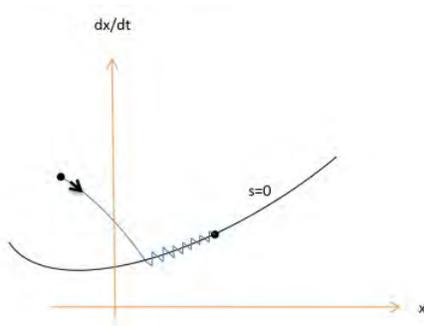


Figura 2.4: Efecto chattering

2.2.3. Diseño de la Superficie de Deslizamiento para Modos Deslizantes Asintóticos

En forma forma estándar de sistemas no lineales afín al control.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.2.1)$$

donde f es una función que toma valores en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y las lleva a \mathbb{R}^n y g es una función que toma valores en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y las lleva a $\mathbb{R}^{n \times m}$, mientras que u son las entradas de control ($u \in \mathbb{R}^m$) y las variables de estado $x \in \mathbb{R}^n$.

Para el caso de estudio, el control de un UAV, el estado del sistema puede ser representado como:

$$x = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}$$

donde objetivo de modos deslizantes (SM) es llevar la variable de deslizamiento a una superficie de deslizamiento, denotadas generalmente por " σ " o " S ", en tiempo finito. El objetivo de control por modos deslizantes (SMC) una vez estando en la superficie de deslizamiento es llevar la variable de deslizamiento a un punto estable dentro de la superficie de deslizamiento.

De esta manera, el sistema (2.2.1) puede ser representado como:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(x) \end{bmatrix} u$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= f_1(x) \\ \dot{X}_2 &= f_2(x) + g(x)u \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

El problema es el diseño de una superficie de deslizamiento tal que,

$$S \rightarrow 0 \text{ en } t < t_r < \infty$$

Para SMC asintótico la solución deseada es:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \exp^{-Qt} x_1(0) \\ x_2(t) &= -Q \exp^{-Qt} x_2(0) \end{aligned}$$

Una propuesta de superficie de deslizamiento tiene la siguiente forma

$$S = E(x_2 + Qx_1)$$

con $S \in \mathbb{R}^4$, $E \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$ y $0 < Q \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, además, como se mencionó anteriormente el objetivo es garantizar que $S \rightarrow 0$ en $t < t_r < \infty$. Por lo tanto se garantiza lo siguiente cuando $t < t_r < \infty$.

$$0 = E(x_2 + Qx_1)$$

Por lo tanto la derivada de la superficie de deslizamiento a lo largo de las trayectorias del sistema (2.2.2) es de la forma:

$$\dot{S} = E(\dot{x}_2 + Qx_2) \quad (2.2.3)$$

También se propone una función de almacenamiento tomando en cuenta el concepto de una función candidata a ser Lyapunov, del tipo semidefinida positiva.

$$V(S) = \frac{1}{2} S^T S$$

Obteniendo la derivada temporal a lo largo de las trayectorias de $V(S)$, se obtiene.

$$\dot{V}(S) = S^T \dot{S} \quad (2.2.4)$$

Sustituyendo (2.2.3) en (2.2.4) tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{V}(S) &= S^T E (\dot{x}_2 + Qx_2) \\ &= S^T (E f_2(x) + E g_2(x)u + EQx_2) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Para poder proponer una u que estabilice el sistema es necesario que la matriz $Eg_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ sea invertible en el punto de operación deseado. Tomando en cuenta la consideración \dot{x}_2

$$\dot{x}_2 = \begin{bmatrix} \bar{0}_2 \\ -g \\ \bar{0}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_3 & \bar{0}_{3 \times 3} \\ \bar{0}_3 & \bar{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix}$$

donde $\kappa = \left[\frac{-\sin(x_5)}{m}, \frac{\cos(x_5)\sin(x_4)}{m}, \frac{\cos(x_5)\cos(x_4)}{m} \right]^\top$

Para hallar las dimensiones de la matriz E se apoya en la matriz $g_2(X)$

$$Eg_2(X) = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_3 & \bar{0}_{3 \times 3} \\ \bar{0}_3 & \bar{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11}\kappa_3 & e_{12}\bar{0}_{3 \times 3} \\ e_{21}\bar{0}_3 & e_{22}\bar{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

donde $e_{11} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$, $e_{12} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$, $e_{21} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y $e_{22} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, también tiene que ser $e_{12} = e_{21}\kappa$ y además $Eg_2(X)$ tiene que ser invertible localmente.

Por lo tanto se puede proponer un control equivalente de la forma:

$$u = -(Eg_2(X))^{-1}(EQX_2 + Ef_2(X) + u_1) \quad (2.2.6)$$

Sustituyendo (2.2.6) en (2.2.5) se tiene

$$\dot{V}(S) = -S^\top u_1$$

donde

$$u_1 = -\text{Sign}(S) = - \begin{bmatrix} \text{sign}(s_1) \\ \text{sign}(s_2) \\ \vdots \\ \text{sign}(s_6) \end{bmatrix} \quad (2.2.7)$$

Por lo tanto sustituyendo u_1 en la ecuación anterior

$$\dot{V}(S) = -S^\top \text{Sign}(S) = -|S|$$

como el módulo de la función de deslizamiento, es la raíz cuadrada de una función cuadrática se propone

$$\dot{V}(S) = -\sqrt{S^\top S} = -\sqrt{2}V^{\frac{1}{2}}(S)$$

Resolviendo la ecuación anterior e integrando en los límites $[t_0, t]$

$$V(S) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(t - t_0) + V(S(0))$$

Para conocer el tiempo en el que la condición inicial llega a la superficie de deslizamiento la ecuación anterior se iguala a cero y se tiene

$$0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(t - t_0) + V(S(0)) \rightarrow t = \sqrt{2}V(S(0)) + t_0$$

Por lo tanto se concluye que $S \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow tr$.

Lo que implica una convergencia en tiempo finito (tr), es decir, dado, una condición inicial cualquiera, ésta llegará a la superficie de deslizamiento en tr y después la variable de estado converge exponencialmente asintóticamente estable.

2.2.4. Diseño de la Superficie de Deslizamiento para Modos Deslizantes Dinámicos

Tomando en cuenta un control por realimentación de estados puede ser descrito de la siguiente forma:

$$u = (g_2^T(x)g_2(x))^{-1} g_2^T(x) (-f_2) + v_1$$

Cerrando el lazo de control en el sistema (2.2.2) con el control por realimentación de estados se tiene que \dot{X}_2 puede ser representado como

$$\dot{X}_2 = \left[I_6 - (X) (g_2^T(X)g_2(X))^{-1} g_2^T(X) \right] f_2(X) + g_2(X)v_1$$

Al aproximar $f(X)$ a su forma lineal, usando la expansión en series de Taylor de una forma $f(X) \simeq AX + HOT$ (Higher Order Terms), sumando y restando a la nueva representación del sistema

$$\begin{aligned} \dot{X} &= f(x) + AX - AX + g(x)u \\ &= AX + (f(x) - AX) + g(x)u \end{aligned}$$

además, al definir $f_0(x) = f(x - AX)$. De tal forma que la ecuación del sistema queda de la siguiente manera

$$\dot{X} = AX + g(x)u + f_0(x)$$

o de forma equivalente por:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + f_{0,1}(X) \\ \dot{X}_2 &= A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + f_{0,2}(X) + g_2(X)u\end{aligned}\tag{2.2.8}$$

Proponiendo una superficie de deslizamiento de la forma

$$\sigma = [k_1X_1 + k_2X_2 + u]$$

donde $\sigma \in \mathbb{R}^4$, $k_1X_1 \in \mathbb{R}^4$, $k_2X_2 \in \mathbb{R}^4$, $u \in \mathbb{R}^4$, $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^6$ y $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$. La dinámica de la superficie de deslizamiento, a lo largo de las trayectorias de (2.2.8), es

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= k_1\dot{X}_1 + k_2\dot{X}_2 + \dot{u} \\ &= k_1[A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + f_{0,1}(X)] + k_2[A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + f_{0,2}(X) + g_2(X)u] + \dot{u}\end{aligned}$$

Proponiendo una función de almacenamiento de la forma cuadrática estándar

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^\top\sigma \rightarrow \dot{V}(\sigma) = \sigma^\top\dot{\sigma}$$

su derivándola a lo largo de las trayectorias de (2.2.8) es

$$\begin{aligned}\dot{V}(\sigma) &= \sigma^\top [k_1(A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + f_{0,1}(X)) \\ &\quad + k_2(A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + f_{0,2}(X) + g_2(X)u) + \dot{u}]\end{aligned}\tag{2.2.9}$$

Suponiendo que de la ecuación (2.2.9), las matrices k_1 y k_2 son conocidas y constantes, se propone un control \dot{u} de la forma

$$\dot{u} = -k_1(A_{11}X_1 + A_{12}X_2) - k_2(A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + g_2(X)u) + u_2\tag{2.2.10}$$

donde $u_2 = -\rho \text{Sign}(\sigma)$. Por lo tanto la ecuación (2.2.9) queda de la siguiente forma al sustituir el control de (2.2.10) y u_2

$$\dot{V}(\sigma) = \sigma^\top [k_1f_{0,1}(X) + k_2f_{0,2}(X) - \rho \text{Sign}(\sigma)]$$

Se supone que tanto $f_{0,1}(X)$ como $f_{0,2}(X)$ son acotadas.

$$\|f_{0,1}(X)\| \leq \delta_1 < \infty, \|f_{0,2}(X)\| \leq \delta_2 < \infty$$

Por lo que

$$\dot{V}(\sigma) = -\sigma^\top(\text{Sign}(\sigma))$$

Utilizando las propiedades de los valores absolutos

$$\dot{V}(\sigma) = -|\sigma||\text{Sign}(\sigma)| = -|\sigma| = -\sqrt{\sigma^\top\sigma} = -\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sigma^\top\sigma} = -\sqrt{2}v^{\frac{1}{2}}(\sigma)$$

dando solución a la ecuación diferencial anterior, es decir, usando el método de separación de variables integrando en los límites $[t_0, t]$ se obtiene que

$$V(\sigma) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(t - t_0) + V(S(0))$$

Esto nos concluye que $\sigma \rightarrow 0$ en $t \rightarrow t_r$ pero no implica que el sistema (2.2.8) sea estable. Sin embargo, Se sabe que después de t_r la superficie de deslizamiento tiende a 0

$$\sigma = 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = 0$$

$$\dot{\sigma} = k_1\dot{X}_1 + k_2\dot{X}_2 + \dot{u} \Rightarrow k_1\dot{X}_1 + k_2\dot{X}_2 + \dot{u} = 0$$

Tomando las ecuaciones (2.2.8) y (2.2.10) se puede deducir que:

$$\begin{aligned} k_1\dot{X}_1 &= -k_2\dot{X}_2 - \dot{u} \\ &= -k_2f_{0,2}(X) + k_1(A_{11}X_1 + A_{12}X_2) + \rho\text{Sign}(\sigma) \end{aligned}$$

Despejando \dot{X}_1 usando $k_1^\top (k_1k_1^\top)^{-1}$ la ecuación anterior queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} k_1k_1^\top (k_1k_1^\top)^{-1} \dot{X}_1 &= k_1k_1^\top (k_1k_1^\top)^{-1} (A_{11}X_1 + A_{12}X_2) + k_1^\top (k_1k_1^\top)^{-1} \\ &\quad [\rho\text{Sign}(\sigma) - k_2f_{0,2}(X)] \\ \dot{X}_1 &= (A_{11}X_1 + A_{12}X_2) + k_1^\top (k_1k_1^\top)^{-1} [\rho\text{Sign}(\sigma) - k_2f_{0,2}(X)] \end{aligned}$$

A partir de la ecuación de la superficie de deslizamiento y (2.2.8), se tiene.

$$\sigma = 0 \implies \sigma = k_1X_1 + k_2X_2 + u \implies u = -k_1X_1 - k_2X_2$$

$$\dot{X}_2 = A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + f_{0,2}(X) + g_2(X)(-k_1X_1 - k_2X_2)$$

Proponiendo una región de trabajo cerca del punto de operación $g_2(x)|_{x=x_{op}} \cong B$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B(-k_1x_1 - k_2x_2 + f_{0,2}(x)) \\ &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 - Bkx + f_{0,2}(x)\end{aligned}$$

Por lo que la nueva representación en variables de estado del sistema (2.2.8) tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + k_1^\top (k_1 k_1^\top)^{-1} [\rho \text{Sign}(\sigma) - k_2 f_{0,2}(x)] \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 - Bkx + f_{0,2}(x)\end{aligned}$$

También puede ser representado de la siguiente manera

$$\dot{x} = \bar{A}x - \bar{B}kx + \bar{f}_0(x) \quad (2.2.11)$$

$$\begin{aligned}\bar{f}_0(x) &= \begin{bmatrix} k_1^\top (k_1 k_1^\top)^{-1} [\rho \text{Sign}(\sigma) - k_2 f_{0,2}(x)] \\ f_{0,2}(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} k_1^\top (k_1 k_1^\top)^{-1} \rho & -k_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\gamma} \underbrace{\begin{bmatrix} \text{Sign}(\sigma) \\ f_{0,2}(x) \end{bmatrix}}_{\kappa}, \quad \gamma \in \mathbb{R}^{12 \times 12}, \kappa \in \mathbb{R}^{12}\end{aligned}$$

Reduciendo (2.2.11) se obtiene que

$$\dot{x} = \bar{A}x - \bar{B}kx + \bar{f}_0(x) = (\bar{A} - \bar{B}k) + \gamma\kappa$$

Proponiendo una variable de deslizamiento de la forma

$$V(x) = x^\top P x$$

donde $0 < P \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$. Derivando a lo largo de las trayectorias de (2.2.11) se tiene

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x^\top P \dot{x} + \dot{x}^\top P x \\ &= x^\top P [(\bar{A} - \bar{B}k)x + \gamma\kappa] + [(\bar{A} - \bar{B}k)x + \gamma\kappa]^\top P x \\ &= \begin{bmatrix} x \\ \gamma\kappa \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P(\bar{A} - \bar{B}k) + (\bar{A} - \bar{B}k)^\top P & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \gamma\kappa \end{bmatrix}\end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Sumando y restando $\alpha V(x)$ y $\epsilon_1 \kappa^\top \kappa$ a la ecuación (2.2.12) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \begin{bmatrix} x \\ \gamma \kappa \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P(\bar{A}-\bar{B}k) + (\bar{A}-\bar{B}k)^\top P, P \\ P, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \gamma \kappa \end{bmatrix} + \alpha V(x) - \alpha V(x) \\ &\quad + \epsilon_1 \kappa^\top \kappa - \epsilon_1 \kappa^\top \kappa \\ &= \begin{bmatrix} x \\ \gamma \kappa \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} P(\bar{A}-\bar{B}k) + (\bar{A}-\bar{B}k)^\top P + \alpha P & P \\ P & -\epsilon_1 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \gamma \kappa \end{bmatrix} - \alpha V(x) - \epsilon_1 \kappa^\top \kappa \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Observando de $f_{0,2}(x)$ está acotado y la norma de la función *Signo* es 1.

$$\begin{aligned} \kappa &= \begin{bmatrix} \text{Sign}(\sigma) \\ f_{0,2}(x) \end{bmatrix} \Rightarrow \kappa^\top \kappa = \begin{bmatrix} \text{Sign}^\top(\sigma) & f_{0,2}^\top(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Sign}(\sigma) \\ f_{0,2}(x) \end{bmatrix} \\ &= \text{Sign}^\top(\sigma) \text{Sign}(\sigma) + f_{0,2}^\top(x) f_{0,2}(x) \leq 1 + \delta_2^2 \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Por lo tanto la ecuación (2.2.13) puede ser representada de la siguiente forma al sustituir la ecuación (2.2.14)

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} x \\ \gamma \kappa \end{bmatrix}^\top \underbrace{\begin{bmatrix} P(\bar{A}-\bar{B}k) + (\bar{A}-\bar{B}k)^\top P + \alpha P & P \\ P & -\epsilon_1 I \end{bmatrix}}_{\omega} \begin{bmatrix} x \\ \gamma \kappa \end{bmatrix} - \alpha V(x) + (1 + \delta_2^2)$$

Proponiendo que $\omega < 0$ de la ecuación anterior

$$\dot{V}(x) = -\alpha V(x) + (1 + \delta_2^2)$$

Si $V(x)$ es una función definida positiva y $\dot{V}(x)$ es una función definida negativa, entonces se concluye que el sistema (2.2.11) es estable exponencialmente y asintóticamente, si y sólo si la matriz ω es definida negativa. Por lo que se busca una matriz $\omega < 0$, en la cual se sabe que \bar{A} y \bar{B} son conocidas, la matriz $P > 0$, los valores $\alpha, \epsilon_1 > 0$ y son nuestros parámetros de ajuste.

$$\omega = \begin{bmatrix} P(\bar{A}-\bar{B}k) + (\bar{A}-\bar{B}k)^\top P + \alpha P & P \\ P & -\epsilon_1 I \end{bmatrix} < 0$$

Usando la definición del complemento de Schur

$$\omega = \begin{bmatrix} P(\bar{A}-\bar{B}k) + (\bar{A}-\bar{B}k)^\top P + \alpha P & P \\ P & -\epsilon_1 I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

Tomando en cuenta la siguiente ecuación:

$$S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21} > 0, S_{22} > 0$$

Para el caso de estudio se tiene que el complemento de Schur queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} S_{11} &= P(\bar{A} - \bar{B}k) + (\bar{A} - \bar{B}k)^\top P + \alpha P \\ S_{12} - S_{21} &= P, S_{22} = -\epsilon_1 I \end{aligned}$$

Como el complemento de Schur es para demostrar que una matriz es definida positiva y como en nuestro caso de estudio la matriz que se desea buscar es definida negativa se multiplica por -1 .

$$\begin{aligned} S_{11} &= -[P(\bar{A} - \bar{B}k) + (\bar{A} - \bar{B}k)^\top P + \alpha P] \\ S_{12} = S_{21}^\top &= -P, S_{22} = \epsilon_1 I \\ &- [P(\bar{A} - \bar{B}k) + (\bar{A} - \bar{B}k)^\top P + \alpha P] - \frac{1}{\epsilon_1} PP > 0 \\ &\underbrace{P\left(\bar{B}k - \bar{A} + \frac{1}{2}\alpha I\right) + \left(\bar{B}k - \bar{A} + \frac{1}{2}\alpha I\right)^\top P - \frac{1}{\epsilon_1} P^2}_{R} > 0 \end{aligned}$$

Aplicando una transformación no singular de la forma $TRT^\top > 0$, se tiene que es definida positiva si y sólo si $R > 0$ y además T tiene que ser no singular, por lo anterior se puede suponer que $T = P^{-1}$.

$$\begin{aligned} P^{-1} \left[P\left(\bar{B}k - \bar{A} + \frac{1}{2}\alpha I\right) + \left(\bar{B}k - \bar{A} + \frac{1}{2}\alpha I\right)^\top P - \frac{1}{\epsilon_1} P^2 \right] P^{-1} &> 0 \\ \left(\bar{B}k - \bar{A} + \frac{1}{2}\alpha I\right) P^{-1} + P^{-1} \left(\bar{B}k - \bar{A} + \frac{1}{2}\alpha I\right)^\top - \frac{1}{\epsilon_1} I &> 0 \end{aligned}$$

Proponiendo $\mathbb{X} = P^{-1}$ y $\mathbb{Y} = kP^{-1}$.

$$\bar{B}\mathbb{Y} - \left(\bar{A} + \frac{1}{2}\alpha I\right)\mathbb{X} + \mathbb{Y}^\top \bar{B}^\top - \mathbb{X} \left(\bar{A} + \frac{1}{2}\alpha I\right)^\top > 0$$

Usando SEDUMI o Toolbox de MATLAB para resolver la LMI (Linear Matrix Inequalities). Una vez obtenidos los valores de \mathbb{X} y \mathbb{Y} obtenidos al fijar los valores de α y ϵ , se puede obtener la matriz de ganancias k .

2.3. Conclusión

En este capítulo se presenta de manera detallada el modelo dinámico de un UAV, además las estrategias de control por modos deslizantes asintóticos y dinámicos. Se logró diseñar la superficie de deslizamiento para cada estrategia de control basadas en la representación completa del sistema, es decir, la dinámica no se divide en sub-sistemas para su control.

Capítulo 3

Resultados en simulación numérica

En este capítulo son mostrados los resultados de simulación obtenidos durante la realización del presente trabajo de tesis. Elaborados en la herramienta de MATLAB SIMULINK la cual nos permitió verificar los controles propuestos en el Capítulo 2. En todos los casos, se emplea un tiempo de muestreo de $T=0.001$ ms con referencias constantes en: $x_{ref}=0.1\text{m}$, $y_{ref}=0.2\text{m}$, $z_{ref}=0.3\text{m}$, $\phi=0^\circ$, $\theta=0^\circ$ y $\psi=0^\circ$. Con condiciones iniciales en: $x=0.01\text{cm}$, $\dot{x}=0$, $y=-0.01\text{cm}$, $\dot{y}=0$, $z=0\text{cm}$, $\dot{z}=0$, $\phi=0.01^\circ$, $\dot{\phi}=0^\circ$, $\theta=-0.02^\circ$, $\dot{\theta}=0^\circ$, $\psi=0.02^\circ$, $\dot{\psi}=0^\circ$.

3.1. Control PD clásico para un UAV

Separando la dinámica del UAV en sub-sistemas de una forma que cada sub-sistema sea independiente del resto, se tiene que

$$\sum_z = \begin{cases} x_3 = z \\ x_9 = \dot{z} \end{cases} \quad \sum_\psi = \begin{cases} x_6 = \psi \\ x_{12} = \dot{\psi} \end{cases} \quad \sum_{x-\theta} = \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ x_5 = \theta \\ x_{11} = \dot{\theta} \end{cases} \quad \sum_{y-\phi} = \begin{cases} x_2 = y \\ x_8 = \dot{y} \\ x_4 = \phi \\ x_{10} = \dot{\phi} \end{cases}$$

$$\sum \dot{z} = \begin{cases} \dot{x}_3 = x_9 \\ \dot{x}_9 = \frac{u \cos x_5 \cos x_6}{m} - g \end{cases} \quad \sum \dot{\psi} = \begin{cases} \dot{x}_6 = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = \tau_\psi \end{cases}$$

$$\sum \dot{x} - \dot{\theta} = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_7 \\ \dot{x}_7 = -\frac{u \sin x_5}{m} \\ \dot{x}_5 = x_{11} \\ \dot{x}_{11} = \tau_\theta \end{cases} \quad \sum \dot{y} - \dot{\phi} = \begin{cases} \dot{x}_2 = x_8 \\ \dot{x}_8 = \frac{u \cos x_5 \sin x_6}{m} \\ \dot{x}_4 = x_{10} \\ \dot{x}_{10} = \tau_\phi \end{cases}$$

Cada sub-sistema es propuesto un control PD, de tal manera que aplicando una u al sistema z de la forma $u = \frac{m}{\cos x_5 \cos x_6}(g + u_1)$. Entonces se obtiene un sistema pre-compensado de la forma:

$$\sum \dot{z} = \begin{cases} \dot{x}_3 = x_9 \\ \dot{x}_9 = u_1 \end{cases} \quad \sum \dot{\psi} = \begin{cases} \dot{x}_6 = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = \tau_\psi \end{cases}$$

$$\sum \dot{x} - \dot{\theta} = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_7 \\ \dot{x}_7 = -\frac{\tan x_5}{\cos x_6}(g + u_1) \\ \dot{x}_5 = x_{11} \\ \dot{x}_{11} = \tau_\theta \end{cases} \quad \sum \dot{y} - \dot{\phi} = \begin{cases} \dot{x}_2 = x_8 \\ \dot{x}_8 = \tan x_6(g + u_1) \\ \dot{x}_4 = x_{10} \\ \dot{x}_{10} = \tau_\phi \end{cases}$$

linealizando, los sub-sistemas alrededor del equilibrio y considerando que en los sub-sistemas " $\sum \dot{x} - \dot{\theta}$ " y " $\sum \dot{y} - \dot{\phi}$ " la entrada u_1 es aproximadamente cero, se obtiene lo siguiente:

$$\sum \dot{z} = \begin{cases} \dot{x}_3 = x_9 \\ \dot{x}_9 = u_1 \end{cases} \quad \sum \dot{\psi} = \begin{cases} \dot{x}_6 = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = \tau_\psi \end{cases}$$

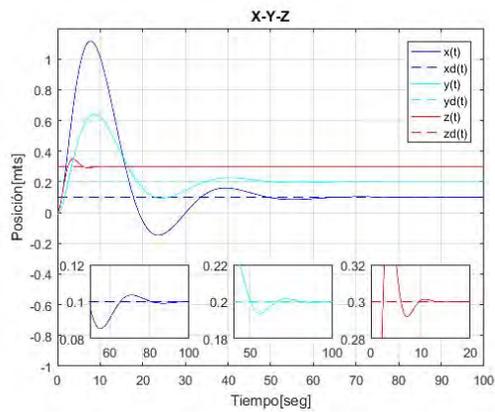
$$\sum \dot{x} - \dot{\theta} = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_7 \\ \dot{x}_7 = -gx_5 \\ \dot{x}_5 = x_{11} \\ \dot{x}_{11} = \tau_\theta \end{cases} \quad \sum \dot{y} - \dot{\phi} = \begin{cases} \dot{x}_2 = x_8 \\ \dot{x}_8 = x_g \\ \dot{x}_4 = x_{10} \\ \dot{x}_{10} = \tau_\phi \end{cases}$$

Por lo tanto, de la ultima representación, se puede aplicar un control PD por sub-sistemas, mediante la técnica de asignación de polos. A continuación se muestran las ganancias implementadas en la simulación numérica.

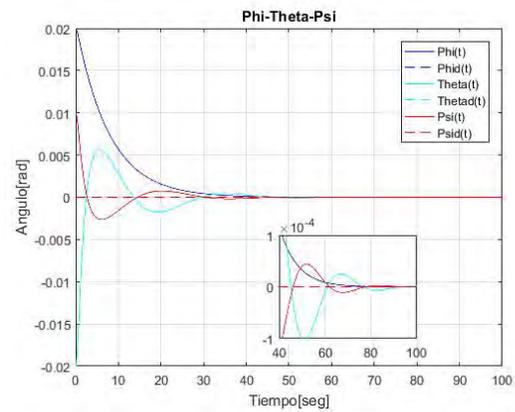
Subsistema	Ganancia Proporcional	Ganancia derivativa
$\sum \dot{z}$	$k_{pz} = 1$	$k_{dz} = 1$
$\sum \dot{\psi}$	$k_{p\psi} = 0.5$	$k_{d\psi} = 0.04$
$\sum \dot{x} - \dot{\theta}$	$k_{px} = 0.075$	$k_{dx} = 0.04$
	$k_{p\theta} = 2$	$k_{d\theta} = 3$
$\sum \dot{y} - \dot{\phi}$	$k_{py} = 0.085$	$k_{dy} = 0.054$
	$k_{p\phi} = 2$	$k_{d\phi} = 3$

Tabla 3.1: Ganancias del control PD

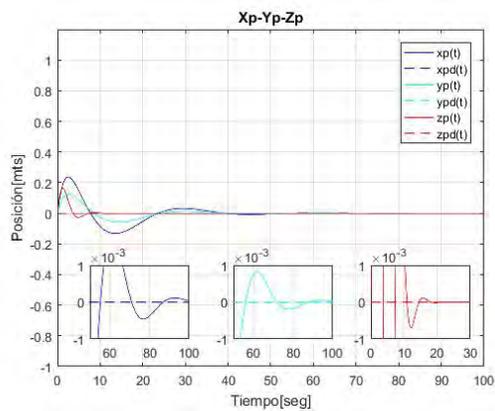
A continuación se muestran en la Figura 3.1 los resultados de la simulación en los cuales se observa que en la Figura 3.1 (a) se muestran los estado $x - y - z$, en la Figura 3.1 (b) se muestra el estado referentes a los ángulos de Euler, en la Figura 3.1 c se muestra el estado referentes a las velocidades de $x - y - z$ y por último se muestra en la Figura 3.1 (d) los estados referentes a las velocidades de los ángulos de Euler.



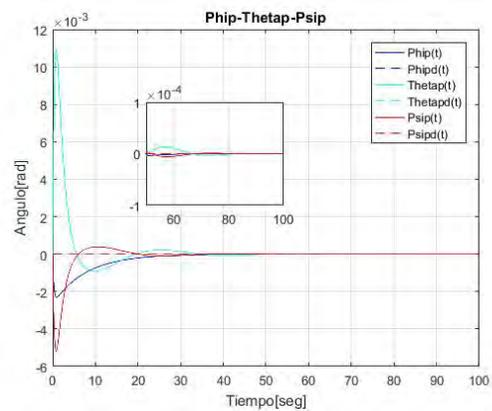
(a) Posiciones $x - y - z$



(b) Posiciones de ángulos de Euler $\phi - \theta - \psi$



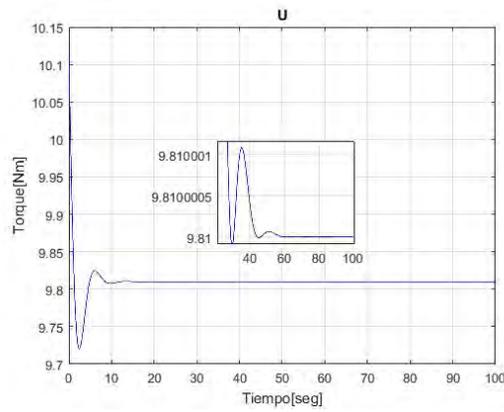
(c) Velocidades de posiciones $\dot{x} - \dot{y} - \dot{z}$



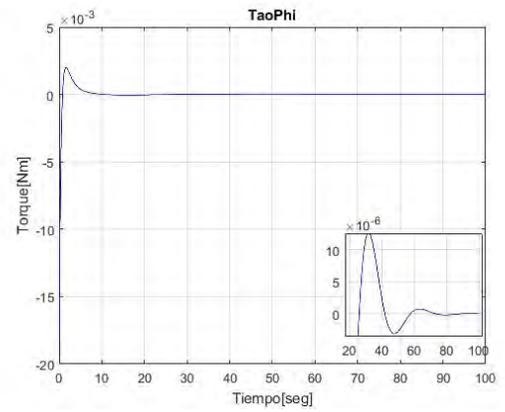
(d) Velocidades de posiciones $\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\psi}$

Figura 3.1: Comportamiento de los estados respecto al tiempo.

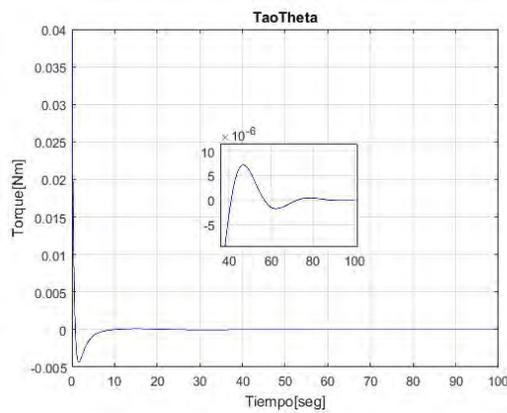
A continuación se muestran en la Figura 3.2 las entradas de control que se aplican.



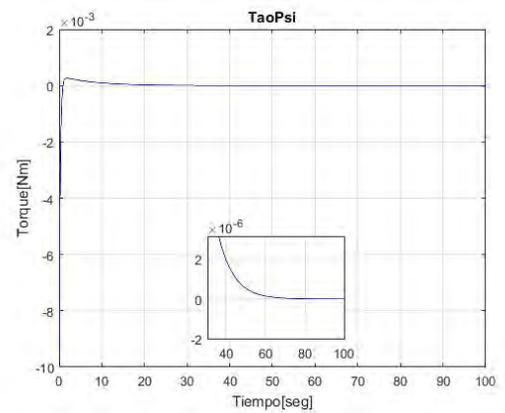
(a) Control U



(b) Control τ_ϕ



(c) Control τ_θ



(d) Control τ_ψ

Figura 3.2: Control PD aplicado al UAV.

3.2. Resultados en simulación del control SMC Asíntóticos

La simulación fue elaborada en SIMULINK que conforma parte de la plataforma MATLAB 2016, utilizando bloques y funciones para la ayuda de las simulaciones, los resultados son mostrados en el siguiente apartado. En el caso de estudio, se proponen las siguientes ganancias.

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad \rho = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

En la Figura 3.3 los resultados de dicha simulación en los cuales se puede observar que en la Figura 3.3 (a) se observan el estado $x - y - z$, en la Figura 3.3 (b) los estados que representan a los ángulos de Euler $\phi - \theta - \psi$.

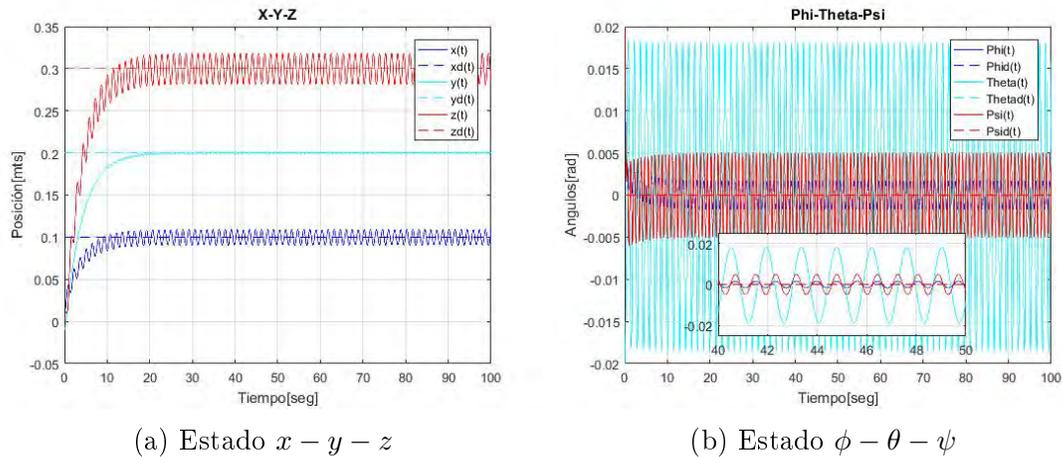
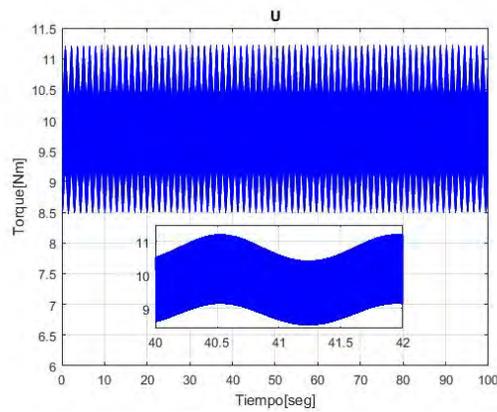


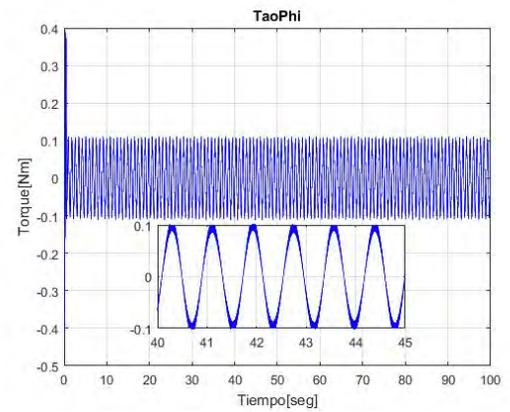
Figura 3.3: Comportamiento de las posiciones y ángulos de Euler a lo largo del tiempo.

Como se puede observar en las gráficas de posiciones hay demasiadas oscilaciones, por ende las velocidades tanto de las posiciones como las velocidades de los ángulos de Euler también presentan gran cantidad de oscilaciones.

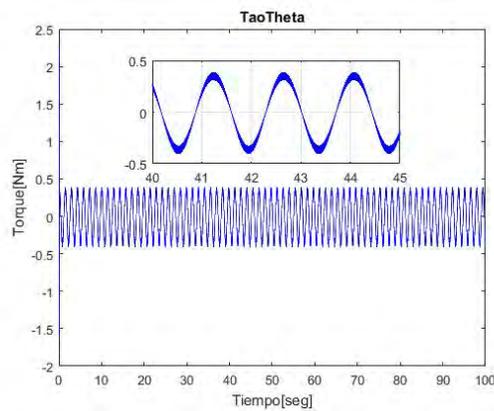
A continuación se muestran en la Figura 3.4 las entradas de control que son aplicados como es común en el SMC existe la propiedad de Chattering, esto más las dinámicas no modeladas del UAV da como resultado que las entradas de control tengan una amplitud variante como se muestran en la Figura 3.4 (a- U), la Figura 3.4 (b- τ_ϕ), la Figura 3.4 (c- τ_θ) y la Figura 3.4 (d- τ_ψ).



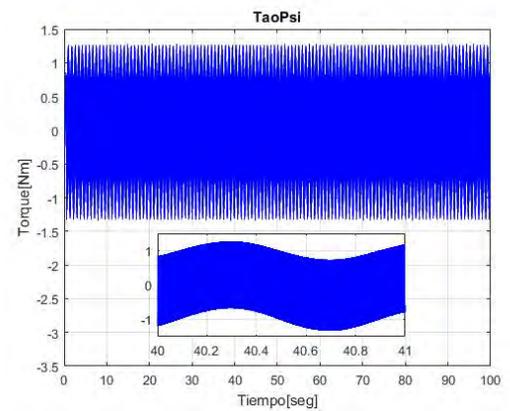
(a) Control U



(b) Control τ_ϕ



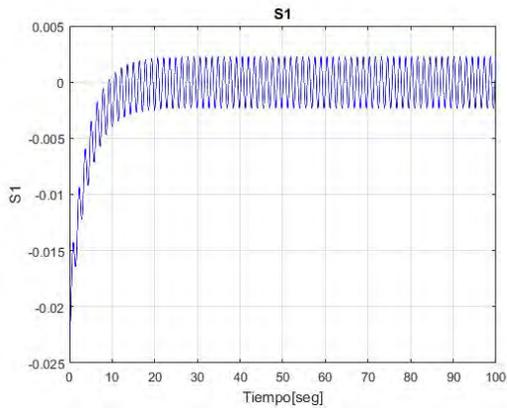
(c) Control τ_θ



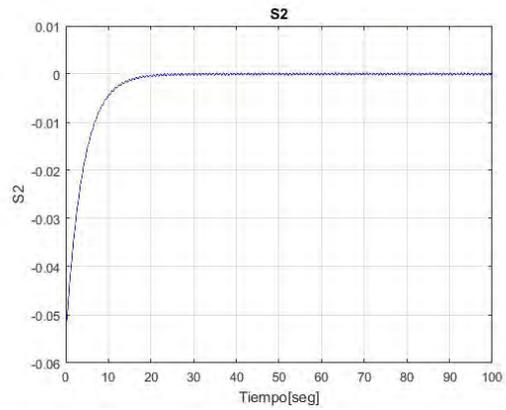
(d) Control τ_ψ

Figura 3.4: Control ASMC aplicado al UAV.

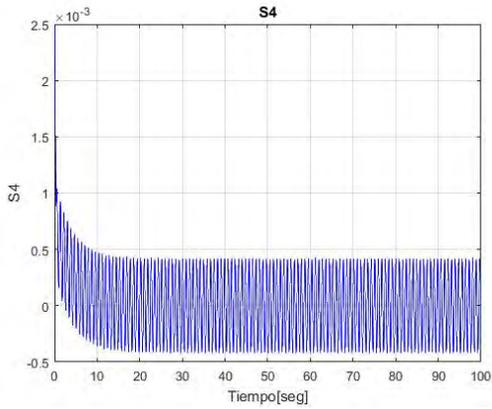
Como se muestran en las Figura 3.5, algunas de las superficies de deslizamiento y se puede observar que todas llegan a la superficie de deslizamiento y se mantienen en ella.



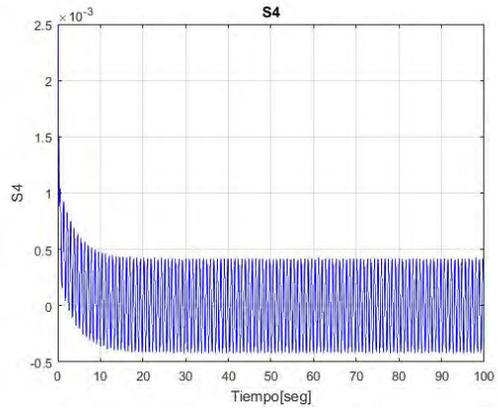
(a) Superficie 1



(b) Superficie 2



(c) Superficie 3



(d) Superficie 4

Figura 3.5: Superficies de Deslizamiento ASMC.

3.3. Resultados en simulación del control SMC dinámico

Se toma en cuenta la representación anterior, como es necesario un control donde se compensé la acción de la gravedad es necesario un control de pre-alimentación de la forma

$$u_1 = [g^T(x)g(x)]^{-1} g^T(x) [-f_2(x)]$$

donde la matriz k fue obtenida con $\alpha = 4$ y $\epsilon_1 = 0.001$ mediante SEDUMI.

El control aplicado finalmente es

$$\dot{u} = -k_1 (A_{11}x_1 + A_{12}x_2) - k_2 (A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + g_2(x)u_2) + u_3$$

Tomando en cuenta que u_2 es la integral de \dot{u}_2 Donde las matrices k_1 , k_2 , A_{11} , A_{12} , A_{21} , $g_2(x)$, ρ y u_3 están dadas de la siguiente forma.

$$k_1 = \begin{bmatrix} -0.0000 & 0.0000 & 1.7928 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.7928 & 0.0000 & 0.0000 \\ -5.1461 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 40.8676 & -0.0000 \\ 0.0000 & 5.1460 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 40.8670 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} -0.0000 & 0.0000 & 1.2673 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 1.2673 & 0.0000 & 0.0000 \\ -5.7666 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 4.7197 & -0.0000 \\ 0.0000 & 5.7665 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 4.7196 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -9.81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9.81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

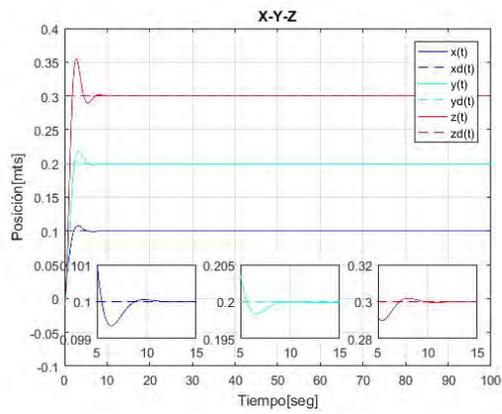
$$A_{22} = 0_{6 \times 6}, \quad A_{11} = 0_{6 \times 6} \quad A_{12} = I_{6 \times 6}$$

$$u_3 = -\rho \text{Sign}(\sigma) \quad \rho = 3.5I_4 \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} \kappa & \bar{0}_{3 \times 3} \\ \bar{0}_3 & \bar{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

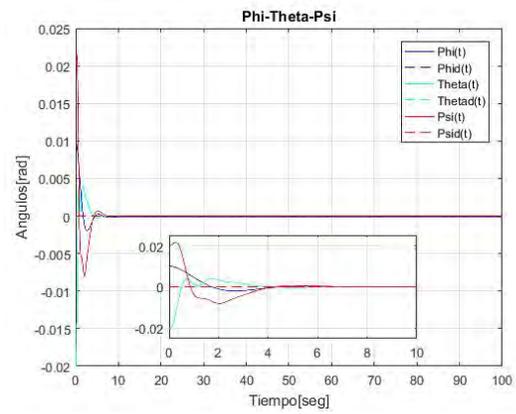
donde $\kappa = \left[\frac{-\sin(x_5)}{m}, \frac{\cos(x_5)\sin(x_6)}{m}, \frac{\cos(x_5)\cos(x_6)}{m} \right]^T$.

En la Figura 3.6 se muestran los resultados de dicha simulación, en la Figura 3.6 (a) se muestran los estados $x - y - z$, en la Figura 3.6 (b) se observa el estado referentes a los ángulos de Euler, en la Figura 3.6 (c) se observa el estado referentes a las velocidades de $x - y - z$ y por último se muestra en la Figura 3.6 (d) los estados referentes a las velocidades de los ángulos de Euler.

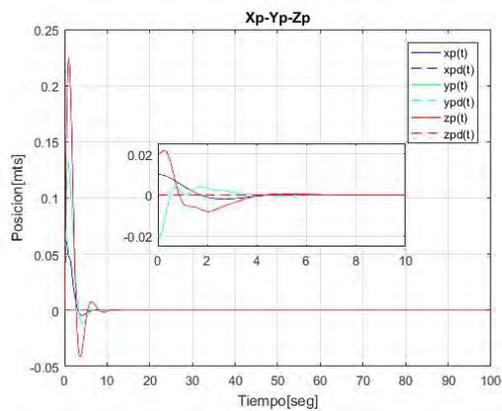
Cada uno de los estados llegan a la referencia deseada.



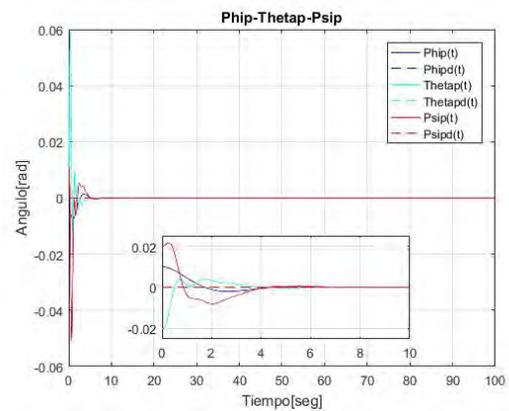
(a) Posiciones $x - y - z$



(b) Ángulos de Euler $\phi - \theta - \psi$



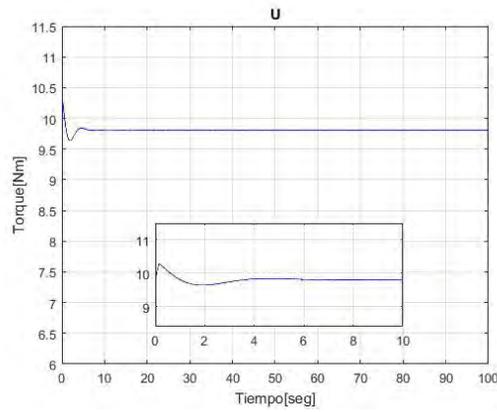
(c) Velocidades $\dot{x} - \dot{y} - \dot{z}$



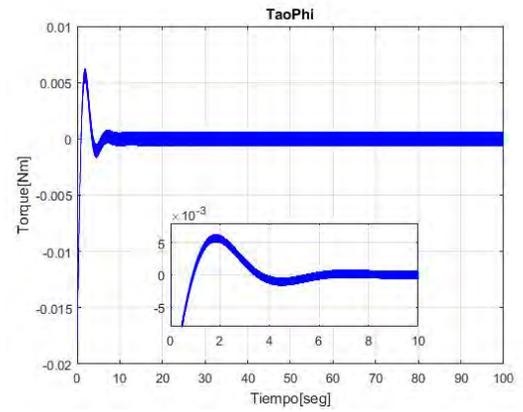
(d) Velocidades ángulos de Euler $\dot{\phi} - \dot{\theta} - \dot{\psi}$

Figura 3.6: Comportamiento de los estados respecto al tiempo.

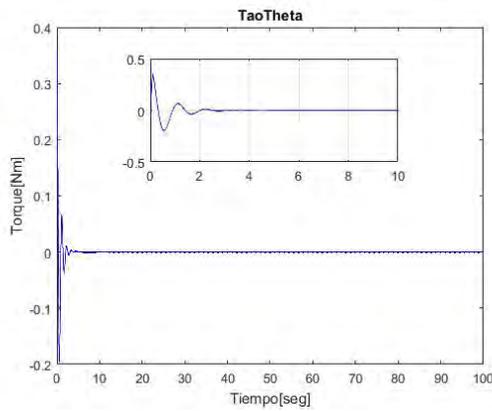
A continuación se muestran en la Figura 3.7 las entradas de control que son aplicados a diferencia de los SMC asintóticos los SMC dinámicos se logra reducir el Chattering como se muestran en la Figura 3.7 *a-U*, la Figura 3.7 *b- τ_ϕ* , la Figura 3.7 *c- τ_θ* y la Figura 3.7 *d- τ_ψ* .



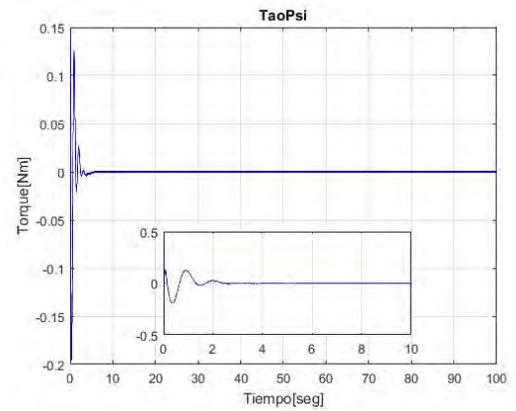
(a) Control U



(b) Control τ_ϕ



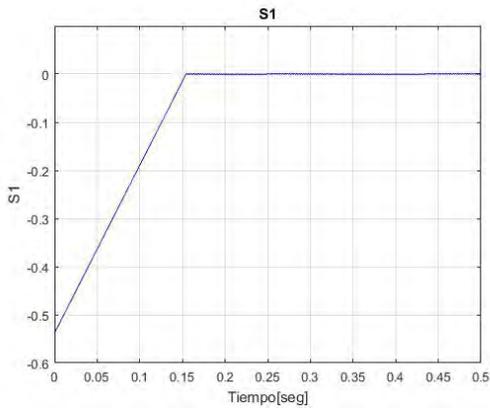
(c) Control τ_θ



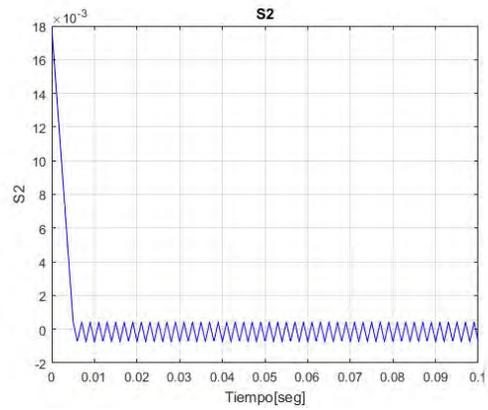
(d) Control τ_ψ

Figura 3.7: Control DSMC aplicado al UAV.

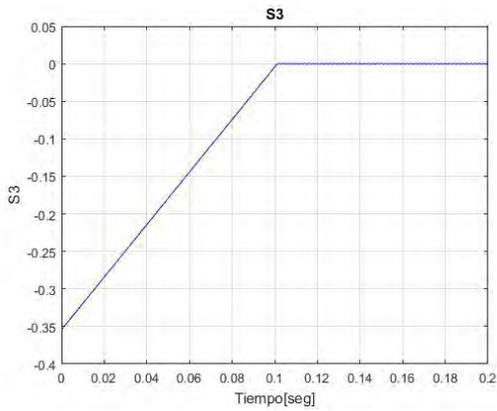
Como se muestra en la Figura 3.8, algunas de las superficies de deslizamiento y se puede observar que todas llegan a la superficie de deslizamiento y se mantienen en ella.



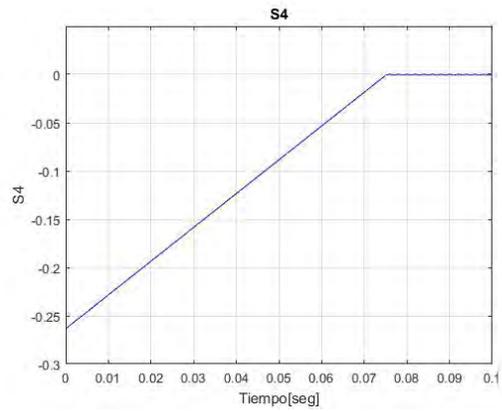
(a) Superficie 1



(b) Superficie 2



(c) Superficie 3

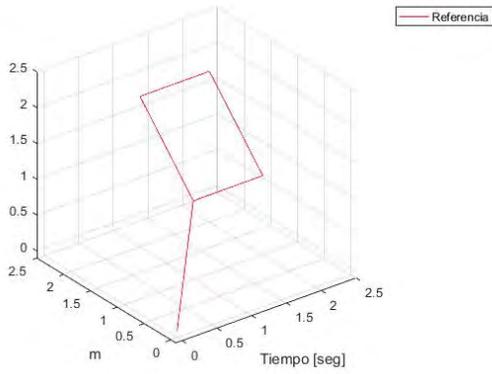


(d) Superficie 4

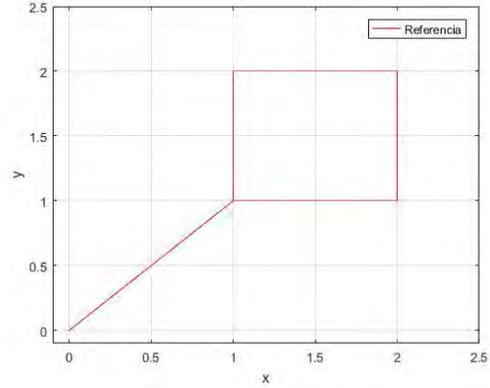
Figura 3.8: Superficies de Deslizamiento DSMC.

3.4. Diseño de trayectoria

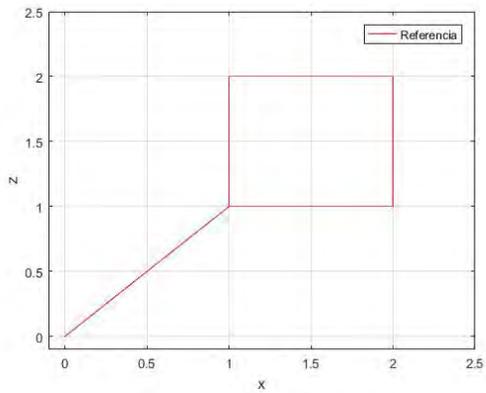
Para el diseño de la trayectoria basado en ecuaciones paramétricas de la recta, la Figura 3.9 se muestra la trayectoria creada a partir de las ecuaciones paramétricas. Donde el objetivo para el diseño de la trayectoria es el dar un perfil de velocidad que en cada intervalo de tiempo inicie y termine con velocidad cero, y de esta manera evitar sobre impulsos generados por el cambio de velocidad. Esto, es diseñado de tal manera que la trayectoria generada represente una aproximación a una función continua en el espacio de tareas.



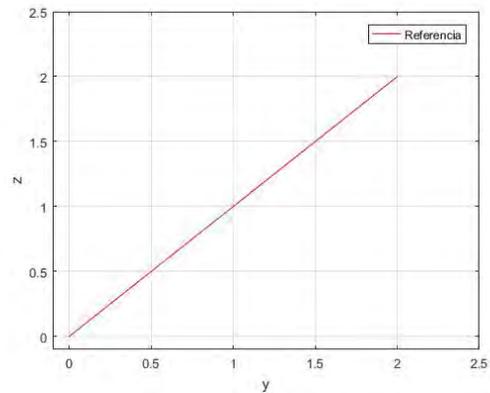
(a) Plano $x - y - z$



(b) Plano $x - y$



(c) Plano $x - z$



(d) Plano $y - z$

Figura 3.9: Trayectoria.

A continuación se detalla el diseño de la trayectoria con un tiempo de $t \in [0, 6\omega\pi]$, $\omega = 1$, $px2 = 1$, $py2 = 1$ y $pz2 = 1$.

En el intervalo de tiempo $t \in [0, \omega\pi]$:

$$px = d1 - d1\cos(t(i)/w)$$

$$py = d2 - d2\cos(t(i)/w)$$

$$pz = d3 - d3\cos(t(i)/w)$$

$$vx = d1\sin(t(i)/w)/w$$

$$vy = d2\sin(t(i)/w)/w$$

$$vz = d3\sin(t(i)/w)/w$$

En el intervalo de tiempo $t \in [\omega\pi, 2\omega\pi]$:

$$px = 3d1 + d1\cos(t(i)/w)$$

$$py = 2d2$$

$$pz = 2d3$$

$$vx = -d1\sin(t(i)/w)/w$$

$$vy = 0$$

$$vz = 0$$

En el intervalo de tiempo $t \in [2\omega\pi, 3\omega\pi]$:

$$px = 4d1$$

$$py = 3d2 - d2\cos(t(i)/w)$$

$$pz = 3d3 - d3\cos(t(i)/w)$$

$$vx = 0$$

$$vy = d2\sin(t(i)/w)/w$$

$$vz = d3\sin(t(i)/w)/w$$

En el intervalo de tiempo $t \in [3\omega\pi, 4\omega\pi]$:

$$px = 3d1 - d1\cos(t(i)/w)$$

$$py = 4d2$$

$$pz = 4d3$$

$$vx = d1\sin(t(i)/w)/w$$

$$vy = 0$$

$$vz = 0$$

En el intervalo de tiempo $t \in [4\omega\pi, 5\omega\pi]$:

$$px = 2d1; py = 3d2 + d2\cos(t(i)/w)$$

$$pz = 3d3 + d3\cos(t(i)/w)$$

$$vx = 0$$

$$vy = -d2\sin(t(i)/w)/w$$

$$vz = -d3\sin(t(i)/w)/w$$

En el intervalo de tiempo $t \in [5\omega\pi, 6\omega\pi]$:

$$px = d1 - d1\cos(t(i)/w)$$

$$py = d2 - d2\cos(t(i)/w)$$

$$pz = d3 - d3\cos(t(i)/w)$$

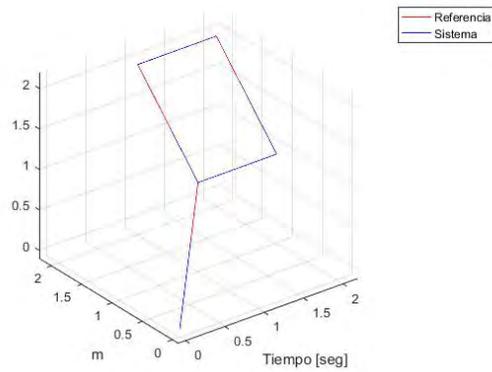
$$vx = d1\sin(t(i)/w)/w$$

$$vy = d2\sin(t(i)/w)/w$$

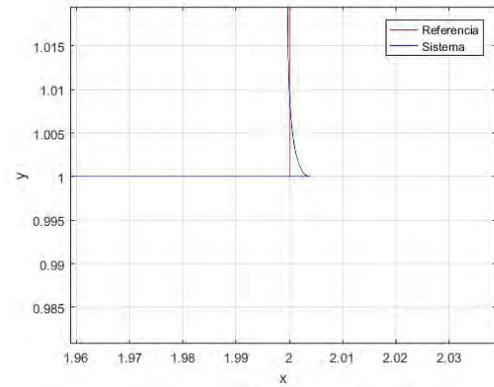
$$vz = d3\sin(t(i)/w)/w$$

donde px , py y pz son las posiciones, vx , vy y vz son las velocidades, $d1 = px^2/2$, $d2 = py^2/2$ y $d3 = pz^2/2$.

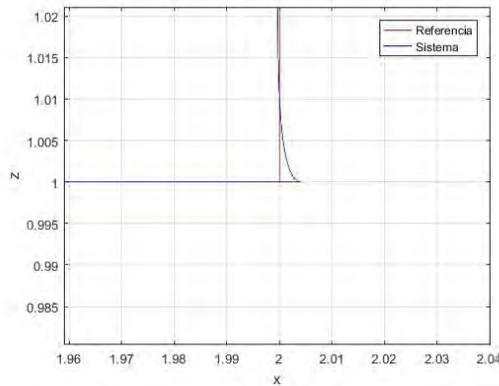
En la Figura 3.10 se observa el seguimiento de la trayectoria utilizando el DSMC.



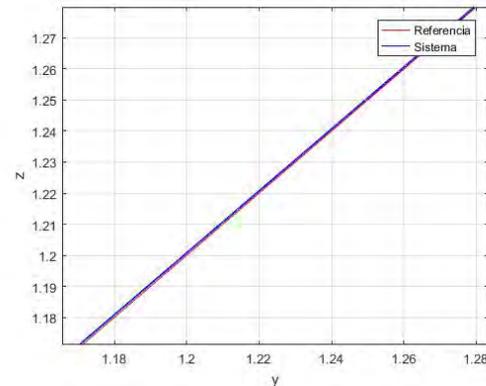
(a) Plano $x - y - z$



(b) Plano $x - y$



(c) Plano $x - z$



(d) Plano $y - z$

Figura 3.10: Seguimiento de trayectoria.

3.5. Análisis comparativo

A continuación, se presenta un análisis comparativo de los controladores expuestos en este proyecto de tesis. Dicho análisis es realizado respecto a vuelo en

hover, cuando el objetivo de control es el llevar al sistema de un estado inicial hacia una referencia, esto con el fin de obtener señales de salida respecto a una señal escalón. La siguiente tabla muestra el desempeño del sistema, en cada una de sus variables de estado, para una comparación de sobre impulso máximo y tiempo de estabilización en el espacio (x, y, z) .

Controlador	Sobre Impulso			Tiempo de estabilización		
	x	y	z	x	y	z
PD clásico	1.117	0.6378	0.3488	55.18	56.2	7.3
SMC Asintótico	-	-	-	29.179	30.462	32.726
SMC Dinámicos	0.1079	0.2184	0.3549	14.015	12.402	11.422

Tabla 3.2: Tabla comparativa para posiciones en el espacio (x, y, z) .

La siguiente tabla muestra el desempeño del sistema el espacio (θ, ϕ, ψ) .

Controlador	Sobre Impulso			Tiempo de estabilización		
	θ	ϕ	ψ	θ	ϕ	ψ
PD clásico	66.35	48.71	51.33	46.08	58.21	61.64
SMC Asintótico	-	8.756	16.943	-	-	-
SMC Dinámicos	14.539	13.571	13.571	16.5	11.5	9.8

Tabla 3.3: Tabla comparativa para posiciones en el espacio (θ, ϕ, ψ) .

En términos generales, se puede apreciar que el algoritmo de control por modos deslizantes dinámicos tiene un mejor desempeño a la respuesta. Adicionalmente, la señal de control para esta estrategia presenta una reducción considerable del efecto Chattering.

3.6. Conclusión

En este capítulo se muestran algunas de las gráficas de simulación ambos controles estabilizan el sistema, una de las ventajas del control por modos deslizantes dinámicos es que converge exponencialmente con una velocidad de convergencia definida por el usuario. En modos deslizantes se garantiza estabilidad exponencial tanto en posición como en velocidad. En el seguimiento de trayectoria se puede notar que el error entre la referencia y el sistema es pequeño.

Capítulo 4

Conclusiones y trabajo futuro

En este capítulo se presentan las conclusiones obtenidas del trabajo de tesis desarrollado, así como el trabajo futuro a realizar.

4.1. Conclusiones

- Al usar ASMC no se puede garantizar estabilidad exponencial.
- El diseño propuesto por DSMC garantiza estabilidad últimamente acotada.
- En comparación del PD clásico, el DSMC tiene un mejor desempeño.
- El efecto chattering es reducido considerablemente con DSMC con respecto a ASMC.

4.2. Trabajos futuros

- Implementar los controles diseñados por modos deslizantes y el PD clásico en dispositivo físico.
- Implementar en dispositivo físico el seguimiento de trayectoria.
- Desarrollar un algoritmo para la matriz E de ASMC.

Bibliografía

- [1] Jean-Jacques E. Slotie and Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [2] Chellaboina V. Haddad W. *Nonlinear dynamical systems and control: A lyapunov-based approach*. 2008.
- [3] Stoff J. *The historic Aircraft and Spacecraft in the Cradle of Aviation*. Dover Publication, 2001.
- [4] Bouadi M. Bouchoucha and Tadjine M. Modelling and stabilizing control laws design based on backstepping for an uav type quadrotor. *IFAC Symposium on IAV*, 2007.
- [5] Melero Cazorla D. Modelado dinámico y diseño de estrategia de control mediante estimadores para vuelo automático de un quadrotor. Caso de estudio: Control de UAV. Tesis de maestría, Universistas Almerienses, 2012.
- [6] Escamilla Núñez R. Diseño, Construcción, Instrumentación y Control de un Vehículo Aéreo No Tripulado. Caso de estudio: Control de UAV. Tesis de licenciatura, Escuela Superior de ingeniería Macánica y Eléctrica Unidad Profesional Adolfo López Mateos, Instituto Politecnico Nacional, 2010.
- [7] Bouabdallah S., Noth A. , Siegwart R. Pid vs lq control techniques applied to an indoor micro quadrotor. *Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 2451–2456, 2010.

-
- [8] The Breguet Gyroplane,. <https://www.flightglobal.com>, 1935. Consulta: 2017-06-29.
- [9] Mokhtari A., Benallegue A. Dynamic feedback controller of euler angles and wind parameters estimation for a quadrotor unmanned aerial vehicle. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2359–2366, 2004.
- [10] Bouabdallah S., Noth A., Siegwart, R. Pid vs lq control techniques applied to an indoor micro quadrotor. *IEEE Xplore International Conference on Intelligent Robots ans Systems*, pages 2451–2456, 2010.
- [11] Gonzales I , Salazar S. and Escareno J. Real-time altitude robust controller for a quadrotor aircraft using sliding-mode control technique. *International Conference on Unmanned Aircraft Systems*, pages 650–659, 2013.
- [12] Perez Pedraza A. and Ruiz de los Santos M. A. *Monitoreo y control en tiempo real de un vehiculo aereo no tripulado*. PhD thesis, 2012.
- [13] Daewon L. ,Jim Kim H. and Shankar S. Feedback linearization vs adaptive sliding mode control for a quadrotor helicopter. *Journal of Control Automation and Systems*, pages 685–699, 2009.
- [14] Mandani T. and Benallegue A. Backstepping control for a quadrator helicopter. *International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 3255–3260, 2006.
- [15] Abhijit D. ,Lewis F. and Subbarao K. Backstepping aproach for controlling a quadrator using lagrange form dynamics. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, pages 127–151, 2009.
- [16] Melchiori R. J., Kemerer A. C., and Albarenque S. Uso de un uav para el diagnóstico del estado de nutrición nitrogenada en maíz. *Curso Internacional de Agricultura de Precisión. 13. 2014 09 24-25, 24 y 25 de septiembre 2014. Manfredi, Córdoba. AR.*, 2014.

-
- [17] Moltoni A., Moltoni L., Clemares N., and Gorandi E. Consideraciones tecnológicas y análisis económicas del uso de vehículos aéreos no tripulados para la generación de mapas de prescripción de malezas. *Investigación y desarrollo en electrónica. innovaciones para el sector agroindustrial*, 1(1), 2015.
- [18] Tellez C. and Asgard E. Determinación de estructura para ala de uav dedicada a monitoreo de oleoductos y exploración geológica. 2015.
- [19] Das A., Lewis F., and Subbarao K. Backstepping approach for controlling a quadrotor using lagrange form dynamics. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 56(1-2):127–151, 2009.
- [20] Espinoza T., Dzul A., and Parada R. Backstepping con modos deslizantes aplicado al control de seguimiento de un uav. *Congreso Nacional de Control Automático*, 2013.
- [21] Flórez R., Villa M., Rojas C., and Toledo F. Control y estabilización de altura de un quadrotor por modos deslizantes. *Memorias*, 2015.
- [22] Aguilera R., Ortiz J., and Ortiz M. Sliding mode control applied to a mini-aircraft pitch position model. 2014.
- [23] S Mohamed, H Yang and M Moghavvemi. Sliding mode controller design for a flying quadrotor with simplified action planner, in *iccas-sise*. pages 1279–1283, 2009.
- [24] Bouadi H., Cunha S., Drouin A., and F. Mora-Camino. Adaptive sliding mode control for quadrotor attitude stabilization and altitude tracking. In *Computational Intelligence and Informatics (CINTI), 2011 IEEE 12th International Symposium on*, pages 449–455. IEEE, 2011.
- [25] V Sanchez A Ramirez, H Parra and O Gracia. Integral skidding mode backstepping control of quadrotor for robust position tracking. in *unmanned aircraft system, international conference*. pages 423–432, 2013.

-
- [26] H Merheb, A. Noura and F Bateman. Passive fault tolerant control of quadrotor uav using regular and cascaded sliding mode control, in control and fault-tolerant systems, conference on. pages 330–335, 2013.
- [27] J Xion and Zheng. *Position and attitude tracking control for a quadrotor UAV*. ISA transactions, 2014.
- [28] Castillo P. , Lonzano R. and Dzul A. *Modelling and Control of Mini-Flying Machines*. Academic press, page = 84-85.
- [29] De paula A. , De paula J. *Química Física*. panamericana, 2002.
- [30] Castillo P. Garcia P. Lozano R. Albertos P. Modelado y estabilización de un helicóptero con cuatro rotores. pages 41–57, 2007.
- [31] Muñoz C. Desarrollo de un sistema de tiempo real para el control de un mini-helicoptero de cuatro-rotores en vuelo libre. pages 650–659, 2010.